

Ejercicios de Radiocomunicaciones

Fernando Las-Heras, Yuri Álvarez López



Universidad de Oviedo

Ejercicios de Radiocomunicaciones

Ejercicios de Radiocomunicaciones

1ª Edición

Fernando Las-Heras, Yuri Álvarez López



Universidad de Oviedo

Gijón, diciembre de 2024



Reconocimiento-No Comercial-Sin Obra Derivada (by-nc-nd): No se permite un uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.



Usted es libre de copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra, bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento – Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el licenciador:
Las-Heras, F. ; Álvarez López, Y. (2025) *Ejercicios de Radiocomunicaciones* Oviedo.
Universidad de Oviedo.

La autoría de cualquier artículo o texto utilizado del libro deberá ser reconocida complementariamente.



No comercial – No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Sin obras derivadas – No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.

© 2025 Universidad de Oviedo

© Los autores

Algunos derechos reservados. Esta obra ha sido editada bajo una licencia Reconocimiento-No comercial-Sin Obra Derivada 4.0 Internacional de Creative Commons.

Se requiere autorización expresa de los titulares de los derechos para cualquier uso no expresamente previsto en dicha licencia. La ausencia de dicha autorización puede ser constitutiva de delito y está sujeta a responsabilidad.

Consulte las condiciones de la licencia en: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.es>

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo

ISNI: 0000 0004 8513 7929

Edificio de Servicios - Campus de Humanidades

33011 Oviedo - Asturias

985 10 95 03 / 985 10 59 56

servipub@uniovi.es

<https://publicaciones.uniovi.es/>

ISBN: 978-84-10135-50-5

Tabla de contenidos

	Pág.
1. Ecuaciones de campo electromagnético radiado por distribuciones de corriente	7
1.1. Campo radiado por distribuciones de corriente lineal. Antenas de hilo.....	7
2. Parámetros de antenas	30
2.1. Campo cercano y lejano	30
2.2. Parámetros de impedancia, eficiencia de radiación, acoplamiento mutuo.....	32
2.3. Diagrama de radiación, directividad, ganancia, área equivalente.....	42
2.4. Planos E, H y componentes de campo	51
2.5. Polarización de una antena.....	54
2.6. Temperatura de ruido de antena	63
3. Antenas de apertura.....	68
3.1. Campo radiado por una distribución de apertura.....	68
3.2. Eficiencia de apertura	72
3.3. Bocinas	76
3.4. Reflectores.....	83
4. Antenas frente a plano de masa y arrays	90
4.1. Teoría de imágenes	90
4.2. Fundamentos de arrays	99
4.3. Análisis de arrays.....	110
5. Propagación en espacio libre	148
5.1. Fórmula de Friis	148
5.2. Elipsoides de Fresnel.....	162
5.3. Radioenlace digital.....	168
5.4. Órbitas satelitales	170
6. Otros mecanismos de propagación	173
6.1. Propagación terrestre (reflexión en tierra).....	173
6.2. Propagación por onda superficie.....	175
6.3. Propagación ionosférica.....	177
6.4. Propagación con multitrayecto y movilidad	182

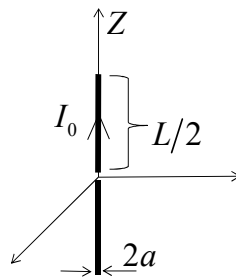
1. Ecuaciones de campo electromagnético radiado por distribuciones de corriente

1.1. Campo radiado por distribuciones de corriente lineal. Antenas de hilo

Ejercicio 1.1

Calcule el campo en cualquier punto del espacio \vec{r} (campo cercano) generado por un dipolo infinitesimal (dipolo de Hertz) con corriente uniforme $I(z)=I_0$ dispuesto como se muestra en la figura. Posteriormente particularice la expresión resultante para el caso de que el punto de observación, definido por \vec{r} , se encuentre a una distancia mucho mayor que el tamaño del dipolo. (Longitud del dipolo L ; radio del dipolo a , $a \ll L \ll \lambda$, longitud de onda λ ; $k = 2\pi/\lambda$)

Solución:



Campo eléctrico en cualquier punto del espacio \vec{r} debido a una distribución de corriente eléctrica delimitada por un volumen finito V' y situada en un espacio homogéneo, lineal, isótropo e indefinido:

$$\vec{E}_J(\vec{r}) = \frac{-jk}{4\pi} \int_{V'} [(\eta C_{N1})\vec{J} - (\eta C_{N2})(\vec{J} \cdot \hat{R})\hat{R}] \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$$

$$C_N = 1 + \frac{1}{jkR}$$

$$C_{N1} = 1 + \frac{1}{jkR} - \frac{1}{(kR)^2}$$

$$C_{N2} = 1 + \frac{3}{jkR} - \frac{3}{(kR)^2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad \hat{R} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-jk}{4\pi} \int_{L'} [(\eta C_{N1})I_0 \hat{z} - (\eta C_{N2})(I_0 \hat{z} \cdot \hat{R})\hat{R}] \frac{e^{-jkR}}{R} dl'$$

Bajo la consideración de que se trata de un elemento diferencial de corriente lineal $|\vec{r}'| \rightarrow 0$, se podrá aproximar, tanto para los términos de amplitud como de fase, la distancia R y el vector \vec{R} :

$$R \simeq r \quad \vec{R} \simeq \vec{r} \quad \hat{R} \simeq \hat{r}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &\simeq \frac{-jk}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [(\eta C_{N1})I_0 \hat{z} - (\eta C_{N2})(I_0 \hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r}] \frac{e^{-jkr}}{r} dz' = \frac{-jk}{4\pi} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) [(\eta C_{N1})I_0 \hat{z} L - (\eta C_{N2})(I_0 \hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} L] = \\ &= \frac{-jk}{4\pi} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \eta I_0 L [C_{N1} \hat{z} - C_{N2} \cos\theta \hat{r}] \end{aligned}$$

$$\hat{z} = (\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} + (\hat{z} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{z} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\theta \hat{r} - \text{sen}\theta \hat{\theta}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-j\eta k}{4\pi} \right) I_0 L [C_{N1}(\cos\theta \hat{r} - \text{sen}\theta \hat{\theta}) - C_{N2} \cos\theta \hat{r}] = \\ &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-j\eta k}{4\pi} \right) I_0 L [\cos\theta (C_{N1} - C_{N2})\hat{r} - C_{N1} \text{sen}\theta \hat{\theta}] \end{aligned}$$

$$C_{N1} - C_{N2} = \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) - \left(1 + \frac{3}{jkr} - \frac{3}{(kr)^2} \right) = \frac{2j}{kr} + \frac{2}{(kr)^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-j\eta k}{4\pi} \right) I_0 L \left[\left(\frac{2j}{kr} + \frac{2}{(kr)^2} \right) \cos\theta \hat{r} - \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2} \right) \text{sen}\theta \hat{\theta} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = e^{-jkr} \left(\frac{-j\eta}{4\pi k} \right) I_0 L \left[\left(\frac{2jk}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right) \cos\theta \hat{r} - \left(\frac{k^2}{r} - \frac{jk}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \text{sen}\theta \hat{\theta} \right]$$

Para el caso de que $kr \gg 1$, pueden despreciarse los términos $\frac{1}{(kr)^n}$ con $n \geq 2$, quedando:

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{j\eta k}{4\pi} \right) I_0 L \text{sen}\theta \hat{\theta}$$

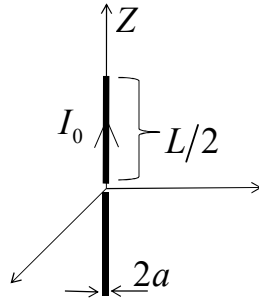
Ejercicio 1.2

Calcule el campo radiado (lejano) en cualquier dirección del espacio \hat{r} generado por un dipolo infinitesimal (dipolo de Hertz) dispuesto como se muestra en la figura. Suponga en primer lugar un modelo ideal de corriente uniforme, $I(z)=I_0$; después calcule nuevamente la expresión del campo radiado suponiendo una corriente triangular (con el mismo máximo que el anterior) sobre el dipolo corto y compare los resultados.

Calcule la densidad de potencia para el caso de una distribución uniforme de corriente.

Calcule en qué factor cambia la densidad de potencia radiada, en la dirección de su máximo, cuando se cambia de una corriente uniforme a la triangular (con el mismo valor máximo de corriente). Datos: Longitud del dipolo L ; radio del dipolo a ($a \ll L$); longitud de onda λ ; $k = 2\pi/\lambda$

Solución:



Características del dipolo infinitesimal:
 $a \ll \lambda$, $L \ll \lambda$, $a \ll L$

1º) suponiendo $I(z) = I_0$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{\nu} I(\vec{r}') \hat{l}' e^{jk\vec{r}' \cdot \hat{r}} dl' = \int_{-L/2}^{L/2} I_0 \hat{z}' e^{jk(z'\hat{z}) \cdot \hat{r}} dz' = \hat{z} I_0 \int_{-L/2}^{L/2} I e^{jkz' \cos\theta} dz'$$

Puesto que: $L \ll \lambda \Rightarrow kz' \ll 1 \Rightarrow e^{jkz' \cos\theta} \simeq 1$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \hat{z} = I_0 L (\cos\theta \hat{r} - \text{sen}\theta \hat{\theta})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-j\eta k}{4\pi} \right) (\vec{N}(\vec{r}) - (\vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r}) \hat{r})$$

Quedando el vector campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{j\eta k}{4\pi} \right) I_0 L \text{sen}\theta \hat{\theta}$$

2º) Cuando se supone una corriente triangular $I(z) = I_0 \Delta\left(\frac{z'}{L}\right)$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{\nu} I(\vec{r}') \hat{l}' e^{jk\vec{r}' \cdot \hat{r}} dl' = \int_{-L/2}^{L/2} I_0 \Delta\left(\frac{z'}{L}\right) \hat{z}' e^{jk(z'\hat{z}) \cdot \hat{r}} dz'$$

Puesto que: $L \ll \lambda \Rightarrow kz' \ll 1 \Rightarrow e^{jkz' \cos\theta} \simeq 1$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 \hat{z}' = \hat{z} I_0 \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{L/2 - |z'|}{L/2} \right) dz'$$

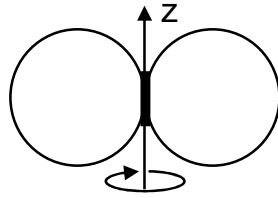
$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq \hat{z} I_0 \left[\int_{-L/2}^0 \left(\frac{L/2 + z'}{L/2} \right) dz' + \int_0^{L/2} \left(\frac{L/2 - z'}{L/2} \right) dz' \right] = \hat{z} \frac{I_0 L}{2}$$

Ya que en realidad se está evaluando el área delimitada por la función de corriente.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{j\eta k}{4\pi} \right) \frac{I_0 L}{2} \text{sen}\theta \hat{\theta}$$

Por tanto: $\vec{E}_{\Delta} = \frac{1}{2} \vec{E}_{\Pi}$

En ambos casos el diagrama es de tipo $\text{sen}\theta$ con simetría de revolución en torno al eje Z (independiente de φ):



Si la expresión del campo eléctrico lejano es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{j\eta k}{4\pi}\right) I_0 L \text{ sen}\theta \hat{\theta}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

$$\frac{\hat{r} \times \vec{E}}{\eta} = \vec{H}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\eta} \left[|E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2 \right] \hat{r}$$

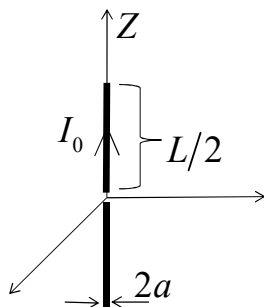
$$\langle \vec{S} \rangle \geq \frac{1}{2\eta} \left(\frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{\eta k}{4\pi}\right)^2 (I_0 L)^2 \text{ sen}^2\theta \hat{r} = \frac{\eta}{8} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2} \hat{r}$$

$$|\langle \vec{S} \rangle| = \frac{\eta}{8} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \frac{\text{sen}^2\theta}{r^2} \quad \text{W/m}^2$$

Ejercicio 1.3

Calcule el campo radiado (lejano) en cualquier punto del espacio \vec{r} por un dipolo de media onda dispuesto como en la figura. Suponga un modelo ideal de corriente sinusoidal del tipo, $\vec{I}(l) = I_0 \cdot \text{sen}\left[k\left(\frac{L}{2} - |l|\right)\right] \hat{l}$. (Longitud del dipolo L ; radio del dipolo a ($a \ll L$); longitud de onda λ ; $k = 2\pi/\lambda$).

Solución:



Características del dipolo de media onda:

$$L = \lambda/2, a \ll L$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-\eta jk}{4\pi}\right) (\vec{N}(\vec{r}) - (\vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r})\hat{r})$$

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(\vec{r}) &= \int_{l'} I(l') \hat{l}' e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} dl' \\
 \vec{r}' &= z' \hat{z}' = z' \hat{z} \\
 \hat{l}' &= \hat{z}' = \hat{z} \\
 \vec{r}' \cdot \hat{r} &= z' \hat{z} \cdot \hat{r} = z' \cos\theta \\
 k \frac{L}{2} &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} ; \quad e^{jkL/2} = j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(\vec{r}) &= \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I_0 \hat{z} \operatorname{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right] e^{jkz' \cos\theta} dz' = I_0 \hat{z} \frac{1}{2j} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[e^{jk(\frac{L}{2}-|z'|)} - e^{-jk(\frac{L}{2}-|z'|)} \right] e^{jkz' \cos\theta} dz' = \\
 &= \hat{z} \frac{I_0}{2j} \left[\int_{z'=0}^{\frac{L}{2}} \left(e^{\frac{jkL}{2}} e^{-jkz'} - e^{-\frac{jkL}{2}} e^{jkz'} \right) e^{jkz' \cos\theta} dz' + \int_{z'=-\frac{L}{2}}^0 \left(e^{\frac{jkL}{2}} e^{jkz'} - e^{-\frac{jkL}{2}} e^{-jkz'} \right) e^{jkz' \cos\theta} dz' \right] = \\
 &= \hat{z} \frac{I_0}{2} \int_{z'=0}^{\frac{L}{2}} \left[(e^{-jkz'} + e^{jkz'}) e^{jkz' \cos\theta} + (e^{-jkz'} + e^{jkz'}) e^{-jkz' \cos\theta} \right] dz' = \\
 &= \hat{z} \frac{I_0}{2} \int_{z'=0}^{\frac{L}{2}} \left(e^{jkz'(-1+\cos\theta)} + e^{jkz'(1+\cos\theta)} + e^{-jkz'(1+\cos\theta)} + e^{-jkz'(-1+\cos\theta)} \right) dz' \\
 \vec{N}(\vec{r}) &= \hat{z} \frac{I_0}{2} \left[\frac{e^{jkz'(-1+\cos\theta)}}{jk(-1+\cos\theta)} + \frac{e^{jkz'(1+\cos\theta)}}{jk(1+\cos\theta)} + \frac{e^{-jkz'(1+\cos\theta)}}{-jk(1+\cos\theta)} + \frac{e^{-jkz'(-1+\cos\theta)}}{-jk(-1+\cos\theta)} \right]_{z'=0}^{\frac{L}{2}} = \\
 &= \hat{z} \frac{I_0}{2jk} \left[\frac{2j \operatorname{sen}[kz'(-1+\cos\theta)]}{(-1+\cos\theta)} + \frac{2j \operatorname{sen}[kz'(1+\cos\theta)]}{(1+\cos\theta)} \right]_{z'=0}^{\frac{L}{2}} = \\
 &= \hat{z} \frac{I_0}{k} \left[\frac{\operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{(-1+\cos\theta)} + \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{(1+\cos\theta)} \right] = \hat{z} \frac{I_0}{k} \left[\frac{-\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{(-1+\cos\theta)} + \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{(1+\cos\theta)} \right] \\
 &= \hat{z} \frac{I_0}{k} \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right) \left(\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} \right) = \hat{z} \frac{2I_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{k \operatorname{sen}^2\theta} \\
 \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) \frac{2I_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{k \operatorname{sen}^2\theta} [(\hat{z} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{z} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi}] \\
 \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{\eta j}{2\pi} \right) I_0 \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right)}{\operatorname{sen}\theta} \hat{\theta}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4

Un dipolo eléctricamente corto de longitud total ($L \ll \lambda$) y centrado en el origen de coordenadas tiene uno de los brazos a lo largo del eje X y el otro brazo a lo largo del eje Y. Demuestre la expresión del campo eléctrico radiado (en notación compleja).

Solución:

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{l'} I(l') \hat{l}' \cdot e^{jk l'(\hat{l}' \cdot \hat{r})} dl'$$

Para la contribución del brazo del dipolo sobre el eje x: $\vec{r}' = x' \hat{x}$; $l' = x'$; $dl' = dx'$; $\hat{l}' = -\hat{x}'$

Para la contribución del brazo del dipolo sobre el eje y: $\vec{r}' = y' \hat{y}$; $l' = y'$; $dl' = dy'$ $\hat{l}' = \hat{y}'$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{x'=0}^{L/2} I_0(-\hat{x}') \cdot e^{jk x'(\hat{x}' \cdot \hat{r})} dx' + \int_{y'=0}^{L/2} I_0(\hat{y}') \cdot e^{jk y'(\hat{y}' \cdot \hat{r})} dy' \simeq -I_0 \hat{x}' \frac{L}{2} + I_0 \hat{y}' \frac{L}{2} = I_0 \frac{L}{2} (\hat{y}' - \hat{x}')$$

$$\hat{x} = (\hat{x} \cdot \hat{r}) \hat{r} + (\hat{x} \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi}) \hat{\phi} = (\hat{x} \cdot \hat{r}) \hat{r} + \cos\theta \cos\varphi \hat{\theta} - \text{sen}\varphi \hat{\phi}$$

$$\hat{y} = (\hat{y} \cdot \hat{r}) \hat{r} + (\hat{y} \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta} + (\hat{y} \cdot \hat{\phi}) \hat{\phi} = (\hat{y} \cdot \hat{r}) \hat{r} + \cos\theta \text{sen}\varphi \hat{\theta} + \cos\varphi \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N}(\vec{r}) - (\vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r}) \hat{r}) = \\ &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) I_0 \frac{L}{2} (\cos\theta \text{sen}\varphi \hat{\theta} + \cos\varphi \hat{\phi} - (\cos\theta \cos\varphi \hat{\theta} - \text{sen}\varphi \hat{\phi})) = \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) I_0 \frac{L}{2} (\cos\theta (\text{sen}\varphi - \cos\varphi) \hat{\theta} + (\cos\varphi + \text{sen}\varphi) \hat{\phi})$$

Ejercicio 1.5

Calcule la expresión de la dirección del vector campo eléctrico generado por un dipolo de longitud L situado en la bisectriz de los ejes X e Y, en el que se puede suponer una distribución de corriente constante, cuando radia en la dirección ($\theta = 10^\circ$, $\varphi = 20^\circ$). Repita la demostración, pero ahora suponiendo directamente que se trata de un dipolo eléctricamente corto ($L \ll \lambda$).

- a) $0,707 (\hat{x} + \hat{y})$ b) $0,707 (\hat{\theta} - \hat{\phi})$ c) $0,904 \hat{\theta} + 0,428 \hat{\phi}$ d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{l'=-L/2}^{L/2} I(l') \hat{l}' \cdot e^{jk l'(\hat{l}' \cdot \hat{r})} dl'$$

$$d\vec{l}' = dl'_x \hat{x} + dl'_y \hat{y}$$

$$\hat{l}' = \frac{\hat{x}' + \hat{y}'}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{l}' \cdot \hat{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen}(\theta) (\cos(\varphi) + \text{sen}(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u + v)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}(\vec{r}) &= I_0 \hat{l}' \frac{1}{jk \frac{1}{\sqrt{2}} (u + v)} \left[e^{jk l' \frac{1}{\sqrt{2}} (u+v)} \right]_{l'=-L/2}^{l'=+L/2} = \frac{I_0 (\hat{x} + \hat{y})}{jk (u + v)} \left(e^{j \frac{kL(u+v)}{2\sqrt{2}}} - e^{-j \frac{kL(u+v)}{2\sqrt{2}}} \right) = \\ &= \frac{2I_0 (\hat{x} + \hat{y})}{k(u + v)} \text{sen} \left(\frac{kL(u + v)}{2\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N}(\vec{r}) - (\vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r}) \hat{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi}\right) \frac{2I_0}{k(u+v)} \operatorname{sen}\left(\frac{kL(u+v)}{2\sqrt{2}}\right) ((\hat{x} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\varphi})\hat{\varphi} + (\hat{y} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{y} \cdot \hat{\varphi})\hat{\varphi})$$

$$\hat{e} \propto (\hat{x} \cdot \hat{\theta} + \hat{y} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\varphi} + \hat{y} \cdot \hat{\varphi})\hat{\varphi} = \cos(\theta) \cdot (\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi))\hat{\theta} + (\cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi))\hat{\varphi}$$

$$\hat{e} \propto \cos(10^\circ) \cdot (\cos(20^\circ) + \operatorname{sen}(20^\circ))\hat{\theta} + (\cos(20^\circ) - \operatorname{sen}(20^\circ))\hat{\varphi} = \frac{1,2622 \hat{\theta} + 0,5977 \hat{\varphi}}{1,3966} =$$

$$= 0,9038 \hat{\theta} + 0,4280 \hat{\varphi}$$

Ejercicio 1.6

De un dipolo situado en la bisectriz de los ejes X e Y, calcule el factor de pérdidas por acoplo de polarización si, en la dirección $\theta=60^\circ$, $\varphi=60^\circ$, se coloca un dipolo resonante orientado según el eje Z.

- a) 3,2 dB b) 14,4 dB c) 6,4 dB d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La dirección del campo eléctrico de un dipolo situado en la bisectriz de los ejes X e Y es:

$$\hat{e} \propto (\hat{x} \cdot \hat{\theta} + \hat{y} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\varphi} + \hat{y} \cdot \hat{\varphi})\hat{\varphi} = \cos(\theta) \cdot (\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi))\hat{\theta} + (\cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi))\hat{\varphi}$$

$$\hat{e} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} = \frac{\cos(60^\circ) \cdot (\cos(60^\circ) + \operatorname{sen}(60^\circ))\hat{\theta} + (\cos(60^\circ) - \operatorname{sen}(60^\circ))\hat{\varphi}}{\left[[\cos(60^\circ) \cdot (\cos(60^\circ) + \operatorname{sen}(60^\circ))]^2 + (\cos(60^\circ) - \operatorname{sen}(60^\circ))^2 \right]^{1/2}} = 0,8814 \hat{\theta} - 0,4723 \hat{\varphi}$$

$$\hat{e}_{dip,z} = \hat{\theta}$$

$$\hat{e} \cdot \hat{e}_{dip,z} = (0,8814 \hat{\theta} - 0,4723 \hat{\varphi}) \cdot \hat{\theta} = 0,8814$$

Las pérdidas por acoplo de polarización, expresadas en dB, serán:

$$-20 \log_{10}(\hat{e} \cdot \hat{e}_{dip,z}) = -20 \log_{10}(0,8814) = 1,1 \text{ dB}$$

Ejercicio 1.7

De un dipolo eléctricamente corto ($L \ll \lambda$), situado en la bisectriz de los ejes X e Y, calcule la diferencia de densidad de potencia entre el máximo de radiación y la dirección definida por $\theta=60^\circ$, $\varphi=60^\circ$.

- a) 5,2 dB b) 2,87 dB c) 13 dB d) ninguno de los anteriores

Solución:

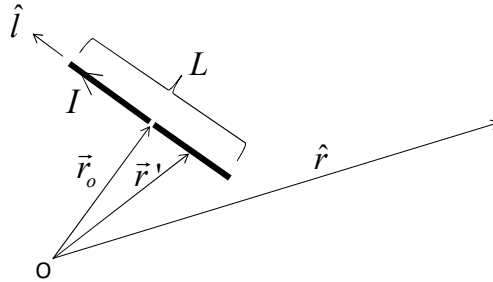
La expresión del campo eléctrico de un dipolo eléctricamente corto es (basta con aproximar la función seno por su argumento cuando $L \ll \lambda$ en la expresión del campo de un dipolo de longitud arbitraria):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi}\right) \frac{I_0 L}{\sqrt{2}} (\cos(\theta) \cdot (\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi))\hat{\theta} + (\cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi))\hat{\varphi})$$

$$\begin{aligned}
\langle s(\theta, \varphi) \rangle &\propto |\vec{E}(\vec{r})|^2 \propto [\cos^2(\theta) \cdot (\cos(\varphi) + \text{sen}(\varphi))^2 + (\cos(\varphi) - \text{sen}(\varphi))^2] \\
&= 2 - \text{sen}^2(\theta)(1 + \text{sen}(2\varphi)) 10\log \frac{\langle s(\theta, \varphi) \rangle_{\max}}{\langle s(\theta, \varphi) \rangle} = 10\log \frac{\langle s(\theta = 0) \rangle}{\langle s(\theta = 60^\circ, \varphi = 60^\circ) \rangle} \\
&= 10\log \left(\frac{2}{2 - \text{sen}^2(60^\circ)(1 + \text{sen}(120^\circ))} \right) = 5,2 \text{ dB}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8

Obtenga la expresión del campo radiado (lejano) en $\vec{r} = r\hat{r}(\theta, \varphi)$ generado por un dipolo de longitud L , orientación arbitraria \hat{l} y con el centro del dipolo en el punto definido por el vector de posición \vec{r}_0 , considerando una excitación monocromática de longitud de onda λ . (Radio del dipolo a ($a \ll L$); longitud de onda λ ; $k = 2\pi/\lambda$)



Suponga que a lo largo del dipolo fluye una distribución de corriente con un modelo de tipo senoidal:

$$\vec{I}(l) = I_0 \cdot \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - |l| \right) \right] \hat{l}$$

Solución:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N}(\vec{r}) - (\vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r})\hat{r})$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{l'} I(l') \hat{l}' e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} dl'$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + l' \hat{l}'$$

$$\hat{l}' = \hat{l} = l_x \hat{x} + l_y \hat{y} + l_z \hat{z}$$

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = \vec{r}_0 \cdot \hat{r} + l' (\hat{l} \cdot \hat{r}) = \vec{r}_0 \cdot \hat{r} + l' f$$

$$f = \hat{l} \cdot \hat{r} = l_x \text{sen}\theta \cos\varphi + l_y \text{sen}\theta \text{sen}\varphi + l_z \cos\theta$$

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(\vec{r}) &= \hat{l} \int_{l'=-L/2}^{L/2} I_0 \operatorname{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - |l'| \right) \right] e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}} e^{jk l' f} dl' = \\
 &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{2j} \int_{-L/2}^{L/2} \left[e^{jk(\frac{L}{2}-|l'|)} - e^{-jk(\frac{L}{2}-|l'|)} \right] e^{jk l' f} dl' = \\
 &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{2j} \left[\int_0^{L/2} (e^{jkL/2} e^{-jkl'} - e^{-j/2} e^{jkl'}) e^{jk l' f} dl' + \int_{-L/2}^0 (e^{jkL/2} e^{jkl'} - e^{-jkL/2} e^{-jkl'}) e^{jk l' f} dl' \right] = \\
 &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{2j} \int_0^{L/2} [(e^{jkL/2} e^{-jkl'} - e^{-jkL/2} e^{jkl'}) e^{jk l' f} + (e^{jkL/2} e^{-jkl'} - e^{-jkL/2} e^{jkl'}) e^{-jk l' f}] dl' = \\
 &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{2j} \int_0^{L/2} (e^{jkL/2} e^{jkl'(-1+f)} - e^{-jkL/2} e^{jkl'(1+f)} + e^{jkL/2} e^{-jkl'(1+f)} - e^{-jkL/2} e^{-jkl'(-1+f)}) dl' \\
 \vec{N}(\vec{r}) &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{2j} \cdot \left[\frac{e^{jkL/2}}{j k(-1+f)} e^{jkl'(-1+f)} - \frac{e^{-jkL/2}}{j k(1+f)} e^{jkl'(1+f)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{jkL/2}}{-j k(1+f)} e^{-jkl'(1+f)} - \frac{e^{-jkL/2}}{-j k(-1+f)} e^{-jkl'(-1+f)} \right]_{l'=0}^{L/2} \\
 \vec{N}(\vec{r}) &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{2j \cdot j k} \left[\frac{2 \cos[kl'(-1+f) + kL/2]}{(-1+f)} - \frac{2 \cos[kl'(1+f) - kL/2]}{(1+f)} \right]_{l'=0}^{L/2} = \\
 &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{-k} \left[\frac{\cos[k(L/2)f]}{(-1+f)} - \frac{\cos[kL/2]}{(1+f)} \right] = \\
 &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{-k} \left[\cos[k(L/2)f] \left(\frac{1}{-1+f} - \frac{1}{1+f} \right) - \cos[kL/2] \left(\frac{1}{-1+f} - \frac{1}{1+f} \right) \right] = \\
 &= \hat{l} \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{-k} \cdot \frac{2}{f^2 - 1} \left[\cos\left(k \frac{L}{2} f\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right] \\
 \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) \frac{I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}}}{-k} \cdot \frac{2}{f^2 - 1} \cdot \left[\cos\left(k \frac{L}{2} f\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right] [(\hat{l} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{l} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi}] \\
 \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j}{2\pi} \right) \cdot I_0 e^{jk \vec{r}'_0 \cdot \hat{r}} \cdot \left[\frac{\cos\left(k \frac{L}{2} f\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{1 - f^2} \right] [(\hat{l} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{l} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi}] \\
 f &= \hat{l} \cdot \hat{r} = l_x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + l_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + l_z \cos\theta \\
 k &= \frac{2\pi}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Si nos dieran los puntos extremos \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , en lugar del punto central, éste lo calcularíamos como:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \frac{1}{2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

▪ Casos particulares:

Para un dipolo de longitud L, en el eje Z, centrado en el origen de coordenadas:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \vec{0} \\ \hat{l} = \hat{z} &\Rightarrow l_x = 0; \quad l_y = 0; \quad l_z = 1 \\ f = f(\theta, \varphi) &= \cos\theta\end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-\eta j}{2\pi}\right) \cdot I_0 \cdot \left[\frac{\cos\left(k\frac{L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(k\frac{L}{2}\right)}{1 - \cos^2\theta} \right] (-\text{sen}\theta)\hat{\theta}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{\eta j}{2\pi}\right) I_0 \left[\frac{\cos\left(k\frac{L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(k\frac{L}{2}\right)}{\text{sen}\theta} \right] \hat{\theta}$$

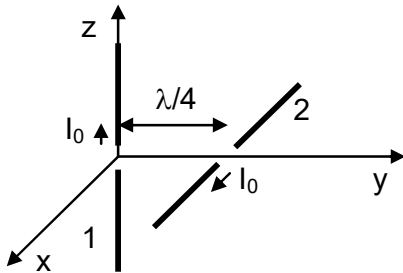
Si, además, $L = \lambda/2$ (dipolo de media onda):

$$\frac{kL}{2} = \frac{2\pi\lambda}{\lambda} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{\eta j}{2\pi}\right) I_0 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\text{sen}\theta} \right] \hat{\theta}$$

Ejercicio 1.9

Dos dipolos de media onda ($L = \lambda/2$) dispuestos perpendicularmente como se muestra en la figura están alimentados con la misma corriente de entrada I_0 y con las direcciones indicadas en la figura. ¿Cuál es la expresión del campo radiado en la dirección del eje Y?



Solución:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{ejeY} &= [\vec{E}_1 + \vec{E}_2]_{ejeY} \\ \vec{E}_1|_{ejeY} &= j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\text{sen}\theta} \hat{\theta} \Bigg|_{\theta=\pi/2} = j\eta \frac{e^{-jk y}}{2\pi y} I_0 (-\hat{z})\end{aligned}$$

El campo generado por el dipolo 2 puede calcularse, en el eje Y, a partir del campo generado por un dipolo según el eje Z y centrado en el origen de coordenadas (como el dipolo 1):

$$\vec{E}_2|_{ejeY} = j\eta \frac{e^{-jk y}}{2\pi y} I_0 (-\hat{x}) e^{jk y \cdot \left(\frac{\lambda}{4}\right) \hat{y}} = \eta \frac{e^{-jk y}}{2\pi y} I_0 \hat{x}$$

También podría haberse calculado desarrollando la integral de radiación con la geometría particular del dipolo 2 y particularizar en el eje Y (se indican a continuación los primeros pasos):

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jk r}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N}_2(\vec{r}) - (\vec{N}_2(\vec{r}) \cdot \hat{r}) \hat{r})$$

$$\vec{N}_2(\vec{r}) = \int_{l'} I(l') \hat{l}' e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} dl'$$

$$\vec{r}' = \frac{\lambda}{4} \hat{y} + x' \hat{x} \quad \hat{l}' = \hat{x}' = \hat{x} \quad l' = x'$$

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = \left(\frac{\lambda}{4} \hat{y} + x' \hat{x} \right) \cdot \hat{r} = \frac{\lambda}{4} \text{sen} \theta \text{sen} \varphi + x' \text{sen} \theta \text{cos} \varphi$$

$$\vec{N}_2(\vec{r}) = \int_{x'=-L/2}^{L/2} I_0 \cdot \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - |x'| \right) \right] \hat{x}' e^{jk \frac{\lambda}{4} \text{sen} \theta \text{sen} \varphi} e^{jk x' \text{sen} \theta \text{cos} \varphi} dx'$$

$$\vec{N}_2(\vec{r})|_{e_{jeY}} = \hat{x} I_0 j \int_{x'=-L/2}^{L/2} \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - |x'| \right) \right] dx'$$

Finalmente, sumando ambas contribuciones en la dirección del eje Y:

$$\vec{E}_{e_{jeY}} = -j \eta \frac{e^{-j y}}{2\pi y} I_0 (\hat{z} + j \hat{x})$$

Ejercicio 1.10

Calcule la expresión del campo eléctrico radiado (campo lejano) en cualquier punto del espacio $\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \varphi)$ por una espira eléctricamente corta, de geometría triangular, tal que todos los lados son de dimensión L . La espira se sitúa en el plano XY.

