



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

UNIVERSIDAD DE OVIEDO: FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO FÍSICA

Agujeros de Gusano en la Teoría de la Relatividad General

Autora:

Nuria Fernández Rodríguez

Tutor:

Pablo Soler Gomis

6 de Junio de 2025

Índice

1. Introducción	4
2. Geometría	5
2.1. Variedades	6
2.1.1. Espacios Tangentes	9
2.1.2. Campos vectoriales	12
2.1.3. Tensores y campos tensoriales	13
2.1.4. La métrica	15
2.2. Curvatura	20
2.2.1. Transporte paralelo y conexión	21
2.2.2. Tensor de curvatura de Riemann	24
2.2.3. Geodésicas	27
2.2.4. Isometrías y vectores Killing	28
2.2.5. Desviación geodésica	30
3. Gravitación	32
3.1. Ecuaciones de campo	32
3.2. Condiciones de energía	34
4. Agujeros Negros	37
4.1. La métrica general estática e isotrópica	37
4.2. El agujero negro de Schwarzschild	39
4.3. Geodésicas de Schwarzschild	42
5. Agujeros de Gusano	50
5.1. Solución de Einstein-Rosen	50
5.2. Evaluación de la traversabilidad en el puente de Einstein-Rosen	51
5.3. Soluciones de Morrison y Thorne	54
5.3.1. Propiedades necesarias de los agujeros de gusano atravesables.	56
5.3.2. Forma de la métrica	57
5.3.3. Ecuaciones de estructura para el agujero de gusano	58

5.3.4. Geometría espacial del Agujero de Gusano	62
5.3.5. Fuerzas de marea y tiempo para atravesar el agujero de gusano	65
5.3.6. Energía-momento que genera la curvatura del agujero de gusano	69
5.4. Una solución con una restricción radial de la energía-momento.	73
6. Conclusiones	77
A. Formulación Lagrangiana	78

1. Introducción

En este trabajo se aborda el estudio de los agujeros de gusano. Un agujero de gusano es una solución teórica de las ecuaciones de la relatividad general que describe un “túnel” o “puente” que conecta dos regiones distintas del espacio-tiempo. Vamos a verlo de forma gráfica para entenderlo de forma intuitiva. Imaginemos que queremos ir desde un punto **1** del Universo hasta un punto **2**, que se encuentran muy alejados, a distancia **(a)**, como se representa en la Figura. Si existiera un túnel que comunicara esos dos puntos por un camino alternativo **(b)** en el tejido del espacio-tiempo, podríamos hacer el viaje de manera más rápida, sería como un “atajo” a la trayectoria convencional. Este concepto plantea preguntas fascinantes sobre la naturaleza del viaje, el tiempo y la estructura del cosmos.

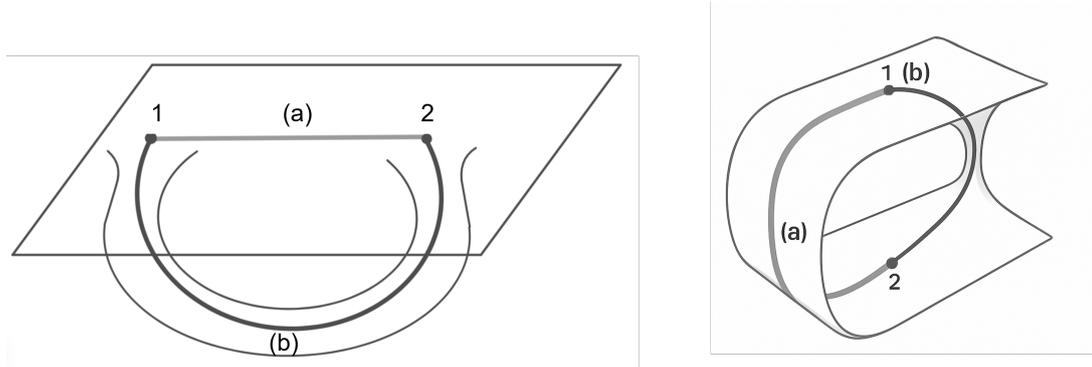


Figura 1: Representación gráfica de un agujero de gusano y cómo hace de túnel entre dos puntos.

Lo que vamos a hacer en este trabajo, es profundizar en el estudio de estos fenómenos y ver cómo han aparecido como resultado de ciertas aplicaciones de la Relatividad General. Empezaremos por explorar los conceptos fundamentales de esta teoría, lo que se traduce en entender la geometría, que es la base sobre la que se sustenta todo. Describiremos así cómo se codifica la estructura y curvatura del espacio-tiempo, y cómo se definen los movimientos de los objetos que habitan en él.

Seguidamente, pasaremos a hablar de cómo se conecta toda esta geometría con la materia que existe en el Universo, es decir, cómo se conectan las Matemáticas que hay detrás con la Física. Introduciremos aquí el concepto de gravitación dentro de este marco.

Posteriormente, describiremos brevemente el concepto previo a los agujeros de gusano: los agujeros negros. Es muy importante entender cómo surgen y las características que poseen, ya que son la antesala al descubrimiento de nuestro objeto de estudio.

Ya con todo esto estaremos preparados para meternos “de lleno” en los agujeros de gusano. Para ello, seguiremos un orden cronológico: empezaremos describiendo las soluciones que plantearon Einstein y Rosen en 1935, y seguiremos explicando las soluciones más importantes, como las del famoso artículo de Morrison y Thorne de 1988, que plantea la posibilidad de agujeros de gusano atravesables por seres humanos y estudia las características que deberían poseer para que fuera posible, entre ellas la necesidad de materia exótica, un concepto que abordaremos más adelante.

2. Geometría

Para entender los agujeros de gusano hay que entender el lenguaje en el que están descritos: la Teoría de la Relatividad General. Formulada por Albert Einstein en 1915, surge como una extensión de la relatividad especial para incorporar los efectos de la gravitación. Su punto de partida es el **principio de equivalencia**. A grandes rasgos, afirma que los efectos de la gravedad son localmente indistinguibles de los efectos de una aceleración. Este principio, aparentemente simple, encierra una de las ideas más revolucionarias en la historia de la Física: que la gravedad no es una fuerza en el sentido clásico, sino una manifestación de la geometría del espacio-tiempo.

La consecuencia más importante es que no existe un campo gravitatorio en sentido absoluto, al menos localmente; sino que lo que percibimos como gravedad es en realidad el efecto de encontrarnos en un sistema de referencia no inercial, es decir, acelerado. Si la gravedad puede anularse localmente mediante una aceleración adecuada, entonces debe tratarse de un efecto de la geometría del marco de referencia, y no de una interacción clásica entre cuerpos. Este principio abrió el camino hacia una formulación geométrica de la gravitación, en la que las nociones de espacio y tiempo absoluto desaparecen, sustituidas por una estructura dinámica: el **espacio-tiempo**.

Entonces, para entender por completo la gravitación, necesitamos unas herramientas sofisticadas que describan el espacio curvo y, más adelante, el espacio-tiempo curvo. Esto es el objeto de estudio de la *geometría diferencial*, una importante rama de las Matemáticas. Una

vez nos equipemos con estas herramientas, pasaremos a estudiar la gravitación como tal. El propósito principal de esta sección es entender qué tipo de objetos pueden vivir en espacios curvos, y las relaciones entre ellos.

2.1. Variedades

Como ya no podemos usar un solo sistema de coordenadas cartesianas global para describir todo el universo, empezamos entonces introduciendo el concepto de **variedad**. Daremos una definición formal más adelante, pero conceptualmente podemos pensar en una variedad como un espacio curvo n -dimensional. Si hacemos zoom en algún parche, la variedad se “parecerá” a \mathbb{R}^n , pero si miramos globalmente, la variedad tendrá una cierta curvatura. Es decir, intuitivamente, una variedad es un espacio que parece plano si lo miras lo suficientemente de cerca, pero puede ser curvo en una escala más grande. Vamos a trabajar con variedades que son *suaves* (es decir, diferenciables tantas veces como sea necesario), que nos van a permitir hacer cálculos con derivadas, lo cual es imprescindible para definir conceptos como trayectorias, velocidades, aceleraciones o curvatura.

Para describir bien este concepto matemáticamente necesitamos saber lo que es un **espacio topológico**, que básicamente es un espacio en el que cada punto se puede ver en la vecindad de otros puntos, de manera que nos permite definir conceptos como la continuidad y la convergencia. Las variedades van a ser un tipo de espacio topológico, por eso queremos definirlo.

Definición 2.1 (Espacio topológico). Un **espacio topológico** M es un conjunto de puntos dotado con una topología \mathcal{T} . Esto último es una colección de subconjuntos abiertos $\{\mathcal{O}_\alpha \subset M\}$ que cumplen:

1. Tanto el conjunto M como el conjunto vacío \emptyset son subconjuntos abiertos, es decir, $M \in \mathcal{T}$ y $\emptyset \in \mathcal{T}$.
2. La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto. Es decir, si $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$.
3. La unión de un número arbitrario (que puede ser infinito) de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto. Es decir, si $\mathcal{O}_\gamma \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{O}_\gamma \in \mathcal{T}$.

Dado un punto $p \in M$, decimos que $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ es un **entorno de p** si $p \in \mathcal{O}$. Lo que vamos a querer es que dados dos puntos distintos, exista un entorno que contenga a uno pero no al otro. Los espacios topológicos que cumplen con este criterio se llaman *Hausdorff*¹ o T_2 .

Además de saber qué son los espacios topológicos, nos interesa también saber qué tipo de relaciones existen entre ellos. Es aquí donde entra en juego el concepto de **homeomorfismo**, que intuitivamente es una manera de decir que dos objetos tienen la misma forma “topológica”, aunque estén estirados, doblados o deformados (mientras no se rompan ni se peguen partes nuevas). Vamos a dar su definición formal:

Definición 2.2 (Homeomorfismo). Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos (M, \mathcal{T}) y $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{T}})$ es una aplicación o *mapa* $f : M \rightarrow \tilde{M}$ que cumple:

1. Es inyectiva: sean $p, q \in M$, si $p \neq q$ entonces $f(p) \neq f(q)$.
2. Es suprayectiva: $f(M) = \tilde{M}$, que significa que para cada $\tilde{p} \in \tilde{M}$ existe un $p \in M$ tal que $f(p) = \tilde{p}$.
3. Es bicontinua, es decir, tanto la función como su inversa son continuas. Topológicamente hablando, significa que para todo $\tilde{\mathcal{O}} \in \tilde{\mathcal{T}}$, $f^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{T}$.

Ahora vamos a ver el concepto que relaciona a los subconjuntos abiertos de un espacio topológico con el plano n -dimensional \mathbb{R}^n : la **carta**, que va a ser la clave para describir las variedades más adelante.

Definición 2.3 (Carta o sistema coordenado). Dado un subconjunto \mathcal{O} de un conjunto M , junto con un mapa inyectivo:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longrightarrow x_p^\mu \text{ con } \mu = 1, \dots, n \end{aligned}$$

de tal forma que la imagen $\phi(\mathcal{O})$ es un abierto de \mathbb{R}^n , decimos que la pareja (\mathcal{O}, ϕ) es una **carta o sistema coordenado**. Además, a las x_p^μ las llamamos **coordenadas del punto p** .

Y ahora si extendemos esta definición a todos los puntos del espacio topológico M tenemos lo que es un **atlas**:

¹Un **espacio Hausdorff** M es un espacio topológico en el que se cumple que para cualquier par de puntos $p, q \in M$ tales que $p \neq q$, existen $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$ tales que $p \in \mathcal{O}_1$ y $q \in \mathcal{O}_2$ con $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

Definición 2.4 (Atlas C^∞). Un **atlas** consiste en una colección de cartas $\{(\mathcal{O}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ satisfaciendo dos condiciones:

1. La unión de todos los subconjuntos cubre M : $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha = M$.
2. Las cartas se pueden “pegar” de forma regular para cubrir todo el conjunto inicial M : si $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$, entonces $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) : \phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)$ es de clase C^∞ . Se ilustra en la Figura 2.

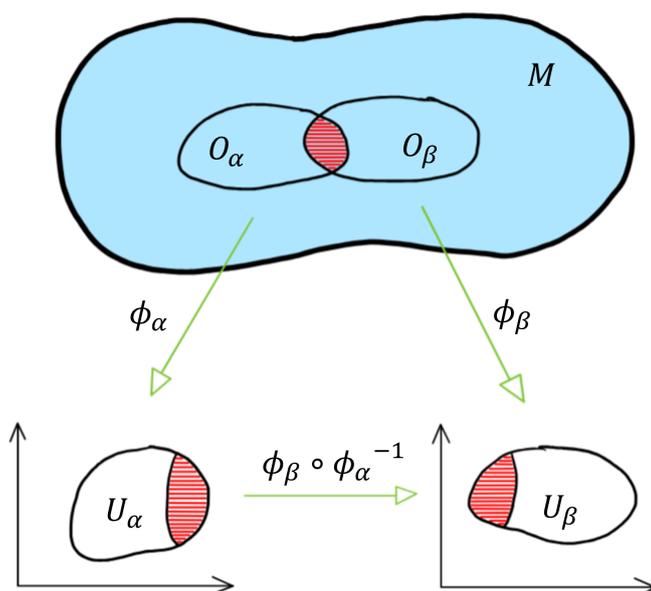


Figura 2: Cartas en una variedad.

Ya estamos en condiciones de definir lo que es una variedad diferencial n -dimensional:

Definición 2.5 (Variedad Diferencial). Una **variedad diferencial n -dimensional** es un espacio topológico de Hausdorff M , junto con un atlas maximal, es decir, que contiene todas las cartas posibles, y tal que M es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n . Esto significa que para cada $p \in M$, hay un conjunto abierto \mathcal{O} tal que $p \in \mathcal{O}$ y un homeomorfismo $\phi : \mathcal{O} \rightarrow U$ con U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Si un punto p pertenece a más de un conjunto \mathcal{O} puede tener varias coordenadas diferentes asociadas a él (como cuando en el espacio Euclídeo podemos usar coordenadas cartesianas o polares). Los mapas $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})$ proyectan el punto en diferentes sistemas coordenados y se

llaman **funciones de transición**, que son funciones diferenciables C^∞ .

Una vez introducido el concepto de variedad, vamos a ver los elementos que pueden “vivir” en dicho espacio, tales como las curvas y los vectores tangentes a ellas. Es aquí donde entra en juego el concepto de **espacio tangente**.

2.1.1. Espacios Tangentes

Sabemos diferenciar funciones en \mathbb{R}^n y, por las propiedades de las variedades, podemos traducir estos conocimientos a propiedades de funciones definidas sobre estas variedades, utilizando las cartas o sistemas coordenados que hemos descrito. Por ejemplo, decimos que una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es suave si el mapa $f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es suave para todas las cartas ϕ . De igual manera, decimos que un mapa $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades M y N (que podrían tener distintas dimensiones) es suave si el mapa $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow V$ es suave para todas las cartas $\phi : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^{\dim(M)}$ y $\varphi : N \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{\dim(N)}$. Es decir, nos ayudamos de las cartas en todo momento.

Vamos a ver cómo diferenciar una función en un punto p . Para ello, introducimos una carta $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ en un entorno de p . Podemos construir entonces el mapa $f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$. Así, podemos diferenciar funciones en la variedad M de esta manera:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right|_p := \left. \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} \right|_{\phi(p)} \quad (2.1)$$

Claramente esto depende de la elección de la carta ϕ y las coordenadas x^μ .

Vamos a ver un ejemplo de objeto que puede “vivir” en una variedad, los vectores tangentes. En espacios planos, estábamos acostumbrados a utilizar vectores para describir la posición de una partícula, su velocidad, etc. Para hallar la velocidad, había que derivar la posición ($\vec{v} = \dot{\vec{x}}$), que no dejaba de ser la tangente a la curva que trazaba la partícula. Pero en espacios curvos no podemos representar las posiciones por vectores, por lo que derivar como tal no es una opción. Aquí es donde entran en juego los vectores tangentes: nos dicen cómo las cosas cambian en una dirección dada. Veamos cómo surgen.

Consideramos una curva suave en M que pasa por el punto p . Esto es un mapa $\sigma : I \rightarrow M$, con I un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Parametrizaremos la curva como $\sigma(t)$ de manera que $\sigma(0) = p \in M$. Dada una carta ϕ , podemos trasladar esta curva al plano \mathbb{R} mediante la

aplicación $\phi \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La curva queda entonces parametrizada por las coordenadas $x^\mu(t)$, como vemos en la Figura 3.

Tomamos una función $f \in C^\infty(M)$ sobre la variedad, de manera que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Queremos estudiar el ritmo de cambio de esta f a lo largo de la curva σ y evaluarlo en el punto $p = \sigma(0)$. Como no podemos derivar en la variedad debido a que es un espacio curvo, tenemos que ayudarnos de la regla de la cadena y derivar en el plano \mathbb{R}^n , usando que:

$$\begin{aligned} f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x^\mu &\rightarrow f(x^\mu) \end{aligned} \tag{2.2}$$

siendo $x^\mu(t)$ la parametrización de la curva en el plano \mathbb{R}^n (ver Figura 3). De esta manera, tenemos:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_p = \left. \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial f(x^\mu)}{\partial x^\mu} \right|_p \tag{2.3}$$

De aquí sacamos el vector tangente, X^μ , que viene dado por:

$$X^\mu = \left. \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Además, las coordenadas del vector tangente en el punto p serán:

$$X_p = \left. \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p$$

donde $\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p$ es el objeto visto en la ecuación (2.1), que cumple los requisitos para ser un vector tangente, como veremos en la definición formal.

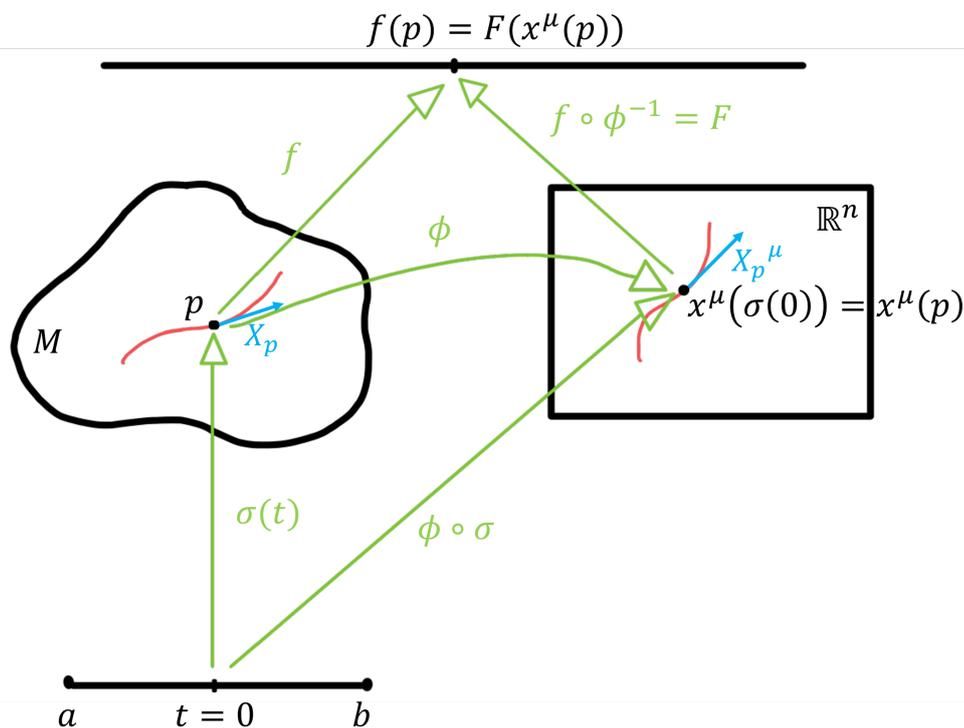


Figura 3: Representación de las funciones que actúan en la variedad.

Una vez entendido cómo funciona, podemos dar una definición formal del vector tangente:

Definición 2.6 (Vector tangente). Sea M una variedad, un **vector tangente** X_p es un objeto que obtiene la diferencial a una función en el punto $p \in M$. Siendo $C^\infty(M)$ el conjunto de todas las funciones suaves, tenemos que $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ y satisface:

1. Linealidad: $X_p(f + g) = X_p(f) + X_p(g)$ para todo $f, g \in C^\infty(M)$.
2. $X_p(f) = 0$ cuando f es la función constante.
3. Regla de la cadena: $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p)$ para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Esto nos sirve para la definición de espacio tangente:

Teorema 2.1 (Espacio tangente). El conjunto de todos los vectores tangentes al punto p forma un espacio vectorial n -dimensional llamado **espacio tangente** $T_p(M)$. Los vectores tangentes $\partial_\mu|_p$ forman una base de $T_p(M)$, es decir, podemos escribir cualquier vector tangente como:

$$X_p = X^\mu \partial_\mu|_p \tag{2.4}$$

con $X^\mu = X_p(x^\mu)$ las componentes del vector tangente en esta base.

Cabe destacar que para realizar cambios de coordenadas, aplicamos la Regla de la Cadena de la siguiente manera:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p = \left. \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{\phi(p)} \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \right|_p \quad (2.5)$$

donde las coordenadas \tilde{x}^μ pertenecen a otra carta $\tilde{\phi}$ en el entorno p . De igual forma, podemos ver este cambio sobre las componentes del vector tangente:

$$\tilde{X}^\nu = X^\mu \left. \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{\phi(p)} \quad (2.6)$$

Ahora que tenemos el concepto de vector tangente a un punto, vamos a extrapolarlo a todos los puntos de la variedad, formando lo que se conoce como **campo vectorial**.

