



Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

Introducción a la Cosmología Inflacionaria

Raúl Enrique Pariente Martín

Supervisado por:

Adolfo Guarino Almeida

George Alestas

Oviedo

Curso 2024-2025

A la memoria de
Juan Pariente Sánchez
y
Teresa Gutiérrez Díaz

If I have seen further, it is by standing
on the shoulders of giants.

Isaac Newton

The universe is under no obligation to
make sense to you.

Neil deGrasse Tyson

Índice

1. Introducción	1
2. Relatividad General	5
3. Cosmología	13
4. Inflación	25
5. Modelos de Inflación	43
6. Perturbaciones Inflacionarias	49
7. α -attractors	61
8. Conclusiones	75
9. Notas y agradecimientos	77
10. Bibliografía	79

1. Introducción

La Cosmología, en palabras de Daniel Baumann, se puede entender como una disciplina añeja y moderna. Se trata de un campo que, desde tiempos inmemoriales, ha fascinado a las mentes inquietas dejando que estas planteen las más enrevesadas cuestiones en lo relativo al origen y estructura del universo. Pese a ello, muchas de estas preguntas no han obtenido una explicación precisa hasta tiempos relativamente recientes. Esto se observa de manera particular en la cuestión del origen del universo, un tema que ha sido objeto de debate filosófico y teológico desde hace milenios, y el cual sólo encontró formulada una propuesta de explicación (científicamente razonable) a principios del siglo XX, con la aparición de la idea del Big Bang como subproducto del descubrimiento de la radiación de fondo de microondas (CMB).

Pese al gran interés que la propuesta del Big Bang suscitó en la comunidad científica, esta era incapaz de dar respuesta a algunas discrepancias que se habían detectado entre sus predicciones teóricas y las observaciones cosmológicas. Estas disonancias entre el mundo teórico y las mediciones experimentales cristalizaron en tres problemáticas principales (el problema del horizonte, el problema de la planitud y el problema de los monopolos) que acabarían por convertirse en el yugo de la teoría del Big Bang durante casi 50 años.

- **El problema del horizonte:** Los investigadores observaron que diversas regiones del cielo que aparentemente se encontraban desconectadas causalmente presentaban temperaturas casi idénticas. La imposibilidad del intercambio de información entre estas regiones con el fin de igualar sus temperaturas fue notado por la comunidad científica y buscó explicación durante años.
- **El problema de la planitud:** Las mediciones experimentales indicaban que nuestro universo era extremadamente plano. Es decir que la densidad del universo debía ser muy cercana al valor crítico (la densidad total del universo que permite su evolución con una geometría aproximadamente plana). No obstante cualquier pequeña desviación de esta densidad crítica se habría amplificado con el tiempo dando lugar a un universo curvado. La necesidad de un ajuste fino (fine tuning) en las condiciones iniciales de nuestro universo para explicar el cosmos que observamos actualmente preocupaba a los investigadores.
- **El problema de los monopolos:** las teorías de gran unificación predicen la existencia de partículas masivas como los monopolos magnéticos, que deberían haber sido abundantes en el universo temprano y que, sin embargo no se han observado en el universo actual.

Estas problemáticas¹ que presentaba el Big Bang motivaron a los cosmólogos a reexplorar su entendimiento del universo temprano y a proponer teorías que reconciasen nuestro entendimiento teórico del origen del universo con las observaciones experimentales.

En este contexto surge la teoría inflacionaria, la cual postula que, en los primeros instantes (10^{-33} segundos) después del Big Bang, el universo experimentó una expansión extremadamente rápida y exponencial. En particular, una pequeña región del universo primitivo se expandió hasta alcanzar un tamaño mucho mayor en una fracción de segundo, suavizando cualquier irregularidad inicial y produciendo un universo homogéneo e isotrópico a gran escala. Además, la inflación amplificó pequeñas fluctuaciones cuánticas que, con el tiempo, dieron lugar a la formación de estructuras cósmicas como galaxias y cúmulos de galaxias.

En su conjunto, la teoría inflacionaria acabó por convertirse en una piedra angular en la cosmología moderna proporcionando un marco coherente y robusto para entender las condiciones iniciales del universo y su evolución temprana. La gran relevancia de esta idea en nuestro entendimiento actual del universo motiva el desarrollo de este trabajo en el cual se pretende plantear un acercamiento sencillo y progresivo a las ideas subyacentes a la inflación. Para ello, partiremos de los conceptos fundamentales de la relatividad general y la cosmología, para luego adentrarnos en las bases teóricas de la inflación, explorar algunos modelos inflacionarios sencillos, analizar las perturbaciones primordiales generadas durante este proceso y, finalmente, introducir la noción de atractores alpha como una herramienta interesante para conectar la dinámica inflacionaria y la teoría de cuerdas.

¹Hemos de indicar que, técnicamente, el problema de la planitud y del horizonte no se pueden presentar completamente como inconsistencias en el modelo estándar cosmológico, puesto que, asumiendo condiciones iniciales del cosmos suficientemente precisas, encontramos un modelo de universo que evoluciona de forma homogénea de acuerdo con las observaciones. No obstante, la necesidad de un ajuste fino en las condiciones iniciales para obtener un modelo adecuado de nuestro universo fue una preocupación latente entre los cosmólogos.

Notación

En este trabajo se utiliza la convención de la métrica $(-, +, +, +)$, de modo que el elemento de línea en el espacio de Minkowski es $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Utilizamos letras griegas para índices espacio-temporales, por ejemplo, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, y letras latinas para índices espaciales, por ejemplo, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Presentamos también una lista de algunas de las variables más comúnmente utilizadas:

- η : tiempo conforme
- τ : tiempo propio
- H : parámetro de Hubble
- $\mathcal{H}$: parámetro de Hubble conforme, $\mathcal{H} = aH$
- h : parámetro de Hubble reducido, $h = \frac{H(t=t_0)}{100 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}}$
- a : factor de escala
- ρ : densidad de energía
- P : presión
- w : parámetro de ecuación de estado, $w = P/\rho$
- k : número de onda comóvil
- T : temperatura
- Ω : densidad fraccional, $\Omega = \rho/\rho_{crit}$
- Ω_m : densidad fraccional de materia
- Ω_r : densidad fraccional de radiación
- Ω_Λ : densidad fraccional de energía oscura
- A_s : amplitud de las fluctuaciones escalares
- A_t : amplitud de las fluctuaciones tensoriales
- n_s : índice espectral escalar
- n_t : índice espectral tensorial
- r : cociente tensor-escalar (tensor-to-scalar ratio)

2. Relatividad General

La teoría clásica de la gravitación, formulada por Isaac Newton en el siglo XVII, ha sido durante mucho tiempo el pilar fundamental de nuestro entendimiento de la interacción entre cuerpos celestes. No obstante, diferentes observaciones astronómicas, como la precesión del perihelio de Mercurio, las lentes gravitacionales y los efectos relativistas que ocurrían con el desvío de la luz por cuerpos masivos, expusieron la necesidad de proporcionar una descripción más completa de la gravedad.

Principios Fundamentales de la Relatividad General

Esta nueva descripción de la gravedad llegaría de la mano de Albert Einstein, asentando sus pilares en el principio de equivalencia, según el cual se formula la indistinguibilidad entre los efectos de una aceleración en un sistema de referencia no inercial y los efectos de un campo gravitatorio. Es decir, se basa en la constatación de que los sistemas de referencia inerciales no son realmente privilegiados sobre aquellos no inerciales, de modo que podemos plantear una descripción de las leyes físicas válida en cualquier sistema de referencia (inercial o no).

Esta idea primordial en la teoría de Einstein permitió extender el principio de relatividad al principio de covariancia, el cual se sustenta en tres postulados fundamentales: la uniformidad de las leyes físicas en cualquier sistema de referencia, la independencia de las coordenadas en las cantidades referentes a magnitudes físicas medibles y la posibilidad de otorgar una descripción inercial local (quizá por medio de la introducción de un campo gravitatorio) a cualquier sistema de referencia, de modo que las leyes físicas para este sean las de la relatividad especial.

Este principio de equivalencia sugiere un abandono de la interpretación de la gravedad como una fuerza, en pro de una descripción de la misma asociada a la geometría del espacio-tiempo. Más concretamente, permite establecer una identificación entre el espacio-tiempo y una variedad pseudo-Riemanniana, de tal manera que exista una correspondencia entre las geodésicas de la misma y las trayectorias de caída libre que produce un campo gravitatorio.

Esta reinterpretación de la teoría de la gravitación culmina con las ecuaciones de Einstein, las cuales son capaces de describir de forma explícita el modo en que la distribución de materia y energía en el espacio-tiempo le indica a este la geometría que debe adoptar, y, a su vez, explican cómo la geometría del espacio-tiempo influye en el desplazamiento de la energía y la materia en él.

La métrica

En el proceso de identificación del espacio-tiempo con una variedad pseudoriemanniana, nos vemos obligados a definir un **tensor métrico** (también conocido como **métrica**), $g_{\mu\nu}$, en cada punto de la variedad. Formalmente, podemos entender esta métrica como un tensor de rango (0,2), diferenciable, simétrico y no degenerado. En términos un poco más generalistas, interpretamos la métrica como un tensor que define el intervalo de línea entre dos eventos infinitesimalmente cercanos. Matemáticamente, dicho intervalo admite una expresión de la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

donde dx^μ y dx^ν son diferenciales de coordenadas, y los índices μ y ν recorren una indexación adecuada correspondiente a la dimensión de la variedad.

Cuando introducimos esta idea en el contexto de la relatividad general, la métrica $g_{\mu\nu}$ se transforma en una herramienta fundamental que describe la geometría del espacio-tiempo en su totalidad. En particular, define cómo se mide la distancia entre puntos en una variedad curva y determina la forma en que las masas y energías influyen en la curvatura del espacio-tiempo.

Símbolos de Christoffel

Una vez hemos introducido el espacio-tiempo en el marco teórico de la geometría diferencial, podemos contextualizar todo el arsenal de herramientas matemáticas que esta teoría nos proporciona, con el fin de obtener un entendimiento profundo de las ideas que la relatividad general plantea.

Una de las nociones de geometría diferencial que podemos introducir en la relatividad general son los **símbolos de Christoffel**. Estos símbolos aparecen de forma natural al intentar entender cómo se deben ajustar las derivadas de los vectores para tener en cuenta la curvatura del espacio. En el contexto de la relatividad general, los símbolos de Christoffel representan las componentes de la conexión afín en un espacio-tiempo; es decir, describen cómo varían los vectores y tensores al trasladarse infinitesimalmente a lo largo de una variedad curva (el espacio-tiempo). Los símbolos de Christoffel adquieren una relevancia particular en la relatividad general dado que, en ausencia de torsión, admiten una definición relativamente sencilla en términos de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas, lo que facilita el estudio de la geometría del espacio-tiempo.

Los símbolos de Christoffel del primer tipo se definen como

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}). \quad (2.2)$$

Los símbolos de Christoffel del segundo tipo, más comúnmente utilizados, se obtienen al elevar un índice

$$\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\beta\gamma\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}). \quad (2.3)$$

En el contexto de la relatividad general, estos símbolos juegan un papel fundamental al definir la derivada covariante y la curvatura del espacio-tiempo.

Geodésicas y Movimiento en Espacio-Tiempo

Recordemos que la relatividad general tiene la pretensión de identificar las trayectorias de caída libre en un campo gravitatorio con las trayectorias que extremizan el intervalo espaciotemporal. Para poder dar una descripción de nuestro espacio-tiempo según la idea anterior, es fundamental entender, en primera instancia, la noción de curva geodésica.

Consideremos $r(s)$ una curva definida en una variedad diferenciable, parametrizada según la longitud de arco. Es claro que, dada esta descripción, los vectores tangentes a la curva en cada punto vienen determinados por la expresión $\dot{\lambda} = \dot{r}(s)$. La condición para que estos vectores mantengan una dirección constante se traduce en la expresión $\frac{d\dot{\lambda}}{ds} = 0$. Esta última condición es precisamente la que caracteriza a las geodésicas en una variedad diferenciable general.

Matemáticamente, una geodésica en un espacio-tiempo curvo también está descrita por la **ecuación geodésica**

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (2.4)$$

donde x^μ son las coordenadas del espacio-tiempo y s es el parámetro afín a lo largo de la geodésica (a menudo, el tiempo propio para partículas).

De forma general, estas ecuaciones de segundo orden requieren de ocho condiciones iniciales para obtener una solución única. Algunas de las condiciones iniciales usuales son un punto de la geodésica y las componentes del vector tangente en dicho punto, o bien los puntos inicial y final de la geodésica.

Observando detenidamente la expresión de la ecuación geodésica en términos de los símbolos de Christoffel, el lector puede hacerse una idea de la gran complejidad que el planteamiento y resolución de las mismas puede tener. Es por ello que merece la pena hacer un pequeño inciso en una forma alternativa de generar la ecuación geodésica. Consideremos el lagrangiano $L(\dot{x}^\gamma, x^\gamma) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x^\gamma)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. Podemos definir las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\gamma} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = 0. \quad (2.5)$$

Se puede demostrar la equivalencia entre las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano anterior y la ecuación geodésica afínmente parametrizada en su forma covariante. (Aunque los detalles técnicos de esta prueba no son de gran relevancia para este trabajo, el lector interesado puede consultar [2] **capítulo 2**).

Volviendo al marco de la relatividad general, una geodésica es una curva en el espacio-tiempo que representa el movimiento libre de una partícula, sin la influencia de fuerzas externas. En otras palabras, es la trayectoria que una partícula sigue cuando sólo está afectada por la curvatura del espacio-tiempo, la cual es causada por la presencia de masa y energía. Siendo más precisos, para partículas con masa, las geodésicas son trayectorias que extremizan el tiempo propio, mientras que, para los fotones, son trayectorias caracterizadas por un intervalo espaciotemporal nulo. En esencia, las geodésicas en relatividad general revelan cómo la curvatura del espacio-tiempo determinan el movimiento de los cuerpos a lo largo del cosmos.

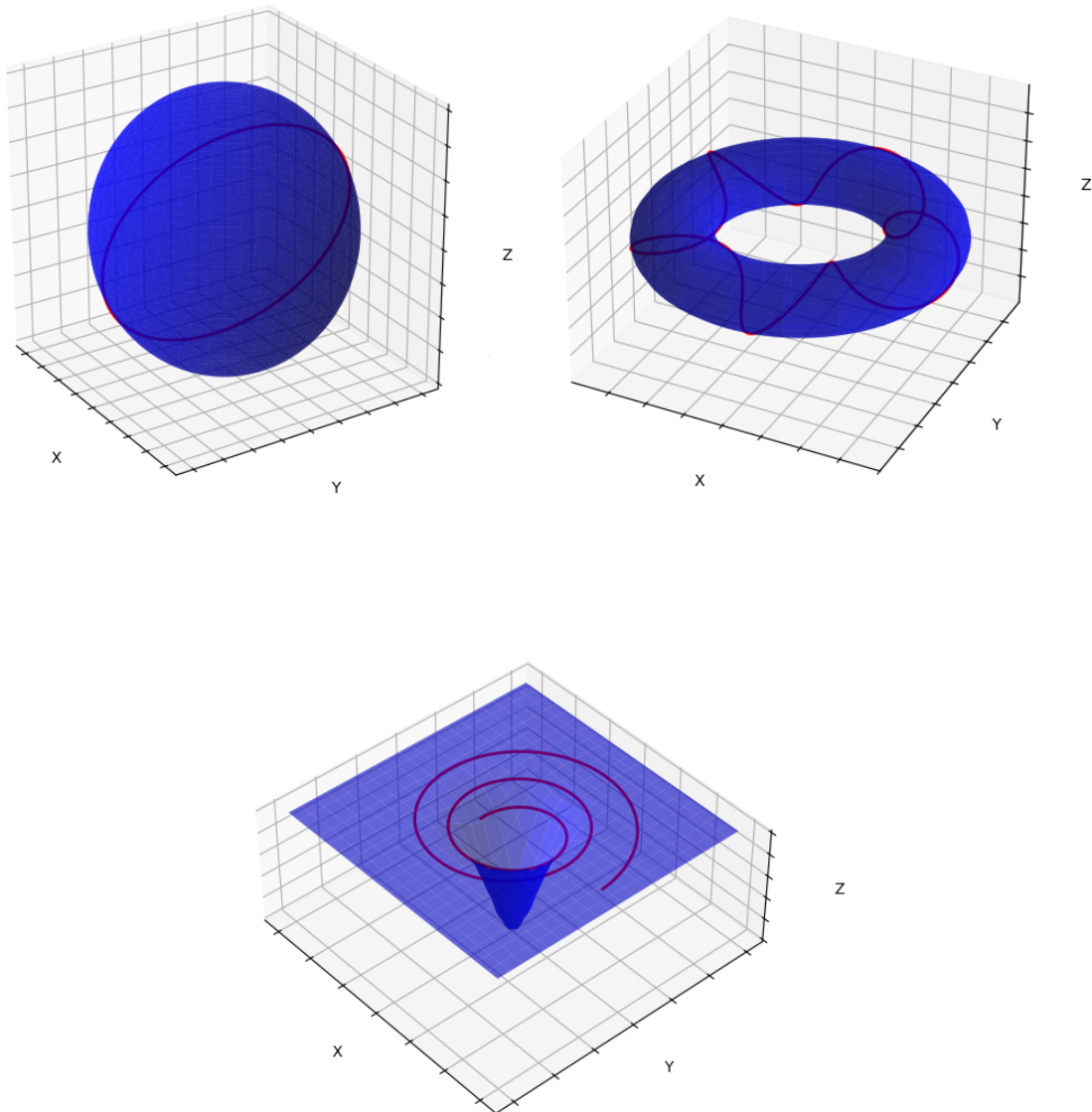
Ejemplos de Geodésicas

A continuación, presentamos una serie de representaciones visuales de geodésicas en diferentes variedades bidimensionales embebidas en $\mathbb{R}^3$, con el objetivo de ilustrar la naturaleza geométrica de estas curvas cuando se aplican a superficies con distintas propiedades métricas y topológicas. Si bien en relatividad general las variedades relevantes son de tipo pseudo-Riemanniano, estos ejemplos euclídeos ofrecen una intuición útil sobre el concepto de geodésica como curva que generaliza la idea de línea recta a espacios curvos.

- **Esfera:** En una superficie esférica, las geodésicas corresponden a los círculos máximos, como los meridianos terrestres. Estas curvas representan los caminos “más cortos” entre dos puntos sobre la esfera.
- **Toro:** En un toro, las geodésicas presentan una variedad de comportamientos que dependen de su dirección inicial. Algunas se cierran sobre sí mismas mientras que otras llenan densamente una región del toro sin cerrarse, mostrando la complejidad introducida por la topología no trivial de esta superficie.

- **Campana Gaussiana bidimensional:** Esta superficie se obtiene rotando una función tipo $z = -e^{-r^2}$ alrededor del eje vertical, generando una forma suave con curvatura variable. Las geodésicas en esta superficie permiten explorar cómo la curvatura local influye en las trayectorias extremales.

Las imágenes que se presentan a continuación tienen como único propósito ilustrar visualmente el concepto de geodésica en contextos geométricos accesibles, sirviendo como un puente intuitivo hacia el estudio más abstracto del movimiento en espacio-tiempo curvo que desarrolla la relatividad general.



Ecuaciones de Campo de Einstein

Como hemos citado anteriormente, la relatividad general cambia radicalmente la interpretación newtoniana en su descripción de la gravedad, buscando explicarla por medio de la propia curvatura del espacio-tiempo. Este enfoque nos obliga a otorgar definiciones más precisas y formales de la noción de curvatura en el marco de la geometría diferencial. Una de las herramientas matemáticas indispensables en el estudio de la curvatura es el **tensor de Riemann**, que constituye una medida de la curvatura intrínseca del espacio-tiempo. En términos matemáticos, este tensor nos permite entender el cambio de orientación en los vectores al sufrir un transporte paralelo alrededor de un bucle infinitesimal en presencia de curvatura. El tensor de Riemann admite una expresión en términos de las conexiones de Christoffel y sus derivadas de la siguiente forma

$$R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}{}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}{}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}{}^{\lambda}. \quad (2.6)$$

Los demás tensores relevantes en el estudio de la curvatura del espacio-tiempo se pueden obtener como contracciones del tensor de Riemann. En primer lugar, podemos definir el **tensor de Ricci** $R_{\mu\nu}$, el cual proporciona una representación simplificada de la curvatura del espacio-tiempo. En particular, este tensor proporciona una medida de cómo se producen las deformaciones volumétricas de pequeñas esferas de partículas libres que siguen una geodésica de un campo gravitacional. Podemos obtener el tensor de Ricci de la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} = R_{\rho\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}. \quad (2.7)$$

El **escalar de Ricci** R es una contracción adicional que proporciona una única medida escalar de la curvatura del espacio-tiempo. Este escalar admite la siguiente expresión

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Una combinación adecuada de los tensores anteriores con la métrica nos permite obtener uno de los dos tensores fundamentales para entender la relación entre materia, energía y curvatura del espacio-tiempo: el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. En términos del tensor de Ricci y la métrica $g_{\mu\nu}$ se tiene

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.9)$$

El segundo tensor que estará en el núcleo de esta descripción del espacio-tiempo será el **tensor de energía-momento** $T_{\mu\nu}$. Pese a que no otorgaremos una explicación detallada del mismo hasta el apartado de cosmología, podemos pensar en él como un tensor capaz de describir la distribución de materia y energía en el espacio-tiempo, así como la manera en que estas afectan a su curvatura.

Estas herramientas matemáticas nos permiten plantear las ecuaciones que relacionan la distribución de masa y energía en el espacio-tiempo con su curvatura. Estas ecuaciones son las conocidas como **ecuaciones de campo de Einstein** y representan el núcleo de la teoría de la relatividad general. Podemos expresarlas como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

De estas ecuaciones se deduce también cómo la curvatura del espacio-tiempo influye en el movimiento de las partículas y de la luz. En esencia, las ecuaciones de Einstein encapsulan la idea de que “la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse”.

La métrica isotrópica estática general

Una vez entendemos la descripción que la relatividad general pretende otorgarnos del espacio-tiempo y conocemos las ecuaciones de campo de Einstein, surge la duda razonable de si existen condiciones bajo las que estas admitan una solución analítica que podamos interpretar obteniendo, en última instancia, la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$. Para dar respuesta a esta pregunta, es interesante comprender primero el comportamiento de la métrica cuando a esta se le imponen ciertas condiciones razonables. En particular, buscaremos dar la descripción más general de una métrica satisfaciendo condiciones de estaticidad e isotropía.

