



Universidad de Oviedo

Trabajo Fin de Grado

Aplicación de la ecuación del calor
al estudio del efecto
magnetocalórico

Grado en Física

Memoria presentada por: Celia Martín Juan

Tutores: Pablo Álvarez Alonso
y Javier López García

Oviedo, enero 2025

Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional y por haber cultivado en mí el deseo de aprender.
Y a mi hermana, por su cariño y por estar siempre ahí.

Índice

RESUMEN	4
INTRODUCCIÓN	5
TERMODINÁMICA DEL EMC	11
Objetivos del Trabajo.....	15
EXPERIMENTAL	16
RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR	18
Planteamiento.....	18
Mecanismos de transferencia del calor.....	20
Desarrollo de la solución	24
Resolución de la ecuación del calor en una dimensión.....	31
Resolución de la ecuación del calor en dos dimensiones.....	34
RESULTADOS	37
Resultados en 1 dimensión.....	37
Resultados en 2 dimensiones.....	41
CONCLUSIONES	45
BIBLIOGRAFÍA	46
ANEXO	48

Índice de figuras

Figura 1: Dependencia térmica de la entropía con el campo magnético en un material ferromagnético ²	7
Figura 2: Esquema de cambio de temperatura, de T_0 a T_1 , con T_1 a T_0 , debido al aumento de campo magnético adiabáticamente ²	8
Figura 3: Esquema de variación isotérmica de entropía magnética debido al aumento de campo magnético ²	8
Figura 4: Esquema de la refrigeración magnética ⁵	9
Figura 5: Esquema del montaje experimental (a) y portamuestras (b). Adaptado de ref. 6....	17
Figura 6: Esquema del portamuestras.....	18
Figura 7: Esquema representando las capas de distintos materiales que conforman el del sistema.....	19
Figura 8: Conducción térmica entre capas de la muestra.....	21
Figura 9: Convección en la muestra.....	22
Figura 10: Radiación en la muestra.....	22
Figura 11: Campo magnético en función de la posición de la muestra de Gd y ajuste a curva sigmoide.....	25
Figura 12: Ajuste del campo magnético durante la imanación en función del tiempo.....	27
Figura 13: ΔS_m del Gd en función de la temperatura para distintos valores de H^{16}	28
Figura 14: Ajuste de ΔS_m en función de $\mu_0 H(T)$	29
Figura 15: Variación de la entropía magnética en función del tiempo para $\mu_0 H_{max} = 1.8$ T.....	30
Figura 16: Esquema discretización espacial.....	31
Figura 17: Discretización espacial de la muestra en 1D.....	33
Figura 18: Discretización espacial de la muestra en 2D.....	35
Figura 19: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones adiabáticas ideales en 1D.....	37
Figura 20: Variación de ΔT a lo largo del tiempo para distintos valores de campo H , de 1.0 T a 5.6 T en saltos de 0.2 T, en condiciones ideales en 1D.....	38
Figura 21: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones realistas en 1D.....	39
Figura 22: Variación de ΔT a lo largo del tiempo para distintos valores de campo H , de 1.0 T a 5.6 T en saltos de 0.2 T, en condiciones reales en 1D.....	40
Figura 23: Ajuste exponencial de la dependencia de la variación de la temperatura con el campo en condiciones ideales en 1D.....	40
Figura 24: Ajuste exponencial de la dependencia de la variación de la temperatura con el campo en condiciones reales en 1D.....	41
Figura 25: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones adiabáticas ideales en 2D.....	42
Figura 26: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones reales en 2D.....	42
Figura 27: Ajuste exponencial de la dependencia de la máxima variación de la temperatura con el campo en condiciones ideales en 2D.....	43
Figura 28: Ajuste exponencial de la dependencia de la máxima variación de la temperatura con el campo en condiciones reales en 1D.....	43

RESUMEN

El efecto magnetocalórico, un fenómeno por el cual ciertos materiales experimentan cambios de temperatura al ser sometidos a un campo magnético variable, tiene un alto potencial en aplicaciones como la refrigeración magnética. Este trabajo se centra en el gadolinio (Gd), que destaca por sus propiedades magnetocalóricas y su temperatura de Curie (~ 300 K), adecuada para aplicaciones a temperatura ambiente. El objetivo principal de este estudio es modelar la variación adiabática de temperatura (ΔT_{ad}) inducida por un campo magnético, utilizando métodos numéricos y experimentales para analizar la respuesta térmica del Gd bajo condiciones controladas.

Se desarrolló una simulación para modelar el comportamiento del material en condiciones realistas que incluyen pérdidas térmicas hacia el entorno, comparándose con datos obtenidos durante ciclos de imanación y desimanación. Los resultados muestran un ajuste preciso entre los datos experimentales y el modelo, validando su capacidad para capturar la evolución térmica del material en sistemas no perfectamente aislados. Adicionalmente, se extrapoló el modelo a condiciones ideales revelando que, en ausencia de pérdidas térmicas, el efecto magnetocalórico genera incrementos de temperatura significativamente mayores maximizando la eficiencia térmica del proceso.

Este trabajo también analiza la dependencia de ΔT_{ad} respecto a la intensidad del campo magnético aplicado (H_{max}) en condiciones ideales y realistas, evidenciando una relación más directa bajo escenarios ideales. La simulación desarrollada proporciona un marco teórico sólido para predecir el rendimiento máximo de sistemas magnetocalóricos y fundamentar futuras aplicaciones tecnológicas.

INTRODUCCIÓN

El cambio climático es uno de los mayores desafíos a los que se enfrenta la humanidad en el siglo XXI. La quema de combustibles fósiles para la generación de energía es una de las principales causas del aumento de gases de efecto invernadero, que a su vez contribuyen al calentamiento global. El consumo energético, especialmente en los sectores doméstico e industrial, juega un papel significativo en esta problemática. Por lo tanto, encontrar soluciones para reducir el consumo energético y mejorar la eficiencia de los sistemas existentes es crucial para mitigar el cambio climático.

El EMC tiene sus primeras raíces en el siglo XIX, cuando James Prescott Joule, en 1843, observó que el calor era generado en muestras de hierro sujetas a un campo magnético variable. Para la década de 1880, este fenómeno era ampliamente conocido y aceptado. Posteriormente, William Thomson (Lord Kelvin) demostró basándose en principios termodinámicos que, si la imanación de un material varía con la temperatura, el material se calienta o enfría de manera reversible al ser introducido o retirado de un campo magnético. Estas observaciones sentaron las bases para una comprensión teórica del EMC.

En 1881, Emil Gabriel Warburg estudió el fenómeno de la histéresis magnética, identificando cómo los materiales ferromagnéticos experimentan pérdidas energéticas durante ciclos de imanación y desimanación. En su investigación, Warburg demostró que el trabajo realizado sobre un material en estos ciclos se disipa como calor, un principio que más tarde se conocería como la Ley de Warburg. Aunque no exploró directamente el efecto magnetocalórico, sus experimentos establecieron una conexión fundamental entre el calor disipado y los cambios en el estado magnético de un material. Este trabajo fue clave para destacar la importancia de analizar la interacción entre campos magnéticos y propiedades térmicas, sentando las bases para futuros avances en la comprensión del comportamiento magnético de los materiales y su impacto térmico, contribuyendo indirectamente a los estudios que culminarían en el desarrollo del EMC.

En 1917, Pierre Weiss y Auguste Piccard realizaron observaciones experimentales detalladas del EMC al estudiar el comportamiento del níquel cerca de su temperatura de Curie. Además, desarrollaron un marco teórico basado en la teoría del campo molecular, que explicaba cómo el alineamiento de los momentos magnéticos influye en la respuesta térmica de los materiales. Este trabajo consolidó el concepto moderno del EMC y del magnetismo. Por lo tanto, aunque los primeros indicios del EMC fueron reportados en el siglo XIX, el crédito por la descripción

teórica y experimental completa del fenómeno recae en Weiss y Piccard. Según Smith, el trabajo de los investigadores del siglo XIX estableció las bases para explorar la conexión entre el magnetismo y el calor, mientras que Weiss y Piccard proporcionaron un modelo teórico fundamental para la comprensión y utilización del EMC.

La materia está compuesta por átomos y, ciertos elementos químicos, como el hierro, el níquel o el cobalto, pueden presentar momentos magnéticos debido a la presencia de electrones desapareados en el átomo. Normalmente, estos momentos magnéticos están orientados al azar debido a las fluctuaciones térmicas, dando lugar a un comportamiento magnético que se conoce como paramagnetismo. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, como la aplicación de un campo magnético (H), enfriamiento por debajo de cierta temperatura crítica, alta presión... se pueden estabilizar otras configuraciones magnéticas en las que los momentos se alinean de forma ordenada, dando lugar a una transición a un estado magnéticamente ordenado como puede ser el ferromagnético, ferrimagnético o antiferromagnético, entre otros¹. Esta transición conlleva una reducción de la entropía de la red magnética.

Para entender cómo surge el EMC, es útil analizar la variación total de la entropía en un sistema magnético. Considerando un sistema de espines desordenado, la entropía total (S_T) puede describirse mediante tres contribuciones: la entropía de la red (S_r), la magnética (S_m) y la electrónica (S_l)²:

$$S_T = S_r + S_m + S_l \quad (1)$$

A menudo, la contribución electrónica a la entropía total se ignora debido a su magnitud insignificante en comparación con las contribuciones de la red y la magnética, con lo que la ecuación de la entropía total quedaría:

$$S_T = S_r + S_m \quad (2)$$

La contribución de la red (S_r) está relacionada con la temperatura del sistema (T), mientras que S_m está asociada al grado de ordenamiento magnético. Si H se aplica al material adiabáticamente (sin intercambio de calor con el entorno), el sistema experimenta una redistribución de la entropía entre la contribución magnética y la contribución de la red, manteniendo constante la entropía total del sistema:

$$\Delta S_T = \Delta S_r + \Delta S_m = 0 \quad (3)$$

La **Figura 1** representa la dependencia térmica de la entropía de un sistema magnético en función del campo aplicado. Al aplicar un campo magnético a la temperatura T_0 , la presencia del MCE puede causar en el sistema un cambio adiabático de temperatura $\Delta T_{ad} = T_1 - T_0$, representado en la **Figura 1** como el segmento de A-B. Alternativamente, al aplicar un campo magnético, puede producirse un cambio isotermo de la entropía magnética $\Delta S_m = S_0 - S_1$, representado en la **Figura 1** como el segmento A-C.

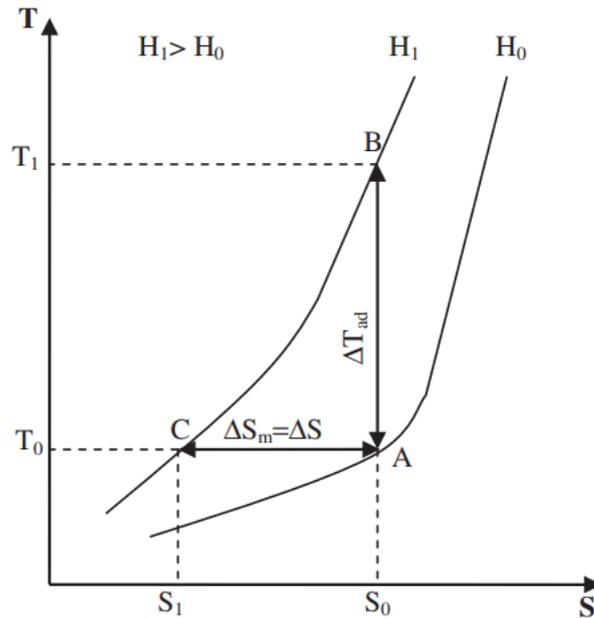


Figura 1: Dependencia térmica de la entropía con el campo magnético en un material ferromagnético. Tomado de ref. 3.

El cambio adiabático de temperatura ΔT_{ad} (**Figura 2:** Esquema de cambio de temperatura, de T_0 a T_1 , con T_1 a T_0 , debido al aumento de campo magnético adiabáticamente. Tomado de ref.3.) ocurre cuando la entropía se mantiene constante. Al aplicar adiabáticamente un campo magnético ($H_1 > H_0$), los momentos magnéticos del material se alinean paralelamente al campo aplicado, lo que disminuye la entropía magnética (S_m). Como el proceso es adiabático, la entropía total (S_T) debe mantenerse constante. Para compensar la disminución de S_m , la entropía de la red (S_r) aumenta, lo que provoca un incremento en la temperatura del material desde T_0 hasta T_1 .

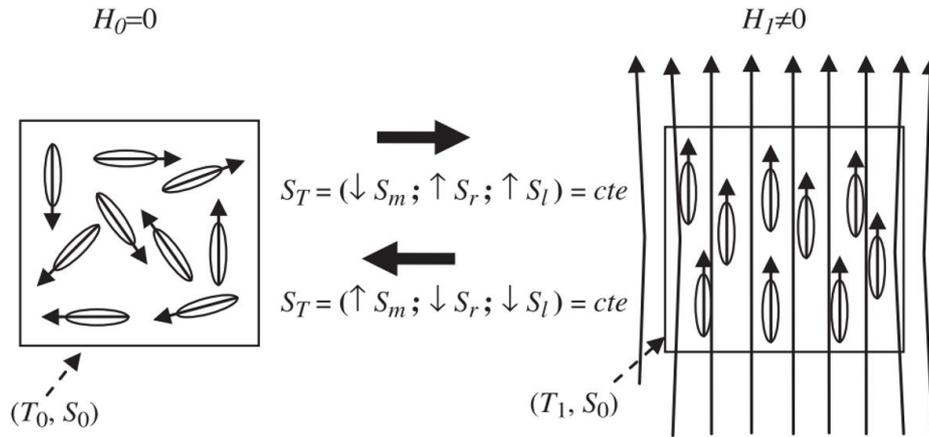


Figura 2: Esquema de cambio de temperatura, de T_0 a T_1 , con T_1 a T_0 , debido al aumento de campo magnético adiabáticamente. Tomado de ref.3.

El cambio isotérmico de entropía (**Figura 3**) se da cuando el campo magnético aplicado sobre el sistema experimenta una variación mientras la temperatura del sistema se mantiene constante. A medida que el campo magnético aumenta, los momentos magnéticos del material tienden a alinearse con el campo aplicado. Este proceso reduce S_m , ya que los momentos magnéticos pasan a un estado de mayor orden. El sistema ajusta su entropía total, reduciéndola de S_0 a S_1 , para reflejar el cambio en el campo magnético y absorber la cantidad de calor necesaria para mantener constante la temperatura.