Solución:

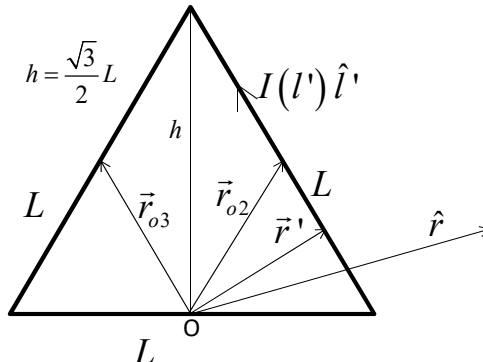
El campo eléctrico radiado vendrá dado por la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jk r}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N}(\vec{r}) - (\vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r}) \hat{r})$$

Donde $\vec{N}(\vec{r})$ es el vector de radiación, dado por:

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{l'} I(l') \hat{l}' \cdot e^{jk l' (\hat{l}' \cdot \hat{r})} dl'$$

Por tratarse de espira eléctricamente corta ($L \ll \lambda$), $I(l') \simeq I_0$



Tras describir geoméricamente la espira de acuerdo con la figura, el vector de radiación puede calcularse como contribución al mismo de cada uno de los tres tramos de corriente del triángulo:

$$\vec{N}(\vec{r}) = \vec{N}_1(\vec{r}) + \vec{N}_2(\vec{r}) + \vec{N}_3(\vec{r})$$

$$\vec{N}_1(\vec{r}) = \int_{l'=-L/2}^{L/2} I_0 \hat{l}' \cdot e^{jk l' (\hat{l}' \cdot \hat{r})} dl' \quad \begin{cases} \hat{l}' = \hat{x} = \hat{l}_1 \\ \hat{l}' \cdot \hat{r} = \hat{x} \cdot \hat{r} = u = \text{sen}\theta \cos\varphi = \cos\delta_1 \end{cases}$$

$$\vec{N}_1(\vec{r}) = I_0 \hat{l}_1 \int_{l'=-L/2}^{L/2} e^{jk l' \cos\delta_1} dl' = I_0 \hat{l}_1 \frac{e^{jk \frac{L}{2} \cos\delta_1} - e^{-jk \frac{L}{2} \cos\delta_1}}{j k \cos\delta_1} = I_0 \hat{l}_1 \frac{2 \text{sen}\left(k \frac{L}{2} \cos\delta_1\right)}{k \cos\delta_1}$$

$$\vec{N}_2(\vec{r}) = \int_{l'=-L/2}^{L/2} I_0 \hat{l}' \cdot e^{jk(\vec{r}_{02} + l' \hat{l}') \cdot \hat{r}} dl' \quad \begin{cases} \hat{l}' = \frac{-\frac{L}{2} \hat{x} + h \hat{y}}{L} = \frac{-\frac{L}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} L \hat{y}}{L} = -\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} = \hat{l}_2 \\ \hat{l}' \cdot \hat{r} = \cos\delta_2 \\ \vec{r}_{02} = \frac{L}{4} \hat{x} + \frac{\sqrt{3} L}{4} \hat{y} \end{cases}$$

$$\vec{N}_2(\vec{r}) = I_0 \hat{l}_2 e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} \int_{l'=-L/2}^{L/2} e^{jk(l' \hat{l}' \cdot \hat{r})} dl' = I_0 \hat{l}_2 e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} \int_{l'=-L/2}^{L/2} e^{jk \cos\delta_2} dl'$$

$$= I_0 \hat{l}_2 e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} \frac{2 \text{sen}\left(k \frac{L}{2} \cos\delta_2\right)}{k \cos\delta_2}$$

$$\vec{N}_3(\vec{r}) = \int_{l'=-L/2}^{L/2} I_0 \hat{l}' \cdot e^{jk(\vec{r}_{03} + l' \hat{l}') \cdot \hat{r}} dl' \quad \begin{cases} \hat{l}' = \frac{-\frac{L}{2} \hat{x} - h \hat{y}}{L} = \frac{-\frac{L}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} L \hat{y}}{L} = -\frac{1}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} = \hat{l}_3 \\ \hat{l}' \cdot \hat{r} = \cos\delta_3 \\ \vec{r}_{03} = -\frac{L}{4} \hat{x} + \frac{\sqrt{3} L}{4} \hat{y} \end{cases}$$

$$\vec{N}_3(\vec{r}) = I_0 \hat{l}_3 e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \int_{l'=-L/2}^{L/2} e^{jk(l' \hat{l}' \cdot \hat{r})} dl' = I_0 \hat{l}_3 e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \int_{l'=-L/2}^{L/2} e^{jk \cos\delta_3} dl'$$

$$= I_0 \hat{l}_3 e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \frac{2 \text{sen}\left(k \frac{L}{2} \cos\delta_3\right)}{k \cos\delta_3}$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \vec{N}_1(\vec{r}) + \vec{N}_2(\vec{r}) + \vec{N}_3(\vec{r}) =$$

$$= \frac{2 I_0}{k} \left[\hat{l}_1 \frac{\text{sen}\left(k \frac{L}{2} \cos\delta_1\right)}{\cos\delta_1} + \hat{l}_2 e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} \frac{\text{sen}\left(k \frac{L}{2} \cos\delta_2\right)}{\cos\delta_2} + \hat{l}_3 e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \frac{\text{sen}\left(k \frac{L}{2} \cos\delta_3\right)}{\cos\delta_3} \right]$$

Si $L \ll \lambda$ ($kL \ll 1$), se puede realizar la aproximación $\text{sen}(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq x$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[\hat{l}_1 + \hat{l}_2 e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} + \hat{l}_3 e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \right]$$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[\hat{x} + \left(-\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} \right) e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} + \left(-\frac{1}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} \right) e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \right]$$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[\hat{x} \left(1 - \frac{1}{2} \left(e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} + e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} \left(e^{jk(\vec{r}_{02} \cdot \hat{r})} - e^{jk(\vec{r}_{03} \cdot \hat{r})} \right) \right]$$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[\begin{array}{l} \hat{x} \left(1 - \frac{1}{2} \left(e^{jk \left(\frac{L}{4} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \right) \cdot \hat{r}} + e^{jk \left(-\frac{L}{4} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \right) \cdot \hat{r}} \right) \right) + \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} \left(e^{jk \left(\frac{L}{4} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \right) \cdot \hat{r}} - e^{jk \left(-\frac{L}{4} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \right) \cdot \hat{r}} \right) \end{array} \right]$$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[\begin{array}{l} \hat{x} \left(1 - \frac{1}{2} e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \cdot \hat{r}} \left(e^{jk \frac{L}{4} \hat{x} \cdot \hat{r}} + e^{-j \frac{L}{4} \hat{x} \cdot \hat{r}} \right) \right) + \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \cdot \hat{r}} \left(e^{jk \frac{L}{4} \hat{x} \cdot \hat{r}} - e^{-j \frac{L}{4} \hat{x} \cdot \hat{r}} \right) \end{array} \right]$$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[\hat{x} \left(1 - e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \cdot \hat{r}} \cos \left(k \frac{L}{4} \hat{x} \cdot \hat{r} \right) \right) + \hat{y} j \sqrt{3} e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \cdot \hat{r}} \operatorname{sen} \left(k \frac{L}{4} \hat{x} \cdot \hat{r} \right) \right]$$

Si $L \ll \lambda$ ($kL \ll 1$), se puede realizar otra vez la aproximación $\operatorname{sen}(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq x$, $\cos(x)|_{x \rightarrow 0} \simeq 1$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[\hat{x} \left(1 - e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \cdot \hat{r}} \right) + \hat{y} \frac{j \sqrt{3} kL}{4} (\hat{x} \cdot \hat{r}) e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \cdot \hat{r}} \right]$$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 L \left[-2 j e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{8} \hat{y} \cdot \hat{r}} \hat{x} \operatorname{sen} \left(k \frac{\sqrt{3}L}{8} \hat{y} \cdot \hat{r} \right) + \hat{y} \frac{j \sqrt{3} kL}{4} (\hat{x} \cdot \hat{r}) e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{4} \hat{y} \cdot \hat{r}} \right]$$

Si $L \ll \lambda$ ($kL \ll 1$), en la anterior expresión se puede realizar la aproximación $e^{jk \frac{\sqrt{3}L}{8} \hat{y} \cdot \hat{r}} \simeq 1$

$$\vec{N}(\vec{r}) \simeq I_0 k j \left(\frac{\sqrt{3} L^2}{4} \right) [-\hat{x} (\hat{y} \cdot \hat{r}) + \hat{y} (\hat{x} \cdot \hat{r})]$$

Llamando:

$$\vec{C} = -\hat{x} (\hat{y} \cdot \hat{r}) + \hat{y} (\hat{x} \cdot \hat{r})$$

$$\begin{aligned} \vec{C} - \vec{C} \cdot \hat{r} &= -(\hat{y} \cdot \hat{r})(\cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \operatorname{sen} \varphi \hat{\phi}) + (\hat{x} \cdot \hat{r})(\cos \theta \operatorname{sen} \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\phi}) = \\ &= \hat{\theta} (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \cos \varphi) + \\ &\quad \hat{\phi} (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \cos \varphi) = \\ &= \hat{\phi} \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión del vector campo eléctrico será:

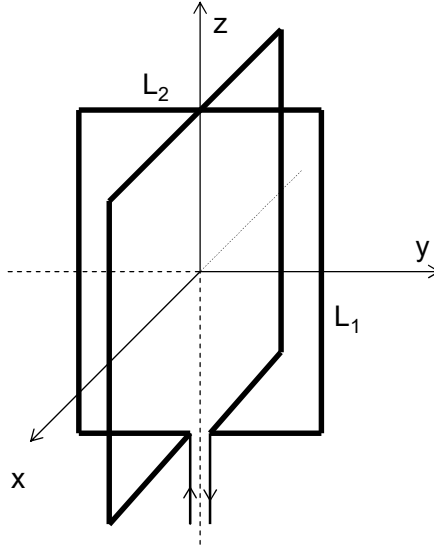
$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N}(\vec{r}) - (\vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r}) \hat{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) I_0 k j \left(\frac{\sqrt{3} L^2}{4} \right) \operatorname{sen} \theta \hat{\phi}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cdot \left(\frac{I_0 \eta k^2}{4\pi} \right) \cdot S \cdot \operatorname{sen} \theta \hat{\phi}, \quad \text{donde } S = \frac{\sqrt{3} L^2}{4} \text{ es el área de la espira triangular.}$$

Ejercicio 1.11

Un radiogoniómetro es una de las ayudas a la navegación más antiguas y permite conocer la dirección de llegada de una señal emitida por una radiobaliza. Para construir un radiogoniómetro se propone una antena formada por dos espiras ortogonales (véase la figura) tal que combinando las señales de las dos espiras se logre un diagrama con nulo que permitiera la detección de dirección mediante el paso por cero. El sistema funciona a 300 kHz. Las dos espiras son iguales y tienen lados $L_1 = 1,1$ m y $L_2 = 0,8$ m.

Se pide calcular su diagrama de radiación (cuando sus bornes están conectados como se indica en la figura), representándolo en los cortes que se consideren necesarios para verificar si es útil para la función deseada.



Solución:

Por las dimensiones y frecuencia se pueden considerar ambas espiras eléctricamente pequeñas y, por tanto, con corriente constante a lo largo de ellas. De esta manera se puede considerar también que la antena está compuesta por:

- 1 dipolo eléctricamente corto L_1 con corriente en dirección $+\hat{z}$, centrado en $(L_2/2; 0; 0)$
- 1 dipolo eléctricamente corto L_1 con corriente en dirección $-\hat{z}$, centrado en $(-L_2/2; 0; 0)$
- 1 dipolo eléctricamente corto L_1 con corriente en dirección $+\hat{z}$, centrado en $(0; -L_2/2; 0)$
- 1 dipolo eléctricamente corto L_1 con corriente en dirección $-\hat{z}$, centrado en $(0; L_2/2; 0)$
- 1 dipolo eléctricamente corto L_2 con corriente en dirección $+\hat{x}$, centrado en $(0; 0; -L_1/2)$
- 1 dipolo eléctricamente corto L_2 con corriente en dirección $-\hat{x}$, centrado en $(0; 0; L_1/2)$
- 1 dipolo eléctricamente corto L_2 con corriente en dirección $-\hat{y}$, centrado en $(0; 0; -L_1/2)$
- 1 dipolo eléctricamente corto L_2 con corriente en dirección $+\hat{y}$, centrado en $(0; 0; L_1/2)$

Vector de radiación de un dipolo eléctricamente corto con corriente según \hat{l}' y centrado en \vec{r}_0 :

$$\vec{N}_o(\vec{r}) = \int_{l'} I(l') \hat{l}' e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} dl'$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + l' \hat{l}'$$

$$\hat{l}' = \hat{l} = l_x \hat{x} + l_y \hat{y} + l_z \hat{z}$$

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = \vec{r}_0 \cdot \hat{r} + l' (\hat{l} \cdot \hat{r})$$

$$\vec{N}_o(\vec{r}) = \int_{l'} I(l') \hat{l}' e^{jk\vec{r}_0 \cdot \hat{r}} e^{jk(\hat{l} \cdot \hat{r})} dl' \simeq \int_{l'=-L/2}^{L/2} \hat{l} I_0 e^{jk\vec{r}_0 \cdot \hat{r}} dl' = \hat{l} I_0 L e^{jk\vec{r}_0 \cdot \hat{r}}$$

Considerando la contribución de los 8 dipolos cortos:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\vec{r}) &= \left(\hat{z} I_0 L_1 e^{jk \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r}} \right) - \left(\hat{z} I_0 L_1 e^{-jk \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r}} \right) + \left(\hat{z} I_0 L_1 e^{-jk \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r}} \right) - \left(\hat{z} I_0 L_1 e^{jk \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r}} \right) + \\ &= \left(\hat{x} I_0 L_2 e^{-jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} \right) - \left(\hat{x} I_0 L_2 e^{jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} \right) - \left(\hat{y} I_0 L_2 e^{-jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} \right) + \left(\hat{y} I_0 L_2 e^{jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\vec{r}) &= \hat{z} I_0 L_1 \left(e^{jk \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r}} - e^{-jk \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r}} \right) - \hat{z} I_0 L_1 \left(e^{jk \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r}} - e^{-jk \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r}} \right) + \\ &\quad - \hat{x} I_0 L_2 \left(e^{jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} - e^{-jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} \right) + \hat{y} I_0 L_2 \left(e^{jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} - e^{-jk \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N}(\vec{r}) &= \hat{z} I_0 L_1 \left(2j \operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r} \right) \right) - \hat{z} I_0 L_1 \left(2j \operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r} \right) \right) + \\ &\quad - \hat{x} I_0 L_2 \left(2j \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \right) + \hat{y} I_0 L_2 \left(2j \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \right)\end{aligned}$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = (2j I_0) \left[\begin{array}{l} \hat{z} L_1 \left(\operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r} \right) - \operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r} \right) \right) - \\ - \hat{x} L_2 \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) + \hat{y} L_2 \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \end{array} \right]$$

$$\hat{x} = (\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r} + (\hat{x} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = (\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r} + \cos\theta \cos\varphi \hat{\theta} - \operatorname{sen}\varphi \hat{\phi}$$

$$\hat{y} = (\hat{y} \cdot \hat{r})\hat{r} + (\hat{y} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{y} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = (\hat{y} \cdot \hat{r})\hat{r} + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\theta} + \cos\varphi \hat{\phi}$$

$$\hat{z} = (\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} + (\hat{z} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{z} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\theta \hat{r} - \operatorname{sen}\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{N}(\vec{r}) - \vec{N}(\vec{r}) \cdot \hat{r} = (2j I_0) \left[\begin{array}{l} -L_1 \operatorname{sen}\theta \hat{\theta} \left(\operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r} \right) - \operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r} \right) \right) \\ -L_2 (\cos\theta \cos\varphi \hat{\theta} - \operatorname{sen}\varphi \hat{\phi}) \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \\ +L_2 (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\theta} + \cos\varphi \hat{\phi}) \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \end{array} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) \cdot (2j I_0) \cdot$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta} \left(L_2 \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \cos\theta (\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) - L_1 \operatorname{sen}\theta \left(\operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r} \right) - \operatorname{sen} \left(k \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r} \right) \right) \right) + \\ + \hat{\phi} \left(L_2 \operatorname{sen} \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \right) \end{array} \right.$$

Aproximado el seno por su argumento (cuando $kL_1 \ll 1$; $kL_2 \ll 1$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) \cdot (2j I_0) \cdot$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta} L_2 \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \cos\theta (\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) - L_1 \operatorname{sen}\theta \left(\left(k \frac{L_2}{2} \hat{x} \cdot \hat{r} \right) - \left(k \frac{L_2}{2} \hat{y} \cdot \hat{r} \right) \right) + \\ + \hat{\phi} L_2 \left(k \frac{L_1}{2} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \end{array} \right.$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{\eta k^2}{4\pi} \right) \cdot I_0 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \left[\hat{\theta} (\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) + \hat{\phi} (\cos\theta (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)) \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r})|_{\theta=\pi/2} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{\eta k^2}{4\pi} \right) \cdot I_0 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot (\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) \hat{\theta}$$

$$\vec{E}(\vec{r})|_{\varphi=0} = \left(\frac{e^{-jk r}}{r}\right) \left(\frac{\eta k^2}{4\pi}\right) \cdot I_0 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot [-\hat{\theta} + \hat{\phi} \cos\theta]$$

$$\vec{E}(\vec{r})|_{\varphi=\pi/2} = \left(\frac{e^{-jk r}}{r}\right) \left(\frac{\eta k^2}{4\pi}\right) \cdot I_0 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot [\hat{\theta} + \hat{\phi} \cos\theta]$$

Ejercicio 1.12

Dos dipolos de longitud $L \approx \lambda/2$ perpendiculares entre sí, se sitúan centrados en el origen y alineados sobre ejes X e Y respectivamente. Suponiendo una distribución de corriente sinusoidal en cada uno de ellos y que se alimentan con igual amplitud y fase:

a) Demuestre, a partir de las ecuaciones generales de campo lejano, la expresión del vector campo eléctrico total radiado por los dos dipolos cruzados en todo punto (diagrama de radiación).

b) Particularice la expresión para los planos principales.

c) Calcule, en el eje Z, el vector polarización.

Nota: variación de la corriente sinusoidal: $\bar{I}(u) = I_0 \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - |u| \right) \right] \hat{u}$

Solución:

Utilizando las expresiones integrales de campo eléctrico lejano para medio homogéneo e indefinido:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jk r}}{r}\right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi}\right) (\vec{N} - (\vec{N} \cdot \hat{r})\hat{r})$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_V \vec{J}(r') e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} dl'$$

- En el caso del dipolo situado sobre el eje X se tendrá:

$$\vec{r}' = x' \hat{x}$$

$$\hat{r} = \text{sen}\theta \cos\phi \hat{x} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = \text{sen}\theta \cos\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \int_{x'=0}^{\lambda/4} \hat{x} I_0 \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - x' \right) \right] e^{jkx' \text{sen}\theta \cos\phi} dx' + \int_{x'=-\lambda/4}^0 \hat{x} I_0 \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} + x' \right) \right] e^{jkx' \text{sen}\theta \cos\phi} dx' = \\ &= I_0 \hat{x} \left\{ \int_{x'=0}^{\lambda/4} \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - x' \right) \right] e^{jkx' \text{sen}\theta \cos\phi} dx' + \int_{x'=-\lambda/4}^0 \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} + x' \right) \right] e^{jkx' \text{sen}\theta \cos\phi} dx' \right\} \end{aligned}$$

Operando con cada uno de los sumandos:

$$\begin{aligned}
 \int_{x'=0}^{\lambda/4} \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - x' \right) \right] e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' &= \int_{x'=0}^{\lambda/4} \text{sen} \left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} - kx' \right) e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' = \int_{x'=0}^{\lambda/4} \cos(kx') e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' = \\
 &= \int_{x'=0}^{\lambda/4} \left(\frac{e^{jkx'} + e^{-jkx'}}{2} \right) e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' = \frac{1}{2} \int_{x'=0}^{\lambda/4} [e^{jkx'(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} + e^{-jkx'(1-\text{sen} \theta \cos \phi)}] dx' = \\
 &= \frac{1}{2jk} \left[\frac{e^{jkx'(1+\text{sen} \theta \cos \phi)}}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} - \frac{e^{-jkx'(1-\text{sen} \theta \cos \phi)}}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right]_{x'=0}^{x'=\lambda/4} = \frac{1}{2jk} \left[\frac{e^{j\frac{\pi}{2}(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} - 1}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} - 1}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] = \\
 &= \frac{1}{2jk} \left[\frac{j e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi} - 1}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} + \frac{j e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi} + 1}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] \\
 \int_{x'=-\lambda/4}^0 \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} + x' \right) \right] \cdot e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' &= \int_{x'=-\lambda/4}^0 \text{sen} \left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} + kx' \right) \cdot e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' = \\
 &= \int_{x'=-\lambda/4}^0 \cos(kx') \cdot e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' = \int_{x'=-\lambda/4}^0 \left(\frac{e^{jkx'} + e^{-jkx'}}{2} \right) \cdot e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x'=-\lambda/4}^0 [e^{jkx'(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} + e^{-jkx'(1-\text{sen} \theta \cos \phi)}] dx' = \frac{1}{2jk} \left[\frac{e^{jkx'(1+\text{sen} \theta \cos \phi)}}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} - \frac{e^{-jkx'(1-\text{sen} \theta \cos \phi)}}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right]_{x'=-\lambda/4}^{x'=0} = \\
 &= \frac{1}{2jk} \left[\frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{2}(1+\text{sen} \theta \cos \phi)}}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} - \frac{1 - e^{+j\frac{\pi}{2}(1-\text{sen} \theta \cos \phi)}}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] = \frac{1}{2jk} \left[\frac{1 + j e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi}}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} - \frac{1 - j e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi}}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right]
 \end{aligned}$$

Sumando:

$$\begin{aligned}
 \int_{x'=0}^{\lambda/4} \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} - x' \right) \right] e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' + \int_{x'=-\lambda/4}^0 \text{sen} \left[k \left(\frac{L}{2} + x' \right) \right] e^{jkx' \text{sen} \theta \cos \phi} dx' &= \\
 &= \frac{1}{2jk} \left[\frac{j e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi} - 1}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} + \frac{j e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi} + 1}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] + \frac{1}{2jk} \left[\frac{1 + j e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi}}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} - \frac{1 - j e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi}}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] = \\
 &= \frac{1}{2jk} \left[j \frac{e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi} + e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi}}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} + j \frac{e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi} + e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi}}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] = \\
 &= \frac{1}{k} \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi \right)}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} + \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi \right)}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] = \\
 &= \frac{1}{k} \cos \left(\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi \right) \left[\frac{1}{(1+\text{sen} \theta \cos \phi)} + \frac{1}{(1-\text{sen} \theta \cos \phi)} \right] = \\
 &= \frac{1}{k} \cos \left(\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi \right) \left[\frac{(1-\text{sen} \theta \cos \phi) + (1+\text{sen} \theta \cos \phi)}{(1-\text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi)} \right] = \frac{2}{k} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi \right)}{(1-\text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi)}
 \end{aligned}$$

El vector de radiación queda entonces:

$$\vec{N} \Big|_{\text{dipolo eje X}} = \frac{2 I_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \cos \phi \right)}{k (1-\text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi)} \hat{x}$$

- En el caso del dipolo situado sobre el eje Y:

$$\begin{aligned}\hat{r}' &= y' \hat{x} \\ \hat{r} &= \text{sen}\theta \cos\phi \hat{x} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z} \\ \hat{r}' \cdot \hat{r} &= \text{sen}\theta \text{sen}\phi\end{aligned}$$

Y por analogía con el dipolo situado en eje X, tendremos para el caso del dipolo en el eje Y:

$$\vec{N}|_{\text{dipolo eje Y}} = \frac{2 I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)}{k (1 - \text{sen}^2\theta \text{sen}^2\phi)} \hat{y}$$

Si lo pasamos a coordenadas y vectores unitarios del sistema de coord. esféricas:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \text{sen}\theta \cos\phi \hat{r} + \cos\theta \cos\phi \hat{\theta} - \text{sen}\phi \hat{\phi} \\ \hat{y} &= \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{r} + \cos\theta \text{sen}\phi \hat{\theta} + \cos\phi \hat{\phi}\end{aligned}$$

El campo total en componentes esféricas quedará:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi}\right) (\vec{N} - (\vec{N} \cdot \hat{r})\hat{r}) \\ &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi}\right) \cdot [(\vec{N}|_{\text{dipolo eje X}} + \vec{N}|_{\text{dipolo eje Y}}) - (\vec{N}|_{\text{dipolo eje X}} + \vec{N}|_{\text{dipolo eje Y}}) \cdot \hat{r}] = \\ &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \cdot \left(\frac{-\eta j I_0}{2\pi}\right) \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \cos\phi\right)}{(1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi)} (\cos\theta \cos\phi \hat{\theta} - \text{sen}\phi \hat{\phi}) + \\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)}{(1 - \text{sen}^2\theta \text{sen}^2\phi)} (\cos\theta \text{sen}\phi \hat{\theta} + \cos\phi \hat{\phi}) \end{array} \right] \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \cdot \left(\frac{-\eta j I_0}{2\pi}\right) \cdot \\ &\left[\hat{\theta} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \cos\phi\right)}{(1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi)} \cos\theta \cos\phi + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)}{(1 - \text{sen}^2\theta \text{sen}^2\phi)} \cos\theta \text{sen}\phi \right) + \hat{\phi} \left(\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \cos\phi\right)}{(1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi)} \text{sen}\phi + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \text{sen}\phi\right)}{(1 - \text{sen}^2\theta \text{sen}^2\phi)} \cos\phi \right) \right]\end{aligned}$$

b) En el plano $\phi=0^\circ$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \cdot \left(\frac{-\eta j I_0}{2\pi}\right) \cdot \left[\hat{\theta} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right)}{\cos\theta} \right) + \hat{\phi} \right]$$

En el plano $\phi=90^\circ$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \cdot \left(\frac{-\eta j I_0}{2\pi}\right) \cdot \left[\hat{\theta} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right)}{\cos\theta} \right) - \hat{\phi} \right]$$

c) En la dirección $\theta=0^\circ$, $\phi=0^\circ$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \cdot \left(\frac{-\eta j I_0}{2\pi}\right) \cdot [\hat{\theta} + \hat{\phi}]$$

El vector de polarización en dicha dirección será:

$$\hat{e} = \frac{\hat{\theta} + \hat{\phi}}{\sqrt{2}} \quad ; \text{ por tanto, polarización lineal, } AR = \infty$$

Ejercicio 1.13

Una antena está constituida por un hilo conductor de sección a en forma de espira circular de radio b ($a \ll b$), diseñada para operar a una frecuencia tal que $b \ll \lambda$.

- Si dicha espira se sitúa en el plano XY y centrada en el origen de coordenadas, obtenga la expresión del campo eléctrico radiado (campo lejano), indicando cuál es su relación axial.
- Calcule su directividad (en el máximo).
- Calcule su resistencia de entrada suponiendo despreciables las pérdidas en la antena.
- Si se coloca plano conductor indefinido paralelo a la espira y a una distancia $d = \lambda/4$ de aquélla, razone si se modifica el diagrama de la antena y la dirección de máxima directividad.

Nota: Aproxime la exponencial de la integral de radiación utilizando la expansión en serie:

$$f(u)|_{u \rightarrow 0} \cong f(0) + [f'(0)] u$$

Solución:

La expresión integral de campo eléctrico lejano para medio homogéneo e indefinido creado por una distribución de corriente eléctrica es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jk r}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N} - (\vec{N} \cdot \hat{r}) \hat{r})$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_U \vec{J}(r') e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} dl'$$

En el caso de la espira colocada en el plano XY y centrada en el origen de coordenadas:

$$\vec{r}' = b \hat{\rho}' = b \cos\phi' \hat{x} + b \sin\phi' \hat{y}$$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = b \cos\phi' \sin\theta \cos\phi + b \sin\phi' \sin\theta \sin\phi = b \sin\theta \cos(\phi - \phi')$$

Si se trata de una espira eléctricamente pequeña se podrán realizar 2 aproximaciones:

- que la corriente es aproximadamente constante a lo largo de la espira
- que el término de la exponencial compleja de la integral de radiación podrá aproximarse dado que $r'/r \rightarrow 0$.

$$f(u)|_{u \rightarrow 0} \cong f(0) + [f'(0)] u$$

$$\Rightarrow e^{j \frac{2\pi b}{\lambda} \sin\theta \cos(\phi - \phi')} \Big|_{\frac{2\pi b}{\lambda} \rightarrow 0} \cong 1 + j \sin\theta \cos(\phi - \phi') \left(\frac{2\pi b}{\lambda} \right) = 1 + j k b \sin\theta \cos(\phi - \phi')$$

Por tanto, el vector de radiación queda:

$$\vec{N} = \int_{\phi'=0}^{2\pi} I_0 \hat{\phi}' e^{j k b \sin\theta \cos(\phi - \phi')} b d\phi' = I_0 b \int_{\phi'=0}^{2\pi} \hat{\phi}' [1 + j k b \sin\theta \cos(\phi - \phi')] d\phi' =$$

$$= I_0 b \int_{\phi'=0}^{2\pi} (-\sin\phi' \hat{x} + \cos\phi' \hat{y}) [1 + j k b \sin\theta \cos(\phi - \phi')] d\phi' =$$

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= I_0 b \left\{ -\hat{x} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \text{sen}\phi' [1 + j k b \text{sen}\theta \cos(\phi - \phi')] d\phi' + \hat{y} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos\phi' [1 + j k b \text{sen}\theta \cos(\phi - \phi')] d\phi' \right\} = \\
&= I_0 b \left\{ -\hat{x} \int_{\phi'=0}^{2\pi} [\text{sen}\phi' + j k b \text{sen}\theta \text{sen}\phi' \cos(\phi - \phi')] d\phi' + \right. \\
&\quad \left. + \hat{y} \int_{\phi'=0}^{2\pi} [\cos\phi' + j k b \text{sen}\theta \cos\phi' \cos(\phi - \phi')] d\phi' \right\} = \\
&= I_0 b \left\{ -\hat{x} j k b \text{sen}\theta \int_{\phi'=0}^{2\pi} \text{sen}\phi' \cos(\phi - \phi') d\phi' + \hat{y} j k b \text{sen}\theta \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos\phi' \cos(\phi - \phi') d\phi' \right\} = \\
&= j k b^2 I_0 \text{sen}\theta \left\{ -\hat{x} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \text{sen}\phi' \cos(\phi - \phi') d\phi' + \hat{y} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos\phi' \cos(\phi - \phi') d\phi' \right\} = \\
&= j k b^2 I_0 \text{sen}\theta \left\{ -\hat{x} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{1}{2} [\text{sen}\phi + \cos(2\phi' - \phi)] d\phi' + \hat{y} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos\phi + \cos(2\phi' - \phi)] d\phi' \right\} = \\
\vec{N} &= \frac{j k b^2 I_0}{2} \text{sen}\theta \left\{ -\hat{x} \left[2\pi \cdot \text{sen}\phi + \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi' - \phi) \Big|_{\phi'=0}^{2\pi} \right] + \hat{y} \left[2\pi \cdot \cos\phi + \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi' - \phi) \Big|_{\phi'=0}^{2\pi} \right] \right\} = \\
&= \frac{j k b^2 I_0}{2} \text{sen}\theta \left\{ -\hat{x} \left[2\pi \cdot \text{sen}\phi + \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi' - \phi) \Big|_{\phi'=0}^{2\pi} \right] + \hat{y} \left[2\pi \cdot \cos\phi + \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi' - \phi) \Big|_{\phi'=0}^{2\pi} \right] \right\} = \\
&= \frac{j k b^2 I_0}{2} \text{sen}\theta \{ -\hat{x} [2\pi \cdot \text{sen}\phi] + \hat{y} [2\pi \cdot \cos\phi] \} = j \pi k b^2 I_0 \text{sen}\theta (-\hat{x} \text{sen}\phi + \hat{y} \cos\phi)
\end{aligned}$$

que, en coordenadas esféricas se convierte directamente en:

$$\vec{N} = j \pi k b^2 I_0 \text{sen}\theta \hat{\phi}$$

Al no tener componente radial la integral de radiación, el campo radiado será directamente:

$$\vec{E} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) \vec{N} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) j \pi k b^2 I_0 \text{sen}\theta \hat{\phi} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \frac{\eta \pi A}{\lambda^2} I_0 \text{sen}\theta \hat{\phi}$$

El vector de polarización en dicha dirección será: $\hat{e} = \hat{\phi} \Rightarrow$ polarización lineal, AR= ∞

b) Directividad:

$$\begin{aligned}
D(\theta_0, \phi_0) &= \frac{U(\theta_0, \phi_0)}{\frac{P_{rad}}{4\pi}} = \frac{\langle s(\theta_0, \phi_0) \rangle}{\frac{P_{rad}}{4\pi r^2}} = \frac{4\pi r^2 \langle s(\theta_0, \phi_0) \rangle}{\int_s \langle s(\theta_0, \phi_0) \rangle ds} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta} |E(\theta_0, \phi_0)|^2}{\int_s \frac{1}{2\eta} |E(\theta_0, \phi_0)|^2 ds} = \\
&= \frac{4\pi r^2 \text{sen}^2\theta_0}{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \text{sen}^2\theta r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi} = 4\pi \frac{\text{sen}^2\theta_0}{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \text{sen}^3\theta d\theta d\phi} \\
\int \text{sen}^3\theta d\theta &= \int \text{sen}\theta \text{sen}^2\theta d\theta = \int \text{sen}\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta = \int (\text{sen}\theta - \text{sen}\theta \cos^2\theta) d\theta \\
&= -\cos\theta + \frac{1}{3} \cos^3\theta \\
D(\theta_0, \phi_0) &= \frac{2 \cdot \text{sen}^2\theta_0}{\int_{\theta=0}^{\pi} \text{sen}^3\theta d\theta} = \frac{2 \cdot \text{sen}^2\theta_0}{\left[-\cos\theta + \frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_{\theta=0}^{\pi}} = \frac{2 \cdot \text{sen}^2\theta_0}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{sen}^2\theta_0
\end{aligned}$$

El valor máximo corresponde a $\theta_0 = 90^\circ$: $D_0 = D(\theta_0, \phi_0)|_{\max} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1,76 \text{ dBi}$

c) Impedancia de entrada:

$$\begin{aligned}
 P_{rad} &= \int_s \langle s(\theta_0, \phi_0) \rangle ds = \int_s \frac{1}{2\eta} |E(\theta_0, \phi_0)|^2 ds = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \eta} \left(\frac{\eta k^2 b^2 I_0}{4} \right)^2 \frac{1}{r^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \text{sen}^2 \theta r^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2 \cdot \eta} \left(\frac{\eta k^2 b^2 I_0}{4} \right)^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \text{sen}^3 \theta d\theta d\phi = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \eta} \left(\frac{\eta k^2 b^2 I_0}{4} \right)^2 \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \text{sen}^3 \theta d\theta = \frac{1}{2 \cdot \eta} \left(\frac{\eta k^2 b^2 I_0}{4} \right)^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \\
 &= \frac{\pi}{12} (120\pi) \left(\frac{2\pi b}{\lambda} \right)^4 I_0^2 = 160\pi^4 \left(\frac{\pi b^2}{\lambda^2} \right)^2 I_0^2 = 160\pi^4 \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2 I_0^2 \quad ; \quad A = \pi b^2
 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$P_{rad} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad} \quad \Rightarrow \quad R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2} = 320\pi^4 \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2$$

Si $R_{rad} \gg R_{perd} \Rightarrow Z_{in} = (R_{rad} + R_{perd}) + j X_{in} \cong R_{rad} + j X_{in} = 320\pi^4 \left(\frac{\pi b^2}{\lambda^2} \right)^2 + j X_{in}$

d) Plano conductor indefinido a $\lambda/4$ de la espira (situada en plano XY) y paralela a ella:

Mediante teoría de imágenes tendríamos un problema equivalente consistente en dos espiras paralelas a una distancia entre ellas de $\lambda/2$ y con las corrientes circulando en sentido contrario.

Por tanto, en la dirección de máxima directividad de una única espira ($\theta_0 = 90^\circ$) ahora la suma de ambas contribuciones cancelaría el campo radiado total en dicha dirección. Por tanto, la función directividad de la nueva configuración caería a cero donde antes se tenía el máximo; además se mantendría el nulo en el eje perpendicular a la espira ($\theta_0 = 0^\circ$) correspondiente al nulo del diagrama de la espira eléctricamente corta.

Ejercicio 1.14

Una antena lineal está formada por un cuadro de tipo espira circular de radio a colocada en el plano XY y centrada en el origen de coordenadas. Puede considerar que la corriente que la recorre es uniforme (pero no se puede suponer que la espira es eléctricamente pequeña). Calcule:

- El campo eléctrico radiado por el cuadro en todos los puntos del plano $\phi = 0$. Teniendo en cuenta la simetría de la antena, generalice el resultado para todo el espacio.
- Determine el tamaño (el más pequeño posible) de la antena para que exista un nulo de radiación en el plano XY.
- Para la condición del apartado b, obtenga la dirección del máximo de radiación.
- Para la condición del apartado b, obtenga el ancho de haz a -3 dB en un corte $\phi = cte$.

Nota: $\int_0^{2\pi} \cos \alpha e^{ju \cdot \cos \alpha} d\alpha = 2\pi \cdot J_1(u)$ $\int_0^{2\pi} \text{sen} \alpha e^{ju \cdot \cos \alpha} d\alpha = 0$

Solución:

a) La expresión integral de campo eléctrico lejano para medio homogéneo e indefinido creado por una distribución de corriente eléctrica es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) (\vec{N} - (\vec{N} \cdot \hat{r}) \hat{r})$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_U \vec{J}(r') e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} dl'$$

En el caso de la espira colocada en el plano XY y centrada en el origen de coordenadas:

$$\vec{r}' = a \hat{\rho}' = a \cos\phi' \hat{x} + a \sin\phi' \hat{y}$$

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = a \cos\phi' \sin\theta \cos\phi + a \sin\phi' \sin\theta \sin\phi = a \sin\theta \cos(\phi - \phi')$$

$$\vec{N} = \int_{\phi'=0}^{2\pi} I_0 \hat{\phi}' e^{jk a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} a d\phi' = I_0 a \int_{\phi'=0}^{2\pi} \hat{\phi}' [1 + j k a \sin\theta \cos(\phi - \phi')] d\phi' =$$

$$= I_0 a \int_{\phi'=0}^{2\pi} (-\sin\phi' \hat{x} + \cos\phi' \hat{y}) e^{j k a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' =$$

$$= -I_0 a \hat{x} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \sin\phi' e^{j k a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' + I_0 a \hat{y} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos\phi' e^{j k a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' =$$

$$= -I_0 a \hat{x} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \sin\phi' e^{j k a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' + I_0 a \hat{y} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos\phi' e^{j k a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} d\phi'$$

$$\vec{N}(\phi = 0) = -I_0 a \hat{x} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \sin\phi' e^{j k a \sin\theta \cos\phi'} d\phi' + I_0 a \hat{y} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos\phi' e^{j k a \sin\theta \cos\phi'} d\phi' =$$

$$= 0 + I_0 a \hat{y} 2\pi J_1(k a \sin\theta) = \hat{y} I_0 (2\pi a) J_1(k a \sin\theta)$$

$$\hat{y} = (\hat{y} \cdot \hat{r})\hat{r} + (\hat{y} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{y} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = (\hat{y} \cdot \hat{r})\hat{r} + (\cos\theta \sin\phi)\hat{\theta} + (\cos\phi)\hat{\phi}$$

$$\vec{E}(\vec{r})|_{\phi=0} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) I_0 (2\pi a) J_1(k a \sin\theta) \hat{\phi}$$

b) nulo de radiación en el plano XY ($\theta = \pi/2$) $\Rightarrow J_1(ka) = 0$ (primer cero de la función de Bessel de primer orden) $\Rightarrow k \cdot a = \begin{cases} 0 \\ 3,85 \end{cases}$; eligiendo el segundo valor:

$$k \cdot a = 3,85 \Rightarrow a = 0,6 \lambda$$

c) Máximo de radiación (utilizando la expresión del plano $\phi = 0$):

$$J_1(k a \sin\theta)|_{\max} \Rightarrow k a \sin\theta = 1,8 \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1,8}{3,85}\right) = 27,9^\circ$$

d) Ancho de haz a -3 dB:

$$20 \log \left(\frac{J_1(k a \sin\theta)|_{\max}}{J_1(k a \sin\theta_{-3dB})} \right) = 3 \text{ dB} \Rightarrow \frac{J_1(1,8)}{J_1(k a \sin\theta_{-3dB})} = \sqrt{2}$$

$$J_1(k a \sin\theta_{-3dB}) = \frac{J_1(1,8)}{\sqrt{2}} = \frac{0,58152}{\sqrt{2}} = 0,411$$

$$J_1(k a \sin\theta_{-3dB,1}) = 0,411 \Rightarrow$$

$$3,85 \cdot \sin\theta_{-3dB,1} = 0,94$$

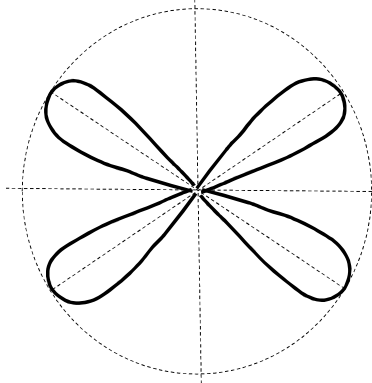
$$3,85 \cdot \sin\theta_{-3dB,2} = 2,79$$

$$\theta_{-3dB,1} = \sin^{-1}(0,2442) = 14,13^\circ$$

$$\theta_{-3dB,1} = \text{sen}^{-1}(0,7247) = 46,44^\circ$$

$$BW_{-3dB} = 46,44^\circ - 14,13^\circ = 32,31^\circ$$

En realidad, el ancho de haz calculado corresponde a uno de los lóbulos del corte $\phi = cte.$ tal como se muestra en el corte del diagrama de la figura.



2. Parámetros de antenas

2.1. Campo cercano y lejano

Ejercicio 2.1

La distancia mínima para medir el diagrama de radiación (campo lejano) de un reflector parabólico de 6 m de diámetro a 1 GHz, es:

- a) 40 m b) 266 m c) 240 m d) 1000 m

Solución:

Como se trata de una antena eléctricamente grande: $D \gg \lambda$ ($6 \gg 0,3$):

$$R_{lej}(m) = \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 36}{0,3} = 240 \text{ m}$$

Ejercicio 2.2

¿Cuál es la máxima longitud de una antena de tipo array si queremos medir su diagrama de radiación (campo lejano) a una distancia de 5 metros en la banda de comunicaciones móviles de 1,8 GHz?

- a) 300 cm b) 300 m c) 65 cm d) 500 m

Solución:

Al ser un array podemos suponer que se trata de una antena eléctricamente grande, por lo que la

distancia de campo lejano $R_{lej}(m) = \frac{2D^2}{\lambda}$ implica que $D_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot R_{lej}}{2}} = \sqrt{\frac{(300/1800) \cdot 5}{2}} = 0,65 \text{ m}$

Ejercicio 2.3

El error de fase en el diagrama de radiación de una antena de tipo reflector offset de 1m de diámetro en banda X, cuando se considera como tal el campo medido de dicha antena en el sistema esférico en cámara anecoica de la Universidad de Oviedo con la sonda colocada a una distancia de 5,4 m:

- a) Es mayor de 22,5° b) No hay error de fase.

