

Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

# Introducción a la teoría de cuerdas

Jesús Ait Idir Lahuerta

Trabajo Fin de Grado Grado en Física

Tutora: Yolanda Lozano Gómez MMXXV

# Índice general

#### Motivación y contextualización III 1. Construcción de la teoría de cuerdas 1 1.1. Cuerdas no relativistas 1 1.2.51.2.1.6 1.2.2. 7 1.2.3.11 1.2.4. Expansión en modos de Fourier 18211.3. Cuantización 24241.3.1. Cuantización covariante 1.3.2.Cuantización de cono de luz 30 1.3.3. 351.3.4.Corrientes de Noether 39 2. Cuerdas abiertas y D-branas 43 2.1. Cuantización 472.1.1. Estados de la cuerda $\ldots$ 48 49502.3. Multiples branas 3. Supercuerdas 5353

	3.1.1.	Sector de Neveu-Schwarz			57
	3.1.2.	Sector de Ramond			61
3.2.	Supero	cuerdas cerradas			64
Conclusiones					67
Bibiliografía					71

## Motivación y contextualización

A lo largo de la historia de la física se distinguen dos grandes etapas: la física clásica y la física moderna. La física clásica nació para explicar fenómenos empíricos como el movimiento, la gravedad o el comportamiento de los fluidos. Las Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (1687) de Newton marcaron un antes y un después para la física clásica. Al formular las leyes del movimiento y la gravitación universal, Newton proporcionó un fundamento matemático que predominó en la física de los siglos XVIII y XIX. En ese marco, el espacio y el tiempo eran absolutos, y la causalidad se entendía como una sucesión lineal de eventos dentro de un escenario fijo e inmutable.

Todo cambió a comienzos del siglo XX. La física cuántica, que inició Planck (1900) y que se consolidó con la mecánica cuántica de Bohr, Heisenberg y Schrödinger, inauguró la era moderna, mostrando que a escalas atómicas la realidad no obedece las mismas leyes que a escalas macroscópicas. Podría dar la impresión de que, tras estos descubrimientos, la física clásica quedó en el olvido. Nada más lejos de la realidad, estos fueron los años en que la física clásica alcanzo su mayor auge, con la teoría de la relatividad presentada por Einstein. Esta teoría, aunque devastadora para la concepción del espacio-tiempo de Newton, es una teoría completamente clásica de la gravedad.

En 1905, Einstein formuló la relatividad especial, sustituyendo el tiempo absoluto de Newton por un espacio-tiempo de cuatro dimensiones en el que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales.

Diez años después, en 1915, presentó la relatividad general, donde la gravitación deja de ser una fuerza a distancia y pasa a interpretarse como la curvatura geométrica del espacio-tiempo causada por la energía y el momento de la materia.

La teoría de Einstein corrigió completamente la teoría clásica. Al fin y al cabo, la relatividad es una teoría clásica, el espacio-tiempo es continuo y determinista. El descubrimiento de la relatividad general puede considerarse al mismo tiempo el auge y cierre de la física clásica.

La física cuántica, por otra parte, buscaba tener un papel global, pudiendo explicar en una sola teoría procesos microscópicos y macroscópicos. En cierta medida, la física cuántica logró aquello que buscaba. Para la fuerza electromagnética, la fuerza fuerte y la fuerza débil se construyeron teorías que permiten explicar lo que ocurre a nivel cuántico y que, además, recuperan las leyes originales macroscópicas en el límite adecuado. A pesar de ello, muchos consideran que la física clásica aún no ha sido superada. El gran problema con el que se topó la cuántica fue la gravedad; la teoría más completa de la física clásica, la relatividad general, no encontró un equivalente cuántico.

El Modelo Estándar es la teoría cuántica más completa en la actualidad, y solo excluye a la gravedad de sus posibilidades. Aunque en muchas ocasiones sea posible trabajar con una teoría de la gravedad clásica acoplada al Modelo Estándar, no parece ser suficiente en todos los escenarios. Por ejemplo, para entender lo que ocurre los primeros instantes después del Big Bang o para abordar la física de los agujeros negros no podemos recurrir a una teoría clásica de la gravedad.

Durante los últimos años, se han centrado muchos esfuerzos en lograr la unificación entre la mecánica cuántica y la relatividad general. En este contexto, la teoría de cuerdas surge como una de las propuestas más prometedoras, una gran candidata a teoría unificadora de todas las fuerzas: gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte.

Originalmente, esta teoría no surge con este propósito, si no con uno un poco menos ambicioso, explicar la fuerza fuerte. Por ejemplo, se presenta el mesón como una cuerda abierta con quarks en un extremo y antiquarks en el otro. Es la cuerda que los une la que actúa como fuerza fuerte. Esta teória fue abandonada durante mucho tiempo a causa del éxito de la cromodinámica cuántica y de las dificultades de la teoría de cuerdas para explicar ciertos aspectos de la fuerza fuerte [1].

El principio fundamental de la teoría de cuerdas es realmente simple, cada partícula se identifica con un modo vibracional de una cuerda microscópica [5]. Estos modos corresponden a todas las partículas conocidas, incluyendo el gravitón (partícula mediadora de la interacción gravitatoria), que por el momento solo ha sido hipotetizado. En teoría de cuerdas, un decaímiento  $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$ , por ejemplo, se corresponde con la división de una cuerda vibrando en el modo  $\alpha$  en dos cuerdas vibrando en los modos  $\beta$  y  $\gamma$ . Desafortunadamente, el tamaño microscópico de las cuerdas ( $l_s \sim 10^{-35}m$ ) hace imposible la visualización de dicha naturaleza en las partículas a nivel macroscópico.

Como veremos más adelante, uno de los hechos que hacen única a esta teoría es que no incluye ningún parámetro adimensional ajustable en su formulación. Esto, en el caso del Modelo Estándar, es completamente diferente. Se necesita fijar un valor a alrededor de veinte parámetros en el Modelo Estándar. El problema de que una teoría requiera de unos parámetros iniciales fijos es que deja de ser una teoría *única*. Esto es, cualquier cambio en los parámetros considerados proporciona un resultado completamente diferente para la teoría. La teoría de cuerdas parte de un solo parámetro con dimensión espacial,  $l_s$ , la longitud de la cuerda. La teoría de cuerdas no solo se evita presuponer valores iniciales para parámetros fundamentales, sino que además tampoco requiere de una definición inicial de las dimensiones del espacio-tiempo. Es decir, las dimensiones del espacio-tiempo pueden derivarse directamente de la teoría. En vez de las cuatro dimensiones a las que estamos habituados, la teoría de cuerdas tiene más (26 para la teoría de cuerdas bosónicas y 10 para la teoría de supercuerdas).

Es decir, si la teoría de cuerdas fuera correcta, existirían dimensiones extra que todavía no hemos encontrado. Existen diferentes propuestas que explican la existencia de estas dimensiones adicionales indetectadas y su compactificación. La problemática más relevante surge a la hora de escoger qué forma de compactificación se lleva a cabo. Esta ambigüedad da lugar a casi infinitos vacíos posibles de la teoría de cuerdas y, en consecuencia, la teoría de cuerdas carece de capacidad predictiva. Este es uno de los problemas más difíciles de explicar y más criticados por la comunidad científica.

Se han propuesto numerosas teorías de cuerdas desde su introducción. En dichas teorías se distinguen dos tipos de cuerdas: abiertas y cerradas. También se pueden subdividir estas teorías, como adelantamos antes, en otras dos clases: cuerdas bosónicas y supercuerdas. Esta segunda familia de teorías son mucho más realistas<sup>1</sup>, pero también más complejas que las teorías bosónicas.

En este trabajo plantearemos las bases sobre las que se construye la teoría de cuerdas bosónica para cuerdas cerradas. Particularizaremos la teoría para el caso de cuerdas abiertas, marcando las diferencias entre ambos tipos de cuerdas e introduciendo el concepto de D-brana. Finalmente, haremos una breve introducción a la teoría de supercuerdas, que se presenta como una opción mucho más prometedora como teoría del todo, solucionando aquellos problemas que se plantean en la teoría bosónica.

#### Unidades

Las unidades utilizadas a lo largo del trabajo son  $\hbar = c = 1$ .

#### Créditos

Este trabajo está basado en las notas *String Theory*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, del físico de la Universidad de Cambridge David Tong [4] y en el libro A first course in string theory, del físico del MIT Barton Zwiebach [5].

 $<sup>^{1}</sup>$ Las teorías bosónicas no incluyen fermiones, en este sentido aunque puedan ser útiles para explicar fenómenos en la teoría de cuerdas, su capacidad predictiva de la realidad es limitada.

## Capítulo 1

## Construcción de la teoría de cuerdas

A lo largo de este capítulo vamos a desarrollar el proceso de derivación de la teoría de cuerdas bosónica. Antes de introducir esta teoría, como cuantización de la cuerda relativista, vamos a presentar un estudio muy breve del comportamiento de la cuerda no relativista. De esta forma, comenzaremos desde el caso más naíf de una cuerda y le iremos añadiendo más precisión: primero relatividad y después cuántica. En este capítulo nos centramos en construir la teoría para cuerdas cerradas. En el segundo capítulo se generalizará al caso de cuerdas abiertas, que contiene una gran cantidad de similaridades.

## 1.1. Cuerdas no relativistas

Para este estudio preliminar se asumirá, por simplicidad, que la cuerda se mueve en dos dimensiones, estas serán la dirección longitudinal (sobre la que se extiende la cuerda) y transversal. De todas formas, la generalización a un mayor número de direcciones transversales es completamente directa.

Tomemos primero una cuerda abierta con sus extremos en (0,0) y (a,0), es decir, la dirección longitudinal será la dirección del eje x. La ecuación que modeliza el movimiento de la cuerda sometida a una tensión constante T y con una densidad lineal de masa  $\mu_0$  será (como comprobaremos más adelante)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (1.1)$$

donde  $v_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}}$  es la velocidad de las ondas resultantes. Efectivamente, la ecuación (1.1) es una ecuación de ondas.

A la hora de resolver una ecuación diferencial, es fundamental fijar dos tipos de condiciones: iniciales y de contorno. En relación con este último tipo de condición, las dos



Figura 1.1: Esquema de una cuerda abierta con condiciones de contorno Dirichlet (izquierda) y Neumann (derecha). Imagen extraída de [5].

únicas posibilidades válidas en la teoría de cuerdas son las condiciones de tipo Dirichlet y de Neumann.

- Condición de tipo Dirichlet: Escogemos y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0, es decir, los extremos de nuestra cuerdan quedan *anclados* al eje x.
- Condición de tipo Neumann: Escogemos  $\frac{\partial y}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x = a) = 0$ , es decir, la cuerda no tendrá pendiente en los extremos. Para entender estas condiciones, podemos imaginar una cuerda en cuyos extremos se encuentran dos pequeños aros atados a dos barras infinitesimalmente finas y sin fricción. Esta condición básicamente supone que los aros extremos se puedan desplazar libremente a lo largo de las barras, sin sufrir fricción alguna.

Podemos ver en la Figura 1.1 un esquema de las diferentes condiciones de contorno para una cuerda abierta.

La elección de las condiciones a utilizar puede parecer arbitraria pero, como veremos en próximas secciones, tendrá un papel relevante al imponer el tipo de cuerda que estudiemos.

Ahora, planteamos el estudio de la cuerda relativista desde una notación lagrangiana, que será la que utilicemos más adelante. Para una partícula de masa m sometida a un potencial V se tiene que  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V[x(t)]$ , por lo que la acción del sistema será

$$S = \int_{\mathcal{P}} L \, dt = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V[x(t)] \right\} \, dt, \tag{1.2}$$

donde  $\mathcal{P}$  indica un recorrido de x(t) entre  $t_i$  y  $t_f$ .

En el caso de nuestra cuerda, la energía cinética será  $E_c = \frac{1}{2} \int_0^a \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$ , que se obtiene sin más que sumar las contribuciones infinitesimales de cada punto de la cuerda. En cuanto al potencial, podemos seguir un razonamiento similar teniendo en cuenta que el trabajo realizado para tensar infinitesimalmente la cuerda será de la forma  $T\Delta l$ , donde  $\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx$  es la variación del largo del intervalo infinitesimal tras el tensado. Así, como  $\Delta l = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$ , entonces  $V = \frac{1}{2} \int_0^a T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$ 

y finalmente

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right].$$
(1.3)

Es muy importante notar que estamos simplemente obteniendo la acción de la cuerda para oscilaciones transversales pequeñas, es decir,

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1. \tag{1.4}$$

Vamos a aplicar el principio de mínima acción para obtener las ecuaciones de movimiento. Para una perturbación  $y + \delta y$  obtenemos que  $S(y + \delta y) = S + \delta S + \mathcal{O}((\delta y)^2)$ con

$$\delta S = \int_0^a \left[ \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right]_{t=t_i}^{t=t_f} dx + \int_{t_i}^{t_f} \left[ -T \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right]_{x=0}^{x=a} dx - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left( \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y.$$
(1.5)

Para que  $\delta S = 0$  (mínima acción) los tres términos deben anularse de forma independiente para cualquier  $\delta y$ . La primera condición se anula debido a que al especificar una cierta posición inicial y final a nuestra cuerda a la hora de resolver su acción estamos fijando  $\delta y(t_i, x) = \delta y(t_f, x) = 0 \ \forall x \in [0, a].$ 

El segundo término, por otra parte, no se anula de forma trivial. Si lo expandimos obtenemos

$$-T\left[\frac{\partial y}{\partial x}(t,a)\,\delta y(t,a) - \frac{\partial y}{\partial x}(t,0)\,\delta y(t,0)\right].$$
(1.6)

Si recordamos las condiciones de contorno mencionadas al principio, es claro que cualquiera de las dos anula el término anterior<sup>1</sup>. Podemos utilizar cualquiera de ambas:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, a/0) = 0$$
 (Neumann),  $\frac{\partial y}{\partial t}(t, a/0) = 0$  (Dirichlet),

donde escribimos las condiciones Dirichlet de una forma algo diferente pero equivalente (extremos de la cuerda fijos, inmóviles en el tiempo). Finalmente, al anular último término de (1.5), como era de esperar, recuperamos la ecuación (1.1).

Ahora, vamos a estudiar la forma de vibrar que puede tener la cuerda no relativista. Buscamos soluciones sinusoidales a nuestra ecuación de movimiento, es decir, soluciones de la forma  $y(t, x) = y(x) \operatorname{sen}(wt + \phi)$ , donde w es la frecuencia de vibración y  $\phi$  la fase común a toda la cuerda. No todas las soluciones de esta forma son válidas, solo sirven unas ciertas frecuencias. Sustituyendo en la ecuación (1.1), obtenemos una ecuación diferencial para y(x) con la que concluimos por consistencia que las modos de vibración permitidos

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Por el momento no vamos a profundizar en la elección de las condiciones, de todas formas, puede ser interesante notar que el momento  $(p = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} dx)$  solo se conserva para condiciones de tipo Neumann.



Figura 1.2: Esquema de una cuerda cerrada.

tanto para condiciones de contorno Dirichlet como Neumann son

$$w_n = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}} \frac{n\pi}{a},\tag{1.7}$$

 $\operatorname{con} n = 1, 2...$  (aunque con Neumann también es válida la solución con modo de vibración w = 0).

Para finalizar esta primera sección, vamos a discutir brevemente el caso de la cuerda cerrada. Podemos describir una cuerda cerrada no relativista de forma bastante precisa si consideramos que la cuerda está enrollada alrededor de un cilindro de gran circunferencia  $a = 2\pi R$ , sobre el cual se mantiene tensa debido a la tensión T. Supondremos que la cuerda puede moverse sobre la superficie del cilindro sin experimentar fricción. Es decir, mantenemos la simplificación a dos dimensiones, aunque ahora una de ellas es la dirección alrededor de un cilindro.

A diferencia del caso de la cuerda abierta, en que tenemos que imponer unas condiciones de contorno (Neumann o Dirichlet), la única condición a tener en cuenta en la cuerda cerrada es la periodicidad. Es decir, tenemos la identificación  $x \sim x + a$ . De este modo, se puede obtener la acción (1.3) de forma completamente equivalente al caso de la cuerda abierta. Recordamos que al aplicar el principio de mínima acción, el término (1.6) recuperaba las condiciones de Neumann o Dirichlet. No tuvimos en cuenta la posibilidad de que se cumpliera

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t,a)\delta y(t,a) = \frac{\partial y}{\partial x}(t,0)\delta y(t,0), \qquad (1.8)$$

sin que se anularan al mismo tiempo necesariamente. Cuando tenemos condiciones periódicas es exactamente este el caso, ya que al identificar x y x + a como el mismo punto de la cuerda, sus derivadas o variaciones van a ser exactamente las mismas.

Por tanto, vemos que todo el estudio anterior es completamente análogo. La ecuación de movimiento vuelve a ser simplemente una ecuación de ondas con velocidad  $v_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}}$ . Podemos ver en la Figura 1.2 un esquema de las diferentes condiciones de contorno para una cuerda cerrada.

Los modos de vibración, en este caso, son ligeramente diferentes al caso de la cuerda abierta. Como mencionamos antes, si tenemos soluciones de la forma  $y(x,t) = y(x) \operatorname{sen}(wt+$ 

 $\phi$ ), y sustituimos en la ecuación (1.1), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0, (1.9)$$

donde  $k = w \sqrt{\frac{\mu_0}{T}}$ . Esta ecuación admite soluciones generales de la forma

$$y(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$
 (1.10)

En el caso de condiciones Dirichlet o Neumann, se podía encontrar de forma simple una condición para las frecuencias. Ahora, usando la condición de periodicidad, tenemos

$$y(x) = y(x+a) \Longrightarrow Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = Ae^{ikx}e^{ika} + Be^{-ikx}e^{-ika}.$$
 (1.11)

Si también utilizamos la periodicidad sobre la derivada

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}(x+a) \Longrightarrow Ae^{ikx} - Be^{-ikx} = Ae^{ikx}e^{ika} - Be^{-ikx}e^{-ika}.$$
 (1.12)

Sumando (1.11) y (1.12) entonces obtenemos directamente  $e^{ika} = 1$ , es decir,  $ka = 2\pi n \Longrightarrow k = w_n \sqrt{\frac{\mu_0}{T}} = \frac{2\pi n}{a}$ . Los modos de vibración permitidos son

$$w_n = 2\sqrt{\frac{T}{\mu_0}} \frac{n\pi}{a} = 2w_n^{D/N},$$
(1.13)

con n = 0, 1... y donde  $w_n^{D/N}$  son las frecuencias permitidas en la cuerda abierta con condiciones Dirichlet o Neumann. El hecho de que las frecuencias sean exactamente el doble no debería sorprendernos. Cuando tenemos una cuerda abierta, la vibración debe reflejarse en los extremos, mientras que en una cuerda cerrada la vibración puede continuar el camino completo y no solo la mitad.

## 1.2. Cuerdas relativistas

Claramente, la acción 1.3 es no relativista, su formulación no impide velocidades mayores que c. Reformularemos el problema en términos relativistas. A lo largo del trabajo tomamos  $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, ..., +1)$ .

Como mencionamos al comienzo, la teoría de cuerdas emerge en un espacio-tiempo con más dimensiones de lo esperado. Por ello, vamos a fijar nuestro espacio de Minkowski en general como  $\mathbb{R}^{1,D-1}$  con D dimensiones. El estudio anterior, no relativista, se realizó para D = 3, no era suficientemente completo.

## 1.2.1. Masa puntual

Antes de generalizar al caso de una cuerda relativista, recordamos el caso de una partícula relativista puntual de masa m. Si fijamos un marco de referencia en que la masa tiene coordenadas  $X^{\mu} = (t, \vec{x})$  entonces la acción de la partícula será de la forma

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^{\mu} \dot{X}^{\nu}}, \qquad (1.14)$$

donde  $\tau$  es un parámetro arbitrario (que no se debe confundir con el tiempo propio) y  $\mu = 0, \dots, D - 1, \dot{X}^{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{d\tau}.$ 

Es más habitual encontrarse con esta acción en la forma  $S = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{x} \cdot \dot{x}}$  o  $S = -m \int d\tau_p$ , en función del tiempo propio. En este sentido, la acción escogida permite recuperar cualquiera de las anteriores sin más que realizar un cambio de parámetros adecuado. Esto es un ejemplo de una de las más importantes propiedades de nuestra acción, es invariante bajo reparametrizaciones de  $\tau$ . Es decir, si tomamos una función monótona  $\tilde{\tau}(\tau)$  y reparametrizamos la acción, permanece inalterada. De alguna forma, la expresión (1.14), que parece añadir un grado de libertad respecto de otras formulaciones, contiene una simetría gauge<sup>2</sup> adicional.

Hemos elegido esta acción porque permite visualizar de forma mucho más manifiesta la simetría de Poincaré de la partícula:

$$X^{\mu} \to \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu} + c^{\mu}, \qquad (1.15)$$

donde  $\Lambda^{\mu}_{\nu}\eta^{\nu\rho}\Lambda^{\sigma}_{\rho} = \eta^{\mu\sigma}$ , es decir,  $\Lambda$  es una transformación de Lorentz. Además,  $c^{\mu}$  no es más que una traslación constante.