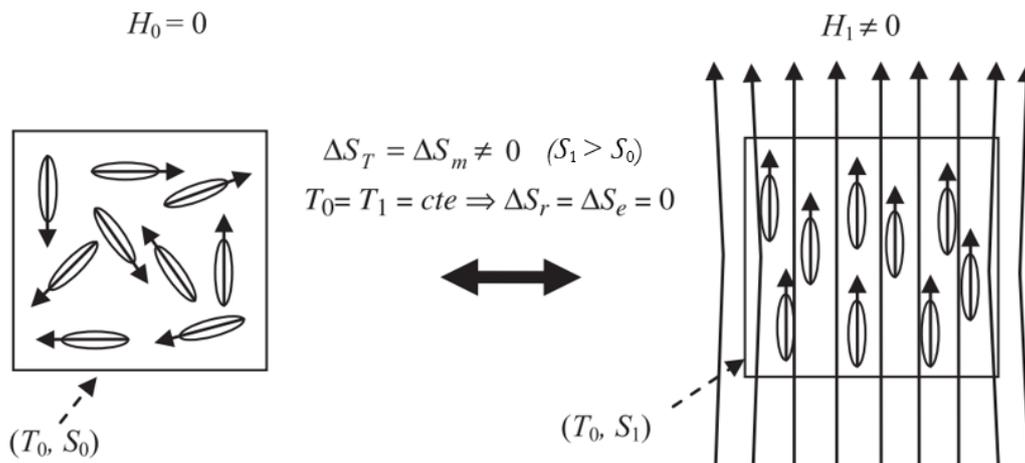


Figura 3: Esquema de variación isotérmica de entropía magnética debido al aumento de campo magnético. Tomado de ref. 3.

Aunque muchos materiales de segundo orden muestran un EMC directo (la temperatura del material aumenta al exponerlo adiabáticamente a un campo magnético), como el gadolinio, existen materiales con EMC inverso (la temperatura del material se reduce al incrementar adiabáticamente el campo magnético aplicado), como los de la familia Ni-Mn-In y Ni-Mn-Sn en la transformación martensítica^{4,5}.

Una de las principales aplicaciones del EMC es la refrigeración magnética⁶. Básicamente, los sistemas de refrigeración magnéticos sustituyen los gases por sólidos magnéticos y los ciclos de compresión-expansión por ciclos de imanación-desimanación.

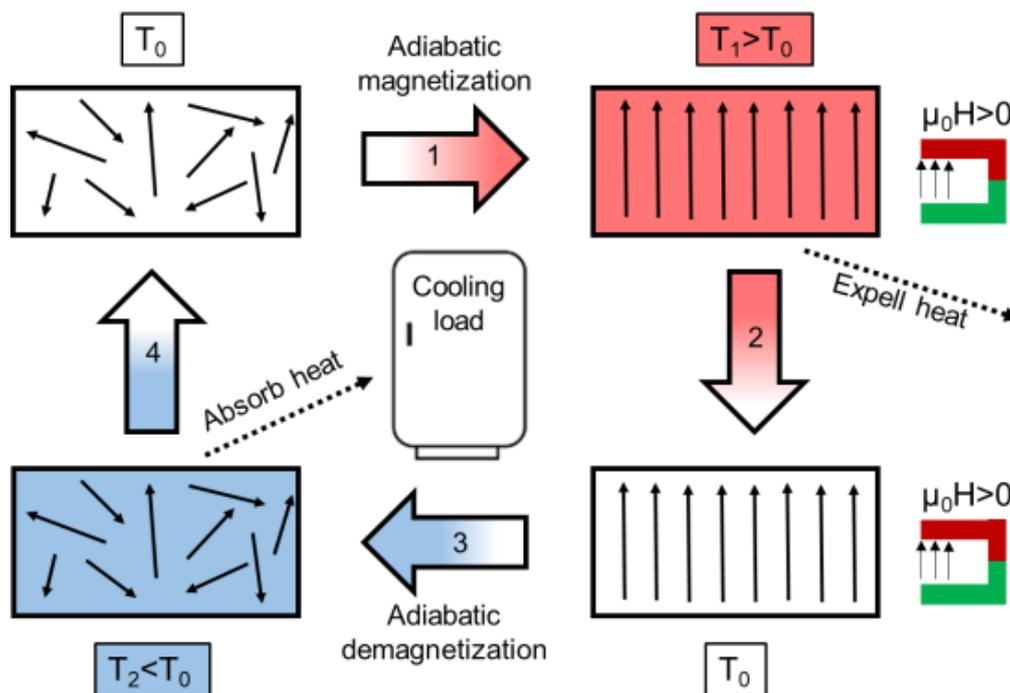


Figura 4: Esquema de la refrigeración magnética. Tomado de ref. 7.

El esquema mostrado en **Figura 4** ilustra un ciclo de refrigeración magnética indicando cada uno de los procesos. A continuación, los compararemos con los del proceso de refrigeración convencional.

1. Aplicación del Campo Magnético/Presión de manera adiabática

- Refrigeración Magnética: El material magnetocalórico (MMC) está inicialmente en estado con momentos magnéticos desordenados debido a la agitación térmica (etiquetado como 1 en **Figura 4**).

- Refrigeración convencional: En este paso, el refrigerante gaseoso se comprime mediante un compresor, lo que aumenta su presión y, consecuentemente, su temperatura debido a la primera ley de la termodinámica (conservación de energía).

2. Transferencia de Calor al Ambiente

- Refrigeración Magnética: El MMC, ahora a una temperatura superior debido al proceso de imanación, se pone en contacto térmico con un disipador térmico al que le transfiere calor Q hasta igualar las temperaturas de ambos sistemas (etiquetado como 2 en la **Figura 4**). Este disipador puede ser un intercambiador de calor que está en contacto con el entorno, permitiendo que el calor sea liberado al ambiente y que el MMC vuelva a su temperatura inicial.

- Refrigeración Convencional: De manera similar, el refrigerante caliente pasa a través de los serpentines del condensador. Durante este proceso, el refrigerante libera calor al ambiente exterior y se condensa, pasando del estado gaseoso al líquido.

3. Desimanación/expansión

- Refrigeración Magnética: Al retirar el campo magnético adiabáticamente, los momentos magnéticos del MMC vuelven a un estado desordenado aumentando la entropía magnética del sistema mientras que la entropía total se mantiene constante (etiquetado como 3 en **Figura 4**). Como resultado, la entropía de la red cristalina se reduce y, por ende, la temperatura del MMC disminuye.

- Refrigeración Convencional: Este paso corresponde a la expansión del refrigerante líquido a través de una válvula de expansión o un dispositivo similar. La expansión reduce la presión del refrigerante, lo que provoca una caída en su temperatura debido a la absorción de energía interna para mantener la entalpía constante.

4. Absorción de Calor del Espacio Refrigerado

- Refrigeración Magnética: El MMC, ahora en un estado frío debido a la desimanación, absorbe calor de la carga que se desea refrigerar (etiquetado como 4 en **Figura 4**). Esta absorción de calor aumenta la temperatura del MMC de nuevo a su estado inicial, completando el ciclo.

- Refrigeración Convencional: De manera similar, el refrigerante frío fluye a través de los serpentines del evaporador situados dentro del espacio refrigerado. Aquí, el refrigerante

absorbe calor del interior del frigorífico, evaporándose en el proceso y proporcionando el efecto de enfriamiento deseado.

En conclusión, la refrigeración magnética presenta una alternativa a los ciclos de compresión-expansión, aprovechando las propiedades magnéticas de los materiales. A lo largo del ciclo de imanación-desimanación, se absorbe y libera calor de manera similar al proceso de refrigeración convencional, pero sin la necesidad de utilizar gases con efecto invernadero y con una mayor eficiencia⁸. Esto reduce significativamente la huella ambiental de esta tecnología y abre nuevas posibilidades para el desarrollo de sistemas más sostenibles⁹.

TERMODINÁMICA DEL EMC

Este trabajo se centra en el estudio del Gd, tierra rara que experimenta transiciones de fase magnética de segundo orden¹⁰, por lo que el siguiente desarrollo teórico explica la termodinámica del EMC para este tipo de transiciones.

Consideramos que la entropía total de un sistema magnético con transición de fase de segundo orden es una función continua de la temperatura y el campo magnético y nuestro sistema se encuentra en equilibrio termodinámico.

La primera ley de la termodinámica establece que su energía interna de un sistema es una función de sus propiedades extensivas, como la entropía (S), el volumen (V) y la variable extensiva magnética (M), que representa la componente del momento dipolar magnético total en la dirección del campo magnético aplicado⁹. En este trabajo, consideramos que la presión y el volumen son constantes, lo que nos permite expresar la energía interna como:

$$U(S, V, M) = TS - PV + \mu_0 HM \quad (4)$$

donde la temperatura (T) y el campo magnético ($\mu_0 H$) son las variables intensivas conjugadas de S y M respectivamente.

En este trabajo, consideramos que la presión (P) y el volumen (V) son constantes. Esto implica que los términos relacionados con estas variables no contribuyen a las derivadas en la forma diferencial de la energía interna, permitiéndonos expresar la energía interna como:

$$U(S, V, M) = TS + \mu_0 HM \quad (5)$$

La energía interna se puede escribir en forma diferencial como:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_M dS + \mu_0 \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_S dM \quad (6)$$

con:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_M = T(S, M) \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_S = \mu_0 H(S, M) \quad (8).$$

La transformación de Legendre de $U(S, M)$ con respecto a S y M es:

$$\mathcal{A} = U - TS - \mu_0 MH \quad (9)$$

Y su forma diferencial:

$$d\mathcal{A} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial T}\right)_H dT + \mu_0 \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial H}\right)_T dH \quad (10)$$

Los parámetros extensivos están dados por:

$$S(T, H) = -\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial T}\right)_H \quad (11)$$

$$M(T, H) = -1/\mu_0 \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial H}\right)_T$$

A partir del teorema elemental de cálculo¹¹, las segundas derivadas mixtas de \mathcal{A} respecto a T y H son iguales. Así, usando (11), obtenemos la siguiente relación de Maxwell:

$$1/\mu_0 \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H \quad (12)$$

Integrando la ecuación (12) con el cambio de campo magnético de H_1 a H_2 ($\Delta H = H_2 - H_1$):

$$\Delta S(T, H_2)_{\Delta H} = \mu_0 \int_{H_1}^{H_2} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH \quad (13).$$

Como vimos en la ecuación (2) la entropía total depende de la contribución electrónica S_l y de la entropía magnética S_m . En un proceso isotérmico, si el campo magnético varía $\Delta H = H_2 - H_1$, la entropía magnética del material cambia, mientras que S_r permanece sin cambios. Por lo tanto, a temperatura constante, el valor de $\Delta S_m(T, H_2)_{\Delta H}$ es igual a $\Delta S(T, H_2)_{\Delta H}$.

Sin embargo, cuando el campo magnético cambia adiabáticamente en ΔH , la entropía de la red cambia, resultando en una variación medible de la temperatura, conocida como cambio adiabático de temperatura ΔT_{ad} , que también se utiliza para describir el EMC:

$$\Delta T_{ad}(T, H_2)_{\Delta H} = T(S)_{H_2} - T(S)_{H_1} \quad (14)$$

para un ΔH fijo y T arbitrario.

Ahora desarrollaremos la fórmula que describe el cambio de temperatura adiabático.

La ecuación diferencial de la entropía total del sistema magnético, expresada como función de T y H es:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H dT + \mu_0 \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_T dH \quad (15)$$

Bajo un proceso adiabático $dS = 0$ por lo que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H dT = -\mu_0 \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_T dH \quad (16)$$

Teniendo en cuenta la definición de la capacidad calorífica para un conjunto de parámetros constantes x :

$$C_x = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x \quad (17)$$

y la ecuación (12), la variación de temperatura debida a un cambio infinitesimal en el campo magnético aplicado está dada por:

$$dT = -\mu_0 \frac{T}{C_H} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH \quad (18)$$

Integrando la ecuación (18):

$$\Delta T_{ad}(T, H_2)_{\Delta H} = -\mu_0 \int_{H_1}^{H_2} \frac{T}{C_H(T, H)} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H dH \quad (19)$$

se obtiene el cambio adiabático de temperatura.

También es posible determinar el cambio de entropía magnética a través de la definición de la capacidad calorífica¹². Según la segunda ley de la termodinámica, un pequeño cambio de entropía, a campo magnético constante, se puede escribir como:

$$dS = \frac{C_H(T, H)}{T} dT \quad (20)$$

Integrando la ecuación (20), y considerando que, de acuerdo con la tercera ley de la

termodinámica, la entropía en $T = 0$ se asume como cero:

$$\Delta S_M(T, H_2)_{\Delta H} = \Delta S(T, H_2)_{\Delta H} = \int_0^T \frac{C_H(T, H_2) - C_H(T, H_1)}{T} dT. \quad (21)$$

Partiendo de las expresiones para la variación de entropía magnética (13) y variación de temperatura adiabática (19) se llega a una relación aproximada entre ambas:

$$\Delta T_{ad}(T, H) = -\mu_0 \frac{T}{C_H(T)} \Delta S_M(T, H) \quad (22)$$

OBJETIVOS DEL TRABAJO

Uno de los principales desafíos en la investigación del EMC es que los sistemas experimentales no son perfectamente adiabáticos. La transferencia de calor con el entorno puede influir significativamente en los resultados, dificultando la interpretación precisa de los datos y su comparación con los modelos teóricos. Por ello, resulta fundamental abordar estas limitaciones y explorar metodologías que minimicen los efectos no adiabáticos. El estudio del efecto magnetocalórico en el Gd no solo amplía el conocimiento en la física de materiales, sino que también tiene importantes implicaciones prácticas, ya que el Gd es uno de los principales MMC.

En este sentido, este trabajo busca replicar el comportamiento magnetocalórico del Gd, desarrollando un modelo numérico que simule la transferencia de calor en función del campo magnético y otros parámetros magnetotérmicos, con el fin de mejorar la comprensión de los efectos experimentales y su concordancia con los modelos teóricos.

Los objetivos específicos de este trabajo son los siguientes:

- Desarrollar un modelo mediante el método de diferencias finitas para simular el EMC del Gd, considerando la variación de temperatura bajo la influencia de un campo magnético e incluyendo los efectos de la transferencia de calor con el entorno, con el objetivo de reflejar las condiciones no adiabáticas del sistema experimental.
- Analizar las discrepancias entre las simulaciones numéricas en condiciones de adiabaticidad y los resultados experimentales, identificando y evaluando los factores que influyen en dichas diferencias, tales como las condiciones ambientales, para extraer información de las propiedades magnetocalóricas ideales del Gd.

EXPERIMENTAL

En este apartado se describe el montaje experimental utilizado para obtener los datos de temperatura en función del tiempo necesarios para el estudio del EMC en Gd. El montaje es una configuración robusta y económica que permite medir directamente ΔT_{ad} inducida por un campo magnético.