- c) Existe pero es menor de $22,5^\circ$. d) No se puede medir el error de fase.

Solución:

$$\text{Banda X} \Rightarrow f \approx 10 \text{ GHz} \Rightarrow R_{lej} = \frac{2D^2}{\lambda} = 66,7 \text{ m}$$

Luego $R = 5,4 \text{ m}$ está en campo cercano y, por tanto, el diagrama medido tendrá un error de fase mayor de $22,5^\circ$.

Por si acaso, conviene comprobar el valor más crítico que correspondería a la frecuencia superior de la banda $f=12,4 \text{ GHz}$. En efecto, $R_{lej} = \frac{2D^2}{\lambda} = 82,7 \text{ m}$, luego como $R = 5,4 \text{ m}$ está en campo cercano y por tanto el diagrama medido tendrá un error de fase mayor de $22,5^\circ$.

Ejercicio 2.4

Calcule el error máximo de fase que se cometería en la aproximación de campo lejano de un dipolo resonante a una distancia de 5λ en la dirección perpendicular al dipolo.

- a) $2,25^\circ$ b) $22,5^\circ$ c) $\pi/16 \text{ rad}$ d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

$$\text{error fase} = k (R - (r - \vec{r}' \cdot \hat{r})) ; \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| ; \quad k = 2\pi/\lambda$$

En la dirección y condiciones indicadas:

$$r = 5 \lambda ; \quad \vec{r}' \cdot \hat{r} = 0 ; \quad R = \sqrt{r'^2 + r^2} ; \quad r'_{\max} = \frac{D}{2} = \lambda/4$$

$$\text{error fase}_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + (5\lambda)^2} - 5\lambda \right) = 2\pi \left(\sqrt{\frac{1}{16} + 25} - 5 \right)$$

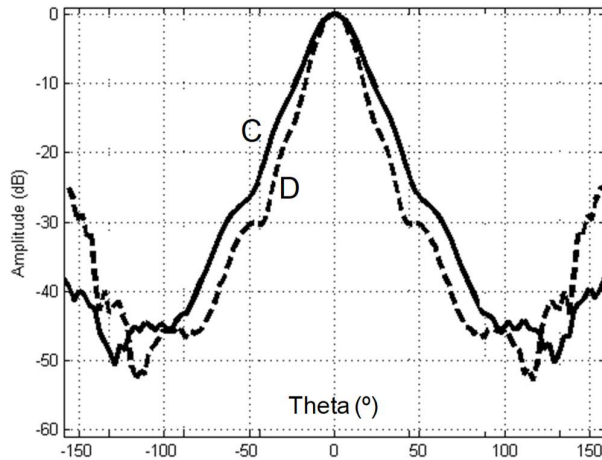
$$\text{error fase}_{\max} = 2,25^\circ$$

Ejercicio 2.5

Una antena de tipo bocina piramidal se ha medido en un sistema esférico en cámara anecoica a dos distancias diferentes, 10 cm y 20 cm, obteniéndose los siguientes cortes correspondientes al plano H (eje horizontal de la figura: ángulo θ , eje vertical: amplitud normalizada):

Sabiendo que la frecuencia de trabajo es $f = 20 \text{ GHz}$, el tamaño de la apertura de la bocina es $A = 52 \text{ mm}$, $B = 38 \text{ mm}$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta respecto de las trazas de la figura adjunta:

- a) C: medida a 20 cm, D: medida a 10 cm. Ambas medidas están en campo lejano.
 b) C: medida a 20 cm, D: medida a 10 cm. Ambas medidas están en campo cercano.
 c) C: medida a 10 cm, D: medida a 20 cm. Ambas medidas están en campo lejano.
 d) C: medida a 10 cm, D: medida a 20 cm. Ambas medidas están en campo cercano.



Solución:

Al tratarse de una bocina tendrá un lóbulo principal en su diagrama de campo cuyo ancho de haz irá disminuyendo a medida que se conforme su diagrama de radiación (aumente la distancia hasta la de campo lejano). Por tanto, la curva "C" corresponderá a una distancia menor de medida que la curva "D", y todavía no corresponde a medida en campo lejano. Por tanto, la única afirmación posible es: "C: medida a 10 cm, D: medida a 20 cm. Ambas medidas están en campo cercano".

2.2. Parámetros de impedancia, eficiencia de radiación, acoplamiento mutuo

Ejercicio 2.6

Una antena tiene una impedancia de entrada de $50 - j 20 \Omega$, y se alimenta a través de una línea de transmisión de $Z_0 = 50 \Omega$. La adaptación de la antena expresada como Relación de Onda Estacionaria (ROE o VSWR) es:

- a) 1,5 b) 50 c) 0 d) 1

Solución:

$$\rho = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{50 - j 20 - 50}{50 - j 20 + 50} = \frac{-j 20}{100 - j 20}$$

$$|\rho| = \frac{20}{\sqrt{10000 + 400}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 0,2$$

$$VSWR = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{26}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{26}}} = \frac{\sqrt{26} + 1}{\sqrt{26} - 1} \approx 1,5$$

Ejercicio 2.7

Un dipolo resonante que tiene una resistencia de radiación de 75Ω y una eficiencia de radiación de 0,85 se conecta a una línea de transmisión de 50Ω . ¿Cuánto vale el coeficiente de reflexión?

- a) 0,7 b) 0,5 c) 0,28 d) 0,35

Solución:

$$ef_{rad} = \frac{R_{rad}}{R_{in}} \quad , \quad R_{in} = \frac{R_{rad}}{ef_{rad}} = \frac{75}{0,85} = 88,24 \Omega$$

$$\rho = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

Suponiendo un dipolo resonante ideal con reactancia nula: $\rho = \frac{R_{in} - Z_0}{R_{in} + Z_0} = \frac{88,24 - 50}{88,24 + 50} = 0,28$

Ejercicio 2.8

La eficiencia de radiación de una antena con potencia radiada de 10 mW, corriente de entrada 10 mA, e impedancia de entrada $Z_{in} = (220 - j 22) \Omega$, es:

- a) 10 % b) 51 % c) 91 % d) 81 %

Solución:

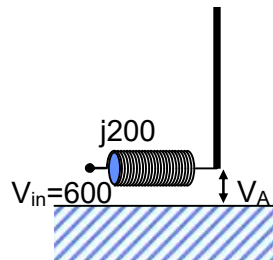
$$P_{in} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V \cdot I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Z_{in} \cdot |I|^2] = \frac{1}{2} |I|^2 R_{in}$$

$$ef_{rad} = \frac{P_{rad}}{P_{in}} = \frac{10^{-2}}{\frac{1}{2} |10^{-2}|^2 \cdot 220} = \frac{1}{1,1} \approx 0,91$$

$$ef_{rad} \approx 91 \%$$

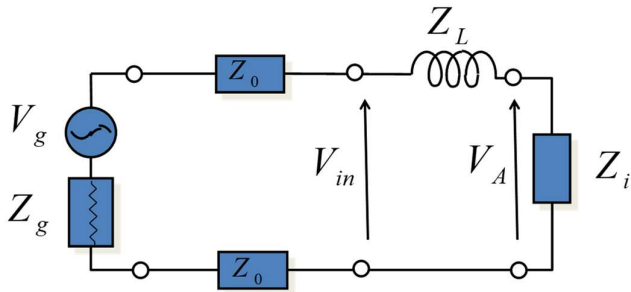
Ejercicio 2.9

Un mástil radiante de LF posee una impedancia de entrada de $(10 - j 200) \Omega$ y está alimentado a través de una inductancia de sintonía de $(j 200) \Omega$ por una línea de transmisión sin pérdidas de $Z_0 = 10 \Omega$ que impone una tensión de 600 V sobre el conjunto. ¿Cuál es la tensión V_A en bornes de la antena? ¿Y la potencia entregada a la antena?



Solución:

Datos: $Z_i = (10 - j 200) \Omega$, $V_{in} = 600 V$, $Z_L = j 200 \Omega$, $Z_0 = 10 \Omega$



$$V_A = V_{in} \frac{Z_i}{Z_i + j200} = 600 \frac{10 - j200}{10 - j200 + j200} = 600 (1 - j20), \quad |V_A| = 600 \sqrt{401} \approx 12015 \text{ V (de pico)}$$

Potencia entregada a la antena:

$$P_{in} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I \cdot V_A^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{V_A}{Z_i} \cdot V_A^*\right) = \frac{1}{2} |V_A|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_i}\right) = \frac{1}{2} |V_A|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_i}\right)$$

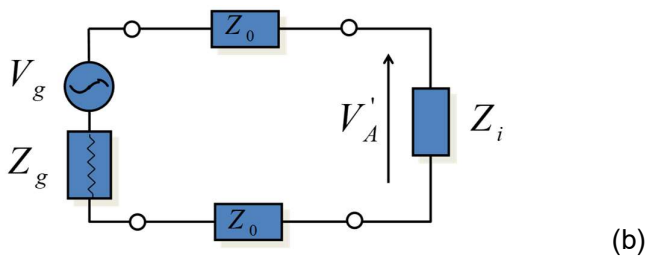
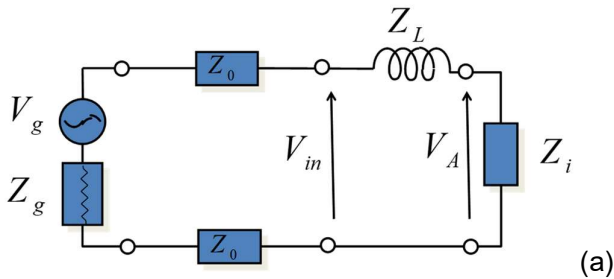
$$P_{in} = \frac{1}{2} (12015)^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{10 - j200}\right) = \frac{1}{2} (12015)^2 \operatorname{Re}\left(\frac{10 + j200}{100 + 40000}\right) = 18 \text{ kW}$$

Ejercicio 2.10

Para el caso anterior ¿cuánto valdría la potencia entregada a la antena si no se colocase la inductancia de sintonía? (Suponga que la impedancia del generador es de $Z_g = 10 \Omega$)

Solución:

Para obtener la nueva potencia entregada a la antena, P'_{in} , sin la inductancia de sintonía (figura b), habrá que obtener los datos del generador (V_g , Z_g) o su potencia disponible (P_a) a partir de la resolución del circuito del ejercicio anterior (figura a):



La relación entre la potencia entregada y la disponible mediante una línea de transmisión es:

$$\frac{P_{in}}{P_a} = \frac{(1 - |\Gamma_g|^2)(1 - |\Gamma_{in}|^2)e^{-2\alpha d}}{|1 - \Gamma_g \Gamma_{in} e^{-2\gamma d}|^2} \quad \begin{cases} \Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_o}{Z_{in} + Z_o} \\ \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} \end{cases}$$

Por tanto, del circuito (a) se puede obtener la potencia disponible del generador (P_a) puesto que se conocen todos los demás datos.

$$Z_{in} = Z_i + Z_L = 10 - j 200 + j 200 = 10 \Omega$$

$$Z_o = 10 \Omega$$

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_o}{Z_{in} + Z_o} = 0$$

$$\text{Si } Z_g = 10 \Omega \Rightarrow \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = 0 \Rightarrow \frac{P_{in}}{P_a} = 1 \Rightarrow P_a = 18 \text{ kW}$$

Para el circuito (b), la relación entre la nueva potencia de entrada (P'_{in}) y la potencia disponible del generador (P_a) es:

$$\frac{P'_{in}}{P_a} = \frac{(1 - |\Gamma_g|^2)(1 - |\Gamma'_{in}|^2)e^{-2\alpha d}}{|1 - \Gamma_g \Gamma'_{in} e^{-2\gamma d}|^2} \quad \begin{cases} \Gamma'_{in} = \frac{Z'_{in} - Z_o}{Z'_{in} + Z_o} \\ \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} \end{cases} \quad Z'_{in} = Z_i$$

$$\Gamma'_{in} = \frac{Z'_{in} - Z_o}{Z'_{in} + Z_o} = \frac{10 - j 200 - 10}{10 - j 200 + 10} = \frac{-j 10}{1 - j 10}$$

$$\text{Si } Z_g = 10 \Omega \Rightarrow \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = 0$$

$$P'_{in} = P_a \cdot (1 - |\Gamma'_{in}|^2) = 18000 \cdot \left(1 - \frac{100}{101}\right) = 178,2 \text{ W}$$

Ejercicio 2.11

Estime la impedancia de entrada (suponga la reactancia nula) de una antena si, al conectarla a una línea de transmisión de $Z_o = 50 \Omega$, se mide una relación de onda estacionaria de $S = 1,5$.

Solución:

$$S = VSWR = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 1,5 \Rightarrow |\rho| = \frac{0,5}{2,5} = \frac{1}{5}$$

$$|\rho| = \left| \frac{Z_{in} - Z_o}{Z_{in} + Z_o} \right| ; X_{in} \approx 0 \Rightarrow \left| \frac{R_{in} - Z_o}{R_{in} + Z_o} \right| = \frac{1}{5}$$

$$\text{Suponiendo } R_{in} > Z_o = 50 \Omega \Rightarrow \frac{R_{in} - 50}{R_{in} + 50} = \frac{1}{5} \Rightarrow R_{in} = 75 \Omega$$

$$\text{Suponiendo } R_{in} < Z_o = 50 \Omega \Rightarrow \frac{50 - R_{in}}{R_{in} + 50} = \frac{1}{5} \Rightarrow R_{in} = 33,3 \Omega$$

Ejercicio 2.12

Considere el array de dos dipolos de longitud $\lambda/2$ colineales alineados sobre el eje Z y separados una distancia $0,8 \lambda$ entre centros. La red de alimentación imprime sobre sus bornas de entrada una

tensión de 1 V en cada dipolo. Calcule la impedancia de entrada activa de cada dipolo, sabiendo que la impedancia de entrada de cada uno de los dipolos aislados es de $(73 + j 42) \Omega$ y que la impedancia mutua en la situación indicada tiene un valor de $(-4 - j 4) \Omega$.

- a) $(69 + j 38) \Omega$ b) $(77 + j 46) \Omega$ c) $(4 + j 4) \Omega$ d) $(73 + j 42) \Omega$

Solución:

$$Z_{in}|_{dip \frac{\lambda}{2}} = (73 + j 42) \Omega; \quad Z_{12} = (-4 - j 4) \Omega$$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

La impedancia de entrada activa para el dipolo 1 es: $Z_{in,1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1}$

$$\text{Por otro lado: } V_1 = V_2 = 1 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} 1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ 1 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

$$\text{Como por reciprocidad y simetría: } \begin{cases} Z_{12} = Z_{21} \\ Z_{11} = Z_{22} \end{cases} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 1$$

Aproximando Z_{11} por la impedancia de entrada de un dipolo resonante aislado: $Z_{11} \approx Z_{in}|_{dip \frac{\lambda}{2}}$

Se tendrá:

$$Z_{in,1} = Z_{11} + Z_{12} = (73 + j 42) + (-4 - j 4) = (69 + j 38) \Omega$$

$$Z_{in,2} = Z_{in,1}$$

Ejercicio 2.13

En el ejercicio anterior (array de dos dipolos de longitud $\lambda/2$ colineales separados una distancia $0,8 \lambda$), calcule la potencia total radiada por el array, considerando que los dipolos no tienen pérdidas óhmicas.

- a) $9,6 \text{ mW}$ b) 125 mW c) $11,1 \text{ mW}$ d) $5,6 \text{ mW}$

Solución:

$$P_{rad} = P_{rad,1} + P_{rad,2}$$

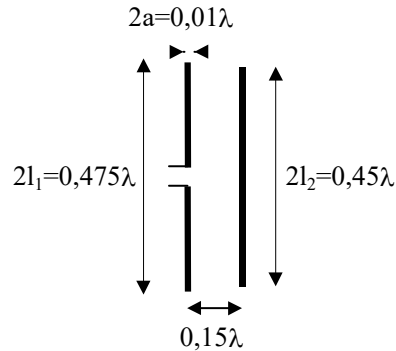
Si no hay pérdidas óhmicas: $R_{in,1} \approx R_{rad,1}$

$$\begin{aligned} P_{rad,1} &= \frac{1}{2} |I_1|^2 R_{rad,1} \approx \frac{1}{2} |I_1|^2 R_{in,1} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_1}{Z_{in,1}} \right|^2 R_{in,1} = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{69 + j 38} \right|^2 69 = \frac{69}{2(69 + j 38)(69 - j 38)} \\ &= 5,56 \text{ mW} \end{aligned}$$

$$P_{rad,2} = P_{rad,1} \Rightarrow P_{rad} = P_{rad,1} + P_{rad,2} = 2 P_{rad,1} = 11,1 \text{ mW}$$

Ejercicio 2.14

Dada una antena Yagi-Uda como la de la figura:



a) Calcule, utilizando la formulación matricial de impedancias, la impedancia de entrada de dicha antena. Datos: $Z_{11} = (70 + j 5) \Omega$, $Z_{22} = (60 - j 30) \Omega$, $Z_{12} = (50 - j 10) \Omega$.

b) Si se dispone de un generador en el dipolo alimentado que, a la frecuencia de trabajo, viene dado por el fasor $V_g = e^{j\pi/4}$, obtenga las corrientes en los centros de ambos dipolos.

c) Obtenga en las condiciones del apartado b, la relación delante-detrás de la antena Yagi (suponga que las dos varillas radian como dipolos $\lambda/2$).

Solución:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

a)

La impedancia de entrada activa es: $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1}$

Por otra parte: $\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ 0 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} = Z_{11} - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_{22}} = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22}}$$

$$Z_{in} = (70 + j5) - \frac{(50 - j10) \cdot (50 - j10)}{(60 - j30)} = (31,3 + j2,3) \Omega$$

b)

$$V_1 = V_g = e^{j\pi/4} = \cos(\pi/4) + j \operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = Z_{11}I_1 + Z_{12} \left(-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right) I_1 = I_1 \left(Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22}} \right)$$

$$I_1 = \frac{V_1}{\left(Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22}} \right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)}{(70 + j5) - \frac{(50 - j10) \cdot (50 - j10)}{(60 - j30)}} \approx (24 + j21) \text{ mA}$$

$$I_2 = I_1 \left(-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right) = \frac{V_1 \left(-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right)}{\left(Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{12}}{Z_{22}} \right)} = \frac{-V_1 Z_{12}}{(Z_{11} Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{12})} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} (1+j)}{(70+j5)(60-j30) - (50-j10)(50-j10)} = -(13+j20) \text{ mA}$$

c)

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \approx \vec{E}_d(\theta, \varphi) \cdot (I_1 + I_2 e^{jk(\vec{r}'_0 \cdot \vec{r})})$$

Suponiendo los dipolos orientados según el eje Z, y que el director se encuentra en $\vec{r}'_0 = 0,15 \lambda \hat{x}$,

$$\vec{E}_T \approx \vec{E}_d(\theta, \varphi) \cdot (I_1 + I_2 e^{j(0,3)\pi \sin\theta \cos\varphi})$$

En la dirección delantera, $\theta = 90^\circ$; $\varphi = 0^\circ \Rightarrow \vec{E}_T(\theta = 90^\circ, \varphi = 0) \approx \vec{E}_{d,0} \cdot (I_1 + I_2 e^{j(0,3)\pi})$

En la dirección trasera, $\theta = 90^\circ$; $\varphi = 180^\circ \Rightarrow \vec{E}_T(\theta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ) \approx \vec{E}_{d,0} \cdot (I_1 + I_2 e^{-j(0,3)\pi})$

$$\frac{\vec{E}_T(\theta = 90^\circ, \varphi = 0)}{\vec{E}_T(\theta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ)} = \frac{(I_1 + I_2 e^{j(0,3)\pi})}{(I_1 + I_2 e^{-j(0,3)\pi})} = \frac{(24 + j21) - (13 + j20)e^{j(0,3)\pi}}{(24 + j21) - (13 + j20)e^{-j(0,3)\pi}} \approx 1,63$$

Relación delante-detrás $\Rightarrow 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\vec{E}_T(\theta=90^\circ, \varphi=0^\circ)}{\vec{E}_T(\theta=90^\circ, \varphi=180^\circ)} \right) \approx 4,2 \text{ dB}$

Ejercicio 2.15

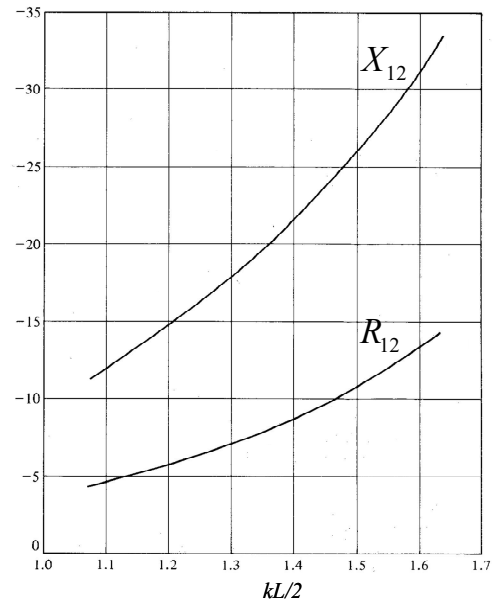
Se dispone de un sistema radiante constituido por un dipolo en $\lambda/2$ y dos varillas de igual longitud y radio, paralelas a él (una delante y otra detrás), cada una a distancia $\lambda/2$ del dipolo.

a) Estime el valor de la impedancia de entrada de dicho sistema radiante.

b) Obtenga el diagrama de radiación del sistema radiante del ejercicio anterior (dipolo y dos varillas iguales)

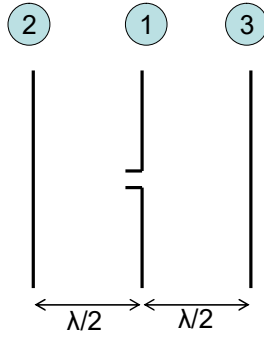
c) ¿Podría considerarse dicho sistema radiante como una antena Yagi-Uda de 3 elementos?

Nota: Impedancia de entrada de un dipolo en $\lambda/2$: $Z_{in,dip} = (75 + j30) \Omega$. Desprecie el acoplo de las dos varillas extremas entre sí. Se adjunta gráfica de la Impedancia mutua (Ω) entre dos dipolos idénticos, paralelos, enfrentados y separados $\lambda/2$.



Solución:

a)



$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3 \\ V_3 = Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 \end{cases} \quad Z_{ij} = Z_{ji} \quad Z_{23} = 0 \quad Z_{13} = Z_{12}$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 \\ 0 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ 0 = Z_{31} I_1 + Z_{33} I_3 \end{cases} \quad \begin{cases} I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} I_1 \\ I_3 = -\frac{Z_{31}}{Z_{33}} I_1 \end{cases}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} + Z_{13} \frac{I_3}{I_1} \Rightarrow Z_{in} = Z_{11} - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_{22}} - Z_{13} \frac{Z_{31}}{Z_{33}}$$

De la gráfica: $Z_{21} = (-13 - j 30) \Omega$. Además, aproximamos $Z_{11} \approx Z_{in,dip} = (75 + j 30) \Omega$. También aproximamos $Z_{22} = Z_{33} \approx Z_{in,dip} = (75 + j 30) \Omega$.

$$Z_{in} = (75 + j 30) - (-13 - j 30) \cdot \frac{(-13 - j 30)}{75 + j 30} - (-13 - j 30) \cdot \frac{(-13 - j 30)}{75 + j 30} \approx (85 + j 5) \Omega$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \approx \vec{E}_d(\theta, \varphi) \cdot (I_1 + I_2 e^{jk(-\vec{r}'_0 \cdot \hat{r})} + I_3 e^{jk(\vec{r}'_0 \cdot \hat{r})}) \\ &= \vec{E}_d(\theta, \varphi) \cdot I_1 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_1} e^{-jk(\vec{r}'_0 \cdot \hat{r})} + \frac{I_3}{I_1} e^{jk(\vec{r}'_0 \cdot \hat{r})} \right) \end{aligned}$$

Suponiendo los dipolos orientados según el eje Z, y que $\vec{r}'_0 = \frac{\lambda}{2} \hat{x}$:

$$\vec{E}_T \approx \hat{\theta} j \eta \frac{e^{-jkr} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} \cdot I_1 \cdot \left(1 + \frac{I_2}{I_1} e^{-j\pi \sin\theta \cos\varphi} + \frac{I_3}{I_1} e^{j\pi \sin\theta \cos\varphi} \right)$$

Además, de la red multipuerta se obtuvo: $\frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ $\frac{I_3}{I_1} = -\frac{Z_{31}}{Z_{33}}$

$$\vec{E}_T \approx \hat{\theta} j \eta \frac{e^{-jkr} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} \cdot I_1 \cdot \left(1 - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} e^{-j\pi \sin\theta \cos\varphi} - \frac{Z_{31}}{Z_{33}} e^{j\pi \sin\theta \cos\varphi} \right)$$

Como $Z_{21} = Z_{31}$ y $Z_{11} = Z_{22} = Z_{33}$

$$\vec{E}_T \approx \hat{\theta} j \eta \frac{e^{-jkr} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} \cdot I_1 \cdot \left(1 - \frac{Z_{21}}{Z_{11}} (e^{-j\pi \sin\theta \cos\varphi} + e^{j\pi \sin\theta \cos\varphi}) \right)$$

$$\vec{E}_T \approx \hat{\theta} j \eta \frac{e^{-jkr} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} \cdot I_1 \cdot \left(1 - \frac{Z_{21}}{Z_{11}} 2 \cos(\pi \sin\theta \cos\varphi) \right)$$

donde: $Z_{21} = (-13 - j 30) \Omega$, $Z_{11} \approx Z_{in,dip} = (75 + j 30) \Omega$

c)

Tanto en la dirección delantera, ($\theta = 90^\circ$; $\varphi = 0^\circ$) como en la dirección trasera, ($\theta = 90^\circ$; $\varphi = 180^\circ$) el valor del campo es el mismo:

$$\vec{E}_T(\theta = 90^\circ; \varphi = 0^\circ, 180^\circ) \approx \hat{\theta} j \eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \cdot I_1 \cdot \left(1 + \frac{2 Z_{21}}{Z_{11}}\right)$$

Tal como cabía esperar, el sistema radiante no actúa como una antena Yagi-Uda ya que el reflector y el director son iguales ($Z_{13} = Z_{12}$).

Ejercicio 2.16

El dipolo doblado se usa porque respecto del dipolo simple:

- a) Puede llegar a duplicar el ancho de banda.
- b) Puede llegar a duplicar su directividad.
- c) Puede duplicar su impedancia.
- d) Puede llegar a duplicar su área equivalente

Solución:

Puede llegar a duplicar el ancho de banda debido a la compensación de la impedancia de entrada con la frecuencia que realizan los dos modos (radiante y línea de transmisión) en que se puede descomponer un dipolo doblado.

Ejercicio 2.17

Si a un dipolo corto se le carga capacitivamente añadiendo perpendicularmente un tramo final a cada uno de los brazos del dipolo, indique, de la nueva antena formada, si la impedancia de entrada y su diagrama de radiación cambiarán.

Solución:

La impedancia de entrada cambiará disminuyendo su parte reactiva (capacitiva); sin embargo, el diagrama de radiación no cambiará ya que las corrientes en dichos tramos doblados fluyen en direcciones contrarias y la suma de sus campos radiados es nula ya que la separación entre dichos tramos es eléctricamente pequeña (modo de línea de transmisión).

Ejercicio 2.18

La PIRE de un satélite con una antena de $G=40$ dB es de 100 kW. Si el transmisor ($Z_g = 50 \Omega$) tiene una potencia disponible de 15 W que alimenta la antena a través de una línea de transmisión de $Z_0 = 50 \Omega$ sin pérdidas, la adaptación de la antena será:

- a) Pérdidas de retorno de 4,8 dB
- b) ROE = 3
- c) ROE = 1
- d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

$$\frac{P_{in}}{P_a} = \frac{(1 - |\Gamma_g|^2)(1 - |\Gamma_{in}|^2)e^{-2\alpha d}}{|1 - \Gamma_g \Gamma_{in} e^{-2\gamma d}|^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \\ \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{P_{in}}{P_a} = 1 - |\Gamma_{in}|^2 \Rightarrow |\Gamma_{in}|^2 = 1 - \frac{P_{in}}{P_a}$$

$$PIRE = P_{in} \cdot G$$

$$|\Gamma_{in}|^2 = 1 - \frac{PIRE}{G \cdot P_a} = 1 - \frac{10^5}{10^4 \cdot 15} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

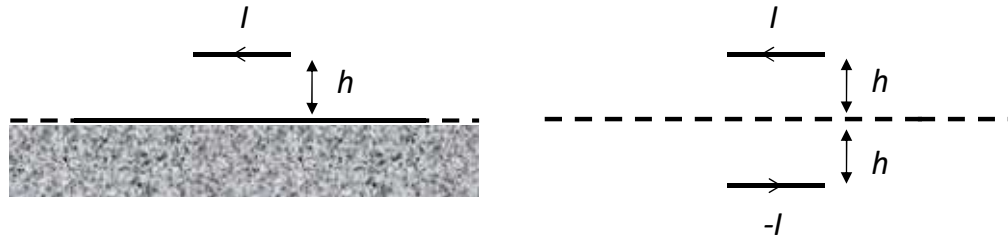
Pérdidas de retorno: $-10 \cdot \log_{10} |\Gamma_{in}|^2 = -10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right) = 4,8 \text{ dB}$

Ejercicio 2.19

Calcule la impedancia de entrada de un dipolo resonante situado paralelo a un plano de masa perfecto a $\lambda/4$ de él. Considere que la adaptación del dipolo es de ROE = 1,5 (respecto a línea de transmisión de 50 ohm) y que la impedancia mutua de dos dipolos resonantes paralelos separados $0,5 \lambda$ es $Z_{12} = (-20 - j 30) \Omega$.

- a) $(55 - j 30) \Omega$ b) $(85 + j 30) \Omega$ c) $(95 + j 30) \Omega$ d) Ninguno de los anteriores.

Solución:



$$h = \lambda/4$$

$$ROE = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = 1,5 \Rightarrow |\rho| = \frac{ROE-1}{ROE+1} = \frac{0,5}{2,5} = \frac{1}{5}$$

$$|\rho| = \left| \frac{Z_{in,dip} - Z_0}{Z_{in,dip} + Z_0} \right|, \text{ Suponiendo para el dipolo resonante: } X_{in,dip} \approx 0 \Rightarrow \left| \frac{R_{in,dip} - Z_0}{R_{in,dip} + Z_0} \right| = \frac{1}{5}$$

$$\text{Suponiendo que en el dipolo resonante } R_{in,dip} > Z_0 = 50 \Omega \Rightarrow \frac{R_{in,dip} - 50}{R_{in,dip} + 50} = \frac{1}{5} \Rightarrow R_{in,dip} = 75 \Omega$$

En el problema equivalente de imágenes:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} = Z_{11} - Z_{12} \approx Z_{in,dip} - Z_{12}$$

$$Z_{in} \approx 75 - (-20 - j 30) = (95 + j 30) \Omega$$

2.3. Diagrama de radiación, directividad, ganancia, área equivalente

Ejercicio 2.20

La ganancia de una antena de directividad 20 dBi, con potencia radiada de 10 mW, corriente de entrada 10 mA, e impedancia de entrada $Z_{in} = 220 - j 22$, es:

- a) 18,5 dB b) 16,4 dB c) 19,1 dB d) 19,6 dB

Solución:

$$P_{IN} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V \cdot I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Z_{IN} \cdot |I|^2] = \frac{1}{2} |I|^2 R_{IN}$$

$$\eta_{rad} = \frac{P_{rad}}{P_{IN}} = \frac{10^{-2}}{\frac{1}{2} |10^{-2}|^2 \cdot 220} = \frac{1}{1,1} = 0,9091 \Rightarrow \sim 91 \%$$

$$10 \cdot \log_{10}(\eta_{rad}) = 10 \cdot \log_{10}(0,9091) = -0,414$$

$$G_0 = \eta_{rad} \cdot D_0 \Rightarrow G_0|_{dB} = \eta_{rad}|_{dB} + D_0|_{dB} \approx 20 - 0,4 = 19,6 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.21

Se dispone de un dipolo eléctricamente corto (tamaño $2h$) al que se le han añadido unos tramos perpendiculares en los extremos (haciendo una L con cada brazo), de longitud b cada uno ($b \ll \lambda$). Demuestre su diagrama de radiación y calcule el ancho de haz a -3dB en el plano que contiene el dipolo.

Solución:

La radiación que producen los dos tramos de longitud b se anula ya que fundamentalmente el modo de corriente es de línea de transmisión (tramos paralelos eléctricamente muy próximos y con corrientes en sentido contrario). Por tanto, el diagrama de radiación será el del dipolo eléctricamente corto. Supuesto el dipolo centrado en el origen y alineado con el eje Z, su diagrama de radiación es:

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{j \eta k}{4\pi} \right) I_0 L \operatorname{sen} \theta \hat{\theta}$$

El ancho de haz en cualquier plano que contenga al dipolo será:

$$\frac{E(\theta=\pi/2)}{E(\theta_{-3dB})} = \sqrt{2} \quad ; \quad \operatorname{sen}(\theta_{-3dB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \theta_{-3dB} = 45^\circ \Rightarrow BW_{-3dB}|_{\varphi=cte} = 90^\circ$$

Ejercicio 2.22

¿Cuál de los siguientes parámetros definidos para una antena es incorrecto?:

- a) ROE = 1 b) Go = 0,8 c) Vector de polarización: $+\hat{z}$ d) Do = 0,9

Solución:

La directividad nunca puede ser menor que 1. La de menor directividad es la antena isotrópica, con igual valor de la función directividad en todas las direcciones, y cuyo valor de directividad es, por tanto, igual a 1. Los demás valores de parámetros pueden ser posibles.

Ejercicio 2.23

Una antena radia un campo dado por:

$$E_{\theta} = E_o \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cos^q(\theta) \quad , \quad E_{\varphi} = 0 \quad ; \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall \varphi$$

$$E_{\theta} = E_{\varphi} = 0 \quad ; \quad \theta > \frac{\pi}{2}, \quad \forall \varphi$$

¿Cuál es su directividad? Particularice para $q=10$. Estime la directividad utilizando las anchuras de haz.

Solución:

$$U(\theta, \varphi) = r^2 \langle S(r, \theta, \varphi) \rangle = r^2 \frac{1}{2\eta} (|E_{\theta}|^2 + |E_{\varphi}|^2) = \frac{1}{2\eta} |E_o|^2 \cos^{2q}(\theta)$$

$$U_{\max} = U(\theta = 0) = \frac{1}{2\eta} |E_o|^2$$

$$P_{rad} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2\eta} |E_o|^2 \cos^{2q}(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi = 2\pi \frac{1}{2\eta} |E_o|^2 \cdot \left[\frac{-\cos^{2q+1}(\theta)}{2q+1} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{\pi |E_o|^2}{\eta(2q+1)}$$

$$D(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{\frac{1}{2\eta} |E_o|^2 \cos^{2q}(\theta)}{\frac{\pi |E_o|^2}{\eta(2q+1)}} = 2(2q+1) \cos^{2q}(\theta) \quad ; \quad D(\theta, \varphi) = \begin{cases} 2(2q+1) \cos^{2q}(\theta) & ; \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall \varphi \\ 0 & ; \quad \theta > \frac{\pi}{2}, \quad \forall \varphi \end{cases}$$

$$D_0 = D(\theta = 0) = 2(2q+1)$$

Para $q=10$, $D_0 = 42 \Rightarrow D_0 = 10 \cdot \log_{10}(42) \approx 16 \text{ dBi}$

Utilizando anchos de haz:

$$\cos^{10}(\theta_{-3dB}) = 10^{-3/20} = 0,707 \quad \theta_{-3dB} = \cos^{-1}(0,707)^{1/10} = 15^\circ$$

$$BW_1 = BW_2 = 2 \cdot \theta_{-3dB} = 30^\circ \quad D_0 \approx \frac{41253}{BW_1(^{\circ}) \cdot BW_2(^{\circ})} = \frac{41253}{30 \cdot 30} \approx 45,8 \Rightarrow 16,6 \text{ dBi}$$

Ejercicio 2.24

Calcule la directividad y su máximo de una antena que, referida a un sistema de coordenadas esféricas, radia el siguiente campo eléctrico:

$$\vec{E} = \begin{cases} (\hat{\theta} + j \hat{\varphi}) E_o \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cos(\theta) & ; \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall \varphi \\ 0 & ; \quad \theta > \frac{\pi}{2}, \quad \forall \varphi \end{cases}$$

Solución:

Aunque ahora se tiene una componente E_ϕ , al ser igual a E_θ tanto la intensidad de radiación como la potencia radiada se duplican. Por tanto, la directividad y su máximo valor son las del ejercicio anterior con $q = 1$.

Ejercicio 2.25

De una antena cuya intensidad de radiación se puede modelar por una función de tipo:

$$\begin{cases} \cos^q(\theta); & \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & ; \theta > \pi/2 \end{cases}$$

Calcule su ángulo sólido y particularice para $q = 1$.

Solución:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{\frac{P_{rad}}{4\pi}} = \frac{4\pi \left(r^2 \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{E_0^2}{r^2} \cos^q \theta \right)}{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{E_0^2}{r^2} \cos^q(\theta) \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi} = \frac{4\pi \cos^q \theta}{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^q(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi}$$

Desarrollando el denominador:

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^q(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi = 2\pi \cdot \left[\frac{-\cos^{q+1}(\theta)}{q+1} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{2\pi}{q+1}$$

$$D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi \cos^q \theta}{\frac{2\pi}{q+1}} = 2(q+1) \cos^q \theta$$

$$D_0 = 2(q+1)$$

$$\Omega(\text{esterorad}) = \frac{4\pi}{D_0} = \frac{4\pi}{2(q+1)} \Big|_{q=1} = \pi$$

Ejercicio 2.26

Una antena posee un diagrama de radiación con un haz principal simétrico tal que su anchura de haz, a -3 dB, es de 10° .

- Estime su directividad mediante anchos de haz.
- Comente sobre la validez del resultado comparándolo con el valor de directividad obtenido mediante la estimación del valor de q (valor entero) suponiendo una función de intensidad de radiación del tipo:

$$\begin{cases} \cos^{2q}(\theta); & \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & ; \theta > \pi/2 \end{cases}$$

- Repita los cálculos, suponiendo que el ancho de haz, a -3 dB, fuera de 90° .

Solución:

- Estimación mediante anchos de haz: $D_0 \approx \frac{41253}{10 \cdot 10} = 412,53 = 26,2 \text{ dBi}$

b) Mediante cálculo de la potencia radiada con modelo de intensidad de radiación $\cos^{2q}(\theta)$:

$$\cos^{2q}(5^\circ) = 1/2 \Rightarrow q \approx 91$$

$$\text{Como } D_0 = D(\theta = 0) = 2(2q + 1) \Rightarrow D_0 = D(\theta = 0) = 2 \cdot (2 \cdot 91 + 1) = 366 \Rightarrow 25,6 \text{ dBi}$$

Obsérvese que el valor q que correspondería a considerar el valor de directividad con la aproximación de ancho de haz, sería diferente: $D_0 = 2(2q + 1) = 412,53 \Rightarrow q \approx 103$.

