



Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Bifurcación de Neimark-Sacker

Autor: Pelayo Suárez Martínez

Supervisado por:

Santiago Ibáñez Mesa y Pablo Pérez Riera

Curso 2024-2025

Índice general

Resumen	5
1. Introducción a los sistemas dinámicos	7
1.1. Primeros conceptos	7
1.2. Puntos fijos hiperbólicos	12
1.3. Bifurcaciones	15
1.3.1. Bifurcación de nodo-silla	16
1.3.2. Bifurcación de duplicación de periodo	18
1.4. Reducción a la variedad central	22
2. Bifurcación de Neimark-Sacker	25
2.1. La forma normal de la bifurcación de Neimark-Sacker	25
2.2. Bifurcación genérica de Neimark-Sacker	39
3. Aplicación: el escarabajo rojo de la harina	51
Conclusiones	65
Bibliografía	67

Resumen

Los científicos construyen modelos que permiten explicar los procesos que se desarrollan en la naturaleza y, en un buen número de ocasiones, lo hacen usando el lenguaje de los Sistemas Dinámicos. Nos enfrentamos así a diferentes tipos de ecuaciones que reúnen una característica: dependen de parámetros. El científico considera un espacio de fases en el que evolucionan las variables que permiten describir los diferentes estados del proceso considerado, evolucionan a lo largo de una escala temporal que puede ser discreta o continua y, en efecto, en el modelo intervienen parámetros. Ante un cierto modelo, uno de los retos más determinantes es comprender los cambios de la dinámica cuando se modifican los parámetros; este es el territorio de la Teoría de Bifurcaciones.

El Grado en Matemáticas permite asomarse tímidamente al mundo de las bifurcaciones. El alumno aprende cómo, en el caso de las ecuaciones diferenciales autónomas, la dinámica local en el entorno de un punto de equilibrio hiperbólico (aquel para el cual la diferencial del campo en el punto de equilibrio tiene todos sus valores propios con parte real distinta de cero) es robusta frente a pequeñas perturbaciones. Por un lado, el Teorema de Hartman establece que esta dinámica es homeomorfa a la que muestra la parte lineal y, por otra parte, los puntos de equilibrio hiperbólicos de sistemas lineales se clasifican en función del número de valores propios con parte real positiva y negativa, unas cantidades que se mantienen ante pequeñas perturbaciones.

Para que se produzcan cambios en la dinámica cerca de un punto de equilibrio este ha de ser no hiperbólico. Los escenarios más simples son aquellos en los que la diferencial presenta un valor propio igual a cero o una pareja de valores propios imaginarios puros. Se trata de condiciones de degeneración que ligadas a otras condiciones genéricas caracterizan bifurcaciones: en el primer caso hablaríamos de bifurcaciones de nodo-silla y en el segundo de bifurcaciones de Hopf. Esencialmente, una bifurcación de nodo-silla se caracteriza por la existencia de dos puntos de equilibrio, que moviendo parámetros, colapsan y desaparecen. En el caso de una bifurcación de Hopf, se observa el nacimiento de una órbita periódica que emerge desde el equilibrio.

En este trabajo se aborda el estudio de bifurcaciones de puntos fijos de difeomorfismos. Se recoge el concepto de punto fijo hiperbólico y los resultados que, de forma análoga al caso de los puntos de equilibrio hiperbólicos de campos, establecen que la dinámica local en el entorno de un punto fijo hiperbólico es robusta frente a pequeñas perturbaciones. Veremos cómo las bifurcaciones

más elementales se presentan cuando un valor propio de la diferencial del campo en el punto fijo tiene módulo 1. El caso de valores propios 1 (bifurcación de nodo-silla) y -1 (bifurcación de duplicación de periodo) se tratará de forma breve, sin entrar en demostraciones, con el fin de desarrollar el objetivo principal del TFG: el estudio de la bifurcación de Neimark-Sacker, es decir, los cambios en la dinámica que se producen cuando, moviendo parámetros, un valor propio de la parte lineal cruza la circunferencia unidad fuera del eje real.

La bifurcación de Neimark-Sacker es, en cierto modo, una bifurcación de Hopf para puntos fijos de difeomorfismos; de hecho, esta es en muchas ocasiones la terminología que se emplea. Ahora bien, si una bifurcación de Hopf explica la génesis de una órbita periódica en el espacio de fases, la bifurcación de Neimark-Sacker da lugar a una curva cerrada invariante (formada por una infinidad de órbitas distintas). Por otra parte, el análisis de la bifurcación de Neimark-Sacker requiere de herramientas más sofisticadas, siendo el uso de resultados de tipo punto fijo en espacios funcionales quizás la más delicada. También el uso de las técnicas de reducción a forma normal requieren de un arduo trabajo.

La estructura del trabajo es la siguiente. En primer lugar, se recogen resultados que permiten contextualizar el estudio de bifurcaciones de puntos fijos y también herramientas a las que será necesario apelar, como el Teorema de Reducción a la Variedad Central. Las bifurcaciones de nodo-silla y de duplicación de periodo se recogen como complemento a los resultados principales. Para el estudio de la bifurcación de Neimark-Sacker se comenzará analizando un modelo canónico simplificado. Después se probará que, bajo ciertas condiciones genéricas, cualquier bifurcación de Neimark-Sacker puede escribirse como una perturbación del modelo canónico. Es con este modelo simplificado con el que se pondrán en juego diversas herramientas de Análisis y, en particular, el Teorema de Punto Fijo en Espacios de Banach. A modo de ilustración se considerarán dos ejemplos, uno que podríamos calificar de académico y otro con el que se modela un fenómeno real de dinámica de poblaciones.

Capítulo 1

Introducción a los sistemas dinámicos

1.1. Primeros conceptos

Un sistema dinámico es la formalización matemática de un proceso determinista. Se caracteriza por la existencia de un *espacio de fases*, en el que sería posible observar todos los posibles estados del sistema, y una *ecuación* que gobierna la evolución del proceso; esta ecuación estará determinada por las leyes subyacentes. La observación puede hacerse en tiempo discreto o en tiempo continuo y, por lo tanto, nos referiremos a sistemas dinámicos discretos o a sistemas dinámicos continuos. Tienen una amplia presencia en física, química, biología, economía o ecología, entre otros ámbitos.

Como paradigma de sistema dinámico continuo se tienen las ecuaciones diferenciales autónomas, o campos de vectores. Consideremos una ecuación diferencial

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de vectores de clase C^r , con $r \geq 1$. Asociada a la ecuación existe una aplicación

$$\varphi : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

que se denomina *flujo* del campo y que recoge la dinámica del sistema. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijado, $\varphi(t, x_0)$ se corresponde con la solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned}x' &= f(x), \\x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

La solución $\varphi(t, x_0)$ no tiene por qué estar definida para todo $t \in \mathbb{R}$, pero existe un intervalo maximal de definición I_{x_0} que contiene a $t = 0$. El dominio Δ está formado por aquellos puntos

$(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tales que $t \in I_{x_0}$. Se puede probar que Δ es un conjunto abierto y que φ es de clase C^r , es decir, que tiene la misma regularidad que el campo f . La aplicación flujo verifica:

1. $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$,
2. $\varphi(0, x) = x$,

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todos los valores t y s donde tenga sentido. Estas dos propiedades son las que caracterizan a φ como un sistema dinámico. Obsérvese que estamos suponiendo que el espacio de fases es \mathbb{R}^n ; por supuesto, podría ocurrir que fuese un cierto subconjunto de \mathbb{R}^n .

Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ del espacio de fases, llamamos *órbita* de x al conjunto

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi(t, x) \in \mathbb{R}^n : t \in I_x\}.$$

El conjunto de todas las órbitas de un campo se denomina *retrato de fases*. La Figura 1.1 ilustra el concepto de órbita.

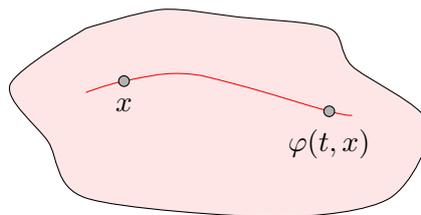


Figura 1.1: Para cada punto x del espacio de fases, se denomina órbita de x a la curva $\mathcal{O}_x = \{\varphi(t, x) \in \mathbb{R}^n : t \in I_x\}$.

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) = 0$ se denomina *punto de equilibrio* del sistema. Es inmediato que $\varphi(t, x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, la órbita del punto x_0 se reduce a x_0 , es decir, $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$. Además de los puntos de equilibrio, distinguimos las *órbitas periódicas*. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, decimos que la órbita de x_0 es *periódica* si existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, x_0) = x_0$; si T es minimal, nos referimos a él como el periodo de la órbita. Se sigue fácilmente que

$$\mathcal{O}_{x_0} = \{\varphi(t, x_0) \in \mathbb{R}^n : t \in [0, T]\}.$$

Cualquier órbita de un retrato de fases que no sea ni un punto de equilibrio ni una órbita periódica es una curva continua sin extremos y sin autointersecciones. Del estudio de los retratos de fases se ocupa la Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales, de la cual pudimos ver pinceladas en las asignaturas de ecuaciones diferenciales del Grado en Matemáticas. En particular, todas las propiedades que hemos mencionado sobre flujos y órbitas se prueban en el contexto de estas asignaturas. No obstante, nuestros intereses son otros. En este trabajo nos ocuparemos de sistemas dinámicos discretos.

Como paradigma de sistema dinámico discreto consideraremos una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o, con mayor rigor, las iteraciones de f (denotaremos $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$, \dots). Se cumple que:

1. $f^{t+s}(x) = f^t(f^s(x))$,
2. $f^0(x) = x$,

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para cualesquiera $s, t \in \mathbb{N}$. Estas propiedades, al igual que acabamos de mencionar para el caso del flujo asociado a una ecuación diferencial, son las que caracterizan el proceso iterativo como un sistema dinámico. De nuevo, estamos suponiendo que el espacio de fases es \mathbb{R}^n , aunque también podría ser un subconjunto de \mathbb{R}^n y que solo se pudiera realizar un número finito de iteraciones de f para ciertas condiciones iniciales. En el caso de que f sea invertible, podemos considerar también iteraciones de la función inversa de f . Dado $x \in \mathbb{R}^n$, llamamos órbita de x a la secuencia

$$\mathcal{O}_x = \{\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), f^0(x), f^1(x), f^2(x), \dots\},$$

la cual puede ser finita o infinita. De nuevo, podemos usar la terminología de retrato de fases para referirnos al conjunto de órbitas de un sistema dinámico discreto.

Observación 1.1. *Cada vez que nos reframos a una aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sistema dinámico, estaremos entendiendo una “dinámica” dada por las iteraciones de f .*

Observación 1.2. *Dado un sistema dinámico, podemos definir una relación entre los puntos del espacio de fases. Decimos que dos puntos x e y están relacionados si y pertenece a la órbita de x ; se puede probar que se trata de una relación de equivalencia. En este escenario, el retrato de fases del sistema no es más que el conjunto cociente con respecto a esta relación de equivalencia.*

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto fijo* de f si $f(x_0) = x_0$. Como en el caso continuo, distinguimos las *órbitas periódicas* o *ciclos*. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $f(x_0) \neq x_0$ y existe $N > 1$ verificando $f^N(x_0) = x_0$, decimos que la órbita de x_0 es *periódica*. Si N es minimal, se corresponde con el *periodo* de la órbita. En este caso la órbita de x_0 es el conjunto finito de puntos $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{N-1}(x_0)\}$.

Como ejemplos simples de sistemas dinámicos discretos podemos considerar funciones de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax, \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{R}$, para las cuales $x = 0$ es siempre un punto fijo. Incluimos en la Figura 1.2 los diagramas de tela de araña del sistema dinámico para distintas elecciones del valor del parámetro a . En las Figuras 1.2a y 1.2b se observa que las órbitas convergen al punto fijo $x = 0$, en este caso se dice

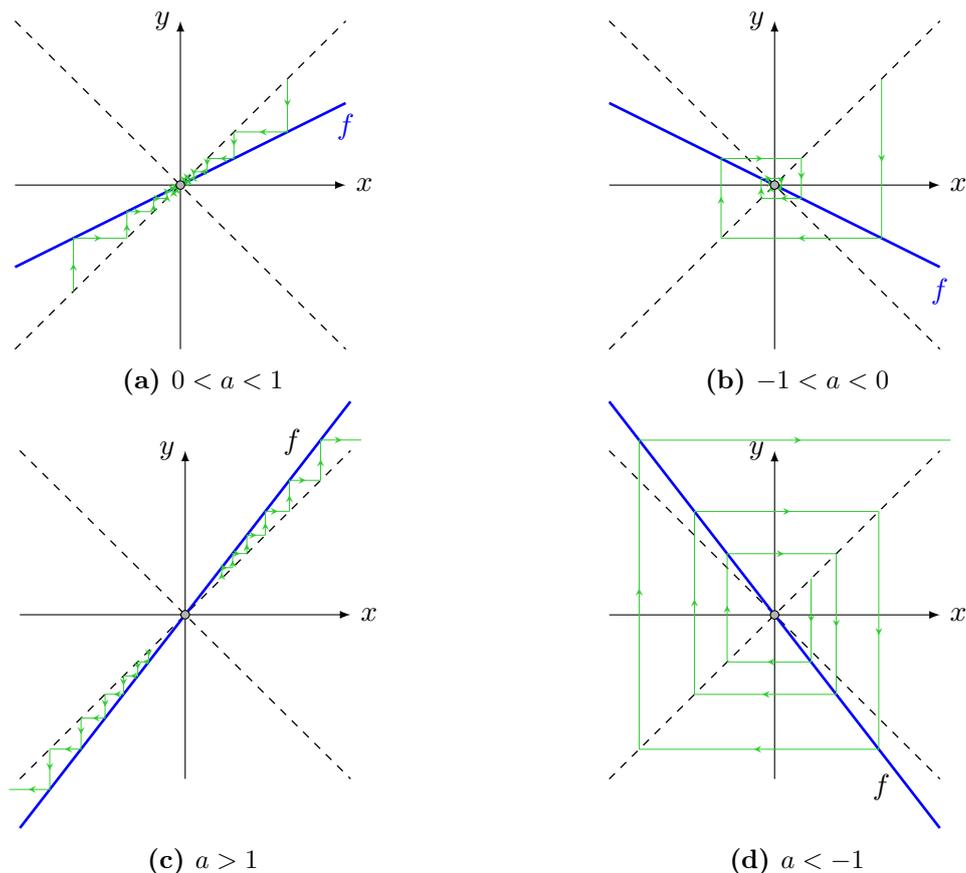


Figura 1.2: Diagramas de tela de araña asociados a la función $f(x) = ax$, para distintas elecciones del parámetro a .

que $x = 0$ es un atractor. De forma similar las Figuras 1.2c y 1.2d nos muestran cómo las órbitas en sentido inverso convergen al punto fijo $x = 0$, en este caso hablaríamos de repulsor.

Enfrentados a un conjunto de objetos (sistemas dinámicos) y movidos por una profunda inquietud matemática, sentimos el irrefrenable deseo de clasificar, es decir, de introducir una relación de equivalencia. Intuitivamente, esperamos que dos sistemas dinámicos sean equivalentes si sus retratos de fase son una deformación del otro. Con un poco más de rigor, dos sistemas dinámicos se dirán equivalentes si existe un homeomorfismo entre los espacios de fase que transforma órbitas en órbitas conservando su sentido de recorrido. Obsérvese que un tal homeomorfismo transformará puntos fijos en puntos fijos y órbitas periódicas en órbitas periódicas. A continuación formalizamos estas ideas introduciendo el concepto de conjugación topológica.

Dos campos de vectores (sistemas dinámicos continuos),

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \text{ con } x \in U \subset \mathbb{R}^n, \\ y' &= g(y), \text{ con } y \in V \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

se dicen topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ entre los correspondientes espacios de fase tal que

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)),$$

donde φ y ψ representan los flujos asociados a f y g , respectivamente. La identidad habrá de ser satisfecha para todo $x \in U$ y mientras los valores de t se mantengan en los correspondientes intervalos maximales.

Dos funciones (sistemas dinámicos discretos),

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x), \text{ con } x \in U \subset \mathbb{R}^n, \\ y &\mapsto g(y), \text{ con } y \in V \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

se dicen topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ entre los correspondientes espacios de fase tal que

$$h(f(x)) = g(h(x)),$$

para cada $x \in U$ tal que $f(x) \in U$.

Dos retratos de fase se dicen topológicamente conjugados si los correspondientes sistemas dinámicos lo son.

Introducido el concepto de conjugación topológica, podemos hacer una primera clasificación, la de los sistemas lineales hiperbólicos.

En lo que resta de trabajo, dejamos de hacer referencias explícitas a los sistemas dinámicos continuos, poniendo el foco en los discretos. Únicamente señalaremos analogías cuando estas sean pertinentes para destacar el paralelismo entre los dos mundos.

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con determinante no nulo y sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $L(x) = Ax$, un automorfismo de \mathbb{R}^n . El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es el único punto fijo de este sistema dinámico.

Definición 1.1. Diremos que el origen es atractor si $\lim_{m \rightarrow \infty} L^m x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y repulsor si $\lim_{m \rightarrow \infty} \|L^m x\| = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ o, de forma equivalente, si $\lim_{m \rightarrow -\infty} (L^{-1})^m x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Definición 1.2. Un automorfismo $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o su punto fijo en el origen se dicen hiperbólicos si todos los valores propios de A tienen módulo distinto de 1. El número de valores propios (contando su multiplicidad) con módulo menor que 1 se conoce como índice de estabilidad.

Las siguientes resultados nos proporcionan caracterizaciones de atractores y repulsores (en el contexto lineal). Su prueba puede consultarse en [6].

Teorema 1.1. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un automorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El origen es un atractor.

2. El índice de estabilidad de L es n .

3. Existen $K > 0$ y $\mu \in (0, 1)$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $m \geq 0$

$$\|L^m x\| \leq K\mu^m \|x\|.$$

4. Existe una norma en \mathbb{R}^n tal que $\|L\| < 1$.

Teorema 1.2. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un automorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El origen es un repulsor.

2. El índice de estabilidad de L es 0.

3. Existen $K > 0$ y $\mu > 1$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $m \geq 0$

$$\|L^m x\| \geq K\mu^m \|x\|.$$

4. Existe una norma en \mathbb{R}^n tal que $\|L^{-1}\| < 1$.

En el caso de puntos de equilibrio de campos de vectores lineales en \mathbb{R}^n existen resultados paralelos a los que acabamos de enunciar para puntos fijos de automorfismos hiperbólicos en \mathbb{R}^n (ver [6]). Estos resultados se acompañan de modelos canónicos sencillos. En el caso de los automorfismos hiperbólicos esto no es tan simple, ya que la dinámica no queda únicamente determinada por el carácter atractor o repulsor, sino que también depende de los signos de los valores propios. En cualquier caso, más adelante enunciaremos un resultado general.