Realizamos una comprobación rápida de que efectivamente la acción permanece invariante bajo este tipo de transformaciones:

$$\eta_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu} \to \eta_{\mu\nu}\frac{d(\Lambda^{\mu}_{\rho}X^{\rho} + c^{\mu})}{d\tau}\frac{d(\Lambda^{\nu}_{\sigma}X^{\sigma} + c^{\nu})}{d\tau} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}\dot{X}^{\rho}\dot{X}^{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}\dot{X}^{\rho}\dot{X}^{\sigma}.$$
 (1.16)

Al cuantizar esta acción, sabemos que la función de onda asociado a la masa puntual sigue la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = H\Psi,\tag{1.17}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Una simetría gauge es un tipo de transformación que deja el lagrangiano invariante. Se definen de manera más precisa más adelante.

donde  $H = p_{\mu} \dot{X}^{\mu} - L$ . Como el momento es

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^{\mu}} = \frac{m\eta_{\mu\nu}\dot{X}^{\nu}}{\sqrt{-\eta_{\rho\sigma}\dot{X}^{\rho}\dot{X}^{\sigma}}},\tag{1.18}$$

entonces H = 0. Además,

$$p_{\mu}p^{\mu} = \eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} = \eta_{\mu\nu}m^{2}\frac{\eta_{\mu\alpha}\dot{X}^{\alpha}}{\sqrt{-\eta_{\rho\sigma}\dot{X}^{\rho}\dot{X}^{\sigma}}}\frac{\eta_{\nu\beta}\dot{X}^{\beta}}{\sqrt{-\eta_{\rho\sigma}\dot{X}^{\rho}\dot{X}^{\sigma}}} = m^{2}\frac{\eta_{\alpha\beta}\dot{X}^{\alpha}\dot{X}^{\beta}}{-\eta_{\rho\sigma}\dot{X}^{\rho}\dot{X}^{\sigma}} = -m^{2}, \quad (1.19)$$

ya que  $\eta_{\mu\nu}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} = \eta_{\nu\mu}\eta^{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} = \delta^{\alpha}_{\nu}\eta_{\nu\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , dado que  $\eta = \eta^{-1}$ . La ecuación (1.19) establece la siguiente ligadura en el sistema:

$$p_{\mu}p^{\mu} + m^2 = 0, \qquad (1.20)$$

mostrando una vez más que la invariancia en la reparametrización no supone ningún grado de libertad real adicional. La expresión (1.20) es precisamente la ecuación de movimiento de una partícula relativista libre de masa m, tal y como se esperaba obtener de la acción (1.14).

El hecho de que el Hamiltoniano sea nulo es un resultado mucho más coherente de lo que parece. Es equivalente a decir que  $\Psi(X)$  no depende de la parametrización que hemos escogido  $\tau$ , como puede concluirse de la ecuación (1.17). Esta parametrización no tiene ningún sentido físico, nuestra acción no depende de la elección que hagamos. En este sentido, se podía anticipar que la función de onda de la partícula tampoco dependiera de ella.

Escribiendo la ecuación (1.20) en términos cuánticos  $(p_{\mu} = -i\partial_{\mu})$  se tiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(-\partial_{\mu}\partial_{\nu}\eta^{\mu\nu} + m^2\right)\Psi(X) = 0. \tag{1.21}$$

## 1.2.2. Acción de Nambu-Goto

El objetivo ahora es formular la acción de una cuerda cerrada relativista y así, posteriormente, poder cuantizarla.

La diferencia principal con el caso de la masa puntual es que ahora no tenemos una trayectoria lineal. Al tratarse de una cuerda, la trayectoria será la superficie dos dimensional que esta traza en el tiempo, la denominaremos hoja de universo. No podemos esperar parametrizar su acción con un solo parámetro, como antes; utilizaremos dos:  $\sigma^a = (\tau, \sigma), a \in \{0, 1\}.$ 



Figura 1.3: Área diferencial de una superficie encajada en un espacio euclídeo. Imagen extraída de [4].

En esta sección vamos a tratar el caso de las cuerdas cerradas. Entonces, parece razonable escoger que nuestro nuevo parámetro de tipo espacial sea periódico. Análogamente a las coordenadas polares y por comodidad, tomaremos  $\sigma \in [0, 2\pi)$ . Esto quiere decir que para la cuerda cerrada:

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = X^{\mu}(\tau, \sigma + 2\pi).$$
 (1.22)

Como vimos en el caso de la partícula puntual, la invariancia en la reparametrización era una simetría gauge deseable para el sistema. La acción que lo permitía, (1.14), es proporcional a la longitud de la trayectoria que recorre la partícula. Estirando la analogía, es posible que si exigimos que la acción sea proporcional al área de la hoja de universo entonces se conserve la reparametrización para los dos parámetros  $\tau$  y  $\sigma$ .

Observemos la Figura 1.3. El recinto diferencial está limitado por los vectores tangentes a la superficie:  $d\vec{l_1} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$  y  $d\vec{l_2} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}$ .

Entonces, si denominamos  $\theta$  al ángulo entre los vectores, el área vendrá dada por:

$$dA = |d\vec{l_1} \times d\vec{l_2}| = \sqrt{dl_1^2 dl_2^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{dl_1^2 dl_2^2 - (d\vec{l_1} \cdot d\vec{l_2})^2}.$$
 (1.23)

Para nuestro espacio de Minkowski, con la métrica adecuada, tendremos:

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2 + (\dot{X} \cdot X')^2}, \qquad (1.24)$$

donde T es una constante de proporcionalidad,  $\dot{X}^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau}$  y  $X'^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}$ . Notar que estamos usando la notación compacta  $(\dot{X})^2 = \dot{X}^{\mu} \dot{X}^{\nu} \eta_{\mu\nu}$ .

Vamos a definir la métrica inducida:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma^{\beta}} \eta_{\mu\nu}.$$
 (1.25)

En forma matricial esta métrica no es más que

$$\gamma = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix}.$$
 (1.26)

Es decir, podemos reescribir (1.24) como

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \qquad (1.27)$$

donde  $\gamma \equiv \det \gamma$ .

La constante T tiene una clara interpretación física como la tensión de la cuerda. Para entender esto, vamos a fijar nuestro gauge de parametrización  $t = R\tau$  (usamos R porque no hemos asumido nada sobre las unidades de  $\tau$ ). Además tomamos  $d\vec{x}/d\tau = 0$ , es decir, que la partícula no tiene energía cinética. Entonces  $\partial_{\tau} X^{\mu} = (T^{-1}, 0, \dots, 0)$  y  $\partial_{\sigma} X^{\mu} = (0, d\vec{x}/d\sigma)$ . Por tanto, nuestra acción será

$$S = -T \int dt \, d\sigma \, \sqrt{\left(\frac{d\vec{x}}{d\sigma}\right)^2} = -T \int dt \, \underbrace{\left(\int d\sigma \left|\frac{d\vec{x}}{d\sigma}\right|\right)}_{\text{longitud espacial}},\tag{1.28}$$

donde en el último término nos referimos a la longitud espacial de la cuerda y la constante R ha desaparecido al cambiar de variables.

Cuando no hay energía cinética, la acción es simplemente proporcional a la energía potencial. Es decir,

### energía potencial = $T \times longitud$ espacial.

Efectivamente T tiene unidades de energía por unidad de longitud. Ahora, podemos notar que  $[T] = L^{-2}$  (recordamos que  $\hbar = 1 = c$ ) y, entonces, si reescribimos  $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$  (expresión que nos ayudará a simplificar la acción de Polyakov más adelante) tendremos  $[\alpha'] = L^2$ . Gracias a este análisis dimensional, parece plausible definir una escala de longitud de la cuerda tal que  $l_s^2 = \alpha'$ . Esta longitud será, como veremos, el único parámetro de la teoría.

La acción (1.27), tal y como buscábamos, cuenta con la simetría gauge de invariancia en la reparametrización, para ambos parámetros. Es muy fácil comprobarlo, especialmente utilizando la forma (1.24). Esto, como antes, quiere decir que nuestra acción tiene cierta información redundante debida a que los parámetros  $\sigma^{\alpha}$  no tienen información física.

Como en el caso de la partícula puntual, también se conserva la simetría global asociada a la invariancia en las transformaciones de Poincaré. Esto también es muy fácil de comprobar, utilizando argumentos muy similares a los del caso puntual.

Antes no nos paramos a analizar las diferencias entre ambas invariancias, pero es digno de mención. Estas dos simetrías son de tipos distintos. Las simetrías gauge son simetrías internas, es decir, simetrías independientes de las coordenadas espacio-temporales. Esto es, la dependencia que exhiben de las coordenadas no impide que se conserve la simetría. En cambio, las simetrías como la de Poincaré son simetrías globales, dichas transformaciones afectan de forma uniforme a todos los puntos.

Básicamente, las simetrías globales tienen que ver con cómo se transforma espacial y temporalmente el sistema en su conjunto y las simetrías internas se refieren a los grados de libertad internos asociados a los puntos del sistema. Esta diferencia es fundamental, son las simetrías gauge aquellas que obligan a introducir los campos gauge que rigen las leyes físicas del universo.

Las ecuaciones del movimiento asociadas a esta acción serán

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} = 0, \qquad (1.29)$$

donde  ${\mathcal P}$  son los momentos definidos como

$$\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_{\mu} - (X'^2) \dot{X}_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}},$$

$$\mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^{\mu}} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_{\mu} - (\dot{X}^2) X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}.$$
(1.30)

Es decir, se trata de ecuaciones bastante complejas y poco esclarecedoras. Se pueden escribir de una forma más sencilla si, en vez de recurrir a las ecuaciones de Lagrange, usamos directamente el principio de mínima acción.

Vamos a necesitar calcular la variación de un determinante. Tomemos una matriz M, se tiene que

$$\det(M + \delta M) = \det(M(I + M^{-1}\delta M)) = \det(M)\det(I + M^{-1}\delta M).$$
(1.31)

Si expandimos el segundo término tenemos

$$\det(I + M^{-1}\delta M) = 1 + Tr(M^{-1}\delta M) + \mathcal{O}((M^{-1}\delta M)^2) = 1 + M^{\alpha\beta}\delta M_{\beta\alpha} + \mathcal{O}((M^{-1}\delta M)^2).$$
(1.32)

Entonces, a primer orden

$$\det(M + \delta M) \approx \det M + (\det M) M^{\alpha\beta} \delta M_{\beta\alpha} = \det M + \delta(\det M).$$
(1.33)

Es decir,

$$\delta(\det M) = (\det M) M^{\alpha\beta} \delta M_{\beta\alpha}. \tag{1.34}$$

Entonces, la variación de nuestra acción será

$$\begin{split} \delta S &= -T \int d\tau d\sigma \delta \sqrt{-\det \gamma} = -T \int d\tau d\sigma \frac{-\delta(\det \gamma)}{2\sqrt{-\det \gamma}} = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \delta \gamma_{\beta\alpha} \\ &= -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \delta X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\mu} \\ &= -T \int d\tau d\sigma \left[ \partial_{\alpha} \left( \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \delta X^{\mu} \right) - \delta X^{\mu} \partial_{\alpha} \left( \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right) \right] \\ &= T \int d\sigma \left[ \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\tau\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \delta X^{\mu} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=2\pi} - T \int d\tau \left[ \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\sigma\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \delta X^{\mu} \right]_{\tau_{i}}^{\tau_{f}} \\ &+ T \int d\tau d\sigma \, \delta X^{\mu} \partial_{\alpha} \left( \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right) \\ &= T \int d\tau d\sigma \, \delta X^{\mu} \partial_{\alpha} \left( \sqrt{-\det \gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right), \end{split}$$
(1.35)

donde en la última igualdad hemos utilizado que las dos primeras integrales se anulan. La primera, en la frontera para  $\tau$ , es nula debido a que al minimizar la acción exigimos  $\delta X^{\mu}(\tau_i, \sigma) = \delta X^{\mu}(\tau_f, \sigma) = 0$ . En la frontera para  $\sigma$  también se anulará ya que  $X^{\mu}(\tau, \sigma) =$  $X^{\mu}(\tau, \sigma + 2\pi)$  y  $\partial_{\alpha} X^{\mu}(\tau, \sigma) = \partial_{\alpha} X^{\mu}(\tau, \sigma + 2\pi)$ , la cuerda es periódica. Además, hemos usado que  $\delta \gamma_{\alpha\beta} = 2\partial_{\alpha} \delta X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\mu}$ .

Finalmente,

$$\delta S = T \int d\tau d\sigma \,\delta X^{\mu} \partial_{\alpha} \left( \sqrt{-\det \gamma} \,\gamma^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right). \tag{1.36}$$

Como debe anularse para cualquier  $\delta X^{\mu}$  entonces obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\partial_{\alpha} \left( \sqrt{-\gamma} \, \gamma^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right) = 0. \tag{1.37}$$

## 1.2.3. Acción de Polyakov

La forma de la acción de Nambu-Goto (1.27) incluye una raíz que la hace muy complicada de cuantizar. Por ello, vamos a utilizar la acción de Polyakov, equivalente a la de Nambu-Goto, pero con una forma más *cuantizable* (polinómica en las derivadas de X). Esta acción requiere usar un campo auxiliar adicional g y es de la forma

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}, \qquad (1.38)$$

tomando  $g \equiv \det g$ .

Podemos derivar las ecuaciones de movimiento utilizando el principio de mínima acción de forma análoga a la acción de Polyakov. Notemos que este caso es un poco diferente al anterior ya que el campo auxiliar actúa como variable añadida. Es decir, habrá una ecuación de movimiento más, correspondiente a g. Para nuestras coordenadas habituales  $X^{\mu}$  (dejando g fijo) obtenemos

$$\partial_{\alpha} \left( \sqrt{-g} \, g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} X^{\mu} \right) = 0, \tag{1.39}$$

que coincide con las ecuaciones de Nambu-Goto sin más que sustituir  $\gamma$  por g. Como ya dijimos, al ser g un campo auxiliar, tiene su propia ecuación de movimiento adicional. Usamos las mismas ideas que en el caso de Nambu-Goto y la ecuación (1.34) de nuevo,

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \delta g^{\alpha\beta} \left( \sqrt{-g} \,\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \,g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X^\nu \right) \eta_{\mu\nu}, \quad (1.40)$$

donde hemos usado que  $g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}{}^3$ .

Entonces, anulando  $\delta S$  para cualquier  $\delta g^{\alpha\beta}$  obtenemos la ecuación

$$g_{\alpha\beta} = 2f(\tau,\sigma)\partial_{\alpha}X \cdot \partial_{\beta}X, \qquad (1.41)$$

donde  $f(\tau, \sigma) = (g^{\rho\sigma}\partial_{\rho}X \cdot \partial_{\sigma}X)^{-1}$ .

Notamos que  $\gamma$  y g no son equivalentes, difieren en el factor f. De todas formas, como vemos en las ecuaciones de movimiento, este factor desaparece al computarlas. Es más, si sustituimos la ligadura adicional  $g = 2f(\tau, \sigma)$  en la acción de Polyakov, recuperamos la acción de Nambu-Goto sin que quede rastro de f (al hacerlo no debemos olvidar que  $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ ).

Como es lógico, nuestra acción de Polyakov tiene las simetrías de la de Nambu-Goto. Es decir, la simetría global de Poincaré y las dos simetrías gauge de reparametrización. En este caso, el campo g se reparametriza como

$$g_{\alpha\beta} \to \frac{\partial \sigma^{\gamma}}{\partial \tilde{\sigma}^{\alpha}} \frac{\partial \sigma^{\delta}}{\partial \tilde{\sigma}^{\beta}} g_{\gamma\delta}.$$
 (1.42)

Además, tal y como ha ocurrido hasta el momento, parece lógico que al añadir un campo auxiliar, que no era originalmente necesario, estamos añadiendo una simetría adicional que no tenía la acción de Nambu-Goto. Esta simetría se conoce como invariancia de Weyl. Las transformaciones involucradas en esta simetría son

$$X^{\mu}(\sigma) \to X^{\mu}(\sigma), \quad g_{\alpha\beta} \to \Omega^2(\sigma)g_{\alpha\beta}.$$
 (1.43)

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Esto viene de que  $g^{\alpha\rho}g_{\rho\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ . Entonces  $g_{\rho\beta}\delta g^{\alpha\rho} + g^{\alpha\rho}\delta g_{\rho\beta} = 0$ . Así, aplicándolo a  $\alpha = \beta$  tenemos  $g_{\rho\alpha}\delta g^{\rho\alpha} = -g^{\rho\alpha}\delta g_{\rho\alpha}$ .



Figura 1.4: Esquema de una transformación de Weyl sobre una superficie de dos dimensiones. Imagen extraída de [4].

Podemos escribir  $\Omega^2(\sigma) = e^{\ln(\Omega^2(\sigma))} = e^{2\phi(\sigma)}$ , donde  $\phi(\sigma) = \frac{1}{2}\ln(\Omega^2(\sigma))$ . Esta expresión es especialmente útil cuando  $|\phi| \ll 1$ , es decir, cuando la transformación de Weyl es infinitesimal  $(g_{\alpha\beta} \approx \Omega^2(\sigma)g_{\alpha\beta})$ . Así, para una transformación infinitesimal

$$\delta g_{\alpha\beta} = 2\phi(\sigma)g_{\alpha\beta}.\tag{1.44}$$

Vamos a comprobar que efectivamente nuestra acción es invariante bajo este tipo de transformaciones. Tendremos

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu}, \qquad (1.45)$$

donde  $\tilde{g} = \det \tilde{g} = \Omega^4(\sigma)g$  y  $\tilde{g}^{\alpha\beta} = \Omega^{-2}(\sigma)g^{\alpha\beta}$ . Por tanto  $\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^2(\sigma)\sqrt{-g}$  y ambos coeficientes se anularán. Como adelantamos, la acción permanece igual tras la transformación. Esto también nos permite entender porqué la función  $f(\sigma)$  no aparece en la acción, se anula gracias a los términos  $\sqrt{-g}$  y  $g^{\alpha\beta}$ .

Nuestro campo g actúa como métrica (permite medir distancias, ángulos, etc), una transformación de Weyl supone cambiar la *regla* de medida en el espacio-tiempo. Intuitivamente, es deseable que nuestra acción no dependa de la escala con la que estemos midiendo. Esta propiedad no es tan obvia, ni siquiera es cierta para la acción de Nambu-Goto, y es la razón por la que redefinimos la acción incluyendo una métrica adecuada. Esta simetría se convierte en una de las piezas fundamentales de la teoría, mantenerla conllevará restricciones que limiten la teoría. En la Figura 1.4 podemos ver un ejemplo intuitivo de lo que supone aplicar una transformación de Weyl al espacio-tiempo.

Si queremos preservar la invariancia de Weyl en nuestra acción, no podemos esperar añadir sumandos habituales para interacciones como

$$\int d\tau d\sigma \sqrt{-g} V(X), \quad \mu \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \qquad (1.46)$$

análogos a los términos potencial escalar y de constante cosmológica de la teoría habitual de la relatividad general.

La ecuación de movimiento de la cuerda, (1.39), es una expresión bastante compleja y difícil de manejar en general. Por eso, fijaremos un gauge para obtener la expresión equivalente más simplificada posible. Fijar un gauge simplemente equivale a escoger un representante adecuado para cada una de las simetrías internas del sistema. En nuestro caso, tenemos tres elecciones: dos reparametrizaciones y la transformación de Weyl.

Vamos a empezar fijando las reparametrizaciones de forma que nuestra métrica sea lo más simple posible. En este sentido, la métrica de Minkowski parece una buena elección. Como  $g_{\alpha\beta}$  es simétrica tiene tres componentes independientes, fijar la métrica a la plana supone fijar dos grados de libertad. Después, simplemente reescalaremos (Weyl). Usando ambas reparametrizaciones hacemos la elección

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi(\tau,\sigma)}\eta_{\alpha\beta},\tag{1.47}$$

denominada gauge conforme. Esto es cierto debido al teorema de las coordenadas isotermas, que funciona localmente. La elección que hemos hecho es, efectivamente, local, ya que hemos tomado un coeficiente delante de la métrica plana  $e^{2\phi(\tau,\sigma)}$ .

Para obtener  $g_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}$  solo hemos utilizado las dos reparametrizaciones. Es decir, tenemos una tercera elección todavía por realizar, la que nos permite la invariancia de Weyl. Una elección que simplificaría nuestra métrica es  $\phi = 0$ . Así, simplemente

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.\tag{1.48}$$

La acción de Polyakov con estas elecciones de gauge se simplifica a

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \,\partial_{\alpha} X \cdot \partial^{\alpha} X, \qquad (1.49)$$

ya que  $\eta^{\alpha\beta}\partial_{\beta}X^{\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}\partial_{\beta}X_{\mu} = \partial^{\alpha}X_{\mu}$  y  $\sqrt{-\eta} = 1$ .

Los momentos canónicos  $\mathcal{P}$  se simplifican en las expresiones

$$\mathcal{P}^{\mu}_{\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_{\mu}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} (-2\dot{X}^{\mu}) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu},$$
  

$$\mathcal{P}^{\mu}_{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_{\mu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu}.$$
(1.50)

Si estudiamos las ecuaciones de movimiento (1.39), también se simplifican en la expresión

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}X^{\mu} = 0. \tag{1.51}$$

Podemos escribirlas de la forma

$$\frac{\partial^2 X^{\mu}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 X^{\mu}}{\partial \sigma^2},\tag{1.52}$$

que se trata de una ecuación de ondas.