2.1.2. Campos vectoriales

Un **campo vectorial** X consiste en la asignación de un vector tangente X_p a cada punto $p \in M$. Esto es útil porque si tenemos una función en la variedad, podemos aplicarle el campo vectorial y nos devuelve una función que es la diferenciación de la primera en la dirección del vector. Formalmente hablando, es un mapa $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$. La función $X(f)$ se define de la siguiente manera:

$$(X(f))(p) = X_p(f)$$

El espacio de todos los campos vectoriales de M se denota $\mathcal{X}(M)$. Dada una base coordenada, podemos escribir cualquier campo vectorial como:

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.7)$$

donde los X^μ son ahora funciones suaves en M . Para ser estrictos, la expresión (2.7) sólo define un campo de vectores en el conjunto abierto $\mathcal{O} \subset M$ cubierto por la carta, en vez de en toda la variedad. Tendremos que “juntarlo” con otras cartas para cubrir todo M , utilizando todas las funciones de transición.

El Bracket de Lie

Dados dos campos vectoriales $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, no podemos multiplicarlos para obtener otro campo vectorial, debido a que la regla de la cadena no se cumple:

$$XY(fg) = X(fY(g) + Y(f)g) = X(f)Y(g) + fXY(g) + gXY(f) + X(g)Y(f) \neq fXY(g) + gXY(f).$$

No obstante, podemos construir un nuevo campo vectorial a partir de X y de Y mediante un operador llamado *conmutador*, que actúa sobre funciones f como:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Esto se conoce también como el **bracket de Lie**, y si lo evaluamos en un sistema de coordenadas, obtenemos:

$$[X, Y](f) = \left(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \quad (2.8)$$

para toda $f \in C^\infty(M)$, por lo que vemos que $[X, Y]$ es un vector que en la case de coordenadas se puede escribir:

$$[X, Y] = \left(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (2.9)$$

El bracket de Lie tiene estas propiedades:

- Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$
- Linealidad: $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$
- Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

Esto asegura que todo el conjunto de campos vectoriales en una variedad M tiene la estructura matemática de una álgebra de Lie.

Ahora que tenemos bien definidos los vectores y los campos vectoriales, nos interesa saber cómo “medir” en ellos. Para ello recurrimos al concepto de espacio vectorial dual.

2.1.3. Tensores y campos tensoriales

Para cualquier espacio vectorial V , el **espacio vectorial dual** V^* es el espacio de todas las aplicaciones lineales de V a \mathbb{R} . Es decir, si $\omega \in V^*$, entonces:

$$\begin{aligned} \omega : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \omega(X) \end{aligned} \quad (2.10)$$

tal que ω es lineal. Supongamos que tenemos la base $\{e_\mu, \mu = 1, \dots, n\}$ de V . Podemos introducir una base dual $\{f^\mu, \mu = 1, \dots, n\}$ para V^* definida por:

$$f^\nu(e_\mu) = \delta_\mu^\nu$$

En general, un vector en V se puede escribir como $X = X^\mu e_\mu$ y $f^\nu(X) = X^\mu f^\nu(e_\mu) = X^\nu$. Dada una base, esta construcción nos genera un isomorfismo entre V y V^* dado por $e_\mu \rightarrow f^\mu$. Evidentemente, si cogemos una base diferente, tendremos un isomorfismo diferente, es decir, depende de la base que cojamos. Si repetimos la construcción, es fácil ver que $(V^*)^* = V$, es decir, al ser naturalmente isomorfo a V el isomorfismo es independiente de la base que cojamos.

En cada punto $p \in M$, tenemos un espacio tangente $T_p(M)$. El dual de este espacio, $T_p^*(M)$ se llama **espacio cotangente** en p , y cada elemento de este espacio se llama **vector cotangente**, o **covector**. Dada una base $\{e_\mu\}$ de $T_p(M)$, podemos introducir la base dual $\{f^\mu\}$ para $T_p^*(M)$ y expandir cualquier covector como $\omega = \omega_\mu f^\mu$, siendo ω_μ las componentes de ω . Es decir, sea $X = X^\mu e_\mu$, entonces:

$$\omega(X) = \omega_\mu f^\mu(X^\nu e_\nu) = \omega_\mu X^\nu f^\mu(e_\nu) = \omega_\mu X^\mu \quad (2.11)$$

Cabe mencionar que al igual que en el espacio tangente, por la ecuación (2.7), podemos considerar la base e_μ como ∂_μ ; en el espacio cotangente podemos considerar la base dual f^μ como dx^μ .

Tras introducir los vectores y covectores, damos un paso más incorporándolos en una única estructura matemática más general: **el tensor**.

Definición 2.7 (Tensor). Un **tensor del tipo** (r, s) en un punto $p \in M$ se define como una aplicación multilinear:

$$T : \overbrace{T_p^*(M) \times \dots \times T_p^*(M)}^r \times \overbrace{T_p(M) \times \dots \times T_p(M)}^s \rightarrow \mathbb{R}$$

Se dice que dicho tensor tiene orden $r + s$.

Ya hemos visto algunos ejemplos. Un vector cotangente en $T_p^*(M)$ es un tensor de tipo $(0, 1)$, mientras que un vector tangente en $T_p(M)$ es un tensor de tipo $(1, 0)$ (usando que $T_p(M) = T_p^{**}(M)$). Definimos entonces un **campo tensorial** como una asignación de un tensor (r, s) a cada punto $p \in M$.

Dada una base $\{e_\mu\}$ para campos vectoriales y una base dual $\{f^\mu\}$ para covectores, la acción del tensor sobre esta colección de vectores y covectores se escribe así:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = T(f^{\mu_1}, \dots, f^{\mu_r}, e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_s})$$

A esto se le llama componentes del tensor con respecto a las bases $\{e_\mu\}$ y $\{f^\mu\}$. Esto se puede escribir también como combinación lineal de productos tensoriales de las bases:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r} \otimes f^{\nu_1} \otimes \dots \otimes f^{\nu_s} \quad (2.12)$$

A partir de ahora vamos a considerar una base de coordenadas concreta del espacio tangente: $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$, y su base dual: $\{f^\mu\} = \{dx^\mu\}$. Así, la expresión del tensor en estas bases se puede escribir como:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \quad (2.13)$$

Una vez introducido el concepto general de tensores y campos de tensores, podemos estudiar algunos de los que juegan un papel importante en la Teoría de la Relatividad. Entre ellos, destaca la **métrica**, que permite entre otras cosas medir distancias, ángulos, volúmenes, etc.

2.1.4. La métrica

En toda variedad diferencial podemos introducir una métrica, que sirve para medir distancias entre puntos, pero no es su única función. La métrica es un producto interno del espacio tangente $T_p(M)$. Vamos a ver su definición matemática:

Definición 2.8 (Métrica). Una **métrica** g es un campo tensorial del tipo (0,2) que cumple:

1. Es simétrica: $g(X, Y) = g(Y, X)$
2. No degenerada: Si para cada $p \in M$, $g(X, Y)|_p = 0$ para todo $Y \in T_p(M)$, entonces $X_p = 0$.

Al ser un tensor de tipo (0,2), podemos escribir la métrica como:

$$g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.14)$$

de acuerdo con la expresión (2.13) para un tensor genérico. Aquí $g_{\mu\nu}(x)$ son las componentes de la métrica en la base de coordenadas, de la forma en la que ω_μ eran las componentes del covector (es decir, del tensor de tipo (0,1)) ω en (2.11). Estas componentes de la métrica pueden extraerse evaluando la métrica en un par de elementos de la base:

$$g_{\mu\nu}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \quad (2.15)$$

Lo que hace la métrica es dar un **isomorfismo natural** entre vectores y covectores, $g : T_p(M) \longrightarrow T_p^*(M)$ para cada p . Dado un vector X con componentes X^μ en la base, estas componentes se relacionan con las del espacio dual de la siguiente manera:

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu \quad (2.16)$$

La matriz $g_{\mu\nu}$ es simétrica en un punto p , y siempre podemos escoger coordenadas $\{x^\mu\}$ tales que $g_{\mu\nu}$ sea diagonal en p . Cuando conseguimos esto localmente, la condición de ser no degenerada asegura que ninguno de los elementos de la diagonal desaparecen (algunos son positivos y otros negativos) y por tanto, la matriz es invertible. Denotamos su inversa por $g^{\mu\nu}$, con $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$. Podemos pensar en $g^{\mu\nu}$ como las componentes de un tensor de tipo $(2,0)$ simétrico $\hat{g} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$.

Una de las principales aplicaciones de la métrica es la medida de distancias en una variedad. Podemos definir un objeto llamado **elemento de línea**, que es la longitud de un segmento infinitesimal a lo largo de una curva. Lo vamos a denotar ds^2 . Conseguimos definirlo simplemente aplicando el tensor g de la expresión (2.14) al vector tangente $dx = dx^\mu \partial_\mu$. Este vector dx representa el vector tangente infinitesimal a lo largo de la curva², siguiendo la definición que habíamos desarrollado en la sección de Espacios Tangentes. Por tanto, lo que tenemos es:

$$ds^2 = g(dx, dx) = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (2.17)$$

que representa cómo de separados están dos puntos infinitesimalmente cercanos sobre la curva.

Una vez que una variedad diferenciable está dotada de una métrica g , podemos clasificarla según las propiedades de dicha métrica.

Variedades Riemannianas

Una **variedad Riemanniana** es una variedad diferenciable equipada con una métrica g que es simétrica y **positiva definida**, es decir, $g(v, v) > 0$ para todo vector no nulo v . Este tipo de geometría es el que se encuentra en el estudio clásico de superficies y espacios curvos en matemáticas puras. El ejemplo más simple es el espacio Euclídeo \mathbb{R}^n , con:

²Nótese el abuso de notación, dx^μ son las componentes del vector dx , que es tangente a la curva, no a los elementos de la base de covectores

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n$$

Las componentes de esta métrica son simplemente $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ en coordenadas cartesianas. En general, podemos medir la longitud de un vector X con la métrica Riemanniana de la siguiente manera:

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)} \quad (2.18)$$

Y, por tanto, en componentes:

$$\|X\| = \sqrt{g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu} \quad (2.19)$$

Por ejemplo, en el caso particular del plano euclídeo en coordenadas cartesianas, donde $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ (la métrica es la identidad), esto se reduce a la expresión habitual de la norma euclídea:

$$\|X\| = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2 + \dots + (X^n)^2}$$

Vemos que la métrica nos permite medir distancias a lo largo de una curva, ángulos entre vectores, etc. (Ver [1] para más detalles).

Variedades Lorentzianas

Una **variedad Lorentziana** es aquella que permite una métrica en la que existen vectores no nulos v tales que $g(v, v) < 0$, lo cual permite distinguir entre direcciones temporales y espaciales (según el signo). Por ello, es la que se va a utilizar en **relatividad general**, donde el espacio-tiempo se modela como una variedad de cuatro dimensiones con una métrica lorentziana que codifica las propiedades geométricas y causales del universo. En este contexto, la métrica no solo mide distancias, sino que también determina el comportamiento de la luz, el movimiento de las partículas y la curvatura gravitatoria del espacio-tiempo. El ejemplo más simple es el espacio de Minkowski. Esto es \mathbb{R}^n con:

$$g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^{n-1} \otimes dx^{n-1}$$

En esta base local de coordenadas, las componentes de la métrica son $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$. Para nosotros, $dx^0 \equiv dt$ será una coordenada temporal, y $d\vec{x} = (dx^1, dx^2, dx^3)$ serán las coordenadas espaciales.

Para cada punto p en una variedad Lorentziana general, siempre es posible encontrar unas coordenadas cuya base asociada $\{\partial_\mu\}$ de $T_p(M)$ sea ortonormal. De esta manera, localmente,

la métrica será como la de Minkowski:

$$g_{\mu\nu}|_p = g_{\mu\nu} \quad (2.20)$$

Pero no globalmente. Esto nos va a servir para distinguir entre diferentes tipos de vectores según cómo se comportan respecto a la métrica. Veamos cómo.

Tomamos un punto p y evaluamos el elemento de línea de una curva que pase por p . Utilizando lo que acabamos de ver sabemos que localmente en este punto la métrica es la de Minkowski:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + d\vec{x}^2 = -dt^2 \left[1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right] \quad (2.21)$$

Por tanto, vamos a tener tres tipos de vectores:

- **Tipo tiempo:** $ds^2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 < 1$. Pero habíamos tomado $c = 1$, siendo c la velocidad de la luz, por lo que en realidad tenemos $\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| < c$, es decir, no se supera la velocidad de la luz. Por tanto, estos vectores pueden representar trayectorias físicas posibles de partículas masivas.
- **Tipo nulo:** $ds^2 = 0 \Rightarrow \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c$. Representan, por tanto, las trayectorias de los rayos de luz.
- **Tipo espacio:** $ds^2 > 0 \Rightarrow \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| > c$. Estos vectores representarían partículas que van más rápido que la velocidad de la luz, lo que implicaría que la estructura causal quedaría rota. Por tanto, no se pueden usar para describir trayectorias de partículas.

Vamos a utilizar la métrica para medir los distintos tipos de curvas. Suponemos que tenemos una con una parametrización $x^\mu(t)$.

- Si la curva es de **tipo tiempo** (es decir, su vector tangente en todo punto es de tipo tiempo), la longitud de la curva entre dos puntos p y q se define como:

$$\tau = \int dt \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \quad (2.22)$$

Este τ es el *tiempo propio* medido por un reloj que viaja a lo largo de esta trayectoria. El signo negativo de la raíz viene de que al ser de tipo tiempo, $g(X_p, X_p) < 0$ para todo p en la curva.

- Si la curva es de **tipo espacio** (es decir, su vector tangente en todo punto es de tipo espacio), la integral:

$$l = \int dt \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \quad (2.23)$$

representa la **longitud propia** a lo largo de esa trayectoria espacial. Esto es lo más parecido a la longitud euclídea en espacios curvos.

- Si la curva es de **tipo nulo**, el elemento de línea es nulo, por lo que no se puede definir una “longitud propia”.

A menudo, en relatividad general, trabajamos no solo con tensores, sino también con **densidades tensoriales**, que son objetos que se transforman como tensores bajo cambios de coordenadas, pero además incluyen un factor de peso que depende del determinante del Jacobiano de la transformación.

Las densidades tensoriales surgen de forma natural cuando queremos definir integrales invariantes sobre una variedad. Por ejemplo, si queremos integrar un escalar $f(x)$ sobre una variedad de dimensión 4, necesitamos un **elemento de volumen** que asegure que la integral

$$\int f(x) dV$$

sea independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas en un espacio plano, basta con usar d^4x , pero en una variedad curva este elemento no es invariante. Para corregirlo, introducimos el **elemento de volumen curvo**:

$$dV = \sqrt{-g} d^4x$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante de la métrica. Este factor $\sqrt{-g}$ garantiza la invariancia de la integral.

Veamos de dónde sale $\sqrt{-g}$. Bajo un cambio de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, el determinante de la métrica se transforma como:

$$g' = \det(g'_{\mu\nu}) = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g \quad (2.24)$$

Tomando la raíz cuadrada (y teniendo en cuenta el signo en el caso de métrica lorentziana), se obtiene:

$$\sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \sqrt{-g}$$

Por tanto, $\sqrt{-g}$ no se comporta como un escalar, sino como una **densidad escalar de peso +1**, ya que se multiplica por el Jacobiano del cambio de coordenadas.

En general, una **densidad tensorial de peso ω** es un objeto que, bajo un cambio de coordenadas $x \rightarrow x'$, se transforma como un tensor ordinario multiplicado por un factor $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^\omega$. Es decir:

$$T_{\nu_1 \dots}^{\mu_1 \dots}(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^\omega \cdot \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots T_{\beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots}(x) \quad (2.25)$$

En este contexto, $\sqrt{-g}$ es simplemente una densidad escalar de peso $\omega = +1$. Su introducción permite construir integrales que son invariantes y tienen significado geométrico y físico en cualquier sistema de coordenadas.

Bases no coordenadas

Hasta ahora hemos mencionado un único sistema de bases de vectores ($\{\partial_\mu\}$) y covectores o vectores duales ($\{dx^\mu\}$). Estas derivadas parciales y diferenciales están relacionadas directamente con el sistema de coordenadas y **conmutan entre sí**:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right] = 0$$

Una base **no coordenada** del espacio tangente es un conjunto de campos vectoriales $\{e_a\}$ que forman una base ortogonal en cada punto (es decir, son linealmente independientes), pero no provienen de derivadas parciales respecto a coordenadas. En general, **no conmutan**:

$$[e_a, e_b] = C_{ab}^c e_c \quad \text{con } C_{ab}^c \neq 0$$

A estos coeficientes C_{ab}^c se les llama **símbolos de estructura** de la base. La utilidad de estas bases es que nos van a permitir localmente definir la métrica como $g = \eta_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu$, puesto que a veces si utilizamos bases coordenadas no va a ser posible.

2.2. Curvatura

Ya hemos visto que la métrica g nos permite medir longitudes, ángulos y volúmenes en una variedad. Pero, ¿cómo podemos expresar la curvatura en una variedad?

2.2.1. Transporte paralelo y conexión

El transporte paralelo es una forma de trasladar un vector a lo largo de una curva en el espacio-tiempo de tal manera que su dirección y magnitud permanezcan consistentes en relación con el espacio-tiempo curvo en el que se encuentra. Este concepto es clave para entender cómo la curvatura del espacio-tiempo afecta a los objetos y vectores que se mueven en su interior. En la Figura 4 tenemos un ejemplo de transporte paralelo en una variedad plana y en una variedad curva, en este caso esférica.

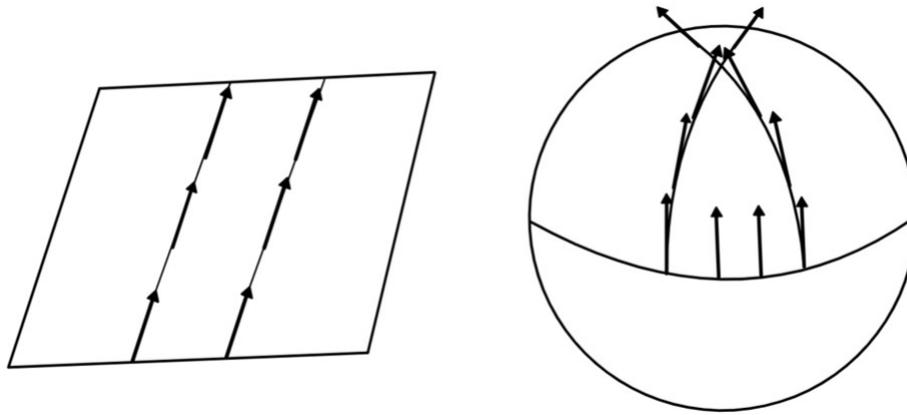


Figura 4: Representación del transporte paralelo de un vector en una variedad plana (izda.) y esférica (dcha.). Como se ve, en un espacio curvo, el vector transportado depende del camino por donde lo transportamos, mientras que en el plano, no.

Para entender esta noción intuitiva de curvatura matemáticamente debemos aprender a derivar tensores e introducir los conceptos de **derivada covariante** y **conexión**. Vamos a ver cómo surgen estos conceptos. De la ecuación (2.5), tenemos la aplicación de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad (2.26)$$

Y de la ecuación (2.6) tenemos la aplicación sobre un vector X^μ :

$$X^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{X}^\nu \quad (2.27)$$

Por tanto, evaluando la derivada parcial de un vector (que es un caso particular de tensor), tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} X^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\rho} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\lambda} \tilde{X}^\lambda \right) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{X}^\lambda + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \tilde{x}^\rho \partial \tilde{x}^\lambda} \tilde{X}^\lambda \quad (2.28)$$

Si sólo tuviéramos el primer sumando, la expresión transformaría correctamente como lo haría un tensor bajo un cambio de coordenadas. Pero vemos que hay un término más que hace que no se cumpla. Para evitar esto necesitamos un nuevo objeto llamado **derivada covariante**, que se reduce a una simple derivada parcial en un espacio-tiempo plano. Vamos a definir entonces el concepto que nos va a ayudar a introducir este objeto: **la conexión**. Primero daremos una definición formal y luego veremos cómo se conecta con nuestro problema.

Definición 2.9 (Conexión). Una **conexión** es una aplicación $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ de manera que $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, y el objeto ∇_X se llama **derivada covariante**. Satisface las siguientes propiedades:

- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ para cualquier par de funciones f, g .
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (\nabla_X f)Y$ donde definimos $\nabla_X f = X(f)$.

Si evaluamos la conexión en una base $\{e_\mu\}$ de $\mathcal{X}(M)$, tenemos:

$$\nabla_\rho e_\nu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu e_\mu \quad (2.29)$$

donde hemos utilizado la notación $\nabla_{e_\rho} = \nabla_\rho$. En esta expresión $\Gamma_{\rho\nu}^\mu$ son las componentes de la conexión, que veremos qué forma tienen más adelante.