1.2. Puntos fijos hiperbólicos

A lo largo de esta sección consideramos un sistema dinámico discreto invertible, determinado por un difeomorfismo f . Sea x_0 un punto fijo del sistema, decimos que es *hiperbólico* si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen módulo distinto de 1. Denotaremos por n_+ y n_- al número de valores propios de $Df(x_0)$ con módulo mayor y menor que 1 respectivamente.¹

Dado un punto fijo hiperbólico x_0 y un entorno V de x_0 , definimos la variedad estable local de x_0 asociada a V como

$$W_V^s(x_0) = \{y \in V : f^n(y) \in V \text{ para todo } n \geq 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x_0\}$$

¹En lo que sigue, cuando hagamos referencia a los valores propios asociados a un punto fijo, estaremos indicando los valores propios de la diferencial de f evaluada en dicho punto.

y la variedad inestable local de x_0 asociada a V como

$$W_V^u(x_0) = \{y \in V : f^n(y) \in V \text{ para todo } n \leq 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(y) = x_0\}.$$

Teorema 1.3. *Sea x_0 un punto fijo hiperbólico. Entonces existe un entorno V de x_0 tal que $W_V^s(x_0)$ y $W_V^u(x_0)$ tienen dimensiones n_+ y n_- respectivamente. Además $W_V^s(x_0)$ (resp. $W_V^u(x_0)$) es tangente en x_0 al subespacio propio T^s (T^u) generado por los valores propios de $Df(x_0)$ con módulo menor (mayor) que 1.*

Por iteración de las variedades locales, podemos definir, la variedad estable global de x_0 ,

$$W^s(x_0) = \bigcup_{n \leq 0} f^n(W_V^s(x_0))$$

y la variedad inestable global,

$$W^u(x_0) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_V^u(x_0)).$$

La clasificación de los puntos fijos hiperbólicos se sigue del siguiente resultado:

Teorema 1.4. *Los retratos de fases en los entornos de dos puntos fijos hiperbólicos x_0 y y_0 son topológicamente conjugados si tienen los mismos números n_- y n_+ de valores propios con módulo menor que 1 y módulo mayor que 1 respectivamente y los signos de los productos de todos los valores propios con módulo menor que 1 y con módulo mayor que 1 son los mismos para ambos puntos fijos.*

Observación 1.3. *Como en el caso continuo, la demostración se basa en el hecho de que cerca de un punto fijo hiperbólico un sistema es localmente topológicamente conjugado a su parte lineal; este resultado sería el Teorema de Hartman para puntos fijos hiperbólicos. Las condiciones sobre los productos se deben al hecho de que el sistema dinámico puede definir, sobre las variedades invariantes estable e inestable transformaciones que, o bien conserven la orientación, o bien la cambien. Recordemos que un difeomorfismo en \mathbb{R}^n conserva la orientación si el determinante de la matriz jacobiana es positivo y la cambia en otro caso. Para que dos difeomorfismos sean topológicamente conjugados deben tener las mismas propiedades de conservación (o no conservación) de la orientación.*

Teniendo en cuenta el estudio de los sistemas lineales podemos definir los conceptos de atractor, repulsor y silla. Sea x_0 un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo:

- si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen módulo menor que 1, diremos que x_0 es un punto fijo *atractor*,

- si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen módulo mayor que 1, diremos que x_0 es un punto fijo *repulsor*,
- si existen valores propios de $Df(x_0)$ con módulo menor que 1 y valores propios con módulo mayor que 1, diremos que x_0 es un punto de silla.

Ejemplo 1.1 Sea $x_0 = 0$ un punto fijo de un sistema dinámico discreto tal que $|f'(x_0)| < 1$. Es decir, tenemos un atractor en x_0 , con lo que todas las órbitas en un entorno suyo convergen a x_0 . Dependiendo del signo de $f'(x_0)$ podemos distinguir dos casos. Si $0 < f'(x_0) < 1$ las iteraciones convergen a x_0 de forma monótona, como en la Figura 1.2a. En el caso en que $-1 < f'(x_0) < 0$ los puntos de la órbita oscilan en torno a x_0 , como en la Figura 1.2b. En el primer caso tenemos conservación de la orientación, en el segundo caso la orientación cambia.

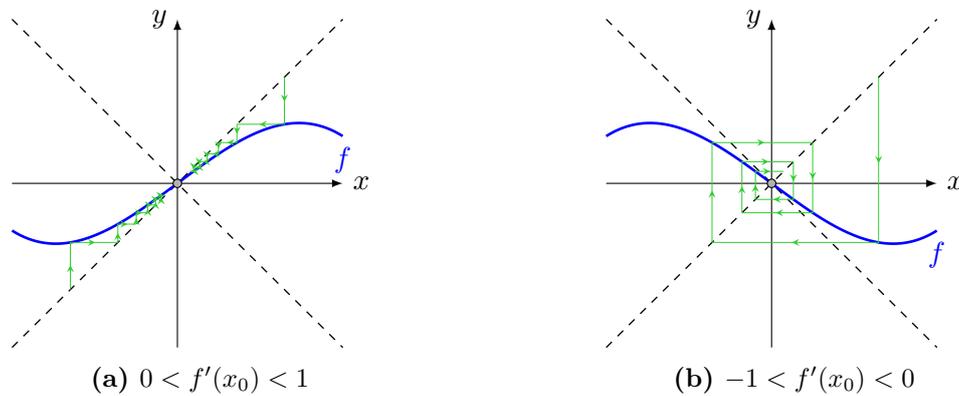


Figura 1.3: Puntos fijo atractores en dimensión 1. En el caso de la izquierda se conserva la orientación y en el de la derecha se cambia.

Ejemplo 1.2 Consideremos un sistema discreto 2-dimensional del que x_0 es un punto fijo hiperbólico con $n_+ = n_- = 1$, y con ambos valores propios reales. Las variedades estable e inestable son unidimensionales y están formadas por los puntos que convergen a x_0 bajo iteraciones de f y f^{-1} respectivamente. En la Figura 1.4 distinguimos dos casos. En el caso 1.4a consideramos ambos valores propios positivos. La variedad estable $W^s(x_0)$ está formada por dos ramas, que denotamos $W_1^s(x_0)$ y $W_2^s(x_0)$, y análogamente para la variedad inestable $W^u(x_0)$, separadas por x_0 , cuyos puntos convergen a x_0 monótonamente en norma bajo iteraciones de f o de f^{-1} . En el caso 1.4b consideramos los dos valores propios negativos. Los puntos de las órbitas en las variedades estable e inestable oscilan entre las componentes de cada variedad separadas por x_0 .

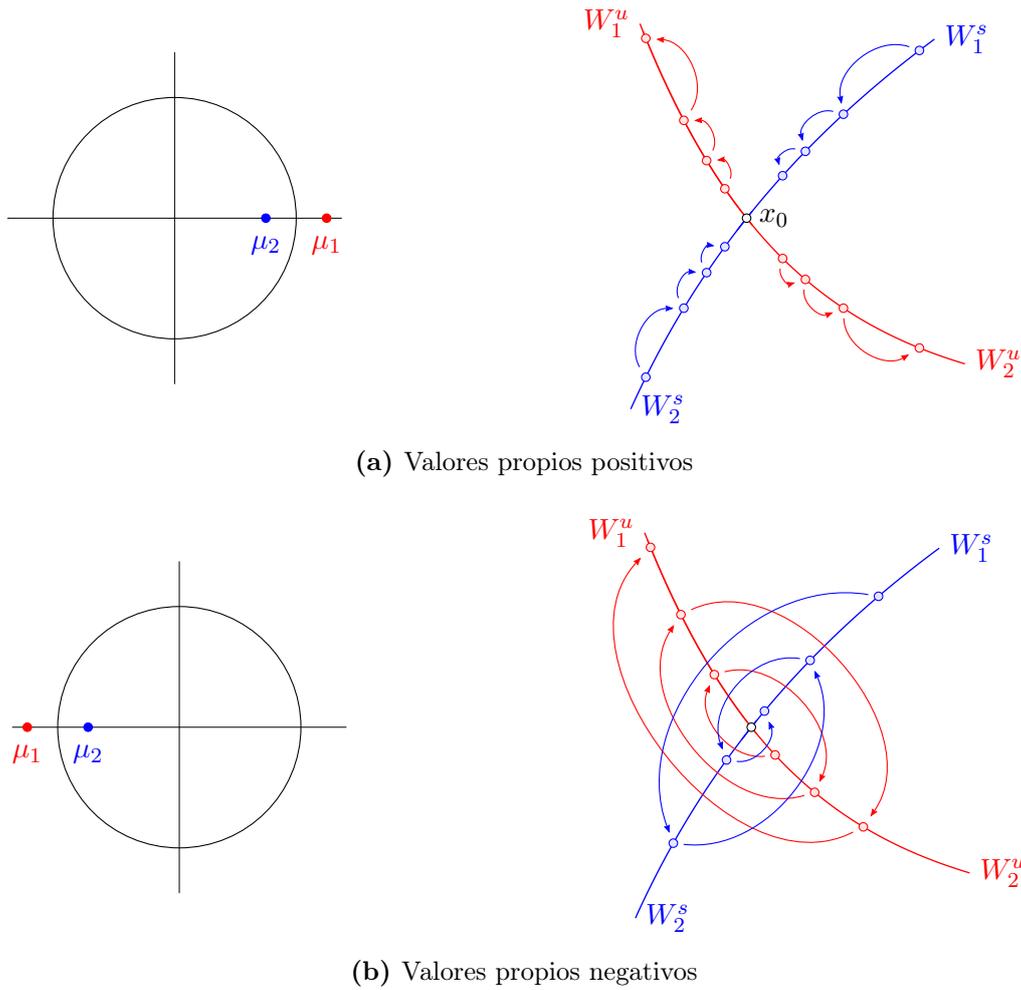


Figura 1.4: Se ilustran dos ejemplos de puntos fijos atractores en dimensión 2. En ambos casos se conserva la orientación.

1.3. Bifurcaciones

Consideremos ahora una familia de sistemas dinámicos discretos,

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

que depende de un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Decimos que $\alpha_0 \in \mathbb{R}^m$ es un *punto de bifurcación* si para todo entorno V de α_0 existen $\beta_1, \beta_2 \in V$ tales que los correspondientes sistemas dinámicos no son topológicamente conjugados. En otras palabras los puntos de bifurcación son aquellos valores de los parámetros en los que se produce un cambio en la dinámica. Diremos que un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un *punto fijo* de (1.1) si $f(x_0, \alpha) = x_0$ para algún α o, de otra forma, si x_0 es un punto fijo de f_α para algún α , donde $f_\alpha(x) = f(x, \alpha)$.

Cada bifurcación estará caracterizada por un cierto número de condiciones de degeneración. La

codimensión de una bifurcación se define como el número de condiciones independientes que la determinan. Así, las bifurcaciones de codimensión 1 aparecerán sobre hipersuperficies en el espacio de parámetros; las de codimensión 2, sobre variedades $n - 2$ dimensionales, etc. De esta forma, el conjunto de todas las bifurcaciones en una familia de sistemas dinámicos da lugar a una partición o *estratificación* del espacio de parámetros; esta estratificación se conoce como *diagrama de bifurcación* y su representación es habitual que se acompañe de ilustraciones apropiadas para explicar los cambios que se producen en la dinámica.

Más adelante nos referiremos a las formas normales de un sistema dinámico. Designaremos con este término a expresiones simplificadas, obtenidas con oportunos cambios de variable y cambios de parámetro, que nos proporcionan una dinámica topológicamente conjugada.

A continuación, para ilustrar los conceptos anteriores, se estudian dos tipos de bifurcaciones: la bifurcación de nodo-silla y la bifurcación de duplicación de periodo. Se trata de las bifurcaciones más elementales que se pueden presentar en dinámica discreta. No nos ocuparemos de demostrar resultados, nuestros objetivos son otros, más ambiciosos, relacionados con la bifurcación de Neimark-Sacker. En el libro de Kuznetsov [4, Capítulo 4], el lector puede consultar explicaciones completas y detalladas sobre las bifurcaciones de nodo-silla y de duplicación de periodo.

1.3.1. Bifurcación de nodo-silla

Consideremos el sistema dinámico discreto 1-dimensional

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha + x + x^2 = f(x, \alpha) = f_\alpha(x) \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\alpha = 0$ el sistema tiene un punto fijo no hiperbólico en $x_0 = 0$ con $f'_0(0) = 1$. Estudiamos el sistema bajo cambios en el parámetro en un entorno de $\alpha = 0$. Para $\alpha < 0$ presenta dos puntos fijos, $x_1 = -\sqrt{-\alpha}$ y $x_2 = \sqrt{-\alpha}$. Por otro lado, si $\alpha > 0$ no tenemos ningún punto fijo en el sistema. Solo con este análisis podemos concluir que $\alpha = 0$ es un punto de bifurcación. En efecto, en cada entorno de $\alpha = 0$ encontramos valores de los parámetros para los que el sistema tiene puntos fijos y valores para los que no; las correspondientes dinámicas no pueden ser conjugadas. Para completar el estudio, es obligado determinar y describir las diferentes dinámicas que se despliegan, las cuales aparecen ilustradas en el diagrama de bifurcación de la Figura 1.5. Esta bifurcación recibe el nombre de *bifurcación nodo-silla*.

Se puede observar que para el caso en que $\alpha < 0$, los puntos fijos se acercan al aumentar el valor de α hasta colapsar en un único punto cuando $\alpha = 0$, para luego desaparecer cuando $\alpha > 0$. De un cálculo directo se concluye que $|f'_\alpha(x_1)| < 1$ para todo $\alpha < 0$ suficientemente pequeño y que $|f'_\alpha(x_2)| > 1$ para todo $\alpha < 0$. Por lo tanto x_1 es estable y x_2 es inestable.

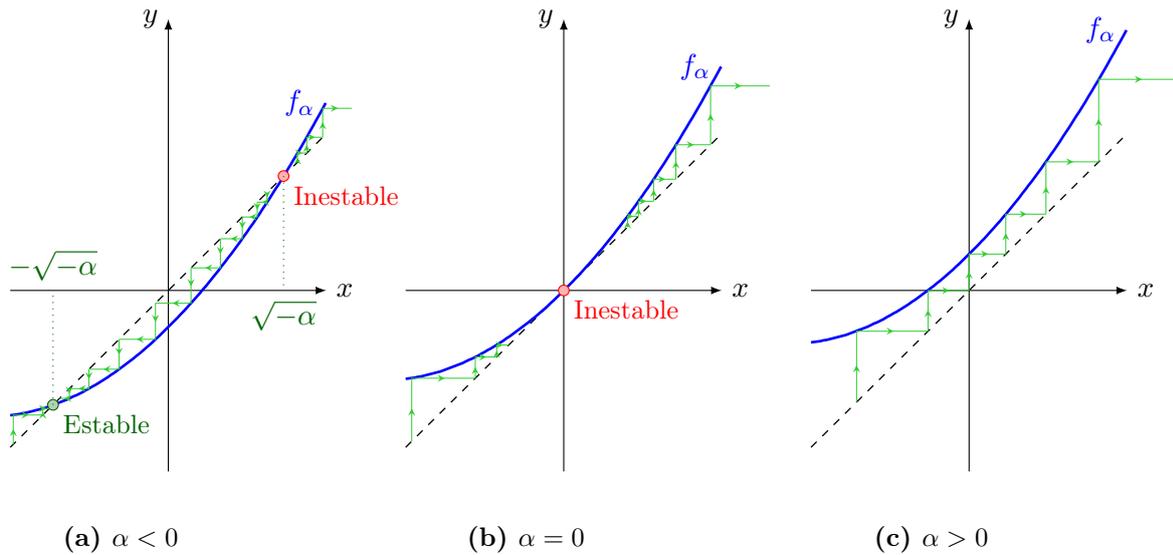


Figura 1.5: Ilustración de las diferentes dinámicas desplegadas en la bifurcación de nodo silla. Para $\alpha < 0$ hay dos puntos fijos, uno se comporta como atractor y otro como repulsor. Estos dos puntos fijos colapsan cuando $\alpha = 0$ para desaparecer para $\alpha > 0$.

Observación 1.4. *El análisis para el sistema*

$$x \mapsto \alpha + x - x^2$$

es análogo. En este caso los puntos fijos aparecen cuando $\alpha > 0$.

Vamos a añadir a (1.2) términos de orden superior considerando el sistema dinámico

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 + x^3\varphi(x, \alpha), \quad (1.3)$$

donde φ es una función suficientemente regular.² Es una consecuencia del Teorema de la Función Implícita el hecho de que para x y α suficientemente próximos a 0 el número de puntos fijos de (1.2) y (1.3) es el mismo y, además su comportamiento local es el mismo cuando $\alpha < 0$. Más aún, se puede demostrar que para cada α suficientemente próximo a 0 existe un homeomorfismo h_α que establece una conjugación topológica entre los sistemas dinámicos (1.2) y (1.3) restringidos a un entorno del origen. De forma más general, enunciaremos el siguiente teorema en el que caracterizamos aquellos sistemas que presentan una bifurcación nodo-silla.

Teorema 1.5. *Consideremos una familia de sistemas dinámicos discretos*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R},$$

²A lo largo del trabajo, y salvo que indiquemos lo contrario, entenderemos que la función es suficientemente regular respecto de todos sus argumentos.

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y supongamos que

$$f(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) \neq 0,$$

entonces la familia es localmente topológicamente conjugada en un entorno del origen a una de las siguientes formas normales de la bifurcación nodo-silla,

$$x \mapsto \alpha + x \pm x^2.$$

Observación 1.5. *En el teorema anterior hemos utilizado el concepto de conjugación topológica para familias de sistemas dinámicos. Entendemos que este concepto hace referencia a la existencia de oportunas reparametrizaciones y adecuados cambios de variable (dependientes de los parámetros) de forma que un sistema se puede transformar en el otro. El concepto de conjugación propiamente dicho entra en juego si admitimos deformaciones del espacio de fases mediante homeomorfismos para conseguir dinámicas equivalentes. En este TFG no abordaremos estos aspectos.*

Observación 1.6. *La bifurcación de nodo-silla está caracterizada por la condición de degeneración*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1.$$

Como tenemos una única condición de degeneración, decimos que la bifurcación de nodo-silla tiene codimensión 1.

1.3.2. Bifurcación de duplicación de periodo

Consideremos el sistema discreto 1-dimensional

$$x \in \mathbb{R} \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 = f(x, \alpha) = f_\alpha(x) \in \mathbb{R}.$$

con $\alpha \in (-1, 1)$. La aplicación f_α es localmente invertible en un entorno del origen.

Los puntos fijos se obtienen resolviendo la ecuación $x = f_\alpha(x)$:

$$x = -(1 + \alpha)x + x^3 \quad \iff \quad x^3 - (2 + \alpha)x = 0 \quad \iff \quad x(x^2 - (2 + \alpha)) = 0.$$

El sistema tiene un punto fijo en $x_0 = 0$ para cualquier valor de α , con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \alpha) = -(1 + \alpha).$$

Se sigue que este punto fijo es hiperbólico para $\alpha \neq 0$, siendo inestable cuando $\alpha > 0$ y estable cuando $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$ se pierde la hiperbolicidad.

Además, cuando $\alpha > -2$, los puntos $\pm\sqrt{2+\alpha}$ son también puntos fijos de f_α . Es importante destacar que estos puntos están alejados del origen cuando el valor de $|\alpha|$ es suficientemente pequeño.

Con el objetivo de estudiar órbitas periódicas de periodo 2, vamos a analizar la segunda iteración de la aplicación f_α :

$$\begin{aligned} f_\alpha^2(x) &= -(1+\alpha)(-(1+\alpha)x+x^3) + (-(1+\alpha)x+x^3)^3 \\ &= (1+\alpha)^2 x - ((1+\alpha) + (1+\alpha)^3)x^3 + 3(1+\alpha)^2 x^5 - 3(1+\alpha)x^7 + x^9, \end{aligned}$$

Es evidente que todos los puntos fijos de f_α son también puntos fijos de f_α^2 . Por lo tanto, $x_0 = 0$ y $\pm\sqrt{2+\alpha}$ deben ser ceros del polinomio $f_\alpha^2(x) - x$. Esto permite factorizar $f_\alpha^2(x) - x$ en la forma siguiente

$$f_\alpha^2(x) - x = x(x - \sqrt{2+\alpha})(x + \sqrt{2+\alpha})(x^6 + (-2\alpha - 1)x^4 + (\alpha^2 + \alpha + 1)x^2 - \alpha).$$

Es sencillo comprobar que el polinomio de grado 6 que aparece como último factor se anula en $-\sqrt{\alpha}$ y $\sqrt{\alpha}$, luego esos son también puntos fijos de f_α^2 ; además, podemos escribir ese polinomio de grado 6 en la forma

$$x^6 + (-2\alpha - 1)x^4 + (\alpha^2 + \alpha + 1)x^2 - \alpha = (x + \sqrt{\alpha})(x - \sqrt{\alpha})(x^4 - (\alpha + 1)x^2 + 1).$$

Los demás puntos fijos de f_α^2 deben ser raíces de la ecuación *bicuada*

$$x^4 - (\alpha + 1)x^2 + 1 = 0,$$

y por lo tanto sus cuadrados deben verificar

$$x^2 = \frac{\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha - 3}}{2}. \quad (1.4)$$

El discriminante de (1.4) es negativo si $\alpha \in (-3, 1)$; bajo esa condición, la función f_α^2 no tiene más puntos fijos reales que los que ya hemos señalado, que son 0, $\pm\sqrt{\alpha}$ y $\pm\sqrt{2+\alpha}$, pero estos dos últimos están alejados de 0. En la Figura 1.6 representamos la función f_α^2 ; para el caso en que $\alpha > 0$ podemos observar también los puntos fijos

$$x_1 = \sqrt{\alpha} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{\alpha},$$

que se encuentran en un entorno de $x = 0$ y que puede verse que son estables realizando un cálculo sencillo.