Al asumir un espacio-tiempo estático, estamos imponiendo (en términos algo generales) una cierta simetría bajo la cual nuestro campo gravitatorio no varía con el tiempo. Siendo un poco más rigurosos, un espacio-tiempo estático es aquel para el cual existe una cierta coordenada de tipo tiempo (digamos t) cumpliendo que todas las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son independientes de t y, además, el elemento de línea ds^2 es invariante bajo la transformación $t \rightarrow -t$. Por otro lado, la isotropía de la métrica se asocia a la dependencia del elemento de línea ds^2 únicamente de invariantes rotacionales. Es decir, imponemos uniformidad en las características geométricas para todas las direcciones o, en un tono más físico, pedimos que en nuestro modelo las propiedades del espacio sean iguales en todas las direcciones.

Partiendo de un elemento de línea genérico de la forma $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ podemos traducir las condiciones de isotropía y estaticidad a condiciones matemáticas que restringen la forma de nuestra métrica a la siguiente (véase [22] capítulo 9)

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.11)$$

Ecuaciones de Campo en el Vacío

Aún entendiendo el comportamiento de la métrica bajo ciertas simplificaciones (estaticidad e isotropía) la misión de encontrar soluciones explícitas a las ecuaciones de campo de Einstein se sigue presentando como una tarea hercúlea. Para hacer de este trabajo un encargo un poco más mundano, podemos buscar soluciones con propiedades particularmente beneficiosas, piénsese en simetrías. Este acercamiento es precisamente el que realizó Schwarzschild para encontrar la primera solución a estas ecuaciones.

En particular, obtuvo la expresión explícita de la métrica de un espacio-tiempo estático e isotrópico fuera de una distribución de masa esférica, fuera de la cual solo hay vacío. Para obtener la expresión de la métrica, Schwarzschild tuvo que trabajar con las ecuaciones de Einstein en regiones del espacio-tiempo donde no hay materia ni energía (vacío), de modo que estas ecuaciones se simplifican a

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.12)$$

ya que el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu} = 0$ en el vacío.

Esta restricción devuelve una expresión del elemento de línea de la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.13)$$

En el espacio-tiempo alrededor de un cuerpo esféricamente simétrico y no cargado, como un planeta, una estrella o agujero negro no rotatorio, la métrica de Schwarzschild describe las geodésicas y, por tanto, las trayectorias de partículas y luz en un entorno del mismo.

3. Cosmología

El impacto de la relatividad general trasciende una mera reinterpretación de la gravitación clásica, consolidándose como un pilar fundamental en diversas ramas de la física. En particular, esta teoría constituye el marco teórico esencial para la cosmología moderna, permitiendo describir con precisión la evolución y la estructura del universo a gran escala.

Bajo este enfoque, la relatividad general se ha establecido como el estándar para abordar fenómenos cosmológicos fundamentales, como la expansión del universo y la formación de estructuras. Es por ello que, si buscamos entender la inflación desde el punto de vista de la física moderna, nos veremos obligados a explorar los principios fundamentales de la cosmología moderna desde la perspectiva que ofrece la relatividad general.

Principio de Copérnico, Homogeneidad e Isotropía

Una de las ideas fundamentales sobre la que se basa la cosmología moderna es el **principio de Copérnico**. Este principio es una extensión del principio heliocéntrico original y se puede resumir como la idea de que la Tierra no ocupa una posición privilegiada en el universo. En particular, esto implica que las observaciones desde la Tierra son representativas de las observaciones desde una posición genérica en el universo. En cosmología moderna, este principio se generaliza para afirmar que el universo es **homogéneo** e **isotrópico** a gran escala.

Las nociones de homogeneidad e isotropía admiten tanto descripciones físicas intuitivas como sus contrapartes matemáticas, cuyo carácter es más formal y permiten introducir estos conceptos en el contexto de la teoría de la relatividad general.

- *Homogeneidad*, en un contexto cosmológico, se refiere a la idea de que el universo, en una escala suficientemente grande, es uniforme. Esto significa que tanto las propiedades físicas, como la densidad de materia y la temperatura, son esencialmente las mismas en todas las regiones del universo. En otras palabras, no hay un lugar privilegiado en el universo. Matemáticamente, la homogeneidad implica que las funciones que describen las propiedades del universo son invariantes bajo traslaciones espaciales, es decir, la homogeneidad implica que dados dos puntos cualesquiera p, q en el espacio, existe una isometría llevando p a q .
- *Isotropía*, en un contexto cosmológico, se refiere a la idea de que el universo, en escalas suficientemente grandes, tiene la misma apariencia en todas las direcciones. Esto significa que no importa en qué dirección miremos desde cualquier punto del universo; las propiedades físicas y las observaciones son las mismas. Matemáticamente, la isotropía implica que las propiedades físicas del universo son invariantes bajo

rotaciones, es decir, la isotropía implica que para cualquier punto p en la variedad Riemanniana M que define el espacio y para cualesquiera v, w vectores unitarios en $T_p M$ (el plano tangente a la variedad en p) existe una isometría de la variedad verificando que la imagen de v por la diferencial de dicha isometría sea w .

Estos conceptos que hemos introducido son fundamentales, puesto que simplifican la descripción matemática del universo, permitiendo el uso de métricas y estructuras matemáticas manejables en nuestros modelos cosmológicos. Es por ello que conviene hacer un último comentario que justifique el uso de estas suposiciones. En general, no es trivial justificar la homogeneidad y la isotropía del universo cuando contamos con un único punto de observación (la Tierra). Sin embargo, desde el punto de vista matemático, se puede demostrar que una variedad suficientemente regular que sea isótropa en todo punto también debe ser homogénea.

Además, existe una amplia gama de observaciones que respaldan la idea de isotropía. Si a esto le sumamos la asunción de que no ocupamos una posición privilegiada en el universo, es decir, que cualquier otro observador debería percibir una estructura igualmente isotrópica, obtenemos un argumento sólido que nos permite aceptar simultáneamente ambas condiciones: homogeneidad e isotropía.

Espacios Tridimensionales Homogéneos e Isotrópicos

En esta sección comenzaremos a estudiar algunas de las consecuencias que podemos obtener basándonos en las hipótesis dispuestas anteriormente, bajo las cuales, nuestro marco de estudio es un universo homogéneo e isotrópico. No obstante, antes de proceder, se debe hacer el pequeño inciso de que estas propiedades se refieren únicamente al carácter espacial de nuestro cosmos. Es decir, no podemos considerar la homogeneidad e isotropía temporal de nuestro universo puesto que este evoluciona con el tiempo. Este hecho se hace tangible al observar que la expansión de nuestro universo impide que la densidad y temperatura de este sean constantes. Una vez realizada esta pequeña digresión podemos proceder a estudiar el modo en que las condiciones de homogeneidad e isotropía afectan a nuestro modelo teórico de espacio-tiempo.

Variedades simétricas tridimensionales

Las hipótesis de homogeneidad e isotropía que imponemos en nuestro espacio-tiempo nos permiten asegurar que este puede descomponerse en secciones espaciales temporalmente ordenadas de manera que cada una de ellas sea homogénea e isótropa. Estas secciones, formalmente, son variedades diferenciables tridimensionales M_t homogéneas e isótropas.

Esta observación nos permite realizar algunas deducciones relevantes. En primera instancia, nuestra representación del espacio-tiempo en base a una secuencia de variedades tridimensionales indexadas por un subíndice continuo (tiempo) nos permite escribir el elemento de línea cuatridimensional como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dl^2 \quad (3.1)$$

Donde $dl^2 = \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j$ es el elemento de línea en M_t y donde $a(t)$ es el **factor de escala** que describe la expansión del universo.

Además de imponer restricciones sobre la forma del elemento de línea, las propiedades de homogeneidad e isotropía en cada una de nuestras variedades nos garantizan el cumplimiento de algunas propiedades. Por ejemplo, la homogeneidad implica que la curvatura escalar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ coincide para cualquier par de puntos de M_t . Es decir,

$$R(p) = R(q) \quad (3.2)$$

para cualesquiera puntos $p, q \in M_t$. En consecuencia, el escalar de curvatura debe ser constante en toda la variedad. Es conveniente notar que esta propiedad no impone restricciones sobre la variación de otros tipos de curvatura en la variedad. En particular, puede haber variaciones de la curvatura seccional según la dirección.

Por otro lado, cuando juntamos la isotropía, que garantiza la invariancia rotacional, con la homogeneidad, que garantiza la invariancia traslacional, obtenemos que cada una de las variedades M_t será maximalmente simétrica. Lo que nos indica que, no sólo la curvatura escalar será constante, sino que, además, en un espacio de dimensión n , el tensor de Ricci será proporcional a la métrica

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{n} R g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

y el tensor de curvatura de Riemann estará dado por

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}). \quad (3.4)$$

Donde diremos que $K = \frac{R}{n(n-1)}$ es el parámetro de curvatura. Estas condiciones nos indican que las variedades tridimensionales con las que estamos trabajando tienen lo que se suele conocer como curvatura intrínseca constante. Este hecho limita notoriamente los objetos de estudio que tenemos que considerar como posibles variedades tridimensionales M_t . De hecho, sólo debemos analizar tres casos. Aquellos en que la curvatura de cada una de las secciones M_t en que separamos el espacio-tiempo sea positiva, en los que es negativa y, finalmente, en los que la curvatura es nula.

Esto da lugar a las siguientes posibilidades de espacio.

- **Espacio plano** ($k = 0$): Si una cierta variedad tridimensional como las descritas previamente M_t tiene curvatura nula, entonces podemos asignarle un elemento de línea análogo al del espacio euclídeo tridimensional

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.5)$$

- **Espacio esférico** ($k = +1$): Alternativamente si M_t presentase una curvatura positiva y constante siempre se le puede asociar un elemento de línea (por paralelismo al de la esfera S^3 contenida en un espacio euclídeo cuatridimensional) de la forma

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + du^2, \quad \mathbf{x}^2 + u^2 = R_0^2. \quad (3.6)$$

Donde R_0 es el radio de la esfera.

- **Espacio hiperbólico** ($k = -1$): Por último si M_t presenta una curvatura negativa entonces se le puede asignar un elemento de línea por paralelismo con la geometría del hiperboloide H^3 contenido en el espacio de Lorentz cuatridimensional $\mathbb{R}^{1,3}$

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 - du^2, \quad \mathbf{x}^2 - u^2 = -R_0^2. \quad (3.7)$$

Donde $R_0^2 > 0$ es una constante determinando la curvatura del hiperboloide.

Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

Los elementos de línea anteriores pueden reescribirse adecuadamente de modo que las tres casuísticas se expresen de forma compacta

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + k \frac{(x \cdot dx)^2}{R_0^2 - k\mathbf{x}^2}. \quad (3.8)$$

Otra forma de expresar este elemento de línea, haciendo más aparentes las simetrías del espacio, es mediante la utilización de las coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ)

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - k \frac{r^2}{R_0^2}} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.9)$$

Donde hemos utilizado que $d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = r dr$ y que $\mathbf{x}^2 = r^2$. Además, hemos definido $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ la métrica en la esfera unidad bidimensional.

Si introducimos este elemento de línea general en la expresión (3.1) de la métrica en un universo con homogeneidad e isotropía espacial (a grandes escalas) obtenemos la métrica de **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)**

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (3.10)$$

Notemos que nuestro elemento de línea tiene simetría de reescalado, es decir, las transformaciones $a \rightarrow \lambda a, r \rightarrow \frac{r}{\lambda}, R_0 \rightarrow \frac{R_0}{\lambda}$ mantienen invariante ds^2 . En otras palabras, un reescalado simultáneo de a, r y R_0 conserva la geometría del espacio-tiempo. Este hecho nos permite fijar el valor que toma el factor de escala en un tiempo dado. Por simplicidad, en general se suele tomar que el factor de escala en el tiempo actual $t = t_0$ tiene valor unitario $a(t_0) = 1$. En este caso, R_0 representaría la escala de curvatura en el tiempo presente.

Además, se suele decir que la coordenada r es una **coordenada comóvil**. Una coordenada que claramente no representa un observable debido a la libertad que tenemos para su reescalado. La expresión del elemento de línea nos indica que al trabajar con coordenadas comóviles, la distancia entre dos puntos en un universo en expansión se mantiene constante. Esencialmente, las coordenadas se expanden con el universo, lo que significa que las distancias comóviles dejan de representar las distancias físicas entre objetos, las cuales crecen de manera proporcional al factor de escala. En otras palabras, los resultados físicos sólo pueden depender de la **coordenada física** $r_{fis} = a(t)r$.

De este modo, un objeto con una trayectoria $r(t)$ en coordenadas comóviles y $r_{fis} = a(t)r$ en coordenada físicas presentará una velocidad que se puede expresar del siguiente modo

$$\mathbf{v}_{fis} \equiv \frac{d\mathbf{r}_{fis}}{dt} = \frac{da}{dt} \mathbf{r} + a(t) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv H\mathbf{r}_{fis} + \mathbf{v}_{pec}, \quad (3.11)$$

donde hemos introducido el **parámetro de Hubble**

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.12)$$

Esta expresión hace notorio que la velocidad física de un objeto en nuestro espacio-tiempo tiene dos contribuciones. En primera instancia, tenemos el término Hr_{fis} conocido como **flujo de Hubble**, este termino corresponde con la velocidad de un cuerpo resultante de la propia expansión que está sufriendo el universo entre el punto de observación y el objeto. El segundo término v_{pec} conocido como **velocidad peculiar** hace referencia a la velocidad medida por un observador comóvil, es decir, describe el desplazamiento del objeto respecto del sistema de referencia cosmológico en reposo.

Tiempo Conforme

Para facilitar el análisis de la evolución del universo, a menudo usamos el **tiempo conforme** (η) junto con las coordenadas comóviles. El tiempo conforme se define como

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.13)$$

Esta nueva descripción temporal nos permite reformular la métrica FLRW del siguiente modo

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-c^2 d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (3.14)$$

La expresión de ds^2 deja claro que nuestra métrica se puede separar en una parte estática y otra dependiente del factor conforme $a(\eta)$. Esta forma de la métrica es especialmente conveniente al estudiar la propagación de la luz, para la cual se verifica $ds^2 = 0$.

Materia y energía como fluido perfecto

En muchos modelos cosmológicos se interpretan la materia y energía del universo como un **fluido perfecto**. Es decir, se entienden como un sistema físico que puede ser completamente caracterizado por su densidad de masa en el sistema de referencia en reposo y por su presión isotrópica. Esta interpretación de la materia y la energía resulta en simplificaciones matemáticas que permiten resolver las ecuaciones de la relatividad general con cierta facilidad. Esto nos muestra que este modelo aporta una aproximación realista y resoluble del comportamiento del universo al considerar distribuciones de materia y energía a grandes escalas. Es conveniente notar que la construcción de nuestro modelo se encuentra en consonancia con el principio cosmológico (el cual postula la homogeneidad e isotropía del universo a gran escala) dado que este es un estado bien descrito por un fluido sin viscosidad, conducción del calor ni tensiones de cizalla.

Para entender el comportamiento de un fluido perfecto que modela la materia y la energía, es conveniente tener una cierta intuición sobre el significado físico de las componentes de un tensor algo más general. Para ello, debemos recordar que la estructura usual del tensor de energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} T_{00} & T_{0j} \\ \hline T_{i0} & T_{ij} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \text{Densidad de energía} & \text{Densidad de momento} \\ \hline \text{Flujo de energía} & \text{Tensor de tensión} \end{array} \right). \quad (3.15)$$

Las forma de este tensor general puede estudiarse al imponer requerimientos de homogeneidad e isotropía. Esta necesidad de consistencia con el principio cosmológico nos permite obtener información explícita sobre la forma que tienen las componentes de un tensor de energía-momento que pueda describir nuestro universo. Por ejemplo, sabemos que la homogeneidad del universo requiere de una densidad de energía independiente de la posición, lo que se traduce en $T_{00} = \rho(t)c^2$. Además, la isotropía hace que, necesariamente, los valores promedio de los vectores tridimensionales sean nulos en el sistema de referencia comóvil, ergo $T_{i0} = T_{0j} = 0$.

Siguiendo una línea de deducciones similar a las presentadas anteriormente, podemos determinar que un tensor de energía-momento que se encuentre en consonancia con las propiedades de homogeneidad e isotropía del universo debe poder expresarse de la forma

$$T^\mu_\nu = g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{array} \right), \quad (3.16)$$

donde ρc^2 y P son la densidad de energía y la presión del fluido (medidas en el sistema de referencia en reposo). Este tensor coincide con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto en el sistema de referencia de un observador comóvil.

Finalmente, damos una expresión más general del tensor de energía-momento en su forma covariante

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

donde U_μ es la cuadrivelocidad relativa entre el fluido y el observador.

Ecuaciones de Friedmann

De forma general, todos los fluidos perfectos que presentan un carácter relevante en el estudio de la cosmología atienden a una ecuación de estado que admite una forma muy específica $P = \omega \rho c^2$.

Este hecho nos permite ahondar en el estudio de la componente cero de la ecuación de conservación de la energía. Para ello, escribimos explícitamente

$$0 = \nabla_\mu T^\mu_0 = -\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right). \quad (3.18)$$

Uniendo la expresión anterior con nuestra ecuación de estado, podemos obtener una nueva ecuación de la conservación de la energía, la **ecuación de continuidad**

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.19)$$

Cuya integración devuelve soluciones de la forma $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$.

Podemos ahora (basándonos en [3] **capítulo 8**) contextualizar esta expresión para algunos fluidos relevantes en cosmología. El primero de ellos será la **materia**, entendiendo materia como un fluido cuya presión es despreciable en comparación con su densidad de energía. Esta descripción nos permite imponer $\omega = 0$. De modo que, para un universo cuya densidad de energía sea mayoritariamente materia (universo dominado por materia), tenemos una densidad de energía que se comporta como $\rho \propto a^{-3}$. Lo que puede interpretarse como el decrecimiento en la densidad de partículas a medida que el universo se expande. (El volumen de una región del espacio aumenta proporcionalmente a a^3 mientras que la energía en dicha región permanece constante).

Otro ejemplo especialmente interesante de fluido siguiendo la relación anterior es la **radiación**. Entendemos como radiación tanto radiación electromagnética como partículas masivas moviéndose a velocidades relativas suficientemente cercanas a la de la luz como para que se puedan considerar “indistinguibles” de fotones. Siendo un poco más generalistas, podemos definir la radiación como “cualquier cosa” para la cual se verifique $P = \frac{1}{3}\rho c^2$, es decir, $\omega = \frac{1}{3}$.

Un universo para el cual la mayoría de la densidad de energía se encuentra en forma de radiación se conoce como universo dominado por radiación. Para este tipo de universo, la densidad de energía se comporta como $\rho \propto a^{-4}$. Con ello comprobamos que la densidad de energía para la radiación decae más rápido que para la materia. Este hecho encuentra explicación al notar que esta “dilución” de la energía se debe no solo a la expansión ($V \propto a^3$) sino también al redshift de la energía de las partículas ($E \propto a^{-1}$).

Para comprender nuestro universo estos dos fluidos no son suficiente. Es por ello que se introduce la noción de **constante cosmológica**, una forma de energía-momento del vacío. La aparición de esta noción modifica las ecuaciones de campo de Einstein para que adopten la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.20)$$

donde se ha introducido a las ecuaciones de campo de Einstein un tensor de energía-momento al vacío, el cual, en combinación con (3.17), nos muestra la aparición de una presión negativa

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

Con ello, estamos introduciendo un nuevo fluido que obedece la misma ecuación de estado que los dos anteriores, pero con $\omega = -1$. En este caso, la densidad de energía resulta ser independiente de a , es decir, no existe una dilución de la energía a medida que el universo se expande. Esto es precisamente lo que se esperaría de una densidad de energía del vacío. Esta observación implica que la energía debe generarse conforme el universo se expande, lo cual no contradice la conservación de la energía, siempre que se cumpla la ecuación (3.19).

Notemos que, en un universo en expansión, una energía del vacío no nula tiende a imponerse ante los otros tipos de energía (a largo plazo y siempre que el universo no empiece a contraerse). En este caso, decimos que el universo está **dominado por vacío** lo que implica $\rho \propto a^0$.

Hemos de hacer una pequeña digresión llegados a este punto puesto que también es común en la literatura de la cosmología introducir la noción de **energía oscura**. Esta energía se interpreta como un fluido un poco más general que los presentados previamente, cuya ecuación de estado no se corresponde exactamente con la de una constante cosmológica. En concreto, se le suele atribuir $\omega \approx -1$ e incluso se le permite variar en el tiempo. No obstante, a día de hoy no hay evidencias fuertes que muestren una desviación de $\omega = -1$, por lo que en muchas ocasiones se utilizan los términos energía del vacío, constante cosmológica y energía oscura de forma intercambiable.

Dada la existencia de diferentes fluidos que pueden formar parte de la composición del cosmos, parece razonable pensar que universos con diferentes tipos de energía predominante se comportarán de formas diferentes. Para solidificar esta intuición, podemos presentar las ecuaciones de Friedmann, encargadas de describir la evolución del factor de escala $a(t)$ en función del contenido del universo. Estas ecuaciones se pueden derivar de las ecuaciones de campo de Einstein aplicadas a un universo homogéneo e isotrópico.

La **primera ecuación de Friedmann** aporta una descripción alternativa del parámetro de Hubble, lo que la convierte en la ecuación fundamental para describir la evolución del factor de escala

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2}. \quad (3.22)$$

Donde ρ debe entenderse como la suma de todas las contribuciones a la densidad de energía del universo.

La **segunda ecuación de Friedmann** se puede deducir de la parte temporal de la ecuación de Einstein, y nos aporta información sobre la naturaleza del ratio de expansión del universo.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right). \quad (3.23)$$

Estas ecuaciones nos permiten hacer las siguientes observaciones sobre tres tipos de universo.

En un universo dominado por materia (como el que esperamos en épocas posteriores al desacoplamiento del fondo cósmico de microondas), la densidad de energía es mayoritariamente debida a la materia, y $\rho \propto a^{-3}$. En este caso, la primera ecuación de Friedmann se simplifica a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3} - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2}. \quad (3.24)$$

Esta tendencia aproximada de la ecuación implica que las soluciones para nuestro factor de escala son de la forma $a(t) \propto t^{2/3}$. En otras palabras, un universo dominado por materia da lugar a una expansión desacelerada del cosmos ($\ddot{a} \propto -\frac{2}{9}t^{-4/3} < 0$).

En un universo dominado por radiación (como nuestro universo en sus primeras etapas), la densidad de energía es mayoritariamente debida a la radiación, y $\rho \propto a^{-4}$. Esto nos permite simplificar la primera ecuación de Friedmann para que adopte la siguiente forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-4} - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2}. \quad (3.25)$$

Esta tendencia aproximada de la ecuación implica que las soluciones para nuestro factor de escala son de la forma $a(t) \propto t^{1/2}$. Es decir, un universo dominado por radiación da lugar a una expansión aún más desacelerada ($\ddot{a} \propto -\frac{1}{4}t^{-3/2} < 0$).