El sistema experimental (**Figura 5**) consta de un electroimán que genera un campo magnético fijo con un entrehierro de 20 mm entre las piezas polares, alcanzando un máximo de 1.8 T para la apertura seleccionada (~ 10 mm)¹³. El campo magnético se monitoriza mediante una sonda Hall ubicada en el centro de una de las piezas polares. Por medio de un pistón neumático se inserta y extrae la muestra del campo magnético. El pistón, con un cilindro de 25 cm de largo, posiciona la muestra en el centro del electroimán, donde el campo magnético es máximo. Una plataforma de alúmina (70 mm de largo, 4 mm de ancho y 2 mm de espesor) sirve de base para la muestra. Incrustado en la plataforma de alúmina, se encuentra un calentador resistivo de tungsteno que permite controlar la temperatura de la muestra mediante una corriente continua controlada (Ver **Figura 6**).

La temperatura del entorno se controla por medio de un intercambiador de calor de doble tubo fabricado en latón que permite la circulación de aire enfriado con nitrógeno líquido (ver **Figura 5**). Un sistema de control proporcional-integral regula la temperatura para alcanzar el punto de consigna sin sobrecalentamiento o sobreenfriamiento en menos de dos minutos. Para medir la temperatura de la muestra con alta precisión se utiliza un termopar tipo T, que no se ve afectado por el campo magnético¹³.

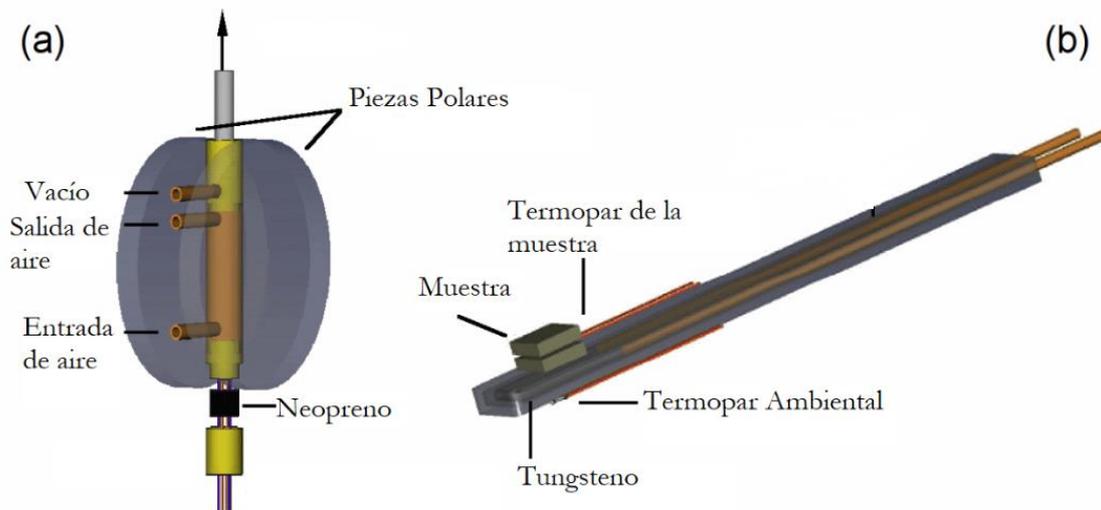


Figura 5: Esquema del montaje experimental (a) y portamuestras (b).
Adaptado de ref. 13.

El procedimiento para la obtención de datos se realiza de la siguiente manera: La temperatura inicial T_i de la muestra se estabiliza a un valor determinado usando el calentador de tungsteno. Una vez estabilizada la temperatura, la muestra se inserta rápidamente en la zona de campo magnético máximo mediante el pistón neumático. Esto provoca un cambio en la temperatura de la muestra debido al EMC en condiciones quasiadiabáticas. La temperatura de la muestra se monitoriza continuamente con el termopar. La diferencia entre la temperatura inicial T_i y la temperatura extrema alcanzada después de la inserción en el campo magnético se define como el cambio de ΔT_{ad} .

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL CALOR

La ecuación del calor es fundamental para describir cómo varía la temperatura en un medio. Para simular la variación de temperatura del Gd bajo el efecto del campo magnético vamos a resolver esta ecuación de manera numérica mediante el método de diferencias finitas. Este método proporciona una herramienta eficaz para discretizar la ecuación del calor, permitiendo calcular la temperatura en puntos discretos a lo largo del tiempo y el espacio. La elección de este método se justifica por su capacidad para manejar geometrías complejas y condiciones de contorno no lineales de manera eficiente y precisa.

PLANTEAMIENTO

Para abordar la resolución de la ecuación del calor en el contexto del experimento, se han tomado en cuenta las características específicas de la muestra y su entorno. El objetivo es desarrollar un modelo que represente de la manera más precisa la geometría (**Figura 6**) y las propiedades térmicas del sistema experimental.

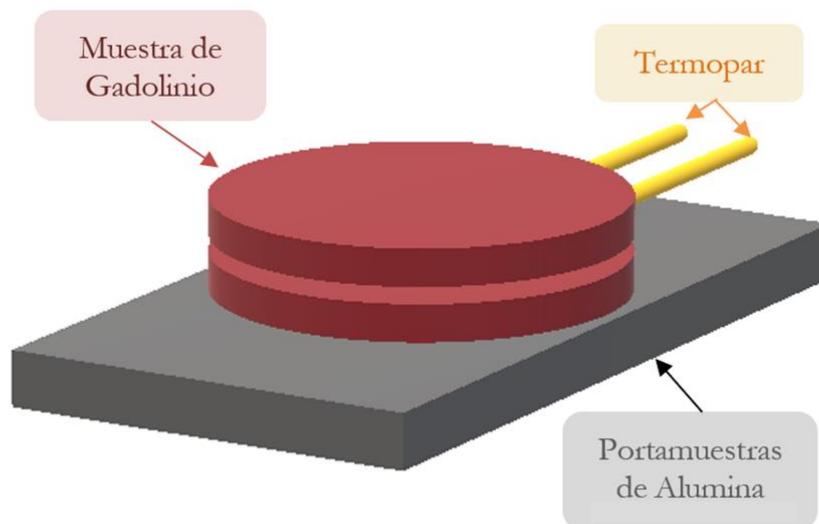


Figura 6: Esquema del portamuestras.

En el experimento considerado, la muestra está compuesta por varias capas de materiales con distintas propiedades térmicas, organizadas de la siguiente manera (**Figura 7**):

- Capa de Alúmina: En la base de la muestra, la Alúmina proporciona un soporte estructural robusto de baja conductividad térmica.

- Capa de Teflón: Sobre el tungsteno se encuentra una capa de Teflón, que actúa como un aislante térmico.
- Capa de Gadolinio: En el centro de la muestra, el Gd es el material de interés, donde se explora el efecto magnetocalórico.
- Capa de Teflón: Encima del Gd, una segunda capa de Teflón proporciona aislamiento térmico.



Figura 7: Esquema representando las capas de distintos materiales que conforman el del sistema.

Además, el experimento incluye un termopar insertado en el Gd para medir la temperatura en el centro de la muestra. Debido a su baja masa térmica, no consideraremos sus propiedades térmicas en nuestro modelo.

Para simplificar el problema y facilitar los cálculos numéricos, se ha realizado una aproximación bidimensional del sistema. Esta aproximación considera solo las dimensiones verticales (alto) y horizontales (ancho), asumiendo que la variación de temperatura en la dirección perpendicular a estas dimensiones es insignificante. De esta manera, se modela la placa en una representación plana donde cada material es representado como una capa distinta en el modelo numérico.

En la representación bidimensional, la geometría del sistema se puede visualizar de la siguiente manera:

- Zona 1 (Alúmina): La capa inferior, con una baja conductividad térmica, simula el soporte estructural de la muestra.

- Zona 2 (Teflón): La primera capa de aislamiento térmico situada encima del tungsteno.
- Zona 3 (Gadolinio): La capa central en la que ocurre el efecto magnetocalórico y donde se mide la temperatura.
- Zona 4 (Teflón): La segunda capa de aislamiento térmico sobre el Gd.

El termopar se encuentra insertado en el Gd, a lo largo de la capa central, y sirve como punto de referencia para medir la temperatura en el centro de la muestra.

MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DEL CALOR

Conducción Térmica

La conducción térmica, esquematizada en la **Figura 8**, es el mecanismo principal de transferencia de calor entre las capas del material. Este fenómeno se describe mediante la ley de Fourier, que establece que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura y a la conductividad térmica k del material. La ecuación que rige la conducción en una dimensión es:

$$Q_{Cond} = -k \frac{dT}{dz} \quad (23)$$

donde Q es el flujo de calor, k es la conductividad térmica del material y $\frac{dT}{dz}$ es el gradiente de temperatura, que representa el cambio de temperatura T a lo largo de una dirección específica (en este caso, el eje z).

Cada capa tiene una conductividad térmica k , calor específico c_p y densidad ρ específicas. La difusividad térmica α , propiedad física que indica la capacidad de un material para conducir calor en relación con su capacidad de almacenarlo, se calcula para cada capa utilizando la relación:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (24)$$

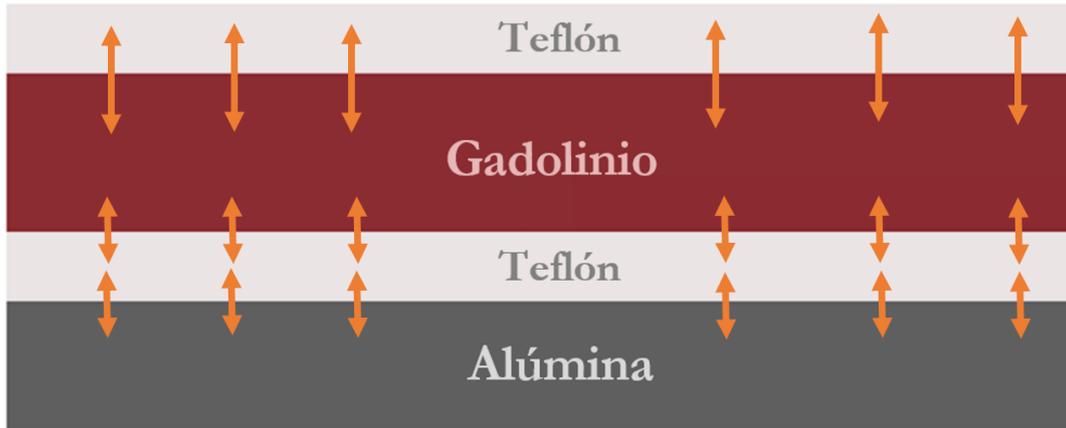


Figura 8: Conducción térmica entre capas de la muestra.

Convección

La convección es la transferencia de calor entre la superficie de un sólido y el fluido que lo rodea. Esta se modela usando el coeficiente de transferencia de calor por convección h . En nuestro sistema, la convección se considera en todas las caras exteriores de las capas, esquematizado en la **Figura 9**, que se encuentran en contacto con el entorno, en este caso una atmósfera enrarecida.

La transferencia de calor por convección se expresa con la Ley del enfriamiento de Newton¹⁴:

$$Q_{Conv} = h (T_s - T_\infty) \quad (25)$$

donde h es el coeficiente de convección que es propio de cada fluido, T_s hace referencia a la temperatura de la superficie que está en contacto con el fluido y T_∞ es la temperatura del fluido.



Figura 9: Convección en la muestra.

Radiación

La radiación térmica, esquematizado en la **Figura 10**, es la transferencia de calor en forma de ondas electromagnéticas, que se describe mediante la ley de Stefan-Boltzmann¹⁵:

$$Q_{Rad} = A \varepsilon \sigma T_e^4 \quad (26)$$

donde A es la superficie radiante, ε es la emisividad del material, σ es la constante de Stefan-Boltzmann y T_e es la temperatura efectiva (Temperatura absoluta de la superficie).

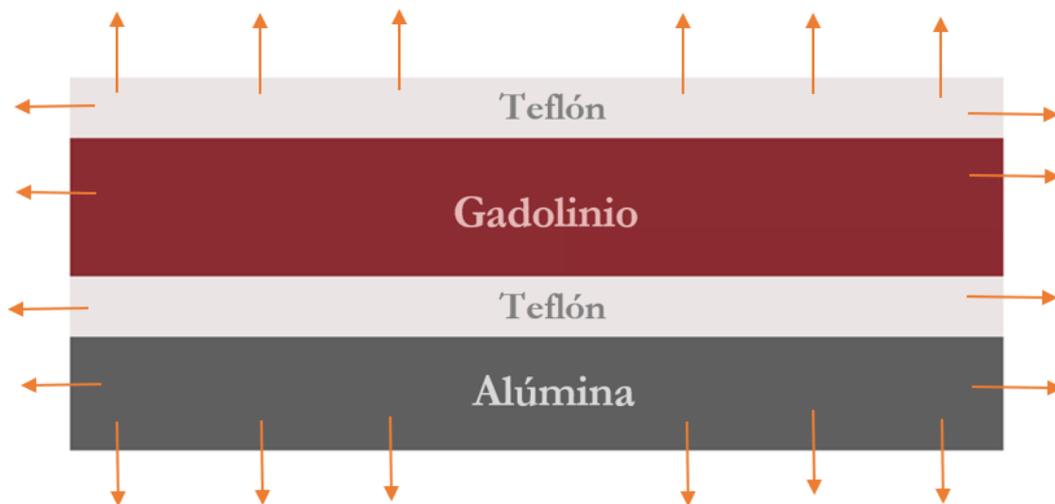


Figura 10: Radiación en la muestra.

Fuente de Calor Interna

En la capa de Gd, se incluye una fuente de calor derivada del EMC, que implica un cambio en energía interna del sistema debido al cambio de temperatura adiabática (22).

Para incluir nuestra fuente de calor Q_{Fuente} en la ecuación de calor tenemos que hallar una expresión de esta en función del tiempo y para ello tenemos que conocer cómo varía la entropía magnética en función del tiempo:

$$Q_{Fuente} = T \frac{\partial \Delta S_m}{\partial t} \quad (27)$$

Dado que H cambia con t y ΔS_m es función de H , el calor generado por el sistema depende de la tasa de cambio del campo magnético $H(t)^{16,17}$, por tanto, es fundamental encontrar una expresión para Q_{Fuente} en función del tiempo. Esta expresión exacta de la fuente de calor la desarrollaremos más adelante basándonos en el ajuste de los datos experimentales del campo magnético en función del tiempo para hallar, posteriormente, una expresión para $\Delta S_m(t)$.