De otro modo, con $q = 103$ y la función de radiación $\cos^{2q}(\theta)$, se obtendría un ancho de haz a -3dB de $9,4^\circ$.

c) Con el ancho de haz a -3 dB de 90° , la directividad estimada a través de los anchos de haz sería: $D_0 \approx \frac{41253}{90 \cdot 90} = 5,09 \rightarrow 7,1 \text{ dBi}$

Y mediante cálculo de la potencia radiada con modelo de intensidad de radiación $\cos^{2q}(\theta)$:

$$\cos^{2q}(45^\circ) = 1/2 \Rightarrow q = 1$$

$$\text{Como } D_0 = D(\theta = 0) = 2(2q + 1) \Rightarrow D_0 = D(\theta = 0) = 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 6 \Rightarrow 7,8 \text{ dBi}$$

Ejercicio 2.27

Suponiendo que la expresión del campo eléctrico radiado de un dipolo eléctricamente corto, de longitud total L , centrado en el origen de coordenadas, con uno de los brazos a lo largo del eje X y el otro brazo a lo largo del eje Y, es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) I_0 \frac{L}{2} (\cos\theta(\sin\varphi - \cos\varphi)\hat{\theta} + (\cos\varphi + \sin\varphi)\hat{\phi})$$

Calcule:

- La expresión de la directividad.
- La directividad en $\theta=0^\circ$, $\varphi=45^\circ$, expresada en dB
- Las pérdidas de polarización (expresadas en dB) si se colocara como otro extremo del radioenlace (en dirección del eje Z) una antena con polarización circular pura.

Solución:

a) La expresión de la directividad

$$D(\theta, \varphi) \triangleq \frac{4\pi r^2 \langle S(r, \theta, \varphi) \rangle}{P_{\text{radiada}}} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta} |E(r, \theta, \varphi)|^2}{P_{\text{radiada}}}$$

$$P_{\text{radiada}} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle S(r, \theta, \varphi) \rangle r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2\eta} |E(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) I_0 \frac{L}{2} (\cos\theta(\sin\varphi - \cos\varphi)\hat{\theta} + (\cos\varphi + \sin\varphi)\hat{\phi})$$

$$= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-\eta j k}{4\pi} \right) I_0 \frac{L}{2} \vec{f}(\theta, \varphi)$$

$$D(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |f(\theta, \varphi)|^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta}$$

$$|f(\theta, \varphi)|^2 = \cos^2\theta(1 - 2\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi) + (1 + 2\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi) = \operatorname{sen}2\varphi \operatorname{sen}^2\theta + 2 - \operatorname{sen}^2\theta = 2 + \operatorname{sen}^2\theta (\operatorname{sen}2\varphi - 1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |f(\theta, \varphi)|^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2 + \operatorname{sen}^2\theta (\operatorname{sen}2\varphi - 1)) \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta = \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2 \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta (\operatorname{sen}2\varphi - 1)) \, d\varphi \, d\theta = \end{aligned}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(4\pi \operatorname{sen}\theta d\theta + \operatorname{sen}^3\theta \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} (\operatorname{sen}2\varphi - 1) \, d\varphi \right) \right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} (4\pi \operatorname{sen}\theta d\theta - 2\pi \operatorname{sen}^3\theta) \, d\theta = 2\pi \left([-2\cos\theta]_0^{\pi} + \left[\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\pi} \right) =$$

$$= 2\pi \left(4 - 1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}$$

$$D(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |f(\theta, \varphi)|^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta} = 4\pi \frac{2 + \operatorname{sen}^2\theta (\operatorname{sen}2\varphi - 1)}{\frac{16\pi}{3}}$$

$$D(\theta, \varphi) = \frac{3}{4} (2 + \operatorname{sen}^2\theta (\operatorname{sen}2\varphi - 1))$$

b) La directividad en $\theta=0^\circ$, $\varphi=45^\circ$, expresada en dB:

$$D(\theta = 0^\circ, \varphi = 45^\circ)_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{3}{2} \right) = 1,76 \text{ dB}$$

c) Las pérdidas de polarización (en dB) si se colocara como otro extremo del radioenlace (en dirección del eje Z) una antena con polarización circular pura:

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{f}(\theta, \varphi)}{|f(\theta, \varphi)|} = \frac{\cos\theta(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)\hat{\theta} + (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)\hat{\varphi}}{\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}2\varphi - 1)}}$$

$$\hat{e}_r = \frac{\hat{\theta} \pm j \hat{\varphi}}{\sqrt{2}}$$

$$(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*) = \left(\frac{\cos\theta(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)\hat{\theta} + (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)\hat{\varphi}}{\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}2\varphi - 1)}} \right) \cdot \left(\frac{\hat{\theta} \mp j \hat{\varphi}}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\cos\theta(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)) \mp j (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)}{\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}2\varphi - 1)}}$$

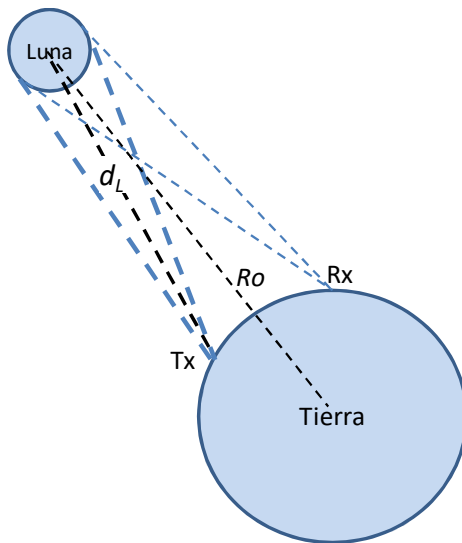
$$|\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*|^2 = \frac{1}{2}$$

$$L_{pol}(dB) = -10 \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{2} \right]_{\theta=0} = 3 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.28

Un radioaficionado desea establecer un enlace entre dos puntos de la Tierra no muy alejados entre sí mediante reflexión en la luna. ¿Cuál debería ser la directividad de la antena, suponiendo un haz ideal uniforme, para que toda la energía radiada se refleje en la luna? (Diámetro de la Luna= 3476 km; radio de la Tierra= 6370 km; órbita media de la Luna respecto a la Tierra= 384400 km).

Solución:



$$\begin{aligned} BW &= BW_1 = BW_2 \approx 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{r_{Luna}}{d_L} \right) \\ &\approx 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{r_{Luna}}{R_o - r_{Tierra}} \right) \\ BW &\approx 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\frac{3476}{2}}{384400 - 6370} \right) \approx 0,53^\circ \\ D_0 &= \frac{4\pi}{\Omega} \approx \frac{4\pi}{(BW)^2} \approx 148631 \approx 52 \text{ dB} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.29

- Estime por anchos de haz, la directividad que debe tener la antena de un satélite de órbita geoestacionaria (42000 km) para que el haz principal, a -3 dB, cubra toda la Tierra (radio = 6370 km).
- Calcule el valor de q y de la directividad en el caso de que la antena se pudiera modelar por una función de intensidad de radiación del tipo:

$$\begin{cases} \cos^q(\theta) & ; \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & ; \theta > \pi/2 \end{cases}$$

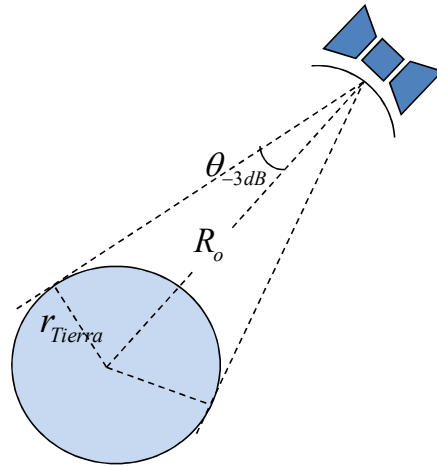
Solución:

-

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta_{-3dB}) &= \frac{r_{Tierra}}{R_o} \\ \theta_{-3dB} &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{r_{Tierra}}{R_o}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{6370}{42000}\right) = 8,72^\circ \\ &= 0,152 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BW_1 &= BW_2 = 2 \cdot (\theta_{-3dB}) \\ D_0 &= \frac{4\pi}{\Omega} \approx \frac{4\pi}{BW_1 \cdot BW_2} \approx \frac{4\pi}{(BW)_{rad}^2} \\ D_0 &\approx \frac{4\pi}{\left[2 \cdot \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{r_{Tierra}}{R_o}\right)\right]^2} \end{aligned}$$

$$D_0 \approx \frac{4\pi}{\left[2 \cdot \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{6370}{42000}\right)\right]^2} = 135,5 \Rightarrow 21,3 \text{ dB}$$



b) Para esa función de intensidad de radiación, ya se obtuvo previamente que:

$$\begin{aligned} D(\theta, \varphi) &= \frac{4\pi \cos^q \theta}{2\pi} = 2(q+1) \cos^q \theta \\ D_0 &= 2(q+1) \end{aligned}$$

Por otro lado, la caída a -3 dB, se puede escribir como:

$$\begin{aligned} 10 \log_{10}(\cos^q(\theta_{-3dB})) &= -3 \\ q &= \frac{-3/10}{\log_{10}(\cos(\theta_{-3dB}))} = \frac{-3/10}{\log_{10}(\cos(8,72^\circ))} = 73,4 \\ D_0 &= 2(q+1) = 2(73,4+1) = 148,8 \Rightarrow 21,7 \text{ dB} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.30

Un radioaficionado está pensando en realizar un rebote radioeléctrico mediante reflexión en la cabeza de un cometa (de forma aproximadamente esférica y diámetro 200 km) cuando éste pase a una distancia de 100000 km de la Tierra (entre centros). Estime el diámetro de una antena de apertura de tipo reflector parabólico de eficiencia de iluminación 80% para que toda la energía radiada a la frecuencia de 10490 MHz se refleje en dicho cometa.

- a) 2,5 m b) 1,5 m c) 5,1 m d) Ninguno de los anteriores.

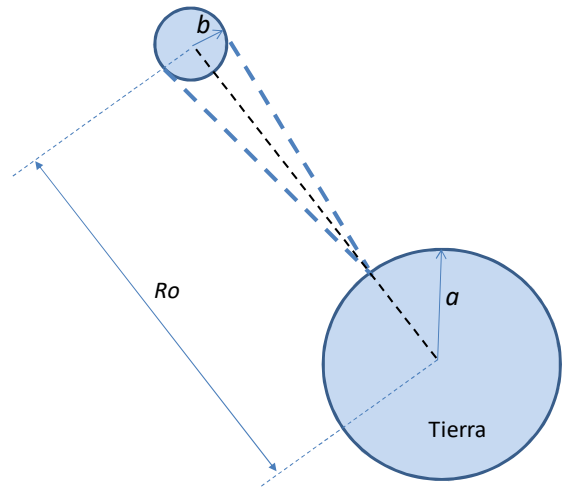
Solución:

$$\text{sen}(\theta_{-3dB}) = \frac{b}{R_o - a} \quad BW_1 = BW_2 = 2 \cdot (\theta_{-3dB})$$

$$D_0 = \frac{4\pi}{\Omega} \approx \frac{4\pi}{BW_1 \cdot BW_2} \approx \frac{4\pi}{(BW)_{rad}^2} = \frac{4\pi}{\left[2 \cdot \text{sen}^{-1}\left(\frac{b}{R_o - a}\right)\right]^2}$$

Por otra parte: $D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot e_{f_{ilum}} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$

$$\frac{4\pi}{\left[2 \cdot \text{sen}^{-1}\left(\frac{b}{R_o - a}\right)\right]^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot e_{f_{ilum}} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$



$$D = \frac{2 \cdot \lambda}{\sqrt{e_{f_{ilum}} \cdot \pi} \cdot \left[2 \cdot \text{sen}^{-1}\left(\frac{b}{R_o - a}\right)\right]} = \frac{2 \cdot \frac{300}{10490}}{\sqrt{0,8 \cdot \pi} \cdot \left[2 \cdot \text{sen}^{-1}\left(\frac{100}{100000 - 6370}\right)\right]} \approx 17 \text{ m}$$

Ejercicio 2.31

Para un medidor (receptor) de emisiones electromagnéticas que tenga una sensibilidad de 1 mV, ¿qué valor más ajustado de ganancia de antena utilizaría si desea medir densidades de potencia de 1 $\mu\text{W}/\text{m}^2$ a 3 GHz? (suponga la impedancia de entrada de la antena 50 Ω).

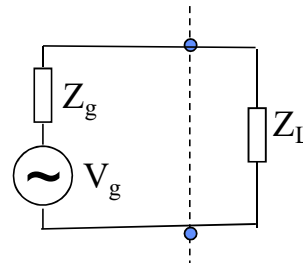
Solución:

La relación entre la potencia disponible en bornas de la antena receptora y la densidad de potencia incidente en la antena viene dada por el área equivalente de la antena,

$$A_e = \frac{P_{disp}}{\langle S_i \rangle}, \text{ donde } A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_0$$

Por otro lado, la potencia disponible en función de los parámetros del circuito equivalente es:

$$P_{disp} = \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{R_g}, \text{ donde } Z_g = Z_{in,ant}$$



Por tanto $G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e = \frac{4\pi P_{disp}}{\lambda^2 \langle S_i \rangle} = \frac{4\pi}{\lambda^2 \langle S_i \rangle} \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{R_g} = \frac{4\pi}{\lambda^2 \langle S_i \rangle} \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{R_{in,ant}}$

$$G_0 = \frac{4\pi}{(0,1)^2 10^{-6}} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{(10^{-3})^2}{50} = 3,14 \approx 5 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.32

En una estación terrena se modifica el transmisor para que duplique el campo eléctrico que llega al satélite. ¿En qué orden de magnitud (K) se podría reducir el diámetro (D) de la antena parabólica receptora del satélite sin degradar la relación señal a ruido?

Solución:

$$P_{disp} = A_e \cdot \langle S_i \rangle = ef \cdot \left(\pi \cdot \frac{D^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{2\eta} |E|^2 \quad ; \quad P_{disp} = ef \cdot \left(\pi \cdot \frac{(D')^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{2\eta} |E'|^2$$

Si se duplica el campo eléctrico ($|E'| = 2|E|$), se podrá mantener la potencia disponible en bornas de la antena del satélite disminuyendo el diámetro a la mitad ($D' = D/2$) $\Rightarrow K=0,5$

Ejercicio 2.33

Calcule el campo incidente en una antena Yagi-Uda de 12 dB de ganancia y $Z_{in}=50 \Omega$, cuando a la frecuencia de 900 MHz, la tensión en bornes de una carga adaptada de 50Ω es de 0,5 mV.

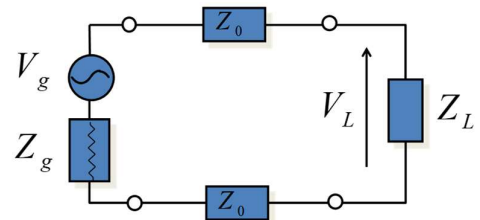
(Suponga que entre la carga y la antena media una línea de transmisión sin pérdidas de 50Ω).

Solución:

La potencia disponible en bornas de la antena en función de los parámetros del circuito equivalente es:

$$P_{disp} = A_e \cdot \langle S_i \rangle = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_0 \cdot \frac{1}{2\eta} |E|^2 \quad \Rightarrow \quad |E| = \sqrt{\frac{2\eta P_{disp} 4\pi}{\lambda^2 G_0}}$$

$$\frac{P_L}{P_{disp}} = \frac{(1 - |\Gamma_g|^2)(1 - |\Gamma_L|^2)e^{-2\alpha d}}{|1 - \Gamma_g \Gamma_L e^{-2\gamma d}|^2} \quad \begin{cases} \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \\ \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \end{cases}$$



$$\text{Si } Z_L = Z_g = Z_0 = 50 \Omega \quad \Rightarrow \quad P_{disp} = P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_L|^2 R_L}{|Z_L|^2} = \frac{1}{2} \frac{|V_L|^2}{R_L}$$

Por tanto,

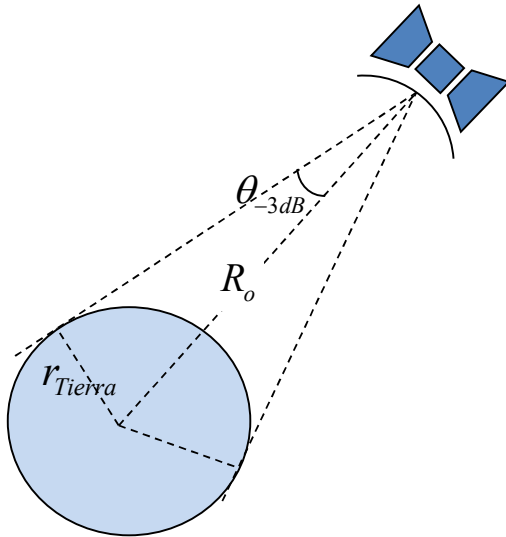
$$|E| = \sqrt{\frac{2\eta \frac{1}{2} \frac{|V_L|^2}{R_L} 4\pi}{\lambda^2 G_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \pi \frac{1}{2} \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{50} 4\pi}{(0,33)^2 (10^{12/10})}} = 3,7 \text{ mV/m}$$

Ejercicio 2.34

Cuál sería el valor de q óptimo de un diagrama normalizado de potencia de tipo $\cos^q(\theta)$, sin radiación trasera, que modela la radiación de una antena a bordo del satélite geoestacionario Eutelsat KONNECT VHTS 2,7° East, para que su "footprint" o huella en la tierra produzca la mayor cobertura posible, a la vez que maximice la densidad de potencia en recepción para una potencia de transmisor dada.

Considere: a) que el máximo del diagrama apunta al foco de la órbita (centro de la Tierra); b) el contorno de la huella como la caída a -3 dB (respecto del máximo del diagrama) que interseca a la tierra; c) el radio de la órbita 42000 km y el radio de la tierra 6370 km; d) "q" como número real.

Solución:



$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_{3d}) &= \frac{r_{Tierra}}{R_o} \\ \theta_{3dB} &= \text{sen}^{-1}\left(\frac{6370}{42000}\right) = 8,72^\circ \\ 10 \log_{10}[\cos^q(\theta_{3dB})] &= -3 \\ q &= \frac{\left(-\frac{3}{10}\right)}{\log_{10}[\cos(\theta_{3dB})]} \\ q &= \frac{\left(-\frac{3}{10}\right)}{\log_{10}[\cos(8,72^\circ)]} = 73,4 \end{aligned}$$

2.4. Planos E, H y componentes de campo

Ejercicio 2.35

Un array lineal dispuesto sobre el eje X y con elementos de tipo parche microstrip se alimenta con una red de tipo serie uniendo los parches a través de una línea microstrip. Si el eje Z contiene el máximo del diagrama, indique cuál es el plano E:

- a) el XZ b) el YZ c) el XY d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

La forma de alimentar los parches indicaría que es el plano XZ el que contiene la componente predominante del campo eléctrico radiado (E_θ) y la dirección de propagación, por tanto, se tendrá que el plano E es el plano XZ.

Ejercicio 2.36

En un array lineal de dipolos dispuesto sobre el eje Z (dipolos colineales), cualquier plano que contenga a dicho array será:

- a) Plano-E y la copolar es E_θ . b) Plano-E y la copolar es E_ϕ .
c) Plano-H y la copolar es E_θ . d) Plano-H y la copolar es E_ϕ .

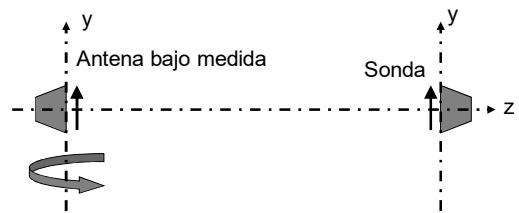
Solución:

En cualquier plano $\varphi = cte$ que contiene al array, el campo eléctrico radiado tiene componente E_θ (copolar). Al contener la dirección de campo eléctrico y la de propagación cualquier plano $\varphi = cte$ es plano E.

Ejercicio 2.37

La siguiente figura ilustra la medida, en un rango circular, de un corte de una antena de tipo bocina. El giro de la antena bajo medida se realiza rotándola alrededor del eje 'y'. La polarización de ambas antenas es lineal, siendo la orientación del vector de polarización la indicada en la figura. Indique la afirmación correcta:

- a) Se mide el plano YZ y la componente E_θ .
- b) Se mide el plano XZ, es decir el plano E de la antena.
- c) Se mide el plano $\varphi = 0^\circ$, y la componente E_φ .
- d) Se mide el plano $\varphi = 90^\circ$, es decir el plano H de la antena.



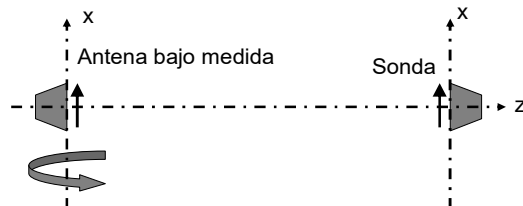
Solución:

De la observación de la figura se desprende que se mide el plano $\varphi = 0^\circ$, y la componente E_φ .

Ejercicio 2.38

La siguiente figura ilustra la medida de un corte de una antena de tipo bocina. El giro de la antena bajo medida se realiza rotándola alrededor del eje 'x'. La polarización de ambas antenas es lineal, siendo la orientación del vector de polarización la indicada en la figura. El corte medido corresponde a:

- a) Plano $\varphi = 0^\circ$, componente E_θ .
- b) Plano $\varphi = 90^\circ$, componente E_θ .
- c) Plano $\varphi = 0^\circ$, componente E_φ .
- d) Plano $\varphi = 90^\circ$, componente E_φ .



Solución:

De la observación de la figura se desprende que se mide el plano $\varphi = 90^\circ$, y la componente E_φ .

Ejercicio 2.39

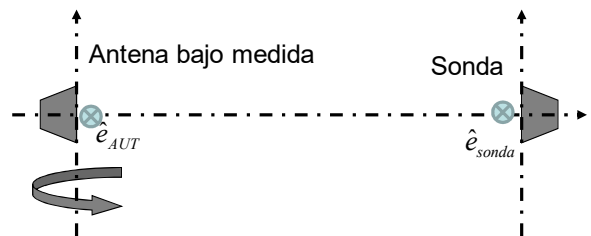
En un sistema de medida de tipo rango circular, en donde al quedar la sonda y la AUT (ambas de polarización lineal) enfrentadas sus vectores de polarización son paralelos entre sí y

perpendiculares al eje de giro circular de la AUT, si se desea medir la contrapolar en el plano E, habrá que:

- rotar la AUT 90° (respecto del eje que une ambas antenas)
- rotar 90° ambas antenas (respecto del eje que une las antenas)
- rotar la sonda 90° (según el eje que une ambas antenas)
- no hace falta rotar las antenas (respecto del eje que une las antenas)

Solución:

De acuerdo al esquema de la figura, habrá que rotar la sonda 90° (según el eje que une ambas antenas).



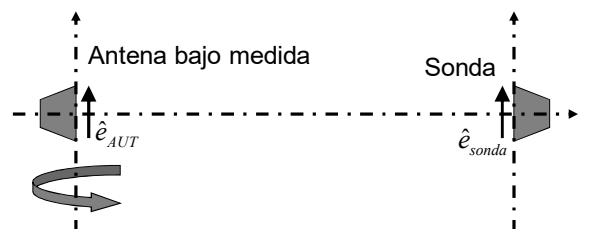
Ejercicio 2.40

En un sistema de medida de tipo rango circular, en donde al quedar la sonda y la AUT enfrentadas (ambas de polarización lineal), sus vectores de polarización son paralelos y paralelos al eje de giro circular de la AUT; si se desea medir la contrapolar en el plano H, habrá que:

- rotar la sonda 90° (respecto del eje que une ambas antenas)
- rotar 90° ambas antenas (respecto del eje que une las antenas)
- no hace falta rotar las antenas (respecto del eje que une las antenas)
- rotar la AUT 90° (respecto del eje que une ambas antenas)

Solución:

De acuerdo al esquema de la figura, habrá que rotar la sonda 90° (respecto del eje que une ambas antenas).



2.5. Polarización de una antena

Ejercicio 2.41

Un campo radiándose en la dirección \hat{z} del espacio viene descrito por su representación compleja:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \frac{e^{-jkR}}{R} [(\hat{x} + \hat{y}) + j 2\hat{y}] \quad mV/m$$

Determine:

- La expresión temporal del campo radiado, y el sentido de la polarización.
- El vector de Poynting en el dominio del tiempo.
- La diferencia de fase existente entre los instantes en los que el campo tiene sentido OX y sentido OY.
- La elipse de polarización y su inclinación respecto del eje OX.
- Las dos polarizaciones circulares en las que puede descomponerse y calcular la relación de polarización circular y la relación axial de una antena en el origen que radiara dicho campo.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[E_0 \frac{e^{j(\omega t - kR)}}{R} [(\hat{x} + \hat{y}) + j 2\hat{y}]\right] \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \hat{x} \frac{E_0}{R} \text{Re}[e^{j(\omega t - kR)}] + \hat{y} \frac{E_0}{R} \text{Re}[(1 + 2j)e^{j(\omega t - kR)}] = \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{E_0}{R} \left\{ \hat{x} \text{Re}[e^{j(\omega t - kR)}] + \hat{y} \text{Re}[\sqrt{5} e^{j \cdot \tan^{-1}(2)} e^{j(\omega t - kR)}] \right\} \\ &= \frac{E_0}{R} [\hat{x} \cos(\omega t - kR) + \hat{y} \sqrt{5} \cos(\omega t - kR + \tan^{-1}(2))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{P}(t) &= \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\eta} \vec{E} \times (\hat{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{\eta} \left| \hat{n} \cdot \frac{\vec{E}}{E} \cdot \frac{\vec{E}}{E} \right| = \frac{1}{\eta} \hat{n} |E|^2 = \frac{1}{\eta} \hat{z} |E(\vec{r}, t)|^2 \\ \vec{P}(t) &= \hat{z} \frac{1}{\eta} \left(\frac{E_0}{R}\right)^2 [\cos^2(\omega t - kR) + 5 \cos^2(\omega t - kR + \tan^{-1}(2))] \end{aligned}$$

$$\text{c) Campo según OX: } E_y = 0 \Rightarrow \sqrt{5} \cos(\omega t_1 - kR + \tan^{-1}(2)) = 0$$

$$\omega t_1 - kR + \tan^{-1}(2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t_1 - kR = 26,6^\circ$$

$$\text{Campo según OY} \Rightarrow E_x = 0 \Rightarrow \cos(\omega t_2 - kR) = 0 \Rightarrow \omega t_2 - kR = 90^\circ$$

$$\text{La diferencia de fase es } \omega t_1 - \omega t_2 = 26,6^\circ - 90^\circ = -63,4^\circ$$

Pero en realidad en ese instante t_2 el campo va según $-\hat{y}$. Para escoger un valor en dirección $+\hat{y}$:
 $\omega t_2 - kR = 270^\circ \Rightarrow \cos(\omega t_2 - kR + \tan^{-1}(2)) > 0$

$$\text{En este caso: } \omega t_1 - \omega t_2 = 26,6^\circ - 270^\circ = -243,4^\circ = 116,6^\circ$$

d) Elipse de polarización:

$$E_x = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t - kR)$$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{E_0}{R} \sqrt{5} \cos(\omega t - kR + \tan^{-1}(2)) \\ &= \frac{E_0}{R} \sqrt{5} [\cos(\tan^{-1}(2)) \cos(\omega t - kR) - \text{sen}(\tan^{-1}(2)) \text{sen}(\omega t - kR)] \end{aligned}$$

$$\sqrt{5} \cos(\tan^{-1}(2)) = 1 ; \sqrt{5} \text{sen}(\tan^{-1}(2)) = 2 \Rightarrow E_y = \frac{E_0}{R} [\cos(\omega t - kR) - 2 \text{sen}(\omega t - kR)]$$

$$E_y = \frac{E_0}{R} \left[E_x \left(\frac{R}{E_0} \right) - 2 \left(1 - E_x^2 \left(\frac{R}{E_0} \right)^2 \right)^{1/2} \right] = E_x - 2 \left(\left(\frac{E_0}{R} \right)^2 - E_x^2 \right)^{1/2}$$

$$E_x - E_y = 2 \left(\left(\frac{E_0}{R} \right)^2 - E_x^2 \right)^{1/2}$$

$$5E_x^2 + E_y^2 - 2E_x E_y - 4 \left(\frac{E_0}{R} \right)^2 = 0$$

$$\text{Punto OA} \Rightarrow \max(E_x^2 + E_y^2) \Rightarrow f = E_x^2 + E_y^2$$

$$f = \left(\frac{E_0}{R} \right)^2 [\cos^2(\omega t - kR) + \cos^2(\omega t - kR) + 4 \text{sen}^2(\omega t - kR) - 4 \cos(\omega t - kR) \text{sen}(\omega t - kR)]$$

$$f(t) = 2 \left(\frac{E_0}{R} \right)^2 [1 + \text{sen}^2(\omega t - kR) - \text{sen}(2\omega t - 2kR)]$$

$$f' = 2 \left(\frac{E_0}{R} \right)^2 [2\omega \text{sen}(\omega t - kR) \cos(\omega t - kR) - 2\omega \cos(2\omega t - 2kR)]$$

$$f' = 2 \left(\frac{E_0}{R} \right)^2 [\omega \text{sen}(2\omega t - 2kR) - 2\omega \cos(2\omega t - 2kR)]$$

$$f' = 0 \Rightarrow \tan(2\omega t - 2kR) = 2 \Rightarrow \omega t - kR = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{E_y}{E_x} \right)_{\omega t - kR = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2)} = \tan^{-1} [1 - 2 \tan(\omega t - kR)]_{\omega t - kR = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2)}$$

$$= \tan^{-1} \left[1 - 2 \tan \left(\frac{1}{2} \tan^{-1}(2) \right) \right]$$

$$\alpha = -13,3^\circ$$

$$\text{e) } (\hat{x} + \hat{y}) + j 2\hat{y} = E_{RHC} \hat{e}_R + E_{LHC} \hat{e}_L = E_{RHC} \left(\frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) + E_{LHC} \left(\frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= E_{RHC} + E_{LHC} & \Rightarrow E_{RHC} &= \frac{\sqrt{2} + j\sqrt{2}(1+2j)}{2} & \Rightarrow E_{RHC} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + j) \\ j\sqrt{2}(1+2j) &= E_{RHC} - E_{LHC} & \Rightarrow E_{LHC} &= \frac{\sqrt{2} - j\sqrt{2}(1+2j)}{2} & \Rightarrow E_{LHC} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (3 - j) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{E_{RHC}}{E_{LHC}} \right| = \left| \frac{-1+j}{3-j} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AR = \frac{||E_{RHC}| + |E_{LHC}||}{||E_{RHC}| - |E_{LHC}||} = \frac{\left| \frac{E_{RHC}}{E_{LHC}} + 1 \right|}{\left| \frac{E_{RHC}}{E_{LHC}} - 1 \right|} = \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right|} = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \right| \approx 2,6 = 8,3 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.42

El campo instantáneo de una onda que se propaga hacia las z positivas vale en $z=0$:

$$\vec{E}(z=0, t) = E_0(\cos(\omega t) \hat{x} + \text{sen}(\omega t) \hat{y}) \quad \text{¿Cuál es su polarización?}$$

- a) Circular a derechas b) Circular a izquierdas c) Lineal según $\hat{x} + \hat{y}$ d) Lineal según $\hat{x} - \hat{y}$

Solución:

$\vec{E}(z=0) = E_0(\hat{x} - j \hat{y}) \Rightarrow$ polarización circular a derechas. Puede demostrarse tomando varios instantes de tiempos secuenciales y representando el valor instantáneo de campo, o también calculando la relación de polarizaciones circulares que en este caso es de valor infinito.

Ejercicio 2.43

El Coliseo Romano se puede aproximar por una elipse de ejes 187 m x 155 m. Suponiendo una elipse de polarización con dichas dimensiones, calcule la relación de polarizaciones circulares.

Solución:

$$AR = \frac{OA}{OB} = \frac{187}{155}$$

$$AR = \frac{|E_{RHC}| + |E_{LHC}|}{|E_{RHC}| - |E_{LHC}|} = \frac{\left| \frac{E_{RHC}}{E_{LHC}} + 1 \right|}{\left| \frac{E_{RHC}}{E_{LHC}} - 1 \right|} \Rightarrow \left| \frac{E_{RHC}}{E_{LHC}} \right| = \frac{AR+1}{AR-1} = \frac{\frac{187}{155}+1}{\frac{187}{155}-1} = 10,7$$

(Nota: en este tipo de ejercicios en el que se deriva la relación de polarizaciones circulares a partir de la relación axial, existe ambigüedad en el cociente de componentes circulares. En particular la relación de polarizaciones circulares ejercicio admite también la solución $\left| \frac{E_{LHC}}{E_{RHC}} \right| = 10,7$)

Ejercicio 2.44

Una onda plana con el campo magnético $\vec{H}(y) = H_0 e^{-jky} (\hat{x} - j 4 \hat{z})$ tiene la siguiente polarización:

- a) Lineal a 14° respecto del eje Z. b) Elíptica a izquierdas.
c) Elíptica a derechas. d) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$\vec{H} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}}{\eta} \Rightarrow \eta \vec{H} = \eta H_0 e^{-jky} (\hat{x} - j 4 \hat{z}) = \hat{y} \times \vec{E} = \hat{y} \times (E_x \hat{x} + E_z \hat{z}) = -\hat{z} E_x + \hat{x} E_z$$

$$\eta H_0 e^{-jky} = E_z \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(y) = \eta H_0 e^{-jky} (\hat{z} + j 4 \hat{x})$$

$$j 4 \eta H_0 e^{-jky} = E_x$$

$$\vec{E}(y, t) = \eta H_0 (-4 \text{sen}(\omega t - ky) \hat{x} + \cos(\omega t - ky) \hat{z})$$

Polarización elíptica a izquierdas. Puede demostrarse tomando varios instantes de tiempos secuenciales y representando el valor instantáneo de campo.

También puede calcularse la descomposición en componente circulares a derechas e izquierdas, lo que permite ver también el sentido de giro, además de calcular la relación axial de la elipse de polarización.

$$\vec{E}(y) = E_o(\hat{z} + j 4 \hat{x}) = E_R \hat{u}_R + E_L \hat{u}_L = E_R \frac{(\hat{z} - j \hat{x})}{\sqrt{2}} + E_L \frac{(\hat{z} + j \hat{x})}{\sqrt{2}}$$

$$E_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_R + E_L)$$

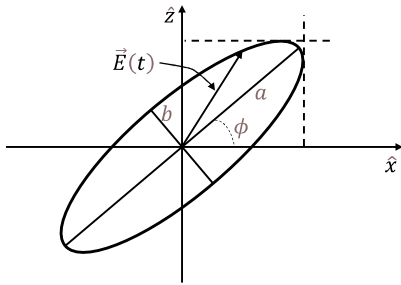
$$j 4E_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(-j E_R + j E_L)$$

Luego la relación de polarizaciones circulares y la relación axial serán:

$$\frac{|E_R|}{|E_L|} = \frac{3}{5}$$

$$AR = \frac{|E_R| + |E_L|}{|E_R| - |E_L|} = \frac{\left|\frac{3}{5} + 1\right|}{\left|\frac{3}{5} - 1\right|} = 4 \Rightarrow 12 \text{ dB}$$

También se podría calcular el ángulo que forma el eje mayor de la elipse con el eje X:



$$\vec{E}(y, t) = E_o(-4\text{sen}(\omega t - ky) \hat{x} + \text{cos}(\omega t - ky) \hat{z})$$

$$|\vec{E}(y, t)|^2 = (E_o)^2(16 \text{sen}^2(\omega t - ky) + \text{cos}^2(\omega t - ky)) = (E_o)^2(15 \text{sen}^2(\omega t - ky) + 1)$$

$$\max [|\vec{E}(y, t)|^2] \Rightarrow \omega t_{\max} - ky = \pm \frac{\pi}{2}$$

El tiempo t_o en el que el vector de campo se alinea al eje X:

$$E_z(t_o) = 0 \Rightarrow \omega t_o - ky = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_x(t_o) = E_{\max}$$

Es decir, el eje mayor de la elipse se alinea con el eje X.

De la relación axial se obtiene $a = 4E_o$; $b = E_o$

Ejercicio 2.45

Una antena radia en la dirección del eje z un campo eléctrico: $\vec{E} = \frac{E_o}{z}(\hat{x} - \hat{y}) \cdot e^{-jk_o z}$. Diga qué tipo de polarización, de las abajo disponibles, debe tener una antena receptora para obtener el máximo acoplo:

a) Elíptica a izquierdas.

b) Elíptica a derechas.

- c) Lineal a 135° respecto del eje Y d) Circular a izquierdas.

Solución:

La polarización del campo indicado es lineal a 135° respecto del eje Y. Esta misma polarización es la que debería tener la antena receptora para máximo acoplo de polarización.

Ejercicio 2.46

Se tiene una onda incidente dada por $\vec{E} = \left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) E_o (\hat{\theta} + j 2\hat{\phi})$. ¿Cuál es la diferencia de señal recibida por dos antenas de igual ganancia, polarizadas circularmente a izquierdas y a derechas?

- a) 9,5 dB b) 15,3 dB c) 6 dB d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$(\hat{\theta} + j 2\hat{\phi}) = E_R \hat{R} + E_L \hat{L} = E_R \left(\frac{\hat{\theta} - j\hat{\phi}}{\sqrt{2}}\right) + E_L \left(\frac{\hat{\theta} + j\hat{\phi}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(\hat{\theta} + j 2\hat{\phi}) = \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{2}}(E_R + E_L) + \frac{j\hat{\phi}}{\sqrt{2}}(E_L - E_R)$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_R + E_L) \\ 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_L - E_R) \end{cases} \quad \begin{cases} E_L = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ E_R = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \left| \frac{E_R}{E_L} \right| = \frac{1}{3} \approx -9,5 \text{ dB} \Rightarrow 9,5 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.47

Calcule la relación axial del campo eléctrico radiado expresado mediante:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{r} \cdot [\cos(\omega t - kr)\hat{\theta} + 2 \cdot \text{sen}(\omega t - kr)\hat{\phi}]$$

Solución:

En representación compleja: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{E_0}{r} e^{-jkr} \cdot [\hat{\theta} - 2j\hat{\phi}]$

$$(\hat{\theta} - j 2\hat{\phi}) = E_R \hat{R} + E_L \hat{L} = E_R \left(\frac{\hat{\theta} - j\hat{\phi}}{\sqrt{2}}\right) + E_L \left(\frac{\hat{\theta} + j\hat{\phi}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(\hat{\theta} - j 2\hat{\phi}) = \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{2}}(E_R + E_L) + \frac{j\hat{\phi}}{\sqrt{2}}(E_L - E_R)$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_R + E_L) \\ -2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_L - E_R) \end{cases} \quad \begin{cases} E_L = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ E_R = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \left| \frac{E_R}{E_L} \right| = 3 \quad (9,54 \text{ dB}) \Rightarrow AR = \frac{|E_R| + |E_L|}{||E_R| - |E_L||} = \frac{\left| \frac{E_R}{E_L} + 1 \right|}{\left| \frac{E_R}{E_L} - 1 \right|} = 2 \approx 6 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.48

Calcule la relación axial y la relación de polarizaciones circulares de un campo electromagnético radiado cuyo fasor viene dado por: $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot [\hat{\theta} + \hat{\varphi}]$

Solución:

Como se trata de una polarización lineal, su relación axial tendrá un valor infinito y su relación de polarizaciones circulares será 1.