Es decir, la derivada covariante actúa de manera similar a la derivada parcial salvo una corrección:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X(Y^\mu e_\mu) \\ &= X(Y^\mu)e_\mu + Y^\mu \nabla_X e_\mu \\ &= X^\nu e_\nu(Y^\mu)e_\mu + X^\nu Y^\mu \nabla_\nu e_\mu \\ &= X^\nu (e_\nu(Y^\mu) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu Y^\rho) e_\mu \end{aligned} \quad (2.30)$$

O, en componentes;

$$(\nabla_\nu Y)^\mu = e_\nu(Y^\mu) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu Y^\rho \quad (2.31)$$

Notar que la derivada covariante coincide con la derivada parcial cuando las componentes de la conexión son nulas, es decir, cuando no hay curvatura y la variedad es por tanto plana. Una característica importante de la conexión es que *no* es un tensor, pero la diferencia entre

conexiones *sí* lo es. Por lo tanto, cualquier conexión se puede expresar como la suma de otra conexión más una corrección tensorial.

La derivada covariante se extiende naturalmente a todos los tensores multilineales respetando linealidad, Leibniz y contracción. Si la aplicamos sobre el tensor $T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}$ en coordenadas se expresa como:

$$\nabla_\rho T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \partial_\rho T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} + \sum_{i=1}^r \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_i} T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_r} - \sum_{j=1}^s \Gamma_{\rho\nu_j}^\lambda T_{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \quad (2.32)$$

Ahora que hemos visto lo que es la conexión, vamos a definir una conexión concreta que es la que vamos a utilizar en relatividad general. Esto surge de que necesitamos que el transporte paralelo respete la geometría definida por la métrica g , ya que es la que permite medir longitudes, ángulos y volúmenes en una variedad. Es decir, queremos que la métrica se conserve cuando transportemos vectores. Para ello hacemos uso del *teorema fundamental de la geometría Riemanniana* (que también es válido para geometrías Lorentzianas), que nos dice que:

Teorema 2.2. Existe una única conexión (libre de torsión) que es compatible con una métrica g y que cumple:

$$\nabla_X g = 0 \quad (2.33)$$

para todos los campos vectoriales X .

Es decir, a partir de una métrica $g_{\mu\nu}$, podemos definir una conexión (ver [1]) que tiene la siguiente forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.34)$$

Esta conexión se llama la **conexión de Levi-Civita** y sus componentes se llaman **símbolos de Christoffel**. Poseen una simetría importante: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$.

Nótese que en el espacio plano ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) los símbolos de Christoffel se anulan $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = 0$ y la derivada covariante se reduce a la derivada parcial usual. Esta es una de las razones por las que la conexión de Levi-Civita es la usada a la hora de formular la Teoría de la Relatividad General. A partir de ahora consideraremos únicamente esta conexión.

Para entender qué significa que un espacio tenga curvatura, estudiaremos qué significa que un vector (o un tensor) sea “constante” a lo largo de una curva. Tomamos una curva $x^\mu(\lambda)$,

y el requerimiento de que un tensor $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}$ a lo largo de esta curva sea constante en un espacio plano es simplemente que sus componentes sean constantes:

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} = 0 \quad (2.35)$$

Decimos que el tensor T se transforma paralelamente a lo largo de la curva. Para hacer que esta propiedad sea tensorial simplemente reemplazamos esta derivada parcial por una derivada covariante, así que definimos la **derivada covariante direccional** como:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad (2.36)$$

Esto es una aplicación, definida a lo largo del camino, desde tensores (k, l) hasta tensores (k, l) . Entonces definimos el transporte paralelo del tensor T a lo largo del camino $x^\mu(\lambda)$ como el requerimiento de que esta derivada covariante se anule:

$$\left(\frac{D}{d\lambda} T \right)^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} = 0 \quad (2.37)$$

Esta ecuación tensorial está bien definida, dado que tanto el vector tangente $dx^\mu/d\lambda$ como la derivada covariante ∇T son tensores, y recibe el nombre de *ecuación del transporte paralelo*. Para un vector toma la forma:

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0 \quad (2.38)$$

El transporte paralelo es un concepto que depende intrínsecamente de la conexión, por lo que diferentes conexiones darán lugar a distintos resultados. Además, si la conexión es compatible con la métrica, ésta siempre será transportada paralelamente respecto de la conexión:

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.39)$$

Vamos a ver que la curvatura es cuantificada por un tensor: el **tensor de Riemann**.

2.2.2. Tensor de curvatura de Riemann

Podemos saber cómo de curva es una variedad midiendo cómo de grande la diferencia entre dos vectores transportados paralelamente por diferentes caminos. En una variedad plana esta diferencia será nula. Esta medida la sacamos a partir del hecho de que las derivadas covariantes no tienen por qué conmutar, entonces partimos de este conmutador. Consideramos

un campo vectorial V^ρ , y vamos a evaluar cómo actúa un conmutador de derivadas covariantes sobre él. Lo que va a hacer este conmutador es medir cómo cambia V^ρ al ser transportado paralelamente alrededor de un pequeño paralelogramo infinitesimal en la variedad, definido por las direcciones ∂_μ y ∂_ν :

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu V^\rho) \\ &= \nabla_\mu(\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho V^\sigma) - \nabla_\nu(\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho V^\sigma) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Desarrollando esta expresión y usando la simetría de los símbolos de Christoffel en los índices inferiores (propia de la conexión de Levi-Civita), obtenemos:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma \quad (2.41)$$

donde $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ es el **tensor de Riemann**, definido como:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.42)$$

Este tensor tiene una serie de propiedades:

- Es antisimétrico en los últimos dos índices: $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho{}_{\sigma\nu\mu}$. Esto tiene sentido, puesto que si intercambiamos los índices es como intercambiar los caminos por los que se transporta, lo que da lugar a un vector en la dirección opuesta.
- Notamos que el conmutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$, que resulta ser un operador diferencial, actúa sobre campos de vectores como una simple transformación multiplicativa. El tensor de Riemann mide la parte de este conmutador que es proporcional al campo de vectores.
- El tensor de curvatura ha sido construido completamente a partir de las primeras derivadas de la conexión, y recordamos que la conexión es construida a partir de las primeras derivadas de la métrica. Por tanto, el tensor de curvatura está construido a partir de las segundas derivadas de la métrica.
- El tensor de Riemann es un tensor del tipo $(1, 3)$ que actúa sobre campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ y $\omega \in \wedge^1(M)$, siendo $\wedge^1(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales de M en el espacio cotangente:

$$R(\omega; X, Y, Z) = \omega(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z) \quad (2.43)$$

Cuando consideramos la conexión de Christoffel, tenemos nuevas simetrías en el tensor de curvatura. Para examinar esto, tomamos el tensor de Riemann con todos los índices bajos: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$. Con esta forma ya podemos obtener nuevas propiedades de simetría:

- Antisimetría en los dos primeros índices:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (2.44)$$

- Invariancia bajo el intercambio del primer par de índices con el segundo:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.45)$$

- La suma de las permutaciones cíclicas de los últimos tres índices se anula:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (2.46)$$

A partir de este tensor podemos definir otros tensores que son interesantes para estudiar, más adelante veremos por qué. El primero de ellos es el **tensor de Ricci**:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad (2.47)$$

Es decir, es el resultado de contraer el primer y el tercer índice del tensor de Riemann. Por las propiedades de simetría ya vistas, tenemos que el tensor de Ricci es simétrico, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Si hacemos la traza del tensor de Ricci obtenemos el **escalar de Ricci/ de curvatura**:

$$R = R^\mu{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.48)$$

El tensor y el escalar de Ricci contienen toda la información sobre las trazas del tensor de Riemann, dejándonos las partes libres de traza. Además, el tensor de Ricci cumple que la suma de permutaciones cíclicas de los primeros tres índices de la siguiente expresión se anula:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0 \quad (2.49)$$

es decir,

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (2.50)$$

esto se conoce como la **identidad de Bianchi**. Una forma útil de la identidad de Bianchi viene de contraer dos veces los índices en la siguiente expresión:

$$g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0 \quad (2.51)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\rho R \quad (2.52)$$

Dicho esto, podemos definir un objeto nuevo, el **tensor de Einstein**, de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.53)$$

Este tensor aparecerá en las ecuaciones de campo de Einstein, que veremos más adelante. Su definición no es arbitraria, está cuidadosamente elegida de manera que cumpla:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.54)$$

Queremos que cumpla esta propiedad debido a que más adelante relacionaremos este tensor con otro que engloba la energía y el momento, cantidades que tienen que ser conservadas, y la manera de que se conserven es precisamente relacionarlas con un tensor que cumpla esta propiedad.

2.2.3. Geodésicas

Una vez visto cómo codificar la curvatura, nos interesa saber cómo se mueven los objetos en los espacios curvos. La manera “natural” de una partícula de moverse, es decir, una partícula sin fuerza externa, es siguiendo lo que se conoce como una **geodésica**. A nivel intuitivo, una geodésica es la trayectoria más corta que una partícula o un rayo de luz puede seguir en un espacio-tiempo curvado. Es una generalización del concepto de línea recta en el espacio euclídeo, es decir, la distancia más corta entre dos puntos. Una definición alternativa aplicando lo que acabamos de ver es que una línea recta en el espacio euclídeo es un camino que transporta paralelamente su propio vector tangente. Por tanto, ya tenemos la definición formal para una geodésica:

Definición 2.10 (Geodésica). Sea M una variedad, y sea $x^\mu(\lambda)$ un camino, con $dx^\mu/d\lambda$ su vector tangente. Una **geodésica** es una trayectoria que transporta paralelamente este vector tangente, es decir, que cumple:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad (2.55)$$

O, alternativamente expandiendo la ecuación anterior:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.56)$$

Esta última es la **ecuación de las geodésicas**.

Observamos que en el espacio euclídeo, donde los elementos de la conexión son cero, recuperamos la ecuación para una línea recta, $d^2x^\mu/d\lambda^2 = 0$. Denotando por $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$, la ecuación geodésica se puede representar como:

$$\dot{x}^\mu \nabla_\mu \dot{x}^\sigma = 0 \quad (2.57)$$

Una vez entendido las trayectorias que siguen las partículas libres en espacios curvos, cabe preguntarnos cómo podemos encontrar cantidades conservadas. Esto se traduce en encontrar **simetrías**.

2.2.4. Isometrías y vectores Killing

Las simetrías son fundamentales en Física, ya que ayudan a simplificar las soluciones y a encontrar cantidades conservadas, entre otras cosas. Tenemos que entender cómo se describen las simetrías en nuestro objeto de estudio.

Definición 2.11 (Simetrías). Sea M una variedad, decimos que posee una **simetría** si su geometría es invariante bajo una cierta transformación que mapea M a sí misma, es decir, si la métrica se conserva, no cambia.

Estas simetrías de la métrica se llaman **isometrías**. Ya conocemos ejemplos de unas cuantas: las traslaciones y las transformaciones de Lorentz en el espacio plano de Minkowski. Siempre que la métrica sea independiente de una dirección dada, es decir, $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ para todo μ, ν , habrá una simetría bajo traslaciones en la dirección x^σ : $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow x^\sigma \rightarrow x^\sigma + a^\sigma$ es una simetría.

Este tipo de simetría tiene consecuencias directas en el movimiento de partículas libres, que siguen geodésicas. Vamos a utilizar la ecuación de las geodésicas (2.56) y vamos a multiplicar ambos lados por la métrica $g_{\mu\nu}$ para bajar el índice superior:

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2x^\nu}{d\lambda^2} + g_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.58)$$

El primer término se puede reescribir como:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) - \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dg_{\mu\nu}}{d\lambda} \quad (2.59)$$

Usando la regla de la cadena para $\frac{dg_{\mu\nu}}{d\lambda} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \partial_\sigma g_{\mu\nu}$, y sustituyendo, obtenemos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\rho} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} = 0 \quad (2.60)$$

Reordenando, obtenemos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \quad (2.61)$$

Finalmente, si existe una dirección x^δ tal que $\partial_\delta g_{\mu\nu} = 0$, entonces el lado derecho se anula para $\mu = \delta$, y tenemos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{\delta\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\delta\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{constante} \quad (2.62)$$

Es decir, la componente δ de la cuadrivelocidad (definida como $U^\delta = \frac{dx^\delta}{d\lambda}$) bajada por la métrica se conserva: una cantidad conservada asociada a la simetría. Esto se mantendrá para cualquier geodésica.

Aunque la independencia de las componentes de la métrica respecto a una coordenada implica la existencia de una isometría, lo contrario no es necesariamente cierto. Por ejemplo, las transformaciones de Lorentz forman parte de las isometrías del espacio-tiempo de Minkowski, pero no implican que $g_{\mu\nu}$ sea independiente de ninguna coordenada particular. De hecho, en 4 dimensiones, hay 10 generadores de isometrías: 4 correspondientes a traslaciones y 6 a transformaciones de Lorentz. Este número es mayor que el número de coordenadas de las que la métrica podría ser independiente.

Además, una transformación de coordenadas arbitraria puede ocultar completamente estas simetrías en la forma de la métrica. Es decir, aunque las componentes $g_{\mu\nu}$ cambien, la geometría subyacente no cambia. Por tanto, necesitamos una formulación más covariante que nos permita identificar las simetrías de manera intrínseca.

Supongamos que la métrica es independiente de una coordenada x^σ . Entonces, el campo vectorial $K = \partial_\sigma$ genera una isometría. Por componentes, este campo se escribe:

$$K^\mu = (\partial_\sigma)^\mu = \delta_\sigma^\mu \quad (2.63)$$

Decimos que este vector **genera una isometría** porque una transformación infinitesimal en la dirección de K^μ deja la métrica invariante.

Ahora, consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una geodésica con velocidad $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Entonces, la cantidad escalar:

$$K_\mu U^\mu \quad (2.64)$$

es constante a lo largo del movimiento. Es decir,

$$\frac{d}{d\tau}(K_\mu U^\mu) = U^\nu \nabla_\nu (K_\mu U^\mu) = 0 \quad (2.65)$$

Este resultado es generalizable: si un campo vectorial K^μ satisface la siguiente condición:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \quad (2.66)$$

entonces K^μ se llama un **vector de Killing**, y se garantiza que

$$U^\mu \nabla_\mu (K_\nu U^\nu) = 0 \quad (2.67)$$

es decir, $K_\nu U^\nu$ es una cantidad conservada a lo largo de cualquier geodésica. Esta es la **ecuación de Killing**.

Por tanto, si la métrica es independiente de una coordenada x^σ , el campo $K = \partial_\sigma$ es un vector de Killing. Recíprocamente, si K^μ es un vector de Killing, entonces siempre existe un sistema de coordenadas en el que localmente se puede escribir como $K = \partial_\sigma$. Sin embargo, en general no se puede encontrar un sistema donde todos los vectores de Killing adopten esta forma simultáneamente, ni es necesario que K sea una derivada parcial para que satisfaga la ecuación de Killing.

2.2.5. Desviación geodésica

Otra manera más en la que el tensor de Riemann aparece como consecuencia de la curvatura es en la desviación geodésica. Siempre hemos escuchado que la propiedad que define la geometría Euclídea, es decir, la plana, es el postulado paralelo: las líneas que son paralelas siempre van a seguir siendo paralelas. En un espacio curvo esto no es cierto, por ejemplo en una esfera las geodésicas que son paralelas se terminan cruzando en algún momento. El problema es que la noción de “paralelo” no se extiende naturalmente de espacios planos a espacios curvos. Lo mejor que podemos hacer es considerar curvas geodésicas que inicialmente son paralelas y ver cómo se comportan según viajamos a través de ellas³. Para ello, consideramos una familia de geodésicas, $\gamma_s(t)$. Esto es, para cada $s \in \mathbb{R}$, γ_s es una geodésica parametrizada por el parámetro afín t . La colección de estas curvas define una superficie bidimensional suave (embebida en una variedad M de dimensión arbitraria). Las coordenadas de

³Esto va a ser muy útil cuando entremos en el tema de agujeros de gusano, pues nos va a interesar ver cómo una persona que sigue una geodésica sufre una trayectoria distinta en los pies que en la cabeza.

esta superficie se pueden elegir para ser s y t , siempre que tengamos una familia de geodésicas que no se crucen. La superficie entera es el conjunto de puntos $x^\mu(s, t) \in M$. Nos aparecen dos campos vectoriales:

- Los vectores tangentes de las geodésicas:

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \quad (2.68)$$

- Los vectores desviación:

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \quad (2.69)$$

Este nombre se debe a que los puntos S^μ de una geodésica apuntan a las geodésicas vecinas.

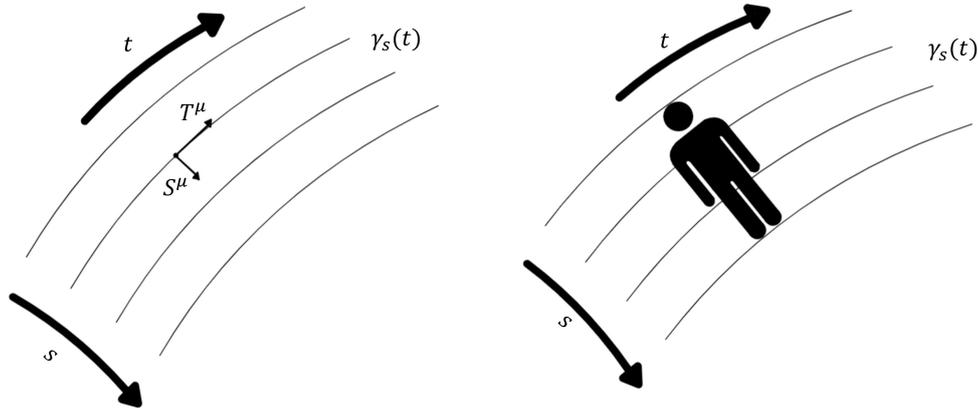


Figura 5: Representación de los vectores tangente T^μ y los vectores desviación S^μ es una familia de geodésicas $\gamma_s(t)$

Como vemos en la Figura 5, si tenemos una persona de 1,5 m por ejemplo, su cabeza y sus pies estarán en dos puntos distintos, por lo que dependiendo de la magnitud de la desviación geodésica, podrían sufrir trayectorias distintas, lo cual sería problemático para la persona.

La idea de que los vectores S^μ apuntan de una geodésica a otra nos inspira para definir la *velocidad relativa de las geodésicas*:

$$V^\mu = (\nabla_T S)^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu \quad (2.70)$$

y la *aceleración relativa de las geodésicas*:

$$A^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu \quad (2.71)$$

Hay que tener cuidado de distinguir esta noción de aceleración *relativa* entre geodésicas, que se debe distinguir con la aceleración de un camino que dista de ser una geodésica, que vendría dada por $a^\mu = T^\sigma \nabla_\sigma T^\mu$.

Como S y T son vectores de una base adaptados al sistema de coordenadas, su conmutador se anula: $[S, T] = 0$. Entonces, por las propiedades del conmutador:

$$[S, T]^\mu = S^\rho \nabla_\rho T^\mu - T^\rho \nabla_\rho S^\mu \quad (2.72)$$

Tenemos que:

$$S^\rho \nabla_\rho T^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu \quad (2.73)$$

Si utilizamos esta igualdad para desarrollar la aceleración A^μ llegaremos a que:

$$A^\mu = T^\rho \nabla_\rho (T^\rho \nabla_\rho S^\mu) = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \quad (2.74)$$

Para el desarrollo del cálculo ver [2]. Es decir, como resultado obtenemos:

$$A^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \quad (2.75)$$

que es la **ecuación de desviación geodésica**. Expresa algo que debíamos de esperar: **la aceleración relativa entre dos geodésicas vecinas es proporcional a la curvatura**.

3. Gravitación

3.1. Ecuaciones de campo

Estamos ahora preparados para examinar la física de la gravitación descrita en relatividad general. Este objeto de estudio se divide principalmente en dos partes:

- a) Cómo el campo gravitatorio influye en el comportamiento de la materia.
- b) Cómo la materia determina el campo gravitatorio.

Ya hemos visto *a*), mediante las geodésicas, que influyen en cómo las partículas siguen ciertas trayectorias. Ahora vamos a ver *b*), ya que de la misma manera que las ecuaciones de Maxwell gobiernan cómo responden los campos electromagnéticos a las cargas y las corrientes, la ecuación de campo de Einstein controla cómo responde la métrica a la energía y el momento.

Empecemos por darnos cuenta de que nos interesa encontrar una ecuación que generalice la ecuación de Poisson para el potencial Newtoniano:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (3.1)$$

donde $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ es el Laplaciano espacial y ρ es la densidad en masa. Una generalización relativista debería tomar la forma de una **ecuación entre tensores**. Esto es porque la relatividad general es una teoría covariante, es decir, sus leyes deben tener la misma forma en **cualquier sistema de coordenadas**. Por tanto si escribimos una ecuación entre tensores que es cierta en un sistema de coordenadas, será cierta en todos los sistemas de coordenadas, lo que garantiza que la ecuación será una ley física válida en todo el espacio-tiempo, no solo en una carta local o un observador particular.

Sabemos ya cuál es la generalización en forma de tensor de la densidad en masa: el **tensor energía-momento** $T_{\mu\nu}$. El potencial gravitacional ϕ , por otro lado, debería ser reemplazado por el **tensor métrico** g , ya que es el que mide la curvatura del espacio-tiempo (ver [2]). Entonces, tendremos que tener una ecuación de la forma $[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$, pero queremos que sea tensorial. La parte izquierda de esta expresión no es un tensor como tal, es simplemente una notación que sugiere que queremos un tensor simétrico de tipo (0,2) que es de segundo orden en derivadas de la métrica. Tenemos uno que cumple con estas características: el tensor de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$, ya que recordemos que está construido a partir de los símbolos de Christoffel y sus primeras derivadas, y los símbolos de Christoffel a su vez están contruidos a partir de la métrica y sus primeras derivadas, por lo que $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ contiene segundas derivadas de la métrica $g_{\mu\nu}$. Contrayéndolo para formar el tensor de Ricci podemos adivinar que las **ecuaciones de campo gravitacionales** serán:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

para alguna constante κ . Pero escribiéndolas así encontramos un problema, y es que si queremos que se cumpla la conservación energía-momento, es decir, que $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, se tendría que cumplir $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$. Y habíamos visto que esto no era así, de hecho utilizando la identidad de Bianchi habíamos llegado a $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R$. Pero para salvar este problema no tenemos que ir mucho más lejos, puesto que ya hemos visto también un tensor que se define a partir del tensor de Ricci: el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ que obedece siempre que

$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Entonces proponemos finalmente:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

como una ecuación de campo para la métrica. Esta ecuación se puede obtener también a partir de una acción (ver **Apéndice A**).