Para cada capa en la malla bidimensional se definen los siguientes parámetros

- Conductividad térmica (k): Medida de la capacidad de los materiales para conducir calor.
- Calor específico (c_p): Cantidad de calor necesario para elevar la temperatura del material por unidad de masa.
- Densidad (ρ): Masa por unidad de volumen del material.

Tabla 1: Propiedades de los materiales

Material	k (W/(m·K))	c_p (J/(kg·K))	ρ (kg/m ³)	Ref
Alúmina	30	780	3850	[18]
Teflón	0.25	920	2200	[19]
Gadolinio	10.6	230	7900	[20]
Semivacío	0.002	1	1	

En el caso del semivacío, se asume un modelo aproximado que simplifica las propiedades térmicas y físicas del medio en condiciones de baja presión.

- Condiciones de frontera: Se especifican las condiciones de contorno en los extremos de la muestra para reflejar el aislamiento térmico en los bordes y la transferencia de calor hacia el ambiente.
- Condiciones en las interfaces: Se imponen condiciones para garantizar la continuidad de la temperatura y el flujo de calor entre diferentes capas de materiales.

El modelo numérico implementado considera las propiedades térmicas de cada capa, la presencia de una fuente de calor en la capa de Gd, y las condiciones de contorno para calcular la evolución de la temperatura a lo largo del tiempo y en el dominio bidimensional.

DESARROLLO DE LA SOLUCIÓN

En este apartado se aborda la resolución de la ecuación del calor no homogénea (35), considerando un enfoque que integra tanto datos experimentales como cálculos teóricos. Para ello, en primer lugar, se realiza un ajuste de los datos medidos del campo magnético en función de la posición de la muestra (ver **Figura 11**). Este análisis permitirá obtener la dependencia del campo magnético con el tiempo $H(t)$. Posteriormente, se emplea esta función para determinar la variación de la entropía magnética $\Delta S_m(t)$, que resulta clave para describir la fuente de calor en el sistema (27).

Una vez obtenida la fuente de calor, utilizando el método de diferencias finitas, se resuelve la ecuación del calor no homogénea. Este enfoque numérico permite calcular la distribución temporal y espacial de la temperatura, proporcionando una descripción detallada del proceso de transferencia de calor en condiciones específicas para poder compararla con los datos experimentales.

Comenzamos analizando los valores experimentales del campo magnético. Los datos, medidos mediante una sonda Hall colocada en el extremo del pistón donde irá unida la muestra (los datos en función de la posición de la sonda Hall se representan en la **Figura 11**) muestran cómo el campo magnético aumenta sobre el material a medida que la muestra se acerca al centro de los electroimanes, ($x = 0.00$ m) donde el campo es máximo. Este aumento se estabiliza y se hace constante a partir de $x = 0.05$ m que corresponde, aproximadamente, con un valor de campo de 1.8 T. Para modelar este comportamiento, los datos del campo magnético han sido ajustados a una curva sigmoide. Además, se ha añadido un punto extra en el origen del movimiento del pistón, $x = 0.25$ m, en el cual se conoce que el campo magnético

tiene su valor mínimo de $\mu_0 H = 0.20$ T. Este punto adicional permite obtener una función que describe el campo magnético a lo largo de toda la trayectoria de la muestra, desde su posición inicial hasta el centro de los electroimanes. De esta manera, conseguimos una función que relaciona H con la posición x (29).

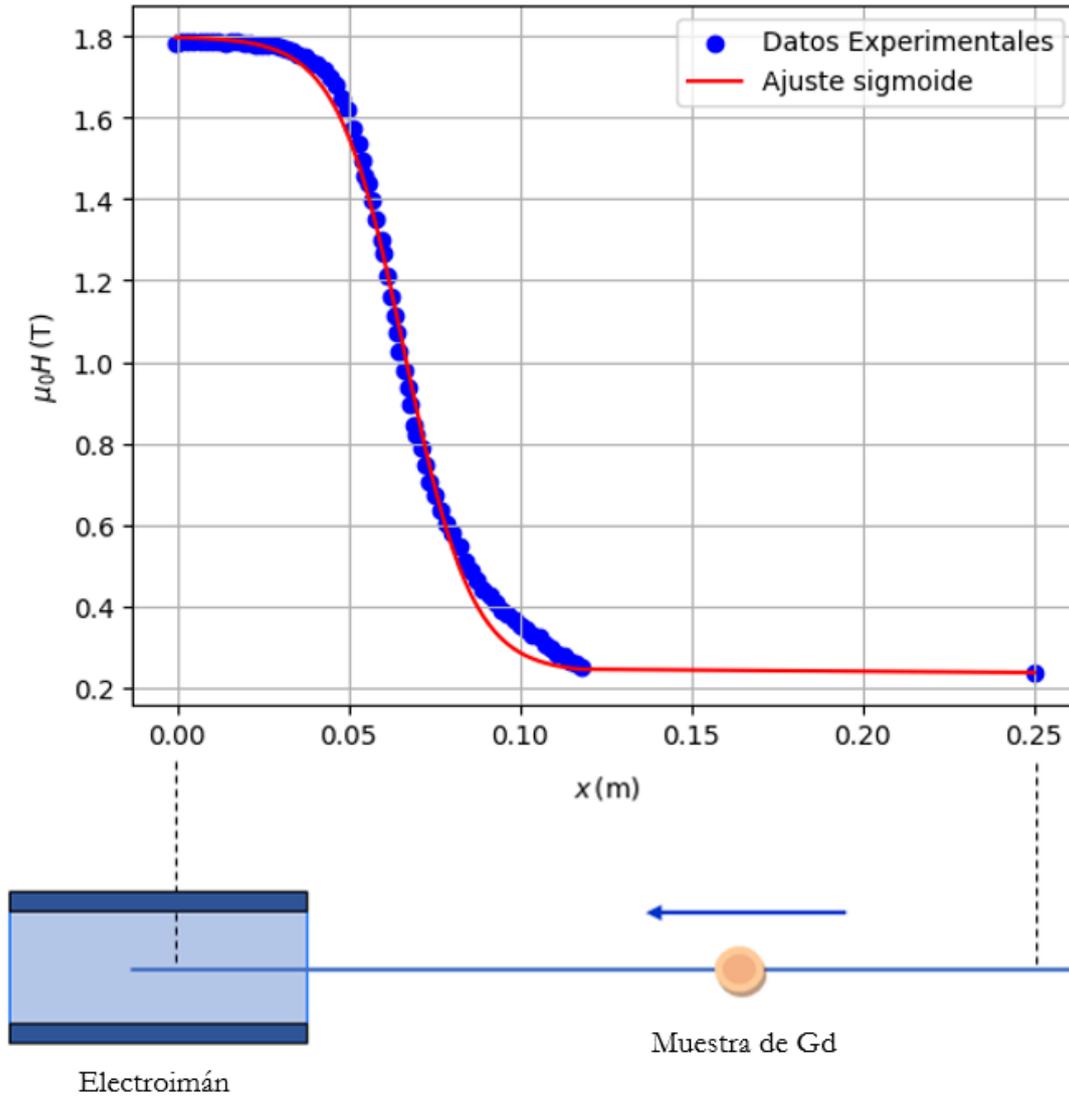


Figura 11: Campo magnético en función de la posición de la muestra de Gd y ajuste a curva sigmoide.

Por otro lado, necesitamos establecer la relación entre el espacio y el tiempo, ya que lo que nos interesa al resolver la ecuación del calor es su dependencia temporal. Nuestro experimento comienza en el punto más alejado del centro de los imanes, es decir, en $t = 0$ s la muestra se encuentra en $x = 0.25$ m y tarda 5 s en recorrer dicha distancia, por lo que tiene una velocidad promedio de $V = 0.05$ m/s.

La relación entre espacio (x) y tiempo (t) se ha aproximado utilizando un modelo de movimiento rectilíneo uniforme, en el que se asume que la velocidad de la muestra es constante (V). Aunque podría existir una aceleración residual en el inicio o final del movimiento debido a las condiciones iniciales o de frenado, esta es despreciable en comparación con la escala de tiempo y espacio considerados en el experimento.

Esto permite describir la posición de la muestra como una función lineal de tiempo:

$$x = L - V \cdot t$$

Además, adoptar un modelo de movimiento rectilíneo uniforme evita complicaciones innecesarias en la resolución de la ecuación del calor evitando términos adicionales en las ecuaciones que dificultarían su resolución.

La función sigmoide tiene los siguientes parámetros²¹:

$$Y(x) = Y_{max} + \frac{Y_{min} - Y_{max}}{1 + e^{-m \cdot (x-a)}} \quad (28)$$

donde Y_{min} es el punto mínimo del eje Y, Y_{max} el superior, m es un parámetro relacionado con la pendiente de la curva y a es un parámetro relacionado con el punto de inflexión de la curva. Utilizando esta relación, modificamos nuestra ecuación sigmoide para adaptarla a nuestro problema. Consideramos $\mu_0 H_{min} = 0.2$ T como el campo mínimo en el punto más alejado del centro de los imanes, $\mu_0 H_{max} = 1.8$ T como el campo máximo obtenido de los datos experimentales, y $L = 0.25$ cm como la longitud del pistón que recorre la muestra. Así, el campo magnético en función de la posición está dado por:

$$\mu_0 H(x) = \frac{\mu_0 H_{max}}{1 + e^{-m \cdot (x-L \cdot b)}} \quad (29)$$

donde $L \cdot b = a$ en (27).

El ajuste mostrado en la **Figura 11** dio como resultado $b = -0.266 \pm 0.001$, $m = (102 \pm 2)$ (1/m) y coeficiente de determinación $R^2 = 0.994$.

Si realizamos el cambio de variable descrito anteriormente, tenemos que la forma del campo magnético en función del tiempo viene dada por:

$$\mu_0 H(t) = \mu_0 H_{max} + \frac{-\mu_0 H_{max}}{1 + e^{-m \cdot (-Vt + L(1+b))}} \quad (30)$$

La **Figura 12** representa $\mu_0 H$ en función del tiempo usando los parámetros del resultado del ajuste.

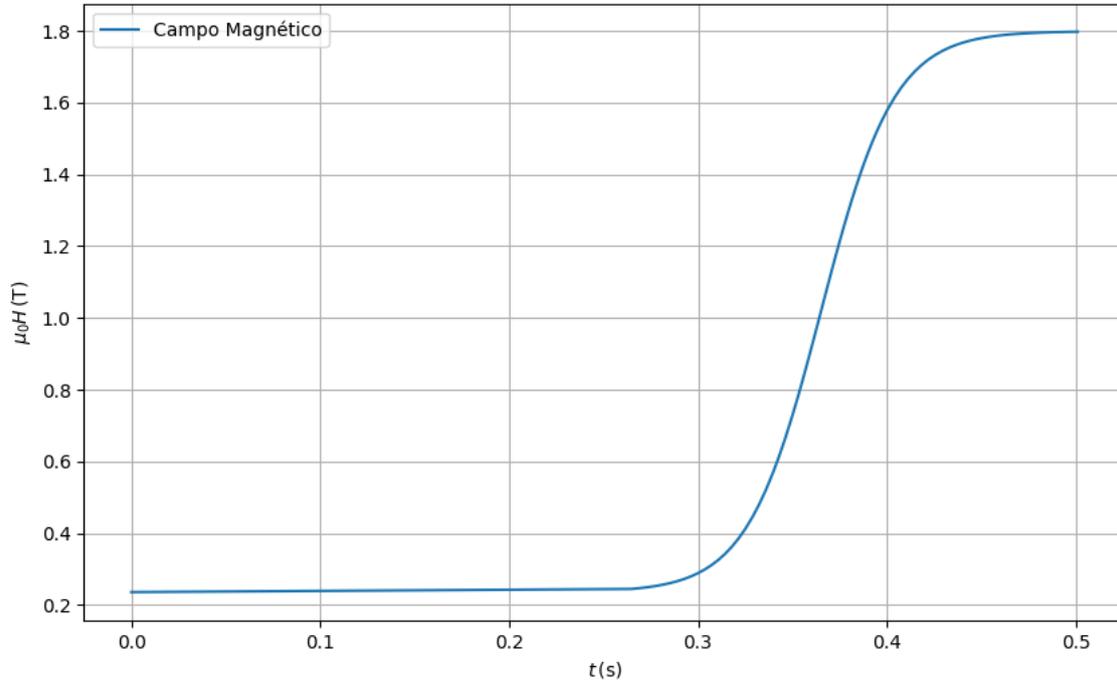


Figura 12: Ajuste del campo magnético durante la imanación en función del tiempo.

El siguiente paso es utilizar la expresión de campo (30) para hallar la variación de la entropía magnética, $\Delta S_m(H)$, bajo la influencia de un campo magnético externo. Para lograr esto, se adoptará un enfoque teórico basado en la observación de que, cerca de la temperatura de Curie, los MMC de segundo orden exhiben una respuesta magnética que puede modelarse mediante un comportamiento de ley de potencias en función del campo magnético⁹:

$$\Delta S_m \propto \mu_0 H^n \quad (31)$$

El exponente n depende de ciertas propiedades del material cerca de su temperatura de Curie, como la evolución de la imanación con el campo magnético aplicado. Estas propiedades muestran un comportamiento no lineal cuando el material se aproxima a la transición de fase magnética⁹.

Para este ajuste partimos de datos experimentales de una muestra de Gd (ver **Figura 13**) que muestra la dependencia de la entropía magnética respecto a la temperatura para diversos valores el campo magnético aplicado desde 1 T hasta 5.6 T con intervalos de 2 T.