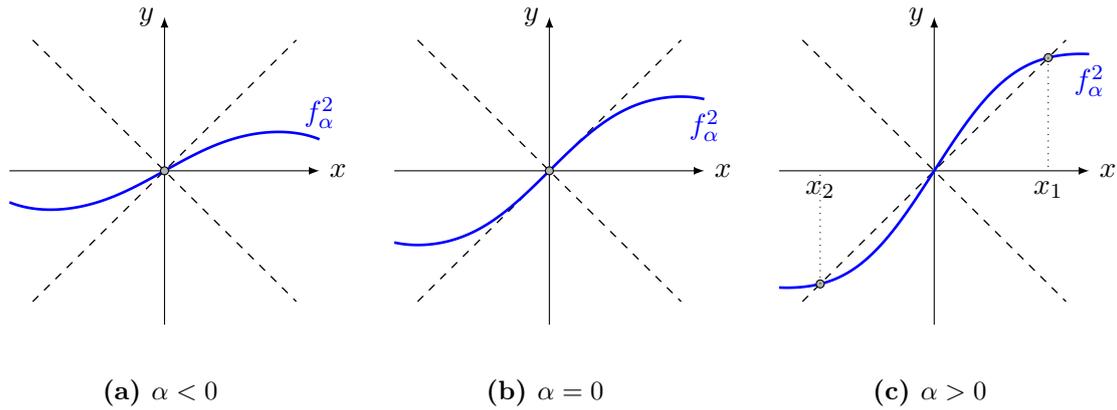


Figura 1.6: Ilustración de la segunda iteración de f_α . Para $\alpha > 0$, f_α^2 tiene, en un entorno de $x = 0$, dos puntos de corte no triviales con la recta $y = x$, lo que se corresponde con dos soluciones de la ecuación de puntos fijos.

Estos dos puntos forman una órbita periódica de periodo dos para la aplicación f_α , es decir

$$x_2 = f_\alpha(x_1), \quad x_1 = f_\alpha(x_2),$$

con $x_1 \neq x_2$. Esta órbita está representada en la Figura 1.7c en color rojo. Si el parámetro α es positivo y se va aproximando a 0, entonces los puntos x_1 y x_2 que forman la órbita periódica se van acercando hasta que colapsan en el punto fijo $x_0 = 0$ cuando $\alpha = 0$. Para $\alpha < 0$ no existen órbitas periódicas en un entorno del origen, como se ilustra en la Figura 1.7a. De este modo, en cada entorno de $\alpha = 0$ tenemos valores para los que el sistema tiene una órbita periódica de periodo 2 y valores para los que no, por lo que las dinámicas no pueden ser conjugadas. Esta bifurcación recibe el nombre de *bifurcación de duplicación de periodo*.

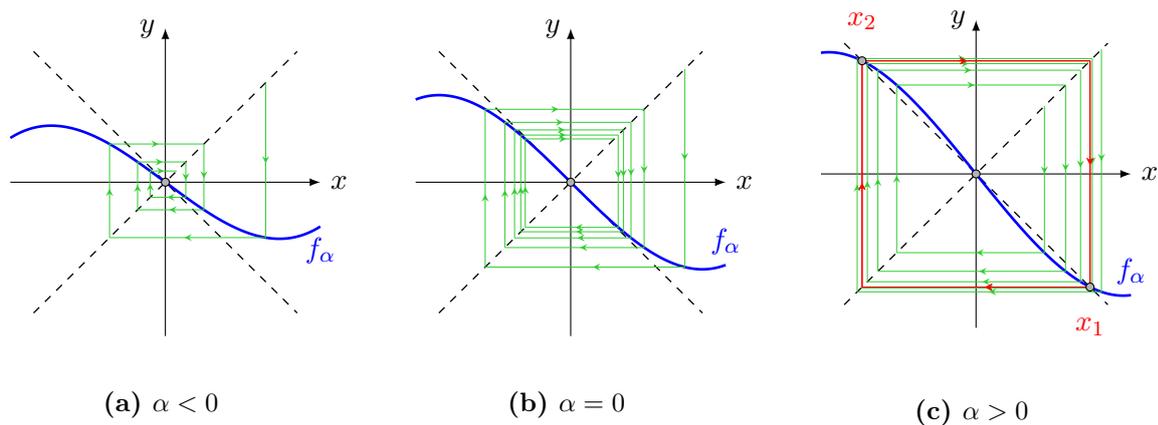


Figura 1.7: Ilustración de las diferentes dinámicas desplegadas en la bifurcación de duplicación de periodo. Para $\alpha > 0$ hay dos puntos fijos estables de f_α^2 que forman una órbita periódica de periodo 2 para la aplicación f_α .

Se puede observar que, al hacer variar α en un entorno del origen, se verifica que $f'_\alpha(0) = -(1 + \alpha) < 0$, con lo que las órbitas no convergen o divergen monótonamente, sino que oscilan en torno al equilibrio. Como ya habíamos mencionado, $|f'_\alpha(0)| < 1$ para todo $\alpha < 0$ suficientemente pequeño por lo que x_0 es estable y, por otro lado, $|f'_\alpha(0)| > 1$ para todo $\alpha > 0$ por lo que en este caso x_0 es inestable. Atendiendo al comportamiento de las órbitas de la Figura 1.7b, podemos afirmar que x_0 es estable para $\alpha = 0$, aunque en este caso no es hiperbólico, ya que $f'_0(x_0) = -1$.

Observación 1.7. *El análisis para el sistema*

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3$$

se realiza de forma análoga. En este caso $x_0 = 0$ es inestable si $\alpha = 0$. Además, la órbita periódica de periodo 2 se presenta para $\alpha < 0$ y es inestable, es decir, para valores de $\alpha < 0$ la órbita periódica es repulsora y el punto fijo en el origen es atractor.

El siguiente resultado caracteriza aquellos sistemas dinámicos que presentan una bifurcación de duplicación de periodo.

Teorema 1.6. *Consideremos una familia de sistemas dinámicos discretos*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Supongamos que

$$f(0, 0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1.$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0, 0) \neq 0 \quad y \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0, \quad (1.5)$$

entonces la familia es localmente topológicamente conjugada en un entorno del origen a la forma normal,

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x \pm x^3.$$

La demostración se puede consultar en el libro de Kuznetsov [4]. La primera condición de (1.5) es la que permite aplicar resultados del tipo del Teorema de la Función Implícita a la ecuación de puntos fijos de f_α^2 ; la segunda es necesaria para poder hacer oportunas reparametrizaciones.

Observación 1.8. *La bifurcación de duplicación de periodo está caracterizada por la condición de degeneración*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1.$$

Como tenemos una única condición de degeneración, decimos que la bifurcación de duplicación de periodo tiene codimensión 1.

1.4. Reducción a la variedad central

El estudio de cualquier bifurcación local se plantea en su dimensión natural, sistemas discretos en dimensión 1 para las bifurcaciones de nodo-silla y de duplicación de periodo y, como veremos enseguida, en dimensión 2 para el caso de la bifurcación de Neimark-Sacker.

Como cabe esperar, las bifurcaciones también se presentan en dimensiones que superan las que les corresponden de forma natural. La forma de estudiarlas se explica de forma sencilla a partir de las técnicas de reducción a la variedad central.

Consideremos un sistema dinámico discreto

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

con f una aplicación suficientemente regular. Supongamos que f tiene un punto fijo no hiperbólico en $x = x_0$ y denotemos por n_+ , n_0 y n_- al número de valores propios de $Df(x_0)$ con módulo mayor, igual y menor que 1 respectivamente. Sea T^c el subespacio propio asociado a los valores propios con módulo igual a 1. En estas condiciones, enunciamos el Teorema de la Variedad Central.

Teorema 1.7. *Bajo las hipótesis anteriores, para (1.6) existe una variedad localmente definida en torno al punto fijo, que denotaremos $W_{loc}^c(x_0)$, la cual es suficientemente regular, n_0 -dimensional, invariante y tangente a T^c en x_0 . Más aún, existe un entorno U de $x = 0$ tal que si $f^n(x_0) \in U$ para todo $n \geq 0$ ($n \leq 0$), entonces $f^n(x_0) \rightarrow W_{loc}^c(x_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow -\infty$).*

La variedad W_{loc}^c se conoce como *variedad central*. La demostración se puede consultar en [3] o en [8]. Utilizando una base de vectores propios, podemos reescribir el sistema como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu + g(u, v) \\ Cv + h(u, v) \end{pmatrix},$$

donde $u \in \mathbb{R}^{n_0}$, $v \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, B es una matriz $n_0 \times n_0$ tal que todos sus valores propios tienen módulo igual a 1 y C es una matriz $(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)$ con valores propios cuyos módulos son distintos de 1. Las funciones g y h se obtienen mediante desarrollos de Taylor y tienen términos de orden cuadrático en adelante. Podemos representar la variedad central como un grafo

$$W_{loc}^c = \{(u, v) : v = V(u)\},$$

de una función $V : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$ suficientemente regular.

Teorema 1.8. *El sistema (1.6) es localmente topológicamente conjugado en un entorno de $x = 0$ al sistema*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu + g(u, V(u)) \\ Cv \end{pmatrix}.$$

El sistema dinámico discreto n_0 -dimensional

$$u \in \mathbb{R}^{n_0} \mapsto Bu + g(u, V(u)) \in \mathbb{R}^{n_0}$$

recibe el nombre de *reducción a la variedad central*. Este resultado se aplica también al caso de sistemas del tipo

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n,$$

en los que interviene un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}^m$, pues podemos considerar esta familia como un sistema en \mathbb{R}^{n+m} sin más que definir

$$\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x, \alpha) \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Bifurcación de Neimark-Sacker

En el capítulo anterior mencionamos los conceptos fundamentales de la teoría de los sistemas dinámicos. Además introducimos la noción de bifurcación, que ilustramos a partir de las bifurcaciones de nodo-silla y de duplicación de periodo. En este capítulo nos centraremos en la bifurcación de Neimark-Sacker, que constituye el objetivo fundamental del trabajo. Nuestra principal referencia va a ser el Capítulo 4 del libro de Kuznetsov [4]. Comenzaremos estudiando la dinámica, en torno a la bifurcación, de la forma normal de la bifurcación de Neimark-Sacker. Tras haber analizado la forma normal, determinaremos las condiciones que debe verificar un sistema dinámico para presentar esta bifurcación.

2.1. La forma normal de la bifurcación de Neimark-Sacker

Consideremos el sistema dinámico discreto 2-dimensional

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

donde

$$f(x, \alpha) = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$; suponemos además que $\theta = \theta(\alpha)$, $a = a(\alpha)$ y $b = b(\alpha)$ son funciones suficientemente regulares verificando $0 < \theta(0) < \pi$ y $a(0) \neq 0$. El sistema tiene un punto fijo en $x_0 = (0, 0)$ para cualquier valor de α , con matriz jacobiana

$$A = Df(0, 0) = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Si resolvemos la ecuación característica asociada a la matriz A

$$(1 + \alpha)(\mu^2 - 2\mu \cos \theta + 1) = 0,$$

obtenemos los valores propios

$$\mu_1 = (1 + \alpha) e^{i\theta} \quad \text{y} \quad \mu_2 = (1 + \alpha) e^{-i\theta}.$$

Se sigue que este punto fijo es hiperbólico para $\alpha \neq 0$, siendo repulsor cuando $\alpha > 0$ y atractor para $\alpha \in (-2, 0)$. Para $\alpha = 0$ el punto fijo pierde la hiperbolicidad y tendremos un punto de bifurcación. Es una aplicación inmediata del Teorema de la Función Inversa, el hecho de que en un cierto entorno de $x_0 = (0, 0)$, este es el único punto fijo para α suficientemente pequeño. Para estudiar la dinámica del sistema es adecuado introducir la variable compleja

$$z = x_1 + ix_2.$$

Realizando el cambio de variable, se puede escribir el sistema (2.1) como

$$z = x_1 + ix_2 \mapsto e^{i\theta} z (1 + \alpha + d|z|^2),$$

donde $d = a + ib$. Utilizando la representación módulo-argumento $z = \rho e^{i\varphi}$, podemos escribir este nuevo sistema en forma polar

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho |1 + \alpha + d\rho^2| \\ \varphi + \theta + \beta \end{pmatrix},$$

donde β denota el argumento de $(1 + \alpha + d|z|^2)$. En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned} |1 + \alpha + d\rho^2| &= (1 + \alpha) \left| 1 + \frac{d\rho^2}{1 + \alpha} \right| \\ &= (1 + \alpha) \left(1 + \frac{d + \bar{d}}{1 + \alpha} \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \right)^{1/2} \\ &= (1 + \alpha) \left(1 + \frac{\rho^2}{2} \frac{2a}{1 + \alpha} + \mathcal{O}(\rho^4) \right) \\ &= 1 + \alpha + a\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \\ &= 1 + \alpha + a\rho^2 + \rho^4 R(\alpha, \rho), \end{aligned}$$

donde R es una aplicación suficientemente regular. Hemos simplificado la expresión realizando la expansión en serie de Taylor de $\sqrt{1+t}$ en torno a $t = 0$, esto no supone pérdida de generalidad ya que estamos estudiando la dinámica del sistema en un entorno de $x_0 = (0, 0)$, o lo que es lo mismo, en un entorno de $\rho = 0$.

Calculando β de forma explícita obtenemos

$$\begin{aligned}\beta &= \text{Arg} \left(1 + \alpha + (a + ib)\rho^2 \right) \\ &= \text{arc tg} \left(\frac{b\rho^2}{1 + \alpha + a\rho^2} \right) \\ &= \rho^2 Q(\alpha, \rho),\end{aligned}$$

con Q una aplicación suficientemente regular. En este caso hemos utilizado el desarrollo en serie de Taylor de la función $\text{arc tg } t$ en torno a $t = 0$, empleando un argumento análogo al del cálculo anterior. De esta forma llegamos al sistema

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho (1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2) + \rho^5 R(\alpha, \rho) \\ \varphi + \theta(\alpha) + \rho^2 Q(\alpha, \rho) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

correspondiente a la forma polar de (2.1). En primer lugar analizaremos la componente correspondiente al módulo, la familia de sistemas dinámicos discretos 1-dimensionales

$$\rho \in \mathbb{R}^+ \mapsto \rho (1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2) + \rho^5 R(\alpha, \rho) = g(\alpha, \rho) \in \mathbb{R}^+.$$

El sistema tiene un punto fijo $\rho_1 = 0$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ con

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(0, \alpha) = 1 + \alpha.$$

Este punto fijo es hiperbólico para $\alpha \neq 0$, siendo atractor cuando $\alpha \in (-2, 0)$ y repulsor para $\alpha > 0$. Para $\alpha = 0$ el punto fijo no es hiperbólico y su estabilidad depende de a

$$g'_0(0) = 1, \quad g''_0(0) = 0, \quad g'''_0(0) = 6a(0).$$

Así, si $a(0) > 0$ el punto fijo será repulsor (no hiperbólico) y si $a(0) < 0$ será atractor (no hiperbólico)¹.

Existe una segunda solución no nula para la ecuación de punto fijo

$$\rho = \rho (1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2) + \rho^5 R(\alpha, \rho) \implies \alpha + a(\alpha)\rho^2 + \rho^4 R(\alpha, \rho) = 0,$$

de donde se deduce

$$\rho_2(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + \mathcal{O}(\alpha).$$

¹Comprobar estos comportamientos de la dinámica pasa por el análisis de un sistema discreto de la forma $x \mapsto x + ax^3 + o(x^3)$. Es un ejercicio sencillo verificar que para cualquier condición inicial suficientemente pequeña la correspondiente órbita es una sucesión monótona convergente a 0 si $a < 0$. Si fuese $a > 0$ el ejercicio sería análogo pero trabajando con la aplicación inversa.

es otro punto fijo. No se ha tenido en cuenta la solución con $\rho < 0$ ya que $\rho = |z|$ y por ello ha de ser positivo. La dinámica del sistema dependerá del signo de $a(0)$, con lo que distinguiremos dos casos.

Consideraremos primero el caso en que $a(0) < 0$, conocido como *caso supercrítico*. El punto fijo ρ_2 está únicamente definido cuando $\alpha > 0$ con

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(\alpha, \rho_2) = 1 + \alpha + 3a(\alpha)\rho_2^2 + \mathcal{O}(\rho_2^4) = 1 - 2\alpha + \mathcal{O}(\rho_2^4),$$

por lo que es un atractor hiperbólico para α suficientemente pequeño. El sistema que determina la evolución de φ , la segunda componente de (2.3), describe una rotación dependiente de θ y ρ . Para ρ suficientemente pequeño, podemos considerar que se trata de una traslación de φ en $\varphi + \theta(\alpha)$ o, lo que es lo mismo, rotación de ángulo $\theta(\alpha)$. De esta forma, teniendo en cuenta la evolución determinada por las dos componentes de (2.3), y recordando que $z = \rho e^{i\varphi} = x_1 + ix_2$, obtenemos el diagrama de bifurcación de la Figura 2.1.

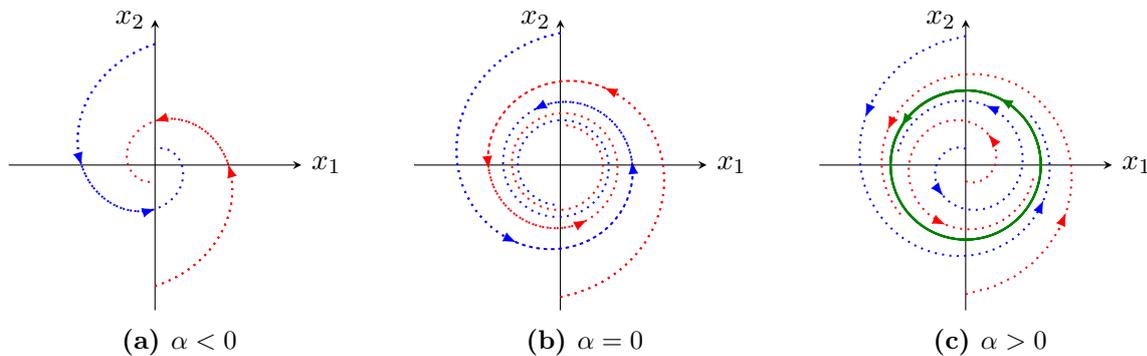


Figura 2.1: Ilustración de las diferentes dinámicas desplegadas en el caso supercrítico de la bifurcación de Neimark-Sacker. Para $\alpha > 0$ aparece una curva cerrada invariante estable y un punto fijo inestable. La curva se reduce a un punto fijo estable para $\alpha = 0$, que se mantiene cuando $\alpha < 0$.

Así, para $\alpha > 0$ tenemos un punto fijo inestable en $(x_1, x_2) = (0, 0)$; el punto fijo ρ_2 , volviendo a las coordenadas iniciales, se transforma en una curva cerrada invariante y estable. De esta forma, todas las órbitas con inicio en el interior o en el exterior de la curva cerrada, exceptuando el origen, se dirigen hacia ella. El radio de la curva viene dado por

$$r = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + \mathcal{O}(\alpha),$$

con lo que va disminuyendo a medida que el parámetro α se aproxima a 0. Cuando $\alpha = 0$, el radio de la circunferencia invariante es 0 y tenemos un único punto fijo estable en $(x_1, x_2) = (0, 0)$, que se mantiene cuando $\alpha < 0$. Los retratos de fases para $\alpha > 0$ y para $\alpha < 0$ no pueden ser topológicamente conjugados, ya que en el primer caso tenemos una curva cerrada invariante que

desaparece en el segundo, con lo que $\alpha = 0$ es un punto de bifurcación. En las Figuras 2.1a y 2.1b se puede observar que las órbitas tienden al origen más lentamente cuando $\alpha = 0$ que cuando $\alpha < 0$, pues cuando $\alpha = 0$, la relación es $\rho \mapsto \rho + \mathcal{O}(\rho^2)$. También se observa que, en los tres casos, las espirales aumentan su apertura al aumentar $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

El caso en que $a(0) > 0$ se analiza de forma análoga. Se conoce como *caso subcrítico* y el punto fijo ρ_2 está únicamente definido cuando $\alpha < 0$. Puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(\alpha, \rho_2) = 1 - 2\alpha + \mathcal{O}(\rho_2^4) > 1,$$

es inestable para valores de α suficientemente pequeños. Por tanto, cuando $\alpha < 0$ tenemos un punto fijo inestable en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ y una curva cerrada invariante inestable, cuyo radio va disminuyendo con $|\alpha|$ hasta colapsar en un punto fijo inestable en el origen cuando $\alpha = 0$. Cuando $\alpha > 0$ únicamente tenemos un punto fijo inestable en $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Esta discusión se complementa con las dinámicas representadas en la Figura 2.2.