La constante κ se puede obtener a partir del límite Newtoniano es decir, imponiendo las condiciones de la Física Clásica, demostrándose que:

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (3.4)$$

donde G es la constante gravitatoria. Ver, por ejemplo, [2].

3.2. Condiciones de energía

A veces es útil, lo veremos posteriormente en el trabajo, pensar sobre la ecuación de Einstein sin especificar la teoría de la materia de la que se deriva $T_{\mu\nu}$. Esto nos deja con un grado amplio de arbitrariedad. Por ejemplo, si nos preguntamos qué métricas obedecen la ecuación de Einstein. En la ausencia de ligaduras para $T_{\mu\nu}$, la respuesta es: cualquiera. Simplemente escogemos una métrica, evaluamos el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ para esta métrica, y después imponemos que $T_{\mu\nu}$ sea igual a $G_{\mu\nu}$. Automáticamente será conservada por la identidad de Bianchi. Nuestra verdadera preocupación es la existencia de fuentes de energía y momento “realistas”. Una estrategia es considerar tipos de fuentes específicas, como campos escalares o campos electromagnéticos. Sin embargo, ocasionalmente nos interesa entender las propiedades de las ecuaciones de Einstein que se cumplen para una variedad de fuentes diferentes. En estas circunstancias es conveniente imponer **condiciones de energía** que limiten la arbitrariedad de $T_{\mu\nu}$, sin llegar a especificar la fuente de energía. Las condiciones de energía son restricciones invariantes bajo transformaciones de coordenadas en el tensor de energía-momento.

Hay un número de condiciones de energía diferentes, apropiadas a diferentes circunstancias. Algunas de las más populares son las siguientes:

- La **Weak Energy Condition** o WEC (Condición de Energía Débil): establece que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para todo vector de tipo tiempo t^μ . O, equivalentemente, $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$, siendo ρ la densidad de energía y p la presión.

- La **Null Energy Condition** o NEC (Condición de Energía Nula): establece que $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ para todo vector nulo l^μ . O, equivalentemente, $\rho + p \geq 0$. Es decir, en comparación con la WEC, la densidad de energía podría ser ahora negativa, pero siempre y cuando haya una presión positiva que la compense.
- La **Dominant Energy Condition** o DEC (Condición de Energía Dominante): incluye la WEC, con el requerimiento adicional de que $T_{\mu\nu}t^\mu$ no sea un vector de tipo espacio (es decir, $T_{\mu\nu}T^\nu_\lambda t^\mu t^\lambda \leq 0$). Para un fluido perfecto, estas condiciones juntas son equivalentes al simple requerimiento de que $\rho \geq |p|$; la densidad de energía debe ser no negativa, y mayor o igual en magnitud que la presión.
- La **Null Dominant Energy Condition** o NDEC (Condición de Energía Dominante Nula): es la DEC para vectores nulos. Es decir, para cualquier vector nulo $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ y $T_{\mu\nu}l^\mu$ no es un vector de tipo espacio. La densidad de energía y presión permitidas son las mismas que para la DEC, excepto que las densidades negativas están permitidas siempre que $p = -\rho$.
- La **Strong Energy Condition** o SEC (Condición de Energía Fuerte): establece que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T^\lambda_{\ \lambda} t^\sigma t_\sigma$ para todos los vectores de tipo tiempo t^μ , o equivalentemente que $\rho + p \geq 0$ y $\rho + 2p \geq 0$. Notar que la SEC no implica la WEC. Implica la NEC, además de excluir presiones negativas excesivamente grandes.

Vamos a recoger en una tabla algunos ejemplos de materia que cumple o viola cada una de estas condiciones:

Condición de Energía	Ejemplo que la satisface	Ejemplo que la viola
WEC	Fluido perfecto con densidad de energía positiva y presión moderada	Campos cuánticos en configuraciones no clásicas, donde localmente puede existir densidad de energía negativa medida por ciertos observadores.
NEC	Radiación electromagnética (luz)	Materia exótica (campos escalares con energía negativa en agujeros de gusano)
DEC	Materia sin presión (conocida como polvo) o fluido relativista ($\rho \geq p $)	Campos cuánticos con energía negativa que permiten transporte de energía tipo espacio, lo cual es no físico desde el punto de vista clásico.
NDEC	Radiación electromagnética (luz)	Materia con presión negativa extrema
SEC	Fluido perfecto con presión positiva o moderada ($\rho > 0, p \geq 0$)	Constante cosmológica positiva ($p = -\rho$) o inflación cósmica ($\rho + 3p < 0$)

Cuadro 1: Ejemplos de materia que satisface o no las condiciones de energía.

4. Agujeros Negros

En este apartado, presentaremos las soluciones más conocidas que dan lugar a los agujeros negros, explorando tanto su estructura como las implicaciones físicas y matemáticas de dichas soluciones. Los agujeros negros representan una de las manifestaciones más intrigantes y extremas de la teoría de la relatividad general de Einstein, y dan pie al descubrimiento posterior de los agujeros de gusano. Estas entidades surgen como soluciones específicas a las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales describen cómo la materia y la energía influyen en la geometría del espacio-tiempo.

Este análisis nos llevará a comprender las propiedades fundamentales de los horizontes de sucesos, las singularidades centrales y las métricas asociadas, destacando cómo estas soluciones enriquecen nuestro entendimiento del cosmos y plantean profundas preguntas sobre los límites de la física moderna.

4.1. La métrica general estática e isotrópica

En primer lugar, la aplicación más general que se nos ocurre para una métrica es aquella que es estática e isotrópica:

- Estática: quiere decir que existe un observador para el cual $g_{\mu\nu}(\vec{x})$ no depende de la coordenada temporal $x^0 \equiv t$. Esto se traduce en que el elemento de línea ds^2 (que recordamos que es $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$), no depende de t .
- Isotrópica: significa que la métrica sólo puede depender de unas cantidades específicas, a saber: $d\vec{x}^2$, $\vec{x} \cdot d\vec{x}$ y \vec{x}^2 , que como vemos son productos escalares de vectores espaciales, por lo que son invariantes bajo rotaciones. Es decir, la métrica isotrópica es aquella invariante bajo rotaciones.

Por tanto, cumpliendo estas reglas, podemos escribir la métrica general estática e isotrópica como:

$$ds^2 = -F(|\vec{x}|)dt^2 + 2E(|\vec{x}|)dt(\vec{x} \cdot d\vec{x}) + D(|\vec{x}|)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + C(|\vec{x}|)d\vec{x}^2 \quad (4.1)$$

Vamos a movernos a coordenadas esféricas para facilitar el trabajo: $x^0 = t$, $x^1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x^3 = r \cos \theta$. Entonces, la métrica nos queda:

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + 2E(r)dtdr + r^2D(r)dr^2 + C(r)[dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2] \quad (4.2)$$

donde $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ es la métrica de la 2-esfera unidad S^2 de radio r .

Hay una serie de consideraciones que podemos hacer para simplificar esta métrica.

- En primer lugar, podemos eliminar el término $2E(r)dt dr$ definiendo un nuevo tiempo $t' = t + \Phi(r) \Rightarrow dt' = dt + \frac{d\Phi}{dr} dr$.

Entonces elegimos $\Phi(r)$ tal que $\frac{d\Phi}{dr} = -r \frac{E(r)}{F(r)}$. Así, podemos eliminar el término:

$$ds^2 = -F(r)dt'^2 + G(r)dr^2 + C(r)[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (4.3)$$

con $G(r) = r^2 \left[D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right]$.

- Podemos nuevamente eliminar otro término: el $C(r)$, realizando otro cambio de coordenadas, esta vez sobre r : $(r')^2 = C(r)r^2$. Entonces:

$$ds^2 = -B(r')dt'^2 + A(r')dr'^2 + r'^2[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (4.4)$$

con $B(r') = F(r)$, $A(r') = \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right) \left(1 + \frac{r}{2c} \frac{dC(r)}{dr}\right)$.

Una vez hecho esto, tenemos la expresión para la métrica más general invariante bajo rotaciones, estática e isotrópica, que escribimos a continuación sin las primas de las coordenadas para agilizar la notación:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (4.5)$$

Teniendo ya esta expresión, y sabiendo que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, tenemos que $g_{tt} = -B(r)$, $g_{rr} = A(r)$, $g_{\theta\theta} = r^2$ y $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$. Como vemos, esta métrica es diagonal, que era nuestro propósito al eliminar los términos $2E(r)dt dr$ y $C(r)$. El hecho de que la métrica sea diagonal supone una facilidad óptima en el cálculo de los símbolos de Christoffel:

Nos interesa obtener el tensor de curvatura de Riemann para utilizarlo luego con el objetivo de sacar las ecuaciones de campo de Einstein. Por lo que con esta métrica podemos calcular los símbolos de Christoffel con la expresión (2.34), con ellos el tensor Riemann siguiendo (2.42), y finalmente obtener del tensor de Riemann el tensor de Ricci aplicando (2.47). Realizando

estos cálculos, obtenemos las componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= \frac{B''(r)}{2A(r)} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left[\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] + \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{A(r)} \\
 R_{rr} &= -\frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left[\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] + \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)} \\
 R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{A(r)} + \frac{r}{2A(r)} \left[\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right] \\
 R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Una vez que tenemos las componentes del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ podemos introducirlas en las ecuaciones de Einstein (3.3) para un campo gravitatorio en presencia de materia y buscar las funciones $A(r)$ y $B(r)$ que sean compatibles con un tensor $T_{\mu\nu}$ de energía-momento dado. En el siguiente apartado, vamos a realizar este análisis para una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío $G_{\mu\nu} = 0$ con simetría esférica: la **métrica de Schwarzschild**.

4.2. El agujero negro de Schwarzschild

Vamos a deducir la solución que dio lugar a los agujeros negros. En primer lugar, partimos de que para que se cumplan las ecuaciones de Einstein en el vacío, $R_{\mu\nu} = 0$, todas las componentes de $R_{\mu\nu}$ tienen que ser nulas, es decir, las de la ecuación (4.6).

Vamos a empezar realizando la siguiente operación:

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = \frac{1}{rA} \left[\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] = \frac{1}{rA} \frac{d}{dr} \ln[A \cdot B] = 0 \tag{4.7}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $R_{tt} = R_{rr} = 0$. Esto implica que $A \cdot B \equiv \alpha = cte$, donde hemos definido la constante α .

Para seguir, imponemos que cuando nos alejamos del agujero negro, es decir, cuando $r \rightarrow \infty$ la métrica sea de Minkowski, es decir, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Esto lo conseguimos imponiendo $A(r) = B(r) \rightarrow 1$. Haciendo esto, queda $\alpha = 1 \Rightarrow A(r) = \frac{1}{B(r)}$.

Finalmente, partiendo de que $R_{\theta\theta} = 0$, tenemos que entonces:

$$\begin{aligned}
 -1 + rB'(r) + B(r) = 0 &\Rightarrow -1 + \frac{d}{dr}(rB(r)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rB(r)) = 1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow rB(r) = r - r_s &\Rightarrow B(r) = 1 - \frac{r_s}{r}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde hemos aplicado primeramente que $A = 1/B$ en la definición de $R_{\theta\theta}$. Y en el último paso hemos nombrado una constante de integración r_s . Por tanto, nos queda que las funciones $A(r)$ y $B(r)$ que satisfacen las ecuaciones de campo de Einstein son:

$$B(r) = 1 - \frac{r_s}{r} \quad A(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \quad (4.9)$$

Por tanto, hemos llegado a la expresión de **la métrica de Schwarzschild**:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.10)$$

Para entender qué significa el parámetro r_s .

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \approx -(1 - 2\Phi) \quad (4.11)$$

En esta expresión, hemos aplicado el límite clásico del potencial de Newton, que se codifica sólo en la coordenada g_{tt} de la métrica, (ver [2]). Este potencial es igual a $\Phi = -\frac{GM}{r}$, donde G es la constante de gravitación, y M se interpretaría como la masa del agujero negro⁴. Por tanto, juntándolo todo tenemos que:

$$r_s = 2GM \quad (4.12)$$

que se conoce como el **radio de Schwarchild**. Por tanto, la métrica ahora será:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.13)$$

Hay un resultado importante respecto a esta métrica, que enunciamos sin demostración (ver [2]).

Teorema 4.1 (Teorema de Birkhoff). *Toda solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío (sin materia ni energía) es necesariamente estática y es la métrica de Schwarzschild.*

Esta métrica es una configuración del espacio-tiempo no trivial, estática y esféricamente simétrica, que en el infinito, $r \rightarrow \infty$, vuelve a la métrica de Minkowski. Vamos a estudiar

⁴Con esto no estamos diciendo que haya “materia” dentro del agujero, sino que es una propiedad global del espacio-tiempo: representa cómo el agujero negro curva el espacio-tiempo a gran distancia. Es decir, la masa M está definida para un observador que está “lejos” del agujero negro ($g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$), porque dentro no tiene sentido hablar ni siquiera de potencial Newtoniano.

algunas de sus particularidades y en concreto cómo describen agujeros negros.

En primer lugar, podemos observar que esta métrica presenta puntos problemáticos, que son los siguientes:

- $r = r_s = 2GM \iff B(r) = 0 \iff g_{tt} = 0$
- $r = 0 \iff A(r) = 0 \iff g_{rr}$

Estos puntos problemáticos se conocen como **singularidades**. Son puntos del espacio-tiempo donde las componentes de la métrica divergen.

Existen dos tipos de singularidades, debido a que unas se pueden evitar con un cambio de coordenadas y otras son inevitables. Las primeras se llaman **singularidades de coordenadas**, y aparecen por una mala elección de coordenadas. Se pueden evitar cambiando de sistema coordenado. Como veremos, es el caso de la singularidad $r = r_s$, que representa un lugar físico concreto: un *punto de no retorno*, es decir, un lugar donde la fuerza gravitacional es tan intensa que nada, ni siquiera la luz, puede escapar a radios mayores que r_s . Más allá de este punto, todo queda atrapado dentro (es decir, en radios $r < r_s$) y no puede regresar al universo observable.

El otro tipo de singularidad es aquella que no se puede evitar mediante un cambio de coordenadas: la **singularidad física**, que es el caso de $r = 0$. Surge de una fallo en la variedad en la que se encuentra, es decir, un fallo en la propia geometría del espacio-tiempo, o en nuestra descripción de ella. Es un punto o región en el espacio-tiempo donde **las leyes de la física dejan de ser aplicables** tal como las entendemos. Estas singularidades son objetos de intensa investigación en física teórica.

En general, no siempre es evidente si un tensor como el de curvatura de Riemann se vuelve infinito en un punto, ya que sus componentes dependen del sistema de coordenadas utilizado, y una divergencia podría eliminarse mediante un cambio de coordenadas adecuado. Sin embargo, al construir escalares invariantes a partir de dichos tensores —como el escalar de Ricci o el escalar de Kretschmann—, que no dependen de las coordenadas, sí es posible detectar divergencias reales que indican la presencia de singularidades físicas en el espaciotiempo. Un

ejemplo clásico de esto es el escalar de Kretschmann en la métrica de Schwarzschild, que se hace infinito en $r = 0$, señalando una singularidad genuina en ese punto:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12r_s^2}{r^6} \quad (4.14)$$

4.3. Geodésicas de Schwarzschild

Para entender más la métrica de Schwarzschild tenemos que saber el comportamiento de las geodésicas. Y no en un radio cualquiera, sino en radios $r < 2GM$, ya que $r_s = 2GM$ es el punto de no retorno que mencionamos antes.

Una manera de entender la geometría del espacio-tiempo es explorar su **estructura causal**, que está definida por los **conos de luz**. Los conos de luz son una herramienta fundamental en relatividad para representar cómo puede propagarse la luz (y, por tanto, la causalidad) desde un evento en el espacio-tiempo, ya que muestran todas las posibles trayectorias que puede seguir un rayo de luz que parte de un punto dado:

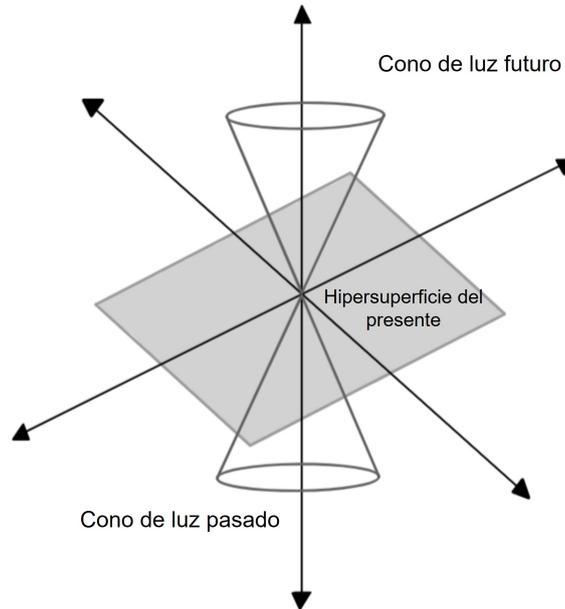


Figura 6: Ejemplo gráfico de un cono de luz.

Como vemos en la Figura 6, el **cono de luz futuro** contiene todos los eventos a los que se puede llegar viajando a la velocidad de la luz (o más lento) desde ese punto. Y por su parte, el **cono de luz pasado** contiene todos los eventos que podrían haber influido causalmente

en ese punto viajando a la velocidad de la luz o más lento.

Todo lo que ocurre dentro del cono de luz puede estar conectado causalmente con el evento (puede afectarlo o ser afectado). Lo que queda fuera del cono de luz no puede influir en él ni ser influido: requeriría ir más rápido que la luz, lo cual está prohibido. Vamos a analizar estos conos de luz en la métrica de Schwarzschild considerando curvas de tipo nulo radiales, es decir, con θ y ϕ constantes y $ds^2 = 0$:

$$ds^2 = 0 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (4.15)$$

donde vemos que:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (4.16)$$

Esto mide la pendiente de los conos de luz en un diagrama del tipo de la Figura 6. Para r grande, la pendiente es ± 1 , cómo sería en espacio-tiempo plano; mientras que cuando nos aproximamos a $r = 2GM$ obtenemos $dt/dr \rightarrow \pm\infty$, y los conos de luz “se cierran”, como vemos en la Figura 7. De esta forma, cualquier objeto que se aproxima a $r = 2GM$ nunca parece llegar ahí, al menos en este sistema coordenado; en lugar de eso parece que se aproxima asintóticamente a él.

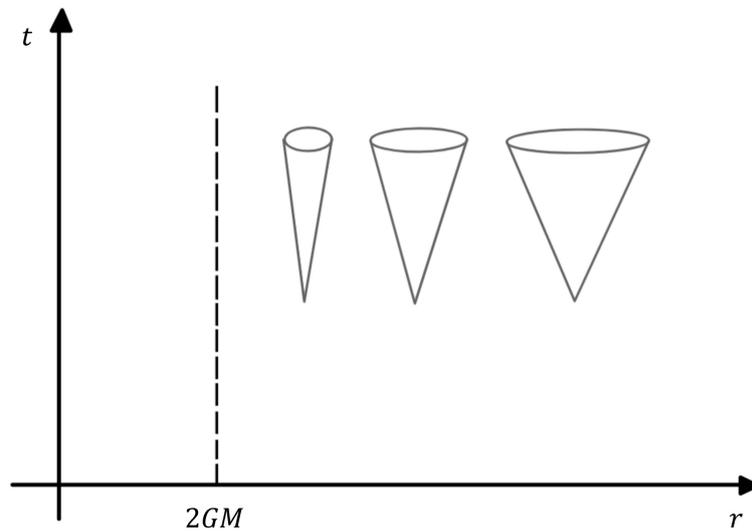


Figura 7: En las coordenadas de Schwarzschild, los conos de luz parecen “cerrarse” cuando nos aproximamos a $r = 2GM$

Como veremos, la inhabilidad aparente de llegar a $r = 2GM$ es una ilusión, ya que el objeto verdaderamente sí que alcanza este radio. Pero un observador desde lejos nunca podría ob-

servarlo. Este fenómeno se debe a la manera de medir el tiempo y las distancias de dichos observadores lejanos, y se manifiesta en la singularidad de las componentes de $g_{\mu\nu}$. Por ello queremos definir un nuevo sistema coordenado que permita ver que efectivamente se llega a $r = 2GM$. Uno especialmente conveniente es el de las **coordenadas de Kruskal**. Estas coordenadas están diseñadas para extender la solución de Schwarzschild a través de $r = 2GM$, donde las coordenadas de Schwarzschild (t, r) fallan. Se definen de la siguiente manera:

$$T = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (4.17)$$

y

$$R = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (4.18)$$

donde la coordenada T es de tipo tiempo y R es de tipo espacio. Cabe destacar que estas expresiones sólo son válidas para $r > 2GM$, porque de lo contrario el factor $\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2}$ sería imaginario. Para extenderlas a $r < 2GM$, se usan expresiones modificadas con un cambio de signo:

$$T = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (4.19)$$

y

$$R = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (4.20)$$

Aquí el papel de t y r se intercambia, es decir, **t se comporta como una coordenada espacial y r como una coordenada temporal**. Esto nos da un concepto muy importante para entender lo que sucede dentro de la región $r = r_s$: una vez que pasas este punto, caer hacia el centro (es decir, hacia $r = 0$) se vuelve tan inevitable como que pase el tiempo. ¿Por qué? Porque la estructura causal del espacio-tiempo cambia. El radio r ya no se comporta como una coordenada espacial, sino como una temporal, por lo que no puedes evitar que disminuya, de la misma manera que no puedes evitar que pase el tiempo. En otras palabras: el decrecimiento de r es tan inevitable como avanzar hacia el futuro. Por tanto, cualquier objeto que cruce $r = r_s$ está condenado a llegar a $r = 0$ en un tiempo finito. Esto implica, además, que un objeto (o la luz) en $r \leq r_s$ no puede ir a $r > r_s$. Así, llegamos al concepto de horizonte de sucesos y, con ella, al concepto de agujeros negros.