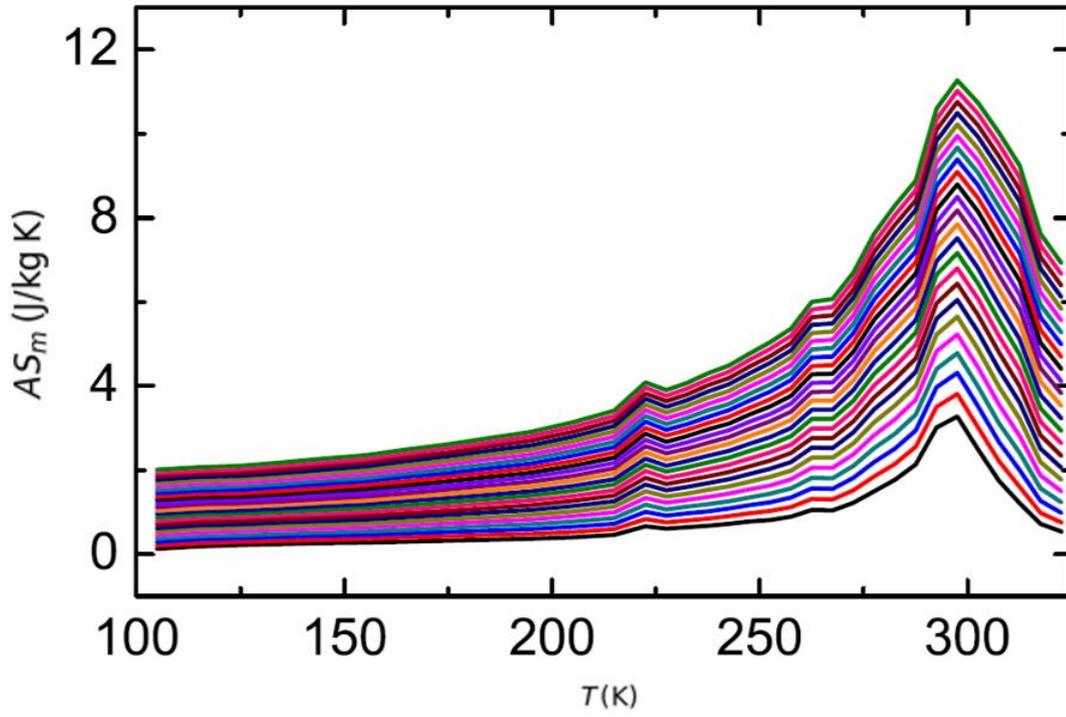


Figura 13: ΔS_m del Gd en función de la temperatura para distintos valores de H . Adaptada de ref. 9.

Para extraer los datos relevantes de la gráfica original, se utilizó la herramienta WebPlotDigitizer²², que permite obtener coordenadas de puntos a partir de imágenes gráficas. En este caso, se seleccionaron los puntos de la curva correspondiente a la temperatura ambiente ($T = 295$ K), que es la temperatura a la cual el Gd tiene su transición Ferromagnético-paramagnético, y que es la temperatura a la que la variación isotérmica de la entropía magnética presenta un pico. Siguiendo este procedimiento, se obtuvo la variación de entropía magnética ΔS_m con el campo magnético aplicado H a la temperatura de Curie del Gd.

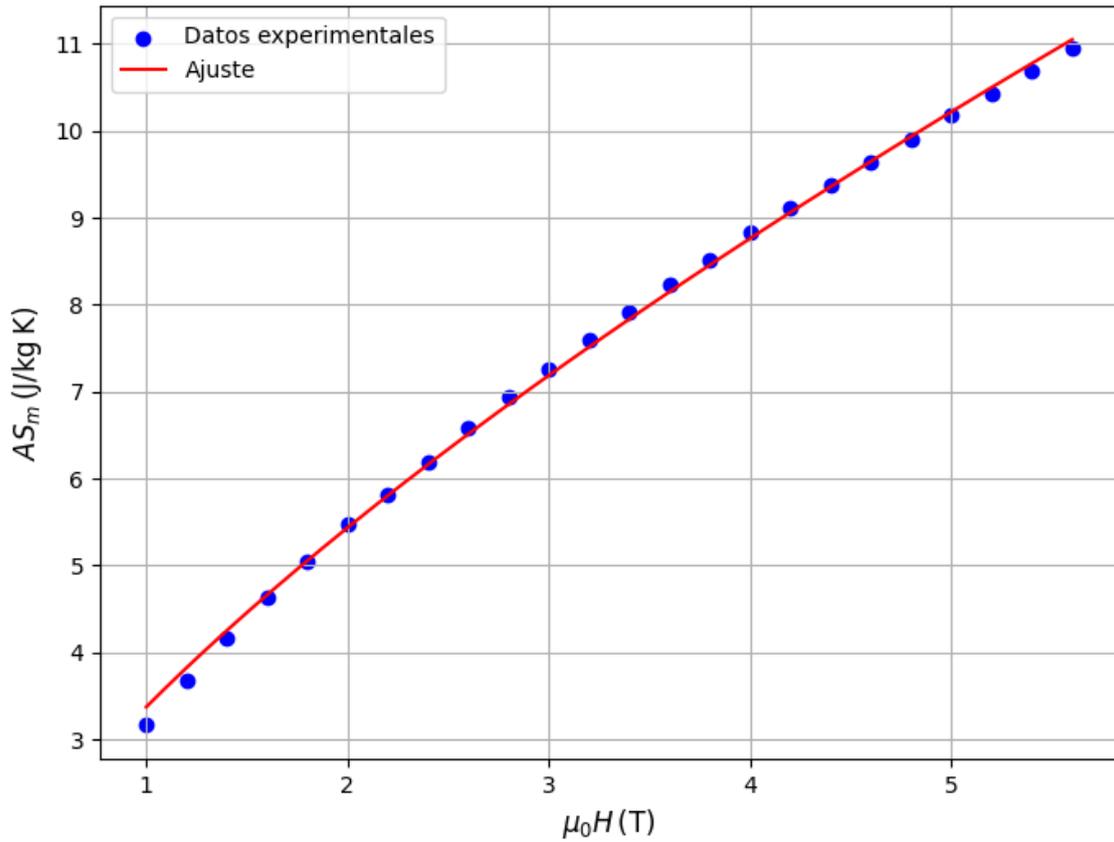


Figura 14: Ajuste de ΔS_m en función de $\mu_0 H(T)$.

Tras aplicar el modelo teórico (31), se utiliza la siguiente expresión para describir la variación de la entropía magnética:

$$\Delta S_m = a \cdot \mu_0 H(t)^n \quad (32)$$

Donde, tras el ajuste $a = (3.37 \pm 0.03) \text{ JK}^{-1}\text{T}^{-n}$, $n = 0.689 \pm 0.006$ y coeficiente de determinación $R^2 = 0.999$. En la **Figura 15** se puede apreciar cómo varía la entropía magnética en función del tiempo.

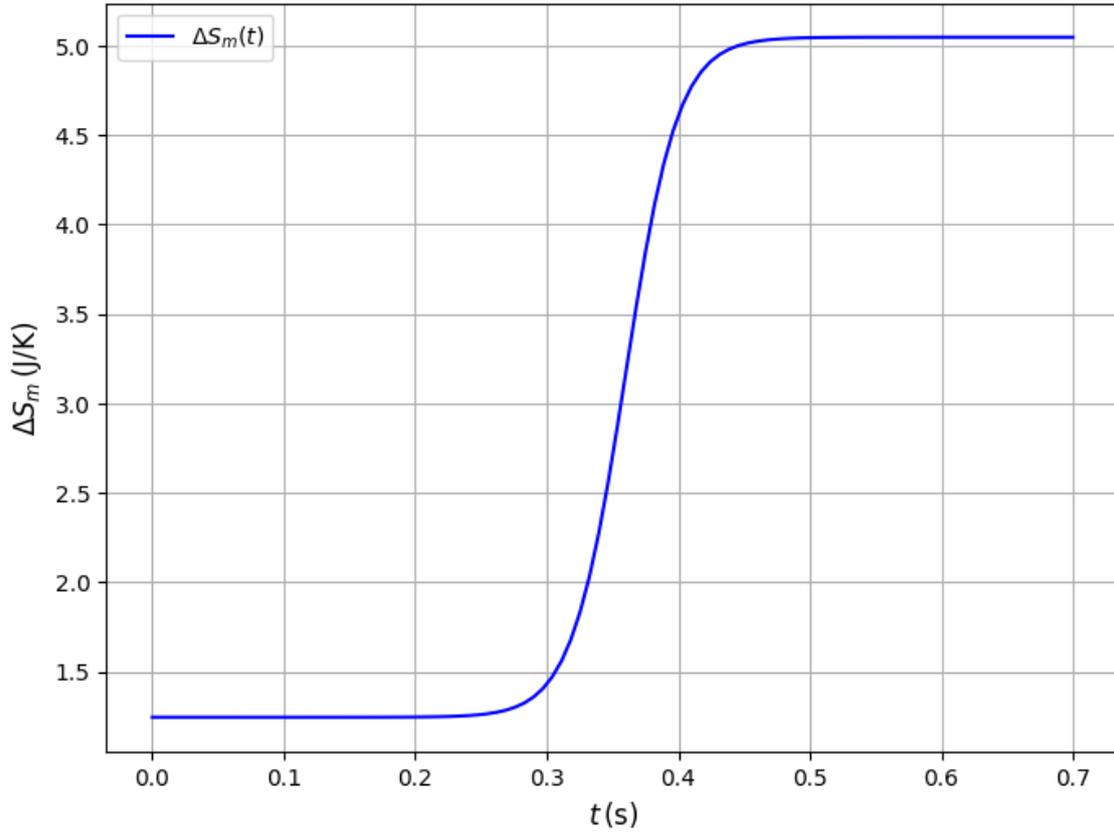


Figura 15: Variación de la entropía magnética en función del tiempo para $\mu_0 H_{max} = 1.8$ T.

Una vez hallada la expresión para la variación de entropía magnética podemos completar la expresión (27) para la fuente de calor:

$$Q = T \frac{\partial \Delta S_M}{\partial t} = T \frac{\partial \Delta S_M(H)}{\partial H} \frac{\partial H(t)}{\partial t} \quad (33)$$

Las relaciones térmicas en este sistema son fundamentales para comprender cómo se distribuye y evoluciona la temperatura en las diferentes capas. La conducción térmica es el mecanismo principal dentro de las capas y a través de las interfaces y la convección se considera en los límites del sistema con el entorno. Para resolver la ecuación del calor, hemos utilizado el método de elementos finitos. Esta técnica numérica es una herramienta muy eficaz a la hora de simular la distribución de la temperatura en sistemas con características complejas, como es el caso de placas multicapa con fuentes de calor internas.

Resolución de la ecuación del calor en una dimensión.

En este apartado se presenta la resolución de la ecuación del calor en una dimensión utilizando el método de diferencias finitas.

La ecuación del calor en una dimensión se expresa como²³:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (34)$$

Esta es la forma homogénea de la ecuación del calor. Sin embargo, nuestro problema incluye en la capa de Gd una fuente de calor que simula el EMC, por lo que en esa capa se utiliza la ecuación no homogénea:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (35)$$

donde $f(x,t)$ representa la fuente de calor que puede variar en función de la posición y el tiempo.

El método de diferencias finitas discretiza tanto el tiempo como el espacio en una rejilla de puntos, reemplazando las derivadas parciales por diferencias finitas. Para discretizar el dominio espacial, se divide el dominio espacial de longitud L en N nodos equidistantes con un paso espacial $\Delta x = \frac{L}{N-1}$.

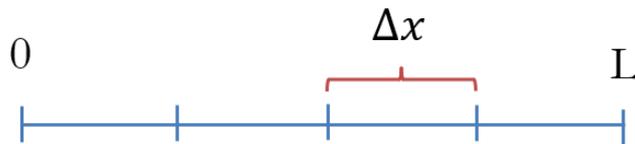


Figura 16: Esquema discretización espacial.

El tiempo total de simulación t_{final} se divide en M intervalos temporales con un paso temporal Δt . También se establece la temperatura inicial T_0 en todos los nodos a $t=0$: $T_i^0 = T_0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ y se imponen las condiciones de contorno en los extremos del dominio espacial.

En este caso, el método de diferencias finitas requiere de las siguientes aproximaciones:

- La derivada temporal se aproxima mediante una diferencia hacia adelante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (36)$$

con T_i^n la temperatura en la posición i en el instante n y Δt el paso temporal.

- La derivada espacial segunda se aproxima mediante una diferencia centrada:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (37)$$

donde T_{i+1}^n y T_{i-1}^n son las temperaturas en las posiciones adyacentes $(i+1)$ e $(i-1)$ en el instante n y Δx es el paso espacial.

Sustituyendo estas aproximaciones en la ecuación del calor no homogénea, obtenemos:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + f(x_i, t_n) \quad (38)$$

Reorganizando para encontrar T_i^{n+1} :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \lambda(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) + \Delta t \cdot f(x_i, t_n) \quad (39)$$

donde $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Después de actualizar las temperaturas en todos los nodos, se aplican las condiciones de contorno para el nuevo paso temporal $n+1$ y el proceso se repite hasta alcanzar el tiempo total de simulación t_{final} .

Para resolver el problema en nuestra placa con diferentes capas de materiales, necesitamos tener en cuenta que α puede variar entre capas. Por lo tanto, λ será diferente para cada capa.

Las posiciones de las interfaces entre las capas son (ver **Figura 17**):

- $x_1 = 0.002$ m (Entre la Alúmina y la primera capa de Teflón),
- $x_2 = 0.003$ m (Entre la primera capa de Teflón y el Gd),

- $x_3=0.007$ m (Entre el Gd y la segunda capa de Teflón),
- $x_4=0.008$ m (Entre la segunda capa de Teflón y el vacío).



Figura 17: Discretización espacial de la muestra en 1D.

En la capa de Gd (ubicada entre x_2 y x_3), se define un término dependiente del tiempo $f(x_i, t_n)$, derivado de la expresión de la fuente de calor Q_{Fuente} (28). Este término está relacionado con la variación temporal de la entropía magnética y se expresa como:

$$f(x_i, t_n) = T_i \cdot \frac{\partial \Delta S_m}{\partial t_n} \quad (40)$$

Se implementan las condiciones de contorno vistas en apartados anteriores para asegurar la correcta evolución de la temperatura en los extremos del dominio espacial. En los extremos inferior y superior, la presencia de convección y radiación se debe al intercambio de calor entre la superficie del material y el entorno circundante, en este caso semivacío. Aplicando el método de diferencias finitas a la ecuación (27), se obtienen las siguientes condiciones de contorno que describen este comportamiento:

- Condición de contorno en $x = 0$ m:

$$T_0^{n+1} = \frac{k_0 T_1^{n+1} + h_0 \Delta x \cdot T_\infty + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x (T_\infty^4 - T_0^{n+1})}{k_0 + h_0 \Delta x + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x (T_0^{n+1})^3} \quad (41)$$

- Condición de contorno en $x = L = 0.008$ m:

$$T_{N-1}^{n+1} = \frac{k_3 T_{N-2}^{n+1} + b_1 \Delta x \cdot T_\infty + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x (T_\infty^4 - T_{N-1}^{n+1})}{k_3 + b_1 \Delta x + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x \cdot (T_{N-1}^{n+1})^3} \quad (42)$$

donde $b_0 = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ y $b_1 = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ son los coeficientes de convección en dichas interfaces²⁴.