Finalmente, en un universo dominado por vacío, la densidad de energía es constante y se debe a la constante cosmológica, ergo $\rho = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$. De este modo, la primera ecuación de Friedmann se simplifica a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\frac{\Lambda c^2}{8\pi G} - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2}. \quad (3.26)$$

Esta tendencia aproximada de la ecuación implica que las soluciones para nuestro factor de escala son de la forma $a(t) \propto e^{Ht}$. En otras palabras, un universo dominado por vacío presenta una presión negativa, como se deduce en la ecuación (3.21), cuya intensidad produce una expansión acelerada del universo.

Densidad Crítica

La discusión anterior sobre las ecuaciones de Friedmann nos permite hacer una observación interesante. Si consideramos la primera ecuación de Friedmann y fijamos las condiciones de un universo plano ($k=0$), la expresión (3.22) nos devuelve

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.9 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ gramos } cm^{-3} \approx 1.1 \cdot 10^{-26} kg \text{ m}^{-3}.$$

Donde el subíndice cero hace referencia a cantidades evaluadas en tiempo $t = t_0$, es decir, evaluadas en el tiempo actual. Esta cantidad $\rho_{c,0}$ que acabamos de introducir se conoce como **densidad crítica** y nos muestra la densidad de energía necesaria para que el universo sea plano. En particular, $\rho_{c,0}$ permite definir unos parámetros de densidad adimensionales de la forma

$$\Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}} \quad (3.27)$$

donde i puede ser radiación (r), materia (m), energía del vacío (Λ) y otras contribuciones de interés. Entonces, introduciendo un parametro de “densidad” de curvatura $\Omega_{k,0} = \frac{-kc^2}{(R_0 H_0)^2}$, la ecuación (3.22) puede expresarse como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{k,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (3.28)$$

Evaluando ambos lados de la ecuación de Friedmann en el tiempo presente, con $a(t_0) = 1$, se obtiene la restricción

$$1 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{k,0} + \Omega_{\Lambda,0} = \Omega_0 + \Omega_{k,0}. \quad (3.29)$$

De esta forma, podemos escribir el parámetro de curvatura como

$$\Omega_{k,0} = \frac{-kc^2}{(R_0 H_0)^2} = 1 - \Omega_0. \quad (3.30)$$

Esto implica que, si somos capaces de medir los parámetros involucrados en la ecuación de Friedmann (3.28) y, por tanto, de determinar la composición del universo, también podríamos deducir el valor de k y la geometría del universo en que nos encontramos.

4. Inflación

La teoría de la inflación cósmica es una de las piezas fundamentales del modelo estándar de cosmología moderna. Introducida por Alan Guth en 1981, la inflación se refiere a un período extremadamente breve y acelerado de expansión que ocurrió en los primeros instantes del universo, aproximadamente entre 10^{-36} y 10^{-32} segundos después del Big Bang. Esta teoría surge para resolver varios problemas fundamentales del modelo del Big Bang, como el problema del horizonte, el problema de la planitud y el problema de los monopolos magnéticos (como ya habíamos indicado previamente en este trabajo).

Durante la fase inflacionaria, el universo se expandió a un ritmo exponencial debido a la presencia de uno o varios campos escalares cuyas energías potenciales dominaban la dinámica del cosmos. Esta expansión ultrarrápida no solo explica la uniformidad observada en la temperatura del universo (resolviendo el problema del horizonte) sino que también justifica por qué el universo actual parece ser tan plano (resolviendo el problema de la planitud) y por qué no observamos monopolos magnéticos (resolviendo el problema de los monopolos).

Uno de los aspectos más notables de la teoría inflacionaria es su capacidad para generar las semillas de las estructuras cosmológicas que observamos hoy en día. Las fluctuaciones cuánticas que ocurrieron durante la inflación se ampliaron a escalas macroscópicas debido a la rápida expansión, convirtiéndose en las anisotropías primordiales que más tarde dieron lugar a la formación de galaxias y cúmulos de galaxias. Estas fluctuaciones han sido observadas en el espectro de la radiación cósmica de fondo, proporcionando evidencia sólida a favor de la inflación.

La inflación también predice una distribución particular de las anisotropías en el CMB, que ha sido confirmada por experimentos y observaciones, como las realizadas por los satélites COBE, WMAP y Planck. Estas observaciones no solo apoyan la existencia de un periodo inflacionario, sino que también proporcionan información crucial sobre las condiciones del universo en sus primeros momentos.

Otra implicación clave de la inflación es que proporciona un marco para entender cómo el universo evoluciona hacia un estado de equilibrio térmico. Al finalizar la fase inflacionaria, la energía del campo inflacionario se transforma en partículas y radiación, calentando el universo y marcando el inicio de la era de radiación caliente descrita por el modelo estándar del Big Bang. Aunque esta transición y su estudio teórico presentan numerosos aspectos de gran interés, no serán abordados en detalle a lo largo de este texto.

Problemáticas del Big Bang

Una vez entendemos la noción de inflación es necesario revisitar las problemáticas que motivaron el planteamiento de esta teoría en primer lugar con el fin de mostrar la utilidad del establecimiento de este periodo de expansión en nuestro entendimiento de la evolución del universo.

Numerosos textos relevantes en la cosmología moderna proporcionan análisis y estudios detallados sobre estos problemas (véase [1] **capítulo 4**). Sin embargo, en el presente trabajo se propondrá una explicación de índole cualitativa, que permita, en todo caso, comprender la importancia de abordar el fenómeno de la inflación y de desarrollar una teoría robusta que ofrezca una descripción cuantitativa adecuada del mismo. Es especialmente ilustrativo entender gráficamente la casuística que planteamos.

Comencemos por recordar que el **problema del horizonte** señala cómo la gran homogeneidad del Fondo Cósmico de Microondas entra en conflicto con la noción de causalidad. Este hecho se hace tangible al notar que el tiempo conforme transcurrido entre la singularidad inicial y la formación del CMB es relativamente corto en comparación con la edad conforme del universo actual. Esto implica que somos capaces de observar fotones provenientes de direcciones opuestas en el firmamento, originarios de regiones causalmente desconectadas, y que, a pesar de ello, presentan temperaturas esencialmente idénticas (ver figura 1).

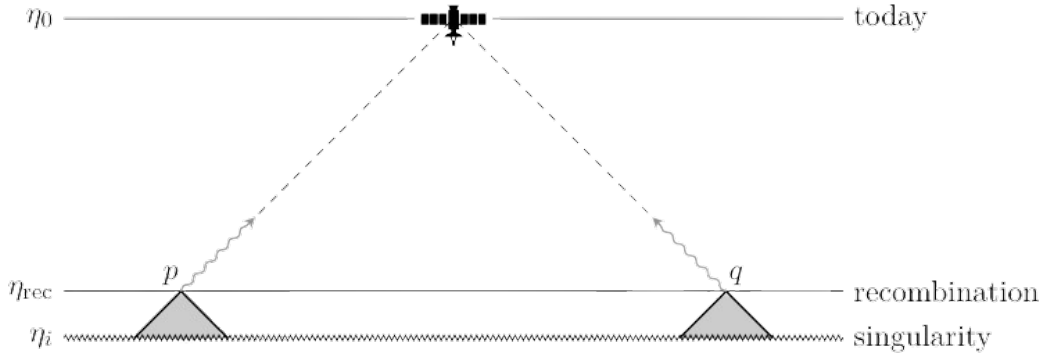


Figura 1: Ilustración del problema del horizonte. Imagen tomada de [1] **pág 141**.

La teoría de la relatividad nos permite analizar la conexión causal de regiones del espacio tiempo por medio del estudio de conos de luz. Expresando la afirmación anterior a modo de ecuación, diremos que la máxima distancia $d_h(\eta)$ desde la que un observador genérico puede haber recibido información viajando a la velocidad de la luz emitida en un instante de tiempo t_i es

$$d_h(\eta) = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_i}^a \frac{da}{a\dot{a}} = \int_{\ln a_i}^{\ln a} (aH)^{-1} d \ln a, \quad (4.1)$$

En ocasiones a esta distancia se le otorga el nombre **horizonte de partículas** (comovil). Si consideramos que el Big Bang comenzó con la singularidad inicial $t_i = 0$, entonces las igualdades previamente planteadas admiten distintas interpretaciones según el marco teórico en el que se analicen. Desde la perspectiva del modelo estándar de la cosmología del Big Bang, la última integral estará dominada por contribuciones en tiempos tardíos, lo que lleva a la relación

$$d_h(\eta) \sim (aH)^{-1}. \quad (4.2)$$

Por otro lado, bajo la teoría inflacionaria, se postula la existencia de un período de expansión acelerada en el que el **radio de Hubble** (la distancia a la cual un punto se aleja de un observador a la velocidad de la luz debido a la expansión del universo), $(aH)^{-1}$, decrece con el tiempo. Como consecuencia, la contribución principal a la integral proviene de tiempos tempranos, permitiendo la existencia de un horizonte de partículas mayor que el radio de Hubble

$$d_h(\eta) \sim (a_i H_i)^{-1} \geq (aH)^{-1}. \quad (4.3)$$

Esta última interpretación es suficiente para resolver el primero de los problemas que enfrenta la teoría del Big Bang, como se ilustra en la figura 2.

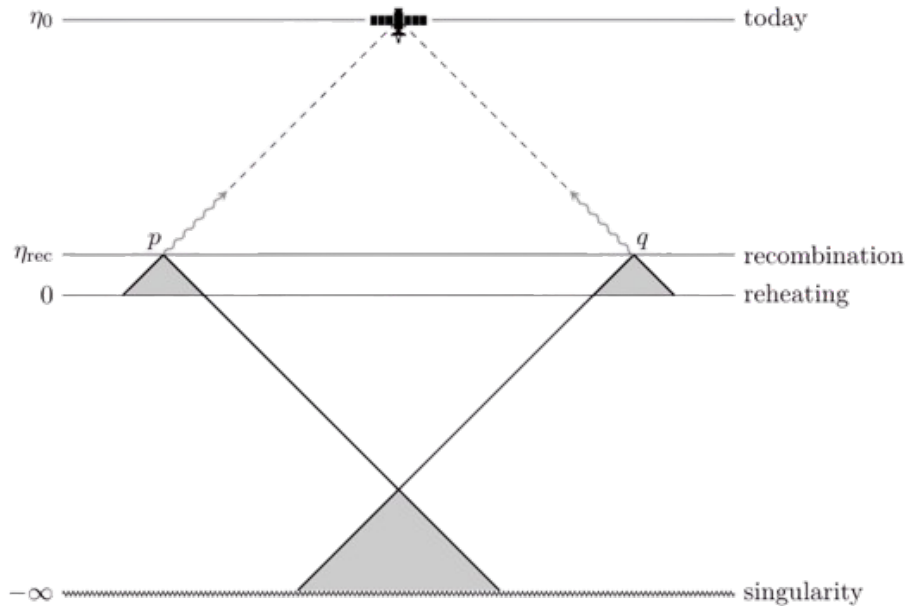


Figura 2: Solución inflacionaria al problema del horizonte. Imagen tomada de [1] **pág 147**.

Por otro lado, recordamos que el **problema de la planitud** hace referencia a la cuestión de por qué el universo actual parece extraordinariamente plano, cuando cualquier pequeña desviación inicial de la planitud habría crecido con el tiempo. A nivel teórico, se suele entender el problema de la planitud por medio de la **curvatura dependiente del tiempo**

$$\Omega_k(t) = \frac{\rho_{\text{crit}} - \rho}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{(a_0 H_0)^2}{(aH)^2} \Omega_{k,0}. \quad (4.4)$$

Esta curvatura está relacionada con las observaciones actuales del CMB, las cuales sugieren una cota $|\Omega_{k,0}| \leq 0.005$ (un valor extremadamente pequeño). Este hecho se muestra aún más sorprendente si consideramos que, asumiendo un radio de Hubble creciente, tendríamos valores de $|\Omega_k(t)|$ aún menores en tiempos pasados. Si queremos dar algunas estimaciones explícitas, podemos dar los valores de esta curvatura (véase [1]) durante la nucleosíntesis del Big Bang o en la fase de transición electrodébil

$$|\Omega_k(t_{BBN})| \leq 10^{-16},$$

$$|\Omega_k(t_{EW})| \leq 10^{-30}.$$

Estos valores, aunque posibles, requieren de un ajuste extremadamente preciso (“fine tuning”) que, como ya comentamos al inicio de este trabajo, no acababan de convencer a la comunidad científica.

Reconciliar estos datos experimentales con la teoría es sencillo si, nuevamente, tenemos en cuenta que la inflación permite la existencia de un periodo donde el radio de Hubble decrece. Notemos que la expresión

$$\Omega_k(t) = \frac{(a_i H_i)^2}{(aH)^2} \Omega_k(t_i) \quad (4.5)$$

nos muestra que durante un periodo en el que el radio de Hubble decrezca, también lo deberá hacer la curvatura. Implícitamente, deducimos que las cotas observacionales sobre la curvatura son fácilmente entendibles siempre y cuando haya existido un periodo inflacionario suficientemente prolongado.

En términos generales, se suele entender que las dos problemáticas aquí presentadas son motivación suficiente como para necesitar un periodo de inflación (un periodo con un radio de Hubble decreciente). No obstante, siempre se puede argumentar que todos los “ajustes finos” que observamos en el universo no son un suceso extremadamente improbable, puesto que homogeneidad y planitud son las opciones más sencillas y simétricas que una teoría de condiciones iniciales puede plantear.

Es por ello que, además de las problemáticas planteadas anteriormente es conveniente introducir, al menos, el **Problema de las Correlaciones Superhorizontales**. Un problema que escapa de las explicaciones que se limitan a establecer condiciones iniciales sencillas. Este problema hace referencia al hecho de que el universo está lleno de fluctuaciones que están correlacionadas a distancias aparentemente acausales.

Este problema queda perfectamente retratado en [1], donde se consideran las fluctuaciones observadas en el fondo cósmico de microondas y en la estructura a gran escala. En dicha referencia, se muestra la figura 3, la cual ilustra de manera sencilla la evolución de una fluctuación representativa de longitud de onda λ en relación con el radio de Hubble $(aH)^{-1}$. En coordenadas comóviles, la longitud de onda λ permanece fija mientras que el radio de Hubble crece (según la teoría del Big Bang). Esto implica que cualquier fluctuación que hoy se encuentre dentro del radio de Hubble estuvo fuera de él en tiempos suficientemente tempranos.

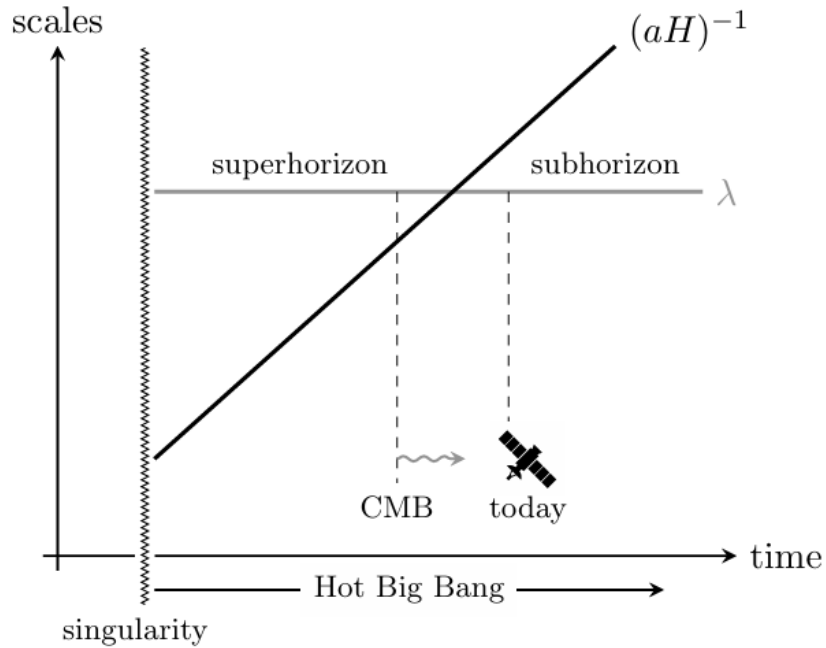


Figura 3: Evolución de una fluctuación de longitud de onda (comóvil) fija λ relativa al radio de Hubble. Imagen tomada de [1] **pág 145**.

En el modelo estándar del Big Bang, el radio de Hubble es aproximadamente igual al horizonte de partículas, por lo que, considerando que el horizonte de partículas en la época de la recombinación era de aproximadamente 265 Mpc, deducimos que las escalas mayores a esta no habrían estado dentro del horizonte antes de que se formara el fondo cósmico de microondas. Sin embargo, encontramos que las fluctuaciones del CMB están correlacionadas en escalas mayores que este horizonte aparente.

Este problema constituye una especie de versión moderna del problema del horizonte donde no solo el CMB es homogéneo en escalas aparentemente acausales, sino que también presenta fluctuaciones correlacionadas en dichas escalas.

Nuevamente, podemos encontrar una solución al problema propuesto considerando una época con un radio de Hubble decreciente. En particular, este periodo inflacionario explica cómo las fluctuaciones observadas en el CMB pueden estar correlacionadas en escalas aparentemente superhorizonte. Si observamos la figura 4, notamos cómo (en caso de que la inflación dure suficiente) una fluctuación comóvil fija puede comenzar dentro del horizonte, permitiendo procesos causales que generen correlaciones no triviales, para posteriormente abandonar el horizonte (de modo que, a día de hoy, sean medidas como correlaciones superhorizonte en el CMB).

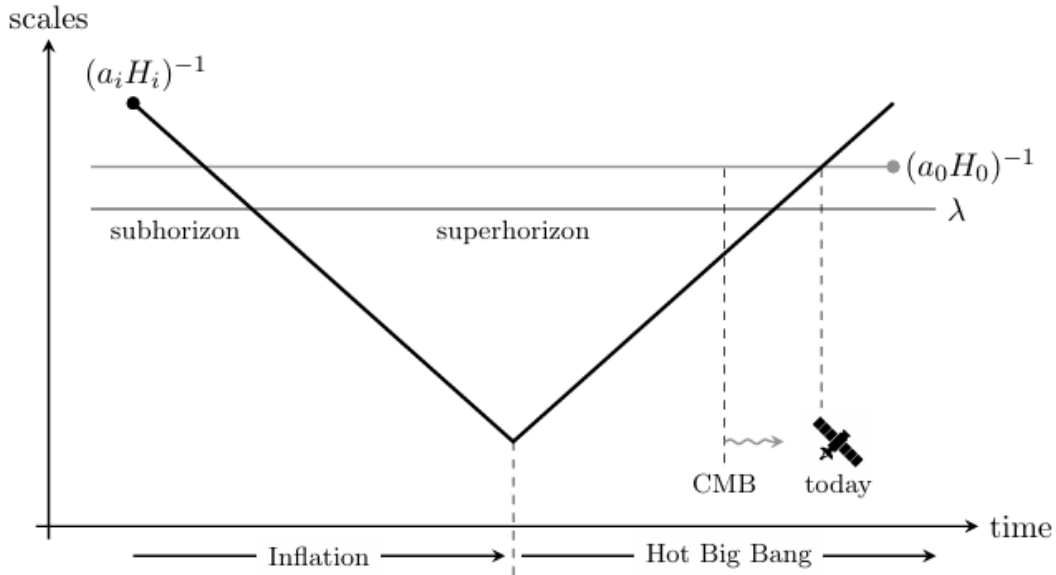


Figura 4: Evolución de una fluctuación de longitud de onda (comóvil) fija λ relativa al radio de Hubble según el modelo de inflación. Imagen tomada de [1] **pág 150**.

La física de la inflación

La pequeña introducción de esta sección hace aparente que una teoría que reconcilie la idea del Big Bang con las observaciones experimentales pasa necesariamente por ofrecer una respuesta convincente a los problemas de la planitud y del horizonte. Según las descripciones observadas previamente, estos problemas apuntan convincentemente al creciente radio comóvil de Hubble como artífice del conflicto entre la teoría clásica de origen del universo y los datos actuales.

Este problema se ha podido resolver en ambos casos gracias a un acercamiento algo “naive”, en el que consideramos permisible la existencia de una fase en el universo temprano en la que tenemos un radio de Hubble decreciente. Una teoría bajo esta hipótesis está admitiendo un periodo para el que se verifica

$$\frac{d}{dt} (aH)^{-1} < 0. \quad (4.6)$$

Esta sencilla ecuación que plasma la idea de la contracción de la esfera de Hubble es lo que algunos autores, como Daniel Baumann, entienden como definición fundamental de inflación. Pese a la fachada sencilla que muestra este concepto, lleva escondidos tras de sí las fascinantes bases de la teoría inflacionaria si se contextualiza adecuadamente en el marco de la cosmología. Trabajemos un poco esta expresión con el fin de asentar algunos conceptos clave que nos acompañarán durante el resto de nuestro estudio de la teoría inflacionaria. Comencemos por reescribir el término izquierdo de la desigualdad haciendo explícita la derivada temporal

$$\frac{d}{dt} (aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon), \quad (4.7)$$

donde bautizamos ϵ como el “**parámetro de slow-roll**”. Este admite la siguiente forma

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN}, \quad (4.8)$$

si tomamos $dN = d \ln a$. Antes de proceder a estudiar las implicaciones de la expresión anterior, conviene hacer una pequeña digresión con el fin de aclarar el significado físico que se puede obtener del parámetro N que hemos introducido. En los textos clásicos de cosmología inflacionaria se suele llamar a N **número de e-folds**. Integrando en la expresión diferencial podemos expresar N como

$$N = \ln \left(\frac{a_{final}}{a} \right), \quad (4.9)$$

donde a_{final} representa el factor de escala en el momento final de la inflación y a es el factor de escala en un tiempo arbitrario durante la inflación.

Razonando un poco, se puede observar cómo, físicamente, N es una especie de medida logarítmica de la expansión del universo inflacionario, que nos indica el número de veces que nuestro factor de escala a se ha multiplicado por e . Si introducimos esta información en el contexto de la ecuación de las distancias en un universo en expansión, $r(t) = a(t)r_0$, observamos de manera directa que, en un periodo inflacionario, tras N e-folds, la distancia física en el universo habría aumentado en un factor e^N .

Una vez entendemos el significado de N , podemos retornar nuestra atención a interpretar la ecuación (4.7) de la variación del radio de Hubble. En primera instancia, deducimos que un periodo inflacionario requiere de una derivada negativa, o lo que es lo mismo, plantear un periodo de inflación requiere $\epsilon < 1$. Expresado de forma equivalente, un periodo de inflación solo es compatible con una etapa del universo en la que las variaciones fraccionales del parámetro de Hubble, $\frac{\Delta H}{H}$, son pequeñas por cada e-fold de expansión, ΔN .