Un **agujero negro** es una región del espacio-tiempo que no puede comunicarse causalmente con el exterior, debido a la presencia de una singularidad física y un horizonte de

sucesos que actúa como frontera causal; y el **horizonte de sucesos** es precisamente el radio $r = r_s = 2GM$, que constituye la frontera que delimita el agujero negro. Una vez que un objeto cruza este límite, la estructura causal del espacio-tiempo hace que sea imposible regresar o salir, quedando atrapado inevitablemente hacia la singularidad.

Las coordenadas de Kruskal cubren una región más amplia del espacio-tiempo. En la extensión completa, es decir, utilizando las coordenadas tanto para $r > 2GM$ como para $r < 2GM$, se satisface:

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM} \quad (4.21)$$

Esta relación permite definir superficies según el valor de r , en el plano (T, R) . Dependiendo de este valor, la combinación puede ser:

- $T^2 - R^2 > 0$ para $r < 2GM$: región interior del agujero negro.
- $T^2 - R^2 < 0$ para $r > 2GM$: región exterior.
- $T^2 - R^2 = 0$ para $r = 2GM$: horizonte de sucesos.

Además, en términos de las coordenadas de Kruskal, la métrica entonces tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (4.22)$$

Con estas coordenadas podemos representar un diagrama para el plano $T - R$ (con θ y ϕ suprimidas), conocido como el **diagrama de Kruskal**, mostrado en la Figura 8:

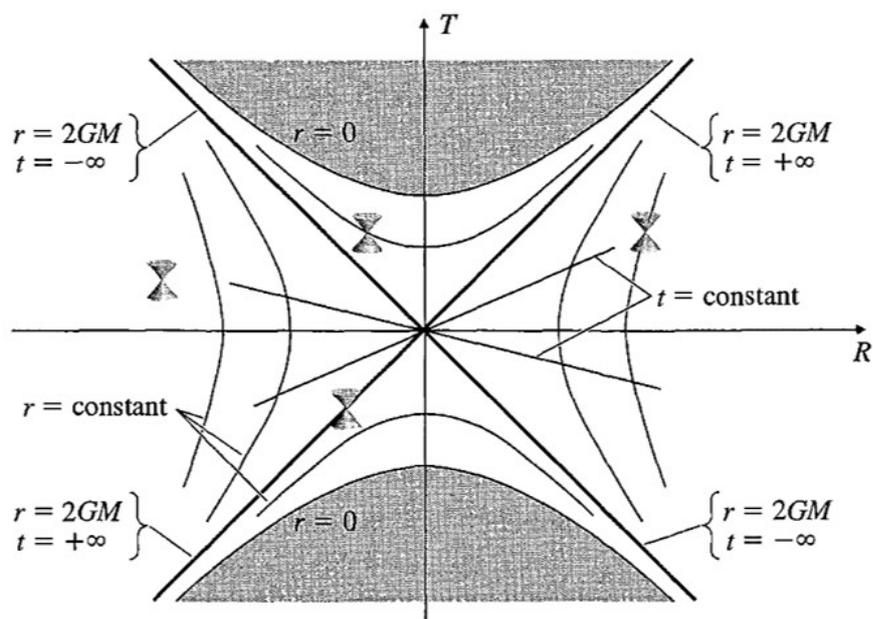


Figura 8: Diagrama de Kruskal: la solución de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal donde los conos de luz están a $\pm 45^\circ$. Las regiones están marcadas por I, II, III y IV. Imagen tomada de [2]

El diagrama representa la geometría de Schwarzschild en su máxima extensión, las coordenadas cubren lo que debemos pensar como una variedad entera descrita por esta solución. Vamos a explicar más en detalle este diagrama:

Ejes

El eje vertical es T y el eje horizontal es R , las coordenadas de Kruskal. Las líneas diagonales gruesas representan el horizonte de sucesos. Las líneas curvas superior e inferior son las singularidades del espacio-tiempo, $r = 0$, el destino inevitable de todo lo que cruce hacia dentro del agujero. Y por último, las curvas que cruzan suavemente son superficies de $r = \text{constant}$, mientras que las líneas en dirección opuesta son superficies de $t = \text{constant}$.

Regiones

Se distinguen cuatro regiones:

- **Región I:** corresponde a $r > 2GM$, es decir, el exterior de un agujero negro, por lo que sería nuestro universo exterior habitual. Aquí r es espacial y t es temporal, y están bien definidas.
- **Región II:** corresponde a $r < 2GM$, es decir, el interior del agujero negro, donde todo

se mueve inevitablemente hacia $r = 0$ (la singularidad). Aquí r actúa como coordenada temporal y t como coordenada espacial, como habíamos explicado.

- **Región III:** esta región se piensa como la región II pero con el tiempo invertido, es decir, una parte del espacio-tiempo en la cual las cosas se nos escapan: nada puede entrar, todo debe salir. En teoría, el tiempo corre hacia fuera de la singularidad. Se conoce como **agujero blanco**.
- **Región IV:** esta región se considera como un universo “espejo”, exterior a otro agujero negro. También tiene $r > 2GM$, pero no está conectado causalmente con la Región I, es decir, nosotros no podríamos alcanzarla de ninguna manera, ni en el pasado, ni en el futuro.

Conos de luz

Los conos de luz dibujados muestran las posibles trayectorias de partículas dentro de los límites de la velocidad de la luz, como habíamos comentado en la Figura 6. Observamos que, en concordancia con lo que estamos diciendo, en la región II, el cono está inclinado hacia $r = 0$, lo que refleja el no poder escapar de la singularidad, mientras que en la región III todo escapa de la singularidad. En cambio, en las regiones I y IV esto no pasa, por ser t una coordenada temporal y r una espacial. Además, de la región II no se puede ir a I, ni a IV, y por supuesto a III, de ahí que llamemos agujero negro a esta región y horizonte de sucesos a $r = r_s$.

Por muy agradable que sea el diagrama de Kruskal, muchas veces es más útil colapsar la solución de Schwarzschild en una región finita constuyendo lo que se conoce como el **diagrama conformal o de Penrose**. Es un diagrama bidimensional que conserva la información sobre las relaciones causales entre diversos puntos del espacio-tiempo y permite representar regiones infinitas en diagramas finitos. Lo que hace es eliminar dos dimensiones espaciales y concentrar en una región finita el resto mediante el efecto de una **transformación conforme**. La idea matemática se construye en el Apéndice H de [2], y es una herramienta crucial para analizar espacio-tiempos en relatividad general. No vamos a entrar en detalle en las manipulaciones matemáticas necesarias para construir estos diagramas conformes, pero vamos a considerar la versión nula de las coordenadas de Kruskal, en la que la métrica toma la forma:

$$ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r}e^{-r/2GM}(dv'du' + du'dv') + r^2d\Omega^2 \quad (4.23)$$

donde r es definida implícitamente a través de:

$$v'u' = - \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) e^{r/2GM} \quad (4.24)$$

Por tanto, para “traer” el infinito a valores finitos de coordenadas basta con la transformación:

$$v'' = \arctan \left(\frac{v'}{\sqrt{2GM}} \right), \quad u'' = \arctan \left(\frac{u'}{\sqrt{2GM}} \right) \quad (4.25)$$

con rangos $-\frac{\pi}{2} < v'' < +\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < u'' < +\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < v'' + u'' < \frac{\pi}{2}$.

La parte (v'', u'') de la métrica (que es en coordenadas angularmente constantes) está ahora relacionada conformalmente con el espacio de Minkowski. En estas nuevas coordenadas las singularidades en $r = 0$ son líneas rectas que se van desde el infinito tipo tiempo de una región asintótica hacia el infinito tipo tiempo de otra región asintótica.

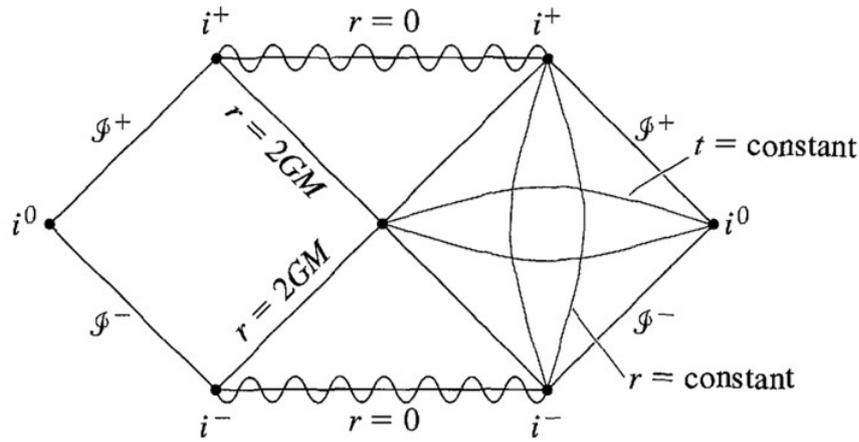


Figura 9: Diagrama conformal o de Penrose para el espacio-tiempo de Schwarzschild. Imagen sacada de [2].

En esta Figura 9, está representado el diagrama conformal para la solución máximamente extendida de Schwarzschild. Al igual que en el diagrama de Kruskal, los conos de luz están a 45° , la diferencia está en que el espacio-tiempo entero está representado en una región finita. Seguimos teniendo también cuatro regiones: nuestro universo (región I, exterior derecha), otro universo (región IV, exterior izquierda), agujero negro (región II, interior superior) y agujero blanco (región III, interior inferior). Las dos líneas onduladas horizontales representan la singularidad en $r = 0$ en la región superior (futuro del agujero negro) y en la región inferior (pasado del agujero blanco). Y las líneas diagonales que separan las regiones representan,

como en Kruskal, el horizonte de sucesos $r = 2GM$. Por su parte, \mathcal{I}^+ y \mathcal{I}^- representan, respectivamente, el infinito nulo futuro y pasado, es decir, donde terminan o comienzan los rayos de luz. El infinito temporal futuro y pasado, es decir, las trayectorias de partículas con masa, está representado por i^+ y i^- , respectivamente. Y, por último, i^0 denota el infinito espacial, es decir, el límite de $r \rightarrow \infty$ en un instante de tiempo. En cuanto a las curvas que se cruzan suavemente, son líneas de $r = \text{constante}$ (líneas de radio fijo) y líneas de $t = \text{constante}$ (rebanadas de un instante temporal).

Ahora sí, estamos listos para pasar a hablar de la primera vez que aparecieron los agujeros de gusano: en la solución de Einstein-Rosen.

5. Agujeros de Gusano

5.1. Solución de Einstein-Rosen

La primera publicación seria de agujeros de gusano se da en 1935 con el artículo de Einstein y Rosen [3], aunque la denominación “agujero de gusano” no había sido atribuida, entoces se hablaba de un “puente” que atravesaba un espacio físico en forma de doble hoja. En este artículo, intentaron construir un modelo geométrico de una partícula elemental que era finita y libre de singularidades en todas partes. La situación gráfica se representa en la siguiente imagen:

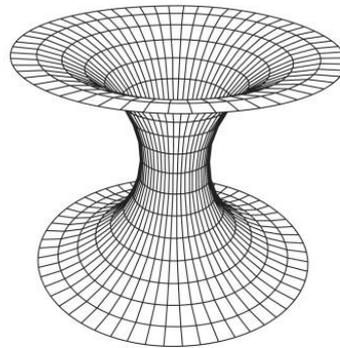


Figura 10: Representación de un puente de Einstein-Rosen.

El puente de Einstein-Rosen no es nada más y nada menos que la observación de que un cambio de coordenadas adecuado parece hacer que la singularidad en Schwarzschild desaparezca. Hay que darse cuenta de que en el tiempo en el que publicaron el artículo Einstein y Rosen las nociones de “singularidad de coordenadas” y “singularidad física” no habían sido aún separados en las mentes de los físicos; así como tampoco había un entendimiento profundo del comportamiento de la geometría de Schwarzschild en la vecindad del horizonte de sucesos. Para muchos físicos, el horizonte de sucesos *era* la singularidad. Hoy en día se entiende el descubrimiento de Einstein y Rosen como una observación de que algunos sistemas coordenados cubren naturalmente sólo las dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo maximamente extendido de Schwarzschild, pero no cubren la región interior que contiene la singularidad de la curvatura en Schwarzschild.

Consideramos la geometría ordinaria de Schwarzschild de la ecuación (4.10) dotada de uni-

dades geometrodinámicas, es decir, unidades en las que se igualan a 1 ciertas constantes, como la velocidad de la luz c o la constante de gravitación G . Si realizamos el cambio de coordenadas $u^2 = r - 2M$, podemos poner esta ecuación en la forma de Einstein-Rosen:

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 d\Omega^2 \quad (5.1)$$

con $u \in (-\infty, \infty)$ y donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Este cambio de coordenadas evita la región que contiene la singularidad de la curvatura $r \in [0, 2M)$, y cubre doblemente la región asintóticamente plana, $r \in [2M, +\infty)$, por lo que surgen dos copias de la región exterior de Schwarzschild, pegadas por un “puente”: $u = 0$. Cuando $u = +\infty$, se tiene $r = +\infty$ y se describe una región asintóticamente plana. Cuando $u = -\infty$, también se tiene $r = +\infty$ y se describe otra región asintóticamente plana, con la misma métrica pero distinta de la anterior. Es aquí donde aparece por primera vez la idea de que esta construcción podría ser un puente entre dos universos.

Para justificar esta denominación, consideramos una superficie esférica definida al considerar la coordenada u como constante. El área de la superficie es $A(u) = 4\pi(2M + u^2)^2$. Esta área es un mínimo cuando $u = 0$, con $A(0) = 4\pi(2M)^2$. Se define la parte más estrecha de la geometría como la “garganta”, mientras que la región próxima se llama “puente”, o en términos modernos, “agujero de gusano” ⁵. Ver Figura 10.

Todo esto quiere decir que el puente de Einstein-Rosen no es más que una solución maximalmente extendida de la geometría de Schwarzschild.

5.2. Evaluación de la traversabilidad en el puente de Einstein-Rosen

Más adelante, en 1962, se realiza un estudio que surge de la posibilidad de que las estructuras multiconectadas permitan atajos entre puntos distantes, lo que potencialmente podría violar la causalidad, (Ver [6]). Esto lo veíamos en la Figura 1, donde una señal podría recorrer

⁵Cabe notar que la construcción de Einstein-Rosen no funciona si $M < 0$. Esta construcción depende esencialmente de la existencia de un horizonte de sucesos, ya que la transformación de coordenadas que permite extender el espacio-tiempo más allá de la singularidad aparente requiere precisamente esa estructura. En el caso de masas negativas, la solución de Schwarzschild sigue existiendo matemáticamente, pero adquiere una característica crucialmente distinta: no presenta un horizonte de sucesos que oculte la singularidad, lo que se conoce como una singularidad desnuda. En tal situación, la transformación de Einstein-Rosen pierde su validez física y la interpretación del espacio-tiempo como un puente (o un agujero de gusano) ya no se sostiene.

un trayecto más corto a través de un agujero de gusano en comparación con una ruta directa a la velocidad de la luz. Los autores estudian en detalle el caso del puente de Einstein-Rosen, una especie de agujero de gusano. Demuestran que, en este caso, no se viola la causalidad. ¿Por qué? Porque la garganta que conecta las dos regiones del espacio-tiempo se cierra antes de que una señal pueda atravesarla completamente y causar paradojas causales.

Este resultado introduce una idea clave: **la geometría del espacio-tiempo no es estática**, aunque a primera vista lo parezca. La métrica de Schwarzschild no depende explícitamente del tiempo, lo que puede hacernos pensar que la geometría es fija. Pero si analizamos cuidadosamente la evolución geométrica —separando la geometría intrínseca del sistema de coordenadas— descubrimos que el espacio-tiempo sí está cambiando con el tiempo. La clave de por qué ocurre este cambio está en la elección de coordenadas y en el tipo de observador o superficie que se utiliza para describir el espacio-tiempo. En coordenadas de Schwarzschild, el espacio-tiempo fuera del horizonte parece estático: la métrica no cambia con t . Pero si cambiamos a un sistema de coordenadas más adecuado para describir lo que ocurre en la garganta, como las **coordenadas de Kruskal** que hemos visto, descubrimos que:

- La región del puente de Einstein-Rosen conecta dos regiones asintóticamente planas, pero esta conexión no es estática.
- En esas coordenadas, se ve que la garganta se forma en un instante de tiempo, se abre brevemente, y luego se cierra.
- Es decir, la geometría intrínseca de una hipersuperficie espacial cambia con el tiempo de Kruskal. Si uno toma “rebanadas” del espacio-tiempo en diferentes tiempos de Kruskal, la forma y tamaño de la garganta cambian.

Esto no puede verse con las coordenadas de Schwarzschild, porque cubren solo una parte del espacio-tiempo completo. En particular, no permiten describir completamente la región del “puente” de Einstein-Rosen, ni ver la dinámica de su evolución. Cuando se extiende la solución usando otras coordenadas (como Kruskal), se descubre que hay estructura global y dinámica que no era visible antes.

Aun así, uno podría preguntarse: ¿y si enviamos una señal justo cuando la garganta está abierta? En principio, eso parece posible. Pero el análisis muestra que la garganta se cierra tan rápido que ninguna señal tiene tiempo suficiente para atravesarla completamente. Por

eso, la comunicación entre los dos lados del puente está prohibida, y así la causalidad se preserva. La situación se muestra en la siguiente figura:

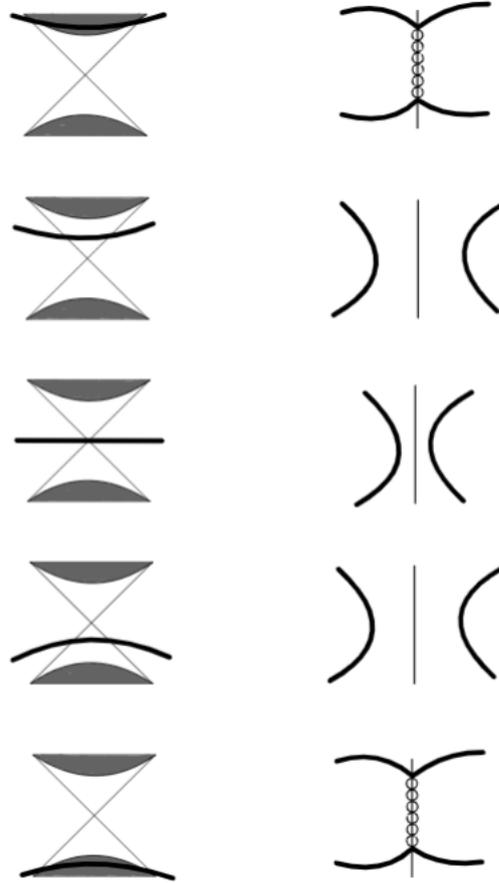


Figura 11: Geometrodinámica de la garganta de Schwarzschild. Los diagramas de la izquierda están representados en función de las coordenadas de Kruskal u y v . Los de la derecha son una representación esquemática de la geometría tridimensional de la Figura 10.

En conclusión, el puente de Einstein-Rosen no es estable ni transitable de forma duradera. Aunque parece un túnel que conecta dos universos, esta conexión solo existe por un instante. Si queremos enviar una señal o partícula a través de él, debe hacerse justo cuando la garganta está abierta, y aún así hay muchas limitaciones físicas. El análisis revela que la métrica de Schwarzschild contiene un agujero de gusano efímero, que se abre y se cierra rápidamente.

5.3. Soluciones de Morrison y Thorne

En 1987, Michael S. Morris y Kip S. Thorne presentaron una nueva solución a las ecuaciones de Einstein que describe agujeros de gusano que, en principio, podrían ser atravesados por seres humanos. Es esencial en estas soluciones que el WH (Wormhole) posea una garganta en la que no haya horizonte; y esta propiedad, junto con las ecuaciones de campo de Einstein, impone una restricción extrema sobre el material que genera la curvatura del espacio-tiempo del WH, lo que hace que este material “exótico” viole las condiciones de energía vistas en la sección anterior. Veremos esto con más detalle más adelante en esta sección.

Vamos a estudiar un ejemplo simple pero ilustrativo de un **agujero de gusano atravesable**. Es un modelo teórico que nos ayuda a entender cómo podría ser un túnel entre dos regiones del espacio-tiempo.