Ejercicio 2.49

Una antena cuyo campo radiado, en la dirección \hat{y} , viene dado por $\vec{E} = -j\eta \frac{e^{-jky}}{2\pi y} I_0(2\hat{z} + 3j\hat{x})$ tiene la siguiente polarización:

- a) Circular a derechas. b) Lineal. c) Elíptica a izquierdas. d) Otra.

Solución:

$$\vec{E}(y, t) = \frac{\eta}{2\pi y} I_0(2 \operatorname{sen}(\omega t - ky) \hat{z} + 3 \cos(\omega t - ky) \hat{x})$$

Polarización elíptica a izquierdas. Puede demostrarse tomando varios instantes de tiempos secuenciales y representando el valor instantáneo de campo.

Ejercicio 2.50

Se tiene una onda incidente con una polarización caracterizada por una relación axial de 3 dB. ¿Cuál es la diferencia de señal recibida por dos antenas de igual ganancia, polarizadas circularmente a derechas y a izquierdas?

- a) 3 dB b) 15,3 dB c) 6 dB d) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$AR = \frac{|E_{RHC}| + |E_{LHC}|}{|E_{RHC}| - |E_{LHC}|} = \frac{\left| \frac{|E_{RHC}|}{|E_{LHC}|} + 1 \right|}{\left| \frac{|E_{RHC}|}{|E_{LHC}|} - 1 \right|} \Rightarrow \left| \frac{|E_{RHC}|}{|E_{LHC}|} \right| = \frac{AR+1}{AR-1} \simeq \frac{1,41+1}{1,41-1} \simeq 5,85 \simeq 15,3 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.51

Una antena con una polarización nominal circular a derechas posee una relación axial de 0,3 dB. ¿Cuál es su nivel de radiación contrapolar circular relativo al copolar en dB?

Solución:

$$\left| \frac{E_{RHC}}{E_{LHC}} \right| = \frac{AR+1}{AR-1} \simeq \frac{1,04+1}{1,04-1} \simeq 58 \simeq 35,3 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{E_{XPC}}{E_{CPC}} \right| = \left| \frac{E_{LHC}}{E_{RHC}} \right| \simeq -35,3 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.52

De una antena se ha medido su diagrama de radiación a 3,5 GHz en una cámara anecoica de tipo rango esférico, obteniéndose un fichero del que se transcribe una fila de datos:

θ (grad)	φ (grad)	$Abs(E_\theta)$ (dBV/m)	$Phase(E_\theta)$ (grad)	$Abs(E_\varphi)$ (dBV/m)	$Phase(E_\varphi)$ (grad)
0	0	-73,56	144,36	-94,79	-103,38

Calcule en dicha dirección la relación axial (AR) en dB.

Solución:

$$(E_\theta \hat{\theta} + E_\varphi \hat{\varphi}) = E_R \hat{R} + E_L \hat{L} = E_R \left(\frac{\hat{\theta} - j\hat{\varphi}}{\sqrt{2}} \right) + E_L \left(\frac{\hat{\theta} + j\hat{\varphi}}{\sqrt{2}} \right)$$

Utilizando la representación fasorial de las componentes con el argumento en radianes:

θ (grad)	φ (grad)	$Abs(E_\theta)$ (dBV/m)	$Phase(E_\theta)$ (rad)	$Abs(E_\varphi)$ (dBV/m)	$Phase(E_\varphi)$ (rad)
0	0	-73,56	2,5196	-94,79	-1,8043

$$10^{-73,56/20} \cdot e^{j2,5196} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_R + E_L)$$

$$-j \cdot 10^{-94,79/20} \cdot e^{-j1,8043} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_L - E_R)$$

$$E_L = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(10^{-73,56/20} \cdot e^{j2,5196} - j \cdot 10^{-94,79/20} \cdot e^{-j1,8043} \right)$$

$$E_R = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(10^{-73,56/20} \cdot e^{j2,5196} + j \cdot 10^{-94,79/20} \cdot e^{-j1,8043} \right)$$

$$|\rho| = \frac{|E_R|}{|E_L|} = \frac{\left| 10^{-73,56/20} \cdot e^{j2,5196} + j \cdot 10^{-94,79/20} \cdot e^{-j1,8043} \right|}{\left| 10^{-73,56/20} \cdot e^{j2,5196} - j \cdot 10^{-94,79/20} \cdot e^{-j1,8043} \right|} = 0,8514$$

$$AR = \frac{|E_R| + |E_L|}{|E_R| - |E_L|} = \frac{|\rho| + 1}{|\rho| - 1} = \frac{0,8514 + 1}{0,8514 - 1} = 12,46 = 21,9 \text{ dB}$$

Ejercicio 2.53

En un fichero del diagrama de radiación medido de una antena de apertura con la apertura supuesta en el plano XY, se han obtenido los siguientes datos:

θ (grad)	φ (grad)	$Abs(E_\theta)$ (mV/m)	$Phase(E_\theta)$ (grad)	$Abs(E_\varphi)$ (mV/m)	$Phase(E_\varphi)$ (grad)
0	0	0,5	120	0,45	205

Del fichero anterior indique, para la dirección indicada, cuál es la relación axial:

- a) 1,2 dB b) AR= ∞ c) 3,4 dB d) 6,5 dB

Solución:

$$|\rho| = \left| \frac{E_R}{E_L} \right| = \left| \frac{0,5 \cdot e^{j2,0944} + j \cdot 0,5 \cdot e^{j4,1888}}{0,5 \cdot e^{j2,0944} - j \cdot 0,5 \cdot e^{j4,1888}} \right| = 0,268 \approx -11,4 \text{ dB}$$

$$AR = \frac{|E_R| + |E_L|}{|E_R| - |E_L|} = \frac{|\rho| + 1}{|\rho| - 1} = \frac{0,268 + 1}{0,268 - 1} \approx 1,73 = \frac{200}{BB'} \Rightarrow BB' = \frac{200}{1,73} \approx 115,6 \text{ m}$$

Ejercicio 2.56

En un fichero del diagrama de radiación medido de un reflector con la apertura supuesta en el plano XY, se han obtenido los siguientes datos:

θ (grad)	φ (grad)	Re(E_θ) (mV/m)	Im(E_θ) (mV/m)	Re(E_φ) (mV/m)	Im(E_φ) (mV/m)
0	0	0,5	0,87	0,04	0,04

Indique qué afirmación es correcta:

- a) CP/XP= 12,5 dB
 b) En $\theta = 0^\circ \Rightarrow AR = \infty$
 c) $|E_\theta|_{\theta=0^\circ, \varphi=90^\circ} = -25 \text{ dB(mV/m)}$
 d) La bocina tiene polarización según \hat{y} .

Solución:

$$(E_\theta \hat{\theta} + E_\varphi \hat{\varphi}) = E_R \hat{R} + E_L \hat{L} = E_R \left(\frac{\hat{\theta} - j\hat{\varphi}}{\sqrt{2}} \right) + E_L \left(\frac{\hat{\theta} + j\hat{\varphi}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$0,5 + j0,87 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_R + E_L)$$

$$-j \cdot (0,04 + j0,04) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_L - E_R)$$

$$|\rho| = \left| \frac{E_R}{E_L} \right| = \left| \frac{0,5 + j0,87 + j \cdot (0,04 + j0,04)}{0,5 + j0,87 - j \cdot (0,04 + j0,04)} \right| = 1,03$$

$$AR = \frac{|E_R| + |E_L|}{|E_R| - |E_L|} = \frac{|\rho| + 1}{|\rho| - 1} = \frac{1,03 + 1}{1,03 - 1} \approx 67,7 = 36,6 \text{ dB}$$

$$|E_\theta|_{\theta=0^\circ, \varphi=90^\circ} = |E_\varphi|_{\theta=0^\circ, \varphi=90^\circ} \cong 0,057 \approx -25 \text{ dB(mV/m)}$$

Ejercicio 2.57

Para una aplicación de telemando y telecontrol en enlace satelital se necesita polarización circular. Indique la antena que elegiría:

- a) Bocina cónica. b) Bocina cónica corrugada.
 c) Una espira circular. d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Ni la bocina cónica, ni la bocina cónica corrugada ni la espira circular tienen polarización circular.

Ejercicio 2.58

Las pérdidas introducidas en un enlace entre dos antenas de hélice de igual polarización al sustituir una de ellas por una antena de tipo bocina piramidal (de ganancia mitad que la hélice) son:

- a) 3 dB b) 6 dB
c) 0 dB d) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$L_g = -10 \cdot \log_{10} \left(\frac{g_{boc.piram.}}{g_{helice}} \right) = -10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) \approx 3 \text{ dB}$$

$$L_p = -20 \cdot \log_{10} (\hat{e}_{hel} \cdot \hat{e}_{boc.piram.}^*) = -20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\hat{\theta} \mp j\hat{\phi}}{\sqrt{2}} \cdot \hat{\theta} \right) = 3 \text{ dB}$$

$$L = L_g(\text{dB}) + L_p(\text{dB}) = 6 \text{ dB}$$

2.6. Temperatura de ruido de antena**Ejercicio 2.59**

¿Cuál es la temperatura de ruido de una antena de tipo reflector parabólico de 55 dBi de directividad a 20 GHz que apunta al Sol? Suponga una temperatura de brillo del Sol ≈ 6000 K y ángulo de visión $\approx \pm 0,26^\circ$.

Solución:

$$\Omega_A = \frac{4\pi}{D_0} \approx \frac{4\pi}{10^{5,5}} \approx 4 \cdot 10^{-5}$$

Suponiendo un lóbulo principal con simetría de revolución:

$$\Omega_A \approx (BW)^2 \Rightarrow BW \approx \sqrt{4 \cdot 10^{-5}} \approx 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,36^\circ$$

Como $0,36^\circ < 0,52^\circ$, puede decirse que todo el lóbulo principal se proyecta dentro del círculo que se observa como Sol.

Al ser una antena tan directiva se podría representar el lóbulo principal del reflector por el ángulo sólido del haz y operar con esta representación. Por tanto, llamando $\alpha = BW/2$ se tendría:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} T_B(\theta, \varphi) \cdot D(\theta, \varphi) d\Omega \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,Sol} \cdot D(\theta, \varphi) \cdot d\Omega$$

Bajo la aproximación del haz principal por el ángulo sólido con directividad constante en el mismo:

$$D(\theta, \varphi) \approx D_0$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} T_{B,Sol} \cdot D_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi = \frac{T_{B,Sol} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\alpha} =$$

$$= \frac{T_{B,Sol} \cdot D_0}{2} (1 - \cos(\alpha))$$

$$\text{Como } \alpha = BW/2 \Rightarrow T_A = \frac{6000 \cdot 10^{5,5}}{2} (1 - \cos(0,18^\circ)) = 4682 \text{ K}$$

Un cálculo más preciso implicaría conocer la función $D(\theta, \varphi)$ o al menos aproximarla, por ejemplo, en el caso de una antena suficientemente directiva, a través de un modelo de campo $\cos^q(\theta)$. A partir de la directividad se calcularía el parámetro q y, a partir de él, una mejor aproximación de la temperatura de antena T_A .

Ejercicio 2.60

Una antena apunta con su haz principal al Sol. Su directividad es de 55 dBi y el ángulo sólido bajo el que se ve el Sol desde la Tierra es $4 \cdot 10^{-5}$ sr. ¿Cuánto se modificaría la temperatura de antena si la antena duplica el área de su apertura (manteniendo su eficiencia de apertura)?

- a) 3 dB b) 0 dB c) -3 dB d) 6 dB

(Utilice para este problema la aproximación: $D(\theta, \varphi) = D_0$ en todo el rango angular de visión del Sol)

Solución:

$$\Omega_A = \frac{4\pi}{D_0} \simeq \frac{4\pi}{10^{5,5}} \simeq 4 \cdot 10^{-5}$$

$$\Omega_A \simeq (BW)^2 \Rightarrow BW \simeq \sqrt{4 \cdot 10^{-5}} \simeq 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,36^\circ; \quad \alpha = \frac{BW}{2} = 0,18^\circ$$

Tanto el ángulo sólido con que se ve el Sol como el ángulo sólido de haz de la antena coinciden, siendo el ángulo plano correspondiente, suponiendo simetría de revolución, de $0,36^\circ$.

Bajo la suposición de $D(\theta, \varphi) = D_0$ en todo el rango angular de visión del Sol:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} T_{B,Sol} \cdot D_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi = \frac{T_{B,Sol} \cdot D_0}{2} (1 - \cos(\alpha))$$

Con el aumento del área de la antena, el valor de α disminuirá y el haz completo se proyectará dentro del sol, manteniéndose dicha expresión salvo la variación de directividad y ancho de haz.

Como

$$D_0 = \frac{4\pi}{\Omega_A} \simeq \frac{4\pi}{(BW)^2} = \frac{4\pi}{(2\alpha)^2}$$

$$D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \epsilon_A \cdot A$$

$$\alpha = \frac{cte}{\sqrt{A}}$$

Si duplico el área: $A' = 2A$

$$\alpha' = \frac{cte}{\sqrt{A'}} = \frac{cte}{\sqrt{2}\sqrt{A}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$D'_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \epsilon_A \cdot A' = 2D_0$$

$$\frac{T'_A}{T_A} = \frac{D'_0}{D_0} \cdot \frac{\left(1 - \cos\left(\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}{(1 - \cos(\alpha))} = 2 \cdot 0,5 = 1$$

Es decir, bajo el modelo de un único lóbulo principal modelado por el ancho de haz (directividad constante en el mismo), la temperatura de antena sería la misma al aumentar la apertura al doble.

Ejercicio 2.61

Estime el valor de la temperatura de ruido de una antena con ganancia de 20 dB (suponga eficiencia de radiación del 100%) en un satélite cuyo lóbulo principal apunta al centro de la Tierra. Considere que la temperatura de brillo del cielo es de 10 K y la de la Tierra es de 290 K. Modele el diagrama con un lóbulo principal como el ángulo sólido de haz tal que $D(\theta, \varphi) = D_0$ en dicho ángulo sólido. Considere primero un radio de la órbita=36000 km y después utilice el valor de 42000 km.

Solución:

$$D(\theta, \varphi) = D_0 = 100$$

$$D_0 = \frac{4\pi}{\Omega_A} \approx \frac{4\pi}{(BW)^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{BW}{2} = \frac{\sqrt{4\pi/D_0}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{D_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{100}} = 10,16^\circ$$

$$\text{sen}(\alpha_2) = \frac{a}{R} = \frac{6370}{36000}$$

$$\alpha_2 = 10,2^\circ$$

Luego prácticamente el "footprint" del lóbulo se ajusta al tamaño de la Tierra ($\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 10,2^\circ$)

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} T_B(\theta, \varphi) \cdot D(\theta, \varphi) d\Omega$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot d\Omega$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi = \frac{T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\alpha}$$

$$T_A = \frac{T_{B,Tierra} \cdot D_0}{2} (1 - \cos(\alpha)) = \frac{290}{2} \cdot 100 \cdot (1 - \cos(10,2^\circ)) = 229,2 \text{ K}$$

Si $R = 42000 \text{ km}$, $\text{sen}(\alpha_2) = \frac{a}{R} = \frac{6370}{42000}$ $\alpha_2 = 8,72^\circ$

Luego el "footprint" del lóbulo excede el tamaño la Tierra.

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} T_B(\theta, \varphi) \cdot D(\theta, \varphi) d\Omega$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\theta=0}^{\theta=\alpha_2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi + \int_{\theta=\alpha_2}^{\theta=\alpha_1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,cielo} \cdot D_0 \cdot \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi \right]$$

$$T_A = \frac{T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\alpha_2} + \frac{T_{B,cielo} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} [-\cos(\theta)]_{\theta=\alpha_2}^{\theta=\alpha_1}$$

$$T_A = \frac{D_0}{2} [T_{B,Tierra} \cdot (1 - \cos(\alpha_2)) + T_{B,cielo} \cdot (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1))] \\ = \frac{100}{2} \cdot [290 \cdot (1 - \cos(8,72^\circ)) + 10 \cdot (\cos(8,72^\circ) - \cos(10,16^\circ))] = 169,7 \text{ K}$$

Ejercicio 2.62

Cuál sería la temperatura de ruido de una antena receptora a bordo de un satélite geoestacionario (órbita de 42000 km) cuyo diagrama pudiera considerarse omnidireccional. Considere que el radio de la Tierra es $a = 6370$ km, que la temperatura de brillo del cielo es de 10 K y que la de la Tierra es 290 K.

Solución:

$$D(\theta, \varphi) = D_0 = 1 \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{a}{R} = \frac{6370}{36000} \quad \alpha = 0,152 \text{ rad} = 9,7^\circ$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} T_B(\theta, \varphi) \cdot D(\theta, \varphi) d\Omega$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,cielo} \cdot D_0 \cdot d\Omega$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi} T_{B,cielo} \cdot D_0 \cdot \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi$$

$$T_A = \frac{T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\alpha} + \frac{T_{B,cielo} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} [-\cos(\theta)]_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi}$$

$$T_A = \frac{T_{B,Tierra} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} (1 - \cos(\alpha)) + \frac{T_{B,cielo} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} (1 + \cos(\alpha))$$

$$T_A = \frac{T_{B,Tierra}}{2} (1 - \cos(\alpha)) + \frac{T_{B,cielo}}{2} (1 + \cos(\alpha))$$

$$T_A = \frac{290}{2} (1 - \cos(9,7^\circ)) + \frac{10}{2} (1 + \cos(9,7^\circ)) \simeq 1,68 + 9,94 \simeq 11,6 \text{ K}$$

Ejercicio 2.63

Se dispone de un radioenlace a la frecuencia f entre un satélite geoestacionario (considere la órbita de 42000 km) que hace de transmisor, y una antena receptora, embarcada en un coche, de tipo hélice apuntando con su máximo al satélite.

Suponiendo una radiofuente detrás del satélite, que es vista por la antena receptora con un ángulo de 1° , y que tiene una temperatura de brillo de $T_b = 10000$ K, calcule la temperatura de ruido de la antena receptora (cuyo diagrama de potencia puede modelarse mediante $\cos^4(\theta)$ radiando únicamente por la parte delantera). Suponga que la temperatura de brillo del cielo es de 10 K.

Solución:

$$\text{Condición de la directividad: } \int_{4\pi} D(\theta, \varphi) d\Omega = 4\pi$$

$$\text{Si } D(\theta, \varphi) = \begin{cases} D_0 \cdot \cos^4(\theta), & \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & , \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

$$\int_{4\pi} D_0 \cdot \cos^4(\theta) d\Omega = D_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^4(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi = D_0 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{-\cos^5(\theta)}{5} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{D_0 \cdot 2\pi}{5}$$

$$\frac{D_0 \cdot 2\pi}{5} = 4\pi \quad \Rightarrow \quad D_0 = 10 \quad \Rightarrow \quad D(\theta, \varphi) = \begin{cases} 10 \cdot \cos^4(\theta), & \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & , \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

$$\Omega(\text{esterorad}) = \frac{4\pi}{D_0} = \frac{2\pi}{5} \quad \text{estero-radianes}$$

$$T_A = \frac{\int_{4\pi} T_B(\theta, \phi) G(\theta, \phi) d\Omega}{\int_{4\pi} G(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} T_B(\theta, \phi) D(\theta, \phi) d\Omega$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,\text{radiof}} \cdot D(\theta, \varphi) \cdot d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} T_{B,\text{cielo}} \cdot D(\theta, \varphi) \cdot d\Omega$$

$$T_A = \frac{1}{4\pi} T_{B,\text{radiof}} \cdot D_0 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cos^{2q}(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi + \\ + \frac{1}{4\pi} T_{B,\text{cielo}} \cdot D_0 \cdot \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cos^{2q}(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

$$T_A = \frac{T_{B,\text{radiof}} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} \left[-\frac{\cos^{2q+1}(\theta)}{2q+1} \right]_{\theta=0}^{\theta=\alpha} + \frac{T_{B,\text{cielo}} \cdot D_0 \cdot 2\pi}{4\pi} \left[-\frac{\cos^{2q+1}(\theta)}{2q+1} \right]_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi/2}$$

$$T_A = \frac{D_0}{2(2q+1)} \cdot (T_{B,\text{radiof}} \cdot (1 - \cos^{2q+1}(\alpha)) + T_{B,\text{cielo}} \cdot \cos^{2q+1}(\alpha))$$

Como $q = 2$, la temperatura de antena es:

$$T_A = 10000 \cdot (1 - \cos^5(0,5^\circ)) + 10 \cdot \cos^5(0,5^\circ) = 1,9 + 10,0 = 11,9 \text{ K}$$

3. Antenas de apertura

3.1. Campo radiado por una distribución de apertura

Ejercicio 3.1

Dada una distribución de campo $\vec{E}_a(x', y') = \vec{E}_{ax}(x', y')\hat{x} + \vec{E}_{ay}(x', y')\hat{y}$ situada en el plano XY:

a) Demuestre las expresiones del campo radiado por dicha distribución (utilice el denominado “segundo principio de equivalencia” y las integrales de radiación-campo lejano). Puede denominar a las correspondientes transformadas de Fourier en x' e y' de dicha distribución, P_x y P_y , respectivamente.

b) Aplíquelo al cálculo de las componentes de campo radiado por una apertura de dimensiones A y B, según el eje X y el eje Y respectivamente, con una distribución de campo en dicha apertura del tipo $E_0 \cos\left(k\frac{A}{2} - k|x'|\right)\hat{y}$

Solución:

$$a) \vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-jk}{4\pi}\right) [\vec{L} \times \hat{r}]$$

$$\begin{aligned} \vec{L}(\vec{r}) &= \int_{S'} \vec{M}(r') e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} ds' = \int_{S'} -2\hat{n} \times \vec{E}_a(r') e^{jk(\vec{r}' \cdot \hat{r})} ds' \\ &= \int_{x'} \int_{y'} -2\hat{z} \times \vec{E}_a(x', y') e^{jk(x'\hat{x} + y'\hat{y}) \cdot \hat{r}} dx' dy' \end{aligned}$$

$$\vec{L}(\vec{r}) = 2 \int_{x'} \int_{y'} (-\hat{y}E_{ax}(x', y') + \hat{x}E_{ay}(x', y')) e^{jk(x'u + y'v)} dx' dy' ; u = \sin\theta \cos\varphi ; v = \sin\theta \sin\varphi$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-jk}{2\pi}\right) \int_{x'} \int_{y'} ((-\hat{y} \times \hat{r})E_{ax}(x', y') + (\hat{x} \times \hat{r})E_{ay}(x', y')) e^{jk(x'u + y'v)} dx' dy'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{-jk}{2\pi}\right) ((-\hat{y} \times \hat{r})P_x(u, v) + (\hat{x} \times \hat{r})P_y(u, v))$$

$$P_x(u, v) = \int_{x'} \int_{y'} E_{ax}(x', y') e^{jk(x'u + y'v)} dx' dy'$$

$$P_y(u, v) = \int_{x'} \int_{y'} E_{ay}(x', y') e^{jk(x'u + y'v)} dx' dy'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{-jk}{2\pi} \right) \left((-\cos\varphi \hat{\theta} + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\phi}) P_x(u, v) - (\operatorname{sen}\varphi \hat{\theta} + \cos\theta \cos\varphi \hat{\phi}) P_y(u, v) \right)$$

$$E_\theta = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) (P_x \cos\varphi + P_y \operatorname{sen}\varphi)$$

$$E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) \cos\theta (-P_x \operatorname{sen}\varphi + P_y \cos\varphi)$$

$$\text{b) } P_x(u, v) = 0; \quad P_y(u, v) = \int_{x'=-A/2}^{A/2} \int_{y'=-B/2}^{B/2} E_0 \cos\left(k\frac{A}{2} - k|x'|\right) e^{jk(x'u+y'v)} dx' dy'$$

$$\begin{aligned} P_y(u, v) &= \frac{E_0}{jkv} [e^{jky'v}]_{y'=-B/2}^{B/2} \int_{x'=-A/2}^{A/2} \cos\left(k\frac{A}{2} - k|x'|\right) e^{jkx'u} dx' = \\ &= \frac{E_0}{jkv} 2j \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \int_{x'=-A/2}^{A/2} \frac{1}{2} \left(e^{j\left(k\frac{A}{2}-k|x'|\right)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}-k|x'|\right)} \right) e^{jkx'u} dx' = \\ &= \frac{E_0}{kv} \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \left[\int_{x'=-A/2}^0 \left(e^{j\left(k\frac{A}{2}+kx'\right)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}+kx'\right)} \right) e^{jkx'u} dx' + \int_{x'=0}^{A/2} \left(e^{j\left(k\frac{A}{2}-kx'\right)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}-kx'\right)} \right) e^{jkx'u} dx' \right] \end{aligned}$$

$$P_y(u, v) = \frac{E_0}{kv} \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \left[\int_{x'=-A/2}^0 \left(e^{j\left(k\frac{A}{2}+jkx'(u+1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}+jkx'(u-1)} \right)} \right) dx' + \int_{x'=0}^{A/2} \left(e^{j\left(k\frac{A}{2}+jkx'(u-1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}+jkx'(u+1)} \right)} \right) dx' \right]$$

$$\begin{aligned} P_y(u, v) &= \frac{E_0}{kv} \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \int_{x'=0}^{A/2} \left(e^{j\left(k\frac{A}{2}-jkx'(u+1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}-jkx'(u-1)} \right)} + e^{j\left(k\frac{A}{2}+jkx'(u-1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}+jkx'(u+1)} \right)} \right) dx' = \\ &= \frac{E_0}{kv} \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \left[e^{j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{e^{-jkx'(u+1)}}{-jk(u+1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{e^{-jkx'(u-1)}}{-jk(u-1)} + e^{j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{e^{jkx'(u-1)}}{jk(u-1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{e^{jkx'(u+1)}}{jk(u+1)} \right]_{x'=0}^{A/2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{E_0}{kv} \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \left[e^{j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{\left(e^{-j\left(k\frac{A}{2}(u+1)} \right)} - 1 \right)}{-jk(u+1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{\left(e^{-j\left(k\frac{A}{2}(u-1)} \right)} - 1 \right)}{-jk(u-1)} + e^{j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{\left(e^{j\left(k\frac{A}{2}(u-1)} \right)} - 1 \right)}{jk(u-1)} + e^{-j\left(k\frac{A}{2}\right)} \frac{\left(e^{j\left(k\frac{A}{2}(u+1)} \right)} - 1 \right)}{jk(u+1)} \right]$$

$$P_y(u, v) = \frac{E_0}{kv} \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \left[\frac{e^{-j\left(k\frac{A}{2}u\right)} - e^{j\left(k\frac{A}{2}\right)}}{-jk(u+1)} + \frac{e^{-j\left(k\frac{A}{2}u\right)} - e^{-j\left(k\frac{A}{2}\right)}}{-jk(u-1)} + \frac{e^{j\left(k\frac{A}{2}u\right)} - e^{j\left(k\frac{A}{2}\right)}}{jk(u-1)} + \frac{e^{j\left(k\frac{A}{2}u\right)} - e^{-j\left(k\frac{A}{2}\right)}}{jk(u+1)} \right] =$$

$$= \frac{E_0}{kv} \operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) 2j \left[\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}u\right) + \operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}\right)}{jk(u+1)} + \frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}u\right) - \operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}\right)}{jk(u-1)} \right] =$$

$$P_y(u, v) = \frac{2E_0}{k^2} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right)}{v} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}u\right) + \operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}\right)}{(u+1)} + \frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}u\right) - \operatorname{sen}\left(k\frac{A}{2}\right)}{(u-1)} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) (\operatorname{sen}\varphi \hat{\theta} + \cos\theta \cos\varphi \hat{\phi}) P_y(u, v)$$

$$E_{\theta} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jE_0}{\pi k} \right) \frac{\sin\left(\frac{kB}{2} \sin\theta \sin\varphi\right)}{\sin\theta} \left[\frac{\sin\left(k\frac{A}{2} \sin\theta \cos\varphi\right) + \sin\left(k\frac{A}{2}\right)}{(\sin\theta \cos\varphi + 1)} + \frac{\sin\left(k\frac{A}{2} \sin\theta \cos\varphi\right) - \sin\left(k\frac{A}{2}\right)}{(\sin\theta \cos\varphi - 1)} \right]$$

$$E_{\varphi} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jE_0}{\pi k} \right) \frac{\sin\left(\frac{kB}{2} \sin\theta \sin\varphi\right)}{\tan\varphi \tan\theta} \left[\frac{\sin\left(k\frac{A}{2} \sin\theta \cos\varphi\right) + \sin\left(k\frac{A}{2}\right)}{(\sin\theta \cos\varphi + 1)} + \frac{\sin\left(k\frac{A}{2} \sin\theta \cos\varphi\right) - \sin\left(k\frac{A}{2}\right)}{(\sin\theta \cos\varphi - 1)} \right]$$

Ejercicio 3.2

Sea una apertura rectangular situada en el plano XY, de dimensiones AxB ($A \gg \lambda$, $B \gg \lambda$), iluminada con un campo eléctrico en forma de coseno sobre pedestal:

$$\vec{E}_{ap} = E_0 \left[c + (1 - c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right) \right] \hat{y}$$

En función de los parámetros indicados calcule:

- La expresión completa del campo radiado
- La directividad de la apertura
- La eficiencia
- El ancho de haz entre nulos para $c=0$
- Una estimación del nivel de lóbulo secundario en los planos ZX y ZY para $c=0$

Solución:

$$E_{\theta} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) (P_x \cos\varphi + P_y \sin\varphi)$$

$$E_{\varphi} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) \cos\theta (-P_x \sin\varphi + P_y \cos\varphi)$$

$$P_y(u, v) = \int_{x'} \int_{y'} E_{ay}(x', y') e^{jk(x'u + y'v)} dx' dy' \quad P_x(u, v) = 0$$

$$P_y(u, v) = \int_{x'=-A/2}^{A/2} \int_{y'=-B/2}^{B/2} E_0 \left[c + (1 - c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A} x'\right) \right] e^{jk(x'u + y'v)} dx' dy'$$

$$P_y(u, v) = E_0 \int_{y'=-B/2}^{B/2} e^{jky'v} dy' \int_{x'=-A/2}^{A/2} \left[c + (1 - c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A} x'\right) \right] e^{jkx'u} dx'$$

$$\begin{aligned}
P_y(u, v) &= \frac{E_0}{jkv} [e^{jky'v}]_{y'=-B/2}^{B/2} \int_{x'=-A/2}^{A/2} \left[c + (1-c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A}x'\right) \right] e^{j k x' u} dx' = \\
&= \frac{2E_0}{kv} \text{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \int_{x'=-A/2}^{A/2} \left[c e^{j k x'} + \left(\frac{1-c}{2}\right) \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{A}x'} + e^{-j\frac{\pi}{A}x'} \right) e^{j k x' u} \right] dx' = \\
&= \frac{2E_0}{kv} \text{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) \left[\frac{c}{jku} e^{j k x} + \left(\frac{1-c}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{j\left(ku + \frac{\pi}{A}\right)x'}}{j\left(ku + \frac{\pi}{A}\right)} + \frac{e^{j\left(ku - \frac{\pi}{A}\right)x'}}{j\left(ku - \frac{\pi}{A}\right)} \right) \right]_{x'=-A/2}^{A/2} = \\
&= \frac{2E_0}{kv} \text{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right) 2j \left[\frac{c}{jku} \text{sen}\left(k\frac{A}{2}u\right) + \left(\frac{1-c}{2}\right) \cdot \left(\frac{\cos\left(ku\frac{A}{2}\right)}{j\left(ku + \frac{\pi}{A}\right)} - \frac{\cos\left(ku\frac{A}{2}\right)}{j\left(ku - \frac{\pi}{A}\right)} \right) \right] \\
P_y(u, v) &= E_0(AB) \frac{\text{sen}\left(\frac{kB}{2}v\right)}{\left(k\frac{B}{2}v\right)} \left[c \cdot \frac{\text{sen}\left(k\frac{A}{2}u\right)}{\left(k\frac{A}{2}u\right)} + (1-c) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos\left(k\frac{A}{2}u\right)}{\left(\frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{kAu}{2}\right)^2\right)} \right] \\
E_\theta &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) P_y \text{sen}\varphi \\
E_\varphi &= \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) P_y \cos\theta \cos\varphi
\end{aligned}$$

b) Directividad:

$$\begin{aligned}
P_{rad} &= \int_{x'} \int_{y'} \frac{1}{2\eta} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy' = \int_{x'} \int_{y'} \frac{1}{2\eta} E_0^2 \left[c + (1-c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A}x'\right) \right]^2 dx' dy' = \\
&= \frac{E_0^2 B}{2\eta} \int_{x'=-A/2}^{A/2} \left[c^2 + \frac{(1-c)^2}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{A}x'\right) \right) + 2c \cdot (1-c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A}x'\right) \right] dx' = \\
&= \frac{E_0^2 B}{2\eta} \left[\left(c^2 + \frac{(1-c)^2}{2} \right) x' + \frac{(1-c)^2}{2} \frac{A}{2\pi} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{A}x'\right) + 2c \cdot (1-c) \frac{A}{\pi} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{A}x'\right) \right]_{-A/2}^{A/2} = \\
&= \frac{E_0^2 B}{2\eta} \left[\left(c^2 + \frac{(1-c)^2}{2} \right) A + 2c \cdot (1-c) \frac{A}{\pi} 2 \right] = \frac{E_0^2 AB}{2\eta} \left[\frac{3c^2}{2} - c + \frac{1}{2} + \left(\frac{4c - 4c^2}{\pi} \right) \right] \\
P_{rad} &= \frac{E_0^2 AB}{2\eta} \left[c^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + c \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right] \\
P_y(u=0, v=0) &= E_0(AB) \left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right] \\
E_\theta(\theta=0^\circ, \varphi=0) &= 0 \\
E_\varphi(\theta=0^\circ, \varphi=0^\circ) &= \left(\frac{e^{-jk}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) P_y(0,0) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) E_0(AB) \left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right] \\
D_0 = D(\theta=0^\circ, \varphi=0^\circ) &= \frac{\frac{1}{2\eta} |E(0,0)|^2}{\frac{P_{rad}}{4\pi r^2}} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2} E_0^2(AB)^2 \left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right]^2}{\frac{E_0^2 AB}{2\eta} \left[c^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + c \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right]}
\end{aligned}$$

$$D_0 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{B}{\lambda} \left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right]^2}{\left[c^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + c \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right]}$$

c) Eficiencia:

$$D_0 \triangleq \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ef} \triangleq \varepsilon_A \frac{4\pi}{\lambda^2} S_A$$

$$\varepsilon_A = \frac{\lambda^2 D_0}{4\pi S_A} = \frac{\lambda^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\pi} AB \left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right]^2}{4\pi AB \left[c^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + c \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right]} \quad \varepsilon_A = \frac{\left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right]^2}{\left[c^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + c \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right]}$$

d, e) Para el ancho de haz entre nulos y el nivel de lóbulo secundario habrá que obtener la expresión del campo en los planos principales:

$$\text{-Plano } \varphi = 0^\circ \Rightarrow v=0 \Rightarrow P_y(u, 0) = E_0(AB) \left[c \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{k^A u}{2}\right)}{\left(\frac{k^A u}{2}\right)} + (1-c) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{k^A u}{2}\right)}{\left(\frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{k^A u}{2}\right)^2\right)} \right]$$

$$E_\theta (\varphi = 0^\circ) = 0$$

$$E_\varphi (\varphi = 0^\circ) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) \cdot \cos\theta \cdot E_0 \cdot (AB) \cdot \left[c \cdot \frac{\text{sen}\left(k \frac{A}{2} \text{sen}\theta\right)}{\left(k \frac{A}{2} \text{sen}\theta\right)} + (1-c) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos\left(k \frac{A}{2} \text{sen}\theta\right)}{\left(\frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{kA \text{sen}\theta}{2}\right)^2\right)} \right]$$

$$\text{-Plano } \varphi = 90^\circ \Rightarrow u=0 \Rightarrow P_y(0, v) = E_0 \cdot (AB) \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{k^B v}{2}\right)}{\left(\frac{k^B v}{2}\right)} \left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right]$$

$$E_\varphi (\varphi = 90^\circ) = 0; \quad E_\theta (\varphi = 90^\circ) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) E_0 \cdot (AB) \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{k^B}{2} \text{sen}\theta\right)}{\left(k \frac{B}{2} \text{sen}\theta\right)} \left[c + \left(\frac{1-c}{\pi/2} \right) \right]$$

3.2. Eficiencia de apertura

Ejercicio 3.3

Cuál es el valor más próximo a la eficiencia de iluminación de una guía WR-430 (banda S, 2 GHz) abierta.

- a) 50 % b) 62 % c) 81 % d) 72 %

Solución:

El modelo del campo eléctrico en la apertura de una guía rectangular abierta con dimensiones internas A, B (a lo largo de los ejes X e Y respectivamente), es el del modo TE_{10} :

$$\vec{E}_{ap} = E_0 \left[c + (1-c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right) \right] \hat{y} \quad \text{con } c=0.$$

Por tanto,
$$\varepsilon_A = \frac{\left[\frac{1}{\pi/2}\right]^2}{\left[\frac{1}{2}\right]} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0,81$$

Ejercicio 3.4

Calcule la eficiencia de iluminación de una guía WR-90 (banda de 10 GHz) abierta.

- a) 50 % b) 62 % c) 81 % d) 72 %

Solución:

El modelo del campo eléctrico en la apertura de una guía rectangular abierta con dimensiones internas AxB (a lo largo de los ejes X e Y respectivamente), es el del modo TE_{10} :

$$\vec{E}_{ap} = E_0 \left[c + (1 - c) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{A}x\right) \right] \hat{y} \quad \text{con } c=0.$$

Por tanto,
$$\varepsilon_A = \frac{\left[\frac{1}{\pi/2}\right]^2}{\left[\frac{1}{2}\right]} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0,81$$

Ejercicio 3.5

Calcule la eficiencia de iluminación de una antena piramidal (dimensiones AxB en la apertura) cuya distribución de campo en la apertura se puede modelar como una variación triangular (y dirección del campo en la apertura como la del TE_{10}).