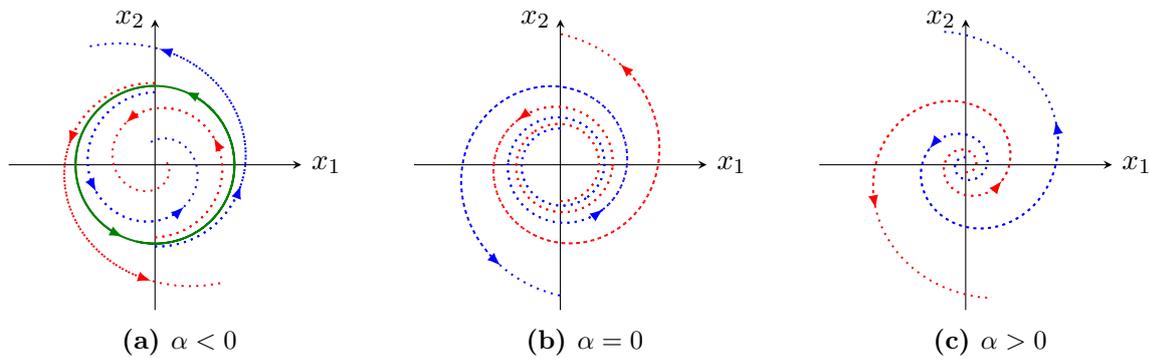


Figura 2.2: Ilustración de las diferentes dinámicas desplegadas en el caso subcrítico de la bifurcación de Neimark-Sacker. Para $\alpha < 0$ aparece una curva cerrada invariante inestable y un punto fijo estable. La curva se reduce a un punto fijo inestable para $\alpha = 0$, que se mantiene cuando $\alpha > 0$.

Por último, se puede observar que la distinción de los casos subcrítico y supercrítico se puede realizar basándose en la estabilidad del punto fijo en el punto de bifurcación.

Observación 2.1. La estructura de las órbitas del sistema (2.3) en la curva invariante depende del cociente entre el ángulo de rotación $\Delta\varphi = \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho)$ y 2π . Si el cociente es racional, es decir, si

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ primos entre sí, } q \neq 0,$$

entonces todos los puntos de la curva serán órbitas periódicas de periodo q (en el periodo se habrán completado p vueltas a la curva). En el caso en que el cociente sea irracional, no habrá

órbitas periódicas y todas las órbitas serán densas en la curva invariante.²

Vamos a añadir términos de orden superior al sistema (2.1), de esta forma consideramos el sistema dinámico discreto 2-dimensional

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, \alpha) + \mathcal{O}(\|x\|^4) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.4)$$

donde f es la aplicación definida en (2.2) y $\alpha \in \mathbb{R}$. Al contrario de lo que sucedía en las bifurcaciones de nodo-silla y de duplicación de periodo comentadas en el capítulo anterior, en este caso los términos de orden superior sí afectan al diagrama de bifurcación. Al pasar el sistema a forma polar, las funciones R y Q ahora tendrán dependencia respecto de φ . No obstante, los diagramas de bifurcación de ambos sistemas tendrán características comunes, como se demuestra en los siguientes resultados.

Lema 2.1. Sean a , b y θ funciones reales suficientemente regulares verificando $a(0) < 0$ y $0 < \theta(0) < \pi$. Sea g una función compleja tal que $g(z, \bar{z}, \alpha) = \mathcal{O}(|z|^4)$. Denotemos $d(\alpha) = a(\alpha) + ib(\alpha)$. Entonces, el sistema dinámico

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \tilde{z} = e^{i\theta(\alpha)} z (1 + \alpha + d(\alpha)|z|^2) + g(z, \bar{z}, \alpha) \in \mathbb{C} \quad (2.5)$$

tiene una curva invariante para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño.

Demostración. Paso 1: Cambios de coordenadas y reescalados. Comenzaremos introduciendo dos variables reales (s, φ) definidas de forma que

$$z = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} e^{i\varphi} (1 + s). \quad (2.6)$$

Así, podemos reescribir (2.5) como

$$e^{i\tilde{\varphi}} (1 + \tilde{s}) = e^{i(\varphi + \theta(\alpha))} (1 + s) \left(1 + \alpha - (a(\alpha) + ib(\alpha)) \frac{\alpha}{a(\alpha)} (1 + s)^2 \right) + \sqrt{-\frac{a(\alpha)}{\alpha}} g(z, \bar{z}, \alpha).$$

Sabemos que $g(z, \bar{z}, \alpha) = \mathcal{O}(|z|^4)$ y teniendo en cuenta (2.6), $z = \mathcal{O}(\alpha^{1/2})$, con lo que llegamos a

$$\sqrt{-\frac{a(\alpha)}{\alpha}} g(z, \bar{z}, \varphi) = \mathcal{O}(\alpha^{3/2}) \implies \sqrt{-\frac{a(\alpha)}{\alpha}} g(z, \bar{z}, \varphi) = \alpha^{3/2} h(s, \varphi, \alpha).$$

donde h es una función elegida adecuadamente. Además, como consecuencia de la regularidad de g , de a y del cambio de coordenadas, la función h se puede escoger suficientemente regular.

² Siguiendo [7], para probarlo, basta considerar un sistema dinámico definido por una aplicación $\varphi : [0, 2\pi) \rightarrow [0, 2\pi)$ tal que $\varphi(x) = x + \Delta\varphi$ con $(\Delta\varphi/2\pi) \notin \mathbb{Q}$. Puesto que no existen órbitas periódicas, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$ y $x \in [0, 2\pi)$ un punto cualquiera, existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ tal que la distancia entre $\varphi^m(x)$ y $\varphi^n(x)$ es menor que ε . Así, los puntos de las órbitas de φ^{m-n} están separados una distancia menor que ε , es decir, las órbitas de φ^{m-n} son densas en $[0, 2\pi)$, luego, también lo son las órbitas de φ .

Definiendo

$$\nu(\alpha) = -\frac{b(\alpha)}{a(\alpha)} \quad \text{y} \quad \tilde{h}(s, \varphi, \alpha) = e^{-i(\varphi+\theta(\alpha))} (1+s)^{-1} h(s, \varphi, \alpha),$$

expresamos convenientemente el sistema

$$e^{i\tilde{\varphi}} (1 + \tilde{s}) = e^{i(\varphi+\theta(\alpha))} (1+s) \left(1 - \alpha(2s+s^2) + i\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}\tilde{h}(s, \varphi, \alpha) \right). \quad (2.7)$$

Teniendo en cuenta que \tilde{h} es una función compleja, la podemos escribir como

$$\tilde{h}(s, \varphi, \alpha) = \tilde{h}_1(s, \varphi, \alpha) + i\tilde{h}_2(s, \varphi, \alpha),$$

donde \tilde{h}_1 y \tilde{h}_2 son funciones reales suficientemente regulares. Al igual que en el desarrollo sin términos de orden superior, escribiremos el sistema en su forma polar. En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \alpha(2s+s^2) + \alpha^{3/2}\tilde{h}_1(s, \varphi, \alpha) + i \left(\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}\tilde{h}_2(s, \varphi, \alpha) \right) \right| \\ &= \left((1 - \alpha(2s+s^2) + \alpha^{3/2}\tilde{h}_1(s, \varphi, \alpha))^2 + \left(\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}\tilde{h}_2(s, \varphi, \alpha) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(1 - 2\alpha(2s+s^2) + \mathcal{O}(\alpha^{3/2}) \right)^{1/2} \\ &= 1 - \alpha(2s+s^2) + \mathcal{O}(\alpha^{3/2}) \\ &= 1 - \alpha(2s+s^2) + \alpha^{3/2}p(s, \varphi, \alpha), \end{aligned}$$

donde hemos realizado la expansión en serie de Taylor de $\sqrt{1+t}$ en torno a $t=0$ y p es una función real suficientemente regular. Para determinar el argumento de (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} & \text{Arg}(1 - \alpha(2s+s^2) + i\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}\tilde{h}(s, \varphi, \alpha)) \\ &= \text{arc tg} \frac{\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}\tilde{h}_2(s, \varphi, \alpha)}{1 - \alpha(2s+s^2) + \alpha^{3/2}\tilde{h}_1(s, \varphi, \alpha)} \\ &= \frac{\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}\tilde{h}_2(s, \varphi, \alpha)}{1 - \alpha(2s+s^2) + \alpha^{3/2}\tilde{h}_1(s, \varphi, \alpha)} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 (1 + \mathcal{O}(\alpha)) + \mathcal{O}(\alpha^{3/2}) \\ &= \alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \mathcal{O}(\alpha^{3/2}) \\ &= \alpha\nu(\alpha)(1+s)^2 + \alpha^{3/2}q(s, \varphi, \alpha), \end{aligned}$$

siendo q una función real suficientemente regular. Por tanto, podemos expresar el sistema en su representación módulo-argumento como

$$e^{i\tilde{\varphi}} (1 + \tilde{s}) = (1+s) \left(1 - \alpha(2s+s^2) + \alpha^{3/2}p(s, \varphi, \alpha) \right) e^{i(\varphi+\theta(\alpha)+\alpha\nu(\alpha)(1+s)^2+\alpha^{3/2}q(s, \varphi, \alpha))},$$

y lo reescribimos en su forma polar

$$\begin{pmatrix} s \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{s} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2\alpha) s - \alpha (3s^2 + s^3) + \alpha^{3/2} p(s, \varphi, \alpha), \\ \varphi + \theta(\alpha) + \alpha \nu(\alpha) (1 + s)^2 + \alpha^{3/2} q(s, \varphi, \alpha) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

A continuación, reescalamos la variable s

$$s = \sqrt{\alpha} \xi,$$

y expresamos el sistema (2.8) en función de la nueva variable ξ

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1 - 2\alpha) \xi - \alpha^{3/2} (3\xi^2 + \alpha^{1/2} \xi^3) + \alpha p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha), \\ \varphi + (\theta(\alpha) + \alpha \nu(\alpha)) + \alpha^{3/2} \nu(\alpha) (2\xi + \alpha^{1/2} \xi^2) + \alpha^{3/2} q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

con

$$p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) = p(\alpha^{1/2} \xi, \varphi, \alpha),$$

$$q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) = q(\alpha^{1/2} \xi, \varphi, \alpha),$$

funciones con la misma regularidad que p y q . Simplificamos la notación definiendo $\omega(\alpha) = \theta(\alpha) + \alpha \nu(\alpha)$ y notamos que podemos escribir

$$p^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha) = r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{1/2} r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha).$$

De esta forma escribimos el sistema (2.9) como

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2\alpha) \xi + \alpha r^{(0)}(\varphi, \alpha) + \alpha^{3/2} r^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha), \\ \varphi + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} q^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha) \end{pmatrix},$$

donde

$$r^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha) = -(3\xi^2 + \alpha^{1/2} \xi^3) + r^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha),$$

$$q^{(2)}(\xi, \varphi, \alpha) = \nu(\alpha) (2\xi + \alpha^{1/2} \xi^2) + q^{(1)}(\xi, \varphi, \alpha),$$

son funciones suficientemente regulares por serlo $r^{(1)}$ y $q^{(1)}$. Por último, introducimos la coordenada u

$$u = \xi - \frac{1}{2} r^{(0)}(\varphi, \alpha),$$

y llegamos a la expresión final del sistema, definido a partir de la aplicación F

$$F : \begin{pmatrix} u \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2\alpha) u + \alpha^{3/2} H_\alpha(u, \varphi) \\ \varphi + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} K_\alpha(u, \varphi) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

con

$$H_\alpha(u, \varphi) = r^{(2)}\left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha\right),$$

$$K_\alpha(u, \varphi) = q^{(2)}\left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\varphi, \alpha), \varphi, \alpha\right),$$

funciones suficientemente regulares y 2π -periódicas en φ . Veamos que el rectángulo $\{(u, \varphi) : |u| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ se corresponde con una corona de anchura $\mathcal{O}(\alpha)$ alrededor de la circunferencia

$$S_0(\alpha) = \left\{z : |z|^2 = -\frac{\alpha}{a(\alpha)}\right\},$$

representado en la Figura 2.3.

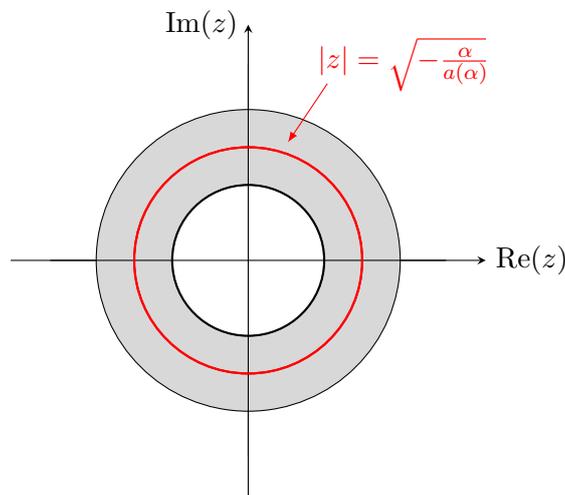


Figura 2.3: Corona de anchura $\mathcal{O}(\alpha)$ alrededor de la circunferencia $S_0(\alpha)$

En efecto, teniendo en cuenta la definición de u , dado que $|u| \leq 1$, tenemos que

$$|\xi| \leq 1 + \frac{1}{2}r^{(0)} = M_0,$$

y expresándolo en la coordenada $s = \sqrt{\alpha}\xi$ obtenemos

$$\sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}(1 - \sqrt{\alpha}M_0) \leq \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}(1 + s) \leq \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}(1 + \sqrt{\alpha}M_0).$$

Recordando la definición de z (2.6), llegamos a

$$\sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} - h(\alpha) \leq |z| \leq \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + h(\alpha),$$

donde hemos definido

$$h(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} \sqrt{\alpha} M_0.$$

Así, el rectángulo $\{(u, \varphi) : |u| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ se corresponde con una corona de anchura $2h(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha)$ alrededor de la circunferencia $S_0(\alpha)$.

Nos resultará de utilidad a lo largo de la demostración considerar

$$\lambda = \sup \left\{ |H_\alpha|, |K_\alpha|, \left| \frac{\partial H_\alpha}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial K_\alpha}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial H_\alpha}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial K_\alpha}{\partial \varphi} \right| : |u| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi] \right\},$$

cuya definición depende de α , pero que se encuentra acotado para α suficientemente pequeño, como una consecuencia de la regularidad de H_α y K_α .

Segundo paso: Definición del espacio de funciones. Vamos a caracterizar las curvas cerradas como elementos de un espacio de funciones U . Así, por definición $u = u(\varphi) \in U$ si es una función 2π -periódica verificando:

- $|u(\varphi)| \leq 1$ para todo $\varphi \in \mathbb{R}$,
- $|u(\varphi_1) - u(\varphi_2)| \leq |\varphi_1 - \varphi_2|$ para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Esto es, toda función $u(\varphi) \in U$ está absolutamente acotada y es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que 1. Considerando la norma

$$\|u\| = \sup\{|u(\varphi)| : \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

el espacio de funciones U es un espacio métrico completo. Nuestro objetivo será construir una aplicación \mathcal{F} sobre el espacio métrico completo U

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : U &\longmapsto U \\ u(\varphi) &\longmapsto \tilde{u}(\varphi) \end{aligned}$$

que sea contractiva. De esta manera, se verificarán las hipótesis del Teorema del Punto Fijo, el cual nos asegura que esta aplicación tendrá un único punto fijo, $u^{(\infty)} \in U$, que además será un atractor del sistema dinámico definido por la aplicación \mathcal{F} en U , es decir

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}^k(u) - u^{(\infty)}\| = 0,$$

para todo $u \in U$.

Tercer paso: Construcción de la aplicación \mathcal{F} . Consideremos la aplicación \mathcal{F} inducida por F (2.10) sobre U ; dada una curva cerrada $u \in U$, $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ es su imagen a través de la aplicación F . Notamos que F describe, salvo por términos dependientes de $\alpha^{3/2}$, una rotación de ángulo $\omega(\alpha)$ en φ . Así, un punto $(\tilde{u}(\varphi), \varphi)$ es la imagen a través de F de un punto $(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi})$ en la curva u con una coordenada angular distinta. De esta forma $\tilde{u}(\varphi) = (\mathcal{F}u)(\varphi) = \mathcal{F}(u(\hat{\varphi}))$. Para ver que

\mathcal{F} está bien definida, debemos probar que $\hat{\varphi}$ es único, es decir, que la ecuación

$$\varphi = \hat{\varphi} + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} K_\alpha(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi}), \quad (2.11)$$

tiene una única solución $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$, para un $u \in U$ dado. Esto es cierto, puesto que la parte derecha de (2.11) es una función estrictamente creciente respecto de $\hat{\varphi}$. Sean $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in [0, 2\pi]$ con $\hat{\varphi}_2 > \hat{\varphi}_1$:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 + \alpha^{3/2} \left(K_\alpha(u(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2) - K_\alpha(u(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) \right) \\ &\geq \hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1 - \alpha^{3/2} \left| K_\alpha(u(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2) - K_\alpha(u(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) \right|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que K_α es suficientemente regular, que u es lipschitziana, por definición del espacio de funciones, y la definición de λ obtenemos

$$\begin{aligned} \left| K_\alpha(u(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2) - K_\alpha(u(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) \right| &\leq \lambda \left(|u(\hat{\varphi}_2) - u(\hat{\varphi}_1)| + |\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1| \right) \\ &\leq 2\lambda |\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1| \\ &\leq 2\lambda (\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\varphi_2 - \varphi_1 \geq (1 - 2\lambda \alpha^{3/2}) (\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1),$$

con lo que probamos que (2.11) es estrictamente creciente respecto a $\hat{\varphi}$ para $\alpha \neq 0$ suficientemente pequeño, y en consecuencia, tiene una única solución. Notamos además que la función $\hat{\varphi}(\varphi)$ es lipschitziana

$$|\hat{\varphi}(\varphi_2) - \hat{\varphi}(\varphi_1)| \leq (1 - 2\lambda \alpha^{3/2})^{-1} |\varphi_2 - \varphi_1|. \quad (2.12)$$

Así, podemos definir la aplicación $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$

$$\tilde{u}(\varphi) = (1 - 2\alpha) u(\hat{\varphi}) + \alpha^{3/2} H_\alpha(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi}),$$

siendo $\hat{\varphi}$ la única solución de (2.11), con lo que \tilde{u} está bien definida. Notamos que es 2π -periódica por serlo u y H_α (respecto de φ). Para probar que \mathcal{F} está bien definida debemos comprobar además que $\tilde{u} \in U$. En primer lugar se cumple que

$$|\tilde{u}(\varphi)| \leq (1 - 2\alpha) |u(\hat{\varphi})| + \alpha^{3/2} |H_\alpha(u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi})| \leq 1 - 2\alpha + \lambda \alpha^{3/2},$$

para todo $\varphi \in \mathbb{R}$, donde hemos tenido en cuenta que $\|u\| \leq 1$ y la definición de λ . Por tanto, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño $\|\tilde{u}\| \leq 1$. Para probar que \tilde{u} es lipschitziana aplicaremos la

lipschitzianidad de u y la definición de λ

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(\varphi_1) - \tilde{u}(\varphi_2)| &\leq (1 - 2\alpha) |u(\hat{\varphi}_1) - u(\hat{\varphi}_2)| + \alpha^{3/2} |H_\alpha(u(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - H_\alpha(u(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ &\leq (1 - 2\alpha) |u(\hat{\varphi}_1) - u(\hat{\varphi}_2)| + \alpha^{3/2} \lambda (|u(\hat{\varphi}_1) - u(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|) \\ &\leq (1 - 2\alpha + 2\lambda \alpha^{3/2}) |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando que $\hat{\varphi}(\varphi)$ es lipschitziana (2.12) obtenemos

$$|\tilde{u}(\varphi_1) - \tilde{u}(\varphi_2)| \leq (1 - 2\alpha + 2\lambda \alpha^{3/2}) (1 - 2\lambda \alpha^{3/2})^{-1} |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

con lo que determinamos que \tilde{u} es una función lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que 1 para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. Por tanto concluimos que $\tilde{u} \in U$ y \mathcal{F} está bien definida.