Se considera una métrica del tipo:

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.2)$$

donde b_0 es una constante, t es una coordenada temporal propia de un observador estático (marca el tiempo), l es una distancia radial propia, que puede tomar valores positivos o negativos (es decir, cruza la “garganta” del agujero de gusano), y θ , ϕ son coordenadas angulares esféricas. Los rangos de estas coordenadas son $-\infty < t < \infty$, $-\infty < l < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Esta métrica describe un espacio-tiempo **estático** (no cambia con el tiempo) y con **simetría esférica**. Lo más importante: este espacio-tiempo **no tiene horizontes** (ya que $g_{tt} = -1$ nunca se anula), y conecta dos regiones asintóticamente planas cuando $l \rightarrow \pm\infty$. Es decir, se comporta como un túnel que conecta dos “mundos” separados.

El radio de cada esfera de simetría en este espacio-tiempo es:

$$r(l) = \sqrt{b_0^2 + l^2} \quad (5.3)$$

El valor mínimo del radio ocurre en $l = 0$, donde $r = b_0$ y representa la **garganta** del agujero de gusano. A medida que l crece (en valor absoluto), el radio también aumenta, tendiendo a una región plana en los extremos.

Para visualizar mejor esta geometría, se puede considerar una sección espacial en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ y en un instante de tiempo fijo $t = \text{constante}$ (ver Figura 10). Esto per-

mite representar la curvatura espacial del túnel embebiéndolo⁶ en un espacio tridimensional euclídeo con coordenadas cilíndricas (z, r, ϕ) , cuya métrica es:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (5.4)$$

En este contexto, se puede encontrar una función de embebimiento $z(r)$ que describe la forma de la superficie espacial:

$$z(r) = \pm b_0 \ln \left(\frac{r}{b_0} + \sqrt{\left(\frac{r}{b_0}\right)^2 - 1} \right) \quad (5.5)$$

Esta función permite visualizar el túnel como una superficie bidimensional curva, tipo paraboloides, donde el radio mínimo $r = b_0$ se encuentra en el cuello del túnel, y hacia ambos lados la superficie se extiende suavemente. Esta función de embebimiento resulta muy útil como herramienta geométrica para entender la forma del agujero de gusano.

El espacio-tiempo está curvado, especialmente cerca de la garganta, como lo muestran las componentes del tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = -R_{l\theta l\theta} = -R_{l\phi l\phi} = \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \quad (5.6)$$

Estas componentes reflejan que la curvatura se localiza principalmente en torno al cuello, y que disminuye al alejarse ($l \rightarrow \pm\infty$), lo que corresponde a regiones planas.

Al calcular el tensor energía-momento que genera este espacio-tiempo mediante las ecuaciones de Einstein, se obtiene:

$$-T^{tt} = -T^{ll} = T^{\theta\theta} = T^{\phi\phi} = \frac{c^4}{8\pi G} \cdot \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \quad (5.7)$$

Este resultado tiene una interpretación importante:

- La densidad de energía T^{tt} es **negativa**, lo que significa que la materia que sostiene el agujero de gusano debe tener propiedades exóticas: viola todas las condiciones de energía.
- Existe una tensión radial y presiones tangenciales, todas de igual magnitud, parecidas a las que tendría un campo eléctrico o magnético, pero con energía negativa.

⁶Un **embebimiento** es una representación de una geometría curvada dentro de un espacio de mayor dimensión, que permite visualizar su curvatura de forma intuitiva.

Por tanto, este modelo muestra que para mantener estable la garganta de un agujero de gusano atravesable se necesita una forma de **materia exótica**, que no es compatible con ningún material conocido en laboratorio. Aunque el modelo es matemáticamente consistente, su realización física plantea serios desafíos.

Ahora vamos a presentar una derivación detallada de agujeros de gusano atravesables.

5.3.1. Propiedades necesarias de los agujeros de gusano atravesables.

Como vamos a iniciar un estudio detallado de los agujeros de gusano atravesables, vamos a presentar todas las propiedades a modo de recopilación de puntos que tenemos que ir mirando para conseguir esa traversabilidad. Esta lista va a ser descriptiva a modo de introducción (sacada de [7]), analizaremos cada una de estas propiedades matemáticamente en la siguiente subsección.

1. La métrica debe ser tanto esféricamente simétrica como estática (independiente del tiempo). Esto lo imponemos por el mero hecho de simplificar los cálculos.
2. La solución debe obedecer en todos los puntos las ecuaciones de campo de Einstein. Asumimos la veracidad de la Teoría de la Relatividad General de Einstein.
3. Para que sea un agujero de gusano, la solución debe poseer una garganta que conecte dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.
4. No debe haber horizonte, ya que su existencia evitaría el viaje de ida y vuelta a través del agujero de gusano.
5. Las fuerzas de marea experimentadas por un viajero deben ser soportables, es decir, pequeñas.
6. Un viajero debe ser capaz de atravesar el agujero en una cantidad de tiempo propio finita y razonablemente pequeña (p.e. menos de un año) medida no sólo por sí mismo, sino también por los observadores que permanecen detrás o que lo esperan fuera del agujero.
7. La materia y los campos que generan la curvatura del espaciotiempo del agujero de gusano deben tener un tensor energía-momento físicamente razonable. La forma del tensor

energía-momento está fuertemente ligada a las seis propiedades anteriores. En las próximas secciones discutiremos las posibilidades de conseguir dicha forma sin contradecir las leyes físicas conocidas.

8. La solución debería ser estable bajo perturbaciones.
9. Debería ser posible “montar” el agujero de gusano. Por ejemplo, el montaje debería requerir tanto mucho menos que la masa de todo el universo como mucho menos tiempo que la edad del universo.

Las Propiedades 1-4 podemos llamarlas los **criterios básicos para un agujero de gusano**. Las Propiedades 5 y 6 nos ayudarán a ajustar los parámetros del agujero para el bienestar fisiológico humano, así que las llamaremos **criterios de usabilidad**. Por medio de la Propiedad 7, podemos ajustar los parámetros para que el material de construcción del agujero de gusano sea lo más compatible posible con nuestras expectativas actuales sobre las formas de materia permitidas por las leyes de la física.

En resumen, debemos construir una solución de las ecuaciones de Einstein utilizando las propiedades 1-4 y después debemos ajustar los parámetros del agujero de gusano buscando un balance entre las propiedades 5, 6 y 7.

5.3.2. Forma de la métrica

La Propiedad 1, discutida previamente, exige que la métrica del espacio-tiempo tenga una forma estática y con simetría esférica. Esto nos lleva a considerar la forma general para la métrica (4.5), que reescribimos como:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta, d\phi^2) \quad (5.8)$$

Aquí, las funciones $\Phi(r)$ y $b(r)$ dependen únicamente del radio, y serán restringidas por las propiedades geométricas y físicas discutidas anteriormente. En este contexto, $b(r)$ controla la forma espacial del agujero de gusano, por lo que se conoce como la **función de forma**, mientras que $\Phi(r)$ determina el corrimiento al rojo gravitacional (redshift), y por eso se le llama **función de redshift**.

Esta métrica generaliza el ejemplo específico considerado en el análisis que hicimos al principio de esta sección, donde trabajamos con una coordenada radial propia l y una métrica

particular con $\Phi(r) = 0$ y $b(r) = b_0^2/r$. En ese caso, la relación entre r y l era $l = \pm\sqrt{r^2 - b_0^2}$, con el signo positivo para una de las regiones asintóticamente planas y el negativo para la otra. La coordenada r alcanza un valor mínimo en $r = b_0$, correspondiente a la garganta del agujero de gusano, y crece hacia ambos extremos, representando así dos universos conectados por dicha garganta, tal como se ilustró en la Figura 10.

Cabe mencionar que en el caso particular de $\Phi(r) = 0$ y $b(r) = 0$, obtenemos una métrica que se reduce a la forma del espacio-tiempo de Minkoski:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta, d\phi^2) \quad (5.9)$$

5.3.3. Ecuaciones de estructura para el agujero de gusano

Los tensores de Riemann, Ricci y Einstein

Vamos a calcular los tensores de Riemann y Einstein para la métrica (5.8). Si utilizamos las distintas propiedades del tensor de Riemann que vimos en la sección 2.2.2 obtenemos 24 componentes del mismo distintas de cero:

$$\begin{aligned} R_{rtr}^t &= -R_{rrt}^t = (1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R_{ttr}^r \\ &= -(1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R_{trt}^r \\ &= -\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2 \\ R_{\theta t\theta}^t &= -R_{\theta t\theta}^t = r^2 e^{-2\Phi} R_{t\theta\theta}^\theta = -r^2 e^{-2\Phi} R_{t\theta\theta}^\theta \\ &= -r\Phi'(1 - b/r) \\ R_{\phi t\phi}^t &= -R_{\phi t\phi}^t = r^2 e^{-2\Phi} \sin^2\theta R_{t\phi\phi}^\phi \\ &= -r^2 e^{-2\Phi} \sin^2\theta R_{t\phi\phi}^\phi \\ &= -r\Phi'(1 - b/r) \sin^2\theta \\ R_{\theta r\theta}^r &= -R_{\theta r\theta}^r = -r^2(1 - b/r) R_{rr\theta}^\theta = r^2(1 - b/r) R_{r\theta r}^\theta \\ &= (b'r - b)/2r \\ R_{\phi r\phi}^r &= -R_{\phi r\phi}^r = -r^2(1 - b/r) \sin^2\theta R_{rr\phi}^\phi = r^2(1 - b/r) \sin^2\theta R_{r\phi r}^\phi \\ &= (b'r - b) \sin^2\theta / 2r \\ R_{\phi\theta\phi}^\theta &= -R_{\phi\theta\phi}^\theta = \sin^2\theta R_{\theta\phi\phi}^\phi = -\sin^2\theta R^{\rho\theta} h_{i\theta\phi} \\ &= (b/r) \sin^2\theta \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde el símbolo ' denota una derivada con respecto a la coordenada radial r , y los vectores de la base que están siendo utilizados son $(e_t, e_r, e_\theta, e_\phi)$, asociados al sistema de coordenadas t, r, θ, ϕ . Podemos realizar un cambio de coordenadas para simplificar el posterior análisis. Cambiaremos a un sistema ortonormal de coordenadas: el marco de referencia propio de un conjunto de observadores que permanecen siempre en el sistema de coordenadas en reposo, es decir, r, θ, ϕ constantes:

$$\begin{aligned} e_{\hat{t}} &= e^{-\Phi} e_t, & e_{\hat{r}} &= (1 - b/r)^{1/2} e_r, \\ e_{\hat{\theta}} &= r^{-1} e_\theta, & e_{\hat{\phi}} &= (r \sin \theta)^{-1} e_\phi \end{aligned} \quad (5.11)$$

En esta base, que es una **base no coordenada**, los coeficientes de la métrica toman la forma:

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = e_{\hat{\alpha}} \cdot e_{\hat{\beta}} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \quad (5.12)$$

y las 24 componentes no nulas del tensor de Riemann toman formas mucho más simplificadas:

$$\begin{aligned} R^{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= -R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = R^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}} = -R^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}} \\ &= (1 - b/r) \{ -\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2 \}, \\ R^{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} &= -R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R^{\hat{\theta}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} = -(1 - b/r) \Phi' / r, \\ R^{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} &= -R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}} = -(1 - b/r) \Phi' / r, \\ R^{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} &= -R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = (b'r - b) / 2r^3, \\ R^{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} &= -R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = (b'r - b) / 2r^3, \\ R^{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= -R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = b/r^3 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Con estas simplificaciones ya podemos continuar contrayendo el tensor de Riemann para calcular el tensor de Ricci y el escalar de curvatura R mediante las expresiones $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\nu}}$ y $R = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ y, con ellas, podemos hallar el tensor de Einstein, que recordamos que tenía la expresión $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} R g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Haciendo esto, obtenemos las siguientes componentes no nulas del tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\hat{t}\hat{t}} &= b'/r^2, \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= -b/r^3 + 2(1 - b/r) \Phi' / r, \\ G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)} \Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

El tensor energía-momento

Habíamos visto en la sección de agujeros negros el **teorema de Birkhoff** que establece que sólo existe una única solución esférica en el vacío que cumpla las ecuaciones de Einstein: la solución de Schwarzschild. Y acabamos de ver que el agujero de gusano asociado (el puente de Einstein-Rosen) no es atravesable. Por tanto, un agujero de gusano que sea atravesable debe estar dotado de materia, es decir, debe tener un tensor energía-momento no nulo. Como las ecuaciones de campo de Einstein requieren que el tensor energía-momento sea proporcional al tensor de Einstein, en nuestra base ortonormal nuestro tensor $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ debe tener la misma estructura algebraica que el $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ de la ecuación (5.14), es decir, las únicas componentes no nulas deben ser $T_{\hat{t}\hat{t}}$, $T_{\hat{r}\hat{r}}$, y $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$. Recordemos que estamos utilizando la base no coordenada (5.11), con la que las componentes del tensor serán:

$$\begin{aligned} T_{\hat{t}\hat{t}} &= \rho(r)c^2, \\ T_{\hat{r}\hat{r}} &= -\tau(r), \\ T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de masa-energía que estos observadores miden, $\tau(r)$ es la tensión por unidad de superficie que miden en la dirección radial y $p(r)$ es la presión en direcciones angulares.

Ecuaciones de campo de Einstein

Si calculamos las ecuaciones de campo de Einstein $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ con nuestro tensor de Einstein (5.14) y nuestro tensor energía-momento (5.15), obtenemos lo siguiente:

$$b' = 8\pi r^2 \rho, \tag{5.16}$$

$$\Phi' = (-8\pi\tau r^3 + b)/[2r(r - b)], \tag{5.17}$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\Phi' - 2(p + \tau)/r \tag{5.18}$$

Las ecuaciones (5.16) y (5.17) son las partes temporal y radial de las ecuaciones de campo, respectivamente. La ecuación (5.18) es la parte angular ($\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$) de las ecuaciones de campo con Φ'' eliminada usando la derivada radial de la ecuación (5.17).

Como vemos, las ecuaciones de campo (5.16)-(5.18) son tres ecuaciones diferenciales acopladas que relacionan 5 funciones desconocidas de r : b , Φ , ρ , τ y p . La manera habitual de solucionar

esto es asumir un cierto tipo de materia o campos para darle forma al tensor energía-momento, y a partir de la física de ese tipo de materia derivar las ecuaciones de estado para la tensión radial como función de la densidad de masa-energía $\tau(\rho)$ y para la presión lateral como función de la densidad de masa-energía $p(\rho)$. Estas ecuaciones de estado junto con las tres ecuaciones diferenciales que ya teníamos darían un sistema de 5 ecuaciones con 5 funciones incógnitas b , Φ , ρ , τ y p de r .

En nuestro estudio de agujeros de gusano atravesables nuestro planteamiento para la solución debe de estar motivado por las propiedades que vimos al comienzo de la subsección 5.3.1. Por ello debemos de “buscar” por el universo materiales o campos con un determinado tensor de energía-momento. Matemáticamente hablando, debemos controlar las funciones $b(r)$ y $\Phi(r)$ para dar forma al agujero de gusano según nuestras especificaciones, para luego evaluar las 3 ecuaciones diferenciales restantes.

De acuerdo con este planteamiento, es conveniente reescribir las ecuaciones (5.16)-(5.18) de la siguiente forma:

$$\rho = b'/[8^2], \quad (5.19)$$

$$\tau = [b/r - 2(r - b)\Phi']/[8\pi r^2], \quad (5.20)$$

$$p = (r/2)[(\rho - \tau)\Phi' - \tau'] \quad (5.21)$$

Por tanto, la estrategia para la resolución de estas ecuaciones es la siguiente: determinar $b(r)$ y $\Phi(r)$ para conseguir un agujero de gusano que cumpla las propiedades que queremos, evaluar la ecuación (5.19) con nuestra elección de $b(r)$ y determinar $\rho(r)$, evaluar la ecuación (5.20) con nuestra elección de $b(r)$ y $\Phi(r)$ y determinar $\tau(r)$ y, finalmente, evaluar la ecuación (5.21) con todo lo demás y determinar $p(r)$.

Condiciones de frontera

En algunos casos, podríamos querer que el campo responsable de mantener abierto el agujero de gusano (descrito por el tensor energía-momento) se extienda hasta distancias arbitrariamente grandes. Sin embargo, también es razonable desear que este campo esté confinado dentro de una región finita, por ejemplo, dentro de una esfera de radio $r = r_s$ ⁷. En este

⁷En este contexto, r_s es un valor arbitrario o elegido por conveniencia para limitar la región donde hay materia exótica, no es necesariamente el radio de Schwarzschild, ya que en este caso de estudio no hay horizonte de sucesos.

último caso, se impone que las funciones que describen la materia exótica (la densidad de energía ρ , la tensión radial τ y la presión lateral p) se anulen más allá de ese radio: es decir, que en $r > r_s$, estas cantidades sean cero.

De forma más precisa, las ecuaciones (5.19)–(5.21) nos dicen que:

$$\tau \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow r_s^-,$$

es decir, la tensión radial debe irse suavemente a cero al acercarse al borde desde dentro. Por otro lado, la densidad de energía ρ y la presión p no necesitan anularse de forma abrupta o discontinua: pueden seguir siendo finitas justo en el límite.

Una vez fuera del radio r_s , en la región de vacío, las ecuaciones (5.16)–(5.18) implican que el espacio-tiempo adopta la forma conocida de la solución de Schwarzschild. Esto significa que, para $r > r_s$, las funciones métricas toman la forma:

$$\begin{aligned} b(r) &= b(r_s) = \text{constante} \equiv B, \\ \Phi(r) &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{B}{r} \right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Finalmente, si queremos que el espacio-tiempo se comporte como el espacio plano (Minkowski) muy lejos del agujero de gusano —es decir, que sea asintóticamente plano— debemos imponer que:

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \Phi(r) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow \infty.$$

5.3.4. Geometría espacial del Agujero de Gusano

Embebimientos

Vamos a utilizar superficies embebidas que nos ayuden a imponer que la métrica (5.8) describa un agujero de gusano. Nos interesa particularmente la geometría de un espacio tridimensional en un momento de tiempo fijo t . Como esta geometría es esféricamente simétrica podemos fijar el valor de $\theta = \pi/2$ (que corresponde al plano ecuatorial) sin pérdida de generalidad. El elemento de línea para esta superficie se obtiene estableciendo $t = \text{const}$, $\theta = \pi/2$ en la ecuación (5.8):

$$ds^2 = (1 - b/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{5.23}$$

Queremos construir en un espacio Euclídeo de tres dimensiones, una superficie bidimensional con la misma geometría que este plano, lo que significa que queremos visualizar esta superficie como si la “retiráramos” del espaciotiempo y la embebiéramos en el espacio Euclídeo.

En el espacio Euclídeo embebido introducimos coordenadas cilíndricas z , r y ϕ , por lo que la métrica euclídea tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (5.24)$$

La superficie embebida poseerá simetría axial y por tanto se podrá escribir como función $z = z(r)$. En esa superficie el elemento de línea será:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (5.25)$$

Este elemento de línea será el mismo que el de nuestro plano ecuatorial a través del agujero de gusano (ecuación (5.23)) si identificamos las coordenadas (r, ϕ) del espacio embebido con las coordenadas (r, ϕ) del espaciotiempo del agujero de gusano, y si imponemos que la función $z(r)$ que describe esta superficie satisfaga:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} \quad (5.26)$$

Esta superficie es la que está representada en la Figura 10, y la ecuación (5.26) muestra cómo la función $b = b(r)$ da forma a la geometría espacial del agujero de gusano.

Agujero de gusano de Schwarzschild

Como ejemplo específico, vamos a considerar un agujero de gusano de Schwarzschild para el cual $b(r) = b(r_s) = \text{const} = B$. En este caso, la superficie embebida, que es solución de la ecuación (5.26), es:

$$z(r) = \pm 2B \left(\frac{r}{B} - 1 \right)^{-1/2} \quad (5.27)$$

La garganta del agujero se localiza en $r = B$. En cualquier agujero de gusano, no sólo éste, $dz/dr = \infty$ en la garganta, ya que corresponde a un plano vertical de la superficie embebida, que es precisamente lo que denominamos “garganta”. Debido a esta divergencia, r no es una buena coordenada para utilizar en la vecindad de la garganta. Sería mucho mejor la distancia radial propia:

$$dl = \pm \left[1 - \frac{B}{r} \right]^{-1/2} dr \Rightarrow l = \pm [\sqrt{r(r-B)} + B \ln(\sqrt{r/B} + \sqrt{r/B-1})] \quad (5.28)$$

Esta distancia radial l es positiva encima de la garganta (“universo superior”) y negativa debajo de la garganta (“universo inferior”). A grandes distancias de la garganta de Schwarzschild la superficie embebida se aproxima a ser plana:

$$\frac{dz}{dr}(l \rightarrow \pm\infty) = 0 \quad (5.29)$$

Agujero de gusano general

Todo agujero de gusano debe tener un radio mínimo $r = b_0$ (su garganta) para el cual su superficie embebida es vertical, es decir, $b(r) = r$. En este punto entonces, r y b coinciden y valen b_0 . Tal y como habíamos visto en el agujero de gusano de Schwarzschild, la coordenada r provoca una divergencia en la vecindad de la garganta, por lo que para el caso general tenemos que:

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - b(r)/r}} \quad (5.30)$$

es la distancia radial propia que cumple que es finita a lo largo del espaciotiempo, lo que a su vez implica que $1 - b/r \geq 0$. Como habíamos visto, lejos de la garganta en ambas direcciones radiales, el espacio debe ser asintóticamente plano, (5.29). Cabe notar que las ecuaciones (5.26) y (5.30) implican que para la superficie embebida:

$$\frac{dz}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b}{r}} \quad (5.31)$$

$$\frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \quad (5.32)$$

La siguiente figura muestra la forma general de un agujero de gusano y los significados geométricos de las ecuaciones (5.31) y (5.32).