- a) 31% b) 81% c) 75% d) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$\vec{E}_{ap} = E_0 \left(\frac{A}{2} - |x| \right) \hat{y} = E_0 \begin{cases} \left(x + \frac{A}{2} \right) \hat{y} & x \in \left[-\frac{A}{2}; 0 \right] \\ \left(\frac{A}{2} - x \right) \hat{y} & x \in \left[0; \frac{A}{2} \right] \end{cases}$$

$$D_0 \stackrel{\Delta}{=} \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ef} \stackrel{\Delta}{=} \varepsilon_A \frac{4\pi}{\lambda^2} S_A \Rightarrow \varepsilon_A = \frac{\lambda^2 D_0}{4\pi S_A}$$

$$D_0 = D(\theta = 0, \varphi = 0) = \frac{\frac{1}{2\eta} |E(0,0)|^2}{\frac{P_{rad}}{4\pi r^2}}$$

$$E_\theta(0,0) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) (P_x) \quad ; \quad E_\varphi(0,0) = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) (P_y)$$

$$P_{x,y}(0,0) = \int_{x'} \int_{y'} E_{ax,y}(x',y') \, dx' dy'$$

$$P_{rad} = \int_{x'} \int_{y'} \frac{1}{2\eta} \left[|E_{ax}(x',y')|^2 + |E_{ay}(x',y')|^2 \right] dx' dy'$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= \frac{\lambda^2}{4\pi S_A} \frac{1}{2\eta} |E(0,0)|^2 = \frac{\lambda^2}{S_A} \frac{r^2}{2\eta} \frac{1}{2\eta} |E(0,0)|^2 \\ &= \frac{\lambda^2 r^2}{S_A} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{1}{2\eta} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy' \\ &= \frac{\lambda^2 r^2}{S_A} \frac{1}{r^2} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \left[(P_x(0,0))^2 + (P_y(0,0))^2 \right] \varepsilon_A \\ &= \frac{1}{S_A} \frac{\left[\left(\int_{x'} \int_{y'} E_{ax}(x', y') dx' dy' \right)^2 + \left(\int_{x'} \int_{y'} E_{ay}(x', y') dx' dy' \right)^2 \right]}{\int_{x'} \int_{y'} \left[|E_{ax}(x', y')|^2 + |E_{ay}(x', y')|^2 \right] dx' dy'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= \frac{1}{S_A} \frac{\left(\int_{x'} \int_{y'} E_{ay}(x', y') dx' dy' \right)^2}{\int_{x'} \int_{y'} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy'} \\ &= \int_{x'=-A/2}^{A/2} \int_{y'=-B/2}^{B/2} E_0 \left(\frac{A}{2} - |x'| \right) dx' dy' = E_0 B \int_{x'=-A/2}^{A/2} \left(\frac{A}{2} - |x'| \right) dx' = \\ &= E_0 B \left[\int_{x'=-A/2}^0 \left(\frac{A}{2} + x' \right) dx' + \int_{x'=0}^{A/2} \left(\frac{A}{2} - x' \right) dx' \right] = \\ &= 2E_0 B \int_{x'=0}^{A/2} \left(\frac{A}{2} - x' \right) dx' = 2E_0 B \left[\frac{A}{2} x' - \frac{x'^2}{2} \right]_{x'=0}^{A/2} = 2E_0 B \left(\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{8} \right) = \frac{E_0 B A^2}{4} \\ &\int_{x'} \int_{y'} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy' = \int_{x'=-A/2}^{A/2} \int_{y'=-B/2}^{B/2} E_0^2 \left(\frac{A}{2} - |x'| \right)^2 dx' dy' = \\ &= E_0^2 B \int_{x'=-A/2}^{A/2} \left(\frac{A}{2} - |x'| \right)^2 dx' = 2E_0^2 B \int_{x'=0}^{A/2} \left(\frac{A}{2} - x' \right)^2 dx' = \\ &= 2E_0^2 B \int_{x'=0}^{A/2} \left(\frac{A^2}{4} + x'^2 - Ax' \right) dx' = 2E_0^2 B \left[\frac{A^2}{4} x' + \frac{x'^3}{3} - \frac{Ax'^2}{2} \right]_{x'=0}^{A/2} = \\ &= 2E_0^2 B \left(\frac{A^3}{8} + \frac{A^3}{24} - \frac{A^3}{8} \right) = \frac{E_0^2 B A^3}{12} \\ \varepsilon_A &= \frac{1}{S_A} \frac{\left(\int_{x'} \int_{y'} E_{ay}(x', y') dx' dy' \right)^2}{\int_{x'} \int_{y'} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy'} = \frac{1}{AB} \frac{\left(\frac{E_0 B A^2}{4} \right)^2}{\frac{E_0^2 B A^3}{12}} = \frac{3}{4} = 0,75\end{aligned}$$

Ejercicio 3.6

Calcule la eficiencia de iluminación de una antena de apertura con distribución de campo en la apertura rectangular de tipo: $\vec{E}_{ap} = E_0 x^2 y^2 \hat{y}$

- a) 31% b) 81% c) 62% d) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_A &= \frac{1}{S_A} \frac{\left(\int_{x'} \int_{y'} E_{ay}(x', y') dx' dy' \right)^2}{\int_{x'} \int_{y'} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy'} \\
&= \frac{1}{S_A} \int_{x'=-A/2}^{A/2} \int_{y'=-B/2}^{B/2} E_0 x'^2 y'^2 dx' dy' = E_0 \int_{x'=-A/2}^{A/2} x'^2 dx' \int_{y'=-B/2}^{B/2} y'^2 dy' = \\
&= E_0 \left[\frac{x'^3}{3} \right]_{x'=-A/2}^{A/2} \left[\frac{y'^3}{3} \right]_{y'=-B/2}^{B/2} = E_0 \frac{2A^3}{24} \frac{2B^3}{24} = \frac{E_0 A^3 B^3}{144} \\
&\int_{x'} \int_{y'} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy' = \int_{x'=-A/2}^{A/2} \int_{y'=-B/2}^{B/2} E_0^2 x'^4 y'^4 dx' dy' = \\
&= E_0^2 \int_{x'=-A/2}^{A/2} x'^4 dx' \int_{y'=-B/2}^{B/2} y'^4 dy' = E_0^2 \left[\frac{x'^5}{5} \right]_{x'=-A/2}^{A/2} \left[\frac{y'^5}{5} \right]_{y'=-B/2}^{B/2} = E_0^2 \frac{2A^5}{160} \frac{2B^5}{160} = \frac{E_0^2 A^5 B^5}{6400} \\
\varepsilon_A &= \frac{1}{S_A} \frac{\left(\int_{x'} \int_{y'} E_{ay}(x', y') dx' dy' \right)^2}{\int_{x'} \int_{y'} |E_{ay}(x', y')|^2 dx' dy'} = \frac{1}{AB} \frac{\left(\frac{E_0 A^3 B^3}{144} \right)^2}{\frac{E_0^2 A^5 B^5}{6400}} = \frac{6400}{(144)^2} = 0,31
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.7

Suponiendo que la distribución de campo normalizada en la apertura de una antena de tipo reflector es del tipo $\vec{E}_a(r) = E_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi r^2}{D^2}\right) \right) \hat{y}$, donde r es una coordenada radial y D el diámetro de la apertura, calcule la eficiencia de iluminación:

Solución:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_A &= \frac{1}{S_A} \frac{\left(\int_{\rho'} \int_{\varphi'} E_{ay}(\rho', \varphi') \rho' d\rho' d\varphi' \right)^2}{\int_{\rho'} \int_{\varphi'} |E_{ay}(\rho', \varphi')|^2 \rho' d\rho' d\varphi'} \\
&= \frac{1}{S_A} \int_{\rho'=0}^{D/2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} E_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi\rho'^2}{D^2}\right) \right) \rho' d\rho' d\varphi' = \\
&= 2\pi E_0 \left[\frac{\rho'^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{D^2}{4\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\rho'^2}{D^2}\right) \right]_{\rho'=0}^{D/2} = 2\pi E_0 \left[\frac{D^2}{8} + \frac{D^2}{8\pi} \right] = E_0 D^2 \frac{(\pi + 1)}{4} \\
&\int_{\rho'=0}^{D/2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} E_0^2 \left(1 + \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{2\pi\rho'^2}{D^2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\rho'^2}{D^2}\right) \right) \rho' d\rho' d\varphi' = \\
&= \int_{\rho'=0}^{D/2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} E_0^2 \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{4\pi\rho'^2}{D^2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\rho'^2}{D^2}\right) \right) \rho' d\rho' d\varphi' \\
&= 2\pi E_0^2 \left[\frac{9\rho'^2}{16} + \frac{1}{8} \frac{D^2}{8\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi\rho'^2}{D^2}\right) + \frac{D^2}{4\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\rho'^2}{D^2}\right) \right]_{\rho'=0}^{D/2} = \\
&= 2\pi E_0^2 \left[\frac{9D^2}{64} + \frac{D^2}{4\pi} \right] = E_0^2 D^2 \frac{(9\pi + 16)}{32}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_A = \frac{1}{\pi} \frac{E_0^2 D^2 \frac{(\pi+1)^2}{16}}{D^2 E_0^2 D^2 \frac{(9\pi+16)}{32}} = \frac{8(\pi+1)^2}{\pi(9\pi+16)} = 0,987$$

Ejercicio 3.8

En una estación terrena se modifica el transmisor para que duplique el campo eléctrico que llega al satélite. ¿En qué orden de magnitud se podría reducir el diámetro (K·D) de la antena parabólica receptora del satélite sin degradar la relación señal a ruido? (D: Diámetro de la parábola)

- a) K = 0,25 b) K = 0,5 c) K = 0,707 d) K = 1

Solución:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{S_i}{N_i} = \frac{\langle S_{incid} \rangle A_e}{N_i} \approx \frac{\frac{1}{2\eta} |E|^2 e_{f_{itum}} \left(\pi \frac{D^2}{4}\right)}{N_i}$$

Si $E' = 2E \Rightarrow S'_i = 4S_i \Rightarrow$ para mantener la misma relación señal a ruido se podrá reducir el diámetro: $D' = \frac{D}{2} \Rightarrow K = 0,5$

Ejercicio 3.9

En un array plano de 10x30 ranuras situadas en el plano XY con idéntico espaciado en X e Y de valor $0,6\lambda$. Estime su ganancia si la alimentación es uniforme en amplitud y fase. (Puede considerar este array como una apertura muestreada y que tiene una eficiencia global próxima a la unidad).

- a) 31 dB b) 36 dB c) 26 dB d) 17 dB

Solución:

Considerando que se tendrá una antena con una apertura de aproximadamente:

$$\text{Area} \approx 6\lambda \times 18\lambda = 108 \lambda^2$$

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{e_{\max}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot e_{f_T} \cdot \text{Area} \approx \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot 108 \lambda^2 \approx 31 \text{ dB}$$

3.3. Bocinas

Ejercicio 3.10

De una antena de bocina, alimentada por una guía rectangular con dimensión $a = 2,5 \text{ cm}$, ¿en qué banda de frecuencias diría que está trabajando?

- a) Banda L b) Banda C c) Banda X d) Banda Ku

Solución:

$$a = 2,5 \text{ cm} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \approx 2,5 \text{ cm} \Rightarrow f = 6 \text{ GHz} \Rightarrow \text{ banda C}$$

Ejercicio 3.11

En cuanto a las antenas de bocina sectoriales plano-E y plano-H:

- Bocina plano-E implica polarización vertical y plano-H implica polarización horizontal.
- Ambas tienen igual polarización.
- Cada una es para un tipo de guía diferente.
- Ambas tienen la misma ganancia para la misma apertura.

Solución:

Ambas tienen igual polarización.

La a) es falsa ya que la polarización depende de la guía alimentadora que se supone la misma. La denominación E y H se refiere al plano en que se abocina. La c) es falsa porque pueden alimentarse con la misma guía. La d) no tiene por qué ser verdad puesto que la ganancia no solo depende del tamaño de apertura sino de la distribución de amplitud y fase sobre ella, y los errores de fase son diferentes en cada una de las bocinas mencionadas.

Ejercicio 3.12

Una antena tipo bocina piramidal "óptima" implica que:

- El área efectiva es igual que la superficie de la apertura.
- La antena de bocina mejor adaptada.
- La bocina con mínimo error de fase.
- Un compromiso entre máxima ganancia y mínimas dimensiones.

Solución:

Un compromiso entre máxima ganancia y mínimas dimensiones.

La a) implicaría que la eficiencia de iluminación es la unidad lo cual no puede conseguirse con una bocina alimentada con guía rectangular. La b) es falsa porque el término "óptimo" se aplica a directividad y no a adaptación. La c) es falsa porque el tener mínimo error de fase puede implicar unas grandes dimensiones que implica que no es óptima en el compromiso máxima ganancia-mínima longitud.

Ejercicio 3.13

Sea una bocina piramidal de $A=B$ que cumple la condición de "realizabilidad":

- Las profundidades en ambos planos son iguales ($R_1 = R_2$).
- La bocina es óptima (máxima ganancia).

- c) Los errores de fase en ambos planos son iguales.
- d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La condición de "realizabilidad" implica que $R_1 \left(1 - \frac{a}{A}\right) = R_2 \left(1 - \frac{b}{B}\right)$. Con $A=B$, se tiene:

$$R_1 \left(1 - \frac{a}{A}\right) = R_2 \left(1 - \frac{b}{A}\right)$$

-La condición $R_1 = R_2$ sólo cuando $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$

-Para que sea bocina óptima se exige que $\frac{B^2}{8\lambda R_2} = \frac{1}{4}$ y que $\frac{A^2}{8\lambda R_1} = \frac{3}{8}$

-Para que los errores de fase (máximos) en ambos planos sean iguales se tiene que verificar:

$$\frac{B^2}{8\lambda R_2} = \frac{A^2}{8\lambda R_1}$$

Por tanto, la condición de "realizabilidad" junto con $A=B$ no impone automáticamente ninguna de las condiciones anteriores.

Ejercicio 3.14

En una bocina sectorial plano H de dimensiones A x B (siendo A la dimensión de la apertura en el plano H) se desea disminuir el ancho de haz en el plano E. ¿Qué opción elegiría?

- a) Disminuir la profundidad de la bocina.
- b) Aumentar A.
- c) Introducir corrugaciones
- d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

- Disminuir la profundidad de la bocina aumentaría el error de fase y no se produciría disminución del ancho de haz en el plano E.

- Aumentar A, podría modificar el ancho de haz en el plano H.

- La introducción de corrugaciones se hace en las paredes perpendiculares al campo E, generando un patrón de campo en la apertura con caída hacia los extremos (tipo coseno), lo cual no haría disminuir en ancho de haz en dicho plano E.

Ejercicio 3.15

Diga cuál de estas afirmaciones es falsa para una bocina piramidal óptima de boca cuadrada:

- a) El nivel de lóbulos secundarios es menor en el plano H.
- b) La anchura de lóbulo principal es mayor en el plano H que en el plano E.
- c) La eficiencia de apertura es 0,5.
- d) El nivel del primer lóbulo secundario es más alto en el plano diagonal.

Solución:

Con $A=B$, las tres primeras opciones son verdaderas o pueden darse. El nivel del primer lóbulo secundario es más alto en el plano E donde se considera una distribución de campo en la apertura con variación uniforme en esa dimensión.

Ejercicio 3.16

Estime la ganancia de una bocina piramidal con errores de fase en ambos planos $t=3/8$ y $s=1/4$ y con dimensiones $A=3\lambda$, $B=1\lambda$.

- a) 12,8 dBi b) 15 dBi c) 18,2 dBi d) Ninguna de las anteriores

Solución:

Los errores de fase corresponden a una bocina piramidal "óptima" en la que su eficiencia total es aproximadamente 0,5. Por tanto:

$$A_e = e f_T \cdot Area \approx \frac{A \cdot B}{2}$$

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_e \approx \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{A \cdot B}{2} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{3\lambda \cdot \lambda}{2} = 6\pi = 12,8 \text{ dB}$$

Ejercicio 3.17

Para caracterizar el campo lejano en los planos principales de una bocina piramidal corrugada se necesitaría:

- a) El diagrama universal plano E de la bocina sectorial plano H y el diagrama universal plano E de la bocina sectorial plano E.
 b) El diagrama universal plano H de la bocina sectorial plano H.
 c) El diagrama universal plano H de la bocina sectorial plano H y el diagrama universal plano E de la bocina sectorial plano H.
 d) El diagrama universal plano H de la bocina sectorial plano H y el diagrama universal plano E de la bocina sectorial plano E.

Solución:

Al ser la distribución de campo en la apertura en el eje y (intersección del plano E con la apertura) del mismo tipo que la distribución a lo largo del eje x (intersección del plano H con la apertura)

$E_{ay} = E_o \cos\left(\frac{\pi x}{A}\right) e^{-j(\beta/2R_1)x^2}$, se necesitará únicamente el diagrama universal plano H de la bocina sectorial plano H.

Ejercicio 3.18

Obtenga el nivel de radiación en el plano H para $\theta = 15^\circ$ (eje Z perpendicular a la apertura de la bocina) de una bocina rectangular de ancho $A = 12 \text{ cm}$ y longitud $R_1 = 24 \text{ cm}$, trabajando a la frecuencia de 10 GHz.

Solución:

$$\vec{E}_a|_{eje\ x} = E_o \cos\left(\frac{\pi x}{A}\right) e^{-j(\beta/2R_1)x^2} \hat{y} \Rightarrow \text{Diagrama universal: } P = P_y$$

$$\text{Máximo error de fase en el plano H: } t = \frac{A^2}{8\lambda R_1} = \frac{144}{8 \cdot 3 \cdot 24} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Abscisa del diagrama universal: } \frac{A}{\lambda} \text{sen}\theta \Big|_{\theta=15^\circ} = 1,035 \Rightarrow$$

Ordenada del diagrama universal (P_y): - 8 dB

$$E_\theta = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) (P_x \cos\varphi + P_y \text{sen}\varphi) \quad E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) \cos\theta (-P_x \text{sen}\varphi + P_y \cos\varphi)$$

El campo radiado en el plano H sólo tiene componente E_φ

En el plano H $\Rightarrow \varphi = 0$

$$E = E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) (\cos\theta) P_y$$

$$\text{Factor de oblicuidad: } 20 \log_{10}(\cos(15^\circ)) = -0,3 \text{ dB}$$

Por tanto:

$$\frac{E(15^\circ)}{E_{\max}} = \frac{E_{diag.univ.}(15^\circ) \cdot \cos(15^\circ)}{E_{diag.univ.,\max} \cdot \cos(0^\circ)} \Rightarrow -8 \text{ dB} - 0,3 \text{ dB} = -8,3 \text{ dB} \text{ (respecto del máximo)}$$

Ejercicio 3.19

Estime la ganancia y la eficiencia de apertura de una bocina sectorial plano E óptima, de 2,3 cm x 19 cm de apertura, a 10 GHz.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} BSPE \text{ ópt} \Rightarrow s_{opt} = \frac{B^2}{8\lambda R_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_2 = \frac{B^2}{2\lambda} = 60,2 \text{ cm} \\ \frac{B}{\lambda} = 6,3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{R_2}{\lambda} = 20,1 \Rightarrow (\text{gráfica}) \Rightarrow \frac{\lambda D_E}{a} = 51$$

$$\text{Como } A=a \Rightarrow G_o \simeq D_o = D_E = 39,1 (\approx 16 \text{ dB}) \quad A_{ef} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_o = 28 \text{ cm}^2 \quad \varepsilon_A = \frac{A_{ef}}{S_A} = 0,64$$

También podría haberse estimado la directividad previo cálculo de los anchos de haz en cada plano:

$$\text{- Plano H: } \varphi = 0 \Rightarrow E = E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) (\cos\theta) P_y$$

En una primera aproximación se puede suponer $\cos\theta \approx 1 \Rightarrow$

$$-3 = \left[\frac{E(\theta_{-3dB})}{E_{\max}} \right]_{dB} = \left[\frac{E_{diag.univ.}(\theta_{-3dB}) \cdot \cos(\theta_{-3dB})}{E_{diag.univ.,\max} \cdot \cos(0^\circ)} \right]_{dB} \simeq \left[\frac{E_{diag.univ.}(\theta_{-3dB})}{E_{diag.univ.,\max} \cdot \cos(0^\circ)} \right]_{dB} \Rightarrow$$

$$\text{Diag. univ. (plano H de la BSPE)} \Rightarrow \text{abscisa: } \frac{a}{\lambda} \text{sen}\theta_{-3dB} = 0,7 \Rightarrow \theta_{-3dB} \simeq 66^\circ \Rightarrow BW_{H,-3dB} \simeq 132^\circ$$

En realidad, la aproximación $\cos\theta \approx 1$ no es acertada y habría que iterar con el valor estimado de $\theta_{-3dB} \approx 66^\circ$, otra vez en el diagrama universal y sacar una mejor estimación del ancho de haz.

$$\text{- Plano E: } \varphi = 90^\circ \Rightarrow E_\theta = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) P_y$$

$$-3 = \left[\frac{E(\theta_{-3dB})}{E_{\max}}\right]_{dB} = \left[\frac{E_{diag.univ.(\theta_{-3dB})}}{E_{diag.univ.,\max}}\right]_{dB} \Rightarrow$$

Diag. univ. (plano E de la BSPE) \Rightarrow abscisa: $\frac{B}{\lambda} \sin\theta_{-3dB} = 0,5 \Rightarrow \theta_{-3dB} \approx 4,5^\circ \Rightarrow BW_{E,-3dB} \approx 9^\circ$

$$G_o \approx D_o = \frac{4\pi}{BW_{H,-3dB}(rad) \cdot BW_{E,-3dB}(rad)} = \frac{41253}{132 \cdot 9} = 34,7 (\approx 15,4 \text{ dB})$$

$$A_{ef} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_o = 24,9 \text{ cm}^2 \quad \varepsilon_A = \frac{A_{ef}}{S_A} = 0,57$$

Ejercicio 3.20

Estime las dimensiones correspondientes a una bocina piramidal óptima de banda L (frecuencia=1,5 GHz) de 20 dBi de ganancia. Comente si para estas características podría ser más conveniente el empleo de otro tipo de antenas.

Solución:

$$G=20\text{dBi} \Rightarrow G=100, \text{ óptima} \Rightarrow G \approx 0,5 \cdot \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S = 0,5 \cdot \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot (A \cdot B)$$

$$\lambda=20 \text{ cm} \quad A \cdot B = \frac{2 \cdot 100 \cdot (20)^2}{4\pi} = 6366,2 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{Se podría considerar inicialmente: } A \approx B \approx 80 \text{ cm}$$

$$\text{Boc piram óptima} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{B^2}{8\lambda R_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_2 = \frac{B^2}{2\lambda} = 159 \text{ cm} \\ t = \frac{A^2}{8\lambda R_1} = \frac{3}{8} \Rightarrow R_1 = \frac{A^2}{3\lambda} = 106 \text{ cm} \end{cases}$$

De una manera más precisa se podrá estimar a partir de todas las ecuaciones que deben cumplirse:

Condición de "realizabilidad":	$R_1 \left(1 - \frac{a}{A}\right) = R_2 \left(1 - \frac{b}{B}\right)$
Errores de fase de la bocina óptima:	$\frac{B^2}{8\lambda R_2} = \frac{1}{4} \quad \frac{A^2}{8\lambda R_1} = \frac{3}{8}$
Condición de ganancia:	$A \cdot B = \frac{2G\lambda^2}{4\pi} = 6366,2 \text{ cm}^2 = S$
Las dimensiones de la guía: banda L \Rightarrow WR650	$a = \frac{650}{100} \cdot 2,54 = 16,51 \text{ cm} \quad b = \frac{a}{2} = 8,255 \text{ cm}$

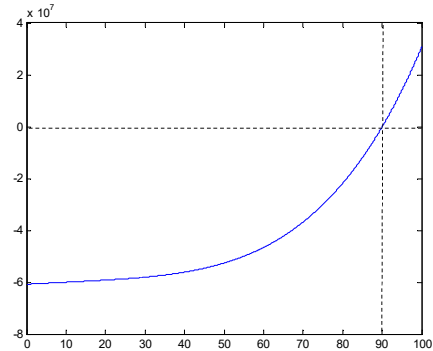
Combinando las ecuaciones se llega a la ecuación en la variable A (dimensión de la apertura en el plano H):

$$A^4 - a A^3 + \left(\frac{3}{2} b S\right) A - \left(\frac{3}{2} S^2\right) = 0$$

La función $f(A) = A^4 - a A^3 + \left(\frac{3}{2} b S\right) A - \left(\frac{3}{2} S^2\right)$

se representa en la figura, observándose que pasa por cero para un valor aproximado de:

$$A=90 \text{ cm} \Rightarrow B = S/A = 70,8 \text{ cm}$$



Una antena de tipo reflector, con una apertura de igual superficie, sería una opción a considerar como alternativa a la bocina piramidal por su menor profundidad y mayor sencillez de construcción.

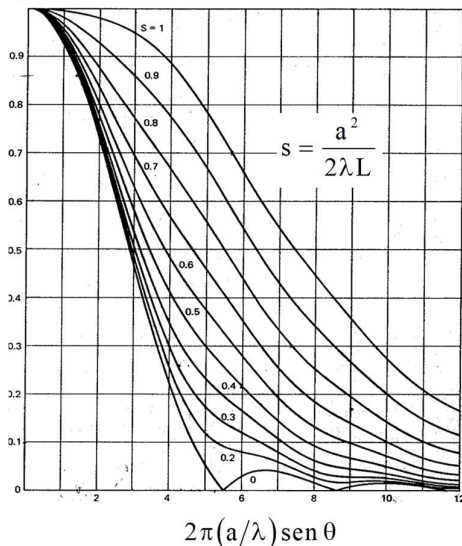
Ejercicio 3.21

¿Qué radio (cm) de una bocina cónica corrugada de bajo error de fase elegiría para iluminar una antena reflectora parabólica ($F/D = 2$) a 15 GHz?

(Notas: a) semiángulo subtendido del reflector $\theta_0 = 14,3^\circ$. b) Suponga la iluminación óptima cuando la diferencia de iluminación del campo de la bocina entre el centro y el borde del reflector es de -10 dB.)

- a) 2,5 cm b) 3,5 cm c) 6 cm d) 4,5 cm

Solución:



$$E_\theta = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) (P_y \text{sen} \varphi)$$

$$E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) \cos \theta (P_y \cos \varphi)$$

Tomando, por ejemplo, un corte $\varphi = 90^\circ$:

$$\frac{E_{\text{reflector}}(\theta_0)}{E_{\text{reflector,centro}}} = -10 \text{ dB} \Rightarrow \frac{E_{\text{bocina}}(\theta_0)}{E_{\text{bocina,max}}} = 0,32$$

Para $s \ll 1$, utilizando la gráfica del diagrama universal correspondiente al campo de la apertura de una bocina cónica corrugada, se obtiene:

$$2\pi (a/\lambda) \text{sen}(14,3^\circ) = 3,5 \Rightarrow$$

$$a = \frac{3,5}{2\pi \cdot \text{sen}(14,3^\circ)} \cdot \frac{30}{15} = 4,5 \text{ cm}$$

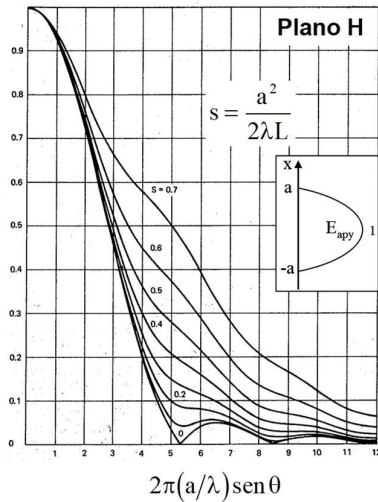
Ejercicio 3.22

Estime el valor que más se aproxima al nivel de iluminación en el plano H en el borde de un reflector parabólico ($F/D = 2$) a 12GHz utilizando una bocina cónica lisa de 10 cm de radio y longitud 40 cm.

(Nota: semiángulo subtendido del reflector $\theta_0 = 14,3^\circ$)

- a) -10 dB b) -8 dB c) -12 dB d) -14 dB

Solución:



$$a=10\text{cm} \Rightarrow 2\pi(a/\lambda)\text{sen}\theta_0 = 2\pi\left(\frac{10}{30/12}\right)\text{sen}(14,3^\circ) = 6,2$$

$$L=40\text{cm} \Rightarrow s = \frac{a^2}{2\lambda L} = \frac{100}{2 \cdot \frac{30}{12} \cdot 40} = 0,5$$

$$\varphi = 0^\circ \Rightarrow E = E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) (\cos\theta) P_y$$

Utilizando la gráfica del diagrama universal plano H correspondiente al campo de la apertura de una bocina cónica lisa, se obtiene:

$$P_y = 0,2 \Rightarrow \frac{E_\varphi(\theta_0)/(\cos\theta_0)}{E_{\varphi,\text{max}}} = 0,2 \Rightarrow$$

$$\frac{E_\varphi(\theta_0)}{E_{\varphi,\text{max}}} = 0,2 \cos(14,3^\circ) = 0,19 = -14,3 \text{ dB}$$

Valor que, despreciando la diferencia de atenuación de propagación foco-centro reflector y foco-borde reflector ($\approx 0,1 \text{ dB}$), correspondería al nivel de iluminación del borde del reflector respecto del centro.

3.4. Reflectores**Ejercicio 3.23**

La geometría parabólica en una antena de tipo reflector permite:

- Un área efectiva que es igual que la superficie de la apertura.
- El uso de teoría de trazado de rayos.
- Una apertura con distribución de fase uniforme.
- Una apertura con distribución uniforme de módulo y fase.

Solución:

La ecuación de la geometría del reflector parabólico $\rho + \rho \cos\theta = 2F = \text{cte}$, permite que, colocando el alimentador en el foco, se genere una distribución de fase uniforme en el plano de la apertura.

Ejercicio 3.24

Estime la relación F/D de un reflector para alimentarlo óptimamente con una bocina cónica corrugada de diagrama de campo normalizado de tipo $\cos^2(\theta/2)$.

- a) 0,28 b) 0,08 c) 0,17 d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

$$\rho + \rho \cos \theta = 2F = \text{cte} \Rightarrow$$

$$r' = \rho \sin \theta = 2F \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 2F \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{D}{2} = 2 \cdot F \cdot \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \Rightarrow \theta_0 = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{4\left(\frac{F}{D}\right)}\right)$$

Nivel de iluminación óptima del reflector (campo en el borde del reflector respecto del campo en el centro) \Rightarrow -10 dB.

$$C(\text{dB}) = 10 \log_{10}\left(\frac{G(\theta_0)}{G_{\max}}\right) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} -10 &= 10 \log_{10}\left(\cos^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) = \log_{10}\left(\cos^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) + \log_{10}\left(\cos^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) = \\ &\log_{10}\left(\cos^8\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \Rightarrow \theta_0 = 82,8^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{F}{D} = \frac{1}{4 \cdot \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{1}{4 \cdot \tan(41,4^\circ)} = 0,28$$

Ejercicio 3.25

Si se dispone de diversos alimentadores (1, 2, ..., n) con diagramas de campo del tipo $\cos^n \theta$, ¿cuál utilizaría en el foco de un reflector parabólico de relación distancia focal/ diámetro F/D = 0,59?

- a) n = 1 b) n = 2 c) n = 3 d) n = 4

Solución:

$$\rho + \rho \cos \theta = 2F = \text{cte} \Rightarrow$$

$$r' = \rho \sin \theta = 2F \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 2F \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{D}{2} = 2 \cdot F \cdot \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \Rightarrow \theta_0 = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{4\left(\frac{F}{D}\right)}\right)$$

$$\theta_0 = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{4 \cdot 0,59}\right) = 45,93^\circ$$

$$C(\text{dB}) = 10 \log_{10}\left(\frac{G(\theta_0)}{G_{\max}}\right) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$\text{Condición de alimentación óptima: } -10 = 10 \log_{10}(\cos^{2n}(\theta_0)) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$-10 - 20 \cdot \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) = n \cdot 20 \cdot \log_{10}(\cos(\theta_0)) \Rightarrow n = \frac{-10 - 2 \cdot \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)}{20 \cdot \log_{10}(\cos(\theta_0))} = 2,72 \Rightarrow n = 3$$

Ejercicio 3.26

Si un alimentador (por ejemplo, una bocina) se sitúa fuera del foco de un reflector parabólico óptico, el efecto es:

- Se pierde la simetría de la iluminación en la apertura.
- Empeora la eficiencia de “spillover”.
- Disminuye la ganancia.
- Aumentan las pérdidas de bloqueo.

Solución:

La simetría depende de a dónde se lleve el alimentador (por ejemplo, la simetría se mantendría si el alimentador se coloca en otra posición del eje que une el foco con el centro del reflector).

La eficiencia de “spillover” dependerá de donde se coloque (más próximo o más alejado del reflector). La eficiencia de bloqueo típicamente se mantendrá o se mejorará si el alimentador no hace sombra sobre el reflector.

La eficiencia de iluminación es la contribución fundamental a la eficiencia total. Al sacar el alimentador del foco, se disminuye la eficiencia de iluminación (deja de ser una distribución uniforme en fase), con lo que la eficiencia total disminuye y por tanto la ganancia disminuye.

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S \cdot ef_{ilum} \cdot ef_{otros}$$

Ejercicio 3.27

Un radiotelescopio de ondas milimétricas tipo Cassegrain tiene un reflector principal de 30 m de diámetro con una precisión superficial $\delta=75 \mu\text{m}$ y un subreflector de 2,4 m de diámetro. Estime su ganancia y eficiencia a 300 GHz, suponiendo una eficiencia combinada de iluminación y “spillover” del 75 %.

Solución:

$$ef_{ilum} \cdot ef_{spillover} = 0,75$$

$$ef_{bloqueo} = \left(1 - 2 \left(\frac{d_s}{D}\right)^2\right)^2 = \left(1 - 2 \left(\frac{2,4}{30}\right)^2\right)^2 = 0,975$$

$$ef_{\delta} = e^{-(4\delta\pi/\lambda)^2} = e^{-(4 \cdot (75 \cdot 10^{-6}) \cdot \pi / 10^{-3})^2} = 0,41$$

$$ef_{total} = ef_{rad} \cdot (ef_{ilum} \cdot ef_{spillover}) \cdot ef_{bloqueo} \cdot ef_{\delta} = 1 \cdot 0,75 \cdot 0,975 \cdot 0,41 \approx 0,3$$

Donde se ha supuesto una eficiencia de radiación del 100%.

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S \cdot ef_{tot} \approx \frac{4\pi}{(10^{-3})^2} \cdot (\pi \cdot 15^2) \cdot 0,3 = 2664,793 \cdot 10^6 = 94,3 \text{ dB}$$

Una estimación del ancho de haz, aproximando la directividad por anchos de haz, sería:

$$BW_{-3dB} \approx \sqrt{\frac{4\pi}{D_o}} \approx \sqrt{\frac{4\pi}{2664,793 \cdot 10^6}} = 6,87 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 0,25''$$

Ejercicio 3.28

Dado un sistema Cassegrain centrado con relación $F/D=0,6$ y factor de magnificación $M=2,5$, calcule el índice entero q del modelo del alimentador con diagrama de campo de tipo $\cos^{2q}(\theta)$, para que la antena reflectora sea óptima.

- a) $q = 8$ b) $q = 14$ c) $q = 2$ d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$F_e = M \cdot F = 2,5 \cdot F \quad \Rightarrow \quad F_e/D = 2,5 \cdot F/D = 2,5 \cdot 0,6 = 1,5$$

Reflector parabólico simple equivalente: $\rho + \rho \cos \theta = 2F_e = cte \Rightarrow$

$$\begin{aligned} r' = \rho \sin \theta &= 2F_e \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 2F_e \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{D}{2} = 2 \cdot F_e \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \theta_0 = 2 \cdot \text{atan}\left(\frac{1}{4(F_e/D)}\right) \\ &= 2 \cdot \text{atan}\left(\frac{1}{4 \cdot 1,5}\right) = 18,9^\circ \end{aligned}$$

$$C(dB) = 10 \log_{10}\left(\frac{G(\theta_0)}{G_{\max}}\right) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\text{Condición de iluminación óptima: } -10 = 10 \log_{10}(\cos^{4q}(\theta_0)) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$\cos^{4q}(\theta_0) \cdot \cos^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = 0,1 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{4} \cdot \frac{\log_{10}\left(\frac{0,1}{\cos^4\left(\frac{18,9^\circ}{2}\right)}\right)}{\log_{10}(\cos(18,9^\circ))} = 10,14$$

$$\text{Con } q = 10 \Rightarrow C(dB) = 10 \log_{10}(\cos^{4q}(\theta_0)) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \approx -9,87 \text{ dB}$$

$$\text{Con } q = 11 \Rightarrow C(dB) = 10 \log_{10}(\cos^{4q}(\theta_0)) + 20 \log_{10}\left(\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \approx -10,83 \text{ dB}$$

$$q = 11$$

Ejercicio 3.29

Una antena Cassegrain centrada posee un reflector principal de 60λ , una distancia focal de 20λ y un subreflector con un factor de magnificación de 3. Utilizando el concepto de paraboloide equivalente diseñe tanto una bocina cónica corrugada como una bocina piramidal corrugada (dimensiones de apertura, profundidad, tamaño de las corrugaciones) ambas de 0,2 vueltas de error de fase para obtener la máxima ganancia del reflector.

Solución:

$$F_e = M \cdot F = 3 \cdot F = 3 \cdot 20 \lambda = 60 \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{F_e}{D} = \frac{60 \lambda}{60 \lambda} = 1$$

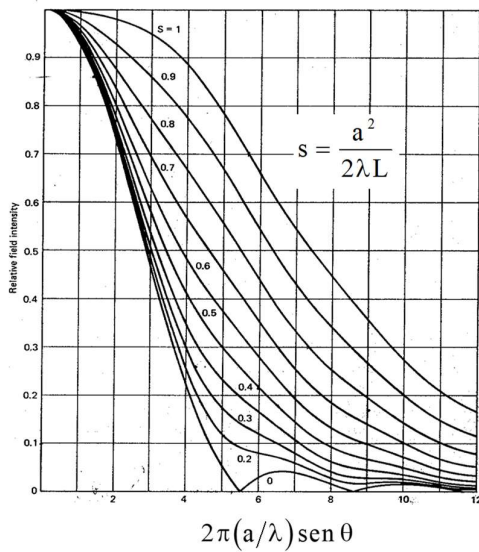
Reflector parabólico simple equivalente: $\rho + \rho \cos\theta = 2F_e = cte \Rightarrow$

$$r' = \rho \sin\theta = 2F_e \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = 2F_e \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{D}{2} = 2 \cdot F_e \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \theta_0 = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{4(F_e/D)}\right)$$

$$= 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 28,1^\circ$$

Se calculan los parámetros geométricos de las bocinas alimentadores considerando iluminación óptima que garantice máxima directividad y, por tanto, máxima ganancia del reflector.