Parece entonces que el movimiento de la cuerda se resume en un movimiento ondulatorio. Esto no es completamente cierto, debemos tener en cuenta la ecuación de movimiento de g, (1.41). Esta se convierte en

$$\eta_{\alpha\beta} = 2(\eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}X \cdot \partial_{\sigma}X)^{-1}(\partial_{\alpha}X \cdot \partial_{\beta}X) \Longrightarrow \partial_{\alpha}X \cdot \partial_{\beta}X - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}X \cdot \partial_{\sigma}X = 0.$$
(1.53)

Además denotamos el tensor de energía-impulso

$$T_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} X \cdot \partial_{\beta} X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} \partial_{\rho} X \cdot \partial_{\sigma} X, \qquad (1.54)$$

de forma que la ecuación de movimiento anterior es simplemente  $T_{\alpha\beta} = 0$ . Este tensor se puede definir de forma más general para cualquier elección de  $g_{\alpha\beta}$  si observamos el desarrollo dado en la ecuación (1.40). Su forma general puede escribirse como

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}}.$$
(1.55)

En resumen, nuestra cuerda se mueve como una onda pero bajo las siguientes restricciones

$$T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X' = 0,$$
  

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} \left( \dot{X}^2 + X'^2 \right) = 0,$$
(1.56)

y juntando ambas podemos obtener la forma compacta

$$\left(\dot{X} \pm X'\right)^2 = 0. \tag{1.57}$$

Aunque no lo parezca, tenemos cierta simetría gauge remanente en la elección de coordenadas. Vamos a explicar porqué ocurre esto de forma intuitiva. Partimos de la elección  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , para la que parecía que habíamos utilizado toda la libertad. Si ahora aplicamos una reparametrización  $\tilde{\sigma}$  que realice la transformación

$$\eta_{\alpha\beta} \to \Omega^2(\tilde{\sigma})\eta_{\alpha\beta},$$
 (1.58)

entonces podríamos revertir la transformación (en g) usando la invariancia de Weyl. Esto

quiere decir que existe libertad para modificar nuestras parametrizaciones, siempre y cuando después podamos eliminar el efecto en la métrica por medio de Weyl. En general, se puede comprobar que las reparametrizaciones que modifican la métrica como en (1.58) son aquellas que únicamente son función de uno de los parámetros. En este sentido, tenemos libertad para fijar en nuestro ejemplo una reparametrización  $t = R\tau$ .

Parecíamos haber agotado las simetrías cuando usamos tres para fijar las tres componentes de g. La diferencia es que las simetrías que usamos inicialmente para las reparametrizaciones eran menos estrictas, teníamos  $\tilde{\sigma}(\tau, \sigma)$ . Una vez fijada la métrica plana, básicamente encontramos un conjunto de medida nula<sup>4</sup> que proporciona resultados proporcionales a la métrica plana y que gracias a la invariancia de Weyl, nos sirven.

Si fijamos entonces el gauge estático  $t = R\tau$ , tendremos que las restricciones se convierten en

$$\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}' = 0,$$
  
 $\dot{\vec{x}}^2 + \vec{x}'^2 = R^2.$  (1.59)

Básicamente, la primera restricción impide que haya oscilaciones longitudinales. Todas las oscilaciones de la cuerda deben ser transversales (perpendiculares) a la propia cuerda. Esto es claro debido a que  $\vec{x}'$  es un vector tangente a la cuerda en cada punto y  $\dot{\vec{x}}$  representa la velocidad en cada punto.

Por otro lado, la segunda restricción relaciona la longitud de la cuerda con su velocidad. Esto es debido a que podemos vincular R a la longitud de la cuerda (cuya expresión estudiamos en (1.28)) cuando  $\dot{\vec{x}} = 0$  a través de

$$\int d\sigma \sqrt{\left(\frac{d\vec{x}}{d\sigma}\right)^2} = \int_0^{2\pi} d\sigma R = 2\pi R.$$
(1.60)

Es también muy interesante una elección de parametrizaciones denominadas *coordenadas de cono de luz*. Especialmente en la siguiente sección, al cuantizar la cuerda relativista, se verá su importancia. Las coordenadas son

$$\sigma^{\pm} = \tau \pm \sigma. \tag{1.61}$$

Sin necesidad de escribir las ecuaciones de movimiento (1.52) en función de estas nuevas coordenadas, podemos escribir las soluciones en función de ellas (por eso las escogemos de esa forma). La solución general a una ecuación de ondas  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  es la suma de una onda que viaja a la izquierda y otra que viaja a la derecha. Además, estas pueden

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Nos referimos a que en una reparametrización dependiente de dos posibles coordenadas, el conjunto de reparametrizaciones que solo dependen de una coordenada es un conjunto de medida nula.

escribirse en función de una variable cada una:  $x + v_0 t$  y  $x - v_0 t$  respectivamente. En nuestro caso, las soluciones a (1.52) se escriben en su forma más general como

$$X^{\mu} = X^{\mu}_{L}(x+t) + X^{\mu}_{R}(x-t) = X^{\mu}_{L}(\sigma^{+}) + X^{\mu}_{R}(\sigma^{-}).$$
(1.62)

Es decir, ya tenemos escritas las soluciones en el nuevo sistema de coordenadas. Aunque no nos ha hecho falta, si escribimos las ecuaciones de movimiento como función de las nuevas coordenadas obtenemos

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = \partial_- \partial_+ X^\mu = 0. \tag{1.63}$$

Comprobamos que esta expresión es totalmente compatible con las soluciones anteriores.

Hay 2D funciones independientes que describen las soluciones. Ahora, recordamos las restricciones (1.56). Para escribirlas en nuestro sistema de coordenadas, escribimos la nueva representación de la métrica

$$ds^{2} = -d\tau^{2} + d\sigma^{2} = -\left[\frac{1}{2}(d\sigma^{+} + d\sigma^{-})\right]^{2} + \left[\frac{1}{2}(d\sigma^{+} - d\sigma^{-})\right]^{2} = -d\sigma^{+}d\sigma^{-}, \quad (1.64)$$

que con una transformación de Weyl se convierte en  $ds^2 = -2d\sigma^+ d\sigma^-$  (es más cómoda al conservar el determinante unitario).

Esta forma de la métrica invita a revisitar muy rápidamente la discusión en torno a la simetría gauge remanente en la elección de parametrizaciones. En las coordenadas de cono de luz, cualquier reparametrización de la forma  $\sigma^+ \to \tilde{\sigma}^+(\sigma^+)$  y  $\sigma^- \to \tilde{\sigma}^-(\sigma^-)$ simplemente multiplica la métrica por un factor. Es decir, se cumple que el conjunto de las reparametrizaciones en una sola variable transforman la métrica de dicha forma.

Volviendo al análisis en el que estábamos, las condiciones (1.56) pueden escribirse en general como  $T_{\alpha\beta} = 0$  donde T es el tensor energía-impulso. Así, con la nueva representación de la métrica plana

$$T_{00} = (\partial_{+}X)^{2}, \qquad T_{11} = (\partial_{-}X)^{2},$$
  

$$T_{01} = T_{10} = 0.$$
(1.65)

donde denotamos  $\partial_{\pm} = \partial_{\sigma^{\pm}}$ .

Esto quiere decir que la condición  $T_{\alpha\beta} = 0$  solo nos da las restricciones

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0. \tag{1.66}$$

Estas dos restricciones eliminan dos grados de libertad a las 2D funciones independientes que representan las soluciones. Es decir, tendremos 2(D-1) grados de libertad. Finalmente usamos la reparametrización remanente. Como las funciones que viajan a izquierda y derecha dependen de una única coordenada, basta que fijemos  $\sigma^+ = X_L^i(\sigma^+)$  y  $\sigma^- = X_R^j(\sigma^-)$ , con  $i, j \in \{0, 1, \dots, D-1\}$ .

En resumen, tendríamos 2(D-2) grados de libertad físicos en nuestras soluciones. Este resultado es coherente con el hecho de que la cuerda solo pueda vibrar en sus direcciones transversales, estudiado al principio de la sección. Si eliminamos la coordenada temporal y la dirección longitudinal de la cuerda, nos quedan D-2 direcciones. Así, al tratarse de suma de ondas a derecha e izquierda, tendremos 2(D-2) grados de libertad, por tratarse únicamente de vibraciones transversales.

### 1.2.4. Expansión en modos de Fourier

Vamos a expandir nuestra solución más general  $X^{\mu}(\tau, \sigma) = X^{\mu}_{L}(\sigma^{+}) + X^{\mu}_{R}(\sigma^{-})$  en modos de Fourier. Esta expansión va a resultar especialmente útil en la siguiente sección, para el estudio de la cuerda cuántica.

Como la cuerda cerrada es periódica tenemos

$$X_L(\sigma^+) + X_R(\sigma^-) = X_L(\sigma^+ + 2\pi) + X_R(\sigma^- - 2\pi)$$
  
$$\implies X_L(\sigma^+ + 2\pi) - X_L(\sigma^+) = X_R(\sigma^- - 2\pi) - X_R(\sigma^-).$$
 (1.67)

Es decir, si una de las funciones no es periódica, la otra tampoco lo será por la misma cantidad. Como  $\sigma^{\pm}$  son variables independientes, claramente por (1.67),  $X_L^{\mu\prime}(\sigma^+)$  y  $X_R^{\mu\prime}(\sigma^-)$  son periódicas. Realizamos su expansión en series de Fourier y obtenemos

$$X_L^{\mu\prime}(\sigma^+) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n^{\mu} e^{-in\sigma^+},$$
  

$$X_R^{\mu\prime}(\sigma^-) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} e^{-in\sigma^-},$$
(1.68)

donde tomamos el prefactor  $\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$  para que  $\tilde{\alpha}^{\mu}_{n}$  y  $\alpha^{\mu}_{n}$  sean adimensionales.

Si integramos las expresiones obtenemos

$$X_{L}^{\mu}(\sigma^{+}) = \frac{1}{2}x_{L}^{\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\tilde{\alpha}_{0}^{\mu}\sigma^{+} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_{n}^{\mu}e^{-in\sigma^{+}},$$

$$X_{R}^{\mu}(\sigma^{-}) = \frac{1}{2}x_{R}^{\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_{0}^{\mu}\sigma^{-} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{\mu}e^{-in\sigma^{-}},$$
(1.69)

donde  $\frac{1}{2}x_L^{\mu}$ + y  $\frac{1}{2}x_R^{\mu}$  surgen como constantes de integración. Gracias a la condición (1.67) se tiene que  $\tilde{\alpha}_0^{\mu} = \alpha_0^{\mu}$ .

Entonces,

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(x_{L}^{\mu} + x_{R}^{\mu}) + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{\mu}\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-in\tau}}{n}(\tilde{\alpha}_{n}^{\mu}e^{-in\sigma} + \alpha_{n}^{\mu}e^{in\sigma}), \quad (1.70)$$

que es periódica en  $\sigma$ .

Recordando la expresión del momento canónico asociado a  $\tau$ , (1.50), tenemos

$$\mathcal{P}^{\mu}_{\tau} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\sqrt{2\alpha'} \alpha^{\mu}_{0} + h(\tau, \sigma)), \qquad (1.71)$$

donde el término h representa la derivada de la suma infinita en (1.70). Si ahora integramos el momento canónico total obtenemos

$$p^{\mu} = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{2\alpha'} \alpha_{0}^{\mu} d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_{0}^{\mu}, \qquad (1.72)$$

donde  $\int_0^{2\pi} h(\tau, \sigma) d\sigma = 0$  debido a que las exponenciales son  $2\pi$ -periódicas.

Además, es irrelevante cómo fijemos las constantes de integración a izquierda y derecha. Esto se debe a que el centro de masas de la cuerda es único. Calculamos dicho centro de masas:

$$X_{CM}^{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} (x_{L}^{\mu} + x_{R}^{\mu}) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_{0}^{\mu} \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\tilde{\alpha}_{n}^{\mu} e^{-in\sigma} + \alpha_{n}^{\mu} e^{in\sigma}) \right] d\sigma$$
$$= \frac{1}{2} (x_{L}^{\mu} + x_{R}^{\mu}) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_{0}^{\mu} \tau,$$
(1.73)

que en  $\tau = 0$  toma el valor  $x^{\mu} = \frac{1}{2}(x_{L}^{\mu} + x_{R}^{\mu})$ . Es este centro de masas inicial (en conjunto) el que tiene sentido físico, por tanto podemos fijar  $x_{L}^{\mu} = x_{R}^{\mu}$  sin perder generalidad.

Entonces, la expresión final expandida que obtenemos es

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\tilde{\alpha}^{\mu}_{n} e^{-in\sigma} + \alpha^{\mu}_{n} e^{in\sigma}), \qquad (1.74)$$

donde tenemos una primera parte de traslación del centro de masas  $x^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau$  y una segunda parte vibratoria. El momento total  $p^{\mu}$  coincide con el del centro de masas  $(p^{\mu} = \frac{1}{\alpha'} \dot{X}_{CM})$ . Además, para que  $X^{\mu}$  sean reales debe cumplirse que

$$\tilde{\alpha}_{n}^{\mu} = (\tilde{\alpha}_{-n}^{\mu})^{*}, \qquad \alpha_{n}^{\mu} = (\alpha_{-n}^{\mu})^{*}.$$
 (1.75)

Para realizar la cuantización de la cuerda en la siguiente sección, nos será de gran utilidad trabajar con  $\dot{X}^{\mu} \pm X^{\mu'}$ . Derivando obtenemos:

$$\dot{X}^{\mu} = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0} e^{-in\tau} (\tilde{\alpha}_n^{\mu}e^{-in\sigma} + \alpha_n^{\mu}e^{in\sigma}),$$

$$X^{\mu\prime} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0} e^{-in\tau} (\tilde{\alpha}_n^{\mu}e^{-in\sigma} - \alpha_n^{\mu}e^{in\sigma}).$$
(1.76)

Así, finalmente

$$\dot{X}^{\mu} + X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} \tilde{\alpha}^{\mu}_{n} e^{-in\sigma},$$
  
$$\dot{X}^{\mu} - X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} \alpha^{\mu}_{n} e^{in\sigma}.$$
(1.77)

Para terminar con esta sección, vamos a volver a estudiar las condiciones de contorno (1.66) para ver qué suponen en esta expansión. Tendremos

$$\partial_{-}X^{\mu} = \partial_{-}X^{\mu}_{R} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n} \alpha_{n}^{\mu} e^{-in\sigma^{-}},$$
$$(\partial_{-}X)^{2} = \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p} \alpha_{m} \cdot \alpha_{p} e^{-i(m+p)\sigma^{-}} = \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \alpha_{m} \cdot \alpha_{n-m} e^{-in\sigma^{-}} = \alpha' \sum_{n} L_{n} e^{-in\sigma^{-}} = 0,$$
$$(1.78)$$

donde  $L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_n$ .

Equivalentemente, para las ondas viajando a la izquierda

$$\alpha' \sum_{n} \tilde{L}_n e^{-in\sigma^-} = 0, \qquad (1.79)$$

donde  $\tilde{L}_n \equiv \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_n$ .

Es decir, una solución de la forma (1.74) debe cumplir las infinitas condiciones

$$L_n = \tilde{L}_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
(1.80)

Es especialmente interesante fijarse en la condición para n = 0 que supone

$$\sum_{m} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{m} = 0 \Longrightarrow 2 \sum_{m>0} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{m} = -\frac{\alpha'}{2} p_{\mu} p^{\mu} \Longrightarrow p_{\mu} p^{\mu} = -\frac{4}{\alpha'} \sum_{m>0} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{m}, \quad (1.81)$$

donde hemos usado la expresión (1.72). Con  $\tilde{\alpha}$  se alcanza la misma expresión. Por tanto,

podemos obtener la masa invariante de la cuerda, recordando la expresión (1.20),

$$M^{2} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{m>0} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{m} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{m>0} \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_{m}.$$
 (1.82)

La segunda igualdad, es decir, la condición  $L_0 = \tilde{L}_0$ , se conoce como *level matching* y será de gran relevancia en la siguiente sección.

## 1.2.5. Límite no relativista

Una de las comprobaciones más importantes de una teoría relativista es que su límite coincida con lo que predice la teoría clásica no relativista. Es decir, si tomamos el límite clásico en la acción de Nambu-Goto (1.27), deberíamos recuperar una expresión similar a la acción clásica (1.3).

Para poder tomar el límite deseado, debemos encontrar una expresión adecuada de la velocidad v y así calcular el límite para  $v \ll c$ . Para ello, definimos  $s(\sigma)$  como la longitud de la cuerda desde 0 hasta  $\sigma \in [0, \sigma_1]$ . Es decir,

$$ds = \left|\frac{d\vec{X}}{d\sigma}\right| d\sigma. \tag{1.83}$$

Hemos tenido que definir esta variable s porque el parámetro  $\sigma$  es una elección arbitraria, no tiene sentido físico. Para que aquello que definamos como velocidad no dependa de la parametrización, debe partir de una coordenada física.

Vamos a escoger el gauge  $\tau = t$ . Recordamos que la hoja de mundo era el recorrido que dejaba la cuerda en el espacio-tiempo. Se define la superficie espacial como aquella que cubre la cuerda en el espacio a lo largo del tiempo. Aunque pueda parecer equivalente la definición, son sutilmente distintas. Basta con notar que en el caso de la superficie espacial no hay un eje correspondiente al tiempo. Entonces, parece lógico definir la velocidad transversal  $\vec{v}_t$  como la velocidad perpendicular a la cuerda y tangente a la superficie espacial. Como ya justificamos, no es necesario tener en cuenta posibles oscilaciones longitudinales, no son posibles en la teoría relativista. Así,

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = 1, \tag{1.84}$$

es un vector unitario. Como  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$  es tangente a la cuerda,  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$  también lo es. Podemos observar un esquema de la elección de esta velocidad en la Figura 1.5.

La velocidad definida como  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  no tiene sentido físico completamente. Dependerá de



Figura 1.5: Esquema de le velocidad transversal de una cuerda. Imagen extraída de [5].

la parametrización y por tanto incluirá términos que nada tienen que ver con la velocidad de la cuerda. Es por eso que definimos la velocidad transversal. Si proyectamos  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  sobre la dirección perpendicular al vector unitario  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$  obtenemos la expresión

$$\vec{v}_t = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}.$$
(1.85)

 $\begin{aligned} \operatorname{Como} \ \frac{\partial X}{\partial t} &= \left(1, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \, \mathrm{y} \ \frac{\partial X}{\partial \sigma} = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) \, \mathrm{tenemos} \\ \dot{X}^2 &= -1 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2, \qquad X'^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2, \qquad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \\ (\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X}^2)(X'^2) &= \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 \left[ \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 + 1 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 \right] = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 (1 - v_t^2). \end{aligned}$ 

Es decir, la acción de Nambu-Goto puede escribirse como

$$S = -T \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_t^2}{c^2}},\tag{1.87}$$

(1.86)

donde nos hemos desprendido de las unidades naturales momentáneamente para que sea más claro el límite no relativista  $v_t \ll c$ .

Vamos a recuperar la expresión no relativista de la Sección 1.1. Para lograr el mismo resultado, debemos restringirnos a D = 3, es decir, tenemos únicamente una dirección longitudinal x y una dirección transversal y. Además, debemos recordar que dicho análisis no relativista fue realizado para oscilaciones transversales pequeñas, es decir, bajo la

condición  $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$ . Esto quiere decir que la dirección de la cuerda será

$$ds^{2} = dx^{2} + dy^{2} = dx^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2} dx^{2} \approx dx^{2}.$$
 (1.88)

Entonces la expresión de la velocidad transversal se reduce a

$$\vec{v}_t = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right) - \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right) \cdot (1, 0)\right] (1, 0) = \left(0, \frac{\partial y}{\partial t}\right),$$
(1.89)

donde  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \approx \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} = (1, 0).$ 

Por tanto,

$$\sqrt{1 - \frac{v_t}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2c^2} v_t^2 \approx 1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2.$$
(1.90)

Vamos a hacer uso de la simetría gauge que nos queda y fijar  $\sigma = x \in [0, a]$ , que es la coordenada que escogimos en el estudio de la cuerda no relativista. Así,

$$\frac{ds}{dx} = \left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial x}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,\tag{1.91}$$

usando de nuevo que tenemos pequeñas oscilaciones transversales.

En resumen, sustituyendo (1.90) y (1.91) en (1.87) tenemos

$$S \approx -T \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]$$

$$\approx \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] + C,$$
(1.92)

donde  $\mu_0 = \frac{T}{c^2}$  es la densidad lineal de masa de nuestra cuerda. Notar que hemos despreciado el término  $\propto \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ . Es decir, obtenemos exactamente la misma acción que en (1.3) salvo por una cantidad constante (mismas ecuaciones de movimiento).

En estas unidades habituales, podemos ver de forma clara como  $[\mu_0] = \begin{bmatrix} T \\ c^2 \end{bmatrix} = M/L$ toma las dimensiones adecuadas ya que T tiene unidades de fuerza. En el resto de este trabajo se retomará el uso de unidades naturales.

Aunque el planteamiento de este límite no relativista ha sido hecho en el contexto de cuerdas cerradas, para cuerdas abiertas, es completamente análogo. Al final, en el caso no relativista, la acción era exactamente la misma, lo único que diferenciaba a las cuerdas abiertas era la necesidad de unas condiciones de contorno de un cierto tipo. Como veremos, estas condiciones de contorno (Neumann y Dirichlet) son exactamente aquellas que tendrá que tener la cuerda relativista abierta.

## 1.3. Cuantización

En esta sección, vamos a estudiar el comportamiento de la cuerda relativista de forma cuántica. En general, cuando se realiza una cuantización de una teoría gauge (como es nuestro caso), podemos proceder de dos manera diferentes.

Una opción es cuantizar el sistema directamente: convertir las coordenadas  $X^{\mu}$  en operadores. Después, a estos operadores les introducimos las restricciones debidas al gauge escogido, obteniendo unas ecuaciones para los operadores. Esta forma se denomina cuantización covariante.

Por otro lado, podríamos primero reducir el espacio de soluciones físicas, resolviendo las restricciones antes de cuantizar. Así, simplemente tendríamos que cuantizar estas soluciones ya restringidas. Esta manera de proceder recibe el nombre de cuantización de cono de luz.

En principio, ambas formas deberían concluir lo mismo. Vamos a comenzar estudiando la primera de ellas.