Una consideración interesante que se debe realizar en este punto es el hecho de que, para que la teoría inflacionaria resuelva los problemas que motivaron su formulación, no solo necesitamos que exista un periodo de inflación, sino que además este sea lo suficientemente extenso (40-60 e-folds) como para resolver los problemas de la planitud y del horizonte. Además, necesitamos que la inflación se detenga en algún momento. Podemos traducir el comportamiento que esperamos del universo en términos de nuestro recién adquirido parámetro ϵ . Para ello, observamos que necesitamos un periodo suficientemente largo en el que ϵ se mantenga pequeño, de modo que permita al universo atravesar una época de expansión acelerada. También necesitamos un posterior aumento de ϵ hasta alcanzar un valor unitario, dado que justo este valor representa el cambio de signo de $\frac{d}{dt}(aH)^{-1}$, y en consecuencia, marca el final de la inflación.

Para controlar matemáticamente estas condiciones que planteamos, resulta interesante formalizar un **segundo parámetro de slow-roll**

$$\kappa = \frac{d \ln \epsilon}{dN} = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}. \quad (4.10)$$

Este nuevo parámetro será el encargado de que ϵ sea pequeño por un tiempo suficientemente grande. Se puede lograr una interpretación un poco más explícita de κ atendiendo a que

$$\frac{d\epsilon}{dN} = \kappa\epsilon. \quad (4.11)$$

De este modo, vemos que valores pequeños del parámetro ($|\kappa| \leq 1$) aseguran que el cambio fraccional de ϵ por e-fold sea pequeño. Es decir, dado que κ afecta directamente a la variación de ϵ , y ϵ debe mantener su valor pequeño, podemos sintetizar las condiciones necesarias para la inflación en $|\kappa| \leq 1$ y $\epsilon \leq 1$.

Podemos concluir, por tanto, que aunque la inflación describe una fase de expansión extremadamente rápida del universo, los parámetros que la caracterizan deben evolucionar de manera lenta para que el proceso sea sostenido y coherente con las condiciones requeridas.

Dinámica del Campo Escalar

Una vez entendemos los conceptos subyacentes a la idea de inflación, podemos buscar una descripción matemática sencilla que permita una interpretación correcta del fenómeno. En términos generales, los modelos inflacionarios más sencillos suelen encontrar un elemento común, la implementación de la dinámica durante la inflación por medio de un campo escalar $\phi(t, x)$ conocido como **inflatón**, al cual se le asocia una densidad de energía cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ y una densidad de energía potencial $V(\phi)$.

Para poder entender la evolución de este campo en nuestro universo, debemos plantear la acción generalizada de ϕ en un espacio-tiempo FRW en expansión donde, por simplicidad, consideraremos curvatura espacial nula, $k = 0$.

$$S = \int dt d^3x a^3(t) \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2a^2(t)}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (4.12)$$

Notemos que en esta acción aparecen los términos relativos a la densidad de energía cinética del campo, la densidad de energía potencial y un término gradiente asociado a las variaciones espaciales de $\phi(t, x)$. Además, el hecho de considerar explícitamente un universo en expansión nos obliga a introducir una corrección en las coordenadas comóviles (y, por ende, también en los gradientes) que tenga en cuenta dicha expansión. Más explícitamente, tenemos que manifestar la dependencia de la métrica con el factor de escala de modo que las cantidades geométricas queden adecuadamente representadas en el contexto de la expansión del universo.

Inicialmente, hemos introducido el inflatón como un campo de la forma $\phi(t, x)$; no obstante, asumiremos inicialmente que, a primer orden, $\phi(t, x) = \phi(t)$, es decir, que el inflatón es un campo homogéneo. Esta aproximación nos permitirá entender la dinámica general de ϕ con la idea de estudiar posteriormente el comportamiento de fluctuaciones en el mismo.

Considerando la simplificación que la homogeneidad del campo supone, podemos reescribir la acción anterior de la forma

$$S = \int dt d^3x a^3(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (4.13)$$

Una vez que conocemos la expresión de S , podemos intentar entender el comportamiento del campo sabiendo que el “camino físico” seguido por nuestro sistema es aquel que extrema la acción. Es decir, esperamos que las variaciones de la acción bajo transformaciones pequeñas del campo, de la forma $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, atiendan al principio de mínima acción, de manera que se cumpla $\delta S = 0$. Si calculamos de forma explícita $\delta S = 0$ obtenemos

$$\delta S = \int dt d^3x a^3(t) \left[\dot{\phi} \delta\dot{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi \right] = \int dt d^3x \left[-\frac{d}{dt} (a^3 \dot{\phi}) - a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \delta\phi, \quad (4.14)$$

donde hemos despreciado el término de frontera al integrar por partes. Además, dado que la igualdad del principio de mínima acción se satisface independientemente de la variación inducida en el campo, podemos concluir que la cancelación de la integral anterior requiere de un integrando nulo. Es decir, el término entre corchetes deberá ser igual a cero o, dicho de otro modo, se deberá verificar la igualdad conocida como **ecuación de Klein-Gordon**

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (4.15)$$

Como primera interpretación de esta ecuación, podemos decir que la ecuación de Klein-Gordon nos permite describir la evolución del inflatón en base a tres términos principales. Primero, la aceleración del campo $\ddot{\phi}$, que muestra cómo cambia el valor del inflatón a lo largo del tiempo. Segundo, el término $3H\dot{\phi}$, que representa el “arrastre” causado por la expansión del universo, ralentizando la evolución del campo debido a la expansión del espacio-tiempo (en ocasiones a este término se le atribuye el nombre de **fricción de Hubble**). Y, finalmente, el término $\frac{\partial V}{\partial \phi}$, que es la “fuerza” derivada del potencial del inflatón, determinando cómo se mueve el campo dependiendo de su energía potencial. Este último término es clave para generar la expansión acelerada del universo durante la inflación. En conjunto, estos términos muestran cómo el inflatón evoluciona bajo la influencia de la expansión del universo y su propio potencial, impulsando la inflación cósmica.

Aún podemos obtener un poco más de información en lo que respecta a ϕ y a su evolución. Para ello, supondremos que en un momento dado, ϕ domina la dinámica del universo y observaremos qué consecuencias tiene este hecho.

Basándonos en la acción para el caso del campo homogéneo, es natural proponer que la expresión para la densidad de energía no sea más que la suma de las contribuciones procedentes de las densidades de energía cinéticas y potenciales. Es decir,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (4.16)$$

Sabemos que la expresión de ρ_ϕ puede introducirse en las ecuaciones de Friedmann para la expansión del universo, de modo que obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{total}} = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2}\rho_\phi \quad (4.17)$$

donde en la última igualdad estamos considerando que, en unidades naturales, se satisface la identidad $8\pi G = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2}$. Si estudiamos el comportamiento de la derivada temporal para esta expresión en conjunto con la ecuación de Klein-Gordon encontramos que

$$\dot{\rho}_\phi = \left(\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \dot{\phi} = -3H\dot{\phi}^2. \quad (4.18)$$

Comparando este resultado con la ecuación de continuidad $\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + P_\phi)$, inferimos que, necesariamente, la presión inducida por el campo tiene la forma

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.19)$$

Un hecho que conviene remarcar de las expresiones anteriores es que, si la energía cinética del campo es mucho menor que su energía potencial, entonces $P_\phi \approx -\rho_\phi$, donde el potencial inflacionario estaría actuando entonces como una constante cosmológica temporal (la cual impulsa un periodo de expansión exponencial). También es relevante notar que las expresiones anteriores determinan la aceleración de la expansión, $\ddot{a} \propto -(\rho_\phi + 3P_\phi)$.

Slow-Roll Inflation

Los apartados anteriores nos han permitido plantear un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en base a las ecuaciones de Friedmann y Klein-Gordon que determinan el comportamiento de ϕ y de H . Es de nuestro interés entender adecuadamente las relaciones que estas expresiones nos muestran y plantear las simplificaciones pertinentes que nos permitan determinar las condiciones necesarias para que se produzca un periodo inflacionario.

Las dos ecuaciones de interés son

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right], \quad (4.20)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (4.21)$$

Este sistema de ecuaciones muestra que H y ϕ están intrínsecamente acoplados. En particular, se observa que la tasa de expansión del universo está determinada por la energía del inflatón, mientras que la evolución de ϕ está modulada por H a través del término de fricción de Hubble. Una consecuencia relevante (que cobrará importancia más adelante en el texto) de estas ecuaciones es que un valor elevado de la energía potencial $V(\phi)$ conduce a una tasa de expansión H grande, lo que, a su vez, genera una evolución más lenta del inflatón debido al efecto amortiguador del término $3H\dot{\phi}$.

Una vez hecha una primera interpretación de las ecuaciones, podemos trabajar con ellas en busca de relaciones que se satisfagan en nuestro modelo de inflación. Si partimos de la ecuación de Friedmann y derivamos respecto al tiempo, obtenemos

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \dot{\phi} \left(\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \right). \quad (4.22)$$

Sustituyendo la ecuación de Klein-Gordon en el término derecho podemos deducir

$$2H\dot{H} = \frac{\dot{\phi}}{3M_{Pl}^2} (-3H\dot{\phi}). \quad (4.23)$$

Simplificando la ecuación anterior, llegamos a una expresión que explica la evolución del parámetro de Hubble

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{Pl}^2}. \quad (4.24)$$

Con esta recién adquirida relación, ahora disponemos de expresiones tanto para $\dot{H}$ como para H^2 . Esto nos permite, al tomar el cociente entre ambas, obtener una expresión para el parámetro de slow-roll ϵ .

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{Pl}^2 H^2} = \frac{\frac{3}{2} \dot{\phi}^2}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V}. \quad (4.25)$$

Recordando las condiciones de inflación ($\epsilon \ll 1$) que hemos introducido a lo largo de esta sección, podemos ligar la existencia de un periodo inflacionario con un periodo donde la contribución a la densidad de energía total, $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V$, por parte de la densidad de energía cinética, $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, sea pequeña. Esta observación es lo que otorga a esta casuística el nombre de **inflación de lento rodamiento** o, por su nombre inglés, **slow-roll inflation**.

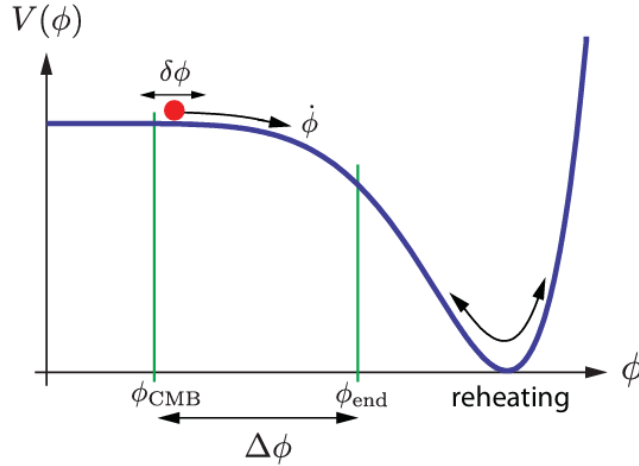


Figura 5: Ejemplo de un potencial de inflatón. La inflación ocurre cuando la energía potencial del campo, $V(\phi)$, domina sobre su energía cinética, $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. En el momento del recalentamiento, la densidad de energía del inflatón se convierte en radiación. Imagen tomada de [4] **pág 31**.

Si, además, queremos buscar condiciones que aseguren la existencia de un periodo de inflación prolongado en el tiempo, necesitaremos entender cómo varía el parámetro ϵ . Para ello, podemos tomar derivadas temporales en la ecuación anterior para obtener

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\phi}^2}{M_{Pl}^2 H^2} \left(-\frac{\dot{H}}{H} + \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) = \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{M_{Pl}^2 H^2} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{M_{Pl}^2 H^3}. \quad (4.26)$$

Aunque podríamos intentar estudiar la expresión anterior de manera directa, es conveniente describir también el segundo parámetro de slow-roll como combinación de las expresiones de ϵ y de $\dot{\epsilon}$

$$\kappa = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} = \frac{2}{H} \left(-\frac{\dot{H}}{H} + \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) = 2\epsilon - 2\delta = 2(\epsilon - \delta). \quad (4.27)$$

Donde hemos introducido un nuevo parámetro δ que expresa la aceleración adimensional por tiempo de Hubble del campo escalar

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \quad (4.28)$$

Al revisar nuevamente las condiciones de inflación sobre los parámetros de *slow-roll*, $\{\epsilon, |\kappa|\} \ll 1$, podemos concluir que la existencia de un periodo inflacionario prolongado requiere que se cumpla $\{\epsilon, |\delta|\} \ll 1$.

Slow-roll Approximation

Una vez entendemos el régimen de los parámetros de slow-roll que permiten la existencia de una época de inflación ($\{\epsilon, |\delta|\} \ll 1$), podemos visitar las ecuaciones que hemos escrito hasta el momento con el fin de simplificarlas acorde a la casuística que queremos estudiar. Para ello, debemos recordar que las condiciones de inflación requieren de una densidad de energía cinética pequeña en comparación con la densidad de energía potencial. Estos hechos nos permitirán despreciar las contribuciones de la densidad de energía cinética a la densidad de energía total, así como la derivada segunda de ϕ o el parámetro δ , según corresponda. Aplicando estas simplificaciones, llegamos a una expresión para la ecuación de Friedmann (4.20) de la forma

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_{\text{Pl}}^2}. \quad (4.29)$$

De manera similar, podemos obtener una versión simplificada de la ecuación de Klein-Gordon (4.21) bajo la suposición de que el valor de δ es pequeño en módulo. Esto se puede expresar en la siguiente ecuación

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{dV}{d\phi}. \quad (4.30)$$

A partir de esta aproximación (4.30), podemos derivar ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo para conseguir una expresión más detallada que describa la evolución temporal de ϕ . Al hacerlo, obtenemos

$$3H\ddot{\phi} + 3\dot{H}\dot{\phi} = -V_{,\phi\phi}\dot{\phi}, \quad (4.31)$$

donde $V_{,\phi\phi}$ denota la segunda derivada del potencial con respecto al campo ϕ . Siguiendo con este análisis, dividimos ambos términos de la ecuación por $3H^2\dot{\phi}$, lo que nos permite reorganizar la expresión en una forma más manejable. Al hacerlo, encontramos

$$\delta + \epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \approx M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V}. \quad (4.32)$$

Las relaciones que acabamos de obtener también nos permiten definir unos **parámetros de slow-roll potenciales** ϵ_V, η_V cuyas expresiones dependen íntegramente del potencial

$$\epsilon_V = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2 H^2}, \quad (4.33)$$

$$\eta_V = M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \approx \epsilon + \delta. \quad (4.34)$$

Por lo tanto, dado que en el régimen de slow-roll $\epsilon_V \approx \epsilon$ y $\eta_V \approx 2\epsilon - \frac{1}{2}\kappa$, una forma conveniente de juzgar si un potencial dado $V(\phi)$ puede llevar a la inflación de slow-roll es estudiar si los parámetros de slow-roll potenciales toman valores mucho menores que la unidad.

Podemos hacer unas últimas observaciones en lo relativo a estas aproximaciones. En primera instancia, notamos que la inflación termina cuando las condiciones de slow-roll se violan, es decir, cuando se cumple

$$\epsilon(\phi_{\text{end}}) \approx 1, \quad \epsilon_V(\phi_{\text{end}}) \approx 1. \quad (4.35)$$

Además, si consideramos que en el régimen de slow-roll $\{\epsilon_V, |\eta_V|\} \ll 1$ se cumplen (4.29) y (4.30) encontramos que el factor de escala evoluciona como

$$a(t) \sim e^{Ht}. \quad (4.36)$$

Un espacio-tiempo que presenta este tipo de evolución se conoce como **espacio de de Sitter**.²

²El hecho de encontrar un espacio-tiempo que es aproximadamente de Sitter no debería ser una sorpresa. Recordemos que al inicio de esta sección habíamos visto que

$$\frac{d}{dt} (aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon).$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, la dinámica se vuelve invariante bajo traslaciones temporales, $H = \text{cte}$, y el espacio-tiempo es un **espacio de Sitter**

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} d\mathbf{x}^2.$$

Finalmente, podemos encontrar una forma sencilla de expresar el número de e-folds que atraviesa nuestro universo en expansión

$$N_{\text{tot}} \equiv \int_{a_i}^{a_e} d \ln a = \int_{t_i}^{t_e} H(t) dt = \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi, \quad (4.37)$$

donde t_i y t_e están definidos como los tiempos inicial y final de la inflación. En el régimen de slow-roll, podemos usar $\epsilon \approx \epsilon_V$ para escribir la integral sobre el espacio de campos como

$$N_{\text{tot}} \approx \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V}} \frac{|d\phi|}{M_{\text{Pl}}}, \quad (4.38)$$

donde ϕ_i y ϕ_e son los valores del campo en los límites del intervalo donde $\epsilon_V < 1$.

El valor absoluto en la medida de integración en (4.38) indica que elegimos el signo general de la integral de tal manera que $N_{\text{tot}} > 0$. Como hemos visto anteriormente, una solución al problema del horizonte requiere $N_{\text{tot}} \gtrsim 60$, lo que proporciona una importante restricción sobre los modelos inflacionarios exitosos.

Recalentamiento del universo

Uno de los aspectos fundamentales que debe abordarse en una teoría inflacionaria completa es el mecanismo mediante el cual el universo transiciona desde la fase inflacionaria hacia una fase dominada por partículas del Modelo Estándar: este proceso se conoce como **recalentamiento** (o **reheating**). La comprensión detallada de esta etapa resulta tan relevante como técnicamente compleja, y su tratamiento riguroso podría desviar el foco de este trabajo hacia una dirección distinta a la principal. No obstante, dada su importancia en el contexto cosmológico, se dedica esta sección a dar una descripción cualitativa del fenómeno (que sigue las líneas de la explicación dada en [5] capítulo 2). El lector interesado puede consultar referencias adicionales dentro de [1], especialmente en la **página 167**.

Un punto clave de nuestra teoría inflacionaria está en que la mayor parte de la densidad de energía durante la inflación está en la forma del potencial del inflatón $V(\phi)$. Este potencial es intercambiado por densidad de energía cinética a medida que el campo evoluciona hacia el mínimo de su potencial, cerca del cual (cuando la pendiente del potencial aumenta) la época inflacionaria llega a su fin. La energía contenida en el campo del inflatón debe transferirse eventualmente a las partículas del Modelo Estándar, dando origen a un universo caliente y dominado por radiación, lo que establece el preámbulo de la nucleosíntesis primordial. Este proceso (el **recalentamiento**) representa el inicio efectivo del universo descrito por el modelo del Big Bang.

Cuando el inflatón está cerca del mínimo de su potencial, este no exhibe un comportamiento estático, sino que permanece oscilando alrededor del punto de equilibrio. Cerca del mínimo, el potencial puede aproximarse por una expansión cuadrática como $V(\phi) \approx \frac{1}{2}m^2\phi^2$, y la ecuación de movimiento del inflatón toma la forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi. \quad (4.39)$$

La densidad de energía del inflatón evoluciona de acuerdo con la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi = -3HP_\phi = -\frac{3}{2}H(m^2\phi^2 - \dot{\phi}^2), \quad (4.40)$$

donde el término del lado derecho promedia a cero en un período de oscilación. Este promedio ignora la fricción de Hubble en la ecuación del movimiento del inflatón (lo cual es razonable a escalas de tiempo cortas en comparación con el tiempo de expansión). En este régimen, el inflatón oscilante se comporta como materia sin presión, con $\rho_\phi \propto a^{-3}$ y a medida que la densidad de energía disminuye, la amplitud de las oscilaciones también disminuye.

Para evitar que el universo termine completamente vacío, el inflatón debe acoplarse a los campos del Modelo Estándar. Este acoplamiento permite que la energía del inflatón se transfiera a partículas ordinarias. Si la tasa de decaimiento es lenta, la densidad de energía del inflatón sigue la ecuación

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi = -\Gamma_\phi\rho_\phi, \quad (4.41)$$

donde Γ_ϕ parametriza la tasa de decaimiento del inflatón. Un decaimiento lento del inflatón típicamente ocurre si el acoplamiento es solo a fermiones. Si el inflatón también decae en bosones la tasa de decaimiento puede ser aumentada por efectos como la condensación de Bose. Este tipo de decaimiento se llama **precalentamiento**, ya que los bosones son creados lejos del equilibrio térmico.

Las partículas creadas interactúan entre sí y eventualmente alcanzan un estado térmico que caracteriza el inicio del Big Bang. La densidad de energía al final de la fase de recalentamiento es $\rho_R < \rho_{\phi,e}$, donde $\rho_{\phi,e}$ es la densidad de energía al final de la inflación, y la temperatura de recalentamiento T_R está determinada por

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30}g_*(T_R)T_R^4. \quad (4.42)$$

Si el recalentamiento toma mucho tiempo, entonces $\rho_R \ll \rho_{\phi,e}$ y la temperatura de recalentamiento se hace más pequeña. En cualquier caso, como mínimo, se requiere que la temperatura de recalentamiento sea mayor que 1 MeV para no comprometer la nucleosíntesis primordial (aunque este valor podría ser más grande si queremos asegurar la existencia de la bariogénesis).

Aunque la explicación anterior es especialmente sencilla, resulta útil para ofrecer una visión general del proceso de recalentamiento. Es oportuno subrayar, una vez más, la relevancia de describir esta etapa en la historia del universo, ya que constituye una de las piezas fundamentales para entender el origen del Big Bang.

Las escalas de energía relacionadas con el final de la inflación hacen particularmente complicado su análisis desde el punto de vista experimental. No obstante, en ciertos escenarios, la dinámica asociada al recalentamiento puede dar lugar a la formación de diversas “trazas cosmológicas”, tales como perturbaciones de isocurvatura, desviaciones de la gaussianidad, componentes de materia o radiación oscura, agujeros negros primordiales, solitones, asimetrías materia-antimateria, así como campos magnéticos primordiales. La detección de cualquiera de estas “trazas” representaría una valiosa oportunidad para acceder a información directa sobre la física de esta era temprana del universo.

5. Modelos de Inflación

Inflación Caótica

La **inflación caótica** es uno de los modelos más simples de inflación cósmica, propuesto por Andrei Linde en 1983. La sencillez de este modelo lo hace un candidato perfecto para realizar un análisis comprensivo de la teoría inflacionaria que acabamos de desarrollar.