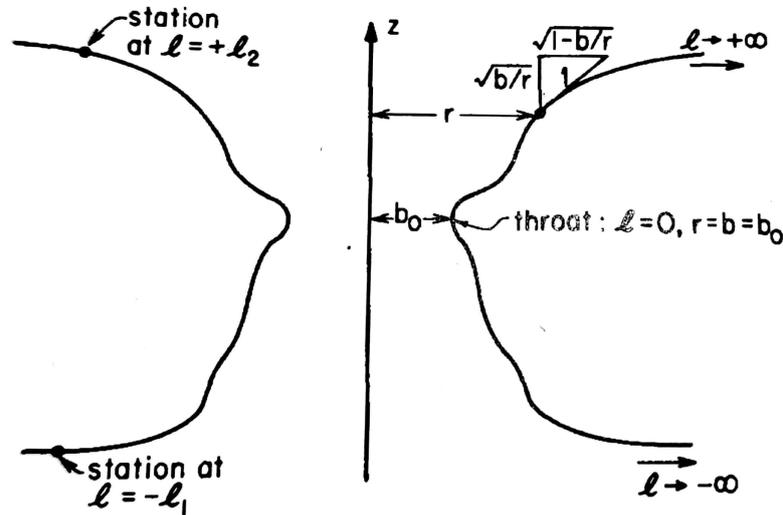


Figura 12: Diagrama de un embebimiento para un agujero de gusano general. (El diagrama debe ser rotado alrededor del eje z para que sea completo). Imagen sacada del artículo de Morrison y Thorne, [7].

Cabe mencionar que la imposición de que nuestro agujero de gusano no posea ningún horizonte corresponde con que $\Phi(r)$ es finita en todas partes.

5.3.5. Fuerzas de marea y tiempo para atravesar el agujero de gusano

Ahora sí, vamos a realizar el experimento del viaje a través del agujero de gusano. Veremos cómo se comporta un viajero que se desplaza en la dirección radial a la garganta, empezando por la posición en reposo en una estación espacial en el universo inferior, en $l = -l_1$, y acabando en la posición de reposo en una estación espacial en el universo superior, en $l = +l_2$ (ver Figura 12). Si denotamos por $v(r)$ a la velocidad radial del viajero en función del radio r , medida por un observador estático, y definimos $\gamma \equiv [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$, como en relatividad especial⁸, entonces tendremos que en términos de distancia recorrida dl , radio recorrido dr ,

⁸A partir de este punto vamos a volver a escribir la constante de la velocidad de la luz c (que habíamos tomado como $c = 1$), para ver cómo esta velocidad afecta a lo que vamos a estudiar.

coordenada de intervalo de tiempo dt y tiempo propio visto por el viajero $d\tau_T$:

$$v = \frac{dl}{e^\Phi dt} = \mp \frac{dr}{\sqrt{1 - b/r} e^\Phi dt},$$

$$v\gamma \equiv \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{dr}{\sqrt{1 - b/r} d\tau_T} \quad (5.33)$$

donde el signo negativo se refiere a la primera mitad del trayecto (universo inferior) y el signo positivo se refiere a la segunda mitad (universo superior). Debido a que diseñamos el viaje para que empiece y termine en estaciones que están en reposo, tenemos:

$$v = 0 \text{ en } l = -l_1 \text{ y } l = +l_2;$$

$$v > 0 \text{ en } -l_1 < l < +l_2 \quad (5.34)$$

Las estaciones en $l = -l_1$ y $l = +l_2$ deben estar lo suficientemente lejos de la garganta para que los efectos gravitacionales sean pequeños por ser el espacio-tiempo asintóticamente plano. Debemos comprobar lo siguiente:

- La geometría del espacio debe ser casi plana en las dos estaciones: $\frac{b}{r_1} \ll 1$, $\frac{b}{r_2} \ll 1$, siendo r_1 y r_2 las distancias radiales de cada una de las dos estaciones, respectivamente.
- El redshift gravitacional de las señales que se envían desde las estaciones hacia el infinito deben ser pequeñas: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = e^{-\Phi} - 1 \cong -\Phi \ll 1 \Rightarrow |\Phi| \ll 1$, siendo λ la longitud de onda de estas señales.
- La “aceleración de la gravedad” medida en las estaciones:

$$g_1 = -(1 - b/r_1)^{1/2} \Phi' c^2 \cong -\Phi' c^2 \quad (5.35)$$

$$g_2 = -(1 - b/r_2)^{1/2} \Phi' c^2 \cong -\Phi' c^2 \quad (5.36)$$

debe ser menor que la gravedad de la Tierra, $g_T = 980 \text{ cm/s}^2$: $|\Phi' c^2| \lesssim g_T$ en $l = -l_1$ y $l = +l_2$. Esto es para que dichas estaciones sean lugares estables y habitables, sin fuerzas gravitatorias tan intensas que destruyan o impidan la permanencia segura de observadores o equipos.

Como $|\Phi| \ll 1$ en las estaciones, el tiempo propio que marcan los relojes en estas es igual a la coordenada temporal t de la métrica espacio-temporal (5.8). Para que el viaje sea posible para seres humanos, deben satisfacerse 3 condiciones:

1. El viaje debe ser razonablemente corto, digamos menos de un año, medido tanto por el viajero como por la gente que vive en las estaciones, es decir:

$$\Delta\tau_1 = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v\gamma} \lesssim 1 \text{ año} \quad (5.37)$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{ve^\Phi} \lesssim 1 \text{ año} \quad (5.38)$$

2. La aceleración \mathbf{a} sentida por el viajero no debe superar por mucho la de la gravedad terrestre.
3. Las fuerzas de marea $\Delta\mathbf{a}$ entre las distintas partes del cuerpo del viajero no deben superar la gravedad terrestre.

Con el objetivo de analizar las aceleraciones sufridas por el viajero, vamos a introducir una base ortonormal de su marco de referencia propio, $e_{\hat{0}'}, e_{\hat{1}'}, e_{\hat{2}'}, e_{\hat{3}'}$. Si expresamos esta base del viajero en función de la base normal de coordenadas de los observadores estáticos, $e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}$, resulta que este cambio de base está dado por la transformación de Lorentz de relatividad especial:

$$e_{\hat{0}'} = \gamma e_{\hat{t}} \mp \gamma\beta e_{\hat{r}} \quad (5.39)$$

$$e_{\hat{1}'} = \mp\gamma e_{\hat{r}} + \gamma\beta e_{\hat{t}} \quad (5.40)$$

$$e_{\hat{2}'} = e_{\hat{\theta}} \quad (5.41)$$

$$e_{\hat{3}'} = e_{\hat{\phi}} \quad (5.42)$$

Cabe notar que $e_{\hat{1}'}$ apunta a la dirección del viaje (hacia donde aumenta l), y que la cuadrivelocidad del viajero es $\mathbf{u} = e_{\hat{0}'}$. El hecho de denotar esta nueva base de manera primada, es decir $e_{\hat{i}'}$, es para indicar que expresa cantidades físicas en el marco propio del objeto que se está acelerando o moviendo.

La cuadiaceleración que experimentará el viajero viene dada como la derivada covariante de la cuadrivelocidad a lo largo de la trayectoria propia:

$$a^{\hat{\alpha}'} = \frac{Du^{\hat{\alpha}'}}{d\tau} = u^{\hat{\beta}'} c^2 \nabla_{\hat{\beta}'} u^{\hat{\alpha}'} \quad (5.43)$$

Por otro lado, la cuadrivelocidad del viajero es:

$$u^{\hat{\mu}} = (u^{\hat{0}'}, u^{\hat{1}'}, u^{\hat{2}'}, u^{\hat{3}'}) = (c, 0, 0, 0) \quad (5.44)$$

Como la cuadiaceleración es siempre ortogonal a la cuadrivelocidad, su producto escalar, $a^\mu u_\mu$, es cero, por lo que:

$$a_{\hat{\mu}} u^{\hat{\mu}} = a_{\hat{0}'} u^{\hat{0}'} + a_{\hat{1}'} u^{\hat{1}'} + a_{\hat{2}'} u^{\hat{2}'} + a_{\hat{3}'} u^{\hat{3}'} = a_{\hat{0}'} u^{\hat{0}'} = 0 \quad (5.45)$$

Por tanto, $a_{\hat{0}'} = 0$. Además, como el viajero se mueve en dirección radial, su aceleración debe ser radial también, lo que implica que $a_{\hat{2}'} = a_{\hat{3}'} = 0$. Por tanto, $\mathbf{a} = a e_{\hat{1}'}$, siendo a la magnitud de la aceleración. Para saber la expresión de a , lo más recomendable es ver u_α como función de la posición radial del viajero r , para evaluar la ecuación (5.43) en el sistema de coordenadas (ct, r, θ, ϕ) :

$$\frac{a_t}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{Du^t}{d\tau} = u^\alpha \nabla_\alpha u^t = \frac{du^t}{d\tau} - \Gamma_{\alpha\beta}^t u^\alpha u^\beta \quad (5.46)$$

y después notar que $a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_t = (a e_{\hat{1}'}) \cdot (\mathbf{e}_t) = -\gamma \beta e^\Phi a$. Esto último lo hemos hecho utilizando que $\mathbf{e}_t = e^\Phi \mathbf{e}_{\hat{t}}$ (ecuación (5.11)) y la expresión para $\mathbf{e}_{\hat{t}}$ de (5.40). Todo esto da como resultado:

$$a = \mp \sqrt{1 - \frac{b}{r}} e^{-\Phi} (\gamma e^\Phi)' c^2 = e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) c^2 \quad (5.47)$$

Nuestro requisito de que el viajero no sienta una aceleración mayor que la gravedad terrestre se traduce entonces en:

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d(\gamma e^\Phi)}{dl} \right| \lesssim \frac{g_T}{c^2} \simeq \frac{1}{0,97 \text{ años luz}} \quad (5.48)$$

Ahora sí, vamos a analizar las fuerzas de marea que siente el viajero, utilizando el análisis de la desviación geodésica de la sección 2.2.5. Denotamos como ξ la separación entre dos partes del cuerpo, por ejemplo, entre la cabeza y los pies. Esta separación es puramente espacial en el sistema de referencia del viajero, lo que quiere decir que $\xi \cdot \mathbf{u} = -\xi^{\hat{0}'} = 0$, donde \mathbf{u} es la cuadrivelocidad dada por (5.44). Por tanto la aceleración dada por las fuerzas de marea entre las dos partes del cuerpo viene dada por la ecuación de desviación de las geodésicas (2.75):

$$\Delta a^{\hat{\alpha}'} = -c^2 R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'} u^{\hat{\beta}'} \xi^{\hat{\gamma}'} u^{\hat{\delta}'} \quad (5.49)$$

siendo $R^{\hat{\alpha}'}_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'}$ las componentes del tensor de curvatura de Riemann, que recordamos que es asimétrico en sus dos primeros índices. Este factor $\Delta a^{\hat{\alpha}'}$ que acabamos de calcular, representa la aceleración que sufre el viajero y vimos en la Figura 5. Aplicando esto y que $u^{\hat{\alpha}'} = \delta_{\hat{0}'}^{\hat{\alpha}'}$ y $\xi^{\hat{0}'}$ en el sistema de referencia del viajero, tenemos que $\Delta a^{\hat{\alpha}'}$ es puramente espacial con componentes:

$$\Delta a^{\hat{j}'} = -c^2 R^{\hat{j}'}_{\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'} \xi^{\hat{k}'} = -c^2 R_{\hat{j}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'} \xi^{\hat{k}'} \quad (5.50)$$

Transformando las componentes (5.13) del tensor de Rieman del sistema de referencia de los observadores estáticos $e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}$ al sistema de referencia del viajero $e_{\hat{0}'}, e_{\hat{1}'}, e_{\hat{2}'}, e_{\hat{3}'}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} &= R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \times \left(-\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right) \\ R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} &= R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} = \gamma^2 R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} + \gamma^2 \beta^2 R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r-b)\Phi' \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

Como estas son las únicas partes no nulas de $R_{\hat{j}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'}\xi^{\hat{k}'}$ en el sistema de referencia del viajero, la aceleración ocasionada por las fuerzas de marea toma la forma simple:

$$\begin{aligned} \Delta a^{\hat{1}'} &= -c^2 R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'}\xi^{\hat{1}'} \\ \Delta a^{\hat{2}'} &= -c^2 R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'}\xi^{\hat{2}'} \\ \Delta a^{\hat{3}'} &= -c^2 R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'}\xi^{\hat{3}'} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Una vez más, demandamos que para $|\xi| \sim 2$ m (el tamaño del cuerpo del viajero) y para ξ orientada a lo largo de cualquier dirección espacial en el sistema de referencia del viajero, $|\Delta \mathbf{a}| \lesssim g_T$. Combinando las ecuaciones (5.51) y (5.52) podemos escribir esta restricción como:

$$\begin{aligned} |R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'}| &= \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \times \left(-\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - (\Phi')^2\right) \right| \\ &\lesssim \frac{g_T}{c^2 \times 2 \text{ m}} \cong \frac{1}{(10^{10} \text{ cm})^2} \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} |R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'}| &= \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r-b)\Phi' \right] \right| \\ &\lesssim \frac{g_T}{c^2 \times 2 \text{ m}} \cong \frac{1}{(10^{10} \text{ cm})^2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

La ecuación (5.53) se denomina **restricción de la marea gravitacional radial** y se puede ver como una restricción al coeficiente métrico Φ . Esta restricción se satisface fácilmente estableciendo $\Phi' = 0$ en todo punto. Por otro lado, la ecuación (5.54) se denomina **restricción de la marea gravitacional lateral** y se puede ver como una restricción a la velocidad v con la que el viajero atraviesa el agujero de gusano. Más adelante estudiaremos las implicaciones de estas dos restricciones en un ejemplo concreto de agujero de gusano.

5.3.6. Energía-momento que genera la curvatura del agujero de gusano

Restricciones en la tensión y la densidad de masa en la garganta

Las restricciones que hemos establecido para la función de forma del agujero de gusano, $b(r)$,

dan lugar mediante las ecuaciones de Einstein (5.19)-(5.21) a condiciones sobre la densidad de masa ρ , la tensión radial τ y la presión lateral p que generan la curvatura espaciotemporal. Las condiciones más exigentes tienen lugar en la garganta del agujero. El hecho de que en ésta $r = b = b_0$, junto con el hecho de que $(r - b)\Phi' \rightarrow 0$ implica, mediante la ecuación (5.20) que:

$$\tau_0 = \frac{1}{8\pi Gc^{-4}b_0^2} \sim 5 \times 10^{41} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \left(\frac{10 \text{ m}}{b_0} \right)^2 \sim 5 \times 10^{11} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \left(\frac{1 \text{ año luz}}{b_0} \right)^2 \quad (5.55)$$

siendo τ_0 la tensión en la garganta. Esto será una tensión demasiado elevada, ya que trabajaremos con valores de b_0 no demasiado grandes (del orden de un año luz), debido que queremos evitar agujeros de gusano con una extensión espacial excesiva. Notar que para $b_0 \sim 3 \text{ km}$, τ_0 tiene la misma magnitud, $\sim 10^{37} \text{ dyn/cm}^2$, que la presión del centro de una estrella de neutrones altamente masiva. Incluso para un tamaño de garganta extremadamente largo, $b_0 = 1$ año luz, τ_0 podría ser producida por un campo magnético sólo si la fuerza de ese campo fuera de $B \sim 10^6 \text{ Gauss}$.

En la vecindad de la garganta, podemos investigar otro aspecto clave de esta tensión definiendo la función adimensional:

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{b/r - b' - 2(r - b)\Phi'}{|b'|} \quad (5.56)$$

donde hemos utilizado las ecuaciones de campo de Einstein (5.19) y (5.20) para reemplazar las funciones de energía-momento τ y ρ por sus contrapartes geométricas b y Φ . A continuación vamos a explicar la importancia de esta función adimensional.

El requerimiento de que el agujero de gusano pueda conectar asintóticamente espacio-tiempos planos implica que en la garganta la superficie embebida se ensanche hacia afuera, como se puede ver en las Figuras 10 y 12. Este ensanchamiento se puede entender matemáticamente como que la inversa de la función de embebimiento $r(z)$ debe satisfacer $d^2r/dz^2 > 0$ en o cerca de la garganta, $r = b$. Vamos a ver las consecuencias de esta restricción. Para empezar, invertimos la ecuación (5.26):

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2} \quad (5.57)$$

Diferenciando esta ecuación con respecto de z obtenemos una versión de la *condición de ensanchamiento*:

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \text{ en o cerca de la garganta, } r = b \quad (5.58)$$

Ahora, combinando la ecuación (5.56) con la ecuación (5.58) podemos reescribir ζ para cualquier radio r como:

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|} \quad (5.59)$$

Esta relación, junto con la finitud de ρ y, por tanto, de b' (por medio de la ecuación (5.19)) y el hecho de que $(r-b)\Phi' \rightarrow 0$ en la garganta, hace posible que podamos reescribir la condición de ensanchamiento (5.58) como:

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \text{ en o cerca de la garganta, } r = b = b_0 \quad (5.60)$$

Aspectos problemáticos de $\tau_0 > \rho_0 c^2$

La condición $\tau_0 > \rho_0 c^2$ es profundamente problemática: nos dice que en la garganta la tensión debe ser tan grande que exceda la densidad total de masa-energía $\rho_0 c^2$. Llamaremos a los materiales con esta propiedad **materiales exóticos**. Por ello, la función adimensional de la que hablábamos ζ , se llamará **función de exotividad**.

La naturaleza exótica del material de la garganta del agujero es especialmente problemática por sus implicaciones en las medidas que haga un observador que se mueve a través de esta garganta con una velocidad radial próxima a la velocidad de la luz, $\gamma \gg 1$. Tal observador ve una densidad de energía (que es la proyección del tensor energía-momento (5.15) en su vector de la base $e_{\hat{0}'} = \gamma e_{\hat{t}} \mp \gamma \beta e_{\hat{r}}$) dada por:

$$T_{\hat{0}'\hat{0}'} = \gamma^2 T_{\hat{t}\hat{t}} \mp 2\gamma^2 \beta^2 T_{\hat{t}\hat{r}} + \gamma^2 \beta^2 T_{\hat{r}\hat{r}} = \gamma^2 [\rho_0 c^2 - \beta^2 \tau_0] = \gamma^2 (\rho_0 c^2 - \tau_0) + \tau_0 \quad (5.61)$$

Si el observador se mueve lo suficientemente rápido (es decir, con γ lo suficientemente grande), verá una **densidad de energía-masa negativa**.

Entonces, un agujero de gusano estático y esférico debe ser generado por materia cuya densidad de energía-masa sea negativa. Sin embargo, esto también es cierto para cualquier agujero de gusano atravesable, aunque sea no esférico y no estático. La razón por la que ocurre esto ya la hemos comentado en la subsección 5.2, en la que explicábamos que los haces de rayos de luz (geodésicas nulas) que entran en el agujero de gusano por una de las bocas y emergen por la otra deben tener áreas transversales que inicialmente disminuyen y luego aumentan. El cambio de disminución a aumento solo puede ser producido por una repulsión gravitatoria de la materia a través de la cual pasan los rayos de luz, una repulsión que requiere densidad

de energía negativa.

En las décadas de 1960 y 1970 la mayoría de físicos defendían firmemente que ningún observador debería medir una densidad de energía negativa. Esto era lo que habíamos llamado la **Condición de Energía Débil** o Weak Energy Condition, a la cual cuando se le añaden más restricciones se convierte en la **Dominant Energy Condition** o la **Strong Energy Condition**. Descubrimientos posteriores, como el de Hawking de que los agujeros negros pueden evaporarse y, correspondientemente, sus áreas de superficie pueden encogerse violando la segunda ley de la mecánica de los agujeros negros, forzaron a enfrentarse al hecho de que los campos cuánticos pueden violar las condiciones de energía. Para ser más precisos, hay estados cuánticos en los que el valor esperado (normalizado) del tensor energía-momento viola todas las condiciones de energía. De hecho, la situación más general en la que ocurre esto es en la creación cuantomecánica de partículas. Por eso, por ejemplo un observador cualquiera estático justo sobre el horizonte de un agujero negro de Schwarzschild aislado verá un valor esperado, independiente del tiempo, negativo para la densidad de energía (ver [8]). Esta densidad de energía negativa está asociada a la creación de partículas cerca del horizonte que después se evaporarán y, correspondientemente, al flujo de energía negativa en el horizonte, que causa que éste se encoja en respuesta a la evaporación.

Éste y más ejemplos de violaciones de las condiciones de energía nos advierten de que no deberíamos asumir la imposibilidad de la existencia de material exótico que se requiere para agujeros de gusano atravesables. Lo que sí podemos hacer es buscar maneras de minimizar su uso.