## 1.3.1. Cuantización covariante

Recordamos la acción de Polyakov simplificada (1.49). Queremos cuantizar los  $X^{\mu}$  que cumplan dicha acción. Para ello, vamos a elevarlos a operadores junto con sus momentos conjugados  $\mathcal{P}_{\mu} \equiv \mathcal{P}_{\mu}^{\tau}$ , que satisfacen la ecuación (1.50). Imponemos las condiciones de conmutación canónicas entre los operadores momento y posición:

$$[X^{\mu}(\tau,\sigma), \mathcal{P}_{\nu}(\tau,\sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')\delta^{\mu}_{\nu},$$
  

$$[X^{\mu}(\tau,\sigma), X^{\nu}(\tau,\sigma')] = [\mathcal{P}_{\mu}(\tau,\sigma), \mathcal{P}_{\nu}(\tau,\sigma')] = 0.$$
(1.93)

Nuestra expresión más general es aquella que realizamos en modos de Fourier (1.70), vamos a derivarla para obtener la de los momentos. En resumen,

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\tilde{\alpha}^{\mu}_{n} e^{-in\sigma} + \alpha^{\mu}_{n} e^{in\sigma}),$$

$$\mathcal{P}^{\mu}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu} = \frac{p^{\mu}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\tilde{\alpha}^{\mu}_{n} e^{-in\sigma} + \alpha^{\mu}_{n} e^{in\sigma}).$$
(1.94)

Queremos establecer las condiciones de conmutación equivalentes a (1.93), pero en

términos de  $x^{\mu}$ ,  $p^{\mu}$ ,  $\alpha^{\mu}_{n}$  y  $\tilde{\alpha}^{\mu}_{n}$ . Para ello, vamos a hacer uso de las expresiones  $\dot{X}^{\mu} \pm X^{\mu'}$ , que ya mencionamos en (1.77).

Podemos escribir la primera de las relaciones de (1.93) como

$$[X^{\mu}(\tau,\sigma), \dot{X}^{\nu}(\tau,\sigma')] = 2\pi\alpha' i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu}, \qquad (1.95)$$

donde hemos utilizado que  $[X^{\mu}(\tau,\sigma), \mathcal{P}^{\nu}(\tau,\sigma')] = i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu5}$ .

Derivando respecto a  $\sigma$  se convierte en

$$[X^{\mu\prime}(\tau,\sigma), \dot{X}^{\nu}(\tau,\sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma} \left(\delta(\sigma-\sigma')\right).$$
(1.96)

Además, derivando respecto a  $\sigma$  y  $\sigma'$  la segunda relación de (1.93) obtenemos

$$[X^{\mu'}(\tau,\sigma), X^{\nu'}(\tau,\sigma')] = 0, \qquad (1.97)$$

mientras que la tercera relación directamente da

$$[\dot{X}^{\mu}(\tau,\sigma), \dot{X}^{\nu}(\tau,\sigma')] = 0.$$
(1.98)

Juntando (1.97) y (1.98) obtenemos

$$\left[ \left( \dot{X}^{\mu} \pm X^{\mu \prime} \right) (\tau, \sigma), \left( \dot{X}^{\nu} \pm X^{\nu \prime} \right) (\tau, \sigma') \right] = \pm \left[ \dot{X}^{\mu} (\tau, \sigma), X^{\nu \prime} (\tau, \sigma') \right] \pm \left[ X^{\mu \prime} (\tau, \sigma), \dot{X}^{\nu} (\tau, \sigma') \right]$$
(1.99)

Por lo tanto, usando (1.96) tenemos

$$\begin{bmatrix} \left(\dot{X}^{\mu} \pm X^{\mu\prime}\right)(\tau,\sigma), \left(\dot{X}^{\nu} \pm X^{\nu\prime}\right)(\tau,\sigma') \end{bmatrix} = \mp 2\pi\alpha' i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma'} \left(\delta(\sigma'-\sigma)\right) \pm 2\pi\alpha' i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma} \left(\delta(\sigma-\sigma')\right) \\ = \mp 2\pi\alpha' i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma'} \left(\delta(\sigma-\sigma')\right) \pm 2\pi\alpha' i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma} \left(\delta(\sigma-\sigma')\right) \\ = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma} \left(\delta(\sigma-\sigma')\right).$$

$$(1.100)$$

Claramente, también es cierto que

$$\left[ \left( \dot{X}^{\mu} \pm X^{\mu\prime} \right) (\tau, \sigma), \left( \dot{X}^{\nu} \mp X^{\nu\prime} \right) (\tau, \sigma') \right] = 0.$$
(1.101)

Ahora, vamos a utilizar las expresiones de estos sumandos en función de los coeficientes

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Simplemente estamos operando con la componente covariante del momento porque es la expresión que conocemos (hemos definido los coeficientes de la serie de Fourier en base covariante). Estamos subiendo y bajando índices indistintamente por medio de  $\mathcal{P}_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \mathcal{P}^{\nu}$  y  $\mathcal{P}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{P}_{\nu}$  con  $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ .

de Fourier, (1.77). Tenemos la siguiente expresión para el conmutador:

$$\left[ \left( \dot{X}^{\mu} + X^{\mu \prime} \right) (\tau, \sigma), \left( \dot{X}^{\nu} + X^{\nu \prime} \right) (\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' \sum_{n', m' \in \mathbb{Z}} e^{-in'(\tau+\sigma)} e^{-im'(\tau+\sigma')} [\tilde{\alpha}^{\mu}_{n'}, \tilde{\alpha}^{\nu}_{m'}].$$

$$(1.102)$$

Igualamos (1.100) y (1.102) y aplicamos la operación  $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma\cdot\frac{1}{2\pi}e^{in\sigma}\int_0^{2\pi}d\sigma' e^{im\sigma'}$ a cada lado para obtener

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \, d\sigma' \, e^{in\sigma} e^{im\sigma'} \sum_{n',m'\in\mathbb{Z}} e^{-in'(\tau+\sigma)} e^{-im'(\tau+\sigma')} [\tilde{\alpha}^{\mu}_{n'}, \tilde{\alpha}^{\nu}_{m'}] \\
= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \, d\sigma' \, e^{in\sigma} e^{im\sigma'} i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma} \left(\delta(\sigma-\sigma')\right).$$
(1.103)

La parte izquierda solo es no nula para n = n' y m = m', simplificándose a  $e^{-i(n+m)\tau}[\tilde{\alpha}_n^{\mu}, \tilde{\alpha}_m^{\nu}]$ . Por otro lado, desarrollamos la parte derecha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \, d\sigma' \, e^{in\sigma} e^{im\sigma'} i\eta^{\mu\nu} \frac{d}{d\sigma} \left(\delta(\sigma - \sigma')\right) \\
= \frac{i\eta^{\mu\nu}}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \, e^{in\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_{0}^{2\pi} d\sigma' \, e^{im\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\
= \frac{i\eta^{\mu\nu}}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma \, e^{in\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(e^{im\sigma}\right) = -m\eta^{\mu\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\sigma e^{i(n+m)\sigma} \\
= -m\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} = n\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0}.$$
(1.104)

Igualando entonces ambas partes

$$[\tilde{\alpha}_{n}^{\mu}, \tilde{\alpha}_{m}^{\nu}] = e^{-i(n+m)\tau} n\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} = n\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0}, \qquad (1.105)$$

sin más que usar que m + n = 0.

Usando ahora (1.95) e integrando respecto a  $\sigma$  obtenemos

$$\left[x^{\mu} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{\mu}\tau, \dot{X}^{\nu}(\tau, \sigma')\right] = i\alpha'\eta^{\mu\nu}, \qquad (1.106)$$

donde los términos oscilatorios de la expansión de  $X^{\mu}$  tienen integral nula, como ya mencionamos. Si sustituimos la expansión en modos de Fourier de  $\dot{X}^{\nu}$ , obtenemos

$$\begin{bmatrix} x^{\mu} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{\mu}\tau, \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{-in'\tau}(\tilde{\alpha}_{n'}^{\nu}e^{-in'\sigma'} + \alpha_{n'}^{\nu}e^{in'\sigma'}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^{\mu}, \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{-in'\tau}(\tilde{\alpha}_{n'}^{\nu}e^{-in'\sigma'} + \alpha_{n'}^{\nu}e^{in'\sigma'}) \end{bmatrix} = i\alpha'\eta^{\mu\nu},$$
(1.107)

ya que  $[\alpha_0^{\mu}, \alpha_{n'}^{\nu}] = [\alpha_0^{\mu}, \tilde{\alpha}_{n'}^{\nu}] = 0$  para todo n.

Por tanto se obtiene

$$2\left[x^{\mu}, \alpha_{0}^{\nu}\right] + \left[x^{\mu}, \sum_{n' \in \mathbb{Z}} e^{-in'\tau} (\tilde{\alpha}_{n'}^{\nu} e^{-in'\sigma'} + \alpha_{n'}^{\nu} e^{in'\sigma'})\right] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{\mu\nu}.$$
 (1.108)

Al aplicar a los dos lados la operación  $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma'\,e^{in\sigma'}~({\rm con}~n\neq 0)$  obtenemos

$$\left[x^{\mu}, e^{-in\tau}\tilde{\alpha}^{\nu}_{n} + e^{in\tau}\alpha^{\nu}_{-n}\right] = e^{-in\tau}\left[x^{\mu}, \tilde{\alpha}^{\nu}_{n}\right] + e^{in\tau}\left[x^{\mu}, \alpha^{\nu}_{-n}\right] = 0, \qquad (1.109)$$

ya que solo es no nula la integral para los sumandos con  $n' = \pm n$ .

Como la relación (1.109) debe anularse para cualquier valor de  $\tau$ , cada término debe anularse por separado. Entonces se tiene que

$$[x^{\mu}, \tilde{\alpha}^{\nu}_{n}] = [x^{\mu}, \alpha^{\nu}_{n}] = 0, \qquad (1.110)$$

para  $n \neq 0^6$ .

Es decir, la ecuación (1.108) se reduce a

$$[x^{\mu}, \alpha_0^{\nu}] = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} i \eta^{\mu\nu}, \qquad (1.111)$$

o equivalentemente

$$[x^{\mu}, p^{\nu}] = i\eta^{\mu\nu}, \qquad (1.112)$$

ya que  $p^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^{\mu}$ .

Así, finalmente obtenemos las siguientes relaciones para  $x^{\mu}, p^{\mu}, \alpha_n^{\mu} \ge \tilde{\alpha}_n^{\mu}$ :

$$[x^{\mu}, p_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu}, \qquad [\alpha^{\mu}_{n}, \alpha^{\nu}_{m}] = [\tilde{\alpha}^{\mu}_{n}, \tilde{\alpha}^{\nu}_{m}] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}.$$
 (1.113)

El resto de las conmutaciones se anulan todas. Además, el conmutador entre  $x^{\mu}$  y  $p_{\nu}$  es de la forma esperada para la posición y momento del centro de masas de una cuerda.

Las relaciones de conmutación para los coeficientes  $\alpha$  y  $\tilde{\alpha}$  recuerdan a las de los operadores de creación y aniquilación propios del estudio cuántico del oscilador armónico. Podemos construir unos operadores análogos definiendo para n > 0

$$a_n^{\mu} = \frac{\alpha_n^{\mu}}{\sqrt{n}}, \qquad a_n^{\mu\dagger} = \frac{\alpha_{-n}^{\mu}}{\sqrt{n}}, \qquad (1.114)$$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Es igual si el índice es n o -n ya que al recorrer todo  $\mathbb{Z} - \{0\}$  se tiene que anular para todo coeficiente con  $n \neq 0$ .

con una expresión equivalente para  $\tilde{a}_n^{\mu}$ . Es importante notar que, efectivamente,  $\alpha_n^{\mu\dagger} = \alpha_{-n}^{\mu}$ , como argumentamos en (1.75).

Las relaciones que cumplen estos operadores de creación y aniquilación son

$$\left[a_{n}^{\mu}, a_{m}^{\nu \dagger}\right] = \left[\tilde{a}_{n}^{\mu}, \tilde{a}_{m}^{\nu \dagger}\right] = \eta^{\mu\nu} \delta_{nm}.$$
(1.115)

Definimos el estado fundamental de la cuerda,  $|0\rangle$ , como aquel que cumple

$$\alpha_n^{\mu}|0\rangle = \tilde{\alpha}_n^{\mu}|0\rangle = 0, \text{ para } n > 0.$$
(1.116)

Aunque se trata del estado fundamental, cuenta con una posición y momento,  $x^{\mu}$  y  $p^{\mu}$ . Así, además del autovalor asociado a la excitación de la cuerda, debemos etiquetar cada estado con un autovalor más asociado al momento de forma que

$$\hat{p}^{\mu}|0;p\rangle = p^{\mu}|0;p\rangle,$$
 (1.117)

donde ponemos el gorro a  $\hat{p}^{\mu}$  en el lado izquierdo para resaltar la diferencia entre operador y autovalor. Las condiciones (1.116) se siguen cumpliendo.

Para construir el resto de estados de nuestro espacio, utilizamos el operador de creación, es decir,  $\alpha_n^{\mu}$  y  $\tilde{\alpha}_n^{\mu}$  para n < 0. Un estado genérico puede escribirse como

$$|\psi\rangle = (\alpha_{-1}^{\mu_1})^{n_{\mu_1}} (\alpha_{-2}^{\mu_2})^{n_{\mu_2}} \dots (\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu_1})^{n_{\nu_1}} (\tilde{\alpha}_{-2}^{\nu_2})^{n_{\nu_2}} \dots |0;p\rangle,$$
(1.118)

donde cada una de estas excitaciones se corresponde con una partícula distinta.

Sin embargo, surge un problema importante en el espacio de estados que hemos construido: existen estados con norma negativa. Acabamos de ver que

$$\left[\alpha_n^{\mu}, \alpha_m^{\nu\dagger}\right] = n \eta^{\mu\nu} \delta_{nm}, \qquad \left[\tilde{\alpha}_n^{\mu}, \tilde{\alpha}_m^{\nu\dagger}\right] = n \eta^{\mu\nu} \delta_{nm}. \tag{1.119}$$

El problema surge en la acción de Polyakov (1.49), donde el campo  $X^0$  tiene un signo opuesto al del resto de las coordenadas espaciales. Al cuantizar, ese signo se transfiere a (1.119) a través de la métrica  $\eta^{\mu\nu}$ . Para  $\mu = \nu = 0$  obtenemos

$$\left[\alpha_n^0, \, \alpha_m^{0\dagger}\right] = -n \, \delta_{nm}.$$

Por tanto, si definimos el estado  $|\psi\rangle = \alpha_{-1}^0 |0; p\rangle$  tendremos que su norma es (usando que  $\alpha_1 |0; p\rangle = 0$ )

$$\|\psi\|^{2} = \langle 0; p | \alpha_{1}^{0} \alpha_{-1}^{0} | 0; p \rangle = \langle 0; p | \left[ \alpha_{1}^{0}, \alpha_{-1}^{0} \right] | 0; p \rangle = -1.$$
(1.120)

Estos estados con norma negativa se denominan *fantasmas* y, para que la teoría tenga validez, se debe impedir que puedan ser producidos por un proceso físico. Esperamos que a partir de las restricciones en nuestros campos, que en función de los coeficientes de Fourier tomaban la forma dada en la ecuación (1.80), se eliminen los fantasmas. Estas restricciones eran

$$L_n = \tilde{L}_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.121}$$

donde habíamos definido  $L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_n$  y  $\tilde{L}_n$  análogamente. En el contexto cuántico  $L_n$  y  $\tilde{L}_n$  se denotan operadores de Virasoro.

La forma en que se imponen estas condiciones es exigiendo

$$\langle \psi' | L_n | \psi \rangle = \langle \psi' | \tilde{L}_n | \psi \rangle = 0, \qquad (1.122)$$

para  $|\psi\rangle$  y  $|\psi'\rangle$  estados físicos de la cuerda.

Basta imponer que  $L_n |\psi\rangle = \tilde{L}_n |\psi\rangle = 0$  para cualquier estado físico  $|\psi\rangle$  y n > 0. Esto se debe a que si n < 0 entonces  $\langle \psi | L_n = L_n^{\dagger} |\psi\rangle = L_{-n} |\psi\rangle = 0$ , ya que  $L_n^{\dagger} = L_{-n}$ . La condición que imponemos entonces es

$$L_n|\psi\rangle = \tilde{L}_n|\psi\rangle = 0 \text{ para } n > 0.$$
 (1.123)

Para  $L_0$ , la situación se vuelve más complicada. Al pasar al plano cuántico, los vectores  $\alpha_n$  se han convertido en operadores. Es decir, ya no esperamos que se cumpla directamente que  $\alpha_n \cdot \alpha_m = \alpha_m \cdot \alpha_n$ . El orden en los operadores es importante en mecánica cuántica, no podremos trabajar con operadores que no estén *normalmente ordenados*<sup>7</sup>.

La elección de un orden genera una ambigüedad en la definición de los operadores de Virasoro que, hasta ahora, no ha conllevado ninguna dificultad. Esto se debe a que cuando  $n \neq 0$  se cumple que  $\alpha_{n-m} \cdot \alpha_n = \alpha_n \cdot \alpha_{n-m}$ , gracias a las relaciones (1.113).

Si estudiamos el operador conflictivo,  $L_0$ , tenemos

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n>0}\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{n>0}\alpha_n \cdot \alpha_{-n}, \qquad (1.124)$$

donde es la segunda suma la que no está normalmente ordenada. Ignoraremos momentáneamente este inconveniente y definiremos nuestros operadores para n = 0 con un buen ordenamiento:

$$L_{0} = \frac{1}{2}\alpha_{0}^{2} + \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{n}, \qquad \tilde{L}_{0} = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{0}^{2} + \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_{n}.$$
(1.125)

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Un operador está normalmente ordenado si los operadores de aniquilación aparecen a la derecha de los de creación. Se escoge este orden debido a que así el operador actúa de forma simple sobre el estado fundamental.
Para lidiar con la problemática anterior, añadiremos a la condición de  $L_0$  la constante que surge de reordenar el último sumatorio de la expresión (1.124). Es decir, simplemente reescribiremos la condición para  $L_0$  como

$$(L_0 - a)|\psi\rangle = (\tilde{L}_0 - a)|\psi\rangle = 0,$$
 (1.126)

donde a será dicha constante, cuyo valor derivaremos más adelante.

La expresión para la masa invariante de la cuerda, (1.82), dependía directamente de los operadores  $L_0$  y  $\tilde{L}_0$ . Al pasar al espacio de operadores, la expresión pasa también a depender de la ordenación y, por tanto, se ve modificada a la forma

$$M^{2} = \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{m>0} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{m} - a \right) = \frac{4}{\alpha'} \left( \sum_{m>0} \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_{m} - a \right).$$
(1.127)

Es decir, la constante a no es una mera tecnicalidad, tiene una repercusión física directa en el espectro de masas de la cuerda.

Para completar con esta cuantización se debe profundizar en el problema de los fantasmas. Se deben derivar las condiciones necesarias para eliminarlos como posibles estados físicos, aunque este estudio se encuentra fuera de los objetivos de este trabajo. De todas formas, las condiciones serán las mismas que obtengamos más adelante (para la constante a y para el número de dimensiones D), a partir de la cuantización de cono de luz, cuyo estudio es más sencillo e intuitivo.

#### 1.3.2. Cuantización de cono de luz

La cuantización de cono de luz es el segundo de los métodos con que podemos cuantizar nuestro sistema. Básicamente debemos buscar soluciones clásicas a las ecuaciones de movimiento con restricciones y después cuantizarlas.

Seguiremos tomando la elección de gauge conforme (métrica  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ). Además, como ya mencionamos al final de 1.2.3, nos queda una cierta simetría gauge remanente que podemos utilizar para fijar nuestras parametrizaciones. El gauge estático no resulta una elección útil para encontrar una solución, usaremos el gauge de cono de luz. Para ello haremos uso tanto de las parámetros de cono de luz ( $\sigma^{\pm}$ ) como de las coordenadas espacio-temporales de cono de luz:

$$X^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( X^0 \pm X^{D-1} \right). \tag{1.128}$$

Este cambio de coordenadas facilita enormemente la búsqueda de soluciones, pero

también es fuente de algún problema. Por ejemplo, la invariancia de Lorentz no va a ser directa con estas coordenadas y vamos a tener que imponer unas condiciones para conservarla.

En estas coordenadas, la métrica de Minkowski es

$$ds^{2} = -dX^{0}dX^{0} + dX^{D-1}dX^{D-1} + \sum_{i=1}^{D-2} dX^{i}dX^{i}$$
  
$$= -\frac{1}{2} \left( dX^{+} + dX^{-} \right)^{2} + \frac{1}{2} \left( dX^{+} - dX^{-} \right)^{2} + \sum_{i=1}^{D-2} dX^{i}dX^{i} \qquad (1.129)$$
  
$$= -2dX^{+}dX^{-} + \sum_{i=1}^{D-2} dX^{i}dX^{i},$$

ya que  $dX^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( dX^+ + dX^- \right)$  y  $dX^{D-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( dX^+ - dX^- \right).$ 

También va a cambiar la manera de subir y bajar índices a los tensores; ahora se tiene que  $A_+ = -A^-$ ,  $A_- = -A^+$  y  $A_i = A^i$ . Entonces, el producto escalar será  $A \cdot B = -A^+B^- - A^-B^+ + A^iB^i$ .