El modelo de inflación caótica considera un inflatón, que tiene un potencial escalar impulsado por un término de masa cuadrático en el campo

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (5.1)$$

Este potencial es un ejemplo de un potencial monómico, y la inflación ocurre cuando el campo inflatón se encuentra en valores grandes y rueda lentamente hacia el mínimo de su potencial. Para entender cómo se produce la inflación en este modelo, debemos particularizar las bases teóricas introducidas en las anteriores secciones al caso $\frac{dV}{d\phi} = m^2\phi$. Podemos comenzar por obtener una expresión para los parámetros de slow-roll potenciales

$$\epsilon_V = \eta_V = \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\phi^2}. \quad (5.2)$$

La inflación ocurre cuando se verifican las condiciones $\epsilon \ll 1$ y $\eta \ll 1$, lo que, reexpresado para el modelo de inflación caótica, se verifica cuando $\phi \gg M_{\text{Pl}}$. Este planteamiento nos permite realizar algunas deducciones sobre el comportamiento de la expansión del universo. En primera instancia, bajo condiciones de slow roll, se cumple (4.30), dado que el potencial y la fricción de Hubble (el término $3H\dot{\phi}$) son lo suficientemente grandes como para dominar sobre la aceleración del campo $\ddot{\phi}$, es decir, son lo suficientemente grandes como para controlar el comportamiento de la ecuación de Klein-Gordon. Es por ello que, durante la inflación, tendremos una ecuación del movimiento que se puede aproximar por

$$3H\dot{\phi} \approx -m^2\phi. \quad (5.3)$$

Además, podremos obtener una expresión de H como función de ϕ sustituyendo en la ecuación de Friedmann (4.29)

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}V(\phi) = \frac{4\pi G}{3}m^2\phi^2. \quad (5.4)$$

Además de imponer las condiciones de inflación y de dar una descripción superficial del comportamiento de la expansión del universo, podemos imponer condiciones a nuestro modelo procedentes de las observaciones, como, por ejemplo, la necesidad de que $N_{\text{inflación}} \geq 40$ (en ocasiones se toma $N_{\text{inflación}} \geq 60$). Para ello, introducimos las relaciones explícitas de este modelo en (4.38)

$$N_{\text{inflación}} = \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_{\text{start}}} \frac{d\phi}{M_{\text{Pl}} \sqrt{2\epsilon V}} = \frac{\phi^2}{4M_{\text{Pl}}^2} \Big|_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_{\text{start}}} = \frac{\phi_{\text{start}}^2}{4M_{\text{Pl}}^2} - \frac{1}{2}. \quad (5.5)$$

Es importante observar que no estamos dando un valor fijo a ϕ_{start} , pero sí imponemos que ϕ_{end} sea justo el valor que verifica la condición de parada de la inflación, es decir, $\epsilon_V = \frac{2M_{\text{Pl}}^2}{\phi^2} = 1$. Esto implica que $\phi_{\text{end}} = \sqrt{2}M_{\text{Pl}}$. Juntando esta expresión de ϕ_{end} con la condición $N_{\text{inflación}} > 40$ llegamos a la restricción $\phi_{\text{start}} \geq \sqrt{162}M_{\text{Pl}} \approx 12.7M_{\text{Pl}}$. Si, en lugar de tomar la condición $N_{\text{inflación}} \geq 40$, tomásemos la opción más conservadora $N_{\text{inflación}} \geq 60$, llegaríamos a una condición similar $\phi_{\text{start}} \geq 15M_{\text{Pl}}$.

En este modelo, la inflación termina al llegar a ϕ_{end} , es decir, en algún momento del acercamiento del campo a su mínimo de potencial, $\phi_{\text{min}} = 0$. A partir de dicho punto, el campo comenzará a oscilar alrededor de su mínimo, dando lugar al proceso de recalentamiento.

Small-Field Inflation

La **inflación de campo pequeño (small-field inflation)** se refiere a un conjunto de modelos inflacionarios en los cuales el campo inflatón experimenta variaciones relativamente pequeñas durante la fase de expansión cósmica, típicamente por debajo de la escala de Planck ($\Delta\phi = |\phi_{\text{start}} - \phi_{\text{end}}| < M_{\text{Pl}}$). Estos modelos suelen surgir en escenarios donde la inflación está asociada a mecanismos de ruptura espontánea de simetría, y pueden estar motivados tanto por teorías de campo efectivas como por construcciones inspiradas en la teoría de cuerdas.

En este contexto, el inflatón inicia su evolución cerca de la cima de una barrera de potencial y desciende lentamente a medida que la inflación progresa. Típicamente, los potenciales de small-field inflation admiten una expansión de la forma

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p + \dots \right), \quad (5.6)$$

donde el parámetro μ determina la escala característica del desplazamiento del campo.

Large-Field Inflation

La **inflación de campo grande (large-field Inflation)** hace referencia a un conjunto de modelos inflacionarios en los cuales el campo inflatón, ϕ , se desplaza desde valores iniciales grandes hacia el mínimo de su potencial, experimentando durante el proceso variaciones significativas, generalmente superiores a la escala de Planck ($\Delta\phi = |\phi_{start} - \phi_{end}| > M_{Pl}$). Estos modelos están comúnmente asociados con escenarios de inflación caótica (originalmente propuestos por Andrei Linde), donde la dinámica inflacionaria es gobernada por potenciales monomiales de la forma

$$V(\phi) \propto \phi^p \quad \text{con } p > 0. \quad (5.7)$$

Un ejemplo representativo de este tipo de inflación es el modelo de inflación caótica con un potencial cuadrático, dado por la expresión ya introducida al inicio de esta sección como ejemplo canónico de modelo inflacionario

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (5.8)$$

Otro de los ejemplos clásicos de large-field inflation es el modelo de inflación natural donde el potencial toma la forma

$$V(\phi) = V_0 \left(\cos\left(\frac{\phi}{f}\right) + 1 \right). \quad (5.9)$$

Inflación de más de un campo

Los modelos de inflación con más de un campo, también conocidos como **modelos multifield**, extienden la teoría inflacionaria estándar para incluir interacciones entre múltiples campos escalares. Estos modelos permiten una dinámica más rica y pueden explicar fenómenos que escapan a los modelos tradicionales de inflación. Recordemos que los modelos de inflación con un solo campo escalar pueden explicar de manera simple la homogeneidad, planitud y distribución de las perturbaciones en el cosmos. Sin embargo, en los modelos multifield podemos encontrar también descripciones donde las fluctuaciones cuánticas de cada campo puedan generar perturbaciones no adiabáticas que influyan en la evolución de la curvatura del universo, lo que se puede traducir en características observacionales distintas, como desviaciones de la gaussianidad y la presencia de fluctuaciones de isocurvatura residuales en la perturbación de densidad primordial. Estas diferencias podrían ser detectadas en futuros estudios observacionales, lo que permitiría distinguir entre inflación con un solo campo y modelos con múltiples campos.

Para ilustrar las ideas fundamentales detrás de los modelos de inflación con múltiples campos, tomaremos como referencia los trabajos [7] y [8], los cuales utilizaremos como guía para presentar algunos ejemplos representativos que muestran cómo operan este tipo de modelos.

El primer ejemplo destacado de inflación con múltiples campos que estudiaremos es el modelo conocido como **N-flation**. Este modelo fue propuesto por Dimopoulos et al. basándose en el gran número de campos axiónicos predichos en teorías efectivas de baja energía derivadas de la teoría de cuerdas. Cerca del mínimo del potencial efectivo, los campos tienen una energía potencial

$$V = \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \phi_i^2. \quad (5.10)$$

Es conveniente indicar que, como hemos visto anteriormente, el modelo de inflación caótica genera una época inflacionaria únicamente para valores iniciales de ϕ varias veces superior a la masa de Planck (lo que en ocasiones causa preocupación al no tener control sobre correcciones al potencial en valores super-Planckianos en teorías de campo efectivo). Sin embargo, al trabajar con muchos campos escalares, la dinámica colectiva es capaz de generar una época inflacionaria incluso para valores sub-Planckianos siempre y cuando el modelo conste de un número suficientemente elevado de campos.

El segundo ejemplo que abordaremos dentro de los modelos multifield es el de la **inflación híbrida (hybrid inflation)**, propuesta por Linde en 1993. A diferencia de los modelos tradicionales donde la inflación termina cuando un único campo escalar en régimen slow-roll va aumentando progresivamente su densidad de energía cinética, este modelo introduce un segundo campo auxiliar cuya dinámica es la responsable de desencadenar el fin de la inflación. En el marco de la teoría de la gravedad de Einstein, el modelo de inflación híbrida de Linde se describe mediante un potencial efectivo que toma la siguiente forma

$$V(\sigma, \phi) = \frac{1}{4\lambda} (M^2 - \lambda\sigma^2)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g^2}{2} \phi^2 \sigma^2. \quad (5.11)$$

Particularizando la idea que hemos introducido previamente, en este modelo de dos campos escalares, la inflación puede terminar por el rápido descenso (o “caída en cascada”) del campo σ , desencadenado por el lento desplazamiento (*slow rolling*) del campo ϕ .

Potenciales Plateau-like

Dentro del estudio de modelos inflacionarios, los **potenciales tipo meseta (plateau-like potentials)** constituyen una clase especialmente relevante debido a sus predicciones precisas y compatibles con los datos observacionales actuales. Estos potenciales se caracterizan por presentar una región plana o asintóticamente constante en su parte superior, lo que favorece una fase de expansión inflacionaria prolongada y estable. A diferencia de modelos con potenciales monótonamente decrecientes o de tipo potencia, los de meseta tienden a predecir una menor amplitud de los modos tensoriales (ondas gravitacionales primordiales), lo que los alinea mejor con las cotas superiores establecidas por experimentos como *Planck* [13],[14] y [26]. Estos potenciales suelen surgir en contextos de teoría de cuerdas y presentan la forma siguiente

$$V(\phi) \sim V_0 \left(1 - e^{-\gamma\phi}\right)^2. \quad (5.12)$$

donde V_0 y γ son constantes positivas. Para valores grandes del campo inflatón, el potencial se aplana rápidamente, generando una dinámica cuasi de Sitter y valores de los parámetros inflacionarios (que se estudiarán con más detalle en el siguiente capítulo) compatibles con las restricciones observacionales sobre el índice espectral n_s y la razón tensor-escalar r .

Un ejemplo paradigmático de potencial tipo meseta es el que surge del **modelo de Starobinsky** [23]. Este modelo, formulado originalmente como una teoría de gravedad modificada con una corrección cuadrática en el escalar de curvatura R , puede escribirse en el marco de la acción de $f(R)$ como

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{R^2}{6M^2} \right), \quad (5.13)$$

donde M es una constante con dimensiones de masa y $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. A través de una transformación conforme, esta acción puede reinterpretarse como una teoría de campo escalar con dinámica canónica acoplada mínimamente a la gravedad. En este marco, el modelo es equivalente a un campo inflatón con el siguiente potencial

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \phi / M_{\text{Pl}}} \right)^2. \quad (5.14)$$

Las predicciones del modelo de Starobinsky son notablemente precisas: para un número típico de e-folds $N \sim 50-60$, se obtiene un índice espectral $n_s \approx 1 - \frac{2}{N} \approx 0.96$ y una razón tensor-escalar $r \approx \frac{12}{N^2} \approx 0.003$, ambos resultados plenamente consistentes con las observaciones actuales, como se detallará en el siguiente capítulo.

Inflación eterna

Concluimos esta sección con una discusión sobre la **inflación eterna**, un concepto presentado en [1] que representa un punto intermedio entre un modelo teórico y una característica importante a considerar en el marco de la teoría inflacionaria.

Este tipo de inflación corresponde, en esencia, a un período inflacionario que, a escala global, se prolonga indefinidamente (sin llegar a concluir). La idea subyacente a la inflación eterna se ilustra en la figura 6 que representa la conocida como **inflación en el falso vacío**, donde la inflación ocurre para un ϕ atrapado en un estado de energía alta (o falso vacío). De esta forma, toda región del espacio tiene una cierta probabilidad finita de decaer al verdadero vacío por tunelamiento cuántico. En caso de que la tasa de decaimiento sea Γ podemos expresar la probabilidad de que una región permanezca en una época de inflación como $e^{-\Gamma t}$. El hecho que hace particular a esta probabilidad es que, a diferencia de otros decaimientos exponenciales bien conocidos en la física, el espacio se expande exponencialmente durante la inflación. El volumen de la región inflacionaria, por tanto, aumenta como e^{3Ht} . Si la tasa de expansión exponencial es mayor que la tasa de decaimiento, entonces la inflación no termina globalmente.

Para entender el universo bajo el supuesto de una inflación eterna, debemos pensar en que en muchas regiones del espacio la inflación sí que llegaría a su fin. Una de esas regiones donde la época inflacionaria finaliza sería nuestro universo. Notemos que, en este caso, el espacio entre regiones sin inflación se expande rápidamente, creando nuevas regiones sin inflación (regiones no diferentes a la nuestra), lo que, a efectos prácticos, crea una especie de multiverso o una colección de universos burbuja separados por regiones inflacionarias.

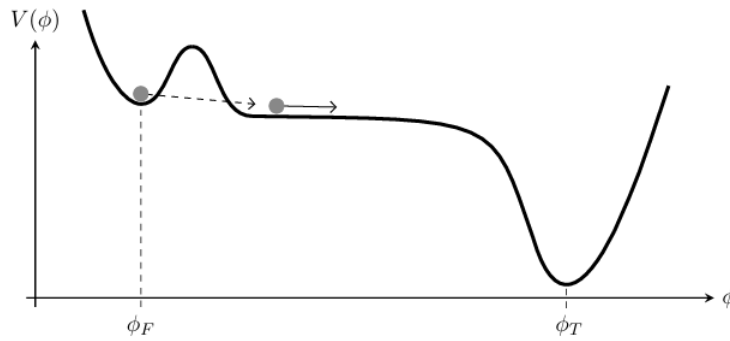


Figura 6: Potencial inflacionario con un vacío metaestable de alta energía, ϕ_F , y un verdadero vacío, ϕ_T . Imagen tomada de [1] **pág 163**.

6. Perturbaciones Inflacionarias

Uno de los subproductos más interesantes que nos proporciona la teoría inflacionaria, más allá de resolver los problemas que motivaron su formulación, es el hecho de que la inflación proporciona, de manera natural, un marco para entender la formación de estructuras en el universo. Específicamente, podemos estudiar las semillas de las estructuras a gran escala a través del análisis de las fluctuaciones del campo inflatón, $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$, originadas por el principio de incertidumbre cuántico.

Fluctuaciones cuánticas en un campo escalar

Para comprender el comportamiento de las fluctuaciones cuánticas del inflatón, podría llevarse a cabo un análisis detallado considerando campos cuánticos con distintas propiedades físicas, tales como campos con o sin masa. Sin embargo, en este apartado nos limitaremos a proporcionar una visión general que permita captar las ideas fundamentales que subyacen a este fenómeno. Con este fin, consideraremos únicamente el caso de las fluctuaciones de un campo escalar (inflatón) genérico sin masa sobre un fondo fijo en una etapa de Sitter, tal como se desarrolla en la referencia [9]. Cabe señalar que dicha referencia aborda con mayor profundidad, y en un mayor rango de casuísticas, la física de estas fluctuaciones para quienes deseen un tratamiento más exhaustivo.

Como hemos adelantado previamente, queremos realizar un estudio del inflatón perturbado, $\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t)$. Para realizar este análisis, buscaremos expandir el campo escalar ϕ en modos de Fourier, dado que, cuando estudiamos perturbaciones en un campo escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ en un universo homogéneo e isótropo, tiene sentido descomponerlas en ondas planas, que son soluciones naturales para ecuaciones diferenciales en espacios homogéneos.

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\phi_{\mathbf{k}}(t). \quad (6.1)$$

Esta ecuación nos indica que cualquier perturbación $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$ en el espacio real se puede escribir como una superposición de ondas de diferentes números de onda $\mathbf{k}$. Considerando en concreto que las fluctuaciones de $\phi(\mathbf{x}, t)$ se producen alrededor de un valor de fondo $\bar{\phi}(t)$, podemos trabajar con la ecuación de Klein-Gordon en un espacio con métrica FLRW para obtener la ecuación de las perturbaciones

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\delta\phi}{a^2} + \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\bar{\phi}} \delta\phi = 0. \quad (6.2)$$

En muchos casos de interés en inflación, el potencial es aproximadamente plano durante la fase inflacionaria, lo que implica que el término de la segunda derivada es despreciable

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\delta\phi}{a^2} = 0. \quad (6.3)$$

Esta expresión admite una última simplificación descomponiendo la perturbación en modos de Fourier, $\delta\phi_{\mathbf{k}}$ (como mostramos inicialmente), para cada vector de onda $\mathbf{k}$. Al aplicar la transformada de Fourier, las derivadas espaciales ∇^2 se convierten en multiplicaciones por $-k^2$ en el espacio de Fourier. De esta forma, la ecuación para cada modo de Fourier $\delta\phi_{\mathbf{k}}(t)$ será

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.4)$$

Estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación anterior no es tarea trivial. Es por ello que comenzaremos por analizar las soluciones en los casos límite.

- En el límite $k \ll aH$, es decir, para longitudes de onda por encima del radio de Hubble, $\lambda \gg H^{-1}$, el término k^2/a^2 en la ecuación (6.4) puede despreciarse. En este caso, la ecuación se reduce a

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.5)$$

lo que nos indica que en escalas “super-Hubble”, $\delta\phi_k$ permanece esencialmente constante.

- En el límite $k \gg aH$, es decir, para longitudes de onda por debajo del radio de Hubble, $\lambda \ll H^{-1}$, podemos despreciar el término de fricción de Hubble $3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}}$, y la ecuación (6.4) se reduce a

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.6)$$

Es claro que la expresión anterior no es más que la ecuación de movimiento de un oscilador armónico. Naturalmente, la frecuencia asociada al mismo, k/a , depende del tiempo por medio del factor de escala. Cualitativamente, cuando la longitud de onda de la fluctuación está dentro del horizonte, la fluctuación oscila.

Esencialmente tenemos un escenario en el cual las fluctuaciones de longitud de onda inicial $\lambda \sim \frac{a}{k}$ dentro del radio de Hubble oscilan hasta que la longitud de onda pasa a escalas super-Hubble, momento en el cual la fluctuación deja de oscilar y se “congela”.

Podemos hacer un estudio un poco más cuantitativo de este fenómeno trabajando bajo la hipótesis de una expansión de Sitter pura $a \sim e^{Ht}$ (un supuesto razonable de acuerdo con nuestras deducciones del capítulo 4). Para ello, consideraremos el tiempo conforme $d\tau = \frac{dt}{a}$ y tomaremos la siguiente redefinición de nuestras fluctuaciones $\delta\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\delta\sigma_{\mathbf{k}}}{a}$. Bajo estas consideraciones, podemos obtener una expresión explícita para el factor de escala conforme

$$a(\tau) = \frac{-1}{H\tau} \quad (\tau < 0), \quad (6.7)$$

donde las constantes de integración se han ajustado de modo que cuando $t \rightarrow \infty$ se cumpla $\tau \rightarrow 0^-$. Fijemos el inicio de la inflación en un cierto tiempo $\tau_i \ll 0$. Podemos escribir la ecuación (6.4) como

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) \delta\sigma_{\mathbf{k}} = 0. \quad (6.8)$$

La ecuación que se obtiene es similar a la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar en un espacio-tiempo plano, pero a la que se le ha añadido un término dependiente del tiempo $-\frac{a''}{a}$. Esta observación nos hace notar que la ecuación (6.8) puede ser obtenida de una acción del siguiente tipo

$$\delta S_{\mathbf{k}} = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \delta\sigma_{\mathbf{k}}'^2 - \frac{1}{2} \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) \delta\sigma_{\mathbf{k}}^2 \right], \quad (6.9)$$

sobre la que se impone el principio de mínima acción. Este tipo de acción corresponde a la acción canónica de un oscilador armónico simple bajo relaciones de conmutación canónicas. Este análisis nos permite concluir (el razonamiento detallado está en [9]) que para escalas sub-Hubble, donde $k^2 \gg \frac{a''}{a}$, la ecuación (6.8) admite ondas planas como soluciones

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (k \gg aH). \quad (6.10)$$

Es decir, cuando la longitud de onda de las fluctuaciones se encuentra a escalas sub-Hubble estas oscilan justo como en un espacio-tiempo plano. Por otro lado, en escalas super-Hubble, cuando $k^2 \ll \frac{a''}{a}$, las soluciones a la ecuación (6.8) se comportan como

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = B(k)a \quad (k \ll aH), \quad (6.11)$$

donde $B(k)$ es una constante de integración.

Dicha constante de integración, para $k = aH$ ($-k\tau = 1$), satisface

$$|B(k)|a = \frac{1}{\sqrt{2k}} \implies |B(k)| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (6.12)$$

Lo que, traducido de vuelta a nuestro campo de partida, nos indica que, a escalas super-Hubble, las fluctuaciones cuánticas de ϕ son aproximadamente constantes e iguales a

$$|\delta\phi_{\mathbf{k}}| \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (6.13)$$

De hecho, podemos hacer un análisis más preciso, ya que la ecuación (6.8) tiene una solución exacta

$$\delta\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right). \quad (6.14)$$

Este resultado confirma todo lo que ya habíamos obtenido mediante argumentos cualitativos en los dos regímenes extremos ($k \gg aH$ y $k \ll aH$) y, pese a que conociendo la solución exacta podríamos haber evitado la mayor parte del razonamiento cualitativo, este desarrollo es de especial utilidad de cara a problemas de mayor complejidad.

El análisis que hemos desarrollado en este apartado se puede llevar a cabo de forma más completa y rigurosa si se considera un fondo dinámico, es decir, incorporando las ecuaciones que describen la evolución conjunta del inflatón y de la métrica del espacio-tiempo. En este enfoque más general, se tiene en cuenta el acoplamiento del campo escalar con el fondo gravitacional, lo cual permite derivar una ecuación más precisa para las perturbaciones, conocida como la **ecuación de Mukhanov-Sasaki**.

$$\delta\sigma'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)\delta\sigma = 0 \quad \text{con } z = \frac{a\bar{\phi}'}{\mathcal{H}} \text{ y } \mathcal{H} = aH. \quad (6.15)$$

Aunque su deducción no es esencial para el propósito de este texto (el desarrollo completo puede consultarse en [1]), conviene hacer dos observaciones relevantes. En primer lugar, las ideas físicas fundamentales que subyacen a la derivación de la ecuación de Mukhanov-Sasaki son, en esencia, las mismas que las presentadas en esta sección. En segundo lugar, es importante destacar que dicha ecuación puede obtenerse sin necesidad de recurrir a la aproximación de slow-roll y que su validez se extiende a todas las escalas. Esto la convierte en una herramienta especialmente poderosa y general para el estudio de las perturbaciones del inflatón en escenarios inflacionarios realistas.

A partir de los resultados de esta sección, podemos concluir que, en tiempos tempranos, dado que el valor de $\mathcal{H}^{-1}$ era elevado, la mayoría de los modos se encontraban dentro del horizonte.