Formas de minimizar el uso de materiales exóticos

Como el material exótico es potencialmente problemático, nos conviene utilizarlo lo mínimo posible en nuestras soluciones. Para ello es para lo que sirve utilizar la función de exotividad ζ , (5.56), que cuantifica cómo de exótico es un material. A la hora de calcular soluciones de agujeros de gusano específicas, nos apoyaremos en tres métodos distintos para limitar la cantidad de estos materiales:

1. Utilizar material exótico ($\zeta > 0$) a través del agujero de gusano, pero hacer que la densidad de este material decaiga rápidamente en función del radio según nos movemos por la garganta. Por ejemplo, tomamos $b = b_0 = \text{const}$, $\Phi = 0$, para lo que tenemos las

siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 0, & \tau(r) &= \frac{b_0}{8\pi Gc^{-4}r^3}, \\ p(r) &= \frac{b_0}{16\pi Gc^{-4}r^3}, & \zeta &= \infty \end{aligned} \quad (5.62)$$

Esta solución tiene el problema de que ζ es positiva y muy grande en todo punto, aunque el material exótico decaiga rápidamente con el radio.

2. Utilizar material exótico como la única fuente de curvatura, pero restringirla completamente a un radio R_S tal que $\zeta > 0$ para todo $r < R_S$, y $\rho c^2 = \tau = p = 0$ para $r > R_S$.
3. Concentrar el material exótico a una región central muy pequeña $-l_c < l < +l_c$ alrededor de la garganta, y rodear esa pequeña región con materia normal, es decir, $\zeta > 0$ para $|l| < l_c$ y $\zeta \leq 0$ para $|l| \leq l_c$.

5.4. Una solución con una restricción radial de la energía-momento.

Vamos a ver un ejemplo de solución que confina el material exótico a una región finita alrededor del agujero de gusano. Para conseguir esto utilizaremos simplemente una solución con una fuerza de marea radial nula en el interior de una superficie de radio R_S y la uniremos de forma continua al exterior de una solución de Schwarzschild. Elegiremos:

$$\begin{aligned} b &= b_0(r/b_0)^{1-\eta}, \text{ con } 0 < \eta = \text{const} < 1 \\ \Phi &= \Phi_0 = \text{const}, \text{ para } b_0 \leq r < R_S \end{aligned} \quad (5.63)$$

Dada esta forma para las funciones $b(r)$ y $\Phi(r)$ del interior del agujero de gusano, obtenemos a partir de las ecuaciones (5.19)-(5.21):

$$\begin{aligned} \rho(r) &= (1 - \eta)b(r)/(8\pi Gc^{-2}r^3), \\ \tau(r) &= \rho c^2/(1 - \eta), \\ p(r) &= \eta\rho c^2/2(1 - \eta) \end{aligned} \quad (5.64)$$

Correspondientemente, mediante la ecuación (5.56), obtenemos que la exotividad $\zeta(r)$ es una constante:

$$\zeta(r) = \eta/(1 - \eta) \quad (5.65)$$

Cabe notar que esta solución “interior” satisface todas las restricciones del agujero de gusano:

- Hay una garganta en $r = b_0$.
- No hay horizontes, ya que $\Phi = \text{const}$ en todo punto.
- El diagrama embebido se ensancha hacia afuera para $\eta > 0$.

Recordemos de las condiciones de frontera que vimos en la sección 5.3.3, que las ecuaciones de campo de Einstein y la ley de equilibrio de la fuerza radial permiten discontinuidades en ρ y p , pero requieren que $\tau \rightarrow 0$ de forma continua. Por tanto, para hacer que τ sea cero cerca de la superficie radial R_S , debemos unir la solución del interior a una capa de transición en R_S que, a su vez, unimos a un vacío externo en $R_S + \Delta R$. Una elección simple para esta capa de transición es:

$$\begin{aligned}\rho(r) &= [\tau(R_S)/c^2](R_S/\Delta R), \\ \tau(r) &= \tau(R_S) - [\tau(R_S)/\Delta R](r - R_S), \text{ para } R_S < r < R_S + \Delta R\end{aligned}\tag{5.66}$$

Las ecuaciones de Einstein (5.16), (5.17) y después la ecuación (5.21) implican entonces que:

$$\begin{aligned}b(r) &= \frac{8}{3}\pi Gc^{-4}(r^3 - R_S^3)\frac{R_S\tau(R_S)}{\Delta R} + b(R_S), \\ \Phi'(r) &= \frac{-8\pi Gc^{-4}\tau r^3 + b(r)}{2r(r - b(r))}, \\ p(r) &= \frac{r}{2}((\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau') - \tau\end{aligned}\tag{5.67}$$

Elegiremos el espesor de la capa de transición como $\Delta R = b(R_S)$ por simplicidad, y asumiremos que se encuentra lejos de la garganta, $R_S \gg b_0$, de manera que $\Delta R = b(R_S) \ll R_S$. De esta forma, las ecuaciones (5.66) y (5.67) implican que, aparte de errores de orden $\Delta R/R_S \ll 1$, b , Φ' y τ cambian linealmente a través de la capa, mientras que p y ρ son constantes:

$$\begin{aligned}b(r) &= b(R_S) + \frac{r - R_S}{\Delta R}b(R_S), \text{ por lo que } B = b(R_S + \Delta R) = 2b(R_S), \\ \Phi'(r) &= \frac{r - R_S}{\Delta R}\frac{B}{2R_S^2}, \text{ por lo que } \Phi'(R_S + \Delta R) = \frac{B}{2R_S^2}, \\ \tau(r) &= \tau(R_S) - \frac{r - R_S}{\Delta R}\tau(R_S), \text{ por lo que } \tau(R_S + \Delta R) = 0, \\ p(r) &= \frac{R_S}{2\Delta R}\tau(R_S), \\ \rho(r) &= \frac{R_S}{\Delta R}\frac{\tau(R_S)}{c^2}\end{aligned}\tag{5.68}$$

Las dos primeras ecuaciones de (5.68) permiten juntar la solución en $r = R_S + \Delta R$ con una solución de Schwarzschild (ecuación (5.22)). Las dos siguientes ecuaciones (para τ y p)

muestran que la capa de transición está una enorme presión para contrarrestar el gradiente radial de τ , según τ se anula. En comparación con estas dos enormes fuerzas internas contrapuestas, la fuerza gravitacional de la capa es despreciable. Las tres últimas ecuaciones juntas muestran que las ecuaciones de estado del material de la capa son $p = \rho/2$ (ρ independiente de τ). Nuestra elección para ρ en la capa (ecuación (5.66)) fue motivada por el deseo de que el material de la capa no fuera exótico.

Vamos a localizar las estaciones espaciales en el borde de la región de Schwarzschild ($r_1 = r_2 = R_S + \Delta R$) y vamos a imponer que el viajero sea capaz de pararse en ellas sin ser gravitacionalmente aplastado. La condición sobre la aceleración, ecuación (5.48) es la más restrictiva:

$$|\Phi'(R_S + \Delta R)| = \frac{B}{2R_S^2} \ll (9,2 \times 10^{15} \text{ m})^{-1} \quad (5.69)$$

donde hemos usado que $B/2 = \Delta R \ll R_S$ y la ecuación (5.68) para Φ' . En virtud de la ecuación (5.63) con $\eta = \frac{1}{2}$, esto corresponde a:

$$R_S > 1 \times 10^{11} \text{ m} (b_0/10 \text{ m})^{1/3} \simeq 0,6 \text{ a.u.} (b_0/10 \text{ m})^{1/3} \quad (5.70)$$

lo que significa que debemos hacer el radio de la superficie del agujero de gusano R_S muy grande para mantener pequeña la aceleración de la gravedad en las estaciones espaciales. Este valor grande de R_S implica, mediante las ecuaciones (5.63) y (5.68) que:

$$B \equiv b(R_S + \Delta R) = 2b(R_S) \simeq 1,9 \times 10^6 \text{ m} (b_0/10 \text{ m})^{2/3} \quad (5.71)$$

Cuando la solución exterior de Schwarzschild

$$b(r) = B \text{ y } \Phi(r) = \frac{1}{2} \ln(1 - B/r) \text{ para } r > R_S + \Delta R \quad (5.72)$$

se une a la capa (5.68), encontramos, además de correcciones fraccionales del orden de $\Delta R/R_S \ll 1$, que Φ , es decir la el corrimiento al rojo o *redshift*, en el interior del agujero de gusano toma el valor:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \ln(1 - B/R_S) \simeq \frac{B}{2R_S} \quad (5.73)$$

Esto muestra que $e^{2\Phi_0} = (1 - B/R_S)$ difiere de la unidad solamente por una pequeña cantidad, de manera que el tiempo propio medido por observadores estáticos es casi el mismo que el tiempo t del viaje a través del agujero de gusano. Correspondientemente, el análisis del viaje

a través del agujero de gusano que hicimos en la subsección 5.3.5 es válido en este caso, y en particular, un viaje “cómodo” requiere $v \lesssim (60 \text{ m/s})(b_0/10\text{m})$ en la garganta.

En cuanto a la velocidad del viajero, v , tenemos que está restringida por las fuerzas de marea, ecuación (5.54):

$$\left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left(\frac{rb' - b}{r} \right) \right| \leq \frac{1}{(10^8 \text{ m})^2} \quad (5.74)$$

que, según la ecuación (5.63) con $\eta = \frac{1}{2}$ y asumiendo $\gamma \simeq 1$, se reduce a:

$$\frac{v}{c} \leq \left(\frac{2r}{10^8 \text{ m}} \right) \left(\frac{r}{b_0} \right)^{1/4} \Rightarrow v \lesssim (60 \text{ m/s}) \left(\frac{r}{b_0} \right)^{5/4} \left(\frac{b_0}{10 \text{ m}} \right) \quad (5.75)$$

Otra restricción importante sobre esta velocidad es que el viajero no debe sentir una aceleración muy grande, según la ecuación (5.48) con $\gamma \simeq 1$, Φ constante y v/dt :

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d^2l}{dt^2} \right| \lesssim g_T \quad (5.76)$$

Para ser más concretos, pediremos al viajero que acelere alejándose de la estación inferior con $d^2l/dt^2 = +g_T$ hasta que esté a medio camino de la garganta, después que decelere con $d^2l/dt^2 = -g_T$ hasta quedarse en reposo en la garganta. Más adelante, deberá acelerar alejándose de la garganta con $d^2l/dt^2 = +g_T$ hasta estar a medio camino de la estación superior, y finalmente desacelerar con $d^2l/dt^2 = -g_T$ hasta llegar a estar en reposo en la estación superior. Con este planteamiento de viaje su velocidad máxima será:

$$v_{max} = \left(\frac{1}{2} g_T R_S \right)^{1/2} = 7 \times 10^5 \text{ m/s} (R_S/10^{11} \text{ m})^{1/2} \quad (5.77)$$

que da $\gamma \simeq 1$ siempre y cuando

$$R_S \ll 10^{16} \text{ m} \quad (5.78)$$

Este perfil de velocidad, $v(r)$ asociado con este esquema satisface fácilmente la restricción de las fuerzas de marea (5.75) para todos los radios, y da un tiempo total de viaje de estación a estación de:

$$\Delta\tau_T = \Delta t = \left(\frac{32R_S}{g_T} \right)^{1/2} \simeq (7 \text{ días}) (R_S/10^{11} \text{ m})^{1/2} \quad (5.79)$$

De este modo, este agujero de gusano sería muy apropiado para un viaje interestelar.

6. Conclusiones

Este trabajo ha puesto de manifiesto que la investigación sobre la teoría de la relatividad y los agujeros de gusano revela no solo la belleza y complejidad de la física teórica, sino también su capacidad de desafiarnos a expandir nuestros límites conceptuales. A lo largo de este trabajo, hemos examinado en detalle las herramientas matemáticas necesarias para comprender la geometría del espacio curvo, así como algunas soluciones distintas propuestas para la existencia de agujeros de gusano, desde la clásica solución de Einstein-Rosen hasta propuestas más recientes de Morrison y Thorne. Aunque la idea de atravesar un agujero de gusano sigue siendo, en gran medida, especulativa y enfrenta desafíos tanto teóricos como prácticos, la exploración de estos fenómenos abre un campo de investigación apasionante que podría transformar nuestra comprensión del tiempo, el espacio y la posibilidad de viajes interdimensionales.

Cabe señalar que, desde la publicación de esos trabajos, ha surgido una abundante literatura que extiende, modifica o replantea algunas de estas propuestas iniciales. Aunque no se ha abordado aquí en profundidad, esta investigación posterior ofrece posibles vías de desarrollo para futuros estudios.

En definitiva, este trabajo ha evidenciado la estrecha relación entre física y geometría, y deja abiertas múltiples preguntas que siguen estimulando la imaginación científica y abriendo caminos para una mejor comprensión de la estructura última del espacio-tiempo.

A. Formulación Lagrangiana

Algo muy importante a tener en cuenta, que permite también llegar a las ecuaciones de Einstein de una forma alternativa, es saber que la teoría de la relatividad general es una teoría clásica de campos. Esto significa que podemos utilizar el **principio de mínima acción**: la evolución temporal de todo sistema físico se da de tal manera que una cantidad denominada *acción* debe ser la mínima posible. Es decir, hay que calcular la variación de una acción y minimizarla para llegar a las ecuaciones del movimiento. Vamos a estudiar ahora cómo se aplica en espacios curvos y cuál es el lagrangiano adecuado para la relatividad general. Trabajaremos en n dimensiones.

Consideramos una teoría de campos en la que las variables dinámicas son un conjunto de campos $\phi^i(x)$. Las soluciones clásicas a tal teoría se expresan por medio de una acción, como una integral de espacio de una densidad Lagrangiana \mathcal{L} :

$$S = \int \mathcal{L}(\phi^i, \nabla_\mu \phi^i) d^n x \quad (\text{A.1})$$

Notar que ahora estamos considerando que el Lagrangiano es una función de los campos y sus derivadas covariantes (en vez de parciales), como es apropiado para el espacio curvo. Hay que notar también que como $d^n x$ es una densidad y no un tensor, \mathcal{L} es también una densidad, así que escribimos normalmente:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}} \quad (\text{A.2})$$

donde $\hat{\mathcal{L}}$ es, en efecto, un escalar. Ambas cantidades \mathcal{L} y $\hat{\mathcal{L}}$ son útiles según en qué circunstancias. La cantidad \mathcal{L} es la que utilizamos cuando variamos la acción con respecto a la métrica, mientras que la cantidad $\hat{\mathcal{L}}$ es la que está en las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas, que obtenemos del principio de mínima acción y son de la forma:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Una vez sabido esto, vamos a llegar a las ecuaciones de campo de Einstein como hemos dicho utilizando el cálculo variacional y el principio de mínima acción. Para ello, basta con saber que la métrica es un campo tensorial en sí misma, por lo que podemos transformar la acción a partir de variaciones del tensor métrico. Con ello obtendremos sus ecuaciones del movimiento y veremos que son las mismas que habíamos propuesto, es decir, la ecuación (3.3).

Lo primero que hay que establecer es cuál va a ser la acción en cuestión. Queremos un escalar

que esté construido a partir de la métrica, sus primeras derivadas y sus segundas derivadas. La respuesta es, como ya hemos visto, el escalar de Ricci. Hilbert vio que esta elección era la más simple posible para el Lagrangiano, por lo que estableció la acción que luego demostró que era correcta: la **acción de Hilbert-Einstein**:

$$S_g[g] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-|g|} R \quad (\text{A.4})$$

donde κ es la constante introducida en (3.4). Ahora, variamos con respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\delta S_g = \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.5})$$

donde δ indica variación. Acto seguido, evaluamos δS_g atendiendo a la expresión del escalar de Ricci:

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left(\sqrt{-|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\delta \left(\sqrt{-|g|} \right) R + \sqrt{-|g|} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Vamos a calcular las tres variaciones por separado:

- $\delta(\sqrt{-|g|})$:

$$\delta \left(\sqrt{-|g|} \right) = \frac{1}{2} \frac{(-|g|)}{\sqrt{-|g|}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.7})$$

- $\delta(g^{\mu\nu})$:

$$\delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \delta g_{\lambda\rho} \quad (\text{A.8})$$

donde hemos aplicado que:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\lambda} \Rightarrow \delta g^{\rho\lambda} = -g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

- $\delta R_{\mu\nu}$: lo hacemos recordando la expresión del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\rho + \delta \Gamma_{\rho\tau}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\tau + \Gamma_{\rho\tau}^\rho \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\tau - \delta \Gamma_{\nu\tau}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\tau - \Gamma_{\nu\tau}^\rho \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\tau \\ &= \nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Así, vamos a tener que:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho\nu}^\rho) \quad (\text{A.10})$$

Cabe destacar que la integral de esta variación corresponde a la integral de volumen de una divergencia, lo que es igual que la integral en la frontera, por el *teorema de la divergencia*. Por lo que podemos despreocuparnos de estos términos de frontera igualándolos a cero.

Juntando todo esto llegamos a la siguiente expresión para la variación de la acción:

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa^2} d^4x \sqrt{-|g|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^\mu{}_\nu \right] \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-|g|} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

Recordamos que hay que igualar esta expresión a cero. Utilizando que $\delta g_{\mu\nu}$ es arbitraria, obtenemos finalmente:

$$G^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Esta es la **ecuación de Einstein** para la gravedad pura, es decir, en ausencia de materia.

Pero, ¿qué pasa si queremos incorporar la materia? Acabamos de ver que a partir de la variación de una acción podemos obtener las ecuaciones de campo de Einstein. Ahora bien, a ese campo le podemos incorporar otros, como por ejemplo un campo escalar, $\phi(x)$, en representación de la presencia de materia. Es decir, tendremos una acción $S_g[g]$ que es la que hemos visto, y una nueva acción $S_\phi[g, \phi]$, correspondiente al campo escalar y que también depende obviamente de la materia. Esta acción tiene la forma:

$$S_\phi[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (\text{A.13})$$

Como vemos, el Lagrangiano toma la forma de un término correspondiente a la energía cinética menos otro término correspondiente a un potencial, de acuerdo con el Lagrangiano en Mecánica Clásica. Vamos a llamar a la acción total $S = S_g[g] + S_\phi[g, \phi]$, por lo que tendremos que realizar la variación con respecto a la métrica g y con respecto al campo escalar ϕ . Vamos a hacerlas por separado:

- Variación respecto a la métrica:

$$\delta S = \frac{\delta S_g[g]}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_\phi[g, \phi]}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.14})$$

El primer término es el que hemos calculado antes para gravedad pura: $\frac{\delta S_g[g]}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\kappa^2} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. Calculamos ahora el segundo término:

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-|g|}) \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{-|g|} \delta g^{\mu\rho} \partial_\mu \phi \partial_\rho \phi \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[g^{\sigma\lambda} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) + \partial^\sigma \phi \partial_\lambda \phi \right] \delta g_{\sigma\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-|g|} T_\phi^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Cabe notar que como ϕ es un escalar, sus derivadas covariantes coinciden con las parciales, que es lo que hemos aplicado al principio. Hemos llegado a una cantidad:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - V(\phi) \right) \quad (\text{A.16})$$

Este es el **tensor energía-momento** de un campo escalar ϕ . Por tanto vamos a tener:

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa^2} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.17})$$

Al igualar a cero para minimizar esta acción obtenemos:

$$-\frac{1}{2\kappa^2} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow G^{\mu\nu} = \kappa^2 T^{\mu\nu} \quad (\text{A.18})$$

Esta es la **ecuación de Einstein** para gravedad en presencia de materia.

- Variación respecto al campo escalar:

$$\delta S = \frac{\delta S_\phi[g, \phi]}{\delta g_\phi} \delta\phi \quad (\text{A.19})$$

ya que $\frac{\delta S_g[g]}{\delta\phi} \delta\phi = 0$ obviamente. Por tanto, lo evaluamos:

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\frac{1}{2} (\nabla_\mu \delta\phi \nabla^\mu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \delta\phi) - \frac{dV}{d\phi} \delta\phi \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[-\nabla_\mu \nabla^\mu \delta\phi - \frac{dV}{d\phi} \delta\phi \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-|g|} \left[\square\phi - \frac{dV}{d\phi} \right] \delta\phi \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde hemos tenido en cuenta que $g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \delta\phi = \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \delta\phi) - (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \delta\phi$ y hemos ignorado el término frontera $\nabla_\nu (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \delta\phi)$. El símbolo $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ es el *D'Alembertiano*. Así, llegamos a las siguientes **ecuaciones de movimiento del campo**:

$$\square\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Es decir, hemos llegado a las ecuaciones (A.18) y (A.21) que describen un campo escalar de materia en gravitación.

Finalmente, juntando todo tenemos que la variación de la acción del campo escalar es:

$$\delta S_\phi[g, \phi] = \frac{1}{2} T_\phi^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \left[\square\phi - \frac{dV}{d\phi} \right] \delta\phi \quad (\text{A.22})$$

Referencias

- [1] D. Tong. (2019). *General Relativity*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos.
- [2] Sean M. Carroll. (2003). *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. Pearson Education (US)
- [3] A. Einstein y N. Rosen. (1935). *The Particle Problem in the General Theory of Relativity*. Physical Review, 48.
- [4] M. Visser. (1995). *Lorentzian Wormholes. From Einstein to Hawking*. Woodbury, N.Y. : American Institute of Physics, c1995., c1995.
- [5] M. D. Kruskal. (1960). *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*. Physical Review, Vol 119, Number 5.
- [6] R. W. Fuller y J. A. Wheeler. (1962). *Causality and Multiply Connected Space-Time*. Physical Review, Vol 128, Number 2.
- [7] M. S. Morris y K. S. Thorne. (1988). *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. American Journal of Physics, 56(5):395-412.
- [8] P. Candelas. (1980) *Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime*. Phys. Rev. D 21, 2185