Cuarto paso: Comprobación de la contractividad de \mathcal{F} . Consideramos dos funciones $u_1, u_2 \in U$. Dado $\varphi \in \mathbb{R}$ cualquiera

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_1(\varphi) - \tilde{u}_2(\varphi)| &\leq (1 - 2\alpha) |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + \alpha^{3/2} |H_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - H_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ &\leq (1 - 2\alpha) |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + \alpha^{3/2} \lambda (|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|), \end{aligned}$$

con $\hat{\varphi}_1$ y $\hat{\varphi}_2$ las únicas soluciones de

$$\varphi = \hat{\varphi}_1 + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} K_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1), \quad (2.13)$$

y

$$\varphi = \hat{\varphi}_2 + \omega(\alpha) + \alpha^{3/2} K_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2), \quad (2.14)$$

respectivamente. Utilizando la definición de norma y que u_2 es una función lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que 1, escribimos $|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)|$ en función de $\|u_1 - u_2\|$ y $|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|$

$$\begin{aligned} |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| &= |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_1) + u_2(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ &\leq |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_1)| + |u_2(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| \\ &\leq \|u_1 - u_2\| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Restándole (2.14) a (2.13) y tomando valores absolutos obtenemos

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2| &= \alpha^{3/2} |K_\alpha(u_1(\hat{\varphi}_1), \hat{\varphi}_1) - K_\alpha(u_2(\hat{\varphi}_2), \hat{\varphi}_2)| \\ &\leq \alpha^{3/2} \lambda (|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|), \end{aligned}$$

donde además hemos aplicado la regularidad de K_α . Sustituimos (2.15) en la expresión anterior

$$|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2| \leq (1 - 2\alpha^{3/2} \lambda)^{-1} \alpha^{3/2} \lambda \|u_1 - u_2\|.$$

Finalmente, utilizando las estimaciones anteriores, llegamos a

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_1(\varphi) - \tilde{u}_2(\varphi)| &\leq (1 - 2\alpha) |u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + \alpha^{3/2} \lambda (|u_1(\hat{\varphi}_1) - u_2(\hat{\varphi}_2)| + |\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2|) \\ &\leq (1 - 2\alpha) (\|u_1 - u_2\| + (1 - 2\alpha^{3/2} \lambda)^{-1} \alpha^{3/2} \lambda \|u_1 - u_2\|) \\ &\quad + \alpha^{3/2} \lambda (\|u_1 - u_2\| + 2(1 - 2\alpha^{3/2} \lambda)^{-1} \alpha^{3/2} \lambda \|u_1 - u_2\|), \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\|\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2)\| \leq \varepsilon \|u_1 - u_2\|,$$

con

$$\varepsilon = (1 - 2\alpha) \left(1 + (1 - 2\alpha^{3/2} \lambda)^{-1} \alpha^{3/2} \lambda\right) + \alpha^{3/2} \lambda \left(1 + 2\alpha^{3/2} \lambda (1 - 2\alpha^{3/2} \lambda)^{-1}\right).$$

Observamos que

$$\varepsilon = 1 - 2\alpha + \mathcal{O}(\alpha^{3/2}),$$

por lo que para α positivo suficientemente pequeño, $\varepsilon < 1$ y \mathcal{F} es una aplicación contractiva. Hemos probado que se verifican las hipótesis del Teorema del Punto Fijo y por lo tanto existe un único punto fijo estable $u^{(\infty)} \in U$ de \mathcal{F} .

Quinto paso: Estabilidad de la curva invariante. Consideremos un punto (u_0, φ_0) en la banda $\{(u, \varphi) : |u| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Si el punto se encuentra sobre la curva $u^{(\infty)}$, permanecerá sobre ella bajo iteraciones de F , pues $u^{(\infty)}$ es un punto fijo de \mathcal{F} , por lo que se trata de una curva invariante. Si no pertenece a la curva invariante, tomemos una curva $u^{(0)} \in U$ verificando $(u_0, \varphi_0) = (u^{(0)}(\varphi), \varphi)$ para algún $\varphi \in [0, 2\pi]$. Bajo iteraciones sucesivas de F sobre (u_0, φ_0) obtenemos la secuencia de puntos

$$\{(u_k, \varphi_k)\}_{k=0}^{\infty},$$

donde $(u_k, \varphi_k) = F^k(u_0, \varphi_0)$ se encuentra sobre la correspondiente iteración de \mathcal{F} sobre la curva $u^{(0)}$. Sabemos que las sucesivas iteraciones de \mathcal{F} sobre cualquier curva $u \in U$ convergen a la curva invariante $u^{(\infty)}$, en particular la de la curva $u^{(0)}$. Así, la secuencia de puntos también convergerá a la curva, probando finalmente la estabilidad de la curva invariante. \square

Hasta ahora hemos probado que el sistema dinámico (2.5) tiene una curva invariante atractora, que en lo que sigue denotaremos por S_∞ , para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. Esta curva es única en una corona de anchura $\mathcal{O}(\alpha)$ alrededor de la circunferencia

$$S_0(\alpha) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}\right\},$$

representada en la Figura 2.3. En el siguiente resultado (extraído de [3]) probaremos que, no existen conjuntos invariantes en el disco delimitado por la circunferencia $S_0(\alpha)$. Además veremos que para $\alpha < 0$ suficientemente próximo a 0, el origen es un atractor, de modo que no existirá ninguna curva invariante en un entorno de este punto fijo. Con esto, habremos demostrado que $\alpha = 0$ es un punto de bifurcación.

Lema 2.2. *Consideremos el sistema dinámico (2.5) y asumamos que se cumplen las hipótesis del Lema 2.1. Se verifica que:*

1. *Para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, la cuenca de atracción de la curva invariante S_∞ contiene el disco definido por la circunferencia $S_0(\alpha)$, a excepción del punto fijo $z = 0$.*
2. *Para $\alpha < 0$ suficientemente próximo a 0, existe un entorno $U \subset \mathbb{C}$ del punto fijo atractor $z = 0$ que está contenido en su cuenca de atracción.*

Demostración. Caso 1: En la demostración del Lema 2.1 hemos probado que la curva invariante S_∞ es única y atractora en una corona alrededor de $S_0(\alpha)$ definida por

$$\sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}(1 - \sqrt{\alpha}M_0) \leq |z| \leq \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}(1 + \sqrt{\alpha}M_0),$$

que denotaremos por C_α . Veamos que en el disco acotado por la circunferencia de menor radio en la frontera de la corona no existen conjuntos invariantes no triviales. Sea $z \neq 0$ tal que

$$|z| < \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}}(1 - \sqrt{\alpha}M_0) = \mathcal{O}(\alpha^{1/2}).$$

Se cumple que

$$|z| |1 + \alpha + (a(\alpha) + ib(\alpha))|z|^2| > |z|,$$

ya que $\alpha > 0$ y $|\alpha| > |z|^2 |a(\alpha)|$. Por hipótesis de compacidad y de continuidad, también $|f(z)| > |z|$. Observamos además que

$$|f(z)| \leq |z| + C(\alpha^{3/2}),$$

con $C > 0$ y dado que la anchura de la corona es $2h(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha)$, existirá alguna iteración de z que pertenezca a la corona. En consecuencia, las sucesivas iteraciones de z convergerán a la curva S_∞ .

Caso 2: Estudiamos de forma análoga el caso en que $\alpha < 0$. Notamos que

$$|f(z)| \leq |z| |1 + \alpha + \mathcal{O}(|z|^3)|,$$

y por tanto, existe un entorno $U \subset \mathbb{C}$ de $z = 0$ donde se verifica

$$|f(z)| < |z|,$$

con lo que las sucesivas iteraciones de z convergerán hacia $z = 0$. \square

Los resultados anteriores, Lema 2.1 y Lema 2.2, los hemos probado para el caso en que $a(0) < 0$. Si fuese $a(0) > 0$, se podrían demostrar resultados paralelos utilizando la familia de sistemas dinámicos $\tilde{f}(z, \alpha)$ tal que, para cada α fijado $\tilde{f}(z, \alpha)$ es la inversa de $f(z, \alpha)$. Estas inversas existen en un entorno de $z = 0$ para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, pues $f'(0) = 1 + \alpha$. Se probaría la existencia de una curva cerrada repulsora e invariante cuando $\alpha < 0$. En un resultado paralelo al Lema 2.2 se establecería que para $\alpha > 0$ el punto fijo en $z = 0$ es repulsor; para $\alpha < 0$ se transforma en atractor y nace la curva invariante repulsora.

El punto $\alpha = 0$ es un punto de bifurcación pues, si $a(0) < 0$, existe una curva cerrada invariante, cuando $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, que desaparece para $\alpha < 0$, y a la inversa cuando $a(0) > 0$. El siguiente resultado recoge las conclusiones extraídas de los lemas anteriores.

Lema 2.3. *El sistema (2.4) presenta localmente en un entorno de $x = 0$ una curva invariante y única, con las mismas propiedades de estabilidad que el sistema (2.1). Además la bifurcación que conduce a la curva invariante se produce en la misma dirección en ambos sistemas.*

Esta bifurcación recibe el nombre de *bifurcación de Neimark-Sacker*.

2.2. Bifurcación genérica de Neimark-Sacker

En la sección anterior hemos estudiado la dinámica del sistema (2.1) y sus similitudes con el sistema obtenido al considerar términos de orden superior (2.4). En esta sección probaremos que todo sistema que presente una bifurcación de Neimark-Sacker se puede transformar, mediante un cambio de coordenadas invertible y suficientemente regular, en un sistema de la forma (2.4).

Consideremos el sistema dinámico discreto 2-dimensional

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y f una función suficientemente regular. Supongamos que el sistema tiene un punto fijo en $x = 0$ para $\alpha = 0$ con valores propios asociados

$$\mu_1 = e^{i\theta_0} \quad \text{y} \quad \mu_2 = e^{-i\theta_0},$$

siendo $0 < \theta_0 < \pi$. Dado que $\mu = 1$ no es valor propio para $\alpha = 0$, tampoco lo será en un entorno suyo, y aplicando el Teorema de la Función Implícita sabemos que para $|\alpha|$ suficientemente

pequeño existirá un punto fijo $x_0(\alpha)$ en un entorno de $x = 0$ localmente único. La unicidad es consecuencia directa del Teorema de la Función Inversa, ya que $\mu = 0$ no es un valor propio para $\alpha = 0$. En estas condiciones, podemos realizar un cambio de coordenadas, dependiente del parámetro, que traslade el punto fijo al origen. Así, sin pérdida de generalidad, realizando el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en $x = 0$ podemos escribir el sistema como

$$x \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (2.16)$$

con F una función real 2-dimensional suficientemente regular, verificando $F(x, \alpha) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ y $F(0, \alpha) = (0, 0)$, para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Los valores propios del sistema vienen dados por

$$\mu_1(\alpha) = r(\alpha) e^{i\varphi(\alpha)} \quad \text{y} \quad \mu_2(\alpha) = r(\alpha) e^{-i\varphi(\alpha)},$$

donde $r(0) = 1$ y $\varphi(0) = \theta_0$. Podemos escribir

$$r(\alpha) = 1 + \beta(\alpha),$$

siendo $\beta(\alpha)$ una función suficientemente regular verificando que $\beta(0) = 0$. Supongamos además que $\beta'(0) \neq 0$, es decir, $r'(0) \neq 0$, con lo que se trata de una función invertible y podemos utilizar β como parámetro, de forma que

$$\mu(\beta) = \mu_1(\beta) = (1 + \beta) e^{i\theta(\beta)} \quad \text{y} \quad \bar{\mu}(\beta) = \mu_2(\beta) = (1 + \beta) e^{-i\theta(\beta)}, \quad (2.17)$$

con $\theta(\beta)$ un función suficientemente regular cumpliendo que $\theta(0) = \theta_0$. Nuestro objetivo a lo largo de esta sección se centrará en simplificar, bajo ciertas condiciones, el sistema (2.16) para llegar a una expresión equivalente al sistema (2.4). Para ello, en primer lugar, introduciremos una variable compleja z y reescribiremos el término de orden 1. Después, con apropiados cambios de variable, eliminaremos los términos cuadráticos y todos los términos cúbicos salvo uno.

Comenzamos con el siguiente lema en el que simplificaremos la parte lineal.

Lema 2.4. *Para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, el sistema (2.16) se puede transformar, en términos de una nueva variable $z \in \mathbb{C}$ y un nuevo parámetro $\beta \in \mathbb{R}$, en la forma siguiente:*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta) \in \mathbb{C}, \quad (2.18)$$

donde $\mu(\beta) = (1 + \beta) e^{i\theta(\beta)}$ y $g(z, \bar{z}, \beta)$ es una función suficientemente regular, cuyo desarrollo en serie de Taylor viene dado por

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l \quad \text{con } k, l = 0, 1, \dots$$

Demostración. Comenzamos introduciendo el parámetro $\beta = \beta(\alpha)$, y expresamos los valores propios en la forma (2.17). Reescribimos el sistema (2.16) en términos del nuevo parámetro β

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto B(\beta)x + G(x, \beta),$$

siendo $G(x, \beta)$ una función 2-dimensional suficientemente regular verificando $G(x, \beta) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ y $G(0, \beta) = 0$. Sea $q(\beta) \in \mathbb{C}^2$ el vector propio de $B(\beta)$ asociado al valor propio $\mu(\beta)$

$$B(\beta)q(\beta) = \mu(\beta)q(\beta),$$

y $p(\beta) \in \mathbb{C}^2$ el vector propio de $B^T(\beta)$ asociado al valor propio $\bar{\mu}(\beta)$

$$B^T(\beta)p(\beta) = \bar{\mu}(\beta)p(\beta).$$

Consideramos el producto escalar usual en \mathbb{C}^2 $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$, y normalizamos $p(\beta)$ respecto de $q(\beta)$

$$\langle p(\beta), q(\beta) \rangle = 1,$$

para $|\beta|$ suficientemente pequeño. Si $q(\beta)$ es conocido, entonces cualquier $x \in \mathbb{R}^2$ lo podemos escribir como

$$x = z q(\beta) + \bar{z} \bar{q}(\beta),$$

para algún $z \in \mathbb{C}$ y $|\beta|$ suficientemente pequeño. Queremos probar que

$$z = \langle p(\beta), x \rangle = z \langle p(\beta), q(\beta) \rangle + \bar{z} \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle,$$

para lo que basta comprobar que $\langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = 0$. En efecto,

$$\langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = \left\langle p(\beta), \frac{1}{\bar{\mu}(\beta)} B(\beta) \bar{q}(\beta) \right\rangle = \frac{1}{\bar{\mu}(\beta)} \langle B^T(\beta) p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = \frac{\mu(\beta)}{\bar{\mu}(\beta)} \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle.$$

Despejando obtenemos

$$\left(1 - \frac{\mu(\beta)}{\bar{\mu}(\beta)}\right) \langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle,$$

y, dado que $\mu(\beta) \neq \bar{\mu}(\beta)$ para $|\beta|$ suficientemente pequeño, llegamos a que $\langle p(\beta), \bar{q}(\beta) \rangle = 0$. Así, tomando el producto escalar con $p(\beta)$ de $x = B(\beta)x + G(x, \beta)$, concluimos que

$$z = \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta),$$

donde hemos definido

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \langle p(\beta), G(z q(\beta) + \bar{z} \bar{q}(\beta), \beta) \rangle.$$

El desarrollo en serie de Taylor de $g(z, \bar{z}, \beta)$ respecto a (z, \bar{z}) centrado en $z = \bar{z} = 0$ viene dado

por

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k! l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l$$

con

$$g_{kl}(\beta) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\beta), G(z q(\beta) + \bar{z} \bar{q}(\beta), \beta) \rangle \Big|_{z=0}.$$

Notamos que los términos en los cuales $l + k < 2$ se anulan ya que $G(x, \beta) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ lo cual implica que $G(z q(\beta) + \bar{z} \bar{q}(\beta), \beta) = \mathcal{O}(|z|^2)$. \square

Los coeficientes g_{kl} tendrán un papel fundamental en la comprobación de las condiciones que debe verificar un sistema dinámico para poder determinar que presenta una bifurcación de Neimark-Sacker. Será por lo tanto importante conocer su expresión para poder calcularlos, como veremos en el ejemplo que discutiremos al final del capítulo.

A continuación realizaremos una serie de cambios de coordenadas, dependientes del parámetro β con el objetivo de simplificar el sistema (2.18). En primer lugar eliminaremos los términos cuadráticos.

Lema 2.5. *Consideremos el sistema dinámico complejo 1-dimensional*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \tilde{z} = \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3), \quad (2.19)$$

donde $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta) e^{i\theta(\beta)}$ y $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$. Si se cumple

$$e^{i\theta_0} \neq 1 \quad \text{y} \quad e^{3i\theta_0} \neq 1,$$

entonces, para $|\beta|$ suficiente pequeño, se puede transformar en el sistema sin términos cuadráticos

$$\omega \in \mathbb{C} \mapsto \tilde{\omega} = \mu \omega + \mathcal{O}(|\omega|^3),$$

utilizando un cambio de variable complejo e invertible de la forma

$$z = \omega + \frac{h_{20}}{2} \omega^2 + h_{11} \omega \bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2} \bar{\omega}^2,$$

donde $h_{ij} = h_{ij}(\beta)$.

Demostración. Utilizando el cambio de variable propuesto en el enunciado, tenemos que

$$\omega = z + \mathcal{O}(|z|^2) \quad \text{y} \quad \bar{\omega} = \bar{z} + \mathcal{O}(|z|^2),$$

y el cambio inverso de variable viene dado por

$$\omega = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3).$$

Escribimos el sistema (2.19) en función de ω

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \tilde{z} - \frac{h_{20}}{2} \tilde{z}^2 - h_{11} \tilde{z} \bar{\tilde{z}} - \frac{h_{02}}{2} \bar{\tilde{z}}^2 + \mathcal{O}(|\tilde{z}|^3) \\ &= \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 - \frac{h_{20}}{2} \mu^2 z^2 - h_{11} |\mu|^2 z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{\mu}^2 \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3) \\ &= \mu \omega + \frac{1}{2} (g_{20} + h_{20} (\mu - \mu^2)) \omega^2 + \frac{1}{2} (g_{02} + h_{02} (\bar{\mu} - \bar{\mu}^2)) \bar{\omega}^2 \\ &\quad + (g_{11} + h_{11} (\mu - |\mu|^2)) \omega \bar{\omega} + \mathcal{O}(|\omega|^3).\end{aligned}$$

Así, definiendo

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\mu^2 - \mu}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{|\mu|^2 - \mu}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu},$$

eliminamos los términos cuadráticos del sistema escrito en la nueva variable. El cambio de variable estará bien definido si los denominadores no se anulan. Aplicando las hipótesis impuestas sobre θ_0 , obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(0)^2 - \mu(0) &= e^{i\theta_0}(e^{i\theta_0} - 1) \neq 0, \\ |\mu(0)|^2 - \mu(0) &= 1 - e^{i\theta_0} \neq 0, \\ \bar{\mu}(0)^2 - \mu(0) &= e^{i\theta_0}(e^{-3i\theta_0} - 1) \neq 0,\end{aligned}$$

por lo que para $|\beta|$ suficientemente pequeño los denominadores no se anulan y el cambio de variable está bien definido. \square

Notamos que los coeficientes del cambio de variable son suficientemente regulares respecto de β para valores de $|\beta|$ suficientemente pequeños. La transformación también modifica los coeficientes de los términos de orden superior del sistema.

Una vez hemos eliminado los términos de orden cuadrático, trataremos de replicar el procedimiento con los términos de orden cúbico. En este caso no podremos deshacernos de todos ellos, aunque sí de la mayoría.

Lema 2.6. *Consideremos el sistema dinámico complejo 1-dimensional*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \mu z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (2.20)$$

donde $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta) e^{i\theta(\beta)}$ y $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$. Si se cumple

$$e^{2i\theta_0} \neq 1 \quad \text{y} \quad e^{4i\theta_0} \neq 1,$$

entonces para $|\beta|$ suficientemente pequeño, se puede transformar en el sistema con un único término cúbico

$$\omega \in \mathbb{C} \mapsto \mu \omega + c_1 \omega^2 \bar{\omega} + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

con $c_1 = c_1(\beta)$, utilizando un cambio de coordenadas complejo e invertible de la forma

$$z = \omega + \frac{h_{30}}{6} \omega^3 + \frac{h_{21}}{2} \omega^2 \bar{\omega} + \frac{h_{12}}{2} \omega \bar{\omega}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{\omega}^3,$$

donde $h_{ij} = h_{ij}(\beta)$ es suficientemente regular.