Entre las interfaces de los materiales se transmite el calor por medio de conducción y, aplicando de nuevo el método de diferencias finitas a la ecuación (26), obtenemos las siguientes relaciones:

- En la interfaz $x = x_1 = 0.002 \text{ m}$:

$$T_{x_1}^{n+1} = \frac{k_0 T_{x_1-1}^{n+1} + k_1 T_{x_1+1}^{n+1}}{k_0 + k_1} \quad (43)$$

- En la interfaz $x = x_2 = 0.003 \text{ m}$:

$$T_{x_2}^{n+1} = \frac{k_1 T_{x_2-1}^{n+1} + k_2 T_{x_2+1}^{n+1}}{k_1 + k_2} \quad (44)$$

- En la interfaz $x = x_3 = 0.007 \text{ m}$:

$$T_{x_3}^{n+1} = \frac{k_2 T_{x_3-1}^{n+1} + k_3 T_{x_3+1}^{n+1}}{k_2 + k_3} \quad (45)$$

La iteración temporal se realiza actualizando la temperatura en cada punto de la rejilla espacial para cada paso de tiempo, usando la fórmula discretizada (39).

Este enfoque permite resolver de manera eficiente y precisa la ecuación del calor no homogénea en un sistema multicapa con fuentes de calor internas y condiciones de contorno complejas.

Resolución de la ecuación del calor en dos dimensiones

Para resolver la ecuación del calor en dos dimensiones, se ha utilizado un enfoque similar al presentado para una dimensión, pero con adaptaciones necesarias para tener en cuenta la complejidad adicional del problema. En 2D, la ecuación del calor se expresa como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (46)$$

donde y es la nueva coordenada espacial.

Al igual que en la resolución de 1D, se ha discretizado tanto el tiempo como el espacio en una rejilla de puntos. El dominio espacial se divide en N_x y N_y nodos en las direcciones x e y respectivamente, con pasos espaciales Δx y Δy . La evolución temporal se maneja discretizando el tiempo total de simulación en M intervalos de tiempo con un paso temporal Δt .



Figura 18: Discretización espacial de la muestra en 2D.

Al igual que en el caso de 1D, las derivadas parciales espaciales se aproximan utilizando diferencias centradas, mientras que la derivada temporal se aproxima con diferencias hacia adelante. La ecuación discretizada en 2D toma la forma:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \lambda_x (T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) + \lambda_y (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n) \quad (47)$$

donde $\lambda_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ y $\lambda_y = \frac{a\Delta t}{\Delta y^2}$.

En el caso 2D se extienden las condiciones de convección y conducción a los extremos laterales de la muestra. Aplicando el método de diferencias finitas a la ecuación, se obtienen las siguientes condiciones de contorno que describen este comportamiento:

- Condición de contorno en $x = 0$ m:

$$T(0, y, n+1) = \frac{k_0 \cdot T(1, y, n+1) + b_0 \cdot \Delta x \cdot T_\infty + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x \cdot (T_\infty^4 - T(0, y, n+1)^4)}{k_0 + b_0 \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x \cdot T(0, y, n+1)^3} \quad (48)$$

- Condición de contorno en $x = L = 0.008$ m:

$$T(L, y, n+1) = \frac{k_3 \cdot T(N_x - 2, y, n+1) + b_1 \cdot \Delta x \cdot T_\infty + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x \cdot (T_\infty^4 - T(L, y, n+1)^4)}{k_3 + b_1 \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta x \cdot T(L, y, n+1)^3} \quad (49)$$

- Condición de contorno en $y = 0$ m:

$$T(x, 0, n+1) = \frac{k_0 \cdot T(x, 1, n+1) + b_0 \cdot \Delta y \cdot T_\infty + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta y \cdot (T_\infty^4 - T(x, 0, n+1)^4)}{k_0 + b_0 \cdot \Delta y + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta y \cdot T(x, 0, n+1)^3} \quad (50)$$

- Condición de contorno en $y = L = 0.008$ m:

$$T(x, L, n+1) = \frac{k_3 \cdot T(x, N_y - 2, n+1) + b_1 \cdot \Delta y \cdot T_\infty + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta y \cdot (T_\infty^4 - T(x, L, n+1)^4)}{k_3 + b_1 \cdot \Delta y + \epsilon \cdot \sigma \cdot \Delta y \cdot T(x, L, n+1)^3} \quad (51)$$

Al igual que en 1D las interfaces de los materiales se transmite el calor por medio de conducción y , aplicando el método de diferencias, obtenemos las siguientes relaciones:

- En la interfaz $x = x_1 = 0.002$ m:

$$T(x_1, y, n+1) = \frac{k_0 \cdot T(x_1 - 1, y, n+1) + k_1 \cdot T(x_1 + 1, y, n+1)}{k_0 + k_1} \quad (52)$$

- En la interfaz $x = x_2 = 0.003$ m:

$$T(x_2, y, n+1) = \frac{k_1 \cdot T(x_2 - 1, y, n+1) + k_2 \cdot T(x_2 + 1, y, n+1)}{k_1 + k_2} \quad (53)$$

- En la interfaz $x = x_3 = 0.007$ m:

$$T(x_3, y, n+1) = \frac{k_2 \cdot T(x_3 - 1, y, n+1) + k_3 \cdot T(x_3 + 1, y, n+1)}{k_2 + k_3} \quad (54)$$

RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos a partir de las simulaciones realizadas en una y dos dimensiones. Para ambas configuraciones, se ha analizado la evolución temporal de la temperatura bajo dos escenarios: condiciones ideales y condiciones realistas. Las condiciones ideales consideran un sistema adiabático perfectamente aislado y homogéneo, mientras que las condiciones realistas incluyen efectos adicionales como las pérdidas de calor por convección, conducción y radiación. Finalmente, se realiza una comparación detallada entre estos escenarios para evaluar las diferencias en el comportamiento térmico y validar la relevancia de las condiciones realistas en aplicaciones prácticas.

RESULTADOS EN 1 DIMENSIÓN

Bajo condiciones ideales, se asume que no hay intercambio de calor con el entorno (es decir, el sistema es completamente adiabático). La curva simulada (**Figura 19**) muestra un incremento rápido y sostenido hasta alcanzar un estado estacionario, donde el calor generado se conserva en su totalidad. Al contrastar esta curva con la simulación y los datos experimentales bajo condiciones realistas, se evidencia que las pérdidas de calor tienen un impacto notable en la eficiencia del proceso.

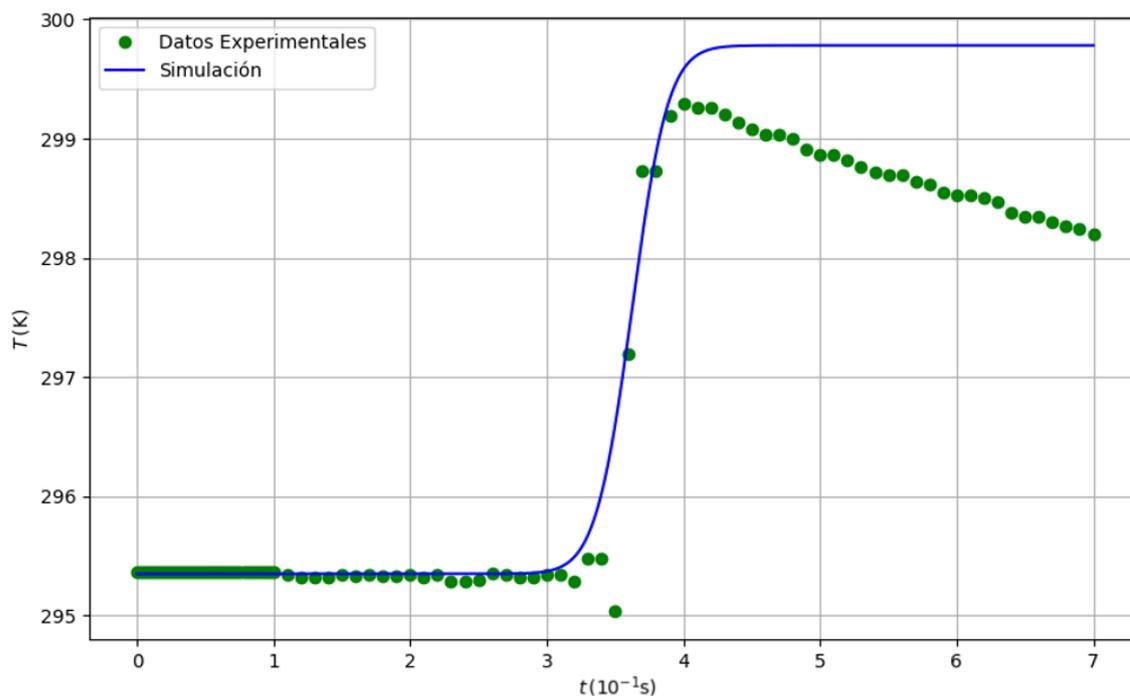


Figura 19: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones adiabáticas ideales en 1D.

Un proceso adiabático ideal implica que la variación del campo magnético ocurre de manera muy rápida para evitar cualquier pérdida de calor hacia el entorno. Sin embargo, en sistemas reales, esta rapidez está limitada por las características técnicas del equipo experimental.

Por otra parte, a pesar de los avances en diseño de materiales aislantes, siempre existen fugas térmicas mínimas debido a conexiones físicas con el entorno, como soportes, sensores o interfaces experimentales. Estas pérdidas, aunque pequeñas, limitan la capacidad de mantener el calor dentro del sistema, evitando que el proceso sea completamente adiabático. Esto genera un desajuste entre el comportamiento real y el comportamiento ideal esperado en un proceso adiabático.

La variación adiabática máxima de la temperatura, $\Delta T_{ad} = 4.4$ K, obtenida bajo condiciones ideales, establece una cota superior para el rendimiento térmico del sistema. Este límite teórico refleja la máxima eficiencia alcanzable en la conversión de energía magnética en energía térmica, suponiendo que no existe pérdida de calor hacia el entorno.

Además del análisis de la curva $T(t)$ bajo condiciones adiabáticas, se ha analizado la dependencia de ΔT_{ad} con la intensidad máxima del campo magnético (H_{max}) y su evolución temporal. En la **Figura 20** se pueden observar las curvas de calor para el caso adiabático para diferentes valores de campo aplicado.

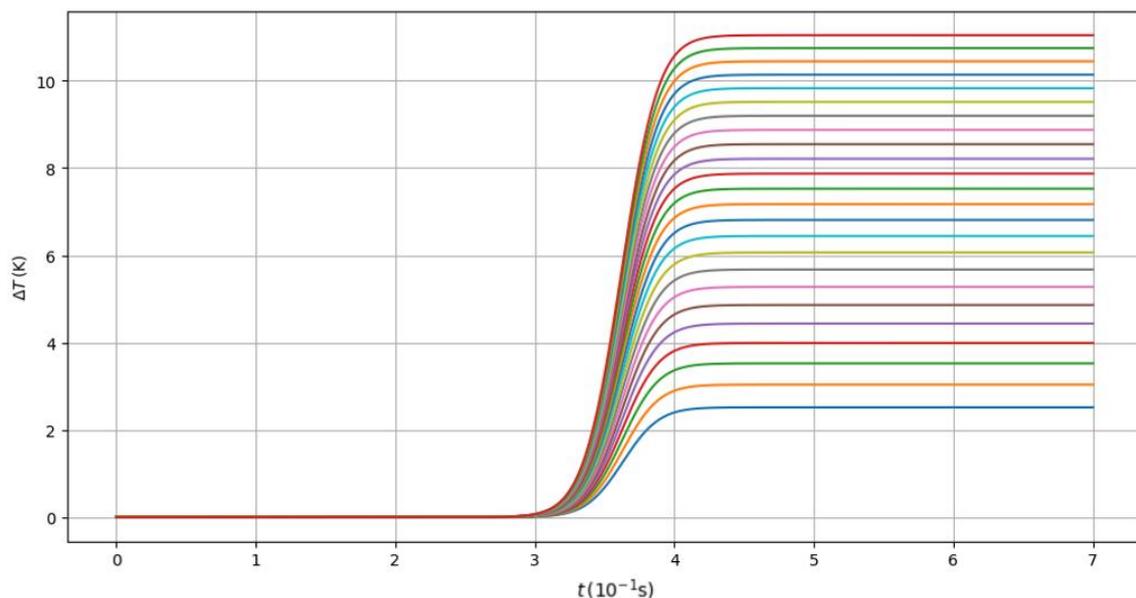


Figura 20: Variación de ΔT a lo largo del tiempo para distintos valores de campo H , de 1.0 T a 5.6 T en saltos de 0.2 T, en condiciones ideales en 1D.

Al aumentar el campo magnético aplicado, se observa un incremento en ΔT ; sin embargo, las diferencias entre las curvas correspondientes a campos consecutivos se reducen a medida que se llega al valor máximo. Este comportamiento puede que esté relacionada con la saturación magnética, donde el material alcanza un punto en el que el campo adicional ya no genera grandes cambios en la imanación o por un comportamiento no lineal del material, en el cual los efectos térmicos se estabilizan a medida que el campo aumenta.

En un sistema real, las pérdidas de calor hacia el entorno afectan significativamente la evolución térmica del material. En la **Figura 21**, se muestra la comparación entre los datos experimentales y la simulación en condiciones realistas, evidenciando que la temperatura del material aumenta inicialmente al activarse el campo magnético, alcanzando un pico correspondiente a ΔT_{ad} . Posteriormente, se produce un descenso gradual debido a la disipación térmica.

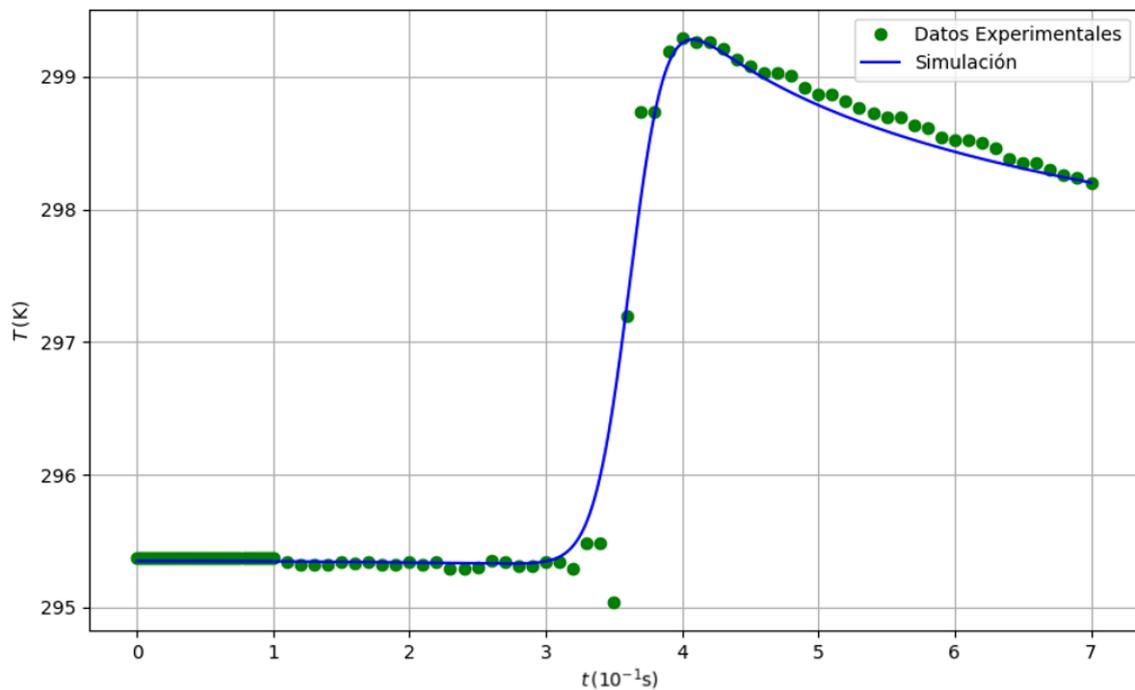


Figura 21: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones realistas en 1D.