- Bocina cónica corrugada:



Al ser corrugada el campo en la apertura tendrá dirección \hat{y} . Por otro lado, en ambos planos el diagrama universal es único (figura adjunta).

Para el plano E, $\varphi = 90^\circ$, se tendrá:

$$E = E_\theta = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) P_y$$

$$C(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left(\frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

$$-10 = 20 \log_{10} \left(\frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

$$-10 = \left. \frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right|_{\text{dB}} + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

$$\left. \frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right|_{\text{dB}} = -10 - 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{28,1^\circ}{2} \right) \right) = -9,47 \text{ dB}$$

En unidades naturales sería $\frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} = 0,34$

Para $s = 0,2$, utilizando la gráfica del diagrama universal correspondiente al campo de la apertura de una bocina cónica corrugada, se obtiene:

$$2\pi(a/\lambda) \text{sen}(28,1^\circ) = 3,6 \Rightarrow a = \frac{3,6}{2\pi \cdot \text{sen}(28,1^\circ)} \cdot \lambda = 1,22 \lambda \quad (\text{a: radio de la apertura circular}).$$

$$s = \frac{a^2}{2\lambda} = 0,2 \Rightarrow L = \frac{a^2}{2\lambda s} = \frac{(1,22)^2}{2 \cdot 0,2} \lambda = 3,72 \lambda$$

Verificando si se cumple la condición de iluminación óptima al reflector en el plano H, $\varphi = 0$, se tendrá:

$$E = E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \left(\frac{jk}{2\pi}\right) (\cos\theta) P_y$$

$$C(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{G(\theta_0)}{G_{\max}} \right) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

$$C(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left(\frac{(\cos \theta_0) P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

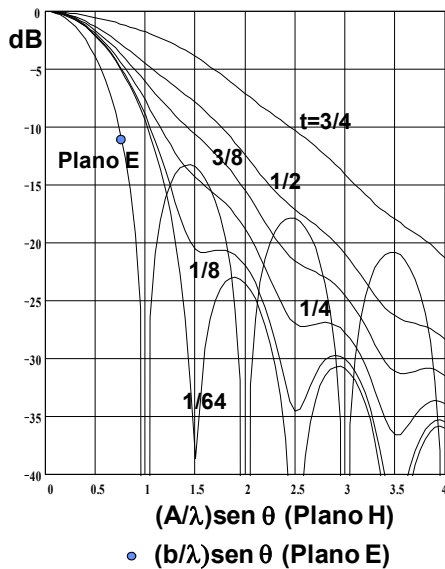
$$C(\text{dB}) = 20 \log_{10}(\cos \theta_0) + \left. \frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right|_{\text{dB}} + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

$$C(\text{dB}) = 20 \log_{10}(\cos(28,1^\circ)) - 9,47 + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{28,1^\circ}{2} \right) \right) = -11,09 \text{ dB}$$

Que todavía puede considerarse dentro del rango de iluminación óptima ([-12 dB, -10 dB])

Geometría típica de las corrugaciones de las paredes de una bocina cónica: 4 corrugaciones por λ , profundidad $\lambda/4$.

- Bocina piramidal corrugada:



Para el plano E, al ser corrugada la bocina, habrá que utilizar la gráfica del diagrama universal de la bocina sectorial plano H con $t_2 = \frac{B^2}{8\lambda R_2} = 0,2$.

En el plano E, $\varphi = 90^\circ$, se tendrá:

$$E = E_\theta = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) P_y$$

$$C(\text{dB}) = -10 = 20 \log_{10} \left(\frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

$$\left. \frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right|_{\text{dB}} = -10 - 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{28,1^\circ}{2} \right) \right) = -9,5 \text{ dB}$$

$$\left. \frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right|_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB} \Rightarrow (B/\lambda) \text{sen}(28,1^\circ) \cong 1,1 \Rightarrow$$

$$B = \frac{1,1}{\text{sen}(28,1^\circ)} \cdot \lambda = 2,34 \lambda$$

$$t_2 = \frac{B^2}{8\lambda R_2} = 0,2 \Rightarrow R_2 = \frac{B^2}{8\lambda t_2} = 3,42 \lambda$$

Habría que verificar que también para el plano H, se verifica el nivel de iluminación óptima.

En el plano H se tiene que utilizar la gráfica del diagrama universal de la bocina sectorial plano H con $t_1 = \frac{A^2}{8\lambda R_1} = 0,2$

En el plano H, $\varphi = 0$, se tendrá:

$$E = E_\varphi = \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left(\frac{jk}{2\pi} \right) (\cos \theta) P_y$$

$$C(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{G(\theta_0)}{G_{\max}} \right) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

$$C(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left(\frac{(\cos \theta) P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right)$$

Suponiendo que $A \approx B$, entraremos por el mismo punto de abscisas y siendo el mismo error de fase, obtendremos el mismo nivel del diagrama universal:

$$(A/\lambda) \operatorname{sen}(28,1^\circ) \cong 1,1 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{P_y(\theta_0)}{[P_y(\theta)]_{\max}} \right|_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB}$$

$$C(\text{dB}) = -9,5 + 20 \log_{10}(\cos(28,1^\circ)) + 20 \log_{10} \left(\cos^2 \left(\frac{28,1^\circ}{2} \right) \right)$$

$$C(\text{dB}) = -11,1 \text{ dB}$$

Que todavía puede considerarse dentro del rango de iluminación óptima ([-12 dB, -10 dB])

Es importante señalar que en esta bocina tiene que cumplirse la condición de realizabilidad:

$$R_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right) = R_2 \left(1 - \frac{b}{B} \right)$$

Y considerando que $b=a/2$:

$$R_1 \left(1 - \frac{a}{A} \right) = R_2 \left(1 - \frac{a}{2B} \right)$$

Sin embargo, la estimación de que $A \approx B$ con el mismo error de fase en ambos planos, y por tanto $R_1=R_2$, no verificaría la anterior ecuación que es de obligado cumplimiento.

Por ello, habría que ir a un proceso iterativo que, modificando los valores de A y B, R1 y R2, llevara a cumplir estrictamente la anterior ecuación, tratando además de entrar en el rango de iluminación óptima, y llegando a valores de error de fase que seguramente no se puedan adaptar a lo indicado en el enunciado de 0,2 vueltas en ambos planos.

Geometría típica de las corrugaciones de las paredes (perpendiculares al campo E) de una bocina piramidal: 4 corrugaciones por λ , profundidad $\lambda/4 < d < 0,375 \lambda$.

4. Antenas frente a plano de masa y arrays

4.1. Teoría de imágenes

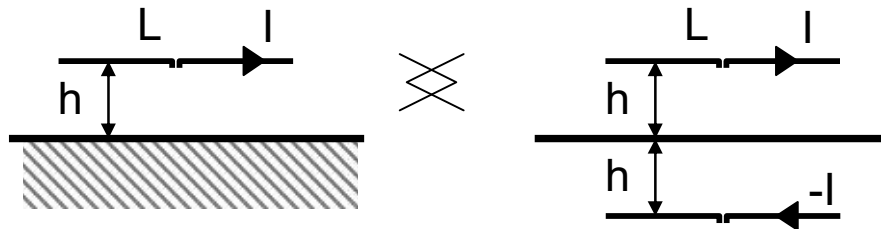
Ejercicio 4.1

Un radioaficionado instala como antena transmisora a 30 MHz (decamétricas) un dipolo eléctricamente corto y lo sitúa horizontalmente a una altura sobre el suelo $h = \lambda/4$. Suponga que la tierra se comporta como un conductor perfecto plano. Calcule el ancho de haz a -3dB en el plano E.

- a) 81° b) 86° c) 90° d) 76°

Solución:

El estudio del dipolo sobre plano de masa (a una altura h) se puede llevar a cabo aplicando Teoría de Imágenes, en cuyo caso el plano de masa se reemplaza por otro dipolo colocado a una distancia $2h$ del primero, siendo la corriente idéntica y de sentido contrario:



En primer lugar, se plantea la ecuación del campo radiado (campo lejano) para una distribución lineal de corriente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \right) \left(\frac{-jk_0 \eta}{4\pi} \right) (\vec{N} - (\vec{N} \cdot \hat{r})\hat{r})$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \int_{C'} I(\vec{r}') \hat{u}_l e^{jk_0 \vec{r}' \cdot \hat{r}} dl'$$

En el caso de un dipolo eléctricamente corto ($L \ll \lambda$) centrado en el origen y orientado según el eje 'x':

$$\vec{N}_{dip \text{ corto, eje } x} = \int_{x'=-L/2}^{L/2} I \hat{x} \underbrace{e^{jk_0(x'\hat{x}\cdot\hat{r})}}_{\approx 1} dx' = IL\hat{x}$$

Dado que el diagrama de radiación se calcula en esféricas, se expresa el vector de radiación en coordenadas esféricas:

$$\vec{N}_{dip \text{ corto, eje } x} = IL\hat{x} = IL[(\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r} + (\hat{x} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi}]$$

Quitando la componente radial:

$$\vec{N}_{dip \text{ corto, eje } x} - (\vec{N} \cdot \hat{r})\hat{r} = IL[(\hat{x} \cdot \hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi}] = IL(\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\theta} - \sin(\varphi)\hat{\phi})$$

Por tanto, el campo radiado por el dipolo corto se puede expresar como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \left(\frac{e^{-jk_0R}}{R} \right) (\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\theta} - \sin(\varphi)\hat{\phi})$$

Donde el término E_0 agrupa aquellos términos que no presentan dependencia con R , θ , y φ .

En el problema equivalente, se tienen 2 dipolos orientados según 'x', y colocados a una distancia $z=+h$ y $z=-h$. Por tanto, el campo de cada uno se puede expresar como el campo del dipolo corto con un desplazamiento:

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}) = E_0 \left(\frac{e^{-jk_0R}}{R} \right) (\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\theta} - \sin(\varphi)\hat{\phi})(e^{jk_0h\hat{z}\cdot\hat{r}} - e^{jk_0(-h)\hat{z}\cdot\hat{r}})$$

El cambio de signo en la segunda exponencial (-h) se debe a que la corriente en el dipolo imagen es de sentido contrario.

$$e^{jk_0h\hat{z}\cdot\hat{r}} - e^{jk_0(-h)\hat{z}\cdot\hat{r}} = 2j \sin(k_0h\hat{z}\cdot\hat{r}) = 2j \sin(k_0h\cos(\theta))$$

Para $h = \lambda/4$:

$$2j \sin(k_0h\cos(\theta)) = 2j \sin\left(\frac{2\pi\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \cos(\theta)\right) = 2j \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)$$

Por tanto, el campo radiado por el dipolo corto situado a $\lambda/4$ del plano de masa es:

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}) = E'_0 \left(\frac{e^{-jk_0R}}{R} \right) (\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\theta} - \sin(\varphi)\hat{\phi}) \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)$$

Una vez que se tiene la expresión del campo lejano, ya se puede calcular el ancho de haz a -3 dB en el plano E:

Dado que el dipolo está orientado según el eje 'x', y que la dirección de máxima radiación es $\theta = 0^\circ$ (eje 'z') el plano E corresponderá a $\varphi = 0^\circ$:

$$\vec{E}_{tot}(\theta, \varphi = 0^\circ) = C_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right) \cos(\theta) \hat{\theta}$$

Se observa que en el plano E sólo hay componente E_θ .

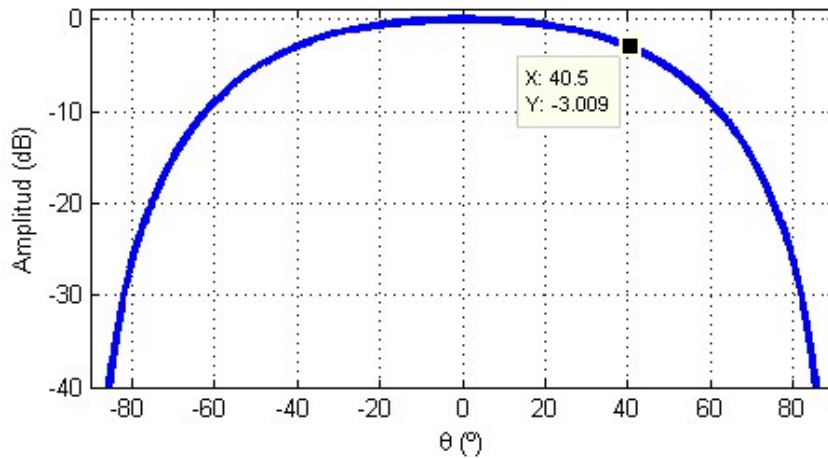
En $\theta = 0^\circ$, $E_{tot} = 1$ (asumiendo $C_0 = 1$ por simplicidad).

Se calcula el valor para el cual, la expresión anterior toma un valor de -3 dB:

$$10^{(-3/20)} = 0,7079$$

θ	50°	40°	42°	41°	40.5°
$E_{tot}(\theta)$	0,54	0,71	0,68	0,6994	0,7072

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB en el plano E es de $40,5^\circ \times 2 = 81^\circ$.



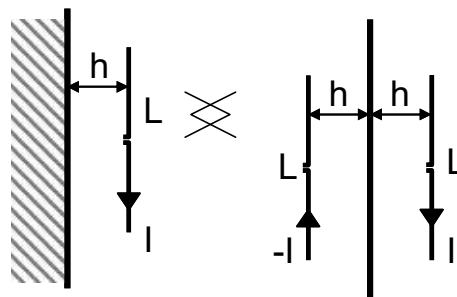
Representación del campo radiado en el plano E.

Ejercicio 4.2

Estime la directividad del sistema radiante compuesto por el dipolo de longitud $L=0,5\lambda$ situado paralelo a un plano de masa perfecto a $\lambda/4$ de él.

Solución:

Se va a considerar un dipolo orientado según el eje 'z', estando el plano de masa colocado según el plano YZ. Aplicando Teoría de Imágenes:



La expresión del campo radiado por un dipolo $L=\lambda/2$ orientado según el eje 'z' es:

$$\vec{E}_{dip}(\theta, \varphi) = E_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)} \hat{\theta}$$

Al igual que en el ejercicio 1, se puede calcular el campo total de los dos dipolos del problema equivalente aplicando desplazamiento: en el problema equivalente, se tienen 2 dipolos orientados

según 'z', y colocados a una distancia $x=+h$ y $x=-h$. Por tanto, el campo de cada uno se puede expresar como el campo del dipolo $\lambda/2$ con un desplazamiento:

$$\vec{E}_{tot}(\theta, \varphi) = E_0(e^{jk_0 h \hat{x} \cdot \hat{r}} - e^{jk_0(-h) \hat{x} \cdot \hat{r}}) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\text{sen}(\theta)} \hat{\theta}$$

El cambio de signo en la segunda exponencial (-h) se debe a que la corriente en el dipolo imagen es de sentido contrario.

$$e^{jk_0 h \hat{x} \cdot \hat{r}} - e^{jk_0(-h) \hat{x} \cdot \hat{r}} = 2j \text{sen}(k_0 h \hat{x} \cdot \hat{r}) = 2j \text{sen}(k_0 h \text{sen}(\theta) \cos(\varphi))$$

Para $h = \lambda/4$:

$$2j \text{sen}(k_0 h \text{sen}(\theta) \cos(\varphi)) = 2j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}(\theta) \cos(\varphi)\right)$$

Por tanto, el campo radiado por el dipolo $L = \lambda/2$ situado a $\lambda/4$ del plano de masa es:

$$\vec{E}_{tot}(\theta, \varphi) = E'_0 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}(\theta) \cos(\varphi)\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\text{sen}(\theta)} \hat{\theta}$$

La directividad del sistema radiante se puede evaluar como:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi U(\theta, \varphi)}{P_{rad}} = \frac{4\pi U(\theta, \varphi)}{\int_{\theta=0}^{+\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{+\pi/2} U(\theta, \varphi) \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi}$$

Siendo $U(\theta, \varphi)$ la intensidad de radiación, definida como:

$$U(\theta, \varphi) = r^2 \langle S(r, \theta, \varphi) \rangle = r^2 \frac{|E_\theta(r, \theta, \varphi)|^2}{2\eta}$$

Con respecto a los límites de integración, se evalúa la integral sólo en el semiespacio $x>0$, ya que, debido a la presencia del plano de masa, se asume que la radiación trasera es cero.

$$\begin{aligned} D(\theta, \varphi) &= \frac{4\pi U(\theta, \varphi)}{P_{rad}} = \frac{4\pi r^2 \frac{|E_\theta(r, \theta, \varphi)|^2}{2\eta}}{\int_{\theta=0}^{+\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{+\pi/2} r^2 \frac{|E_\theta(r, \theta, \varphi)|^2}{2\eta} \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi} = \\ &= \frac{4\pi |E_\theta(\theta, \varphi)|^2}{\int_{\theta=0}^{+\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{+\pi/2} |E_\theta(\theta, \varphi)|^2 \text{sen}(\theta) d\theta d\varphi} \\ E_\theta(\theta, \varphi) &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}(\theta) \cos(\varphi)\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\text{sen}(\theta)} \end{aligned}$$

El cálculo de la potencia radiada ha de realizarse numéricamente, dado que la integral de la intensidad de radiación no tiene solución analítica. El código para llevar a cabo dicha integración numérica se indica en el Anexo de este ejercicio.

El máximo de la directividad es: $D_0 = 7,5$ dBi

La directividad se puede calcular de forma aproximada a partir de los cortes en los planos E y H de la antena. Dichos cortes corresponden a los planos XZ ($\theta, \varphi=0^\circ$), XY ($\theta=90^\circ, \forall \varphi$):

$$E_{\theta}(\theta, \varphi = 0^{\circ}) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\text{sen}(\theta)}$$

$$E_{\theta}(\theta = 90^{\circ}, \varphi) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cos(\varphi)\right)$$

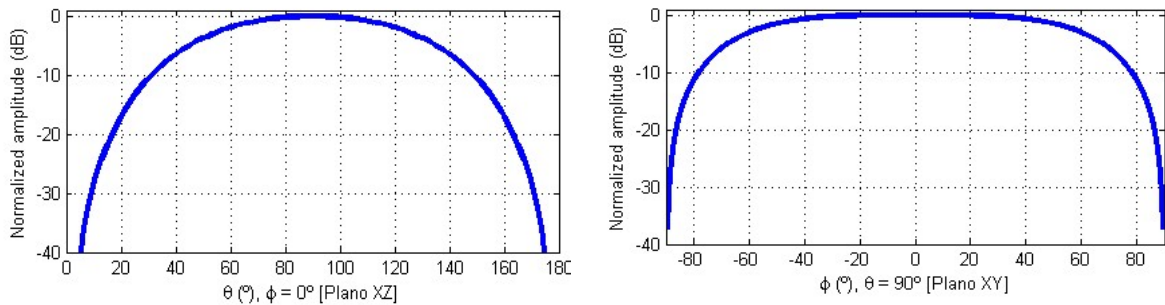
Para el corte en el plano XZ, el ancho de haz a -3 dB es: $36,5^{\circ} \times 2 = 73^{\circ}$.

Y para el corte en el plano YZ: $60^{\circ} \times 2 = 120^{\circ}$.

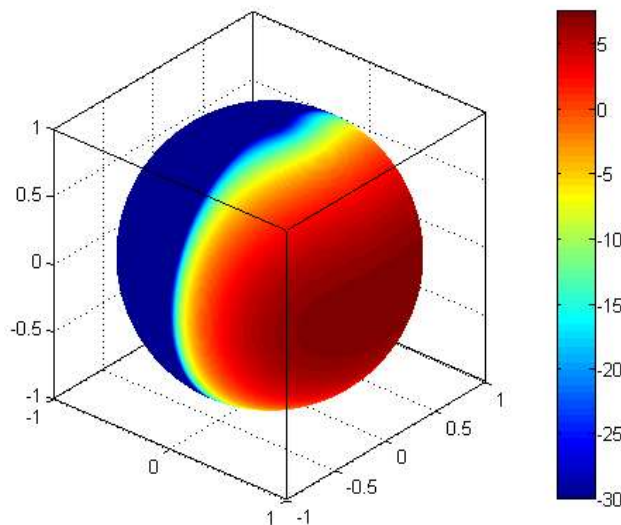
Por tanto, la directividad calculada de forma estimada a partir de los anchos de haz a -3 dB es:

$$D_0 = 10 \log_{10}\left(\frac{41253}{73^{\circ} \times 120^{\circ}}\right) = 6,73 \text{ dBi}$$

La diferencia entre el valor calculado mediante integración y el resultado basado en la aproximación del ancho de haz en los planos E y H se debe a que el diagrama de la antena es poco directivo.



Cortes del diagrama de radiación en los planos E (XZ) y H (YZ).



Directividad (en dBi) de la antena bajo estudio (se asume que la antena sólo radia en el semi-espacio $x > 0$)

Anexo: Código (Matlab®) para evaluar numéricamente la directividad:

```
D_th=1;
D_ph=1;
th=[0:D_th:180];
ph=[0:D_ph:360];
[th ph]=meshgrid(th,ph);
Eth = sin(0.5*pi.*sind(th).*cosd(ph)) .* cos(0.5*pi*cosd(th)) ./ sind(th);
ind=isnan(Eth);
Eth(ind)=0;
ind=find(ph> 90 & ph<270);
Eth(ind)=0;
eta0=120*pi;
densidadPotencia=(abs(Eth)).^2/(2*eta0); %Se expresa el campo en potencia
D_sup = D_th * D_ph * (pi/180)^2;
potenciaRadiada=sum(sum(densidadPotencia.*abs(sind(th)) * D_sup ));
%Directividad
gDirect=10*log10(4*pi*densidadPotencia./potenciaRadiada);
D0=max(max(gDirect))
```

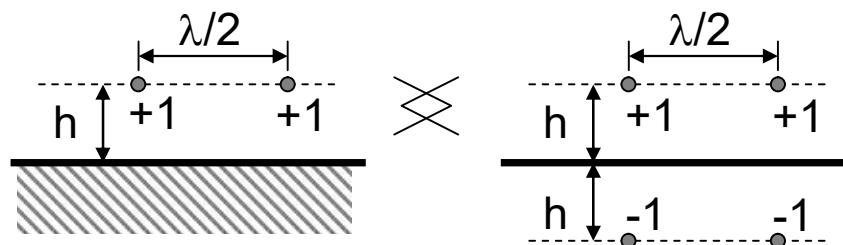
Ejercicio 4.3

En un array de dos antenas isotrópicas, separadas entre sí $\lambda/2$ y situadas ambas a una distancia $\lambda/4$ de un plano de masa, se excitan uniformemente en amplitud y fase. Demuestre el diagrama de radiación del sistema radiante y calcule el ancho de haz entre nulos en el plano del array (perpendicular al plano de masa). (A los efectos de aplicar el teorema de imágenes, suponga en las antenas corriente con dirección paralela al plano de masa).

- a) 28° b) 56° c) 90° d) 180°

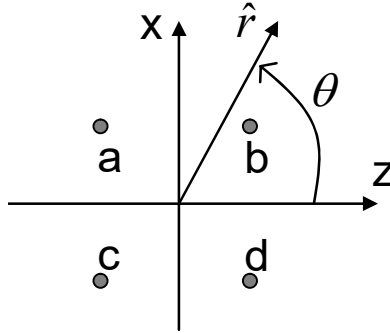
Solución:

El siguiente problema se puede abordar como un problema de Factor de Array de 2x2 elementos, tal y como se observa en la siguiente figura:



En el caso del problema equivalente, las antenas isotrópicas imagen tendrán un desfase de 180° con respecto a las antenas isotrópicas originales. El cálculo del factor de array de la agrupación en el plano

perpendicular al plano de masa se llevará a cabo tomando como referencia los ejes de coordenadas indicados en la siguiente figura:



$$FA(\theta) = +1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_a \cdot \hat{r}} + 1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_b \cdot \hat{r}} - 1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_c \cdot \hat{r}} - 1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_d \cdot \hat{r}}$$

$$\vec{r}'_a = -\frac{\lambda}{4} \hat{z} + \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_a \cdot \hat{r} = \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} (-\cos\theta + \sin\theta) = \frac{\pi}{2} (-\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\vec{r}'_b = \frac{\lambda}{4} \hat{z} + \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_b \cdot \hat{r} = \frac{\pi}{2} (\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\vec{r}'_c = -\frac{\lambda}{4} \hat{z} - \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_c \cdot \hat{r} = \frac{\pi}{2} (-\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\vec{r}'_d = \frac{\lambda}{4} \hat{z} - \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_d \cdot \hat{r} = \frac{\pi}{2} (\cos\theta - \sin\theta)$$

$$FA(\theta) = +1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\theta} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\sin\theta} + 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\cos\theta} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\sin\theta} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\theta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\sin\theta} - 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\cos\theta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\sin\theta}$$

Agrupando exponenciales y transformando a relaciones de senos y cosenos:

$$\begin{aligned} FA(\theta) &= \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{2} \sin\theta} - \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \sin\theta} = \\ &= \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right) \cdot \left(2j \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right) \right) = 4j \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right) \end{aligned}$$

Cálculo del ancho de haz a -3 dB:

θ [°]	90	45	60	62	61
FA(θ) [normalizado]	1	0,4	0,69	0,73	0,71

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB es de $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ \times 2 = 58^\circ$

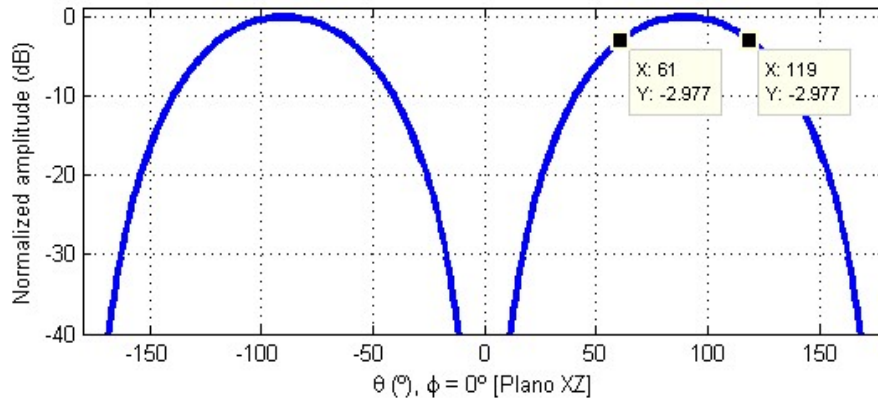
Cálculo del ancho de haz entre nulos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right) = 0 \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right) = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por tanto, el ancho de haz entre nulos es de 180°.



Factor de array normalizado en el plano XZ (perpendicular al plano de masa).

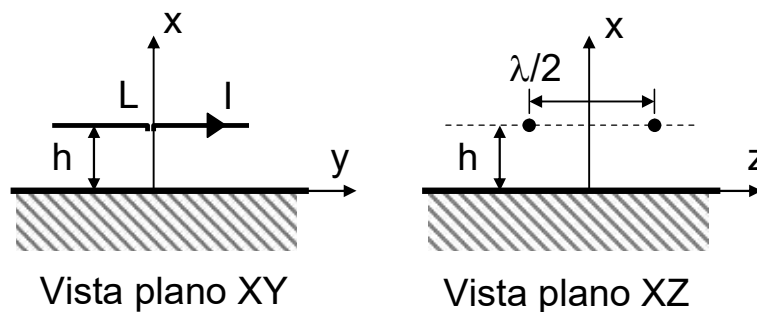
Ejercicio 4.4

Una antena está formada por 2 dipolos cortos separados entre sus centros una distancia de $\lambda/2$, que se alimentan de forma idéntica. Los dipolos se disponen paralelos entre sí y perpendiculares al eje que los une. A una distancia $\lambda/4$ del plano que contiene los dipolos se sitúa un plano de masa. Calcule el ancho de haz (a -3dB) en el plano que pasa por el centro de los dipolos y que es perpendicular al plano de masa.

- a) 122°
- b) 58°
- c) 50°
- d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

En primer lugar, se representa la orientación de los dipolos con respecto al plano de masa:



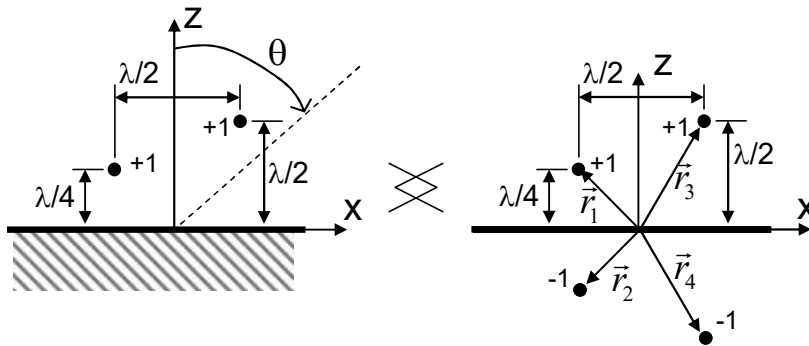
Se pide calcular el ancho de haz a -3dB en el plano que pasa por el centro de los dipolos y es perpendicular al plano de masa, es decir, el plano XZ. En este plano, los dipolos tienen un diagrama omnidireccional, por lo que el problema es equivalente al del ejercicio anterior. El ancho de haz a -3 dB es, por tanto, 58°.

Ejercicio 4.5

Dos dipolos cortos paralelos entre sí y perpendiculares al eje que une sus centros, están situados de forma paralela a un plano de masa, pero a diferentes alturas: uno a $\lambda/4$ sobre el plano de masa y el otro a $\lambda/2$ sobre el plano de masa, tal que la distancia entre las proyecciones de los dipolos sobre el plano de masa es de $\lambda/2$. Calcule el aumento de la intensidad de radiación en la dirección perpendicular al plano de masa respecto del caso de tener un único dipolo corto, igualmente orientado y sin plano de masa. Suponga todos los dipolos con una excitación unitaria.

Solución:

Suponiendo el eje Z perpendicular al plano de masa:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{dip}(\vec{r}) \cdot FA(\vec{r})$$

Los vectores de posición correspondientes a la posición central de los dipolos son:

$$\vec{r}'_1 = \frac{\lambda}{4}\hat{z} - \frac{\lambda}{4}\hat{x} \quad \vec{r}'_2 = -\frac{\lambda}{4}\hat{z} - \frac{\lambda}{4}\hat{x} \quad \vec{r}'_3 = \frac{\lambda}{2}\hat{z} + \frac{\lambda}{4}\hat{x} \quad \vec{r}'_4 = -\frac{\lambda}{2}\hat{z} + \frac{\lambda}{4}\hat{x}$$

$$FA = \sum_{i=1}^4 a_i \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_i \cdot \hat{r}} = 1 \cdot e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(\hat{z} - \hat{x}) \cdot \hat{r}} - 1 \cdot e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-\hat{z} - \hat{x}) \cdot \hat{r}} + 1 \cdot e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(2\hat{z} + \hat{x}) \cdot \hat{r}} - 1 \cdot e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-2\hat{z} + \hat{x}) \cdot \hat{r}}$$

$$FA = e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-\hat{x}) \cdot \hat{r}} \left(e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(\hat{z}) \cdot \hat{r}} - e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-\hat{z}) \cdot \hat{r}} \right) + e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(\hat{x}) \cdot \hat{r}} \left(e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(2\hat{z}) \cdot \hat{r}} - e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-2\hat{z}) \cdot \hat{r}} \right)$$

Desarrollando cada uno de los términos (y particularizando para el plano $\varphi = 0^\circ$):

$$e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-\hat{x}) \cdot \hat{r}} \left(e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(\hat{z}) \cdot \hat{r}} - e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-\hat{z}) \cdot \hat{r}} \right) = e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} \left(e^{j\frac{\pi}{2} \text{cos}\theta} - e^{-j\frac{\pi}{2} \text{cos}\theta} \right) =$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} 2j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{cos}\theta\right) \quad \hat{z} \cdot \hat{r} = \text{cos}\theta, \quad \hat{x} \cdot \hat{r} = \text{sen}\theta$$

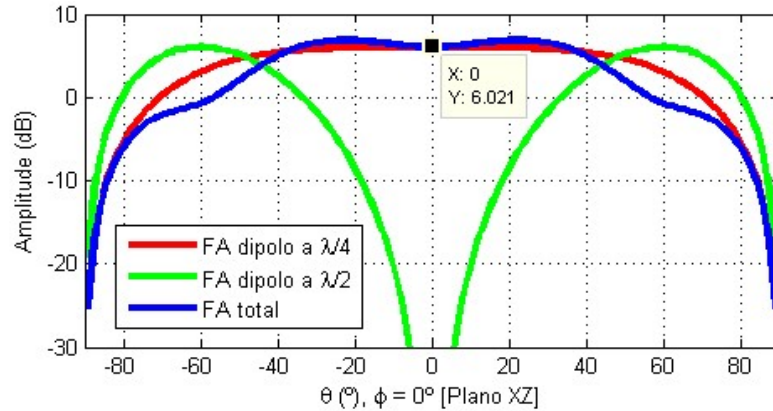
$$e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(\hat{x}) \cdot \hat{r}} \left(e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(2\hat{z}) \cdot \hat{r}} - e^{jk_0 \frac{\lambda}{4}(-2\hat{z}) \cdot \hat{r}} \right) = e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} \left(e^{j\pi \text{cos}\theta} - e^{-j\pi \text{cos}\theta} \right) =$$

$$= e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} 2j \text{sen}(\pi \text{cos}\theta) \quad \hat{z} \cdot \hat{r} = \text{cos}\theta, \quad \hat{x} \cdot \hat{r} = \text{sen}\theta$$

$$FA = 2j e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) + 2j e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta} \text{sen}(\pi \cos \theta)$$

Para la dirección $\theta = 0^\circ$, la contribución debida al dipolo situado a $\lambda/4$ sobre el plano de masa es 2, mientras que la debida al dipolo situado a $\lambda/2$ es cero. Por tanto, el módulo del factor de array en esa dirección es 2; y puesto que el diagrama del elemento es igual en el caso de los dos dipolos con plano de masa como en el caso del dipolo aislado, el campo radiado de la configuración del ejercicio en la dirección indicada es el doble que el que radiaría un dipolo corto aislado.

$$|FA(\theta = 0)| = 2$$



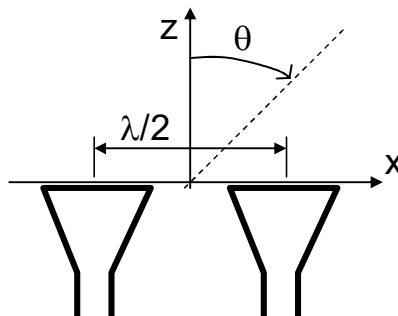
4.2. Fundamentos de arrays

Ejercicio 4.6

En un array de dos bocinas, separadas entre sí $\lambda/2$, igualmente excitadas y cada una de ellas con un diagrama de campo de tipo $\cos(\theta)$, calcule el ancho de haz a -3dB en el plano del array (perpendicular a las aperturas de las bocinas).

Solución:

Al igual que ejercicios anteriores, el campo radiado se puede expresar como el producto del factor de array por el diagrama del elemento.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{boc}(\vec{r}) \cdot FA(\vec{r})$$

Donde el factor de array viene dado por:

$$FA = 1 \cdot e^{-jk_0 \frac{\lambda}{4} \hat{x} \cdot \hat{r}} + 1 \cdot e^{jk_0 \frac{\lambda}{4} \hat{x} \cdot \hat{r}} = 2 \cos\left(k_0 \frac{\lambda}{4} \hat{x} \cdot \hat{r}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta \cos\varphi\right)$$

En el plano del array ($\varphi = 0^\circ$): $FA = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right)$

Por lo que el campo total viene dado por: $E = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right) \cos(\theta)$

El ancho de haz a -3 dB se puede calcular como el ángulo θ_0 para el cual la siguiente función toma valor cero: $f(\theta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta_0\right) \cos(\theta_0) - 1/\sqrt{2}$

θ_0 [°]	10	20	30	25
$f(\theta_0)$ [normalizado]	0,24	0,1	0,69	0,0067

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB en el plano del array (plano XZ) es de 50°

Ejercicio 4.7

Para una separación constante entre elementos de un array lineal, el ancho de haz aumenta cuando:

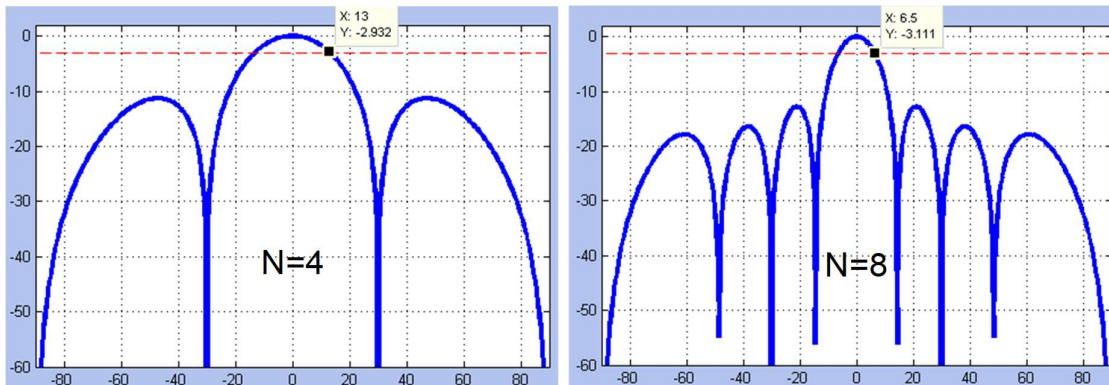
- a) Se disminuye el número de elementos.
- b) Se incrementa el número de elementos.
- c) Se mejora la adaptación de la antena.
- d) Se minimizan las pérdidas en la antena.

Solución:

Opción d): Minimizar las pérdidas en la antena influye en la ganancia y en la eficiencia de radiación, pero no en el ancho de haz.

Opción c): Igual que la opción d)

Opciones a), b): Un razonamiento sencillo para analizar la influencia en el ancho de haz del número de elementos es el siguiente: cuantos más elementos tenga el array, mayor va a ser el tamaño de la "apertura" constituida por dicha agrupación. Por tanto, relacionando el factor de array como la transformada discreta de Fourier de las excitaciones, cuanto mayor sea el tamaño del array (más elementos), más estrecho será el lóbulo principal. En consecuencia, el ancho de haz aumenta cuando se disminuye el número de elementos de la agrupación.