Esto implica que dichos modos experimentaban fluctuaciones cuánticas, las cuales, posteriormente, se convertirían en el origen de las estructuras del universo. A medida que el radio de Hubble disminuye, algunos de estos modos transicionan a un régimen superhorizonte, donde, a efectos prácticos, se transforman en fluctuaciones cosmológicas macroscópicas que se comportan como perturbaciones de curvatura invariante. Para ver este hecho más explícitamente, podemos considerar la expresión de la perturbación de curvatura comóvil (la expresión de la misma se deduce en [1] y, esencialmente, representa la curvatura intrínseca de las hipersuperficies espaciales en el gauge comóvil)

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{H}}{\bar{\rho} + \bar{P}} \delta q \quad \text{donde} \quad \delta T_j^0 = \partial_j \delta q. \quad (6.16)$$

La cual, en combinación con $\bar{\rho} + \bar{P} = a^{-2}(\bar{\phi}')^2$ implica

$$\mathcal{R} = -\frac{\mathcal{H}}{\phi'} \delta \phi = -\frac{f}{z} \approx \text{constante} \quad \text{para} \quad k \ll \mathcal{H}. \quad (6.17)$$

Nótese que la última ecuación admite una interpretación de la forma $\mathcal{R} = -\mathcal{H} \delta t$, lo que nos indica que, durante la inflación, ϕ hace las veces de “reloj” del universo. De este modo, variaciones del inflatón $\delta \phi$ se pueden asociar a variaciones temporales δt . Este hecho nos confirma que las perturbaciones de curvatura son inducidas por retrasos temporales al final de la inflación. Es conveniente observar también que $\mathcal{R}$ es una cantidad bien definida después de la inflación, incluso una vez ϕ ha perdido su significado. Este hecho hace que $\mathcal{R}$ se convierta en una buena variable para estudiar la transición entre inflación y Big Bang.

Espectro de potencias

En el estudio de las perturbaciones cosmológicas, es habitual analizar el comportamiento estadístico de los campos que describen las desviaciones del universo respecto a la homogeneidad y la isotropía. Para ello, como ya hemos visto en la sección anterior, una herramienta fundamental es el análisis mediante transformadas de Fourier. Este enfoque ofrece una amplia variedad de técnicas y métodos que resultan especialmente útiles para comprender la estructura y evolución del cosmos, destacándose entre ellos el denominado **espectro de potencias**. Debido a la relevancia de esta herramienta, dedicaremos algunos párrafos a su estudio detallado (véase [1] capítulo 5). Para ello, consideremos una perturbación $\delta(\mathbf{x}, t)$. En términos generales, para un tiempo fijo, es común asumir que $\langle \delta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$. Sin embargo, dado que este promedio no aporta información significativa sobre la naturaleza estadística de las fluctuaciones, resulta necesario definir una medida alternativa que capture efectivamente las características y la magnitud de las perturbaciones.

Una de las primeras herramientas que sí proporciona información estadística significativa sobre las perturbaciones es la **función de correlación a dos puntos**, la cual permite cuantificar cómo se relacionan los valores del campo en distintas localizaciones del espacio

$$\xi(r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t) = \langle \delta(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x}', t) \rangle = \int \mathcal{D}\delta \mathbb{P}[\delta] \delta(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x}', t). \quad (6.18)$$

Por simplicidad notacional, a partir de este punto omitiremos la dependencia temporal de las perturbaciones. Esta integral que acabamos de presentar es una integral funcional sobre todas las configuraciones posibles del campo, y $\mathbb{P}[\delta]$ es la probabilidad de que la perturbación tome una configuración específica $\delta(\mathbf{x})$. Cabe destacar que, en cierto sentido, toda la información estadística de segundo orden (es decir, de correlaciones cuadráticas) del campo está contenida en esta función. Esto se debe a que esta función nos indica qué tan probable es que el valor del campo en una localización esté relacionado con su valor en otro punto. De esta manera, captura completamente la estructura estadística si el campo es gaussiano, como suele asumirse en cosmología primordial. Otro aspecto relevante de la función de correlación a dos puntos es que, bajo la hipótesis de homogeneidad, debe ser invariante bajo traslaciones espaciales. Además, si asumimos que el universo es isótropo, la función de correlación debe ser invariante bajo rotaciones. La combinación de ambas hipótesis (homogeneidad e isotropía) implica que la función de correlación a dos puntos depende únicamente de la distancia entre los puntos considerados.

El siguiente paso que queremos llevar a cabo en nuestro análisis consiste en trasladar las ideas asociadas a la función de correlación al espacio de Fourier. Como vimos en la sección anterior, una perturbación espacial puede descomponerse en modos de Fourier, lo que permite estudiar su comportamiento en función de las diferentes escalas que la componen

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(\mathbf{k}), \quad (6.19)$$

y, además, hemos visto cómo la evolución de estos modos es independiente. Este hecho motiva la definición de una función de dos puntos en el espacio de Fourier

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}') \rangle &= \int d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle \\ &= \int d^3r d^3x' e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \xi(r) \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \xi(r) \\ &\equiv (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{P}(k), \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde nuevamente $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ y δ_D es la delta de Dirac.

La delta de Dirac que aparece en la expresión de la función de correlación en el espacio de Fourier indica que los modos de Fourier asociados a diferentes vectores de onda son independientes entre sí. En este contexto, la función $\mathcal{P}(k)$ nos proporciona la varianza de la perturbación por unidad de volumen en el espacio de modos y es una función conocida como **espectro de potencias**. A nivel teórico, $\mathcal{P}(k)$ se puede obtener como la transformada de Fourier tridimensional de la función de correlación $\xi(r)$ y, gracias a la invariancia rotacional, sabemos que el espectro de potencias no depende de la dirección del vector de onda, sino únicamente de su módulo, $k \equiv |\vec{k}|$.

A pesar de la importancia del espectro de potencias, en la práctica es frecuente utilizar una definición alternativa algo más intuitiva: el **espectro de potencia adimensional** $\Delta_\delta^2(k)$. Esta cantidad se interpreta como la contribución a la varianza total de la perturbación δ proveniente de un intervalo logarítmico en el número de onda k , es decir, de un rango $\Delta \ln k$. Este espectro se define como

$$\Delta_\delta^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{P}_\delta(k). \quad (6.21)$$

Esta forma adimensional resulta especialmente útil porque permite visualizar de manera directa cómo se distribuye la potencia de las perturbaciones en diferentes escalas físicas, las cuales están relacionadas inversamente con el número de onda, aproximadamente como $1/k$. En particular, $\Delta_\delta^2(k)$ indica qué tan importante es cada escala para la varianza total del campo, es decir, para la magnitud de las fluctuaciones en esa escala específica.

Además, al expresarse en términos de intervalos logarítmicos, el espectro facilita el análisis cuando las escalas de interés varían en órdenes de magnitud, como ocurre comúnmente en cosmología. De esta manera, el espectro de potencia adimensional ofrece una herramienta clara y física para interpretar y comparar la intensidad de las perturbaciones a lo largo de distintas escalas espaciales en el universo.

En el contexto cosmológico, estos espectros se aplican principalmente al estudio de las perturbaciones primordiales originadas durante la inflación. Por ejemplo, para el caso de la perturbación de curvatura comóvil $\mathcal{R}$, el espectro de potencia $\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)$ codifica información crucial sobre el mecanismo inflacionario y las condiciones iniciales del universo observable. Su forma funcional, en particular su amplitud y pendiente (índice espectral), puede ser confrontada con observaciones precisas del fondo cósmico de microondas (CMB).

Más adelante, veremos cómo estas definiciones nos permiten conectar modelos teóricos con observables cosmológicos, y cómo las predicciones para $\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)$ sirven como prueba crítica de la validez de los distintos escenarios inflacionarios y modelos de gravedad en el universo temprano.

Consecuencias macroscópicas de las fluctuaciones

Como hemos adelantado previamente, el objetivo final de esta sección será encontrar una forma de relacionar las perturbaciones del inflatón con fluctuaciones observables una vez ha finalizado la época inflacionaria (para ello, seguiremos los razonamientos presentados en [1] **capítulo 8** y en [9]). De acuerdo con las discusiones llevadas a cabo en este capítulo, parece razonable pensar en $\mathcal{R}$ como un buen candidato para ayudarnos en esta tarea. La primera de las relaciones que debemos tener en cuenta en nuestro estudio de los observables inflacionarios es que, según la ecuación (6.17), podemos asegurar que (en el régimen adecuado) $\mathcal{R}$ y $\delta\phi$ están relacionados según un factor de conversión. Esto nos indica que podemos escribir el espectro de potencias de $\mathcal{R}$ como

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \Delta_{\delta\phi}^2. \quad (6.22)$$

En concreto, si recurrimos a la expresión de $\Delta_{\delta\phi}^2(k)$ dada en [1] **pág 353**, obtenemos

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}^2} \right)^2 \bigg|_{k=aH} = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon} \frac{H^2}{M_{\text{Pl}}^2} \bigg|_{k=aH}. \quad (6.23)$$

La expresión anterior motiva la definición de la siguiente cantidad conocida como **índice espectral escalar**

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2(k)}{d \ln k}. \quad (6.24)$$

Este índice espectral escalar n_s describe cómo varía la potencia de las perturbaciones de curvatura $\mathcal{R}$ en función de la escala k . En otras palabras, nos dice cuán curvada es la distribución de las fluctuaciones primordiales en el universo. Si todas las escalas tuvieran exactamente la misma potencia, el espectro sería estrictamente plano, y el índice espectral tomaría el valor $n_s = 1$. En este caso, dado que la potencia es igual en todas las escalas, estaríamos ante un universo en que todas las fluctuaciones primordiales tienen la misma importancia, sin depender del tamaño de la región considerada. Sin embargo, los modelos inflacionarios predicen que el espectro no es exactamente plano, sino que tiene una ligera inclinación. Es decir, la potencia de las perturbaciones varía suavemente con la escala. Si $n_s < 1$, las perturbaciones en escalas grandes (pequeño k) son ligeramente más intensas que las de escalas pequeñas. Esta casuística se llama espectro rojo (red tilt). Si fuera $n_s > 1$, tendríamos un espectro azul, donde dominan las escalas pequeñas (blue tilt).

Si utilizamos $k = aH$ en la expresión anterior del índice espectral escalar, obtenemos

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln(aH)} \approx \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln a} = \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{H dt} = \frac{2 d \ln H}{H dt} - \frac{d \ln \varepsilon}{H dt} = 2 \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\dot{\varepsilon}}{H \varepsilon}, \quad (6.25)$$

lo que, en términos de los parámetros de slow-roll, se puede expresar como

$$n_s - 1 = -2\varepsilon - \kappa. \quad (6.26)$$

Este resultado también admite una derivación partiendo de una expansión de slow-roll de la ecuación de Mukhanov-Sasaki (véase [1]). Esta segunda deducción nos muestra que el espectro de potencias de la perturbación de curvatura $\mathcal{R}$ sigue una ley de potencias de la siguiente forma

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}, \quad (6.27)$$

para la cual la amplitud y el índice espectral son

$$A_s \equiv \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon_*} \frac{H_*^2}{M_{\text{Pl}}^2}, \quad (6.28)$$

$$n_s \equiv 1 - 2\varepsilon_* - \kappa_*. \quad (6.29)$$

Todas las cantidades en el lado derecho de las igualdades se evalúan en el momento en que la escala de referencia k_* sale del horizonte. Las restricciones observacionales sobre la amplitud escalar y el índice espectral son $A_s = (2.098 \pm 0.023) \cdot 10^{-9}$ y $n_s = 0.9603 \pm 0.0073$ (para $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$) [13]. La desviación observada respecto al valor $n_s = 1$ constituye una evidencia directa de la dependencia temporal del fondo inflacionario. Esta medición representa, de hecho, una de las primeras confirmaciones experimentales de la dinámica no trivial del campo inflatón durante el periodo inflacionario.

Existen otros observables relevantes en el marco de la teoría inflacionaria que se derivan del análisis del espectro de ondas gravitacionales primordiales. Si bien un estudio riguroso de estos aspectos requiere herramientas técnicas más avanzadas y excede el alcance de este texto, a continuación presentaremos una explicación semi-cualitativa de los mismos. Esta se basa en el enfoque desarrollado en [1], **capítulo 8** y en [9], con el objetivo de ofrecer una comprensión conceptual de su origen y relevancia cosmológica.

Podemos entender las ondas gravitacionales como perturbaciones tensoriales a la métrica espacial

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \right], \quad (6.30)$$

donde $\partial_i h_{ij} = 0$ y $h_{ii} = 0$. Es conocido ([1], **capítulo 6**) que las fluctuaciones tensoriales en un fondo FRW satisfacen la siguiente ecuación de onda

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 0, \quad (6.31)$$

donde la ecuación anterior surge de la acción

$$S_2 = \frac{N}{2} \int d\eta d^3x a^2 \left[(h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2 \right]. \quad (6.32)$$

La normalización global de la expresión anterior no es sencilla de obtener. Sin embargo, realizar una expansión de la acción de Einstein-Hilbert hasta segundo orden en las fluctuaciones tensoriales no resulta especialmente complicado, y conduce a $N = \frac{M_{Pl}^2}{4}$.

Es conveniente usar la simetría rotacional para alinear el eje z del sistema de coordenadas con el momento del modo, es decir, $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, y escribir

$$\frac{M_{Pl}}{2} a h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_+ & f_\times & 0 \\ f_\times & -f_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

donde f_+ y $f_\times$ describen los dos modos de polarización de la onda gravitacional.

Bajo estas condiciones, la acción (6.32) se convierte en

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=+, \times} \int d\eta d^3x \left[(f'_\lambda)^2 - (\nabla f_\lambda)^2 + \frac{a''}{a} f_\lambda^2 \right]. \quad (6.34)$$

Esta acción se puede interpretar como dos copias de la acción de un campo escalar sin masa. El espectro de potencia de las fluctuaciones tensoriales es, por lo tanto, simplemente un reescalamiento del resultado para las fluctuaciones del inflatón

$$\Delta_h^2(k) = 2 \cdot \left(\frac{2}{M_{Pl}} \right)^2 \cdot \Delta_{\delta\phi}^2(k, \eta) \Big|_{k=aH}. \quad (6.35)$$

Donde el factor de 2 aparece debido a la suma sobre los dos modos de polarización. Usando nuevamente la expresión de $\Delta_{\delta\phi}^2(k, \eta)$ dada en [1] **pág 353**, obtenemos

$$\Delta_h^2(k) = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{H}{M_{Pl}} \right)^2 \bigg|_{k=aH}. \quad (6.36)$$

Este resultado es posiblemente la predicción más robusta e independiente del modelo de la inflación. Nótese que la amplitud tensorial es una medida directa de la tasa de expansión H durante la inflación, mientras que la amplitud escalar depende tanto de H como de ε . El **índice espectral tensorial** es

$$n_t = \frac{d \ln \Delta_h^2}{d \ln k} = \frac{d \ln \Delta_h^2}{d \ln(aH)} \approx \frac{d \ln \Delta_h^2}{d \ln a} = \frac{d \ln \Delta_h^2}{H dt} = 2 \frac{\dot{H}}{H^2} = -2\varepsilon. \quad (6.37)$$

Igual que ocurría en el caso de las perturbaciones lineales del inflatón, este mismo resultado se puede derivar a partir de una expansión de slow-roll (véase [1]), la cual nos lleva a un espectro tensorial que satisface la ley de potencias

$$\Delta_h^2(k) = A_t \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_t}, \quad (6.38)$$

donde la amplitud y el índice espectral son

$$A_t \equiv \frac{2H_*^2}{\pi^2 M_{Pl}^2}, \quad (6.39)$$

$$n_t \equiv -2\varepsilon_*. \quad (6.40)$$

Nótese que el índice espectral tensorial es una medida directa de ε , mientras que el índice espectral escalar depende tanto de ε como de κ . Las restricciones observacionales sobre la amplitud tensorial suelen expresarse en términos de la **razón tensor-escalar (tensor-to-scalar ratio)**,

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s} = 16\varepsilon_*. \quad (6.41)$$

Dado que se ha medido la amplitud de las fluctuaciones escalares, la razón tensor-escalar cuantifica el tamaño de las fluctuaciones tensoriales. Observacionalmente, los datos en [14] imponen una cota superior al tensor-to-scalar ratio $r < 0.056$ en la escala de referencia $k^* = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$.

Como acabamos de comprobar, comprender los observables de las teorías inflacionarias es uno de los elementos clave para juzgar la adecuación y viabilidad de las distintas propuestas teóricas. Entre estos observables destacan los ya introducidos: el índice espectral de las perturbaciones escalares n_s y la razón tensor-escalar r , cuyos valores han sido restringidos con gran precisión por los datos más recientes del experimento *Planck* [14] y [26]. Las comparativas entre diferentes modelos inflacionarios en función de estos parámetros pueden encontrarse en la figura 7, la cual presenta un análisis gráfico del grado de ajuste de diversos modelos inflacionarios a las observaciones cosmológicas.

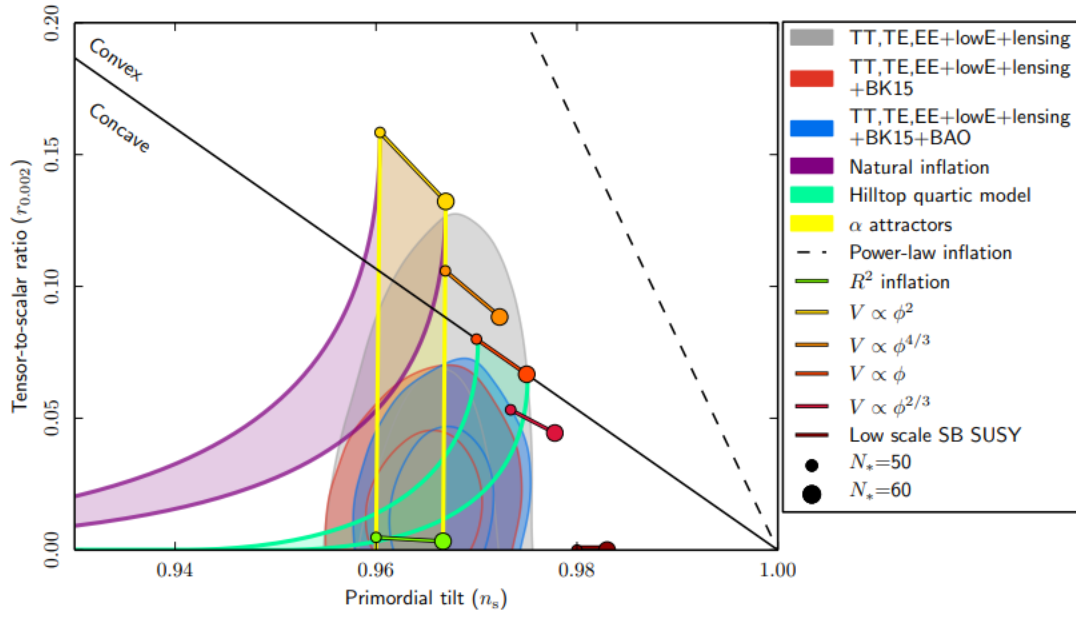


Figura 7: Comparación entre modelos inflacionarios. Imagen tomada de [26], pág. 17.

Como puede observarse, el modelo de Starobinsky se destaca como uno de los más exitosos, ya que predice valores de n_s y r en excelente concordancia con los datos observacionales. Además, se observa una notable cercanía entre este modelo y una clase más amplia de modelos conocidos como atractores α , lo que sugiere la existencia de una estructura subyacente común que conecta distintos escenarios inflacionarios. Esta fuerte ligadura motiva el estudio detallado de los atractores α , que abordaremos en la siguiente sección de este trabajo.

7. α -attractors

A lo largo de este trabajo hemos explorado algunos de los modelos inflacionarios más conocidos, así como las expresiones de los observables que permiten vincularlos con nuestro mundo. Dado que el estudio detallado de todos estos modelos y sus respectivas predicciones para los observables es una tarea extensa y compleja, nos centraremos específicamente en realizar un análisis detallado del modelo de **atractores alfa (alpha-attractors)**.

Con el objetivo de evitar que las expresiones teóricas asociadas a los atractores alfa parezcan de origen arbitrario, dedicaremos algunas páginas a intentar motivarlas. Para ello, recordaremos brevemente el comportamiento de los campos clásicos, así como la aparición de escalares en contextos de reducción dimensional dentro de la teoría de cuerdas.

El espacio de campos clásico

En el capítulo dedicado a la Relatividad General, vimos que en un espacio dotado de una métrica $g_{\mu\nu}$ es posible definir un elemento de línea (2.1), así como una conexión a través de los símbolos de Christoffel (2.3). Además, a partir de un lagrangiano adecuado, también mostramos cómo se obtienen las ecuaciones de movimiento para el caso de una partícula puntual de masa m que se mueve libremente en dicho espacio, siguiendo trayectorias que minimizan la acción

$$S = \int d\tau \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \int d\tau \mathcal{L}. \quad (7.1)$$

El resultado de dichas ecuaciones del movimiento venía dado por la ecuación geodésica (2.4)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (7.2)$$

donde τ es un parámetro afín. Este resultado revela que, en ausencia de potencial de interacción, la evolución de un sistema en dicho espacio está completamente determinada por su estructura geométrica. Es decir, la trayectoria de la partícula libre es una curva que extremiza la “distancia” en el espacio-tiempo y cuya evolución está completamente determinada por la geometría espaciotemporal. La estructura de estas ecuaciones muestra que los símbolos de Christoffel codifican la manera en que el sistema evoluciona de acuerdo con la geometría del espacio.

En física teórica, esta idea de recurrir a un lagrangiano y una acción con la finalidad de describir la evolución o dinámica de un sistema no se limita al caso de partículas puntuales masivas. De hecho, en este mismo trabajo hemos observado cómo esta formulación se extiende de forma natural al caso de los campos escalares, donde un campo escalar $\phi(x)$ en un espacio con métrica $g_{\mu\nu}$ tiene una acción asociada

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (7.3)$$

Nuevamente, la idea que representa esta ecuación no es más que una generalización del caso de una partícula puntual. En este contexto, el lagrangiano describe la dinámica del campo escalar en un espacio curvo, donde la métrica $g^{\mu\nu}$ sigue desempeñando un papel central, ya que pondera las derivadas del campo escalar en las distintas direcciones del espacio-tiempo. De este modo, el campo “siente” la geometría del fondo, y su evolución está determinada tanto por su contenido dinámico (a través del potencial $V(\phi)$) como por la estructura geométrica codificada en la métrica.