La concordancia entre los datos experimentales y la simulación bajo condiciones realistas es notable, lo que refuerza la validez del modelo desarrollado. Esta validación asegura que los resultados de la simulación no solo representan de manera adecuada las condiciones reales, sino que también proporcionan una base confiable para extrapolar el comportamiento del material a escenarios ideales.

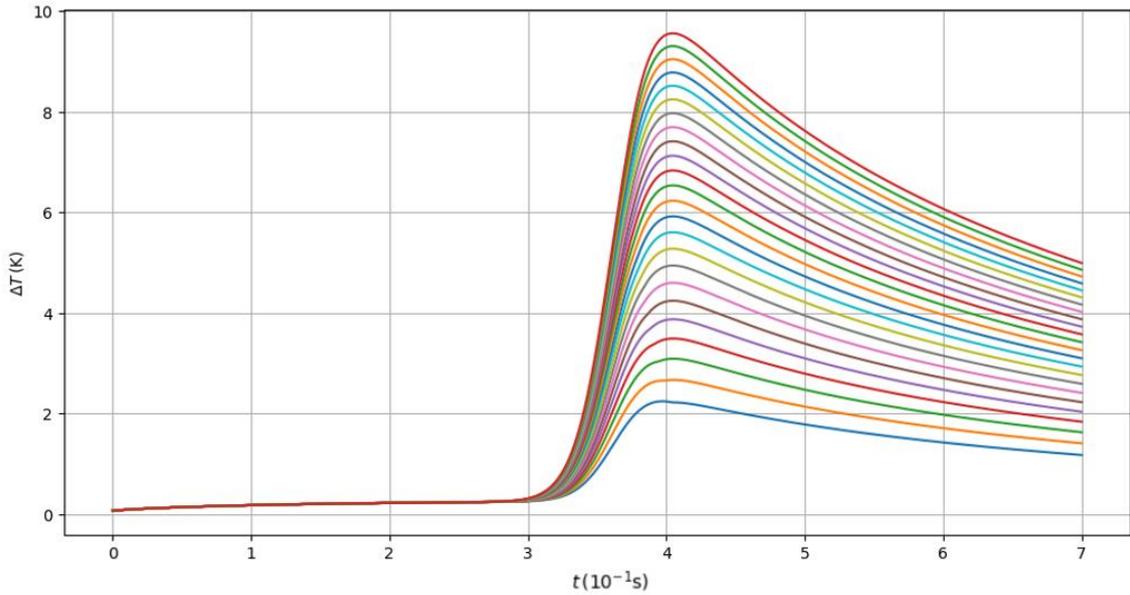


Figura 22: Variación de ΔT a lo largo del tiempo para distintos valores de campo H , de 1.0 T a 5.6 T en saltos de 0.2 T, en condiciones reales en 1D.

Podemos observar que, en el caso ideal, el aumento de temperatura con el campo máximo aplicado es significativamente mayor alcanzando valores que superan los 11 K para campos de 5.6 T mientras que en el caso real no supera los 10 K para ese valor de campo.

Para corroborar esto se ha hecho un ajuste exponencial de los datos para ambos casos para poder compararlos.

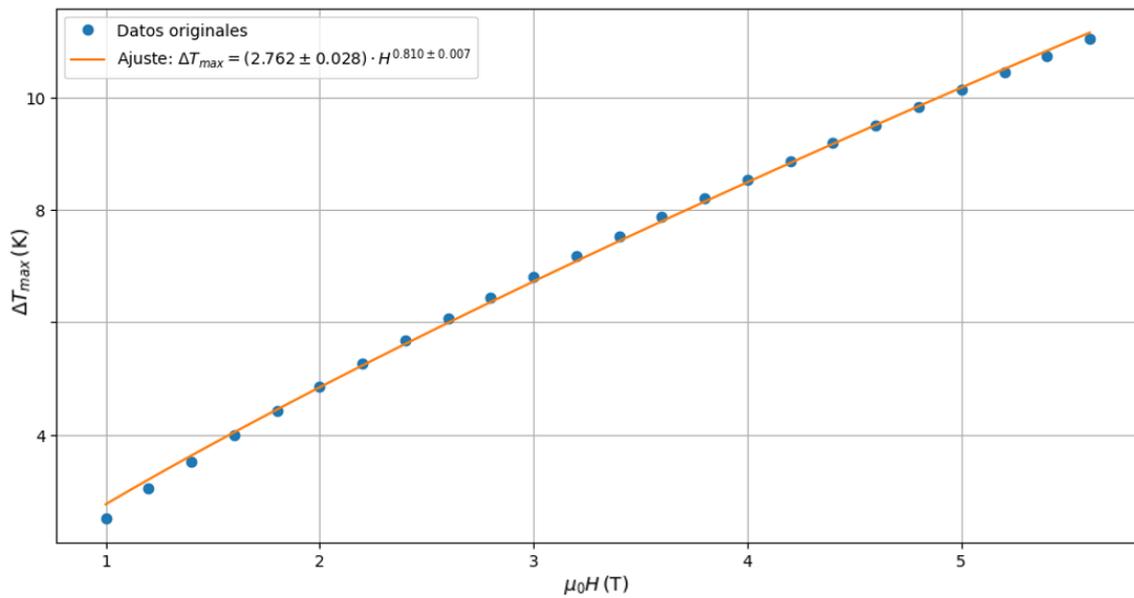


Figura 23: Ajuste exponencial de la dependencia de la variación de la temperatura con el campo en condiciones ideales en 1D.

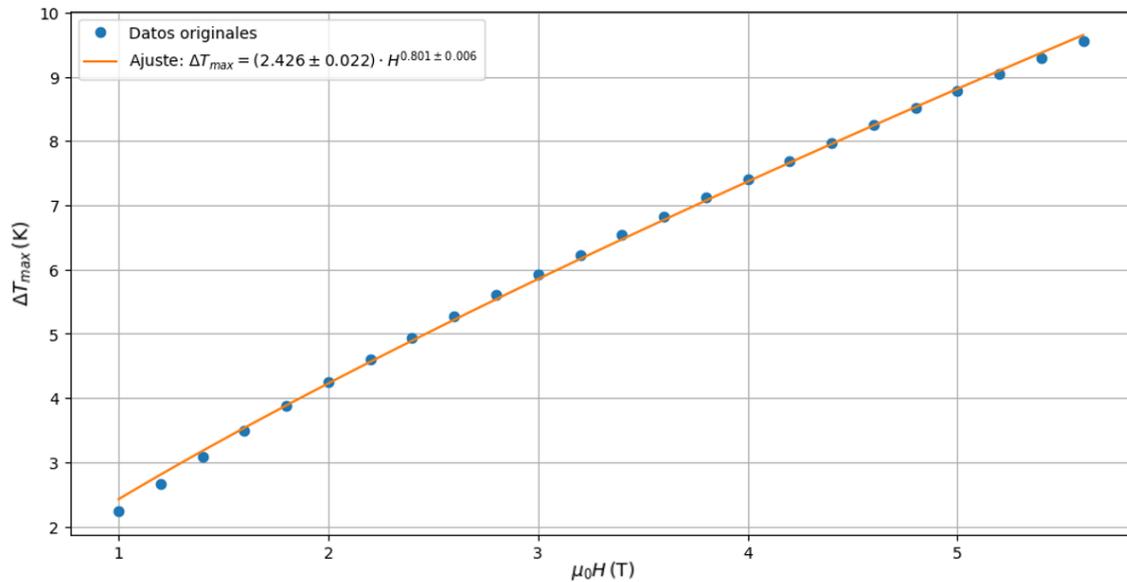


Figura 24: Ajuste exponencial de la dependencia de la variación de la temperatura con el campo en condiciones reales en 1D.

Los ajustes obtenidos en ambos casos permiten evaluar la relación entre ΔT_{ad} y H . En caso ideal, se obtuvo la relación $\Delta T_{ad} = 2.762 \cdot H^{0.810}$, mientras que, en el segundo caso, el ajuste proporcionó $\Delta T_{ad} = 2.426 \cdot H^{0.801}$. Las constantes que se encuentran multiplicando al factor H representan el nivel de respuesta térmica inicial del material al aplicar el campo magnético y las diferencias entre ellas pueden interpretarse como una consecuencia de las pérdidas térmicas del caso real.

Por otra parte, aunque los exponentes son similares, el coeficiente mayor en el ajuste del caso real indica que ese conjunto de datos describe un sistema que alcanza una mayor ΔT_{ad} para un mismo campo magnético en comparación con el caso real, lo que concuerda con la teoría.

RESULTADOS EN 2 DIMENSIONES

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas en dos dimensiones. Al igual que en el caso 1D, se analizó la evolución temporal de la temperatura bajo dos escenarios: condiciones ideales y condiciones realistas.

En términos generales, los resultados obtenidos en 2D son muy similares a los obtenidos en 1D (**Figura 25** y **Figura 26**). Ambas configuraciones muestran que el incremento de la temperatura, ΔT , depende de manera significativa del campo magnético aplicado, alcanzando un pico térmico máximo que es más elevado en condiciones ideales que en condiciones

realistas. Sin embargo, la simulación en 2D ofrece una descripción más detallada de la evolución térmica, capturando las interacciones espaciales que no son accesibles en modelos 1D.

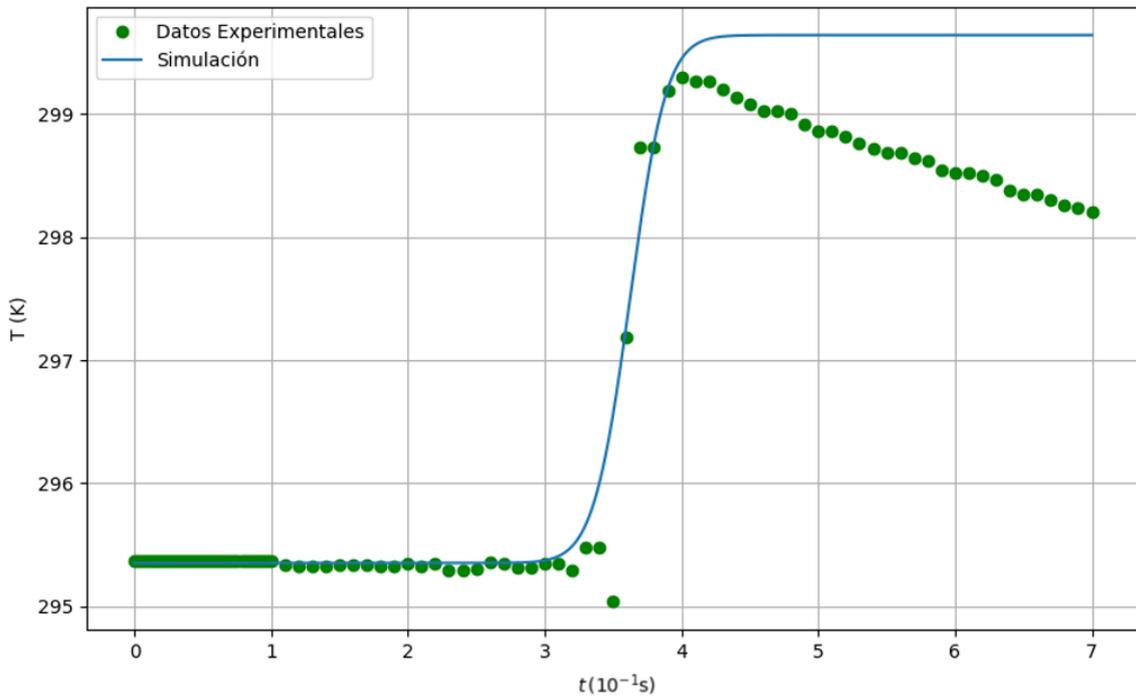


Figura 25: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones adiabáticas ideales en 2D.

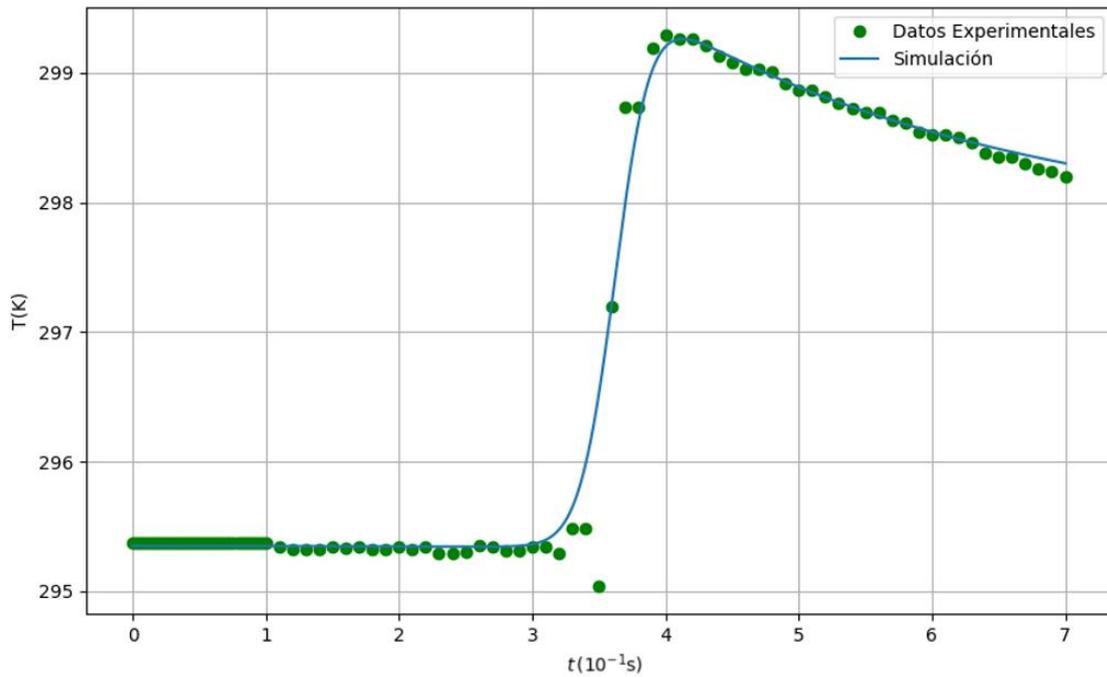


Figura 26: Comparación de los datos experimentales con la simulación bajo condiciones reales en 2D.