Demostración. Utilizaremos un cambio de variable de la forma propuesta en el enunciado, de forma que

$$\omega = z + \mathcal{O}(|z|^3) \quad \text{y} \quad \bar{\omega} = \bar{z} + \mathcal{O}(|z|^3).$$

El cambio de variable es invertible, y su inverso viene dado por

$$\omega = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4).$$

Escribimos el sistema (2.20) en función de la nueva variable

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \tilde{z} - \frac{h_{30}}{6} \tilde{z}^3 - \frac{h_{21}}{2} \tilde{z}^2 \bar{\tilde{z}} - \frac{h_{12}}{2} \tilde{z} \bar{\tilde{z}}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{\tilde{z}}^3 + \mathcal{O}(|\tilde{z}|^4) \\ &= \mu z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 - \frac{h_{30}}{6} \mu^3 z^3 \\ &\quad - \frac{h_{21}}{2} \mu^2 \bar{\mu} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} \mu \bar{\mu}^2 z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{\mu}^3 \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4) \\ &= \mu z + (g_{30} + (\mu - \mu^3) h_{30}) \frac{\omega^3}{6} + (g_{21} + (\mu - \mu |\mu|^2) h_{21}) \frac{\omega^2 \bar{\omega}}{2} \\ &\quad + (g_{12} - (\mu - \bar{\mu} |\mu|^2) h_{12}) \frac{\omega \bar{\omega}^2}{2} + (g_{03} + (\mu - \bar{\mu}^3) h_{03}) \frac{\bar{\omega}^3}{6} + \mathcal{O}(|\omega|^4). \end{aligned}$$

Por tanto, si definimos

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{\mu^3 - \mu}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{\bar{\mu} |\mu|^2 - \mu}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{\bar{\mu}^3 - \mu},$$

eliminaremos los términos cúbicos del sistema, a excepción del término $\omega^2 \bar{\omega}$. Basta comprobar que los denominadores no se anulan para $\beta = 0$ para confirmar que el cambio de variable está bien definido para $|\beta|$ suficientemente pequeño. En efecto,

$$\begin{aligned} \mu(0)^3 - \mu(0) &= e^{i\theta_0} (e^{2i\theta_0} - 1) \neq 0, \\ \bar{\mu}(0)^3 - \mu(0) &= e^{i\theta_0} (e^{-4i\theta_0} - 1) \neq 0, \\ \bar{\mu}(0) |\mu(0)|^2 - \mu(0) &= e^{i\theta_0} (e^{-2i\theta_0} - 1) \neq 0. \end{aligned}$$

Podríamos tratar de deshacernos del término $\omega^2 \bar{\omega}$ definiendo

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\mu (1 - |\mu|^2)}.$$

Sin embargo, el denominador se anula siempre para $\beta = 0$, independientemente del valor de θ_0 , por lo que no estaría bien definido el cambio de variable. Por tanto, tomamos $h_{21} = 0$, de forma que

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2},$$

y obtenemos un cambio de variable suficientemente regular respecto de β . \square

Hemos podido definir un cambio de variable para deshacernos de todas las componentes cúbicas del sistema, excepto el término $\omega^2 \bar{\omega}$, el cual hemos probado que no es posible eliminar bajo ningún cambio de coordenadas. Este término se llama *término resonante* y su coeficiente, definiendo $h_{21} = 0$, no se modifica con este último cambio de coordenadas. Combinamos los lemas anteriores en el siguiente lema, en el cual definimos un cambio de variable a través del cual eliminaremos simultáneamente los términos cuadráticos y cúbicos del sistema, a excepción del término resonante.

Lema 2.7. *Consideremos el sistema dinámico complejo 1-dimensional*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4),$$

donde $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta) e^{i\theta(\beta)}$, $\theta(0) = \theta_0$ y $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$. Si se cumple que $e^{ik\theta_0} \neq 0$ para $k = 1, 2, 3, 4$, para $|\beta|$ suficientemente pequeño, se puede transformar en el sistema

$$\omega \in \mathbb{C} \mapsto \mu \omega + c_1 \omega^2 \bar{\omega} + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

con $c_1 = c_1(\beta)$, utilizando un cambio de coordenadas complejo e invertible

$$z = \omega + \frac{h_{20}}{2} \omega^2 + h_{11} \omega \bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2} \bar{\omega}^2 + \frac{h_{30}}{6} \omega^3 + \frac{h_{12}}{2} \omega \bar{\omega}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{\omega}^3,$$

donde $h_{ij} = h_{ij}(\beta)$ es suficientemente regular.

La demostración se sigue de forma trivial de los lemas anteriores, ya que el cambio de variable propuesto es una superposición de los cambios utilizados en los casos previos. En primer lugar eliminamos los términos cuadráticos, con lo que se modifican también los coeficientes de los términos cúbicos, aunque se mantiene la estructura del sistema; en particular se transforma el coeficiente del término resonante, el cual escribimos como $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21}$. Posteriormente eliminamos los términos cúbicos, excepto el resonante, cuyo coeficiente seguirá siendo $\frac{1}{2} \tilde{g}_{21} = c_1$. La forma explícita del coeficiente $c_1 = c_1(\beta)$ viene dada por

$$c_1 = \frac{g_{20} g_{11} (\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{2(\mu^2 - \mu)(\bar{\mu} - 1)} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\mu}} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\mu^2 - \bar{\mu})} + \frac{g_{21}}{2},$$

con lo que, para el valor crítico $\beta = 0$, obtenemos

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1-2\mu_0)}{2(\mu_0^2 - \mu^0)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\mu}_0} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\mu_0^2 - \bar{\mu}_0)} + \frac{g_{21}(0)}{2} \quad (2.21)$$

siendo $\mu_0 = e^{i\theta_0}$. En el siguiente teorema se recogen los resultados obtenidos a lo largo de esta sección.

Teorema 2.1. *Consideremos un sistema dinámico discreto 2-dimensional*

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y f una función suficientemente regular tal que para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño tiene un punto fijo en $x = 0$ con valores propios asociados

$$\mu_1 = r(\alpha)e^{i\varphi(\alpha)} \quad y \quad \mu_2 = r(\alpha)e^{-i\varphi(\alpha)},$$

siendo $r(0) = 0$ y $\varphi(0) = \theta_0$. Si se verifican las siguientes condiciones:

- $r'(0) \neq 0$,
- $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$,

entonces el sistema dinámico se puede transformar en

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\operatorname{sen} \theta(\beta) \\ \operatorname{sen} \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \\ (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\operatorname{sen} \theta(\beta) \\ \operatorname{sen} \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & a(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|y\|^4), \quad (2.22)$$

con $\theta(0) = \theta_0$ y $a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0))$, donde $c_1(0)$ viene dado por (2.21).

Demostración. Comenzamos aplicando los Lemas 2.4, 2.5 y 2.6, gracias a los cuales podemos expresar el sistema inicial en la forma

$$\omega \in \mathbb{C} \mapsto \mu(\beta)\omega + c_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

siendo $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$. Definiendo $d(\beta) = a(\beta) + ib(\beta)$ con $a(\beta)$ y $b(\beta)$ dos funciones reales reescribimos el sistema

$$\omega \in \mathbb{C} \mapsto e^{i\theta(\beta)}(1 + \beta + d(\beta)|\omega|^2)\omega + \mathcal{O}(|\omega|^4).$$

Teniendo en cuenta que $\omega = y_1 + iy_2$, si recuperamos las coordenadas reales y expresamos el sistema en su forma real 2-dimensional siguiendo un procedimiento análogo al utilizado al principio del capítulo, obtendremos el sistema (2.22). Falta probar únicamente la fórmula de $a(0)$. Aplicando la definición de $a(\beta)$ obtenemos

$$a(\beta) = \operatorname{Re}(d(\beta)) = \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta(\beta)} c_1(\beta)\right),$$

de donde se sigue

$$a(0) = \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta_0} c_1(0)\right),$$

y con lo que queda probado resultado. \square

Como ya discutimos a comienzos de la sección, bastaría con exigir que la función f tenga un punto fijo en $x = 0$ para $\alpha = 0$, ya que, gracias a las condiciones impuestas sobre los valores propios, para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, f tendrá un punto fijo en un entorno de $x = 0$. Mediante una traslación, podemos situar este punto fijo en el origen y asumir, sin pérdida de generalidad, que para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, la función f tiene un punto fijo en $x = 0$.

Hemos visto que un sistema dinámico verificando determinadas hipótesis, lo podemos transformar en un sistema de la forma (2.22), sobre el cual podemos aplicar el Lema 2.3. Teniendo esto en cuenta, enunciemos el Teorema de la Bifurcación Genérica de Neimark-Sacker.

Teorema 2.2. *Consideremos un sistema dinámico discreto 2-dimensional*

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y f una función suficientemente regular con un punto fijo en $x = 0$ para $\alpha = 0$ con valores propios asociados

$$\mu_1 = r(\alpha)e^{i\varphi(\alpha)} \quad y \quad \mu_2 = r(\alpha)e^{-i\varphi(\alpha)},$$

con $r(0) \neq 0$ y $\varphi(0) = \theta_0$. Supongamos además que se cumple:

- $r'(0) \neq 0$,
- $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$,
- $a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} c_1(0)) \neq 0$.

Entonces, existe un entorno de $x = 0$ donde una única curva invariante se bifurca en $\alpha = 0$.

La demostración de este teorema se sigue de forma trivial aplicando el Teorema 2.1 y el Lema 2.3.

Podemos calcular el coeficiente $a(0)$ a partir de

$$a(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20} g_{11} \right) - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2, \quad (2.23)$$

donde $g_{ij} = g_{ij}(0)$. Hemos llegado a esta expresión recordando la fórmula de $c_1(0)$ (2.21) y probando que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{i\theta} - 1} \right) = -\frac{1}{2},$$

para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$.

A lo largo de esta sección, hemos estudiado bajo qué condiciones, un sistema dinámico, presenta una bifurcación de Neimark-Sacker. Antes de concluir el capítulo discutiremos un ejemplo. Vamos a comprobar la existencia de una bifurcación de Neimark-Sacker en un sistema dinámico dado, para lo que debemos verificar el cumplimiento de las hipótesis del Teorema 2.2.

Ejemplo 2.1 Consideremos la ecuación

$$u_{k+1} = s u_k (1 - u_{k-1}),$$

donde u_k es la densidad de población en el instante k y s la tasa de crecimiento. En este modelo, el crecimiento poblacional en un instante no solo depende de la densidad en ese momento, sino también de la población en el instante anterior. Definiendo $v_k = u_{k-1}$ podemos escribir la ecuación como un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= s u_k (1 - v_k), \\ v_{k+1} &= v_k, \end{aligned}$$

a partir del cual definimos el sistema dinámico 2-dimensional

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} s x_1 (1 - x_2) \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, s) \\ F_2(x, s) \end{pmatrix} = F(x, s) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.24)$$

La aplicación $F(x, s)$ tiene un punto fijo en $x = (0, 0)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Además, para $s > 1$ existe un punto fijo no trivial

$$x^0 = \left(1 - \frac{1}{s}, 1 - \frac{1}{s} \right).$$

Si $s < 1$, las componentes del punto fijo serían negativas, lo cual carece de sentido al representar densidades de población. Calculamos la matriz jacobiana de F evaluada en el punto fijo no trivial

$$DF(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - s \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y obtenemos sus valores propios

$$\mu_1(s) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - s} \quad \text{y} \quad \mu_2(s) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} - s}.$$

Cuando $s > \frac{5}{4}$ los valores propios son complejos y su módulo viene dado por $|\mu| = s - 1$. Notamos que para $s < 2$, el punto fijo no trivial es un atractor y si $s > 2$, un repulsor. Comprobaremos que en $s = 2$ tenemos un bifurcación de Neimark-Sacker. Para ello debemos demostrar que se cumplen las tres condiciones del Teorema de la Bifurcación Genérica de Neimark-Sacker para $s = 2$.

En primer lugar, observamos que $r(s) = s - 1$ y por tanto $r'(2) = 1 \neq 0$. Los valores propios para $s = 2$ vienen dados por

$$\mu_1 = e^{i\pi/3} \quad \text{y} \quad \mu_2 = e^{-i\pi/3},$$

de ahí que $\theta_0 = \pi/3$ y $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$. Con esto hemos probado las dos primeras condiciones del Teorema 2.2. Para estudiar la tercera condición debemos calcular $a(2)$. Seguiremos un procedimiento similar al realizado en el Lema 2.4 para obtener los coeficientes g_{ij} y así aplicar la fórmula (2.23). Comenzamos determinando los vectores propios de $DF(2)$ y $DF(2)^T$ asociados a los valores propios $e^{i\theta_0}$ y $e^{-i\theta_0}$ respectivamente, es decir, $p, q \in \mathbb{C}^2$ tales que

$$DF(2)q = e^{i\theta_0}q \quad \text{y} \quad DF(2)^T p = e^{-i\theta_0}p.$$

Imponiendo la condición de normalización $\langle p, q \rangle = 1$, escogemos, por ejemplo

$$q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad p = \begin{pmatrix} i\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, lo podemos escribir como $x = zq + \bar{z}\bar{q}$ con $z \in \mathbb{C}$. Así, definimos la nueva variable $z \in \mathbb{C}$ como aquella que verifica

$$x = x^0 + zq + \bar{z}\bar{q},$$

donde hemos incluido la traslación en un factor x^0 para centrar el nuevo sistema de coordenadas en el punto fijo no trivial. Tomamos el producto escalar con p en el sistema (2.24) y obtenemos

$$z \in \mathbb{C} \mapsto H(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}$$

con

$$H(z, \bar{z}) = \langle p, F(x^0 + zq + \bar{z}\bar{q}, s_0) - x^0 \rangle,$$

donde ya hemos fijado el valor del parámetro $s = s_0 = 2$ para simplificar lo que resta de desarrollo.

Calculamos el desarrollo de Taylor de $H(z, \bar{z})$ centrado en $(z, \bar{z}) = (0, 0)$

$$H(z, \bar{z}) = e^{i\theta_0} z + \sum_{2 \leq j+k \leq 3} \frac{1}{j! k!} g_{jk} z^j \bar{z}^k + \mathcal{O}(|z|^4).$$

Al haber fijado el parámetro s , notamos que $g_{ij} = g_{ij}(s_0)$. Es interesante destacar que, a diferencia del Lema 2.4, en este ejemplo $g_{10} = e^{i\theta_0} \neq 0$. Esto se debe a que en el lema el término lineal lo tratábamos por separado, y realizábamos la expansión en serie de Taylor de una función F que no tenía término lineal. Aún así, el sistema final al que llegamos tiene la misma estructura, pues tenemos un término lineal en z cuyo coeficiente es el valor propio del sistema en el punto fijo que es objeto de estudio. Obtuvimos además $g_{00} = g_{01} = 0$. Calculamos los coeficientes g_{20}, g_{11}, g_{02} y g_{21}

$$g_{20} = -2 + i\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{11} = i\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{02} = 2 + i\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{21} = 0,$$

a partir de los cuales podemos obtener el coeficiente $a(s_0)$

$$a(s_0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0}) e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20} g_{11} \right) - \frac{1}{2} |g_{11}|^2 - \frac{1}{4} |g_{02}|^2 = -2.$$

Hemos comprobado que se cumplen las tres condiciones del Teorema de la Bifurcación Genérica de Neimark-Sacker, luego existe una curva invariante cerrada, en un entorno de x_0 , que atraviesa una bifurcación en $r = 2$. Puesto que $a(s_0) < 0$, la curva aparecerá cuando $s > 2$ y tendrá un comportamiento atractor. En la Figura 2.4 representamos las órbitas del sistema para diferentes valores de la tasa de crecimiento s . Cuando $s < 2$, distinguimos el punto fijo, pero ninguna curva cerrada. Sin embargo para $s > 2$, suficientemente cercano a 2 observamos la curva invariante. Si la tasa de crecimiento continúa aumentando el sistema diverge.

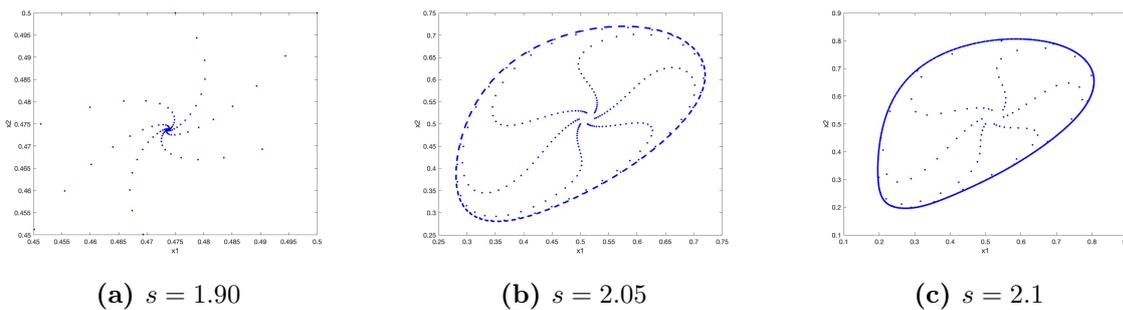


Figura 2.4: Ilustraciones de las dinámicas observadas en el sistema dinámico (2.24) para diferentes valores de la tasa de crecimiento s . Se observa una curva invariante cerrada para $s > 2$, suficientemente próximo a 2.

Capítulo 3

Aplicación: el escarabajo rojo de la harina

En este capítulo utilizaremos los resultados desarrollados a lo largo del trabajo para analizar un sistema que presenta una bifurcación de Neimark-Sacker. Podríamos haber seleccionado multitud de ejemplos pero hemos decidido estudiar la dinámica poblacional del escarabajo rojo de la harina, una de las principales plagas presentes en harinas y piensos almacenados. Se trata un modelo estudiado en [1] y seguiremos principalmente esta referencia. Esta especie de tenebriónidos se distribuye por todo el mundo y vive principalmente entre cereales, harinas y piensos. A pesar de ser considerada una plaga, resulta una especie útil para el estudio de modelos biológicos de poblaciones. El conocido como *modelo LPA* divide la población en 3 clases, según el desarrollo del individuo, larvas, pupas y adultos. Denotaremos por L el tamaño de la clase de larvas, P el de la clase de pupas y A el de la clase de los adultos. Así, el modelo

$$\begin{aligned}L(t+1) &= b A(t) e^{-c_{el} L(t) - c_{ea} A(t)}, \\P(t+1) &= (1 - \mu_l) L(t), \\A(t+1) &= P(t) e^{-c_{pa} A(t)} + (1 - \mu_a) A(t).\end{aligned}$$

describe la dinámica poblacional de un cultivo en laboratorio de escarabajos rojos de la harina. Determina la evolución temporal de las distintas clases en intervalos de tiempo de dos semanas. Se trata de un modelo no lineal, en el que las interacciones no lineales están descritas por los términos exponenciales, provocados por el canibalismo entre distintas clases. Las constantes $c_{el} > 0$, $c_{ea} > 0$ y $c_{pa} > 0$ reciben el nombre de coeficientes de canibalismo donde c_{el} y c_{ea} representan la proporción de huevos comidos por las larvas y los adultos respectivamente, y c_{pa} la proporción de pupas comidas por los adultos. Dado que el canibalismo se debe a encuentros aleatorios, es razonable que esté representado mediante un término exponencial. Las pupas y los adultos tienen tasas de mortalidad independientes del canibalismo, constantes $0 < \mu_p < 1$

y $0 < \mu_a < 1$, y b es el número de larvas producidas por adulto por unidad de tiempo. De esta forma, el número de larvas generadas, se ve reducido por el canibalismo de huevos por parte de pupas y adultos. Las larvas que sobreviven $(1 - \mu_l)$, crecen y se convierten en pupas. La población de pupas se reduce como consecuencia del canibalismo ejercido por los adultos, mientras que aquellas que se desarrollan completamente pasan a formar parte de la clase adulta. Por último, la población adulta disminuye a causa de la mortalidad. Notamos además que los periodos de larvas y pupas duran un intervalo de tiempo, es decir, dos semanas. En el modelo no consideramos otros aspectos como pueden ser la falta de recursos, el cambio de hábitat o la interacción con otras especies.

A partir del modelo LPA, podemos definir el sistema dinámico 3-dimensional

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto B(x)x = F(x) \in \mathbb{R}^3,$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} L \\ P \\ A \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^{-c_{el}L - c_{ea}A} \\ 1 - \mu_l & 0 & 0 \\ 0 & e^{-c_{pa}A} & 1 - \mu_a \end{pmatrix}.$$

Fijaremos los coeficientes de canibalismo y las tasas de mortalidad y tomaremos b como parámetro del sistema dinámico. En primer lugar representamos en la Figura 3.1, un diagrama de bifurcación correspondiente al modelo LPA, para hacernos una idea de la dinámica poblacional para diferentes valores del parámetro.