Si queremos extender esta idea un poco más, podemos considerar el comportamiento de un conjunto de múltiples campos escalares ϕ^i , que interactúan entre sí a través de un objeto $K_{ij}(\phi)$. En este caso, la acción generalizada toma la forma (obviando el término de potencial)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} K_{ij}(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \right]. \quad (7.4)$$

Consideremos por un momento que trabajamos en un espacio plano, donde la métrica de Minkowski es suficiente para describir la geometría. En este caso, el lagrangiano para una colección de campos escalares se expresa como

$$L = -\frac{1}{2} K_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j. \quad (7.5)$$

Esta expresión hace tangible el hecho de que, a efectos prácticos, el objeto K_{ij} que hemos introducido juega el papel de métrica en el espacio de campos. Es más, la similitud es tan fuerte que, en caso de resolver las ecuaciones del movimiento que surgen de este lagrangiano, obtenemos exactamente (*mutatis mutandis*) las geodésicas (del espacio de campos), tal y como hacíamos con nuestra partícula masiva.

Por completa analogía, obtenemos que la evolución de los campos sigue trayectorias (en el espacio de campos) determinadas por una geometría interna caracterizada por la interacción de los campos. En este contexto, la conexión del espacio está dada por los coeficientes

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} K^{il} (\partial_k K_{jl} + \partial_j K_{kl} - \partial_l K_{jk}). \quad (7.6)$$

En este sentido, la evolución de los campos está completamente determinada por las geodésicas en este espacio de campos con métrica K_{ij} , de manera análoga a cómo las trayectorias de partículas en el espacio-tiempo son determinadas por la métrica $g_{\mu\nu}$.

Sin embargo, en un sistema físico más general, no solo interesa la dinámica cinemática de los campos, sino también su interacción potencial. Para incluir estas interacciones, se introduce un término de potencial $V(\phi) = V(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N)$ en la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} K_{ij}(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j - V(\phi) \right]. \quad (7.7)$$

Hemos observado que la formulación lagrangiana con $K_{ij}(\phi)$ nos muestra que los campos escalares pueden interpretarse como coordenadas de un espacio interno, cuya geometría determina su evolución. La dinámica de estos campos no está guiada únicamente por la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, sino también por la métrica del espacio de campos K_{ij} . La presencia de un potencial $V(\phi)$ introduce fuerzas adicionales, dando lugar a una dinámica más rica y compleja. Este aspecto resulta esencial en teorías como la inflación cosmológica (lo cual será especialmente importante más adelante), los modelos de gravedad modificada y las teorías efectivas en física de altas energías.

Volvamos a considerar, de ahora en adelante, el caso en el que el espacio-tiempo tiene una métrica de Minkowski, es decir, tomamos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, la métrica habitual de la relatividad especial. En este contexto, podemos analizar la evolución de dos campos φ y χ , que en principio pueden estar acoplados a través de una métrica interna K_{ij} . La elección de K_{ij} define una geometría en el espacio de los campos, y en particular, diferentes elecciones pueden corresponder a espacios con distintas simetrías.

Una primera elección natural es considerar el caso en el que K_{ij} sea simplemente la identidad, es decir,

$$K_{ij} = \delta_{ij}. \quad (7.8)$$

En este caso, la acción toma la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) \right]. \quad (7.9)$$

Esta elección nos da una geometría trivial en el espacio de los campos, equivalente a un espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Dicho espacio es maximalmente simétrico y posee simetrías bajo traslaciones y rotaciones en el plano (φ, χ) , correspondientes a un grupo de isometrías $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$, con un total de

$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = 3 \quad (7.10)$$

generadores de simetría. En general, para N campos con un acoplamiento dado por $K_{ij} = \delta_{ij}$, el espacio de campos corresponde a un espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$, que posee un grupo de simetrías con un total de $N(N+1)/2$ generadores. Estas simetrías corresponden a N traslaciones y $N(N-1)/2$ rotaciones.

Sin embargo, podemos considerar otras elecciones de K_{ij} que conduzcan a estructuras geométricas distintas. Un caso interesante se obtiene tomando una matriz diagonal con elementos

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\varphi} \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Con esta elección, la acción toma la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + e^{2\varphi} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) \right]. \quad (7.12)$$

Esta métrica describe un espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$, cuya geometría es distinta de la euclídea aunque presenta nuevamente tres simetrías (maximalmente simétrico), correspondientes a las isometrías del espacio hiperbólico. En este caso, la estructura del espacio interno sugiere que φ controla la curvatura efectiva sentida por el campo χ , lo que introduce dinámicas no triviales en la teoría.

Para simplificar el análisis y hacer explícitas las simetrías subyacentes, es útil introducir un campo complejo que combine los campos φ y χ . Una elección común es definir un campo complejo ϕ de la siguiente manera

$$\phi = \chi + ie^{-\varphi}, \quad (7.13)$$

y luego considerar la transformación

$$z = \frac{\phi - i}{\phi + i}. \quad (7.14)$$

Con esta redefinición, el lagrangiano de nuestro sistema de dos campos puede reescribirse como

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial_\mu z \partial^\mu \bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}, \quad (7.15)$$

el cual es invariante bajo transformaciones del grupo $SL(2, \mathbb{R})$, que constituye el grupo de isometrías del semiplano superior (otra representación equivalente de la geometría hiperbólica).

Más específicamente, la simetría $SL(2, \mathbb{R})$ es un grupo de transformaciones lineales fraccionarias que actúan sobre la variable compleja z de la siguiente manera

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad (7.16)$$

donde a, b, c y d son números reales que satisfacen la condición

$$ad - bc = 1. \quad (7.17)$$

En el caso de trabajar con un mayor número de campos escalares complejos, el lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = -(3\alpha) \frac{\partial_\mu z \partial^\mu \bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}, \quad (7.18)$$

donde (3α) está relacionado con el número de pares de campos.

Reducción dimensional de Kaluza-klein

La discusión del apartado anterior se puede extender a una infinidad de posibles elecciones para K_{ij} , aunque nosotros nos hemos limitado a analizar dos casos particulares que respetan la existencia de todas las posibles simetrías del espacio. En este proceso, hemos encontrado un espacio trivial, $\mathbb{R}^2$, cuya dinámica de campos, como el lector podrá anticipar, no resulta especialmente interesante en el contexto de modelos inflacionarios, y otro espacio $\mathbb{H}^2$, de mayor aplicación en cosmología. Pero este hecho plantea algunas cuestiones: ¿Por qué limitamos nuestro espectro de métricas de interés en el espacio de campos a aquellas que determinan un espacio maximalmente simétrico? O una cuestión incluso más alarmante: ¿Tiene sentido imponer simetría $SL(2, \mathbb{R})$ al lagrangiano de nuestros campos de interés?

Para dar una respuesta satisfactoria a estas preguntas, podemos dirigir nuestra atención a la teoría de cuerdas, más concretamente a las reducciones dimensionales que aparecen en la misma con la intención de reconciliar la existencia de una teoría diez dimensional en un espacio-tiempo inicialmente concebido en cuatro dimensiones. Veamos, al menos superficialmente, qué ocurre al llevar a cabo la reducción dimensional de la gravedad en $D + 1$ dimensiones a D dimensiones.

Describiremos el término de Einstein-Hilbert de la gravedad en $D + 1$ dimensiones como

$$S_{D+1} = \frac{1}{2\kappa_{D+1}^2} \int d^{D+1}x \sqrt{-|\hat{g}|} \hat{R} \quad (7.19)$$

donde $\hat{g}_{MN}$ y $\hat{R}_{MN}$ son la métrica y el escalar de Ricci en un espacio-tiempo de $(D + 1)$ dimensiones, con $M = 0, 1, \dots, D - 1, z$.

En general, en teoría de cuerdas se suele asumir que estas todas las dimensiones extra, más allá de las cuatro usuales, son dimensiones compactas. Esta hipótesis no es descabellada, ya que dichas dimensiones no han sido observadas en experimentos de baja energía. Si fueran infinitas (o muy grandes), tendríamos efectos medibles tanto en la gravedad como en la física de partículas. Podemos considerar, por ejemplo, que estas dimensiones tienen la topología de un círculo S^1 , ya que es la compactificación más sencilla y permite ilustrar los conceptos básicos de esta teoría. Esta elección, S^1 , se suele utilizar debido a que mantiene una estructura geométrica bien definida y facilita el análisis de cómo la compactificación afecta a las partículas y a la interacción gravitatoria. Supongamos, entonces, que la coordenada z pertenece a S^1 , lo que nos lleva a la expansión de Fourier

$$\hat{g}_{MN}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{MN}^{(n)}(x) e^{i \frac{n}{L} z}, \quad (7.20)$$

donde estamos asumiendo periodicidad $2\pi L$ en la coordenada z . En esta expansión, el modo cero ($n = 0$) es un modo sin masa, mientras que $n \neq 0$ corresponde a una torre de modos masivos (torre de Kaluza-Klein [24] y [25]).

Por ejemplo, un campo escalar $\hat{\Phi}$ en un espacio-tiempo plano $D + 1$ dimensional cumple

$$S_{\Phi} = -\frac{1}{2} \int d^{D+1}x \partial_M \hat{\Phi} \partial^M \hat{\Phi}, \quad (7.21)$$

lo que conduce a la ecuación de movimiento

$$\hat{\square} \hat{\Phi} = \partial_M \partial^M \hat{\Phi} = 0. \quad (7.22)$$

Asumiendo que la coordenada extra z está compactificada en un círculo de radio L , expandimos el campo en modos de Fourier

$$\hat{\Phi}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(x) e^{i \frac{n}{L} z}. \quad (7.23)$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento obtenemos

$$\hat{\square} \hat{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} (\square \phi^{(n)} - \frac{n^2}{L^2} \phi^{(n)}) e^{i \frac{n}{L} z} = 0, \quad (7.24)$$

lo que implica que cada modo $\phi^{(n)}$ satisface una ecuación de Klein-Gordon

$$\square \phi^{(n)} - \frac{n^2}{L^2} \phi^{(n)} = 0, \quad (7.25)$$

donde identificamos $m^2 = \frac{n^2}{L^2}$, lo que nos lleva a modos masivos con $m = \frac{|n|}{L}$.

La filosofía que subyace a la reducción dimensional de Kaluza-Klein parte de asumir que la dimensión compacta S^1 tiene un radio L extremadamente pequeño, (no observamos S^1), de manera que todos los modos con $n \neq 0$ son muy masivos $m = \frac{|n|}{L}$ y solo pueden ser excitados a energías muy altas

$$L \sim m_p \sim 10^{-33} \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m \sim 10^{-5} \text{ g.}$$

Como comparativa, recordemos que $m_{\text{Higgs}} \sim m_{\text{top}} \sim 10^{-22} \text{ g.}$

Con esta observación en mente, la reducción de Kaluza-Klein consiste en truncar los desarrollos en serie a los modos sin masa $n = 0$, lo que implica independencia de z en las expansiones de Fourier

$$\hat{g}_{MN}(x) = g_{MN}^{(0)}(x). \quad (7.26)$$

Esta simplificación nos permite llevar a cabo la reducción dimensional deseada (véanse los desarrollos explícitos en [15] y [16]), conduciendo a una teoría efectiva en D dimensiones de tipo Einstein-Maxwell-Dilatón

$$S_{D+1} = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x e \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-2(D-1)\alpha\phi} F^2 \right], \quad (7.27)$$

donde la constante de acoplamiento se relaciona con la de dimensión superior mediante

$$\kappa_D^2 = \frac{\kappa_{D+1}^2}{2\pi L}. \quad (7.28)$$

Como vemos, esto proporciona una unificación de la forma

$$\text{Gravedad en } D+1 \Rightarrow \text{Gravedad} + \text{Maxwell} + \text{escalar en } D$$

Este razonamiento puede generalizarse a compactificaciones más complejas. Por ejemplo, si comenzamos con una teoría en 10 dimensiones cuyas seis dimensiones extra presentan la geometría de un toro T^6 , podemos realizar una compactificación secuencial que conduce a una teoría efectiva en cuatro dimensiones. En este caso, además de la gravedad, aparecen 70 escalares, de los cuales 14, descritos como 7 campos complejos z_i , presentan una geometría que se corresponde exactamente con siete copias del plano hiperbólico de Poincaré

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^7 \frac{\partial_\mu z_i \partial^\mu \bar{z}_i}{(1 - |z_i|^2)^2}. \quad (7.29)$$

Este tipo de estructura hiperbólica aparece en muchos modelos de inflación. Por tanto, la compactificación y la reducción dimensional nos están proporcionando de manera natural candidatos viables para campos inflacionarios, cuyas propiedades geométricas permiten formular modelos consistentes con las observaciones (esto justifica nuestro interés por la geometría $\mathbb{H}^2$).

El modelo

Los atractores alfa son un modelo de inflación cósmica de particular interés basado en la premisa de que la dinámica del campo escalar inflatón está gobernada por una geometría hiperbólica en el espacio de los campos. El desarrollo de este modelo ha sido impulsado, entre otros, por **Renata Kallosh** y **Andrei Linde**, en el marco de la teoría de la supergravedad y la teoría de cuerdas.

Existe una gran variedad de modelos dentro de la familia de los atractores alfa; no obstante, muchos de ellos admiten una representación en términos de un campo escalar ρ cuyo lagrangiano es de la forma

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{R}{2} - \frac{3\alpha}{4} \frac{(\partial\rho)^2}{\rho^2} - V(\rho). \quad (7.30)$$

Es relevante indicar que, en general, en estos modelos α aparece como un parámetro que ajusta la curvatura del espacio hiperbólico en el que se define el inflatón, afectando de manera directa a los valores del tensor-to-scalar ratio y del índice espectral escalar. Por ello, es importante elegir adecuadamente el valor de α para que el modelo se adecúe al marco teórico en que se emplea. En concreto, los desarrollos de Kaluza-klein que acabamos de mostrar favorecen las elecciones: $3\alpha = 1, 2, 3, \dots, 7$. No obstante, en general, α puede tomar cualquier valor.

Para entender un poco mejor el funcionamiento de este modelo seguiremos la referencia [18], la cual considera el caso donde el potencial $V(\rho)$ es no singular cerca del polo $\rho = 0$ del término cinético en (7.30), y puede expandirse según la serie $V = V_0(1 - c\rho + \mathcal{O}(\rho^2))$ para un cierto $c > 0$. En este caso, la invariancia bajo reescalado que presenta el término cinético permite realizar el cambio $\rho \rightarrow \rho/c$. Para esta nueva variable encontramos una forma universal del potencial en la vecindad del polo, $V = V_0(1 - \rho + \dots)$, donde suponemos que los términos de orden superior son despreciables ($\rho^n, n \geq 2$). Esto nos lleva a representar $\mathcal{L}$ en términos de una variable canónica φ , donde $\rho = e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi}$

$$\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = \frac{R}{2} - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi}). \quad (7.31)$$

Para valores grandes de φ donde $e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi} \ll 1$ el potencial cumple

$$V(\varphi) = V_0 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi} + \mathcal{O}(e^{-2\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi}) \right), \quad (7.32)$$

y por tanto, durante la inflación, el potencial está determinado por los dos primeros términos de la expansión, los cuales sólo dependen de los parámetros V_0 y α . Para esta aproximación es posible calcular la expansión total del universo cuando el campo comienza en $\varphi = \varphi_{N_e}$

$$e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}} \varphi_{N_e}} = \frac{3\alpha}{8N_e}. \quad (7.33)$$

Por lo tanto, la amplitud de las perturbaciones inflacionarias generadas a grandes valores del campo φ no depende de los términos de orden superior en la expansión del potencial. En particular, la amplitud de las perturbaciones inflacionarias A_s , el índice espectral n_s y la razón tensor-escalar r , en el límite de gran número de e-folds N_e , están dadas por

$$A_s = \frac{V_0 N_e^2}{18\pi^2 \alpha}, \quad n_s = 1 - \frac{2}{N_e}, \quad r = \frac{12\alpha}{N_e^2}. \quad (7.34)$$

Es precisamente esta dependencia en sólo dos parámetros (V_0, α) y la falta de dependencia en las características del potencial original $V(\rho)$ lo que hace que este tipo de modelos se conozcan como **atractores alfa**. Unos de los modelos de potenciales más simples de α -attractors son los E-models

$$V(\varphi) = V_0 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3\alpha}} \varphi} \right)^{2n}, \quad (7.35)$$

caracterizados por recurrir a potenciales con un plateau para valores grandes de φ que “explotan” en valores grandes negativos del campo. Para $n = 1, \alpha = 1$ recuperamos el potencial del modelo Starobinsky.

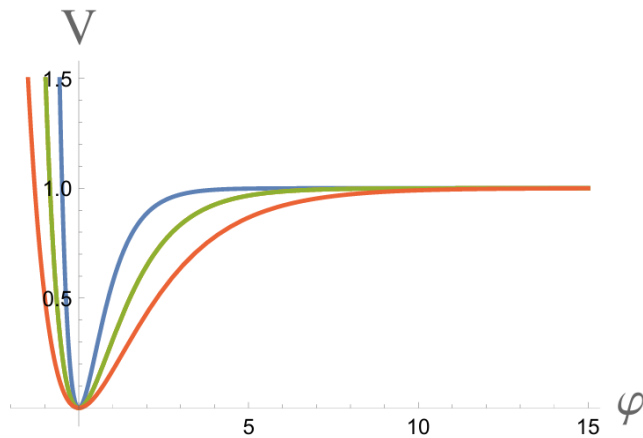


Figura 8: Potenciales de E-models para $V_0 = 1$, $n = 1$, $3\alpha = 1$ (línea azul), $3\alpha = 3$ (línea verde, modelo de Starobinsky), y $3\alpha = 7$ (línea roja). Imagen tomada de [18] pág 5.

Estudiaremos ahora la extensión natural de la construcción que acabamos de presentar. En concreto, planteamos un modelo que admite una representación en términos de un campo complejo $\tau = \tau_1 + i\tau_2 = \theta + ie^{\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\varphi}$ cuyo lagrangiano es de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathcal{L}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{R}{2} + \frac{3\alpha}{4} \frac{\partial\tau\partial\bar{\tau}}{(Im\tau)^2} - V(\tau, \bar{\tau}). \quad (7.36)$$

En este apartado, siguiendo con la idea de preservar simetrías que hemos introducido previamente, trabajaremos con potenciales $SL(2, \mathbb{Z})$ invariantes. Podemos observar que, entonces, en este tipo de modelos, el término cinético escalar posee una simetría $SL(2, \mathbb{R})$, mientras que el potencial rompe esta simetría reduciéndola a $SL(2, \mathbb{Z})$. Aunque, como se prueba en [18], la simetría $SL(2, \mathbb{Z})$ protege la simetría $SL(2, \mathbb{R})$ del término cinético.

En el espíritu de los desarrollos anteriores, consideraremos potenciales que presenten una expansión bien controlada en el límite $Im(\tau) \rightarrow \infty$, en particular, buscaremos que en dicho régimen el potencial adopte la forma asintótica

$$V(\tau, \bar{\tau}) \approx V_0 \left(1 - \frac{c}{Im(\tau)} \right), \quad (7.37)$$

ignorando términos de orden $\mathcal{O}\left(\frac{1}{Im(\tau)}\right)^2$. Es más, la dependencia con c será absorbida en una redefinición del término cinético lo que nos hace recuperar un modelo que, en el régimen inflacionario, sólo depende de α y de V_0 .

Según lo expuesto, es razonable anticipar que el comportamiento general de este nuevo modelo compartirá, en gran medida, características con los perfiles descritos en la figura 8. Para sustentar esta intuición, profundizaremos en el análisis y la fenomenología asociada a los modelos inflacionarios fundamentados en simetrías modulares. En cualquier caso, nuestro objetivo ya no será replicar los desarrollos ya expuestos en [18], sino proponer una nueva familia de potenciales invariantes bajo $SL(2, \mathbb{Z})$, que constituyan una alternativa a los modelos presentados en [18].

Una nueva clase de modelos $SL(2, \mathbb{Z})$ -invariant

Nuestra propuesta se posiciona como un término medio entre los dos modelos discutidos en dicha referencia, los cuales pueden expresarse como

$$V_1^{(n)}(\tau, \bar{\tau}) = V_0 \left(\frac{I(\tau, \bar{\tau}) - 1}{I(\tau, \bar{\tau}) + 1} \right)^n, \quad (7.38)$$

y

$$V_2^{(n)}(\tau, \bar{\tau}) = V_0 \left(1 - (I(\tau, \bar{\tau}))^{-1} \right)^n, \quad (7.39)$$

donde la función $I(\tau, \bar{\tau})$ se define como

$$I(\tau, \bar{\tau}) \equiv \frac{\ln(|j(\tau)|^2 + \beta^2)}{\ln \beta^2}, \quad (7.40)$$

con β un parámetro y $j(\tau)$ la función modular definida por su desarrollo en serie de Fourier,

$$j(\tau) = q^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n, \quad \text{con } q = e^{2\pi i \tau}. \quad (7.41)$$

Para obtener una expresión que se encuentre en un punto medio entre los potenciales $V_1^{(n)}$ y $V_2^{(n)}$ nos inspiramos en la expresión heurística

$$\left(1 - \frac{1}{x^m}\right) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots\right) = \left(1 - \frac{1}{x^m}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right). \quad (7.42)$$

Esta relación sugiere una forma funcional que permite, por un lado, limitar el número de términos en la expansión (gracias al factor $1 - \frac{1}{x^m}$, que introduce una truncación efectiva), y por otro, preservar una estructura racional que facilita el estudio analítico. Interpretando x como la función $I(\tau, \bar{\tau})$, se puede construir un potencial que herede propiedades de ambas expresiones límite y cuya complejidad sea controlable mediante los parámetros n y m . De esta manera, proponemos la siguiente familia generalizada de potenciales

$$V^{(n,m)}(\tau, \bar{\tau}) = V_0 \left(\frac{(I^m(\tau, \bar{\tau}) - 1)I(\tau, \bar{\tau})}{I(\tau, \bar{\tau})^m(I(\tau, \bar{\tau}) + 1)} \right)^n. \quad (7.43)$$

Esta construcción permite una “interpolación” entre las descripciones proporcionadas por $V_1^{(n)}$ y $V_2^{(n)}$, al englobar ambas expresiones dentro de una formulación más general que, en ciertos casos (m par), admite desarrollos truncados de forma finita. Esto confiere al modelo una mayor versatilidad y manejabilidad analítica. Nótese que para recuperar $V_1^{(n)}$ basta con fijar $m = 1$. Por otro lado, si fijamos $m = 2$, se recupera $V_2^{(n)}$. El parámetro n continúa siendo el encargado de controlar el exponente del potencial. Las combinaciones (m, n) no contempladas en las referencias anteriores dan lugar a nuevas formas de potenciales, originales y no recogidas en [18].

Dado el carácter general y flexible de esta nueva familia de potenciales, resulta natural complementar el análisis formal con un estudio de su dinámica efectiva. Para ello, abordamos la evolución del sistema inflacionario resolviendo numéricamente las ecuaciones de movimiento asociadas. Esta aproximación permite explorar el comportamiento del modelo en distintos regímenes, prestando especial atención a cómo la elección de los parámetros (m, n) y de las condiciones iniciales influye en la evolución de los campos. En particular, presentamos una serie de simulaciones que ilustran la trayectoria dinámica del sistema bajo distintas configuraciones iniciales, lo que permite evaluar su estabilidad y consistencia con un escenario inflacionario viable.