Para analizar en mayor detalle las diferencias entre ambas configuraciones, se ha realizado nuevamente un ajuste exponencial para los datos en 2D:

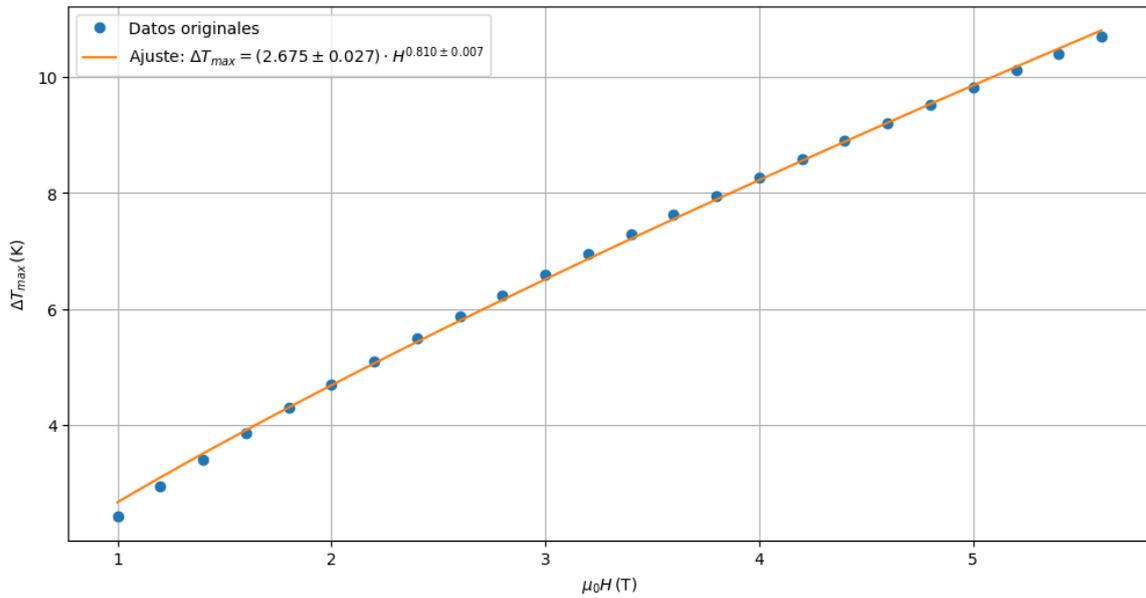


Figura 27: Ajuste exponencial de la dependencia de la máxima variación de la temperatura con el campo en condiciones ideales en 2D.

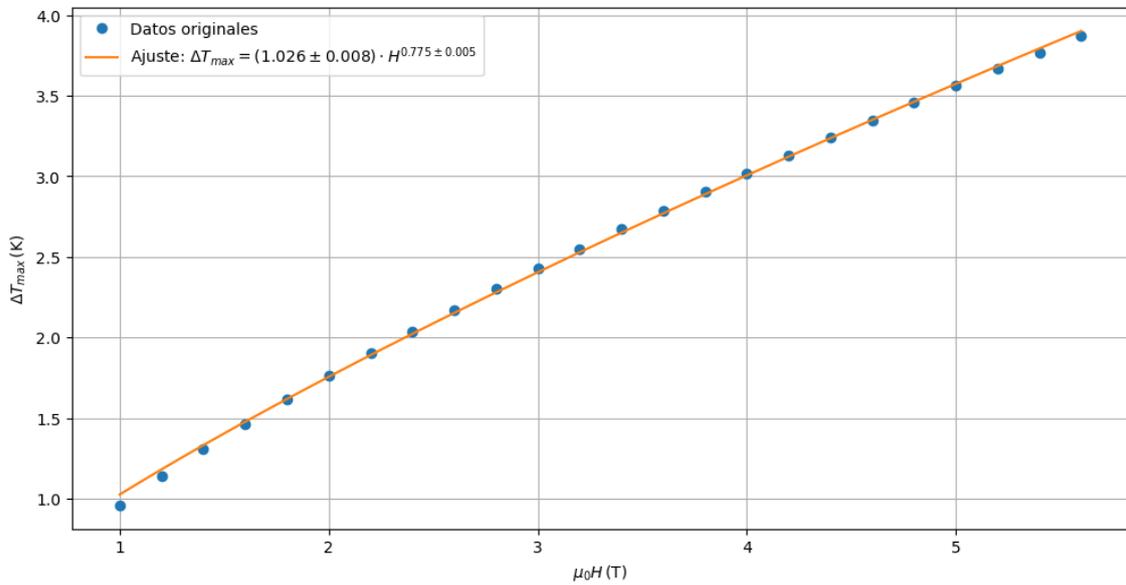


Figura 28: Ajuste exponencial de la dependencia de la máxima variación de la temperatura con el campo en condiciones reales en 1D.

En caso ideal, se obtuvo la relación $\Delta T_{ad} = 2.675 \cdot H^{0.810}$, mientras que, en el segundo caso, el ajuste proporcionó $\Delta T_{ad} = 2.443 \cdot H^{0.775}$. Estos resultados muestran que, si bien no hay grandes diferencias con la simulación 1D, se puede apreciar en el caso 2D cómo los exponentes en el caso ideal y real difieren más entre sí lo que implica un mayor impacto de las pérdidas térmicas

en la simulación realista debido a la mayor capacidad del modelo para representar interacciones multidimensionales.

Por otra parte, en condiciones ideales, el valor de la constante es ligeramente menor en 2D, lo que refleja que, al considerar dos dimensiones, el sistema tiene una distribución térmica más compleja y, aunque uniforme, la disipación interna del calor afecta levemente el valor máximo alcanzado.

En resumen, aunque los resultados en 2D y 1D son en general consistentes, la simulación en 2D captura de manera más precisa la complejidad del sistema, incluyendo las interacciones espaciales y las pérdidas térmicas.

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las principales conclusiones derivadas del estudio, las cuales resaltan la validez del modelo desarrollado y las implicaciones de las condiciones experimentales. Estas conclusiones se basan en la comparación entre los datos experimentales y las simulaciones realizadas bajo los diferentes supuestos.

1. La simulación bajo condiciones realistas muestra un ajuste preciso con los datos experimentales, validando el modelo y confirmando que las pérdidas de calor tienen un impacto significativo en la evolución térmica del material.
2. En condiciones ideales, la simulación revela un incremento de temperatura significativamente mayor, lo que destaca el potencial del efecto magnetocalórico en ausencia de pérdidas térmicas.
3. Las condiciones adiabáticas ideales no pueden lograrse experimentalmente debido a limitaciones prácticas, como la velocidad de los procesos, el aislamiento térmico imperfecto y los fenómenos de relajación térmica. Por ello, el modelo propuesto proporciona un marco teórico sólido para el estudio de sistemas magnetocalóricos, ofreciendo predicciones confiables para futuras aplicaciones tecnológicas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Langenberg, A. *et al.* Spin and orbital magnetic moments of size-selected iron, cobalt, and nickel clusters. *Phys Rev B* **90**, 184420 (2014).
2. Martinho Vieira, R., Eriksson, O., Björkman, T., Bergman, A. & Herper, H. C. Realistic first-principles calculations of the magnetocaloric effect: applications to hcp Gd. *Mater Res Lett* **10**, 156–162 (2022).
3. Romero Gómez, J., Ferreiro Garcia, R., De Miguel Catoira, A. & Romero Gómez, M. Magnetocaloric effect: A review of the thermodynamic cycles in magnetic refrigeration. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **17**, 74–82 (2013).
4. Krenke, T. *et al.* Effect of Co and Fe on the inverse magnetocaloric properties of Ni-Mn-Sn. *J Appl Phys* **102**, (2007).
5. Bhoje, P. A., Priolkar, K. R. & Nigam, A. K. Room temperature magnetocaloric effect in Ni-Mn-In. *Appl Phys Lett* **91**, (2007).
6. Engelbrecht, K. & Bahl, C. R. H. Evaluating the effect of magnetocaloric properties on magnetic refrigeration performance. *J Appl Phys* **108**, (2010).
7. TU Darmstadt. Refrigeración Magnética. (2024).
8. Modak, M. Magnetic Refrigeration: An Environment-friendly Cooling Technology. *Science Dialectica* **1**, 1–3 (2023).
9. Franco, V. *et al.* Field dependence of the adiabatic temperature change in second order phase transition materials: Application to Gd. *J Appl Phys* **106**, (2009).
10. Waske, A. *et al.* Magnetocaloric effect of an Fe-based metallic glass compared to benchmark gadolinium. *J Appl Phys* **112**, (2012).
11. Caballero-Flores, R. *et al.* Magnetocaloric effect and critical behavior in $\text{Pr}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{MnO}_3$: an analysis of the validity of the Maxwell relation and the nature of the phase transitions. *Journal of Physics: Condensed Matter* **26**, 286001 (2014).
12. Basso, V. *et al.* Specific heat and entropy change at the first order phase transition of $\text{La}(\text{Fe-Mn-Si})_{13}\text{-H}$ compounds. *J Appl Phys* **118**, (2015).
13. Álvarez-Alonso, P. *et al.* Simple Set-Up for Adiabatic Measurements of Magnetocaloric Effect. *Key Eng Mater* **644**, 215–218 (2015).
14. Winterton, R. H. S. Newton’s law of cooling. *Contemp Phys* **40**, 205–212 (1999).
15. Crepeau, J. Josef Stefan: His life and legacy in the thermal sciences. *Exp Therm Fluid Sci* **31**, 795–803 (2007).
16. Kazakov, A. P. *et al.* Direct measurements of field-induced adiabatic temperature changes near compound phase transitions in Ni-Mn-In based Heusler alloys. *Appl Phys Lett* **98**, (2011).

17. Ghahremani, M., Seyoum, H. M., ElBidweihy, H., Torre, E. Della & Bennett, L. H. Adiabatic magnetocaloric temperature change in polycrystalline gadolinium – A new approach highlighting reversibility. *AIP Adv* **2**, (2012).
18. Paluri, R. & Ingole, S. Surface characterization of novel alumina-based composites for energy efficient sliding systems. *JOM* **63**, 77–83 (2011).
19. Reese, W. & Tucker, J. E. Thermal Conductivity and Specific Heat of Some Polymers between 4.5° and 1°K. *J Chem Phys* **43**, 105–114 (1965).
20. Cláudia Rodrigues Fernandes. Modelling and Simulation of Passive Thermal Systems for Thermal Management. (Universidade do Porto, Porto, 2020).
21. Lara, F. A. O. *Función Logística*. (2009).
22. Ankit Rohatgi. WebPlotDigitizer. <https://automeris.io/> (05/11/2024).
23. Crank, J. & Nicolson, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **43**, 50–67 (1947).
24. Konda Reddy, B. & Balaji, C. Bayesian estimation of heat flux and thermal diffusivity using liquid crystal thermography. *International Journal of Thermal Sciences* **87**, 31–48 (2015).

ANEXO

En este anexo, se incluyen enlaces a los códigos de Python que se implementaron durante el desarrollo de este trabajo. Estos códigos fueron fundamentales para realizar los análisis y experimentos descritos. Además, se proporcionan enlaces para descargar los datos utilizados, permitiendo así su replicación y uso en futuros estudios o proyectos relacionados.

Código para el ajuste del campo magnético

En este *script* se realiza el ajuste del campo magnético utilizando una función sigmoide y grafica los resultados. Primero, se importan las bibliotecas necesarias (*numpy*, *matplotlib.pyplot* y *scipy.optimize.curve_fit*). Luego, se definen los valores mínimos y máximos del campo magnético, la longitud del sistema, la permeabilidad del espacio libre (μ_0) y la velocidad de movimiento. A continuación, se establece una función sigmoide para ajustar los datos experimentales de posición y campo magnético. Se ajusta la curva a estos obteniendo los parámetros óptimos y sus incertidumbres, y se calcula el coeficiente de determinación (R^2) para evaluar la calidad del ajuste. Finalmente, se grafican los datos experimentales junto con el ajuste sigmoide, y se calculan y grafican los valores del campo magnético en función del tiempo.

El código completo se puede encontrar en este enlace: [AjustesCampo.py](#)

Código para el ajuste de la entropía magnética

Este código se utiliza para ajustar la entropía magnética en función del campo magnético y luego grafica los resultados obtenidos. Primero, se importan las bibliotecas necesarias (*pandas*, *matplotlib.pyplot*, *scipy.optimize.curve_fit* y *numpy*), y se utiliza la función *files.upload()* para cargar un archivo *.xlsx* con los datos experimentales. Los datos se agrupan por el campo magnético $H(T)$ y se calcula el promedio de la entropía magnética ΔS_m . Luego, se define el modelo de ajuste y se utilizan las funciones *curve_fit* para ajustar este modelo a los datos experimentales, obteniendo así los parámetros junto con sus incertidumbres y se calcula el coeficiente de determinación (R^2) para evaluar la calidad del ajuste. Posteriormente, se grafican los datos experimentales y el ajuste obtenido. Finalmente, se grafica la variación de la entropía magnética a lo largo del tiempo.

Para ejecutar este *script* es necesario un fichero *.xlsx* como el que se puede encontrar en este enlace: [DatosEntropía](#).

El *script* completo se puede encontrar aquí: [AjusteEntropía.py](#)

Código para la simulación en 1D

Este código contiene la simulación en una dimensión para la evolución de la temperatura con el tiempo junto con el resto de análisis y ajustes que se encuentran en el apartado **Resultados en 1 dimensión**.

El script requerirá al usuario que indique qué tipo de simulación quiere ejecutar (condiciones ideales o condiciones reales) y pedirá que se cargue un fichero *.dat* como el que se puede encontrar en el siguiente enlace: [DatosExperimentales](#).

El código completo se puede encontrar aquí: [Simulación1D.py](#)

Código para la simulación 2D

De forma análoga a la simulación en una dimensión, para dos dimensiones podemos encontrar el script para la evolución de la temperatura con el tiempo junto con el resto de análisis y ajustes que se encuentran en el apartado **Resultados en 2 dimensiones** aquí: [Simulación2D.py](#)