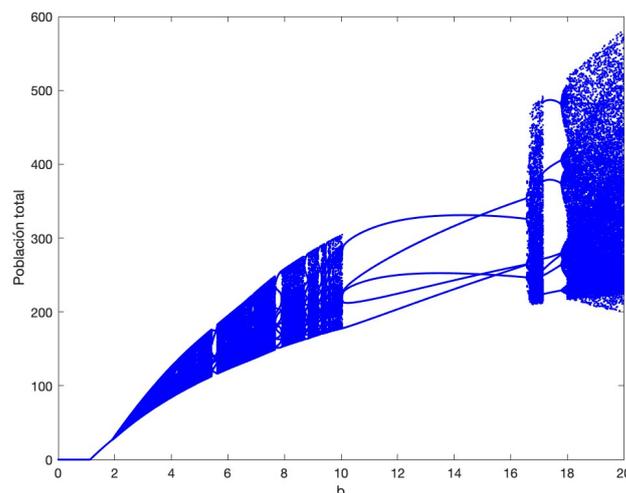


Figura 3.1: Diagrama de bifurcación correspondiente al modelo LPA con $c_{el} = c_{ea} = 0.01$, $c_{pa} = 0.05$, $\mu_l = 0.2$ y $\mu_a = 0.9$. En un valor de b cercano a 2 se observa una posible bifurcación de Neimark-Sacker.

Hemos tomado $c_{el} = c_{ea} = 0.01$, $c_{pa} = 0.05$, $\mu_l = 0.2$ y $\mu_a = 0.9$, los cuales mantendremos fijos a lo largo de todo el análisis, pues para estos valores observamos en el diagrama que, en un valor de b próximo a 2 aparece una posible bifurcación de Neimark-Sacker; más adelante veremos que, en efecto, se trata de una bifurcación de este tipo. Hemos considerado una población inicial cualquiera verificando $L + P + A > 0$ con $L, P, A \in \mathbb{R}^+$. Para cada valor del parámetro b hemos realizado 1000 iteraciones del modelo LPA, pero solo hemos representado las últimas 100 para así eliminar los estados transitorios.

Empezaremos el análisis calculando los puntos fijos del sistema. Para ello debemos resolver la ecuación de puntos fijos

$$x = F(x)x.$$

Es claro que $x = 0$ es un punto fijo del sistema dinámico. Para encontrar otros puntos fijos no triviales, para un determinado valor del parámetro b , resolvemos el sistema y llegamos a la ecuación

$$\frac{e^{c_{pa}A}\mu_a}{1-\mu_l} - b \exp\left(-c_{ea}A - \frac{c_{el}A e^{c_{pa}A}\mu_a}{1-\mu_l}\right) = 0, \quad (3.1)$$

a partir de la cual, obtenemos los valores de A para los que existen puntos fijos no triviales. Utilizando las expresiones

$$L = \frac{A\mu_a e^{c_{pa}A}}{1-\mu_l} \quad \text{y} \quad P = A\mu_a e^{c_{pa}A},$$

calculamos la población de larvas y pupas, para cada valor de A obtenido. De esta forma, determinamos todos los puntos fijos no triviales del sistema, en función del parámetro b .

Si quisiéramos comprobar mediante una demostración analítica la existencia de un valor del parámetro para el cual aparece una bifurcación de Neimark-Sacker, deberíamos verificar que se cumplen las condiciones del Teorema 2.2, de forma análoga a como hicimos en el Ejemplo 2.1. Esto sería factible con la ayuda de un ordenador, para realizar el cálculo simbólico, sin embargo, el hacer estas cuentas no nos iba a enseñar nada nuevo. Por ello, estudiaremos este ejemplo realizando un análisis numérico.

En la Figura 3.2 incluimos las soluciones a la ecuación de puntos fijos (3.1) en función del parámetro b . Los valores representados muestran la población adulta en los puntos fijos no triviales del sistema.

Existe solución a la ecuación de puntos fijos para $b \geq 1.1250$. Cabe destacar que dicha solución es única, es decir, una vez hemos fijado un valor de b , en caso de existir un punto fijo no trivial del sistema dinámico, este es único.

Hemos visto que una bifurcación de Neimark-Sacker, puede aparecer para valores del parámetro en los que tenemos un punto fijo no hiperbólico, con, al menos, dos valores propios asociados $e^{i\theta_0}$ verificando $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$. Por tanto, estudiaremos para cada valor de b , los valores

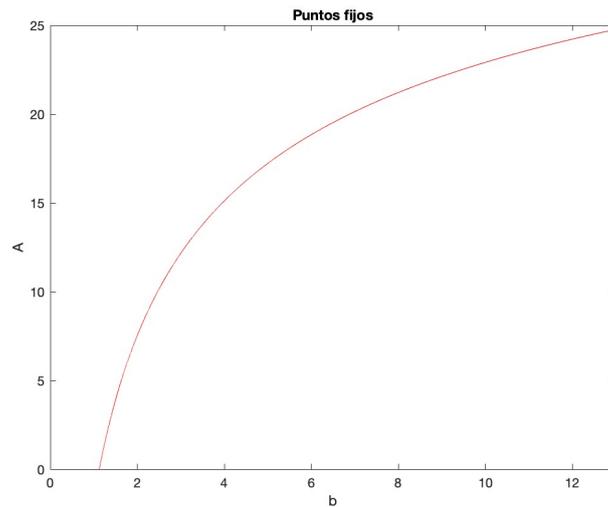


Figura 3.2: Soluciones a la ecuación de puntos fijos en función del parámetro b . Se puede observar la población adulta en los puntos fijos no triviales del sistema para distintos valores del parámetro.

propios asociados a los puntos fijos no triviales. Así, calculamos la diferencial de F

$$DF(x) = \begin{pmatrix} -c_{el} b A e^{-c_{el} L - c_{ea} A} & 0 & (1 - c_{ea} A) b e^{-c_{el} L - c_{ea} A} \\ 1 - \mu_l & 0 & 0 \\ 0 & e^{-c_{pa} A} & -c_{pa} P e^{-c_{pa} A} + (1 - \mu_a) \end{pmatrix},$$

y tras evaluarla en los distintos puntos fijos, podemos obtener sus valores propios. Queremos determinar los valores de b para los cuales el punto fijo no trivial tiene asociados, como mínimo, dos valores propios de módulo 1. A tal efecto, en la Figura 3.3 representamos el módulo de los tres valores propios asociados a cada punto fijo, en función de b . Obtenemos un valor propio real, denotado como primer valor propio y dos valores propios conjugados entre sí, etiquetados como segundo y tercer valor propio. Solo existe un único valor de b para el cual el punto fijo no trivial del sistema tiene asociados al menos dos valores propios de módulo 1. Calculando numéricamente el punto de corte, determinamos que $b = 1.9209633$ es el posible punto de bifurcación. El punto fijo no trivial obtenido para este valor de b es $x_0 = (L, P, A)$ con

$$L = 11.2622729,$$

$$P = 9.0098183,$$

$$A = 7.0403502.$$

Una vez visto que dos de los tres valores propios asociados a este punto fijo tienen módulo 1, debemos comprobar que cumplen que $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$. En efecto, los valores propios

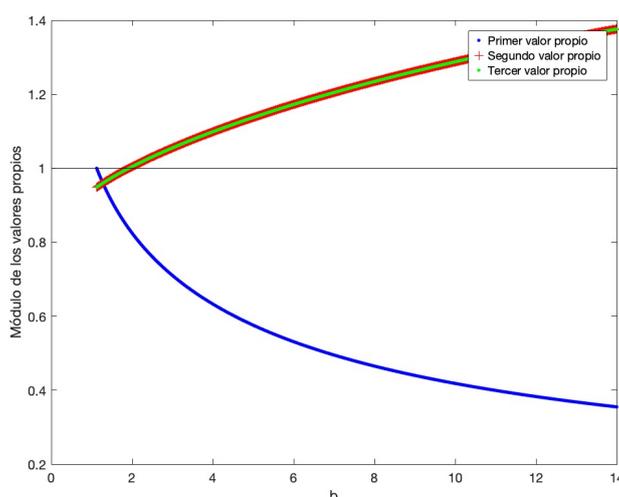


Figura 3.3: Módulos de los valores propios asociados a los puntos fijos no triviales en función de b . Únicamente existe un valor del parámetro para el que, al menos, dos valores propios tienen módulo 1.

son:

$$\begin{aligned} &0.8366369 + 0.0000000i, \\ &-0.5830377 + 0.8124451i, \\ &-0.5830377 - 0.8124451i, \end{aligned}$$

con lo que verifican la condición. Más aún, observamos que, para valores de la tasa de larvas producidas por adulto por encima de $b = 1.125$ e inferiores a $b = 1.9209633$, los módulos de los valores propios asociados al punto fijo no trivial son menores que 1. Es decir, si $b \in [1.125, 1.9209633)$ el punto fijo no trivial del sistema es un atractor. Cuando $b > 1.9209633$, pasamos a tener dos valores propios de módulo mayor que 1, y uno de módulo menor que 1, con lo que el punto fijo se transforma en un punto de silla, perdiendo así la estabilidad. Más adelante, realizaremos un estudio de las órbitas del sistema para diferentes valores de b , en un entorno del punto de bifurcación y observaremos la aparición de una curva invariante para $b > 1.9209633$, en un entorno suyo.

Como ya comentamos, no vamos a realizar una comprobación analítica de todas las condiciones que deben verificarse para asegurar que se trata de una bifurcación de Neimark-Sacker. Si bien, con el objetivo de encontrar el parámetro de bifurcación, hemos comprobado que dos de los tres valores propios, asociados al punto fijo, tienen módulo 1. Además, hemos verificado que estos son distintos de 1 y que no son raíces cuadradas, cúbicas ni cuartas de la unidad, que es una de las condiciones del Teorema 2.2.

No obstante, es interesante notar que la condición $r'(0) \neq 0$, en la notación del Teorema 2.2, se

puede comprobar que se verifica a partir de la Figura 3.3. Recordemos que $r(\alpha)$ es el módulo de los valores propios en función del parámetro y observando la gráfica es claro que la derivada del módulo de los valores propios en el punto de bifurcación es distinta de 0. Para terminar de comprobar las hipótesis del Teorema 2.2, necesitaríamos probar que $a(0) \neq 0$, siendo $a(0)$ dado por la expresión (2.23). Para hacer este cálculo sería preciso obtener la reducción a la variedad central en los términos del Teorema 1.8. No entraremos en estos cálculos y únicamente nos referimos a la Figura 3.1 para observar que el cambio en la dinámica es el esperado para el paso por una bifurcación de Neimark-Sacker. Por lo tanto, podemos admitir que la condición genérica de la que no nos hemos ocupado también se cumple. En rigor, afirmar que para este valor del parámetro tenemos una bifurcación de Neimark-Sacker de codimensión 1 implica la verificación de todas las condiciones genéricas. En lugar de preocuparnos por estas condiciones genéricas, preferimos explorar las consecuencias de la bifurcación.

Nos centraremos ahora en el estudio de la dinámica del sistema para valores de b en un entorno del punto de bifurcación. Recogemos en la Figura 3.4 el diagrama de bifurcación del sistema, centrándonos en esta región del espacio paramétrico.

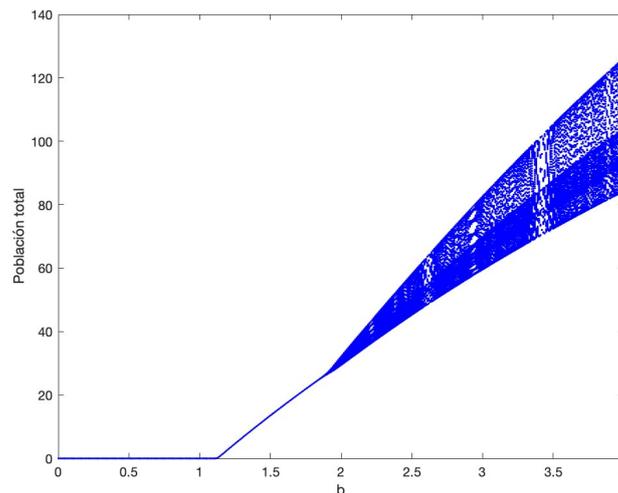


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación en el que se muestra la evolución del tamaño total de la población para diferentes valores de la tasa de fecundidad, en torno al punto de bifurcación $b = 1.9209633$.

Analizamos en primer lugar, la evolución del tamaño total de la población previa a la aparición de la bifurcación, es decir, para valores del parámetro $b < 1.9209633$. En la Figura 3.5 representamos una órbita del sistema tomando $b = 1.8$. Para este valor del parámetro, el sistema tiene un punto fijo no trivial en

$$L = 9.5828499, \quad P = 7.6662799, \quad A = 6.2362522,$$

cuyos valores propios asociados tienen módulo menor que 1, es decir, el punto fijo es un atractor.

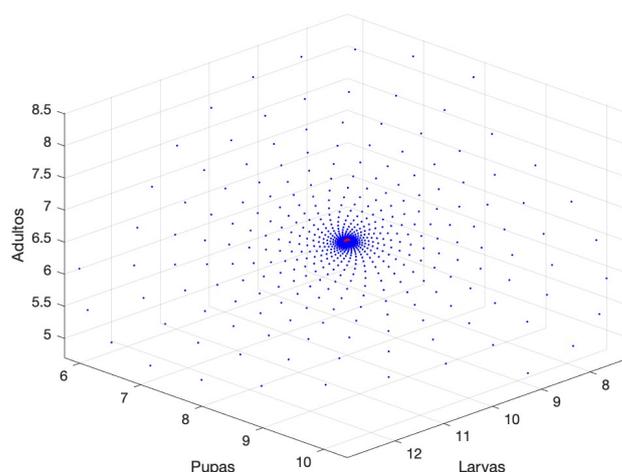


Figura 3.5: Órbita del sistema LPA tomando $b = 1.8$. Se observa el carácter atractor, previo a la bifurcación, del punto fijo no trivial.

Este comportamiento, el cual habíamos adelantado en el estudio de los módulos de los valores propios, en el análisis de la Figura 3.3, lo vemos reflejado en la órbita del sistema. En la Figura 3.6

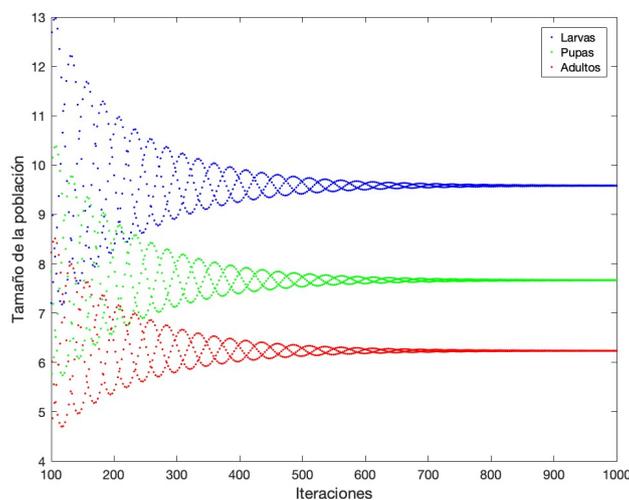


Figura 3.6: Evolución del tamaño de las poblaciones de larvas, pupas y adultos fijando $b = 1.8$.

vemos la evolución del tamaño de las poblaciones de larvas, pupas y adultos para este mismo parámetro. En esta representación es aún más claro el carácter atractor del punto fijo, pues a partir de las 700 iteraciones el valor de las tres poblaciones es prácticamente constante. No hemos representado las primeras 100 iteraciones puesto que son altamente dependientes del estado inicial.

Incluimos en la Figura 3.7 una órbita en 2 dimensiones, mostrando la evolución de la población adulta frente a la de larvas, donde también hemos fijado $b = 1.8$. De nuevo, podemos apreciar con claridad la presencia de un punto fijo atractor en el sistema. Notamos además que las órbitas

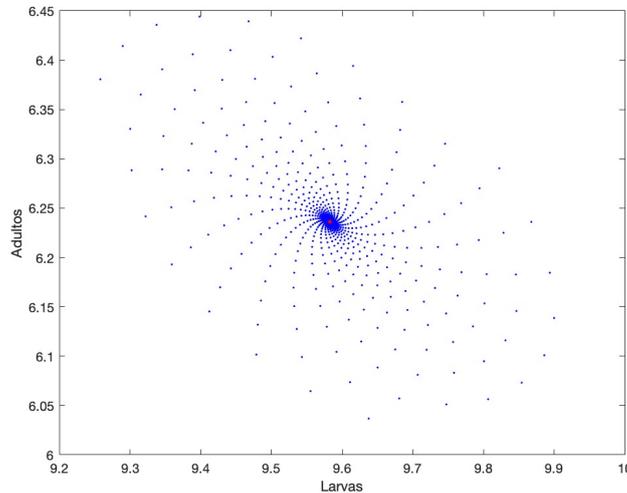
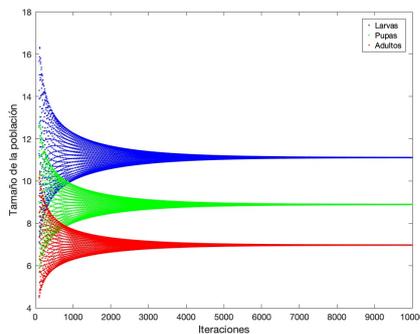
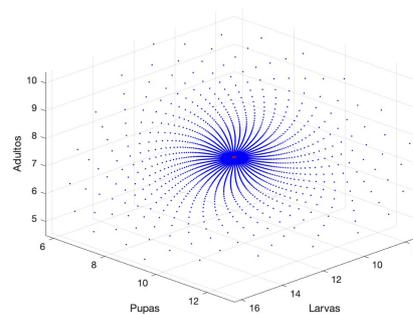


Figura 3.7: Órbita 2-dimensional del sistema representando la evolución de las poblaciones de adultos y larvas para $b = 1.8$.

convergen al punto fijo más lentamente a medida que nos acercamos al punto de bifurcación. En efecto, en la Figura 3.8a, para la cual hemos tomado $b = 1.91$, observamos que no es hasta las 4000 iteraciones, que las poblaciones de las tres clases comienzan a mantenerse constantes. Incluimos también en la Figura 3.8b una órbita del sistema para este valor del parámetro.



(a) Evolución del tamaño de las poblaciones de larvas, pupas y adultos.



(b) Órbita del sistema.

Figura 3.8: Dinámicas del sistema tomando $b = 1.91$.

Veamos ahora cómo se comporta el sistema cuando tomamos valores del parámetro $b > 1.9209633$, en un entorno suyo. Fijamos $b = 1.95$ y representamos en la Figura 3.9 una órbita del sistema. Para este valor del parámetro, el sistema tiene un punto fijo no trivial en

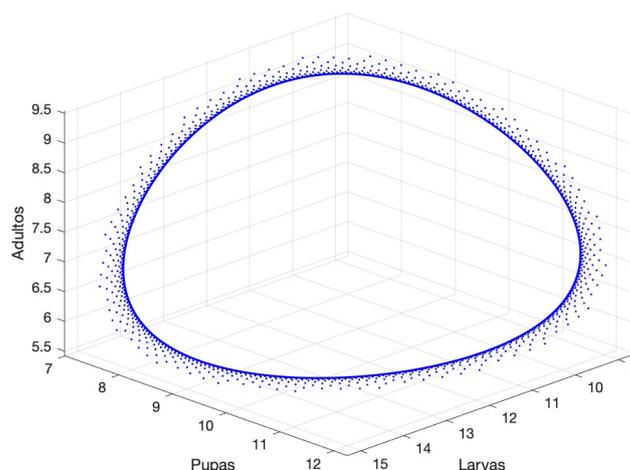


Figura 3.9: Órbita del sistema LPA tomando $b = 1.95$, donde se observa una curva invariante atractora.

$$L = 11.6621131, P = 9.3296905, A = 7.2237534.$$

Se trata de un punto de silla, ya que como podemos observar en la Figura 3.3, tiene dos valores propios de módulo mayor que 1 y uno de módulo menor que 1. Tendremos una variedad inestable de dimensión 2 y una variedad estable de dimensión 1. Es clara la existencia de una curva invariante en la órbita del sistema, la cual hemos representado considerando un estado inicial situado en el exterior de la región delimitada por la curva invariante. Notamos además que la curva invariante es atractora. Esto ya lo podíamos saber, pues el valor propio con módulo distinto de 1 en el punto de bifurcación tenía módulo menor que 1, con lo que la variedad central es atractora, y la curva invariante, teniendo en cuenta el sentido de aparición de la misma, es atractora sobre la variedad central. Teniendo en cuenta el sentido de aparición de la curva invariante nos encontramos ante una bifurcación de Neimark-Sacker supercrítica. Por otro lado, la evolución del tamaño de las poblaciones de larvas, pupas y adultos representada en la Figura 3.10, es completamente diferente a la vista en los casos anteriores. Al haber perdido el punto fijo su comportamiento atractivo en favor de la curva invariante, las poblaciones no llegan a estabilizarse nunca. En cambio, presentan un comportamiento oscilante que se corresponde con la aparición de la curva invariante. En esta gráfica también se pone de manifiesto el carácter atractivo de la curva, pues valores iniciales más dispersos del tamaño poblacional, al evolucionar el sistema, ven acotado su rango de oscilación, dando lugar a la aparición de la misma.