Como  $X^{\pm}$  son combinación de  $X^0$  y  $X^{D-1}$  entonces también tendremos una solución compuesta en una función moviéndose a la derecha y otra a la izquierda. Esto es,

$$X^{+} = X_{L}^{+}(\sigma^{+}) + X_{R}^{+}(\sigma^{-}).$$
(1.130)

Ahora, gracias a nuestra simetría gauge sobrante fijamos

$$X_L^+(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^+, \qquad X_R^+(\sigma^-) = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha' p^+ \sigma^-.$$
(1.131)

Por lo tanto,

$$X^{+} = x^{+} + \alpha' p^{+} \tau. \tag{1.132}$$

Recordamos las ecuaciones de movimiento bajo la parametrización de cono de luz, (1.63),

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0, \tag{1.133}$$

y sus respectivas restricciones, (1.66),

$$(\partial_{+}X)^{2} = (\partial_{-}X)^{2} = 0.$$
(1.134)

Al hacer el cambio de coordenadas, lo primero que hacemos es comprobar si tenemos alguna restricción adicional debida al cambio de coordenadas. La ecuación de movimiento para  $X^+$  no lo supondrá ya que  $\partial_- X^+ = \alpha' p^+$  y entonces  $\partial_+ \partial_- X^+ = \alpha' \partial_+ (p^+) = 0$  automáticamente. En cambio, para  $X^-$  no tenemos una ecuación trivial.

Para resolverla, nuevamente podemos recurrir a la forma ondulatoria del campo

$$X^{-} = X_{L}^{-}(\sigma^{+}) + X_{R}^{-}(\sigma^{-}).$$
(1.135)

Vamos a comprobar que  $X^-$  no solo no conduce a ninguna condición adicional que compliqué el estudio, si no que queda completamente determinada con las restricciones (1.66). Veámoslo,

$$(\partial_{+}X)^{2} = -\partial_{+}X^{+}\partial_{+}X^{-} - \partial_{+}X^{-}\partial_{+}X^{+} + \sum_{i=1}^{D-2}\partial_{+}X^{i}\partial_{+}X^{i} = 0, \qquad (1.136)$$

es decir,

$$2\partial_{+}X^{-}\partial_{+}X^{+} = \sum_{i=1}^{D-2} \partial_{+}X^{i}\partial_{+}X^{i}.$$
 (1.137)

Como mencionamos antes,  $\partial_+ X^+ = \alpha' p^+$  y  $\partial_+ X^- = \partial_+ X_L$  ( $X_R$  solo depende de  $\sigma^+$ ). Esto reduce la ecuación anterior a

$$\partial_{+}X_{L}^{-} = \frac{1}{\alpha' p^{+}} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_{+}X^{i} \partial_{+}X^{i},$$
 (1.138)

usando que  $\partial_+ = \frac{1}{2} (\partial_\tau + \partial_\sigma).$ 

De forma análoga, usando la restricción  $(\partial_- X)^2 = 0$ , obtenemos

$$\partial_{-}X_{R}^{-} = \frac{1}{\alpha' p^{+}} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_{-}X^{i} \partial_{-}X^{i}.$$
 (1.139)

Tal y como hicimos en (1.69) podemos escribir

$$X_{L}^{-}(\sigma^{+}) = \frac{1}{2}x^{-} + \frac{1}{2}\alpha'p^{-}\sigma^{+} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_{n}^{-}e^{-in\sigma^{+}},$$

$$X_{R}^{-}(\sigma^{-}) = \frac{1}{2}x^{-} + \frac{1}{2}\alpha'p^{-}\sigma^{-} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{-}e^{-in\sigma^{-}},$$
(1.140)

para una constante de integración  $x^-$  y donde los coeficientes  $p^-$ ,  $\alpha_n^-$  y  $\tilde{\alpha}_n^-$  quedan determinados por las restricciones (1.138) y (1.139).

Veámoslo con la restricción (1.139), el otro caso es completamente análogo. Tenemos

que

$$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \alpha_{n'}^{-} e^{-in'\sigma^{-}} = \frac{1}{\alpha' p^{+}} \sum_{i=1}^{D-2} \left( \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m' \in \mathbb{Z}} \alpha_{p'}^{i} e^{-ip'\sigma^{-}} \right) \left( \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{p' \in \mathbb{Z}} \alpha_{m'}^{i} e^{-im'\sigma^{-}} \right),$$
(1.141)

usando que  $\partial_- X^i = \partial_- X^i_R$  y que  $\frac{1}{2} \alpha' p^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$ .

Es decir,

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \alpha_{n'}^{-} e^{-in'\sigma^{-}} = \frac{1}{p^{+}\sqrt{2\alpha'}} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{p',m'\in\mathbb{Z}} \alpha_{p'}^{i} \alpha_{m'}^{i} e^{-i(p'+m')\sigma^{-}}.$$
 (1.142)

Cada coeficiente que acompaña a  $e^{-in\sigma^-}$  debe ser igual al correspondiente del lado derecho (sumando de todos aquellos coeficientes para p' + m' = n. Esto es,

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+ \sqrt{2\alpha'}} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i.$$
(1.143)

La misma ecuación se obtiene para  $\tilde{\alpha}_n^-$  usando (1.138). En particular, para  $\alpha_0^- = \tilde{\alpha}_0^- = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^-$  tenemos las dos ecuaciones

$$\alpha' p^{-} = \frac{1}{p^{+}} \sum_{i=1}^{D-2} \left( \frac{1}{2} \alpha' p^{i} p^{i} + \sum_{m \neq 0} \alpha^{i}_{-m} \alpha^{i}_{m} \right) = \frac{1}{p^{+}} \sum_{i=1}^{D-2} \left( \frac{1}{2} \alpha' p^{i} p^{i} + \sum_{m \neq 0} \tilde{\alpha}^{i}_{-m} \tilde{\alpha}^{i}_{m} \right). \quad (1.144)$$

A partir de esta ecuación, podemos reescribir la condición de *level matching* (1.82) como

$$M^{2} = -p_{\mu}p^{\mu} = 2p^{+}p^{-} - \sum_{i=1}^{D-2} p^{i}p^{i} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^{i} \tilde{\alpha}_{n}^{i}, \quad (1.145)$$

despejándolo de la expresión (1.144)

Es decir, la expresión de la masa de la cuerda queda completamente determinada por  $\alpha^i$  y  $\tilde{\alpha}^i$  para  $i \in \{1, \ldots, D-2\}$ . Les llamaremos osciladores transversales. Los denotamos así porque son aquellos modos que determinan la excitación física de la cuerda, pero no necesariamente quiere decir que la cuerda viva en el plano  $X^0 - X^{D-1}$ .

Nuestra cuerda queda completamente determinada por estos 2(D-2) modos oscilatorios (que coincide con lo discutido acerca de los grados de libertad físicos de la cuerda al final de la Sección 1.2.3), junto con los denominados modos cero  $x^i$ ,  $p^i$ ,  $x^-$  y  $p^-$ . Además,  $x^+$  puede eliminarse sin más que haciendo una traslación en  $\tau$  como es obvio por la expresión (1.132). El modo  $p^-$  queda también determinado por las ecuaciones (1.144).

Una vez tenemos totalmente determinadas las variables que van a representar nuestro

sistema, podemos pasar a cuantizarlas. Para ello reutilizamos las condiciones (1.113) de donde obtenemos en un primer vistazo que

$$\left[x^{i}, p^{j}\right] = i\delta^{ij}, \qquad \left[\alpha_{n}^{i}, \alpha_{m}^{j}\right] = \left[\tilde{\alpha}_{n}^{i}, \tilde{\alpha}_{m}^{j}\right] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}, \qquad (1.146)$$

para  $i \in \{1, ..., D - 2\}.$ 

Además, el desarrollo hasta llegar a (1.112) es completamente idéntico al que tendríamos que realizar ahora. Por tanto, simplemente notando que ahora nuestra métrica tiene una representación diferente en las coordenadas de cono de luz se tiene que

$$[x^+, p^-] = [x^-, p^+] = -i.$$
 (1.147)

Como en el caso de la cuantización covariante, podemos definir el estado fundamental como  $|0; p\rangle$ , de forma que cumpla

$$\hat{p}^{\mu}|0;p\rangle = p^{\mu}|0;p\rangle, \qquad \alpha_n^i|0;p\rangle = \tilde{\alpha}_n^i|0;p\rangle = 0 \text{ para } n > 0.$$
(1.148)

La gran diferencia es que, al haber fijado  $\alpha^+$  en nuestra elección gauge y haber obtenido  $\alpha^-$  en función del resto de modos de oscilación, solo estamos trabajando con D-2 grado de libertad físicos. De esta manera, hemos eliminado completamente el problema de los fantasmas que nos encontramos en el caso de la cuantización covariante.

Como  $p^-$  deja de ser un operador independiente, debemos introducir las ecuaciones (1.144) como ecuaciones de operadores.

El problema de cuantizar estas ecuaciones es exactamente el mismo que encontramos en el caso de cuantización covariante. Existe una ambigüedad en la ordenación de los modos, que se resuelve exactamente igual que en ese caso. Para poder definir el operador normal ordenado, tenemos que añadir en la ecuación del operador una constante a que compense este cambio. Recuperamos exactamente la misma ecuación que en (1.127) pero solo para nuestros modos vibracionales

$$M^{2} = \frac{4}{\alpha'} (N - a) = \frac{4}{\alpha'} \left( \tilde{N} - a \right), \qquad (1.149)$$

donde

$$N = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m>0} \alpha^{i}_{-m} \alpha^{i}_{m}, \qquad \tilde{N} = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m>0} \tilde{\alpha}^{i}_{-m} \tilde{\alpha}^{i}_{m}.$$
(1.150)

Para entender cómo debemos fijar la constante a, simplemente vamos a obtener el término adicional que surge de ordenar los operadores (así a simplemente tendría que

contrarrestarlo). Tenemos

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{m\neq 0}\alpha_{-m}^{i}\alpha_{m}^{i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{m>0}\alpha_{-m}^{i}\alpha_{m}^{i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-2}\sum_{m<0}\alpha_{-m}^{i}\alpha_{m}^{i}.$$
 (1.151)

Entonces, es del segundo sumando del que se obtiene el término extra

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m}^{i} \alpha_{m}^{i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m > 0} \alpha_{-m}^{i} \alpha_{m}^{i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m < 0} \left( \alpha_{m}^{i} \alpha_{-m}^{i} + \left[ \alpha_{-m}^{i}, \alpha_{m}^{i} \right] \right) \\
= \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m > 0} \alpha_{-m}^{i} \alpha_{m}^{i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m > 0} \left[ \alpha_{m}^{i}, \alpha_{-m}^{i} \right] \\
= \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m > 0} \alpha_{-m}^{i} \alpha_{m}^{i} + \frac{D-2}{2} \sum_{m > 0} m.$$
(1.152)

El último término diverge. Como este es el término a compensar, debemos encontrar una forma de normalizarlo, ya que no tiene ningún sentido físico el hecho de que diverja.

Para ello, y de forma un tanto heurística, recurrimos a la función zeta de Riemann. Esta función se define para  $\Re(s) > 1$  como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$
 (1.153)

Así todo, es posible realizar una extensión analítica a dicha función (para evitar los problemas de divergencia que suponen los casos  $\Re(s) < 1$ ). El valor que toma para s = -1 sería  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ . De entre todas las posibilidades finitas para el valor de la serie, este es el valor más convincente.

Por tanto nos quedamos con la ecuación para la masa siguiente

$$M^{2} = \frac{4}{\alpha'} \left( N - \frac{D-2}{24} \right) = \frac{4}{\alpha'} \left( \tilde{N} - \frac{D-2}{24} \right), \qquad (1.154)$$

es decir,  $a = \frac{D-2}{24}$ .

#### 1.3.3. Estados de la cuerda

El primero de los estados de la cuerda bosónica que vamos a analizar es su estado fundamental,  $|0; p\rangle$ . Cuando los operadores N o  $\tilde{N}$  actúan sobre el estado fundamental, al estar normalmente ordenados nos dan

$$N|0;p\rangle = 0, \qquad N|0;p\rangle = 0.$$
 (1.155)

Es decir, este estado tiene una masa invariante

$$M^2 = -\frac{D-2}{6\alpha'}.$$
 (1.156)

A estas partículas, con masa cuadrada negativa, se les denomina taquiones. Los taquiones son uno de los principales problemas y críticas hacia la teoría de cuerdas bosónica. No solo es inconsistente el hecho de que presenten masa imaginaria. Si nos situamos en un contexto de teoría cuántica de campos podemos definir el campo taquiónico T(X), cuya cuantización da lugar al taquión. En este desarrollo se concluye que la relación entre la masa de la partícula y su campo es

$$M^{2} = \frac{\partial^{2} V(T)^{2}}{\partial T^{2}}\Big|_{T=0},$$
(1.157)

donde V(T) es el potencial taquiónico. Es decir, una masa negativa supondría encontrarse en un máximo del potencial, el estado fundamental es inestable. Este grave problema conduce a creer que la teoría bosónica es incorrecta o está incompleta. La teoría más aceptada actualmente es la teoría de supercuerdas, que no se encuentra con este problema en su derivación.

Ahora, estudiamos los primeros estados excitados. Notamos que la condición de *level-matching* requiere que por cada excitación a izquierda que usemos se añada otra a derechas. Esto es, los primeros estados excitados serán una combinación de operadores de creación a derecha e izquierda:

$$\tilde{\alpha}^{i}_{-1}\alpha^{j}_{-1}|0;p\rangle, \qquad (1.158)$$

con  $i, j \in \{1, \dots, D-2\}$ . Por tanto, esto da lugar a  $(D-2)^2$  estados con masa

$$M^{2} = \frac{4}{\alpha'} \left( 1 - \frac{D-2}{26} \right).$$
 (1.159)

Esta expresión se obtiene de

$$N\alpha_{-1}^{j}|0;p\rangle = \sum_{j'=1}^{D-2} \sum_{m>0} \alpha_{-m}^{j'} \alpha_{m}^{j} \alpha_{-1}^{j}|0;p\rangle$$

$$= \left(\alpha_{1}^{j} \alpha_{-1}^{j} + \sum_{j'=1}^{D-2} \sum_{\substack{m>0\\(j',m)\neq(j,1)}} \alpha_{-m}^{j'} \alpha_{m}^{j'} \alpha_{-1}^{j}\right)|0;p\rangle$$

$$= \left(\left[\alpha_{1}^{j}, \alpha_{-1}^{j}\right] + \alpha_{-1}^{j} \alpha_{1}^{j} + \sum_{j'=1}^{D-2} \sum_{\substack{m>0\\(j',m)\neq(j,1)}} \alpha_{-m}^{j'} \alpha_{-1}^{j} \alpha_{m}^{j'}\right)|0;p\rangle$$

$$= \left[\alpha_{1}^{j}, \alpha_{-1}^{j}\right]|0;p\rangle = |0;p\rangle,$$
(1.160)

donde usamos que los modos a izquierda conmutan con los modos a derecha y  $\alpha_n^i$  conmuta con  $\alpha_m^j$  cuando  $n + m \neq 0$  o  $i \neq j$ . El cálculo es equivalente para  $\tilde{N}$ .

La aplicación de estos operadores (con componentes para las direcciones transversales únicamente) sobre nuestros estados preserva la simetría asociada al grupo SO(D-2)(rotaciones en  $\mathbb{R}^{D-2}$ ). Queremos que la teoría mantenga además la invariancia de Lorentz propia de la relatividad, es decir, que los estados obtenidos encajen dentro de una teoría completa en SO(1, D-1) (grupo de Lorentz).

Supongamos que nuestra partícula tiene una cierta masa M > 0. Tomamos el marco en reposo de la partícula, de forma que  $p^{\mu} = (p, 0, ..., 0)$ . Entonces, tendríamos un subgrupo de transformaciones, SO(D - 1), que dejan invariante la partícula y su momento, este subgrupo suele denominarse grupo pequeño. En nuestro caso tenemos  $(D - 2)^2$  posibles estados, dimensión que no encaja en una representación de SO(D - 1). Es decir, una partícula correspondiente a los primeros estados excitados de la cuerda no puede tener masa.

Es más, una partícula sin masa puede definirse en un marco de referencia tal que  $p^{\mu} = (p, 0, \dots, 0, p)$ . No podemos obtener un marco en reposo como antes, es decir, se exige que los estados se encajen en una representación de SO(D-2), tal y como ocurre en nuestro caso.

La condición de que los estados no tengan masa conduce a

$$D = 26.$$

Desde la propia teoría se deriva que el número de dimensiones tiene que ser 26, para poder mantener la invariancia de Lorentz propia de los sistemas físicos relativistas. Podemos escribir el estado más general sin masa y con un cierto momento p como

$$R_{ij}\tilde{\alpha}_1^i \alpha_1^j |0; p\rangle, \qquad (1.161)$$

donde  $R \in \mathcal{M}^{D-2}$  es una matriz cualquiera. Una matriz cuadrada genérica puede escribirse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica como

$$R = \frac{1}{2} \left( R + R^t \right) + \frac{1}{2} \left( R - R^t \right) \equiv S + B, \qquad (1.162)$$

donde S es la parte simétrica y B la antisimétrica.

Además. podemos reescribir la matriz simétrica como

$$S_{ij} = \left(S_{ij} - \frac{1}{D-2}\delta_{ij}S^{ij}\right) + \frac{1}{D-2}\delta_{ij}S^{ii} \equiv G_{ij} + \delta_{ij}\Phi, \qquad (1.163)$$

donde  $\Phi$  es escalar (traza entre dimensiones transversales) y G es una matriz simétrica que además no tiene traza. Es decir, podemos la matriz arbitraria inicial se descompone en

$$R_{ij} = G_{ij} + B_{ij} + \delta_{ij}\Phi, \qquad (1.164)$$

con  $G_{ij}$  simétrica sin traza,  $B_{ij}$  antisimétrica y  $\Phi$  escalar.

Esta descomposición en tres representaciones de SO(24) es irreducible. Es decir, podemos asociar a cada uno de estos subgrupos un tipo de partícula.

Más aún, el primero de ellos, el que se corresponde con la parte simétrica sin traza, equivale a la cuantización de una partícula sin masa y espín 2. Todo esto apunta a que puede vincularse con la partícula denominada gravitón. Es más, si se estudia en profundidad la forma de los estados del gravitón, se puede establecer una relación directa con la forma general

$$G_{ij}\tilde{\alpha}^{i}_{-1}\alpha^{j}_{-1}|0;p\rangle, \qquad (1.165)$$

hemos conseguido una teoría cuántica que incluya la gravedad.

El campo  $B_{ij}$  se denomina campo de Kalb-Ramond y presenta grandes similaridades con el campo  $A_{\mu}$  de Maxwell, especialmente en la forma que tiene de acoplarse a las cuerdas, equivalente a la forma en que se acopla el campo de Maxwell a una partícula. El campo escalar  $\Phi$  se asocia al dilatón y corresponde a un único estado al ser un escalar.

La elección de D nos ha servido para conservar la invariancia de Lorentz en los primeros estados excitados, imponiendo que no tuvieran masa. Ya no podremos volver a fijar otro valor en caso de que fuera necesario en estados más excitados. Razonando como hicimos en la primera excitación, parece que tendremos un problema en conservar la invariancia, ya que en el caso de partículas con masa necesitamos que se forme una representación que encaje en el subgrupo SO(D-1) de alguna forma.

En la segunda excitación, vamos a tener dos posibilidades de estados diferentes:  $\alpha_{-1}^{i} \alpha_{-1}^{j} |0; p\rangle$ y  $\alpha_{-2}^{i} |0; p\rangle$ . Además, para ambos tenemos que  $N = \tilde{N} = 2$ , siguiendo cuentas análogas a las realizadas en  $(1.160)^{8}$ . La masa de estos estados será

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}.$$
 (1.166)

El número de estados a izquierda o derecha es  $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)+D-2 = \frac{1}{2}D(D-1)-1$ , ya que  $\alpha_{-1}^{i}\alpha_{-1}^{j} = \alpha_{-1}^{j}\alpha_{-1}^{i}$  y  $\alpha_{-1}^{i}\alpha_{-1}^{i} = \alpha_{-2}^{i}$ . Esta dimensión permite que estos estados puedan encajarse perfectamente como la representación de la parte tensorial simétrica y sin traza de SO(D-1) que tiene exactamente el mismo número de grados de libertad.

Es más, se puede comprobar que todos los estados excitados de la cuerda cerrada pueden integrarse perfectamente en una representación de SO(D-1), como debe ser para M > 0. Todos estos estados excitados se corresponderán además con campos para partículas con masa y espín entero, bosones. En la teoría de cuerdas bosónica ningún estado de la cuerda se corresponde con un estado fermiónico.

### 1.3.4. Corrientes de Noether

En la sección anterior se han derivado valores para  $a \ge D$  de forma poco rigurosa. Para la constante a se ha recurrido al uso de la extensión analítica de la función zeta de Riemann para salvar la existencia de un sumatorio infinito que no es compatible con una teoría física. Para fijar el número de dimensiones, se ha forzado que las primeras excitaciones correspondan a partículas sin masa de forma que se puedan encajar en una teoría Lorentz invariante.

Para terminar este capítulo vamos a plantear una forma más rigurosa de llegar al mismo resultado, a partir de las denominadas corrientes de Noether. El teorema de Noether básicamente postula que cada simetría de un sistema físico tiene asociada una cantidad conservada denominada carga de Noether. Para mantener la invariancia de Lorentz, entonces, vamos a imponer que se conserven las cargas de Noether en la acción de Polyakov y que, al cuantizarlas, cumplan las relaciones propias del álgebra de Lie de Lorentz.