Como primer paso en el estudio de esta familia de potenciales, consideramos un caso ya conocido y presentado en [18], concretamente el correspondiente a $m = 2$ y $n = 1$. Esto nos permite verificar que, efectivamente, nuestro modelo recupera los potenciales deseados en los límites apropiados y sirve como punto de partida para validar la construcción propuesta. En la figura 9 se muestra la forma general del potencial para este caso, confirmando su coincidencia con los resultados previos.

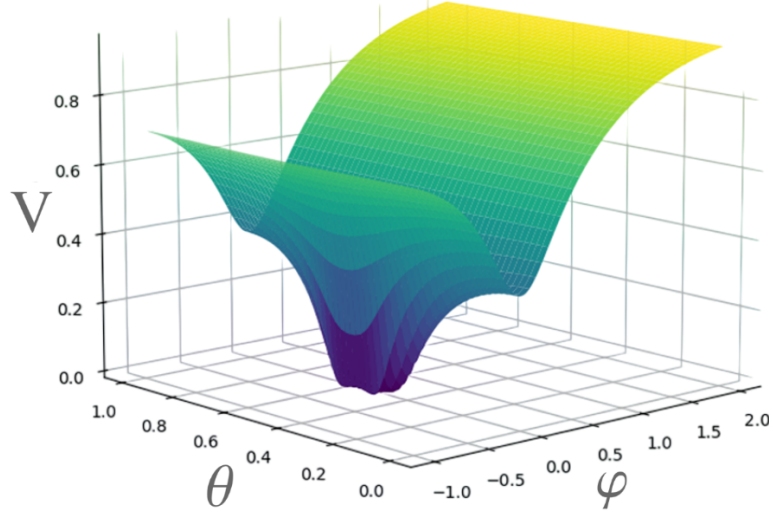


Figura 9: Potencial dado por (7.43) para $m = 2, n = 1, V_0 = 1, 3\alpha = 1, \beta = 123$.

Por otro lado, en las figuras 10 y 11 se observa que el modelo describe una fase inflacionaria sostenida incluso frente a variaciones en las condiciones iniciales.

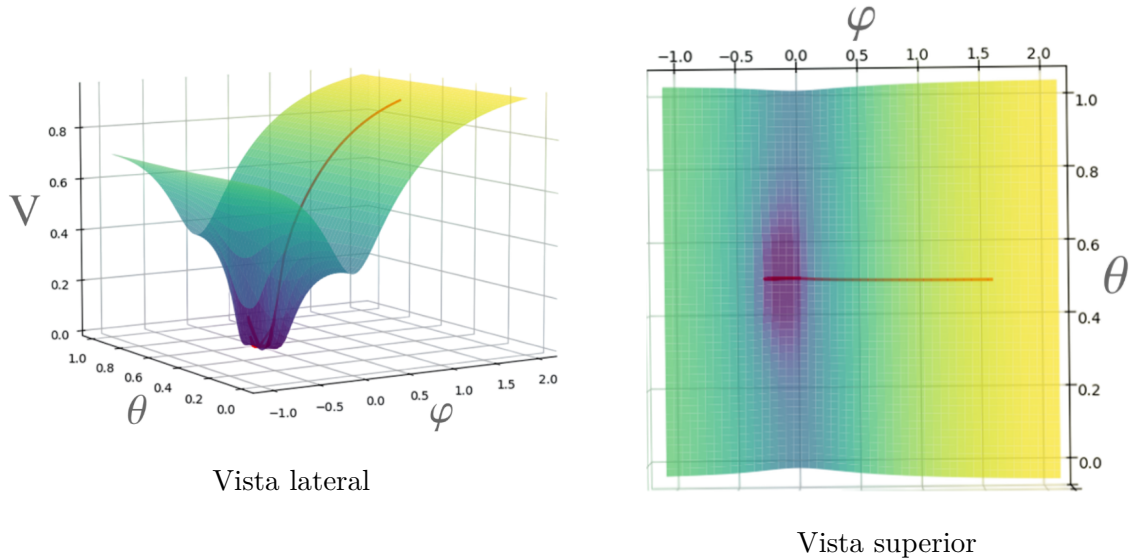


Figura 10: Evolución del potencial (7.43) para $m = 2, n = 1, V_0 = 1, 3\alpha = 1, \beta = 123$. Condiciones iniciales $\varphi = 1.5, \theta = 0.5$

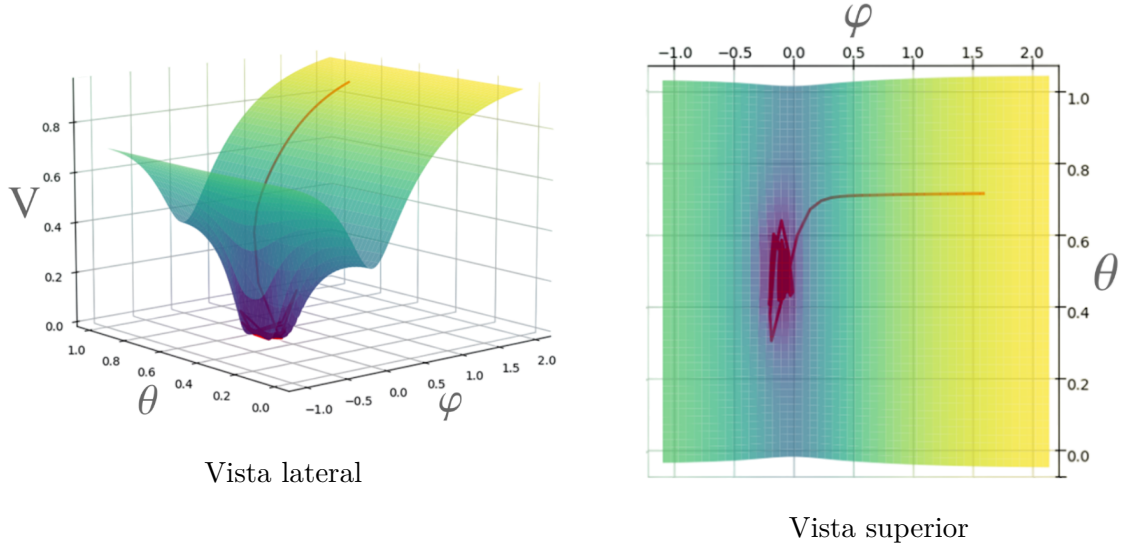


Figura 11: Evolución del potencial (7.43) para $m = 2, n = 1, V_0 = 1, 3\alpha = 1, \beta = 123$. Condiciones iniciales $\varphi = 1.5, \theta = 0.7$

Una vez comprobada esta recuperación, nos enfocamos en el análisis de dos configuraciones nuevas que no han sido exploradas anteriormente: los casos $m = 4, n = 4$ y $m = 10, n = 1$. Estas elecciones permiten ilustrar cómo los parámetros (m, n) modifican la estructura del potencial, afectando tanto su pendiente como su curvatura, lo cual influye directamente en la dinámica inflacionaria resultante. En particular, para el caso $m = 10, n = 1$, no solo mostramos la forma del potencial, sino que además realizamos un estudio detallado de la evolución dinámica del sistema bajo distintas condiciones iniciales. Las simulaciones correspondientes ilustran cómo varía la trayectoria de los campos, permitiendo evaluar la robustez del modelo frente a dichas variaciones y confirmar su compatibilidad con un escenario inflacionario.

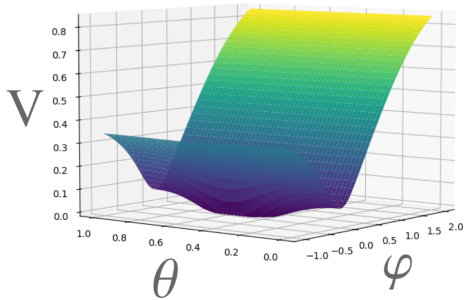


Figura 12: Potencial dado por (7.43) para $m = 4, n = 4, V_0 = 1, 3\alpha = 1, \beta = 123$.

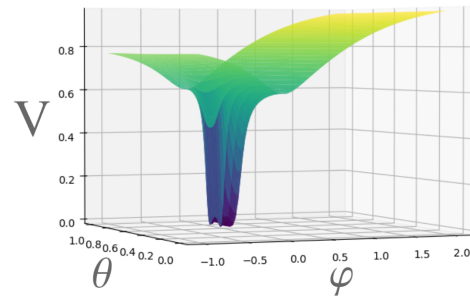


Figura 13: Potencial dado por (7.43) para $m = 10, n = 1, V_0 = 1, 3\alpha = 1, \beta = 123$.

Finalmente, en las figuras 14 y 15 se observa que, nuevamente, el modelo describe una fase inflacionaria sostenida incluso frente a variaciones en las condiciones iniciales.

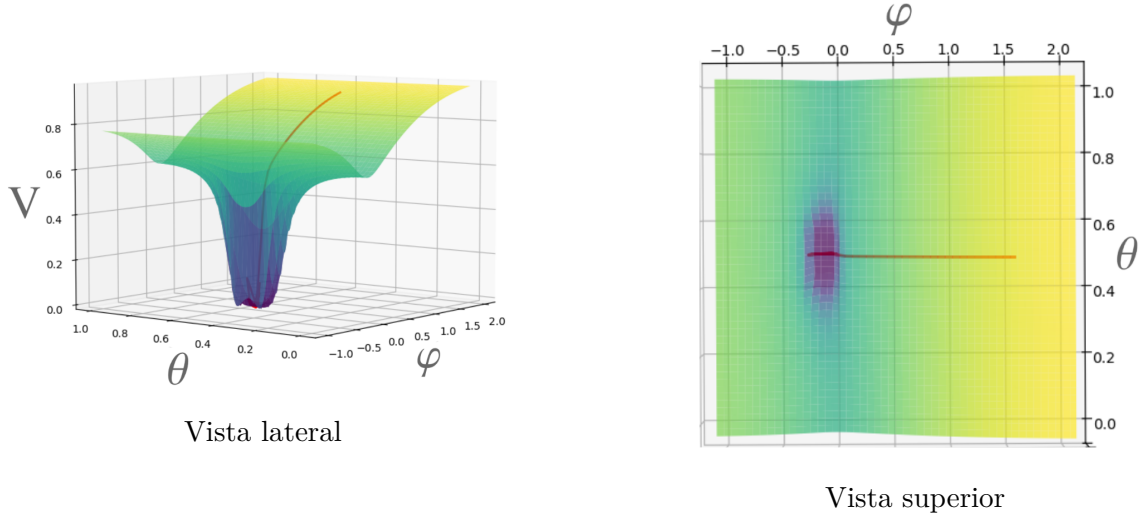


Figura 14: Evolución del potencial dado por (7.43) para $m = 10, n = 1, V_0 = 1, 3\alpha = 1, \beta = 123$. Condiciones iniciales $\phi = 1.5, \theta = 0.5$

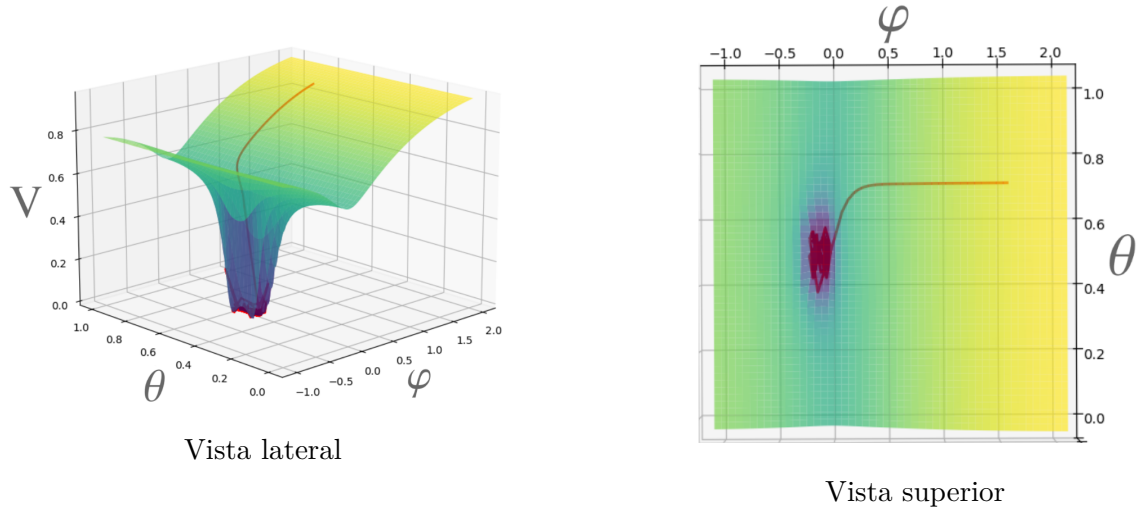


Figura 15: Evolución del potencial dado por (7.43) para $m = 10, n = 1, V_0 = 1, 3\alpha = 1, \beta = 123$. Condiciones iniciales $\phi = 1.5, \theta = 0.7$

Concluimos que la construcción general propuesta no solo reproduce correctamente los potenciales ya conocidos en el caso $m = 2, n = 1$, validando así su consistencia, sino que también permite generar nuevas configuraciones cuya estructura puede ajustarse mediante los parámetros m y n . El estudio dinámico de estos casos muestra que el comportamiento inflacionario del modelo se mantiene robusto frente a variaciones en las condiciones iniciales. Además, los valores predichos para los observables cosmológicos n_s y r permanecen dentro del mismo rango que los modelos ya conocidos, debido a la universalidad del mecanismo de atractores alfa y sus versiones invariantes modulares.

8. Conclusiones

La estructura teórica desarrollada en este trabajo se inscribe dentro de una de las líneas de investigación más activas y ambiciosas de la física moderna: la cosmología de precisión y su conexión con teorías fundamentales. A través del estudio progresivo de la relatividad general, los modelos cosmológicos estándares y los escenarios inflacionarios, hemos construido una narrativa que desemboca en los α -attractors, una clase de modelos que no solo sintetizan muchas de las ideas previas, sino que además ofrecen una plataforma efectiva para establecer relaciones entre la cosmología teórica y la teoría de cuerdas.

El análisis de la inflación, tanto en su formulación básica (slow-roll) como en sus extensiones multifield, ha permitido identificar mecanismos robustos capaces de explicar las condiciones iniciales del universo observable y explicar algunas de las problemáticas que la teoría del Big Bang presentaba. Este marco cobra una especial relevancia al introducir la idea de atractores inflacionarios, estructuras dinámicas que, sin importar los detalles iniciales, guían la evolución hacia un comportamiento universal compatible con los datos observacionales actuales. La geometría del espacio de campos, y en particular el uso de variedades hiperbólicas como $\mathbb{H}^2$, se revela aquí como un ingrediente central, mostrando cómo conceptos tradicionalmente geométricos adquieren un papel físico tangible.

Más allá del aspecto puramente teórico, la sección dedicada a las perturbaciones inflacionarias y su tratamiento mediante técnicas de cuantización sobre un fondo dinámico evidencia la madurez del formalismo y su capacidad para conectar las predicciones del modelo con los datos observacionales. En este marco, hemos propuesto un modelo basado en la familia de potenciales $V^{(n,m)}$ (7.43), que generaliza los α -attractors de Linde et al. [18], y hemos evaluado su viabilidad mediante simulaciones numéricas. Esto resalta la importancia de las herramientas de cosmología computacional, que no solo respaldan el análisis realizado, sino que también preparan el terreno para futuras investigaciones en modelización numérica y ajuste de parámetros. Además, hemos motivado la aparición de simetrías no triviales, como las invariancias bajo $SL(2, \mathbb{R})$ o $SL(2, \mathbb{Z})$, al mostrar cómo permiten capturar aspectos más profundos de teorías fundamentales como la teoría de cuerdas. Este hecho refuerza la idea de que el estudio del universo temprano no solo proporciona información sobre el pasado cosmológico, sino que también constituye un laboratorio privilegiado para explorar la física a escalas de energía inaccesibles por otros medios.

En su conjunto, este trabajo pretende destacar cómo, a través del diálogo constante entre relatividad general, geometría diferencial, teoría cuántica de campos y física de altas energías, la cosmología contemporánea ha evolucionado hacia una disciplina de gran profundidad teórica y relevancia fenomenológica. El estudio de los α -attractors no solo ejemplifica esta intersección, sino que además subraya la elegancia con la que ciertas construcciones matemáticas logran capturar la complejidad del universo primitivo.

9. Notas y agradecimientos

Quisiera finalizar expresando mi más sincero agradecimiento a mis tutores, **Adolfo Guarino Almeida** y **George Alestas**, por su constante guía, apoyo y orientación a lo largo de este trabajo. Sus observaciones, sugerencias y, especialmente, su ayuda en la comprensión profunda de la materia han sido fundamentales para el desarrollo de este proyecto.

Este trabajo se ha inspirado principalmente en el artículo de *Renata Kallosh y Andrei Linde, $SL(2, Z)$ Cosmological Attractors* [18] y en el libro de *D. Baumann, Cosmology*, [1], los cuales motivaron el estudio de la teoría inflacionaria y de los atractores alfa en particular. Dichos trabajos han servido como puntos de partida para sustentar la mayoría de los fundamentos teóricos expuestos a lo largo de este trabajo.

En cuanto a las otras fuentes bibliográficas que han contribuido sustancialmente al contenido de este trabajo, se deben mencionar el libro de *J. Foster y J. D. Nightingale, A Short Course in General Relativity*, [2], que constituye el núcleo teórico sobre el cual se articula gran parte de la relatividad general expuesta, y las notas *S. M. Carroll, Lecture Notes on General Relativity*, [3] que también fueron una guía central a la hora de presentar los conceptos elementales de la cosmología moderna.

Adicionalmente, se ha tomado inspiración y algunos resultados de capítulos concretos de otras referencias relevantes. En particular, la sección 5. *Modelos de Inflación* de este texto toma fuerte inspiración de los textos *D. Wands, Multiple Field Inflation*, [7] y *A. D. Linde Hybrid Inflation* [8], los cuales han aportado una visión introductoria precisa a diversos modelos inflacionarios. Asimismo, la sección 6. *Perturbaciones inflacionarias* de este trabajo se basa en *A. Riotto, Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations* [9], una fuente valiosa de información para el tratamiento de las perturbaciones cosmológicas en el contexto del análisis de Fourier.

A todos los autores mencionados, directa o indirectamente, mi reconocimiento por la profundidad y claridad de sus contribuciones, sin las cuales este trabajo no habría sido posible.

10. Bibliografía

- [1] D. Baumann, *Cosmology*, Cambridge University Press, 2022.
- [2] J. Foster y J. D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*, Springer, 2^a edición, 2006.
- [3] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, December 1997. Available at: arXiv:gr-qc/9712019v1.
- [4] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, Department of Physics, Harvard University, Cambridge, MA, and School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 2009. Available at: arXiv:0907.5424 [hep-th].
- [5] D. Baumann, *Cosmology – Part III Mathematical Tripos*, University of Cambridge, Lecture Notes, 2013.
- [6] K. Lozanov, *Lectures on Reheating after Inflation*, 2018 MPA Lecture Series on Cosmology, Max Planck Institute for Astrophysics, Garching, Germany, February 27, 2018.
- [7] D. Wands, *Multiple Field Inflation*, Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, 2007.
Disponible en: arXiv:astro-ph/0702187.
- [8] A. D. Linde, *Hybrid Inflation*, Department of Physics, Stanford University, SU-ITP-93-17, July 1993. Disponible en: arXiv:astro-ph/9307002.
- [9] A. Riotto, *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*, INFN, Sezione di Padova, via Marzolo 8, I-35131, Padova, Italy. Lectures given at the Summer School on Astroparticle Physics and Cosmology, Trieste, 17 June–5 July 2002. Disponible en: arXiv:hep-ph/0210162.
- [10] G. Mera Álvarez, *Dualidad gauge/gravedad: una incursión desde teoría de cuerdas*, Trabajo Fin de Estudios, Grado en Física, Supervisado por Y. Lozano Gómez, Universidad de Oviedo, 2025.
- [11] D. Baumann and L. McAllister, *Inflation and String Theory*, Cambridge University Press, 2015.
- [12] R. T. Jantzen, *Geodesics on the Torus and Other Surfaces of Revolution Clarified Using Undergraduate Physics Tricks, with Bonus: Nonrelativistic and Relativistic Kepler Problems*, Department of Mathematics and Statistics, Villanova University, 23 de mayo de 2010.

- [13] N. Aghanim et al. [Planck Collaboration], *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, *Astronomy & Astrophysics* **641** (2020) A6, arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].
- [14] Y. Akrami et al. [Planck Collaboration], *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*, *Astron. Astrophys.* **641**, A10 (2020), arXiv:1807.06211 [astro-ph.CO].
- [15] A. Guarino, *Lectures on Kaluza-Klein Reduction*, Lecture notes, Université Libre de Bruxelles, <https://www.adolfoguarino.com/notes.html>. Última revisión: 22 de mayo de 2025.
- [16] A. Guarino, *Lecture Notes at Mexico: Type II Flux Compactifications*, <https://www.adolfoguarino.com/notes.html>. Última revisión: 22 de mayo de 2025.
- [17] J. Franklin, *Classical Field Theory*, Cambridge University Press, 2017. Reed College, Oregon.
- [18] R. Kallosh and A. Linde, *SL(2,Z) Cosmological Attractors*, arXiv:2408.05203v2 [hep-th] (2024). Stanford Institute for Theoretical Physics and Department of Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA.
- [19] R. Kallosh, A. Linde, and D. Roest, *Superconformal Inflationary-Attractors*, arXiv:1311.0472v1 [hep-th] (2013). Department of Physics and SITP, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA; Centre for Theoretical Physics, University of Groningen, Nijenborgh 4, 9747 AG Groningen, The Netherlands.
- [20] Y. Akrami, R. Kallosh, A. Linde, and V. Vardanyan, *The landscape, the swampland and the era of precision cosmology*, arXiv:1808.09440v3 [hep-th] (2018).
- [21] Y. Akrami, R. Kallosh, A. Linde, y V. Vardanyan, *Dark Energy, Attractors, and Large-Scale Structure Surveys*, arXiv:1712.09693v3 [hep-th] (2018).
- [22] M. P. Hobson, G. Efstathiou y A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.
- [23] M. Brinkmann, M. Cicoli y P. Zito, *Starobinsky Inflation from String Theory*, arXiv:2303.05559 [hep-th], 2023.
- [24] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), K1 (1921) 966.
- [25] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeitschrift für Physik **37** (1926) 895.
- [26] Planck Collaboration: Y. Akrami et al., *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*, *Astron. Astrophys.* **641**, A10 (2020), arXiv:1807.06211 [astro-ph.CO].