Para estudiar el carácter atractor de la curva invariante, vamos a analizar una segunda órbita del sistema. El punto fijo no trivial es un punto de silla con una variedad inestable 2-dimensional. Tomamos el estado inicial

$$L = 11.66, P = 9.32, A = 7.23,$$

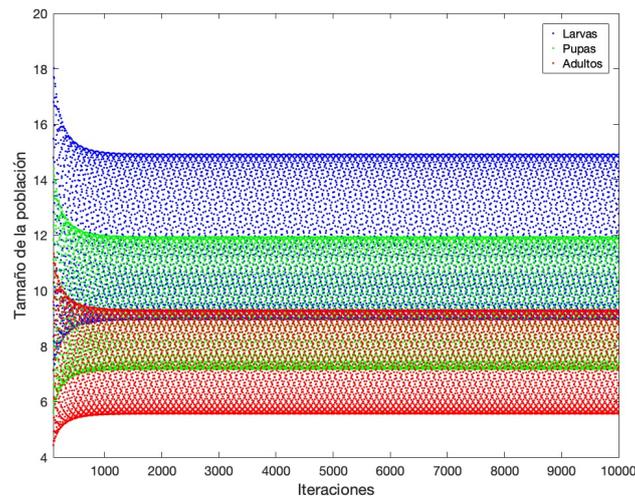


Figura 3.10: Evolución del tamaño de las poblaciones de larvas, pupas y adultos fijando $b = 1.95$.

muy próximo al punto fijo no trivial, y representamos la órbita en la Figura 3.11. En la represen-

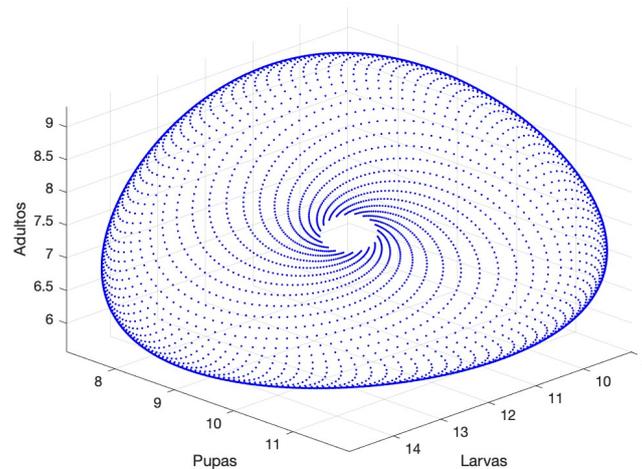


Figura 3.11: Órbita del sistema LPA tomando $b = 1.95$ y considerando el estado inicial $L = 11.66$, $P = 9.32$, $A = 7.23$.

tación de la órbita, hemos descartado las 2000 primeras iteraciones para observar la convergencia hacia la curva invariante. Esta dinámica es aún más evidente si estudiamos la evolución del tamaño de las poblaciones, Figura 3.12. En este caso, al tomar un valor tan cercano al punto fijo no trivial, a lo largo de las primeras 2000 iteraciones, los tamaños de las poblaciones son prácticamente constantes, sin embargo, a medida que el sistema continúa evolucionando, estos comienzan a oscilar hasta que se establecen unos valores máximo y mínimo entre los que las

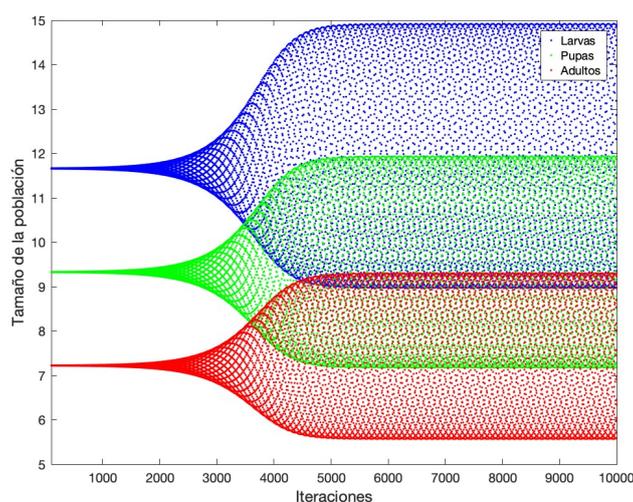


Figura 3.12: Evolución del tamaño de las poblaciones de larvas, pupas y adultos fijando $b = 1.95$ tomando el estado inicial $L = 11.66$, $P = 9.32$, $A = 7.23$.

poblaciones varían. Este fenómeno se corresponde con la aparición de la curva invariante.

Representamos en la Figura 3.13 la curva invariante 2-dimensional, resultado de proyectar la curva 3-dimensional sobre los ejes que determinan el tamaño de las poblaciones de adultos y larvas. En la imagen hemos remarcado en color rojo el punto fijo no trivial de forma que observamos

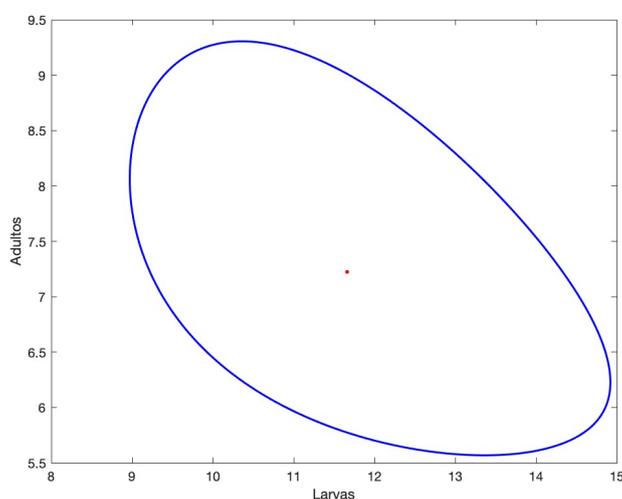


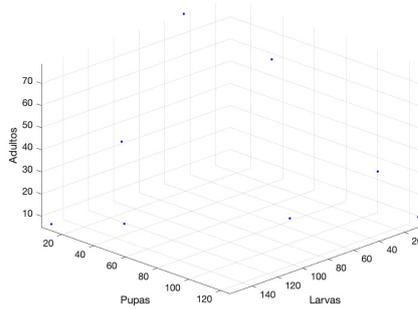
Figura 3.13: Órbita 2-dimensional del sistema que representa la evolución de las poblaciones de adultos y larvas para $b = 1.95$.

que la curva invariante lo rodea.

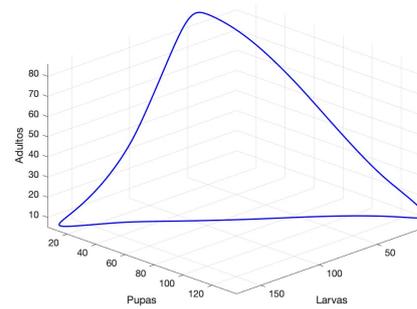
Más allá del análisis realizado alrededor de la bifurcación de Neimark-Sacker que atraviesa el

sistema en $b = 1.9209633$, la Figura 3.1 nos deja entrever una riqueza dinámica mucho más amplia. No vamos a discutirla en profundidad pues se saldría de los objetivos del trabajo, si bien, comentaremos algunos de los aspectos más relevantes.

Como ya discutimos, para $b > 1.9209633$ la órbita del sistema presenta una curva invariante atractora alrededor del punto fijo no trivial. Esta dinámica se pierde en torno a $b = 5.6$, valor para el cual podemos observar una órbita periódica de periodo 8. Al incrementar ligeramente el parámetro vuelve a aparecer una curva invariante. En la Figura 3.14 representamos la órbita periódica obtenida para $b = 5.6$ y la curva invariante para $b = 6$. De nuevo, para valores del



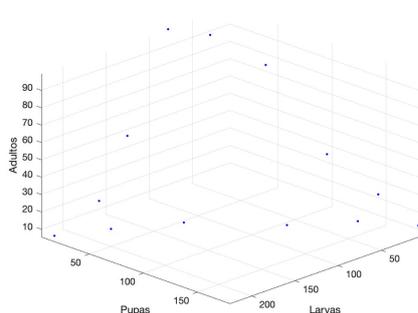
(a) Órbita periódica para $b = 5.6$.



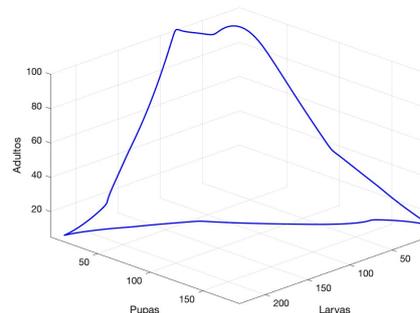
(b) Curva invariante para $b = 6$.

Figura 3.14: Dinámicas del sistema LPA para diferentes valores del parámetro de bifurcación.

parámetro en torno a 7.8, la curva invariante desaparece, dando lugar a una órbita periódica de periodo 13. Este comportamiento, vuelve de nuevo a perderse al seguir aumentando el valor del parámetro b , para dar lugar a la aparición de una nueva curva invariante. Representamos en la Figura 3.15 la órbita periódica presente para $b = 7.8$ y la curva invariante obtenida para $b = 8$. Esta dinámica vuelve a verse modificada al incrementar el valor de b por encima de 10,



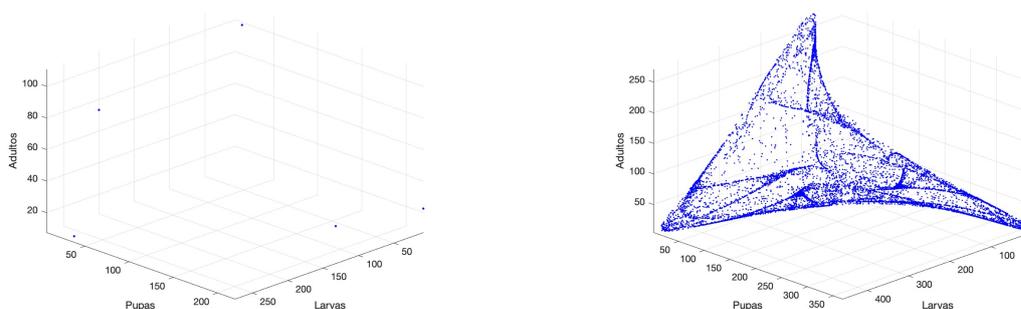
(a) Órbita periódica para $b = 7.8$.



(b) Curva invariante para $b = 8$.

Figura 3.15: Dinámicas del sistema LPA para diferentes valores del parámetro de bifurcación.

como podemos apreciar con claridad en el diagrama de bifurcación de la Figura 3.1. La curva invariante desaparece y en su lugar observamos una órbita periódica de periodo 5. A medida que seguimos aumentando el valor del parámetro, se mantiene la órbita periódica hasta que observamos la aparición de un atractor caótico cuando b se encuentra próximo a 17. En la Figura 3.16 representamos la órbita periódica observada para $b = 12$ y el atractor caótico obtenido para el valor $b = 17$. Resulta especialmente interesante lo que sucede al seguir aumentando el valor del



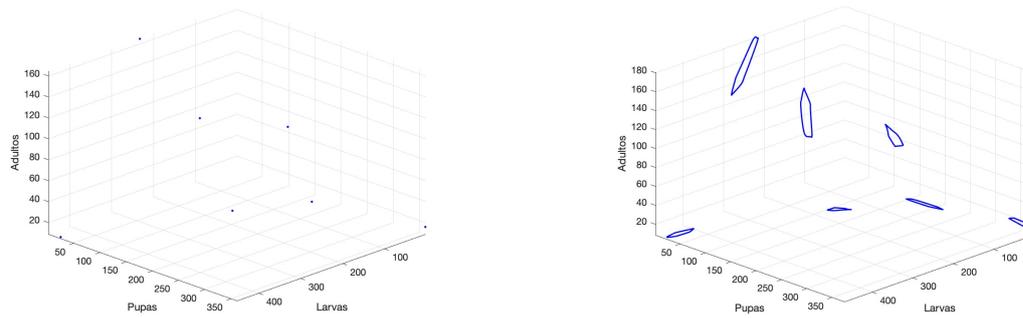
(a) Órbita periódica para $b = 12$.

(b) Atractor caótico para $b = 17$.

Figura 3.16: Dinámicas del sistema LPA para diferentes valores del parámetro de bifurcación.

parámetro. El atractor caótico deja paso a una órbita periódica de periodo 7, la cual podemos observar tomando $b = 17.5$. Sin embargo, una órbita periódica de periodo 7, no deja de ser una órbita periódica de periodo 1, es decir un punto fijo, si pensamos en la aplicación iterada 7 veces. Por tanto, la órbita periódica observada, la podemos ver como 7 puntos fijos de una nueva aplicación, obtenida como resultado de iterar 7 veces la aplicación original. Pues bien, cada uno de estos puntos fijos al incrementar el valor de b atravesará una bifurcación de Neimark-Sacker, dando lugar a 7 curvas diferentes, que podríamos visualizar como una curva invariante en 7 piezas diferentes. Cada una de estas 7 curvas se trata de una curva invariante de la aplicación iterada 7 veces, obtenida para diferentes condiciones iniciales. Ahora bien, es importante remarcar que ninguna de estas curvas es invariante para nuestro sistema, como podemos observar. En la Figura 3.17 incluimos la órbita periódica obtenido para $b = 17.5$ y las 7 curvas, producto de una bifurcación de Neimark-Sacker, observadas para $b = 17.9$. Por último, al seguir aumentando el valor del parámetro b observamos de nuevo un atractor caótico. En la Figura 3.18 representamos el atractor caótico obtenido para $b = 20$.

Hemos estudiado el sistema LPA fijando los coeficientes de mortalidad y de canibalismo y considerando como parámetro la tasa de larvas producidas por adulto, b . Cuando $b < 1.125$, el sistema presenta un único punto fijo, $L = P = A = 0$, con un comportamiento atractor, es decir, la población tiende a la extinción. Para valores del parámetro $b \in [1.125, 1.9209633)$ el sistema presenta un punto fijo no trivial atractor. Así, la población se estabiliza manteniéndose una estructura de edades constante. Sin embargo, al aumentar la tasa de fecundidad, alcanzamos



(a) Órbita periódica de periodo 7 para $b = 17.5$.

(b) Curvas invariantes obtenidas para $b = 17.9$.

Figura 3.17: Dinámicas del sistema LPA para diferentes valores del parámetro de bifurcación.

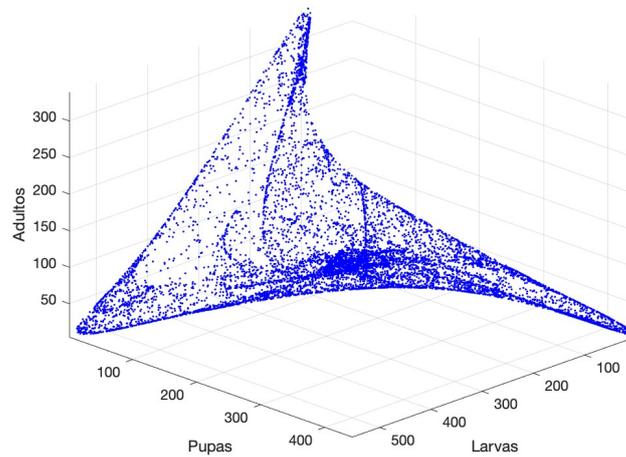


Figura 3.18: Atractor caótico observado para $b = 20$.

el punto de bifurcación $b = 1.9209633$, y para valores mayores en un entorno suyo, el tamaño de las poblaciones oscila a lo largo del tiempo. Estas fluctuaciones no son periódicas, si bien si se encuentran acotadas por un valor máximo y mínimo, lo que se corresponde con la aparición de una curva invariante. Desde el punto de vista de la ecología se producirían sucesivos aumentos y posteriores colapsos de las diferentes clases poblacionales. Aumentos más significativos del parámetro de fecundidad darían lugar a diferentes dinámicas poblacionales, pasando por evoluciones periódicas del tamaño de la población así como nuevas curvas invariantes.

Conclusiones

Nuestro objetivo principal en este trabajo consistía en realizar un estudio teórico sobre la bifurcación de Neimark-Sacker, tanto de la dinámica que despliega, como de las condiciones bajo las que aparece. Para ello comenzamos repasando una serie de conceptos esenciales de la Teoría de Sistemas Dinámicos y presentamos los dos ejemplos más sencillos de bifurcación que podemos encontrar en dinámica discreta: la bifurcación de nodo-silla y la bifurcación de duplicación de periodo.

A continuación nos hemos centrado en la bifurcación de Neimark-Sacker y hemos estudiado la dinámica de la forma normal en ausencia de términos de orden cuatro o superior. Partimos de un sistema dinámico dependiente de un parámetro α con un punto fijo en x_0 . Distinguimos dos casos en función del signo, en el punto de bifurcación α_0 , de un cierto coeficiente $a(\alpha_0)$ correspondiente a términos cúbicos. En el caso supercrítico, es decir, cuando $a(\alpha_0) < 0$, aparece una curva invariante atractora cuando $\alpha > \alpha_0$. Por el contrario, en el caso subcrítico, cuando $a(\alpha_0) > 0$, aparece una curva invariante repulsora cuando $\alpha < \alpha_0$. Al introducir los términos de orden superior, aparece una curva invariante con las mismas propiedades de estabilidad, y la bifurcación que da lugar a ella se produce en la misma dirección.

En la segunda parte del trabajo, determinamos qué hipótesis debe cumplir un sistema dinámico discreto 2-dimensional para presentar una bifurcación de Neimark-Sacker. Con este objetivo, partimos de un sistema genérico y realizamos una serie de cambios de coordenadas y reparametrizaciones, bajo ciertas condiciones, para transformar el sistema inicial en la forma normal de la bifurcación. El Teorema de la Bifurcación Genérica de Neimark-Sacker recoge las condiciones obtenidas a lo largo de esta sección, además del estudio de la dinámica previamente realizado. A modo de ilustración, probamos la existencia de una bifurcación de Neimark-Sacker en un sistema dinámico 2-dimensional mediante la comprobación analítica de estas condiciones.

Por último, realizamos un estudio de la dinámica poblacional del escarabajo rojo de la harina, utilizando el modelo LPA. Fijamos convenientemente los coeficientes de canibalismo y mortalidad y estudiamos el sistema en función de la tasa de fecundidad. Determinamos que en $b = 1.9209633$ tiene lugar una bifurcación de Neimark-Sacker, la cual provoca la aparición de una curva invariante cuando el parámetro toma un valor superior al del punto de bifurcación, lo que se traduce en sucesivos aumentos y colapsos de los tamaños de los diferentes grupos de edad.

En general, este trabajo constituye una puerta de entrada al estudio de los sistemas dinámicos. Resultaría muy interesante estudiar aspectos como la dinámica del sistema a lo largo de la curva invariante. En el caso de la forma normal simplificada (sin términos de orden superior), comentamos que una órbita podría ser periódica o densa sobre la curva invariante; para la forma normal completa, la casuística es mucho más amplia y rica, apareciendo estructuras como las lenguas de Arnold. En [2] y [5] se trata la dinámica general de homomorfismos sobre la circunferencia, lo que incluye esta discusión. Además, existen una gran variedad de bifurcaciones y dinámicas distintas, más allá de las desarrolladas y comentadas en este trabajo, que merecen un estudio más profundo. En el análisis del modelo LPA pudimos observar y comentar cualitativamente una pequeña parte de ellas.

Bibliografía

- [1] Cushing, J.M. *An introduction to structured population dynamics*. SIAM, 1998.
- [2] Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. CRC Press, 2021.
- [3] Homburg, A. y Knobloch, J. *Bifurcation Theory*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2024.
- [4] Kuznetsov, Y.A. *Elements of applied bifurcation theory*, tomo 112. Springer, 1998.
- [5] Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [7] Turer, G. Dynamical systems on the circle. Informe técnico, University of Chicago, 2019. Mimeo, <https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Turer.pdf>.
- [8] Vanderbauwhede, A. *Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations*. Springer, 1989.