Las corrientes asociadas a las transformaciones de Lorentz son

$$J^{\alpha}_{\mu\nu} = \mathcal{P}^{\alpha}_{\mu} X_{\nu} - \mathcal{P}^{\alpha}_{\nu} X_{\mu}. \tag{1.167}$$

Recordamos la ecuación (1.50) para el momento,  $\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial^{\alpha}X_{\mu}$ . Entonces, las cargas

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>En general, es sencillo comprobar que para un estado genérico como (1.118),  $N = \tilde{N} = \sum_{k>0} n_{\mu_k}$ 

se conservarán cuando se anulen sus parciales, calculémoslas:

$$\partial_{\alpha}J^{\alpha}_{\mu\nu} = \left(\partial_{\alpha}\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}\right)X_{\nu} - \left(\partial_{\alpha}\mathcal{P}^{\alpha}_{\nu}\right)X_{\mu} + \mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}\left(\partial_{\alpha}X_{\nu}\right) - \mathcal{P}^{\alpha}_{\nu}\left(\partial_{\alpha}X_{\mu}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}X_{\mu}\right)X_{\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}X_{\nu}\right)X_{\mu} + \frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\partial^{\alpha}X_{\mu}\partial_{\alpha}X_{\nu} - \partial^{\alpha}X_{\nu}\partial_{\alpha}X_{\mu}\right)$$
$$= 0, \qquad (1.168)$$

donde los dos primeros términos se anulan por ser exactamente las ecuaciones de movimiento (1.51).

Las cargas de Noether asociadas a esta corriente se definen como

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} \equiv \int d\sigma J^{\tau}_{\mu\nu}.$$
 (1.169)

Utilizando la expansión en modos de Fourier (1.74) podemos escribir esta carga como

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = (p^{\mu}x^{\nu} - p^{\nu}x^{\mu}) - i\sum_{n>0} \frac{1}{n} (\alpha^{\nu}_{-n}\alpha^{\mu}_{n} - \alpha^{\mu}_{-n}\alpha^{\nu}_{n}) - i\sum_{n>0} \frac{1}{n} (\tilde{\alpha}^{\nu}_{-n}\tilde{\alpha}^{\mu}_{n} - \tilde{\alpha}^{\mu}_{-n}\tilde{\alpha}^{\nu}_{n}) \equiv l^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} + \tilde{S}^{\mu\nu},$$
(1.170)

donde  $l^{\mu\nu}$  es el momento angular orbital,  $S^{\mu\nu}$  y  $\tilde{S}^{\mu\nu}$  se corresponden con los momentos angulares asociados a los modos de oscilación a izquierda y derecha respectivamente.

Para preservar la invariancia de Lorentz, al transformar las cargas en operadores, se deben preservar las relaciones vinculadas al álgebra de Lie de Lorentz:

$$\left[\mathcal{M}^{\rho\sigma}, \mathcal{M}^{\tau\nu}\right] = \eta^{\sigma\tau} \mathcal{M}^{\rho\nu} - \eta^{\rho\tau} \mathcal{M}^{\sigma\nu} + \eta^{\rho\nu} \mathcal{M}^{\sigma\tau} - \eta^{\sigma\nu} \mathcal{M}^{\rho\tau}.$$
 (1.171)

En el caso de las coordenadas de tipo gauge, no son tan obvias estas relaciones. Se pueden comprobar de forma sencilla la gran mayoría, a excepción de

$$\left[\mathcal{M}^{-i}, \mathcal{M}^{-j}\right] = 0. \tag{1.172}$$

Tras una larga serie de cuentas sin demasiado interés, podemos escribir este conmutador como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}^{-i}, \mathcal{M}^{-j} \end{bmatrix} = \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{n>0} \left[ \left( \frac{D-2}{24} - 1 \right) n + \frac{1}{n} \left( a - \frac{D-2}{24} \right) \right] \left( \alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i \right) \\ + \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{n>0} \left[ \left( \frac{D-2}{24} - 1 \right) n + \frac{1}{n} \left( a - \frac{D-2}{24} \right) \right] \left( \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^j - \tilde{\alpha}_{-n}^j \tilde{\alpha}_n^i \right).$$
(1.173)

Como las proyecciones de la derecha no tienen porqué anularse en general para un estado cualquiera, debe cumplirse que para cada n el corchete se anule. Esto recupera directamente las dos condiciones que habíamos derivado de forma poco rigurosa con anterioridad durante el capítulo:

$$D = 26, \qquad a = 1.$$

Con esto, concluimos el estudio de la cuerda bosónica cerrada. Más adelante, hablaremos de los principales inconvenientes de las teorías de cuerdas bosónicas así como de las soluciones que se plantean. En el siguiente capítulo, trataremos la teoría bosónica para el caso de una cuerda abierta.

# Capítulo 2

# Cuerdas abiertas y D-branas

Ya hemos formulado y cuantizado la cuerda bosónica cerrada. Esta era aquella para la que existía una periodicidad en uno de los parámetros. Es decir,

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = X^{\mu}(\tau,\sigma+2\pi). \tag{2.1}$$

En el caso de una cuerda abierta, la diferencia es clara, tenemos un punto inicial y un punto final. Por conveniencia, igual que hicimos en el caso de la cuerda cerrada, fijamos un intervalo para nuestro parámetro espacial,

$$\sigma \in [0,\pi]. \tag{2.2}$$

Como la dinámica de cada punto viene completamente determinada a nivel local (principio de Hamilton), no tendría sentido que existiera una diferencia entre un punto cualquiera de la cuerda cerrada o abierta. Por eso, la acción de la cuerda abierta no es más que la acción de Polyakov de la cuerda cerrada. Tras una elección de gauge conforme podemos escribirla en la forma habitual:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \partial_{\alpha} X \cdot \partial^{\alpha} X.$$
(2.3)

Si recordamos la derivación de las ecuaciones de movimiento de la acción de Nambu-Goto, (1.35), es claro dónde se diferencia el caso de la cuerda abierta. Uno de los términos que se anulaban automáticamente gracias a la periodicidad de la cuerda ya no es necesariamente nulo. Por tanto, tendremos que introducir unas ciertas condiciones adicionales que estarán relacionadas con los puntos inicial y final de la cuerda. El caso no relativista estudiado en la Sección 1.1 permite intuir de qué condiciones se tratan: condiciones de frontera Neumann o Dirichlet. Si realizamos la variación sobre la acción simplificada (2.3) tendremos

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \, 2\partial_{\alpha} X \cdot \partial^{\alpha}(\delta X) = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \left[\partial^{\alpha} \left(\partial_{\alpha} X \cdot \delta X\right) - \left(\partial^{\alpha} \partial_{\alpha} X\right) \cdot \delta X\right] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \left(\partial^{\alpha} \partial_{\alpha} X\right) \cdot \delta X + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma \left[\dot{X} \cdot \delta X\right]_{\tau_{i}}^{\tau_{f}} - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \left[X' \cdot \delta X\right]_{0}^{\pi}.$$

$$(2.4)$$

Igual que en el caso de la cuerda cerrada, obtenemos las ecuaciones de movimiento dadas por la primera integral  $\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}X = 0$ . La segunda integral también se anula debido a que al usar el principio de mínima acción siempre se fija  $\delta X(\tau_i, \sigma) = \delta X(\tau_f, \sigma) = 0$ . El único término que no se anula directamente ahora es el último. Esto es,

$$\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu} = 0, \qquad (2.5)$$

para  $\sigma = 0, \pi$ . Es decir, para anular este término podemos recurrir a condiciones de contorno Neumann o Dirichlet.

Recordamos que las condiciones de contorno Neumann imponen que

$$\partial_{\sigma} X^{\mu}(\tau, 0/\pi) = 0, \qquad (2.6)$$

los extremos de la cuerda pueden moverse libremente pero preservando el flujo. Por otro lado, las condiciones de contorno de Dirichlet fijan los extremos de la cuerda a una posición constante  $c^{\mu 1}$ , es decir,

$$\delta X^{\mu}(\tau, 0/\pi) = 0. \tag{2.7}$$

Las condiciones de tipo Dirichlet pueden parecer menos intuitivas que las de tipo Neumann, pero tienen un gran interés. La combinación de ambos tipos de restricciones da lugar a una superficie geométrica muy relevante en el contexto de teoría de cuerdas, la D-brana. Si fijamos

$$\partial_{\sigma} X^{a} = 0, \text{ para } a = 0, 1, \dots, p$$
  
 $X^{b} = c^{b}, \text{ para } b = p + 1, \dots, D - 1,$ 
(2.8)

entonces los extremos de nuestra cuerda quedan anclados a una superficie por la que pueden moverse mientras preserven la condición Neumann. Esta hipersuperficie de dimensión p + 1 es la que se denomina D-brana (o Dp-brana). Las condiciones de tipo Dirichlet

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Podría fijarse cada extremo a una posición diferente y seguiría siendo válido, por ahora estudiaremos el caso en que ambos extremos coinciden y, al final del capítulo, mencionaremos el caso más general.



Figura 2.1: Esquema de una cuerda abierta sobre una D-brana. Imagen extraída de [4].

básicamente reducen la simetría habitual de Lorentz al fijar los extremos de la cuerda. El grupo de Lorentz se rompe en dos partes

$$SO(1, D-1) \rightarrow SO(1, p) \times SO(D-p-1)$$

Podemos observar en la Figura 2.1 un esquema del espacio-tiempo de la cuerda cuando sus extremos viven sobre una D-brana.

Vamos a estudiar los estados que surgen para el caso genérico de una cuerda en una Dbrana, con las condiciones de contorno (2.8). Primero, realizamos la expansión en modos de Fourier a derecha e izquierda, que es similar a la realizada para cuerda cerrada, aunque no es completamente análoga.

Para empezar, en ese caso utilizamos la periodicidad de la función para obtener la periodicidad de las derivadas. Ahora, nuestra función no es periódica, pero cumple unas ciertas condiciones de contorno específicas. En el caso de condiciones de tipo Neumann,

$$\partial_{\sigma} X^{a}(\tau, 0) = \partial_{\sigma} X^{a}_{L}(\tau, 0) + \partial_{\sigma} X^{a}_{R}(\tau, 0) = X^{a'}_{L}(\tau) - X^{a'}_{R}(\tau) = 0.$$
(2.9)

Es decir,  $X_L^{a\prime}(\tau) = X_R^{a\prime}(\tau)$ . Por tanto,  $X_L^a = X_R^a + c^a$  y podemos tomar  $f^a \equiv X_L^a - c^a/2$  de forma que

$$X^{a} = f^{a}(\sigma^{+}) + f^{a}(\sigma^{-}).$$
(2.10)

La segunda condición Neumann en  $\sigma = \pi$  lleva a que

$$\partial_{\sigma} X^{a}(\tau, \pi) = f^{a\prime}(\tau + \pi) - f^{a\prime}(\tau - \pi) = 0, \qquad (2.11)$$

por lo que la función  $f^{a'}$  es  $2\pi$ -periódica. Este es el resultado análogo al obtenido en el caso de cuerdas cerradas, al que hemos llegado por un camino diferente.

Entonces, podemos expandir  $f^a$  es sus modos de Fourier de manera análoga a (1.68)

obteniendo

$$f^{a\prime}(x) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^a e^{-inx}.$$
 (2.12)

Por tanto, si integramos obtenemos las mismas expresiones que en (1.69) pero con los mismos modos a izquierda y a derecha:

$$X_{L}^{a}(\sigma^{+}) = \frac{1}{2}x^{a} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_{0}^{a}\sigma^{+} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{a}e^{-in\sigma^{+}},$$

$$X_{R}^{a}(\sigma^{-}) = \frac{1}{2}x^{a} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_{0}^{a}\sigma^{-} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{a}e^{-in\sigma^{-}}.$$
(2.13)

Notar que además hemos regresado a la notación anterior sin más que recordar que  $f^{\mu}(\sigma^{+}) = X_{L}^{\mu}(\sigma^{+}) \text{ y } f^{a}(\sigma^{-}) = X_{R}^{\mu}(\sigma^{-})$ . La función base es la misma, la notación solo hace referencia a la coordenada que se utiliza,  $\sigma^{\pm}$ .

Además, comparando el resultado con (1.72), tenemos una ligera diferencia debido a los extremos de integración:

$$p^{a} = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{2\alpha'} \alpha_{0}^{a} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \alpha_{0}^{a}.$$
 (2.14)

La relación entre el momento y el modo cero cambia en un factor 2. Salvando esta diferencia, la expansión es exactamente la misma pero con  $\alpha_n^a = \tilde{\alpha}_n^a$ . La expresión completa para cada coordenada es

$$X^{a}(\tau,\sigma) = x^{a} + 2\alpha' p^{a} \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_{n}^{a} \frac{e^{-in\tau}}{n} \cos(n\sigma).$$
(2.15)

En el caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet, tenemos  $X^b(\tau, 0) = X^b(\tau, \pi) = c^b$ . Entonces,

$$X^{b}(\tau, 0) = X^{b}_{L}(\tau) + X^{b}_{R}(\tau) = c^{b},$$
  

$$X^{b}(\tau, \pi) = X^{b}_{L}(\tau + \pi) + X^{b}_{R}(\tau - \pi) = c^{b}.$$
(2.16)

De la primera ecuación tenemos directamente que  $X_L^b = -X_R^b + c^b$  y podemos denotar  $f^b \equiv X_L^b = -X_R^b + c^b$  para escribir

$$X^{b}(\tau,\sigma) = f^{b}(\sigma^{+}) - f^{b}(\sigma^{-}) + c^{b}.$$
(2.17)

Si derivamos la segunda condición de (2.16) se obtiene

$$f^{b'}(\tau + \sigma) - f^{b'}(\tau - \sigma) = 0.$$
(2.18)

De nuevo, la función escogida es  $2\pi$ -periódica y podemos expandirla exactamente igual que antes. En resumen,

$$X_{L}^{b}(\sigma^{+}) = \frac{1}{2}x^{b} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_{0}^{b}\sigma^{+} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{b}e^{-in\sigma^{+}},$$

$$X_{R}^{b}(\sigma^{-}) = c^{b} - \frac{1}{2}x^{b} - \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_{0}^{b}\sigma^{-} - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_{n}^{b}e^{-in\sigma^{-}}.$$
(2.19)

Entonces, obtenemos

$$X^{b}(\tau,\sigma) = c^{b} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{b}\sigma + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_{n}^{b}\frac{e^{-in\tau}}{n}sen(n\sigma), \qquad (2.20)$$

Volviendo a recordar la condición de Dirichlet en el extremo derecho se obtiene

$$X^{b}(\tau,\pi) = c^{b} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{b}\pi = c^{b} \Longrightarrow \alpha_{0}^{b} = 0.$$
(2.21)

Por tanto, la expansión completa en este caso es

$$X^{b}(\tau,\sigma) = c^{b} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_{n}^{b} \frac{e^{-in\tau}}{n} sen(n\sigma), \qquad (2.22)$$

con lo que  $x^b = c^b, \, p^b = 0$  y  $\alpha^b_n = -\tilde{\alpha}^b_n$ .

En ambos casos, tanto bajo condiciones Dirichlet como Neumann, los modos de oscilación a izquierda y derecha quedan completamente determinados por únicamente uno de los grupos.

# 2.1. Cuantización

Para cuantizar la cuerda abierta de nuevo recurrimos a las coordenadas de cono de luz en la brana, es decir,

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( X^0 \pm X^p \right).$$
 (2.23)

La cuantización a seguir es exactamente equivalente a aquella de la cuerda cerrada. La única variación, salvando que ahora solo tenemos una clase de modos de oscilación en vez de dos, se da en la fórmula para la masa (1.154), que ahora se convierte en

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \sum_{i=p+1}^{D-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} - a \right).$$
(2.24)

El factor cuatro desaparece de la expresión, esto se debe a que ahora cambia en un factor dos la expresión para el momento  $p^{\mu}$ . Además, debemos dividir el sumatorio en dos partes debido a que la elección de cono de luz se hace sobre la D-brana.

Siguiendo un razonamiento equivalente al visto en la Sección 1.3.4, se derivan exactamente las mismas condiciones que para la cuerda cerrada:

$$D = 26, \qquad a = 1.$$
 (2.25)

Esto quiere decir que las cuerdas abiertas y cerradas no son teorías diferentes si no diferentes estados para una misma teoría global, viable tanto para cuerdas abiertas como cerradas.

#### 2.1.1. Estados de la cuerda

Una vez planteada la cuantización, comparándola con la de la cuerda cerrada, podemos plantearnos qué tipo de estados se esperan obtener en una cuerda abierta. Para empezar definimos el estado fundamental,  $|0; p\rangle$ , de forma equivalente a como ya hicimos anteriormente:

$$\alpha_n^i |0\rangle = 0, \text{ para } n > 0, \tag{2.26}$$

donde i = 1, ..., p - 1, p + 1, ..., D - 1.

Observando la nueva ecuación para la masa (2.24) y teniendo en cuenta que la constante sigue tomando el valor a = 1, la masa del estado fundamental será

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'},\tag{2.27}$$

nos volvemos a encontrar con el problema de las partículas con masa imaginaria, los taquiones.

Recordando el comentario realizado en el caso cerrado, el problema no era tanto que la partícula tuviera una masa imaginaria si no que esto suponía que el estado fundamental sea inestable. En el contexto de cuerdas abiertas, se ha propuesto una solución a ello. Como la cuerda se encuentra en una brana, el estado fundamental de la cuerda puede ser inestable si la brana lo es también. Es decir, se propone que la brana sea inestable y que el sistema se va estabilizando hacia un estado estable del potencial taquiónico en el que

la D-brana desaparece.

Por otro lado, los primeros estados excitados, que corresponden a partículas sin masa, pueden dividirse en dos clases diferentes: longitudinales a la brana o transversales a ella. Es lógico que exista esta diferencia por el simple hecho de que la simetría de Lorentz se rompe en dos simetrías independientes en las direcciones longitudinales y transversales a la brana. Por un lado, los estados de la forma

$$\alpha^a_{-1}|0;p\rangle,\tag{2.28}$$

con a = 1, ..., p-1 corresponden con modos  $\alpha_{-1}^{\mu}$  longitudinales a la brana. Estos estados se transforman bajo el grupo de Lorentz SO(1, p) y corresponden con partículas con espín 1. Ya no tenemos dos torres de operadores de creación, antes las representaciones de los estados se podían asociar a tensores de rango dos y, por extensión, a partículas con espín 2, a diferencia de ahora.

Concluimos que estos estados longitudinales, sin masa y con espín 1, se corresponden con el fotón. Se puede introducir un campo gauge  $A_a$  cuya cuantización se identifique con esta partícula.

Los estados transversales

$$\alpha^{b}_{-1}|0;p\rangle \tag{2.29}$$

actúan como escalares bajo el grupo anterior en la brana. Esto es, pueden relacionarse con campos escalares en la brana. Estos se entienden como pequeñas fluctuaciones transversales de la D-brana, es decir, se trata de un objeto dinámico.

# 2.2. Dinámica de la brana

En este sentido, todo objeto dinámico debería poder ser descrito a través de una acción. Si queremos mantener las simetrías de Lorentz y de reparametrización de la cuerda (la simetría de Weyl era única en la dimensión de la cuerda), la elección más razonable es la generalización de la acción de Nambu-Goto, la acción de Dirac:

$$S_{Dp} = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det\gamma}, \qquad (2.30)$$

donde  $T_p$  es la tensión de la brana y  $\gamma_{ab}$  se define de forma análoga al caso de la D1-brana (cuerda):

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{b}} \eta_{\mu\nu}.$$
(2.31)

Intentar cuantizar la acción de la brana para obtener un discreto de estados, igual



Figura 2.2: Esquema de una cuerda abierta anclada a dos D-branas. Imagen extraída de [4].

que en el caso de la cuerda, es una tarea compleja y que además sabemos que no puede funcionar. Para la cuerda, establecimos que su energía es proporcional a su longitud. La extensión adecuada sería considerar la energía de la D2-brana proporcional a su área. El problema de esto es que la brana puede modificarse de infinitas formas diferentes obteniendo el mismo área. Por ejemplo, si la brana forma un cilindro de radio 1/L y largo L, tendremos infinitos cilindros con la misma energía. Claramente, si cuantizáramos la brana llegaríamos a un continuo de energías. Aunque no se ha realizado, se cree que la cuantización de la D-brana llevaría a estados multi-partícula.

## 2.3. Multiples branas

Para terminar este capítulo, vamos a considerar otra posibilidad igualmente válida para las condiciones de tipo Dirichlet. Ya mencionamos que una cuerda con los extremos en la misma posición no es la única que cumple la condición de contorno Dirichlet. Cualquier cuerda con los extremos fijos (aunque sea en puntos diferentes), cumplirá que  $\delta X(\tau, 0/\pi) =$ 0. Que la cuerda esté anclada a dos puntos diferentes es equivalente a decir que lo está a dos branas.

En ese caso, tenemos

$$X^{b}(\tau, 0) = c^{b}, \qquad X^{b}(\tau, \pi) = d^{b}, \tag{2.32}$$

siendo  $c^b$  y  $d^b$  las posición de las branas respectivamente. Podemos ver una ilustración de esta configuración en la Figura 2.2.

En esta situación en que los extremos de la cuerda no están anclados a la misma brana,

llegamos de forma análoga a la misma expresión previa

$$X^{b}(\tau,\sigma) = c^{b} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{b}\sigma + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\alpha_{n}^{b}\frac{e^{-in\tau}}{n}sen(n\sigma), \qquad (2.33)$$

En cambio, ahora la condición de contorno en el extremo derecho de la cuerda implicará que

$$X^{b}(\tau,\pi) = c^{b} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{b}\pi = d^{b} \Longrightarrow \sqrt{2\alpha'}\alpha_{0}^{b} = \frac{d^{b} - c^{b}}{\pi}.$$
(2.34)

Entonces, en este caso la expansión completa es

$$X^{b}(\tau,\sigma) = c^{b} + \frac{(d^{b} - c^{b})\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_{n}^{b} \frac{e^{-in\tau}}{n} sen(n\sigma).$$
(2.35)

Así, la condición para la masa se verá ligeramente modificada:

$$M^{2} = \frac{|\vec{d} - \vec{c}|^{2}}{(2\pi\alpha')^{2}} + \cdots, \qquad (2.36)$$

el primer término corresponde a la masa de la cuerda relativista estirada entre las dos branas.

En resumen, hemos visto cómo varía la teoría para el caso de cuerdas abiertas. Tanto para condiciones Neumann como Dirichlet tenemos que los osciladores a izquierda y derecha dejan de diferenciarse y pasamos a tener un solo grupo. Al tener solo una clase de modos, los estados de la cuerda dan lugar a partículas (bosones) que tienen espín 1, como por ejemplo el fotón. Es decir, para integrar todos los bosones debemos considerar una teoría completa en que las cuerdas puedan estar abiertas o cerradas.

No hemos encontrado tampoco en las cuerdas abiertas estados fermiónicos o quarks  $(espín \frac{1}{2})$ . Por esta razón, y por otras incongruencias como la inestabilidad del estado fundamental cerrado, parece que la teoría de cuerdas bosónicas no está completa. La teoría de supercuerdas, que introduciremos en el siguiente capítulo, resuelve todos los problemas anteriores, planteando una nueva teoría que incluye tanto estados bosónicos como fermiónicos.

# Capítulo 3

# Supercuerdas

La teoría de supercuerdas surge como una generalización natural de la teoría de cuerdas bosónicas. El concepto fundamental que subyace en esta teoría es la supersimetría. La supersimetría, en pocas palabras, se refiere a la relación e identificación entre bosones y fermiones. En la teoría de supercuerdas encontramos el mismo número de estados cuánticos para fermiones que para bosones para cada masa. Aunque no se ha observado en la naturaleza, la supersimetría se sitúa como una de las principales ramas que pudieran llevar a la física más allá del actual Modelo Estándar.

En este capítulo plantearemos la teoría de supercuerdas abiertas que, como en el caso bosónico, podrán cerrarse sin más que considerar unas condiciones de contorno ligeramente diferentes. Comenzaremos por el caso abierto debido a que es considerablemente más simple. El objetivo de este capítulo no es derivar la teoría rigurosamente, sino familiarizarse con las propiedades y conclusiones más relevantes de la misma. En el primer capítulo determinamos antes el caso más complejo (cuerdas cerradas) de forma rigurosa, para así después simplemente particularizar al caso simplificado de la cuerda abierta. Ahora, sin el mismo propósito de rigurosidad, comenzaremos por el caso sencillo y finalmente comentaremos los matices en que se diferenciaría el estudio en el caso de supercuerdas cerradas.

## 3.1. Supercuerdas abiertas

Para obtener fermiones en la teoría, introducimos unas nuevas variables dinámicas que, al cuantizar, obedezcan las condiciones vinculadas a estados fermiónicos. En este sentido, en cada dirección espacio-temporal necesitaremos dos variables  $\psi_1^{\mu}(\tau, \sigma) \ge \psi_2^{\mu}(\tau, \sigma)$  para describir adecuadamente al fermión, donde  $\sigma \in [0, \pi]$  al tratarse del caso abierto.

Si reutilizamos la cuantización de cono de luz, podemos usar la simetría gauge de

nuestro sistema para fijar los valores de los campos  $\psi_{\alpha}^{\pm}$ . Podremos tomar

$$\psi_{\alpha}^{+} = 0, \qquad (3.1)$$

y despejar  $\psi_{\alpha}^{-}$  en función de las componentes transversales  $\psi_{\alpha}^{i}$  y  $X_{\alpha}^{i}$ . Esta situación es muy similar a lo que ocurre con los campos  $X^{\mu}$ . Para poder obtener fermiones, estas nuevas variables deben comportarse de forma anticonmutativa cuando cuanticemos el sistema, a diferencia de las vinculadas a bosones.

Se dice que dos operadores son anticonmutativos cuando

$$\{f_1, f_2\} \equiv f_1 f_2 + f_2 f_1 = 0, \tag{3.2}$$

cambiamos conmutadores para bosones por anticonmutadores para fermiones.

Al añadir los campos correspondientes a fermiones, debemos modificar ligeramente la acción original (1.49). Así, la opción más sencilla sería añadir nuevos campos libres. Para el campo fermiónico entonces tomamos

$$S_{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \left[ \psi_1^i (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_1^i + \psi_2^i (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \psi_2^i \right].$$
(3.3)

Por tanto, la acción total será

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \,\partial_{\alpha} X \cdot \partial^{\alpha} X + S_{\psi}. \tag{3.4}$$

Notamos que la nueva parte fermiónica solo cuenta con términos que incluyen una única derivada. Este tipo de acciones pueden terminar resultando en ecuaciones de contorno triviales que no contribuyan a las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, si un operador h es conmutativo,

$$\partial(hh) = 2h\left(\partial h\right). \tag{3.5}$$

Esto quiere decir que podemos escribir un término con una derivada del tipo  $h(\partial h)$  como una derivada total. Su contribución a la acción es de la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, h\left(\partial_x h\right) = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \partial_x(hh) = [hh]_{x_1}^{x_2},\tag{3.6}$$

es decir, cuando derivemos para aplicar el principio de mínima acción, no habrá contribución a las ecuaciones de movimiento.

Por ello, es fundamental el hecho de que nuestras variables  $\psi^{\mu}_{\alpha}$  sean anticonmutativas. Cuando un operador h es anticonmutativo, no podemos escribir  $h(\partial h)$  como una derivada total. Notar que en ese caso  $h(\partial h) = -(\partial h) h$  y la ecuación (3.5) es trivial. Entonces, podemos buscar las ecuaciones de movimiento asociadas a los nuevos campos. Como hasta ahora, buscaremos anular la variación de  $S_{\psi}$  para pequeñas variaciones de  $\psi^{i}_{\alpha}$ . Tenemos que

$$\delta S_{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \Big[ \delta \psi_1^i (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_1^i + \psi_1^i (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \delta \psi_1^i \\ + \delta \psi_2^i (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \psi_2^i + \psi_2^i (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \delta \psi_2^i \Big].$$
(3.7)

Podemos reescribir el segundo sumando de la acción anterior:

$$\psi_1^i(\partial_\tau + \partial_\sigma)\delta\psi_1^i = \partial_\tau(\psi_1^i\delta\psi_1^i) + \partial_\sigma(\psi_1^i\delta\psi_1^i) - [(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^i]\delta\psi_1^i = \partial_\tau(\psi_1^i\delta\psi_1^i) + \partial_\sigma(\psi_1^i\delta\psi_1^i) + \delta\psi_1^i(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^i,$$
(3.8)

donde hemos utilizado la condición de anticonmutatividad en la última igualdad. Podemos cambiar el último término de forma completamente equivalente para finalmente obtener

$$\delta S_{\psi} = \frac{1}{\pi} \int d\tau d\sigma \left[ \delta \psi_1^i (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_1^i + \delta \psi_2^i (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \psi_2^i \right] + \frac{1}{2\pi} \int d\tau \left[ \psi_1^i \delta \psi_1^i - \psi_2^i \delta \psi_2^i \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} + \frac{1}{2\pi} \int d\sigma \left[ \psi_1^i \delta \psi_1^i + \psi_2^i \delta \psi_2^i \right]_{\tau_i}^{\tau_f} = \frac{1}{\pi} \int d\tau d\sigma \left[ \delta \psi_1^i (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_1^i + \delta \psi_2^i (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) \psi_2^i \right] + \frac{1}{2\pi} \int d\tau \left[ \psi_1^i \delta \psi_1^i - \psi_2^i \delta \psi_2^i \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi},$$
(3.9)

donde hemos utilizado la condición habitual  $\delta \psi^i_{\alpha}(\tau_i, \sigma) = \delta \psi^i_{\alpha}(\tau_f, \sigma) = 0$  al minimizar la acción.

Es muy sencillo entonces llegar a las ecuaciones de movimiento de la expresión (3.9). Estas son

$$(\partial_{\tau} + \partial_{\sigma})\psi_1^i = 0, \qquad (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma})\psi_2^i = 0, \qquad (3.10)$$

mientras que las ecuaciones de contorno son

$$\psi_1^i(\tau, \sigma^*) \delta \psi_1^i(\tau, \sigma^*) - \psi_2^i(\tau, \sigma^*) \delta \psi_2^i(\tau, \sigma^*) = 0, \qquad (3.11)$$

donde  $\sigma^* = 0, \pi$ .

Vamos a volver a utilizar las variables de cono de luz, que cumplen  $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma})$ . Escribimos las ecuaciones de movimiento (3.10) en las variables de cono de luz junto con las ecuaciones para  $X^{\mu}$  que derivamos en (1.63),

$$\partial_{+}\psi_{1}^{i} = \partial_{+}(\partial_{-}X^{i}) = 0,$$
  

$$\partial_{-}\psi_{2}^{i} = \partial_{-}(\partial_{+}X^{i}) = 0.$$
(3.12)

Tenemos que  $\psi_1^i(\tau, \sigma) = \psi_1^i(\sigma^-)$  se mueve hacia la derecha y, análogamente,  $\psi_2^i(\tau, \sigma) = \psi_1^i(\sigma^+)$  se mueve hacia la izquierda. Además, observamos una clara simetría entre bosones y fermiones. La supersimetría de la teoría radica en las siguientes equivalencias:

$$\psi_1^i \longleftrightarrow \partial_- X^i, \qquad \psi_2^i \longleftrightarrow \partial_+ X^i,$$

$$(3.13)$$

estos campos comparten ecuaciones de movimiento respectivamente.

Ahora vamos a analizar las condiciones de contorno de la ecuación (3.11). Una condición simple como  $\psi_1^i(\tau, 0) = 0$  implicaría que  $\psi_1^i(\tau) = 0$  y por lo tanto  $\psi_1^i = 0$ , el campo sería trivial. Por eso, probamos con un tipo de condición algo diferente, que relacione ambos campos en esos puntos. Esta condición es

$$\psi_1^i(\tau, \sigma^*) = \pm \psi_2^i(\tau, \sigma^*). \tag{3.14}$$

A partir de ella, se obtiene también de forma directa que

$$\delta\psi_1^i(\tau,\sigma^*) = \pm\delta\psi_2^i(\tau,\sigma^*). \tag{3.15}$$

El signo que escojamos para cada  $\psi^i_{\alpha}$  es totalmente irrelevante. Simplemente, si nos fijamos en la acción (3.4), es claro que el signo de cada campo desaparece debido a que estos aparecen de forma cuadrática. Por tanto, debido a esta arbitrariedad podemos hacer la elección

$$\psi_1^i(\tau, 0) = \psi_2^i(\tau, 0). \tag{3.16}$$

No podemos escoger arbitrariamente la condición en  $\sigma = \pi$  también. Si volvemos a cambiar el signo a  $\psi_1^i$  o a  $\psi_2^i$  la acción seguiría igual pero la condición en  $\sigma = 0$  podría variar. La elección

$$\psi_1^i(\tau, \pi) = \pm \psi_2^i(\tau, \pi) \tag{3.17}$$

es físicamente relevante.

En este punto, cada una de las dos posibilidades lleva a un *sector* distinto de la teoría de supercuerdas. Por un lado, el denominado sector de Ramond (R) contiene los estados que surgen de la elección de signo positivo para la condición de contorno. Por otro lado, se llama sector de Neveu–Schwarz (NS) al que contiene a aquellos estados que se obtienen al utilizar la condición con signo negativo para la ecuación de contorno.

Para entender mejor las implicaciones de la elección que conduce a cada sector, pode-

mos definir un único campo fermiónico en  $[-\pi,\pi]$  de la forma

$$\Psi^{i}(\tau,\sigma) \equiv \begin{cases} \psi_{1}^{i}(\tau,\sigma), & \sigma \in [0,\pi], \\ \\ \psi_{2}^{i}(\tau,-\sigma), & \sigma \in [-\pi,0]. \end{cases}$$
(3.18)

La función es contínua en  $\sigma = 0$  debido a la condición (3.16). Además, el campo  $\Psi$ puede escribirse en función únicamente de  $\sigma^- = \tau - \sigma$ . La condición en  $\sigma = \pi$  implica que

$$\Psi^{i}(\tau,\pi) = \psi_{1}^{i}(\tau,\pi) = \pm \psi_{2}^{i}(\tau,\pi) = \pm \Psi^{i}(\tau,-\pi).$$
(3.19)

Es decir, bajo la condición de contorno de Ramond, el campo será periódico ( $\Psi^i(\tau, \pi) = \Psi^i(\tau, -\pi)$ ) y bajo la condición de contorno de Neveu-Schwarz, el campo será antiperiódico ( $\Psi^i(\tau, \pi) = -\Psi^i(\tau, -\pi)$ ). Vamos a estudiar qué estados se obtienen en cada uno de estos sectores.

#### 3.1.1. Sector de Neveu-Schwarz

En este caso, la elección de las condiciones de contorno lleva a una función fermiónica antiperiódica. Es decir, hay un cambio de signo tras cada periodo  $2\pi$ . Si expandimos la función  $\Psi^i(\tau, \sigma) = \Psi^i(\sigma^-)$  en modos de Fourier obtenemos

$$\Psi^{i}(\tau,\sigma) = \sum_{r} b_{r}^{i} e^{-ir\sigma^{-}}.$$
(3.20)

Al tratarse de una función antiperiódica, no necesariamente tendremos una suma en los enteros  $(r \in \mathbb{Z})$ . Veamos qué condición deben cumplir los índices:

$$\Psi^{i}(\tau,0) = \sum_{r} b_{r}^{i} e^{-ir\tau} = -\Psi^{i}(\tau,2\pi) = -\sum_{r} b_{r}^{i} e^{-ir\tau} e^{i2\pi r}, \qquad (3.21)$$

por lo que

$$e^{i2\pi r} = -1 \Longrightarrow 2\pi r = (2n+1)\pi \Longrightarrow r = n + \frac{1}{2}, \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$
 (3.22)

Por tanto, escribimos

$$\Psi^{i}(\tau,\sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_{r}^{i} e^{-ir\sigma^{-}}.$$
(3.23)

A la hora de cuantizar la supercuerda, mantenemos las relaciones de conmutación originales para  $X^i$  y añadimos las relaciones para  $\Psi^i$  que, como adelantamos, son relaciones

de anticonmutación. Tal y como ocurría en el caso de las cuerdas bosónicas, podemos definir los modos de vibración como operadores cuánticos. En este caso, se comportan como operadores cuánticos anticonmutantes, debido a que los campos fermiónicos lo son también. Las relaciones, que se pueden obtener de forma similar a como hicimos en la Sección (1.3.1), nos dan:

$$\{b_r^i, b_r^j\} = \delta_{r+s,0} \,\delta^{ij}. \tag{3.24}$$

Los operadores  $b^i_{-1/2}, b^i_{-3/2}, b^i_{-5/2}, \ldots$  son operadores de creación, mientras que los operadores  $b^i_{1/2}, b^i_{3/2}, b^i_{5/2}, \ldots$  son operadores de aniquilación. Es decir, el estado más genérico para la supercuerda abierta puede escribirse como

$$|\psi\rangle_{\rm NS} = (\alpha_{-1}^{i_1})^{n_{i_1}} (\alpha_{-2}^{i_2})^{n_{i_2}} \dots |0; p\rangle \otimes (b_{-1/2}^{j_1})^{n_{j_1}} (b_{-3/2}^{j_2})^{n_{j_2}} \dots |\rm NS\rangle,$$
(3.25)

donde definimos  $|NS\rangle$  como el vacío fermiónico para el caso de Neveu-Schwarz. Además,  $n_{j_k} = 0, 1$ , sin que cualquier otra opción sirva. Esto se debe a la propiedad de anticonmutatividad:

$$\{b_r^i, b_r^i\} = b_r^i b_r^i + b_r^i b_r^i = 0 \Longrightarrow (b_r^i)^2 = 0,$$
(3.26)

donde encontramos una clara relación con el principio de exclusión de Pauli (que no permite que haya dos estados completamente idénticos).

El orden en que aplicamos los operadores  $b_r^i$  no importa. Como anticonmutan entre sí,  $b_{r_1}^i b_{r_2}^j = -b_{r_2}^j b_{r_1}^i$ , la diferencia entre un estado y otro es como mucho una fase global. La expresión obtenida en (2.24) sigue manteniendo la misma forma, aunque ahora añadimos la parte correspondiente a los operadores para fermiones. La expresión completa es

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \sum_{i=p+1}^{D-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} rb_{-r}^{i} b_{r}^{i} + \sum_{i=p+1}^{D-1} \sum_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} rb_{-r}^{i} b_{r}^{i} - a \right)$$
(3.27)

donde a no es la misma constante que antes ya que ahora debemos añadir las contribuciones que surgen de normal-ordenar los operadores de bosones y fermiones.

La expresión (3.27) para el *level matching* surge de repetir las cuentas ya realizadas en la Sección 1.2.3, donde codificamos las ecuaciones asociadas a las variaciones en la métrica auxiliar  $g_{\alpha\beta}$  en el tensor de energía-impulso  $(T_{\alpha\beta} = 0)$ .

La contribución bosónica a la constante de ordenación sigue siendo la misma que antes,

$$a_B = \frac{D-2}{24}.$$
 (3.28)

Para encontrar la contribución fermiónica podemos razonar de forma muy similar a como

lo hicimos originalmente, haciendo uso de la función zeta de Riemann.

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} rb_{-r}^{i}b_{r}^{i} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} rb_{-r}^{i}b_{r}^{i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{r=-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\dots} r\left\{b_{-r}^{i},b_{r}^{i}\right\} - b_{r}^{i}b_{-r}\right)$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} rb_{-r}^{i}b_{r}^{i} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} r\{b_{r}^{i},b_{-r}^{i}\}$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} rb_{-r}^{i}b_{r}^{i} - \frac{D-2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \cdots\right).$$
(3.29)

Para obtener un valor finito para la suma infinita del último término, volvemos a recurrir, como ya adelantamos, a la función zeta de Riemann. Usamos la propiedad

$$\sum_{n>0} \frac{1}{(2n-1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s).$$
(3.30)

Es decir, para s = -1 tenemos

$$1 + 3 + 5 + \ldots = -\zeta(-1) = \frac{1}{12},$$
 (3.31)

donde  $\zeta(-1)$  correspondía a la suma infinita de pares e impares. Entonces, obtenemos la siguiente contribución a la constante de ordenación de los operadores fermiónicos:

$$a_{\rm NB} = \frac{D-2}{48}.$$
 (3.32)

Juntando ambas contribuciones se tiene que

$$a = a_B + a_{\rm NB} = \frac{D - 2}{16}.$$
(3.33)

Con un estudio de las corrientes de Noether, se puede obtener una expresión equivalente a la de la ecuación (1.173), con el añadido del nuevo campo fermiónico. En este caso se concluyen valores distintos a aquellos de la cuerda bosónica:

$$D = 10, \qquad a = \frac{1}{2},$$

el número de dimensiones es diferente al de la teoría bosónica, se han reducido a diez las dimensiones de la teoría.

Además. el estado fundamental

$$|0;p\rangle \otimes |\mathrm{NS}\rangle \tag{3.34}$$

tiene masa  $M^2 = -\frac{1}{2\alpha'}$ , es taquiónico.

En este caso, los estados sin masa son la primera excitación del estado fundamental fermiónico (la parte bosónico se mantiene inalterada). Estos son los ocho estados:

$$b_{-1/2}^i|0;p\rangle_{\rm NS},$$
 (3.35)

donde  $|0; p\rangle_{\rm NS} \equiv |0; p\rangle \otimes |\rm NS\rangle$ . El resto de estados pueden obtenerse combinando ambos tipos de operadores y son todos estados con masa

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( N - \frac{1}{2} \right), \tag{3.36}$$

donde

$$N \equiv \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{r=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} r b_{-r}^{i} b_{r}^{i}.$$
(3.37)

Además, igual que en cuerdas bosónicas, es directo comprobar que para un estado genérico como (3.25), el valor de N no es otro que

$$N = \sum_{k>0} k(n_{i_k}) + \sum_{l=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots} l(n_{j_l}).$$
(3.38)

Por ejemplo, los estados

$$\alpha_{-1}^{i}b_{-1/2}^{i}b_{-1/2}^{j}|0;p\rangle_{\rm NS} \tag{3.39}$$

tienen

$$N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Longrightarrow M^2 = \frac{3}{2\alpha'}.$$
 (3.40)

Es importante poder clasificar y distinguir el tipo de partícula asociada a los diferentes estados. Vamos a diferenciar estados bosónicos y fermiónicos a traves del nuevo operador  $(-1)^{\rm F}$ , donde F es el número fermiónico. Así, aquellos estados con número fermiónico par e impar son bosónicos y fermiónicos respectivamente. Declaramos el estado fundamental como estado fermiónico por lo que  $(-1)^{\rm F}|0;p\rangle_{\rm NS} = -|0;p\rangle_{\rm NS}$ .

Cada vez que se añade un operador fermiónico, el número fermiónico aumenta. Entonces, para un estado cualquiera

$$(-1)^{\mathrm{F}}|\psi\rangle_{\mathrm{NS}} = (-1)^{\sum_{l} n_{j_{l}}} |\psi\rangle_{\mathrm{NS}}, \qquad (3.41)$$

donde además se debe cumplir la relación

$$\{(-1)^F, b_r^i\} = 0, (3.42)$$

para que no existan ambigüedades en el ordenamiento.

En resumen, todos los estados con N entero corresponden a estados fermiónicos ya que el estado fundamental es fermiónico y cada operador  $b_r^i$  aporta un semientero a N. Los estados con N semientero son, entonces, estados bosónicos.

### 3.1.2. Sector de Ramond

Una vez estudiadas las excitaciones que surgen en el sector de Neveu-Schwarz, vamos a estudiar los diferentes estados que aparecen en el sector de Ramond. En este caso, la función fermiónica es  $2\pi$ -periódica ya que

$$\Psi^{i}(\tau, \pi) = \Psi^{i}(\tau, -\pi).$$
(3.43)

Por tanto, podemos expandir el campo de forma habitual con índices enteros, es decir,

$$\Psi^{i}(\tau,\sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{n}^{i} e^{-in\sigma^{-}}.$$
(3.44)

Como antes, los operadores  $d_n^i$  son anticonmutantes, cumplen la misma relación que los operadores de Neveu-Schwarz:

$$\{d_n^i, d_m^j\} = \delta_{m+n} \delta^{ij}, \qquad (3.45)$$

donde los operadores  $d_{-1}^i, d_{-2}^i, d_{-3}^i, \ldots$  son los operadores de creación y  $d_1^i, d_2^i, d_3^i, \ldots$  son los de aniquilación.

Como es habitual, aunque en el caso de condiciones Ramond no ocurrió, el caso n = 0debe tratarse con cuidado. Para los osciladores bosónicos recordemos que  $\alpha_0^i$  no se utilizan como operadores de aniquilación o creación, están relacionados con el momento de la cuerda.

Este caso es ligeramente diferente, se puede comprobar que estos ocho operadores  $d_0^i$ pueden combinarse en cuatro operadores de creación y cuatro operadores de aniquilación. Denominamos  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  y  $\xi_4$  a los cuatro operadores de creación resultantes.

Al tratarse de una combinación de modos cero de oscilación, no contribuyen a la ecuación para la masa (3.27). Esto quiere decir que, partiendo de un vacío único  $|0\rangle$ , tendremos  $2^4 = 16$  estados fundamentales degenerados. La mitad de estos estados tienen

un número par de  $\xi_k$  actuando sobre el vacío, los denotaremos  $|R_a\rangle$  con a = 1, 2, ..., 8. Estos estados son

$$|0\rangle, \ \xi_{1}\xi_{2}|0\rangle, \ \xi_{1}\xi_{3}|0\rangle, \ \xi_{1}\xi_{4}|0\rangle, \ \xi_{2}\xi_{3}|0\rangle, \ \xi_{2}\xi_{4}|0\rangle, \ \xi_{3}\xi_{4}|0\rangle, \ \xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}\xi_{4}|0\rangle.$$
(3.46)

La otra mitad de los estados tienen un número impar de operadores  $\xi_k$  actuando sobre el vacío. Los denotamos  $|R_{\overline{a}}\rangle$  con  $\overline{a} = 1, 2, \dots, 8$  y son

$$\xi_{1}|0\rangle, \ \xi_{2}|0\rangle, \ \xi_{3}|0\rangle, \ \xi_{4}|0\rangle, \ \xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}|0\rangle, \ \xi_{1}\xi_{2}\xi_{4}|0\rangle, \ \xi_{1}\xi_{3}\xi_{4}|0\rangle, \ \xi_{2}\xi_{3}\xi_{4}|0\rangle.$$
(3.47)

El conjunto de todos los estados fundamentales del sector de Ramond se denota  $|\mathbf{R}_A\rangle$ con A = 1, 2, ..., 16. Por tanto, podemos escribir el estado más genérico de este sector como

$$|\psi\rangle_{\mathbf{R}} = (\alpha_{-1}^{i_1})^{n_{i_1}} (\alpha_{-2}^{i_2})^{n_{i_2}} \dots |0; p\rangle \otimes (d_{-1}^{j_1})^{n_{j_1}} (d_{-3}^{j_2})^{n_{j_2}} \dots |\mathbf{R}_A\rangle,$$
(3.48)

La expresión para la masa de los estados tiene exactamente la misma forma que antes, con la diferencia de que estamos usando los operadores de Ramond,  $d_n^i$ . Esto es,

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{n>0} n d_{-n}^{i} d_{n}^{i} - a \right).$$
(3.49)

La constante a en el sector de Ramond ya no va a ser la misma que en el de Neveu-Schwarz. Esto se debe a que ahora nuestro sumatorio de modos de oscilación fermiónicos recorre índices enteros. Por tanto, si ordenamos de forma normal el sumatorio igual que hicimos en (3.29) obtenemos

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} nd_{-n}^{i}d_{n}^{i} = \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{n>0} nd_{-n}^{i}d_{n}^{i} - \frac{D-2}{2} \left(1+2+3+\cdots\right).$$
(3.50)

En este caso podemos recurrir al valor  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  para eliminar la suma divergente. Es decir, tendremos que la contribución de los modos fermiónicos a la constante *a* es

$$a_{\rm R} = -\frac{D-2}{24},\tag{3.51}$$

y en consecuencia

$$a = a_B + a_R = 0. (3.52)$$

Es decir, la expresión final de la masa es

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + \sum_{\substack{i=1\\i\neq p}}^{D-1} \sum_{n>0} n d_{-n}^{i} d_{n}^{i} \right),$$
(3.53)

por lo que todos los estados fundamentales  $|\mathbf{R}_A\rangle$  carecen de masa. Todas las demás excitaciones corresponden a estados con masa.

Igual que en el sector de Neveu-Schwarz, podemos definir el operador  $(-1)^F$  que etiquetará a los estados fermiónicos y bosónicos. De nuevo se debe cumplir que

$$\{(-1)^F, d_n^i\} = 0, \tag{3.54}$$

y elegimos el vacío  $|0\rangle$  como estado fermiónico:  $(-1)^F |0\rangle = -|0\rangle$ .

Por tanto, los ocho estados  $|R_a\rangle$  son fermiónicos y los ocho estados  $|R_{\overline{a}}\rangle$  son bosónicos. Es decir, en el nivel fundamental, los 16 estados sin masa se dividen en ocho estados fermiónicos y ocho bosónicos.

Para la primera excitación tenemos que los estados fermiónicos son  $\alpha_{-1}^i |R_a\rangle$  y  $d_{-1}^i |R_{\overline{a}}\rangle$ y, por otro lado, los estados bosónicos son  $\alpha_{-1}^i |R_{\overline{a}}\rangle$  y  $d_{-1}^i |R_a\rangle$ .

En general, para cada nivel de excitación (para cada masa) tenemos un mismo número de estados fermiónicos y bosónicos. Aplicando los mismos operadores a los estados  $|R_a\rangle$  y  $|R_{\bar{a}}\rangle$  obtenemos dos grupos con la misma cantidad de estados, uno de ellos constituido por estados fermiónicos y el otro por estados bosónicos. Esta es una clara muestra de supersimetría en la hoja de mundo.

Para seleccionar los fermiones espacio-temporales partiendo de los fermiones de la hoja de mundo  $_{\alpha}^{i}$ , necesitamos estados que actúen como espinores. Estos van a ser  $|R_{a}\rangle$  y  $|R_{\overline{a}}\rangle$ , que tienen índices de espinores. Escogemos que los fermiones tengan el mismo valor de  $(-1)^{F} = -1$ , esta se denomina la elección GSO (Gliozzi, Scherk y Olive). De esta forma, definimos los estados para los fermiones espacio-temporales como aquellos estados del sector de Ramond tal que  $(-1)^{F} = -1$ . A este grupo dentro del sector de Ramond se le denomina el sector R-. Como ya vimos antes, el sector R+ (que por extensión es aquel formado por los estados tal que  $(-1)^{F} = 1$ ) contiene exactamente el mismo número de estados en cada nivel que el sector R-.

No tiene sentido buscar fermiones espacio-temporales en el sector de Neveu-Schwarz, ya que no existe ningún estado con índices que se correspondan a espinores (se tiene un único estado fundamental  $|NS\rangle$ ). Es por eso que en este sector buscamos bosones espaciotemporales. La elección que hacemos ahora, manteniendo que todos los estados bosónicos surjan de un mismo valor de  $(-1)^F$ , es  $(-1)^F = 1$ . Al grupo de estos estados, que serán los correspondientes a los bosones espacio-temporales, se le denomina sector NS+. Los primeros estados en este sector son ocho sin masa que se identifican de forma automática con los ochos estados sin masa fermiónicos del primer nivel del sector R-. El resto de estados se identifican de la misma forma, con un número equivalente para cada masa (los valores de las masas también coinciden).

La elección del sector NS+ es clave también para terminar con una de las grandes críticas a la teoría de cuerdas bosónicas, los estados taquiónicos. La elección realizada elimina el estado fundamental con masa imaginaria del sector Neveu-Schwarz, que se encuentra en el sector NS-. Entonces, la teoría planteada con la elección GSO para supercuerdas sobre una D-brana no presenta el problema de la brana inestable que sí tenía la teoría bosónica.

# 3.2. Supercuerdas cerradas

Es importante notar que los campos  $\psi^i_{\alpha}$  no representan las coordenadas espaciotemporales al uso de la cuerda, sino simplemente campos libres añadidos en búsqueda de una teoría supersimétrica. En este sentido,  $\psi^i_{\alpha}(\tau, 0) = \psi^i_{\alpha}(\tau, 2\pi)$  no es la única elección posible para una cuerda cerrada.

Aunque las coordenadas  $X^i$  sí deben ser periódicas (como ya postulamos al tratar la cuerda bosónica), basta con que nuestros campos fermiónicos mantengan la periodicidad de la acción (3.4). Como ambos aparecen de forma cuadrática en  $S_{\psi}$ , las siguientes opciones son válidas:

$$\psi_1^i(\tau,\sigma) = \pm \psi_1^i(\tau,\sigma+2\pi), \qquad \psi_2^i(\tau,0) = \pm \psi_2^i(\tau,\sigma+2\pi). \tag{3.55}$$

Con estas condiciones es directo comprobar que el último término de contorno de (3.9) se anula. Para las condiciones de las supercuerdas abiertas, definimos un único campo fermiónico moviéndose a la derecha (función de  $\sigma^-$ ) aunque podríamos haberlo hecho de forma completamente análoga para un campo moviéndose a la izquierda también. Al cerrar la cuerda, en vez de un único campo dividido en dos sectores, tenemos dos campos a derecha ( $\psi_1^i(\sigma^-)$ ) y a izquierda ( $\psi_2^i(\sigma^+)$ ) que pueden dividirse en dos sectores cada uno. Como antes, al sector en que los campos son periódicos lo llamamos sector de Ramond y a aquel en que los campos son antiperiódicos lo llamamos sector de Neveu-Schwarz. Por tanto, los operadores de creación y aniquilación también se verán divididos en operadores a izquierda ( $\tilde{b}_r^i, \tilde{d}_n^i$ ) y a derecha ( $b_r^i, d_n^i$ ).

En resumen, para cada  $\psi_{\alpha}$  tenemos dos sectores. En total pueden combinarse en cuatro

formas distintas los sectores de los modos a derecha y los de los modos a izquierda:

(NS, NS), (NS, R), (R, NS), (R, R),

donde por convenio se toma el primer sector como el correspondiente a los modos a izquierda ( $\psi_2^i$  en nuestro caso).

Vemos una clara analogía entre esta situación y lo que ocurre entre cuerdas abiertas y cerradas bosónicas, donde en el caso de cuerdas cerradas teníamos modos de oscilación a izquierda y a derecha que se combinaban entre sí ( $\alpha$  y  $\tilde{\alpha}$ ) mientras que las cuerdas abiertas se describían con uno solo de estos modos.

El operador  $(-1)^F$  también se divide en dos dependiendo de la dirección. El operador  $(-1)^{F_L}$  cuenta fermiones a izquierda y el operador  $(-1)^{F_R}$  a derecha. En las supercuerdas abiertas, obteníamos los fermiones espacio-temporales del sector R y los bosones del sector NS. Ahora, obtendremos los fermiones de los sectores (NS, R) y (R, NS) y los bosones de los sectores (NS, NS) y (R, R) (doblemente fermiónico).

Tal y como ocurría antes, para alcanzar una teoría supersimétrica consistente debemos truncar los sectores y quedarnos solo con ciertos estados. Una de las posibles elecciones es la que da lugar a las supercuerdas de tipo IIA:

$$(NS+, NS+), (NS+, R+), (R-, NS+), (R-, R+).$$

Este tipo de cuerdas no tienen estados taquiónicos y sus estados sin masa son combinaciones de los estados sin masa de los diferentes sectores. En supercuerdas cerradas la ecuación para la masa de un estado, como en la teoría bosónica, debe respetar el *level* matching entre los sectores a izquierda y a derecha. Por ejemplo, los estados sin masa del sector (NS+, R+) son

$$b_{-1/2}^{i}|\mathrm{NS}\rangle_{L} \otimes |R_{\overline{a}}\rangle_{R} \otimes |0;p\rangle.$$
 (3.56)

donde los subíndices L y R diferencian las partes a izquierda y a derecha respectivamente de cada estado. La supersimetría se cumple perfectamente, dando un lugar al mismo número de estados fermiónicos y bosónicos para cada masa. Además, se obtiene una teoría equivalente si intercambiamos los papeles de R-y R+, el tipo IIA surge cuando los sectores Ramond para izquierda y derecha tienen signos alternados (independientemente del orden). Cuando tienen el mismo signo, surgen las supercuerdas del tipo IIB, es decir, con la elección de los sectores

$$(NS+, NS+), (NS+, R-), (R-, NS+), (R-, R-),$$

que de nuevo producen una teoría equivalente si en vez de R- usáramos R+.
Otras elecciones, que pasan por tomar el sector NS-, no conducen a supersimetría. Además, todas ellas acarrean consigo el problema de la existencia de estados taquiónicos.

Las teorías de supercuerdas cerradas de tipo II se obtienen combinando copias de supercuerdas abiertas moviéndose a izquierda y derecha. Cuando se combina una cuerda abierta bosónica a izquierda con una supercuerda abierta a derecha surge otro tipo de teorías de supercuerdas cerradas denominadas heteróticas. Hay dos tipos: tipo  $E_8 \times E_8$  y tipo SO(32), que se denotan de esta forma por las simetrías que incluyen.

Tanto las teorías de tipo II como las teorías heteróticas son teorías de cuerdas orientadas (estados invariantes al invertir la orientación de la cuerda). Existe un último tipo de teoría de cuerdas abiertas y cerradas no orientadas que se denomina tipo I.

En resumen, existen cinco tipos de teoría de supercuerdas en diez dimensiones: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, heterótica  $E_8 \times E_8$  y heterótica SO(32). Se ha postulado una teoría, la teoría M, que relaciona estos cinco tipos de supercuerdas y la teoría de supergravedad en once dimensiones, concluyendo que todas ellas parecen ser diferentes perspectivas de una teoría única. Aunque esta teoría cuenta con numerosos problemas sin aún resolver, parece un gran comienzo para el desarrollo de una verdadera teoría del todo que finalmente consiga unificar toda la física.

## Conclusiones

La teoría de cuerdas es una de las propuestas más prometedoras como teoría que unifique todas las interacciones fundamentales, incluyendo la gravedad. A lo largo de este trabajo hemos explorado su planteamiento, comenzando, en el primer capítulo, por la primera de las opciones que se planteó, la teoría de cuerdas bosónicas.

La acción de Nambu-Goto para estas cuerdas surge de forma completamente natural al generalizar el caso de una masa puntual relativista. Además, comprobamos que efectivamente el límite no relativista de esta acción coincide exactamente con lo que obtuvimos en un estudio preliminar no relativista de la cuerda.

La acción de de Nambu-Goto se plantea para una parametrización  $(\tau, \sigma)$  cualquiera, y contiene ciertas invariancias que explotamos enormemente para simplificar el estudio posterior. Estas invariancias se dividen en dos grupos: externas e internas. Aunque la simetría de Poincaré (externa) es fundamental para el buen planteamiento del sistema, son las simetrías internas o gauge las que nos brindan las herramientas necesarias para simplificar el planteamiento original. Partiendo desde la compleja acción de Nambu-Goto, somos capaces de fijar gauges, exprimiendo las invariancias de reparametrización y de Weyl, hasta finalmente llegar a la acción de Polyakov.

Las soluciones a las ecuaciones de movimiento dadas por esta acción tienen un comportamiento ondulatorio que subdivide el análisis en modos a derecha y modos a izquierda. Esta división será solo necesaria cuando trabajemos con cuerdas cerradas, en el caso de cuerdas abiertas todos los modos quedan totalmente representados por un único grupo de coeficientes u operadores.

Al expandir nuestras soluciones en sus diferentes modos de vibración, somos capaces de cuantizar el sistema, definiendo operadores de creación y aniquilación que sitúen a la cuerda en modos de vibración concretos. Esto es completamente lógico ya que la premisa de la que parte la teoría de cuerdas es precisamente la de identificar partículas con modos de vibración de una cuerda relativista sin masa.

Vimos cómo una cuantización directa del sistema, como es la cuantización covariante, conduce a diversos inconvenientes entre los que destaca la existencia de estados con norma negativa o *fantasmas*. Estas dificultades parecen apuntar a que ciertas restricciones que deben exprimirse han sido olvidadas. En este sentido, nos decantamos por realizar la cuantización de una manera diferente, denominada cuantización de cono de luz. Este camino busca cuantizar el sistema después de haber agotado todas sus restricciones o elecciones, en vez de hacerlo de forma directa y genérica. Así, nos encontramos precisamente con aquello que no considera la cuantización covariante: simetría gauge adicional. Esta simetría nos permite fijar dos de los campos completamente, mostrando de forma clara como dos dimensiones de las D originales eran degeneradas y el movimiento podía explicarse completamente con D-2 direcciones físicas que denotamos transversales.

Al cuantizar la cuerda nos encontramos con una serie de estados con distintas masas cuyo valor depende de una cierta constante  $a = \frac{D-2}{24}$ . Esta surge de normal-ordenar las restricciones propias del sistema, representadas por medio de los operadores de Virasoro. Para que nuestra teoría encajase en una teoría de Lorentz completa, fijamos D = 26, el número de dimensiones. Además, posteriormente reforzamos este argumento estudiando la conservación de las cargas de Noether del sistema, llegando exactamente a las mismas conclusiones acerca del número de dimensiones.

En el segundo capítulo, se plantearon las diferencias entre las cuerdas abiertas y cerradas, que residían principalmente en las condiciones de contorno. Comprobamos que las únicas condiciones posibles para las cuerdas abiertas eran las de Neumann y Dirichlet. Además, la combinación de estos dos tipos de condiciones a lo largo de las 26 dimensiones nos llevó a introducir el concepto de D-brana. Las cuerdas abiertas eran entonces cuerdas sobre una brana o ancladas a dos branas en sus extremos, como estudiamos de forma más general.

Observamos que la teoría de cuerdas bosónicas es realmente intuitiva pero acarrea consigo una serie de problemas graves, entre los que destacamos la falta de estados fermiónicos y la existencia de estados taquiónicos, que intentan ser atribuidos a inestabilidades de la brana pero son un indicador de un problemático vacío inestable.

Ante las críticas de la teoría de cuerdas bosónica, surge la teoría de supercuerdas, en que se añade un término extra a la acción que pretende suplir la parte fermiónica de la que carece nuestra teoría original.

La teoría de supercuerdas logra enfrentar los problemas más graves de la teoría bosónica. Por un lado, se introducen estados bosónicos y fermiónicos de forma totalmente simétrica y, por otro, se evitan los posibles estados taquiónicos de la cuerda.

En el último capítulo, planteamos esta teoría de forma muy conceptual. Vimos que plantea un truncamiento justificado de los estados que se corresponden verdaderamente con bosones y fermiones espacio-temporales. Aunque su planteamiento es muy similar al del caso bosónico, la teoría de supercuerdas exigía una dimensionalidad totalmente diferente, D = 10. Las teorías de cuerdas, especialmente las diferentes ramas de la teoría de supercuerdas (tipo I, tipo II o heteróticas) contienen ciertos matices singulares (como la falta de parámetros adimensionales ajustables) que las sitúan como grandes candidatas a una posible teoría unificadora. La teoría M, que mencionamos muy brevemente, ya relaciona todas ellas con una teoría única todavía sin conjeturar y donde puede que resida la solución a la unificación de las fuerzas.

En resumen, a lo largo de este trabajo se ha mostrado de forma mayoritariamente rigurosa la construcción de la conocida teoría de cuerdas. Una vez planteadas sus bases, hay una gran cantidad de cuestiones posteriores a estudiar que hemos dejado sin explorar en este trabajo introductorio. El siguiente paso natural consistiría en abordar las diferentes interacciones entre cuerdas, ya que hasta ahora hemos considerado únicamente cuerdas libres. Más aún, al permitir que la cuerda se propague sobre fondos no necesariamente planos, se abre la posibilidad de estudiar su comportamiento desde la perspectiva de la teoría conforme de campos, cuyas técnicas resultan fundamentales en este contexto.

Además, también es muy relevante estudiar el límite de baja energía de la teoría (es decir, cuando la longitud de la cuerda tiende a cero). Uno de los resultados fundamentales que se derivan de la teoría de supercuerdas es que a bajas energías se corresponde con la teoría de la relatividad general de Einstein en forma supersimétrica (supergravedad), donde las ecuaciones de movimiento coinciden precisamente con las ecuaciones de Einstein.

Por tanto, aunque el camino hacia una teoría completa y verificable de la gravedad cuántica aún presenta numerosos desafíos, la teoría de cuerdas es una gran candidata que ofrece un marco matemáticamente coherente y profundamente sugerente para explorar la estructura última del universo.

## Bibiliografía

- Beibei Chen. "The String Theory: Past and Present". En: (2021). URL: https:// iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/658/1/012002.
- [2] Shing-Shen Chern. "An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface". En: (1955). URL: https://www.jstor.org/stable/2032933.
- [3] Michael Green y John Henry Schwarz. *Superstring Theory.* 2012.
- [4] David Tong. String Theory. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos. 2009.
- [5] Barton Zwiebach. A first course in string theory. 2004.