Factor de array para diferente número de elementos.

Ejercicio 4.8

De una distribución uniforme de las excitaciones de un array lineal se puede afirmar que:

- a) Es la que da la mayor directividad para cualquier separación de elementos.
- b) Es la que presenta mejor compromiso de directividad y SLL.
- c) Se consigue con una alimentación en serie de los elementos y es de banda ancha.
- d) Ninguna de los anteriores.

Solución:

Opción a): incorrecta; al aumentar la separación entre elementos, aparecen "grating lobes" que hacen que la directividad disminuya.

Opción b): existen leyes de excitación no uniformes que dan mejores relaciones entre directividad y nivel de lóbulos secundarios (SLL). Por ejemplo:

Ley de excitación (array de N = 6 elementos equiespaciados 0,5 λ , con fase cero y diferente amplitud)						D ₀	SLL
1	2	3	4	5	6		
0 dB	0 dB	0 dB	0 dB	0 dB	0 dB	10,8 dBi	-12,5 dB
-4 dB	-2 dB	0 dB	0 dB	-2 dB	-4 dB	10,7 dBi	-18 dB
-6 dB	-3 dB	0 dB	0 dB	-3 dB	-6 dB	10,5 dBi	-19 dB

Se observa que, con apenas 0,3 dB de pérdida de directividad, se consigue reducir el nivel de SLL en hasta 6,5 dB.

Opción c): no es una antena de banda ancha. Al cambiar la frecuencia, cambia la distancia eléctrica entre elementos, lo cual modifica el factor de array.

Ejercicio 4.9

La diferencia entre la función periódica del Factor de Array y el "margen visible" es:

- a) El "margen visible" determina el diagrama de radiación.
- b) El "margen visible" define el intervalo con $\cos \theta > 0$.
- c) Ambos son lo mismo.
- d) El "margen visible" es la parte del diagrama donde se sitúa el lóbulo principal del Factor de Array.

Solución:

La respuesta correcta es la a) El "margen visible" determina el diagrama de radiación, ya que corresponde a la parte del Factor de Array periódico donde el ángulo θ toma valores reales y no complejos.

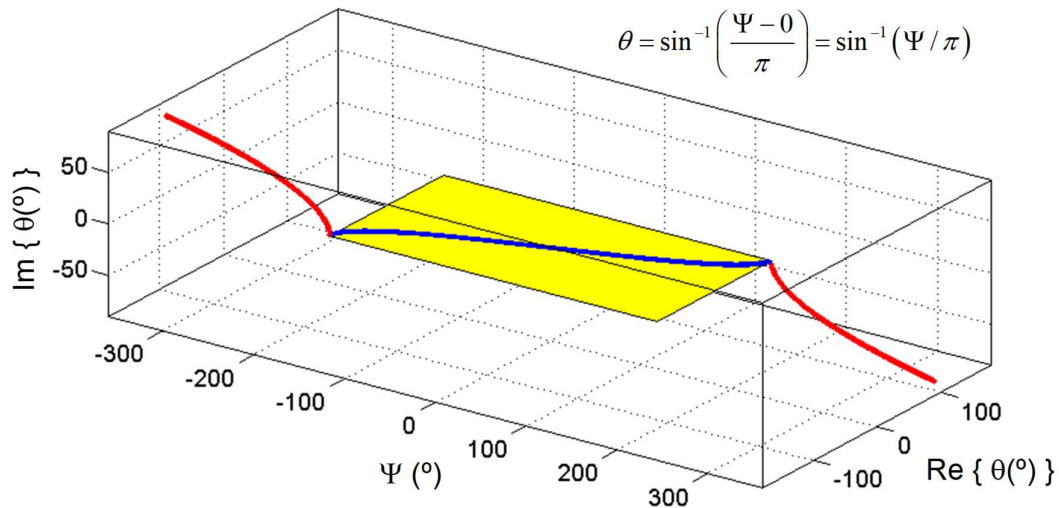
A modo de ejemplo, considérese la siguiente relación entre el factor de array periódico y el margen visible:

$$\Psi = k_0 d \operatorname{sen} \theta + \alpha \Rightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\Psi - \alpha}{k_0 d} \right)$$

Para $d = 0,5 \lambda$, $\alpha = 0$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\Psi - 0}{\pi} \right) = \operatorname{sen}^{-1}(\Psi/\pi)$$

En la siguiente gráfica se representa la función anterior, descomponiendo el ángulo θ en parte real e imaginaria. El diagrama de radiación está definido para aquellos valores donde θ toma valores reales. Dominio: $\Psi = [-180^\circ, +180^\circ]$. Rango: $\theta = [-90^\circ, +90^\circ]$.



Ejercicio 4.10

Una distribución no uniforme de las excitaciones de un array lineal:

- Incrementa la directividad y disminuye el nivel de lóbulo secundario.
- Permite realizar funciones de "scanning".
- Disminuye la directividad y disminuye el nivel de lóbulo secundario.
- Mejora la adaptación de la antena a la línea de transmisión.

Solución:

El tipo de distribución va a afectar al nivel de directividad y al nivel de lóbulos secundarios. Por tanto, se pueden descartar las opciones b) y d).

El valor de directividad más alto se alcanza para una distribución uniforme de las excitaciones. Las distribuciones no uniformes reducen (ligeramente) el nivel de directividad, así como los niveles de lóbulos secundarios.

Ejercicio 4.11

Calcule el ancho de haz de un array de 2 elementos "isotrópicos" separados una distancia de $0,5 \lambda$, que se alimentan de forma idéntica (cálculalo en el plano que contiene el array)

- a) 151° b) 90° c) 60° d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

Se supone que los elementos están colocados sobre el eje 'x' (eje de la agrupación). El Factor de Array se calcula en el plano XZ ($\varphi = 0^\circ$).

$$FA(\theta) = 1 \cdot e^{-\frac{jk_0 \text{sen}(\theta) d}{2}} + 1 \cdot e^{+\frac{jk_0 \text{sen}(\theta) d}{2}} = 2 \cos\left(\frac{k_0 d}{2} \text{sen}(\theta)\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}(\theta)\right)$$

Se busca el valor de θ para el cual el Factor de Array normalizado cae 3 dB con respecto al máximo ($0,5^{1/2}$).

θ ($^\circ$)	0°	90°	45°	30°
FA(θ) (normalizado)	1	0	0,44	0,707

Por tanto, $BW_{-3dB} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$.

Ejercicio 4.12

¿Cómo cambia el ancho de haz en el plano del propio array cuando se colocan como elementos del anterior array bocinas de diagrama de campo dado por $\cos^2\theta$?

- a) No se modifica. b) Disminuye 5° . c) Disminuye $7,5^\circ$. d) Disminuye 15° .

Solución:

En este caso, el campo viene dado por la multiplicación del Factor de Array y el diagrama de campo del elemento:

$$E(\theta) = E_{boc}(\theta) \cdot FA(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}(\theta)\right) \cdot \cos^2(\theta)$$

θ ($^\circ$)	0°	30°	20°	22°	$22,5^\circ$
E(θ) (normalizado)	1	0,53	0,758	0,715	0,704

Por tanto, el nuevo $BW_{-3dB} = 22,5^\circ \times 2 = 45^\circ$. En consecuencia, el BW_{-3dB} se reduce 15° con respecto al caso de elementos "isotrópicos".

Ejercicio 4.13

Indique cómo cambia el ancho de haz cuando se colocan como elementos del anterior array dipolos cortos colineales (calcule en el plano que contiene el array)

- a) No se modifica. b) Disminuye 1° .
c) Disminuye 10° . d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

Al igual que en el Ejercicio 4.12, el campo viene dado por la multiplicación del Factor de Array y el campo del elemento, que para un dipolo corto colineal con el eje del array (siendo el eje del array el eje 'x') es proporcional a $\cos(\theta)$.

$$E(\theta) = E_{dip}(\theta) \cdot FA(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right) \cdot \cos(\theta)$$

θ (°)	0°	30°	25°	25,5°
E(θ) (normalizado)	1	0,61	0,71	0,704

Por tanto, el nuevo $BW_{-3dB} = 25,5^\circ \times 2 = 51^\circ$. En consecuencia, el BW_{-3dB} se reduce unos 10° con respecto al caso de elementos "isotrópicos".

Ejercicio 4.14

Calcule cómo se modifica el ancho de haz de un array lineal de dipolos cortos colineales (separados una distancia de $0,5 \lambda$) cuando se coloca el array de forma paralela a un plano de masa y a una distancia $\lambda/4$ (calcule en el plano que contiene a los dipolos y es perpendicular al plano de masa).

- a) Se hace la mitad. b) Se hace la cuarta parte.
c) No se modifica. d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

Por imágenes, se tiene un array 2×2 donde los dipolos cortos imagen tienen corriente en sentido contrario:

$$E(\theta) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right)}_{FA \text{ de los 2 dipolos}} \cdot \underbrace{e^{+jk_0 \frac{\lambda}{4} \hat{z} \cdot \hat{r}} \cdot \cos(\theta)}_{\text{Diagrama del dipolo}} - \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right)}_{FA \text{ de los 2 dipolos IMAGEN}} \cdot \underbrace{e^{-jk_0 \frac{\lambda}{4} \hat{z} \cdot \hat{r}} \cdot \cos(\theta)}_{\text{Diagrama del dipolo}}$$

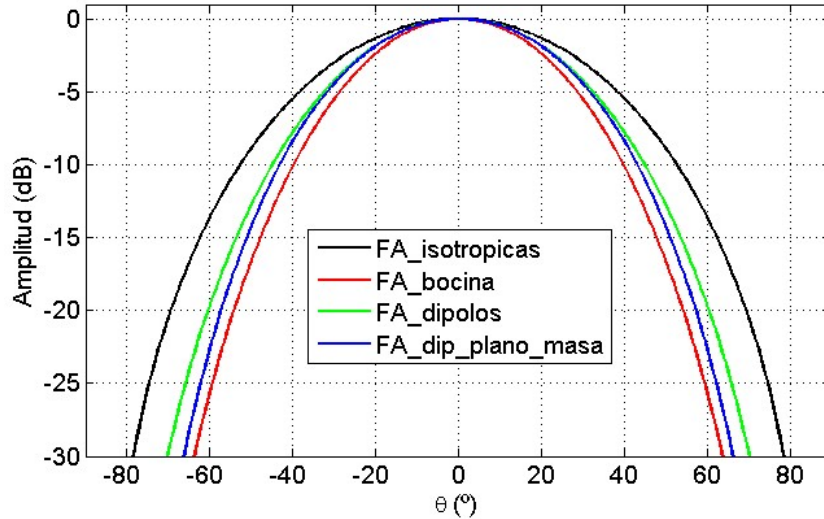
$$E(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right) \cdot \cos(\theta) \cdot e^{+j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right) \cdot \cos(\theta) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \cos(\theta)}$$

Por tanto, el diagrama resultante es:

$$E(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right) \cdot \cos(\theta) \cdot 2j \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)$$

θ (°)	0°	30°	25°
E(θ) (normalizado)	1	0,599	0,707

Por tanto, el nuevo $BW_{-3dB} = 25^\circ \times 2 = 50^\circ$. En consecuencia, el BW_{-3dB} se reduce en $\sim 10^\circ$ con respecto al caso de elementos isotrópicos. Es decir, apenas cambia con respecto al caso de los dos dipolos colineales sin plano de masa.



Representación de los diagramas de radiación correspondientes a los ejercicios 4.11-4.14.

Ejercicio 4.15

Considere el array de dos dipolos de longitud $\lambda/2$ colineales alineados sobre el eje Z, separados una distancia $0,8\lambda$ entre centros, e igualmente excitados. Calcule el ancho de haz a -3 dB en el plano del array, sabiendo que el campo que genera un dipolo $\lambda/2$ es:

$$\vec{E}_d = j60 \frac{e^{-jk_0 z}}{r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta}$$

Solución:

El campo total se puede expresar como el campo del dipolo $\lambda/2$ multiplicado por el factor de array de la agrupación:

$$E(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cdot \underbrace{\left(e^{-jk_0 \frac{2\lambda}{5} \cdot \hat{z} \cdot \hat{r}} + e^{+jk_0 \frac{2\lambda}{5} \cdot \hat{z} \cdot \hat{r}}\right)}_{\text{Factor de Array}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cdot \left(e^{-j\frac{4\pi}{5} \cos(\theta)} + e^{+j\frac{4\pi}{5} \cos(\theta)}\right)$$

$$E(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\left(\frac{4\pi}{5} \cos(\theta)\right)$$

Para calcular el ancho de haz a -3 dB: hay que tener en cuenta que el nulo de radiación está alineado con el eje 'z' ($\theta = 0^\circ$), y el máximo, en $\theta = 90^\circ$.

θ ($^\circ$)	0°	90°	60°	70°	73°	$73,5^\circ$
E(θ) (normalizado)	0	1	0,25	0,59	0,696	0,71

Por tanto, $BW_{-3dB} = 90^\circ - 73,5^\circ = 16,5^\circ \times 2 = 33^\circ$.

Ejercicio 4.16

Para lograr una antena de tipo array lineal “endfire” con dipolos, los elementos deberían orientarse:

- a) De forma colineal.
- b) Paralelos entre ellos y ortogonales al dominio lineal del array.
- c) Cualquier orientación valdría.
- d) Cualquier orientación serviría si la distribución de fase progresiva es $\alpha = -k \cdot d$

Solución:

Las opciones a), c), d) serían incorrectas, ya que si se sitúan de forma colineal se tiene un nulo en la dirección del array, que es el objetivo contrario al que se busca en un array ‘endfire’ (lóbulo principal apuntando en el eje de la agrupación).

La opción b) sería correcta: de esta forma, el nulo presente en el diagrama del dipolo es ortogonal al eje del array, y no afecta al lóbulo principal del factor de array.

Ejercicio 4.17

Estime la directividad de un array plano de 16 x 8 parches situados en el plano XY con equiespaciado en ambas direcciones de $d = 0,6 \lambda$ y alimentación uniforme en amplitud y fase

Solución:

A diferencia de otros problemas de arrays, éste se puede plantear como una distribución de campo uniforme muestreada:

$$\left. \begin{array}{l} L_x = M \cdot d_x \\ L_y = N \cdot d_y \end{array} \right\} A = L_x \cdot L_y$$

Donde M y N es el número de elementos en la dirección ‘x’ e ‘y’ respectivamente. d_x es la separación entre elementos en ‘x’, y d_y , en ‘y’.

El área efectiva en la apertura (A_{eff}) se puede calcular como el área física (A) multiplicada por la eficiencia de iluminación (ϵ_{ap}): $A_{\text{eff}} = A \cdot \epsilon_{\text{ap}}$

Y la directividad está relacionada con el área efectiva en la apertura como: $D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{eff}}$

Por tanto, siendo el área física:

$$\left. \begin{array}{l} L_x = 16 \cdot (0,6 \lambda) \\ L_y = 8 \cdot (0,6 \lambda) \end{array} \right\} A = 46,08 \lambda^2$$

El área efectiva es el área física, ya que por tener alimentación uniforme en amplitud y fase, la eficiencia de iluminación es 1: $A_{\text{eff}} = A \cdot 1 = 46,08 \lambda^2$

En consecuencia, la directividad es: $D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot 46,08 \lambda^2 = 579,1 \Rightarrow 27,6 \text{ dB}$

Ejercicio 4.18

Calcule el ancho de haz entre nulos de un array uniforme con 3 elementos equiespaciados de máxima directividad y nulo en la dirección "endfire".

Solución:

Suponiendo el array sobre el eje Z:

$$FA(\theta) = 1 + e^{-jk_0 \cdot d \cdot \cos\theta} + e^{+jk_0 \cdot d \cdot \cos\theta} = \frac{\text{sen}(3\Psi/2)}{\text{sen}(\Psi/2)} ; \quad \Psi = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta$$

Nulos: $3\Psi/2 = n \cdot \pi \Rightarrow \Psi = \pm 2\pi/3, \pm 4\pi/3$

Condiciones:

Lóbulo principal en la dirección 'broadside' ($\theta = \pm 90^\circ$):

$\Psi = 0 \Rightarrow \theta = -\pi/2 \Rightarrow$ se cumple directamente

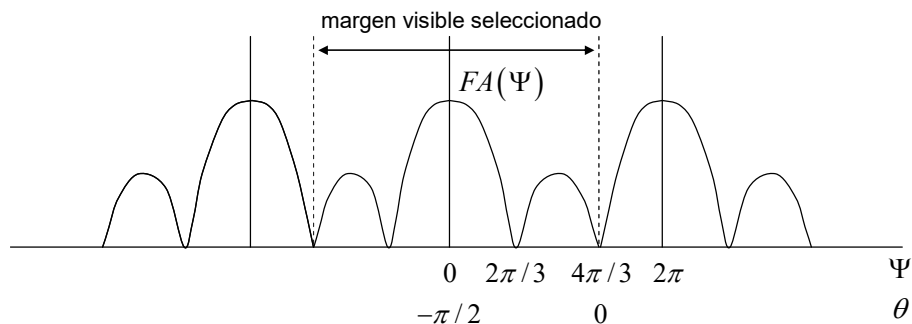
A la vista del factor de array periódico, elegimos que el margen visible abarque todos los lóbulos secundarios (el nulo justo antes de los 'grating lobes') con el fin de maximizar la directividad. Además, en los extremos del margen visible ($\theta = 0^\circ, 180^\circ$) ha de haber un nulo:

$\Psi = 4\pi/3 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = k_0 \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \Rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{2}{3}$ es la separación entre elementos.

Ancho de haz entre nulos:

$$\Psi_{nul} = \frac{2\pi}{3} = k_0 \cdot d \cdot \cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2}{3} \lambda \cdot \cos\theta_{nul}$$

$$\cos\theta_{nul} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{nul} = 60^\circ \text{ (respecto eje z)} \Rightarrow BW_{nul} = 2 \cdot (90^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$$

**Ejercicio 4.19**

Se desea diseñar un array lineal de $N = 4$ elementos, equiespaciados una distancia d , con posibilidad de exploración con un ángulo de apuntamiento θ_0 respecto del eje donde se colocan los elementos del array, a los que se excita con una distribución de amplitud uniforme y fase progresiva α . Indique qué afirmación es correcta para el caso de $d=0,5\lambda$ y array broadside:

- El array es siempre de máxima ganancia.
- SLL= -11,4 dB

c) SLL = -13 dB

d) El lóbulo secundario está a 41° respecto del lóbulo principal.

Solución:

Para el caso de un array en configuración 'broadside' con alimentación uniforme, el desfase entre elementos es $\alpha = 0$.

Por tanto, el Factor de Array periódico viene dado por:

$$FA(\Psi) = \frac{\text{sen}(N\Psi/2)}{N \text{sen}(\Psi/2)} \stackrel{N=4}{=} \frac{\text{sen}(4\Psi/2)}{4 \text{sen}(\Psi/2)}$$

Se calcula la posición de los nulos, dado que la posición del primer lóbulo secundario será el punto medio entre el primer y el segundo nulo.

$$\sin(2\Psi) = 0 \Rightarrow \Psi = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \dots \text{ (en cero y en } 2\pi \text{ está el lóbulo principal).}$$

Por tanto, el primer lóbulo secundario está en la posición: $\Psi = \pm \frac{3\pi}{4}$

Para calcular la relación de nivel entre el lóbulo principal y el lóbulo secundario, evaluamos la expresión del Factor de Array normalizada para el ángulo anteriormente calculado.

$$\left| FA\left(\Psi = \frac{3\pi}{4}\right) \right| = \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{4 \text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)} \right| = 0,27 = -11,4 \text{ dB}$$

Por tanto, el valor de SLL es de -11,4 dB.

Ejercicio 4.20

Respecto del array anterior en el caso 'broadside', indique qué afirmación es correcta (siendo d la separación entre elementos):

a) El ancho de haz, con $d = 0,5 \lambda$, es de 65°.

b) La máxima directividad corresponde a $d = 0,75 \lambda$.

c) Si los elementos fuesen dipolos la directividad aumentaría significativamente colocándolos colineales.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Opción a): Se calcula el ancho de haz a -3 dB para $d = 0,5 \lambda$:

$$FA(\Psi) = \frac{\text{sen}(4\Psi/2)}{4 \text{sen}(\Psi/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ψ (°)	0°	20°	40°	41°
FA(Ψ) (normalizado)	1	0,92	0,72	0,707

Calculamos el valor de este ángulo en θ :

$$\Psi = k_0 d \cos(\theta) = \pi \cos(\theta) = 41 \times \frac{\pi}{180} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(41/180) = 76,8^\circ$$

Por tanto, el BW_{-3dB} sería de $(90^\circ - 76,8^\circ) \times 2 = 26,4^\circ$

Opción c): Colocando dipolos colineales, el diagrama seguiría teniendo simetría de revolución y la directividad no aumentaría de forma significativa, ya que el ancho de haz del dipolo es mucho mayor que el ancho de haz del factor de array.

Opción b): Para maximizar la directividad es necesario considerar un margen visible que abarque hasta el nulo justo antes del primer 'grating lobe':

$$\Psi = \pm \frac{3\pi}{2}; \quad \text{siendo: } \Psi = k_0 d \cos(\theta = 0^\circ) = k_0 d = \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Esta opción es correcta ya que se maximiza la directividad.

Ejercicio 4.21

Respecto del array anterior, pero en el caso 'endfire', indique qué afirmación es correcta:

- La máxima directividad se obtiene con $d = 0,5 \lambda$ y $\alpha = -\pi$.
- La máxima directividad se obtiene con $d = 0,375 \lambda$ y $\alpha = -3\pi/4$.
- La máxima directividad se obtiene con $d = 0,75 \lambda$ y $\alpha = -\pi$.
- Ninguna de las anteriores.

Solución:

En el caso de un array en configuración 'endfire', el lóbulo principal está en la dirección del eje de la agrupación ($\theta = 0^\circ$). Por tanto,

$$\Psi = k_0 d \cos(\theta = 0^\circ) + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -k_0 d$$

Al igual que en el ejercicio anterior, la máxima directividad se tiene cuando el margen visible abarca hasta el nulo anterior al primer 'grating lobe', el cual estará situado en $\theta = 180^\circ$:

$$\Psi = k_0 d \cos(\theta = 180^\circ) + \alpha = -k_0 d - k_0 d = -2k_0 d = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Conocida la separación entre elementos que maximiza la directividad ($d = 0,375 \lambda$), se puede calcular el desfase:

$$\alpha = -k_0 d = \frac{-3\pi}{4}$$

Ejercicio 4.22

Respecto del array anterior pero ahora con el apuntamiento $\theta_0 = 30^\circ$, qué afirmación es correcta:

- La máxima directividad se obtiene con $d = 0,5 \lambda$ y $\alpha = -156^\circ$.
- La máxima directividad se obtiene con $d = 0,5 \lambda$ y $\alpha = -\pi$.
- La máxima directividad se obtiene con $d = 0,4 \lambda$ y $\alpha = -125^\circ$.
- Ninguna de las anteriores.

Solución:

La primera condición es que el lóbulo principal tiene una inclinación de 30°. Por tanto:

$$\Psi = k_0 d \cos(\theta = 30^\circ) + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} k_0 d$$

Para maximizar la directividad, la condición es la misma que en los ejercicios anteriores:

$$\Psi = k_0 d \cos(\theta = 180^\circ) + \alpha = -k_0 d - \frac{\sqrt{3}}{2} k_0 d = -\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{2\pi}{\lambda} d = \underbrace{-\frac{3\pi}{2}}_{\text{Pos. 3er Nulo}} \Rightarrow \frac{d}{\lambda} = 0,4$$

Por tanto, con $d = 0,4 \lambda$ se maximiza la directividad.

El desfase progresivo viene dado por: $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} k_0 d = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{\lambda} 0,4 \lambda = -2,18 \text{ rad} = -124,7^\circ$

4.3. Análisis de arrays

Ejercicio 4.23

Se dispone de un array (agrupación de antenas) lineal de $N=6$ elementos omnidireccionales separados entre sí una distancia d . Suponga los centros de los elementos sobre el eje Z. Calcule:

- Las alimentaciones de los elementos a_n ($n=0, 1, \dots, 5$) y su separación d para que, siguiendo una distribución de fase progresiva (y módulo constante), se consiga un diagrama de máxima directividad con el máximo del lóbulo principal en $\theta = \pi/18$ y un nulo de radiación en $\theta = \pi$.
- Comente, y calcule en su caso, sobre el “ancho de haz entre nulos” y el “ancho de haz a -3dB” del haz principal.
- Una estimación de la directividad.

Nota: $\sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\Psi} = e^{j\frac{N-1}{2}\Psi} \frac{\text{sen}(N\Psi/2)}{\text{sen}(\Psi/2)}$

Solución:

a)

Al igual que en el ejercicio anterior, se especifica la inclinación del lóbulo principal, por tanto:

$$\Psi = k_0 d \cos\left(\theta = \frac{\pi}{18}\right) + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\cos(\pi/18) k_0 d$$

La siguiente condición es que en $\theta = \pi$ haya un nulo. El factor de array de 6 elementos equiespaciados con alimentación uniforme en amplitud y fase progresiva viene dado por:

$$FA(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)}$$

Por tanto, los nulos del factor de array están situados en:

$$FA(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)} = 0 \Rightarrow \text{sen}(3\Psi) = 0 \Rightarrow \Psi = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \pi, \pm \frac{4\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}, \pm 2\pi, \dots$$

Donde $\Psi = 0$ y $\Psi = \pm 2\pi$ corresponden a posiciones de 'grating lobes'.

Para maximizar la directividad, el margen visible ha de abarcar hasta el nulo adyacente al primer 'grating lobe', es decir, $\Psi = \pm 5\pi/3$.

Por otra parte, el margen visible está comprendido en el intervalo $\theta = [0, \pi]$. Como en $\theta = \pi$ tiene que haber un nulo, dicho nulo puede ser $\Psi = \pm 5\pi/3$.

$$\begin{aligned}\Psi &= k_0 d \cos(\theta = \pi) + \alpha = \pm \frac{5\pi}{3} \Rightarrow -k_0 d - \cos(\pi/18) k_0 d = \pm \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{2\pi}{\lambda} d \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)\right) = -\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{5}{6 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)} = 0,42\end{aligned}$$

Por tanto, la separación entre elementos es $d = 0,42 \lambda$.

El desfase progresivo es: $\alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0,42 \lambda = -2,6 \text{ rad} = -149^\circ$

El máximo del factor de array no está en $\theta = 0^\circ$, sino que está en:

$$\Psi = 0,84 \pi \cos(\theta) - 2,6 = 0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2,6}{0,84}\right) = 10^\circ \quad (\text{es decir, } \theta = \pi/18).$$

Calculamos el nivel del factor de array en $\theta = 0^\circ$: $\Psi = 0,84 \pi \cos(0^\circ) - 2,6 = 0,04 \text{ rad}$

$$FA(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)} = \frac{\text{sen}(6 \cdot 0,04/2)}{6 \text{sen}(0,04/2)} = 0,998 = -0,02 \text{ dB}$$

Por tanto, se puede considerar que el factor de array corresponde a una configuración 'endfire'.

b)

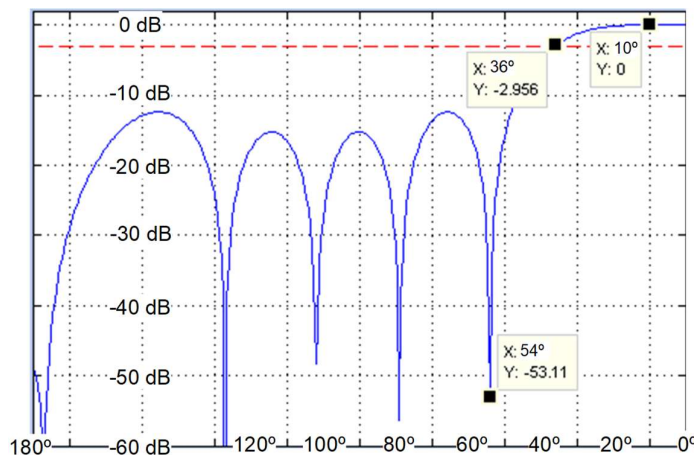
Margen visible: $\Psi = [-k_0 d + \alpha; k_0 d + \alpha] = [-5,24; 0,04]$

▪ Ancho de haz entre nulos:

Determinamos cuál es el ángulo θ correspondiente al primer nulo: $\Psi = -\pi/3$ (ya que $\Psi = +\pi/3$ no está dentro del margen visible).

$$\Psi = 0,84 \pi \cos(\theta) - 2,6 = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-\pi/3 + 2,6}{0,84\pi}\right) = 54^\circ$$

Por tanto, el ancho de haz entre nulos es: $BW_{\text{nulos}} = 54^\circ \times 2 = 108^\circ$.



Factor de array. Eje horizontal: $\theta(^\circ)$. Eje vertical: amplitud normalizada (dB).

- Ancho de haz a -3 dB:

$$FA(\Psi) = \frac{\text{sen}(3\Psi)}{6 \text{sen}(\Psi/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ψ (°)	20°	30°	27°
FA(Ψ) (normalizado)	-1,61 dB	-3,82 dB	-3,03 dB

Determinamos cuál es el ángulo θ correspondiente a: $\Psi = -27^\circ = -0,47$ (ya que $\Psi = +27^\circ$ no está dentro del margen visible).

$$\Psi = 0,84 \pi \cos(\theta) - 2,6 = -0,47 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-0,47 + 2,6}{0,84\pi}\right) = 36^\circ$$

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB es: $BW_{-3 \text{ dB}} = 36^\circ \times 2 = 72^\circ$.

c)

Una estimación de la directividad se puede calcular mediante los anchos de haz a -3 dB:

$$D_0 \approx \frac{41253}{72^\circ \times 72^\circ} = 7,96 = 9 \text{ dBi}$$

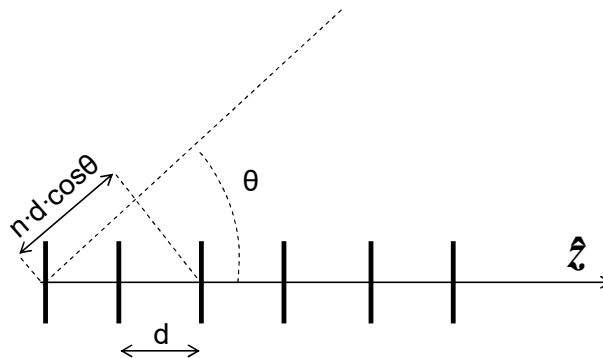
Ejercicio 4.24

Se dispone de un array (agrupación de antenas) lineal de $N=6$ elementos de tipo dipolo resonante, paralelos y separados entre sí una distancia d . Suponga los centros de los dipolos sobre el eje Z . (dipolos perpendiculares al eje del array). Calcule:

- Las alimentaciones de los dipolos a_n ($n = 0, 1, \dots, 5$) y su separación d para que, siguiendo una distribución de fase progresiva (y módulo constante), se consiga un diagrama de máxima directividad con el máximo del lóbulo principal en $\theta = 0$ y un nulo de radiación en $\theta = \pi$.
- Los valores exactos de los “anchos de haz entre nulos” y los “anchos de haz a -3 dB” del haz principal.
- Estime la directividad de la antena.

Solución:

a)



Si las alimentaciones tienen amplitud uniforme y fase progresiva: $a_n = |a_n|e^{j\alpha_n} = e^{jn\alpha}$

Con el array dispuesto sobre el eje Z, se tendrá que el Factor de Array es entonces:

$$FA(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(k_0 d \cos(\theta) + \alpha)}$$

Siendo $\Psi = k_0 d \cos(\theta) + \alpha$, entonces $FA(\Psi) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\Psi}$

Condiciones del enunciado del problema:

1) Se desea que el máximo del Factor de Array ($\psi = 0$), esté en $\theta = 0$ (configuración 'endfire'). Por tanto, $\alpha = -k_0 d$

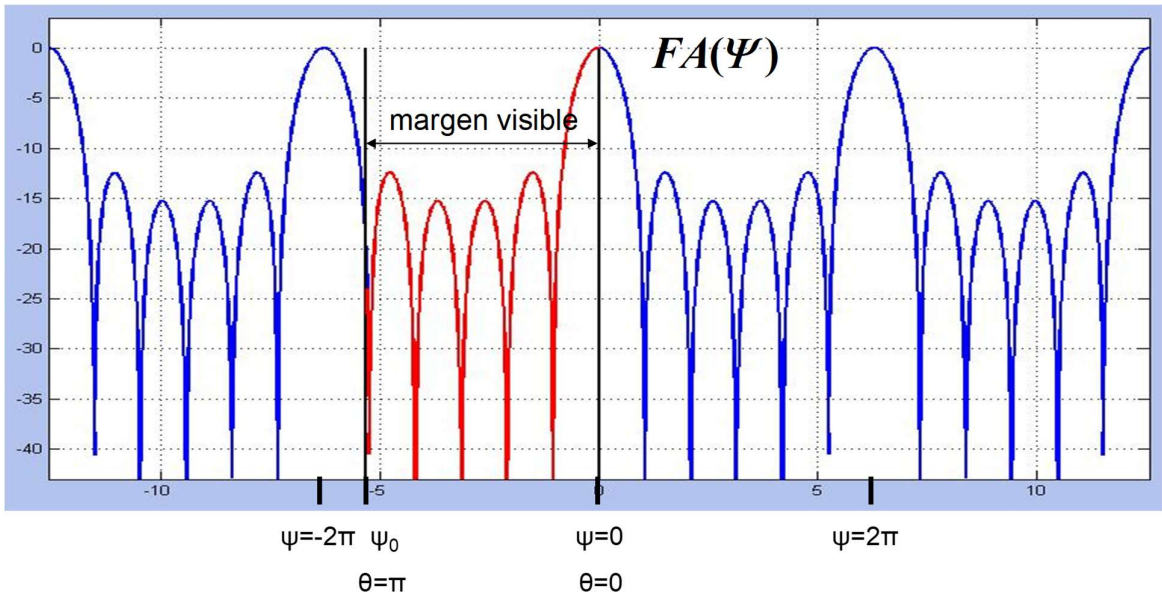
2) Se desea máxima directividad. Por tanto, interesa coger el mayor dominio en ψ (lóbulo principal queda más estrecho) sin llegar a meter el siguiente lóbulo principal repetido ('grating lobe').

3) Nulo en $\theta = \pi$. Por tanto, interesa que coincida con ψ_0 (véase en la gráfica) para coger el mayor dominio en ψ , el lóbulo principal más estrecho y por tanto máxima directividad en esas condiciones. Dicho nulo es el 5º del Factor de Array:

$$|FA(\Psi)|_{normalizado} = \frac{1}{N} \left| \frac{\text{sen}\left(N \frac{\Psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \right|$$

Nulos de $|FA(\Psi)|_{normalizado} \rightarrow N \frac{\Psi}{2} = m \cdot \pi ; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \pm N, \dots$

Sin embargo, los valores de $m = 0$ y $m = N$ no son en realidad nulos, sino que corresponden a la posición de los 'grating lobes'.



ψ_0 corresponderá con el 5º nulo y con $\theta = \pi \rightarrow N \frac{\Psi}{2} = \pm 5\pi \rightarrow 6 \frac{(k_0 d \cos(\pi) - k_0 d)}{2} = \pm 5\pi \rightarrow$

$k_0 d(-2) = \pm \frac{5}{3}\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow d = \frac{5}{12}\lambda = 0,42\lambda$ es la separación entre elementos.

Obsérvese que se ha tenido que elegir $m = -5$ para obtener un valor de $d > 0$, es decir, que el margen visible estará en el período $[-2\pi, 0]$ de la función Factor de Array, tal como se ha representado en la figura.

También ya se puede calcular el valor del desfase progresivo:

$$\alpha = -k_0 d = -\frac{2\pi}{\lambda} d = -\frac{5\pi}{6} = -2,62 \text{ rad} = -150^\circ$$

b)

En el plano perpendicular a los dipolos (corte omnidireccional de los dipolos):

- “Ancho de haz entre nulos”:

$$1^{\text{er}} \text{ nulo} \rightarrow m = -1 \rightarrow N \frac{\Psi}{2} = -\pi \rightarrow N \frac{(kd \cos \theta_{\text{nulo},1} - k)}{2} = -\pi \Rightarrow$$

$$\theta_{\text{nulo},1} = \cos^{-1} \left(\frac{-\frac{2\pi}{N} + kd}{kd} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-\frac{2\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}}{\frac{5\pi}{6}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\frac{3\pi}{6}}{\frac{5\pi}{6}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) = 53,1^\circ$$

Por tanto, el ancho de haz entre nulos es: $BW_{\text{nulos}} = 106,2^\circ$

- “Ancho de haz a -3 dB”:

Caída de 3 dB desde el máximo del lóbulo principal:

$$\frac{1}{N} \left| \frac{\text{sen} \left(N \frac{\Psi_{-3dB}}{2} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\Psi_{-3dB}}{2} \right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \left| \frac{\text{sen}(3\Psi_{-3dB})}{\text{sen} \left(\frac{\Psi_{-3dB}}{2} \right)} \right| = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,24$$

Ecuación que puede resolverse por el método iterativo de Newton o simplemente por tanteo como se indica en la tabla:

$\pm\Psi_{-3dB}$	30°	40°	20°	25°	26°	27°
$\left \frac{\text{sen}(3\Psi_{-3dB})}{\text{sen}(\Psi_{-3dB}/2)} \right $	3,86	2,53	4,98	4,46	4,34	4,23

Luego $\Psi_{-3dB} = -27^\circ = -0,47 \text{ rad} \Rightarrow \Psi_{-3dB} = k_0 d \cos \theta_{-3dB} + \alpha \Rightarrow$

$$\theta_{-3dB} = \cos^{-1} \left(\frac{\Psi_{-3dB} - \alpha}{kd} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-0,47 + 2,62}{2,62} \right) = 34,9^\circ \Rightarrow BW_{-3dB} = 69,8^\circ$$

En el plano que contiene a los dipolos, en principio el diagrama del elemento modificaría la forma del Factor de Array para conformar el diagrama final. Sin embargo, por lo poco directivo que es el dipolo, el lóbulo principal del Factor de Array se modificará sólo ligeramente por el diagrama del dipolo. Se puede realizar de forma exacta multiplicando el Factor de Array por el diagrama del dipolo resonante en el plano que contiene tanto al dipolo como al eje del array (eje Z). (Nótese la diferencia de dicha expresión para el plano mencionado respecto de cuando el dipolo se coloca sobre el eje Z).

$$\frac{1}{N} \left| \frac{\text{sen} \left(N \frac{\Psi_{-3dB}}{2} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\Psi_{-3dB}}{2} \right)} \right| \cdot \left| \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \text{sen} \theta \right)}{\cos \theta} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta \simeq 29^\circ \Rightarrow BW_2 \simeq 58^\circ$$

c)

Directividad

$$D_0 \cong \frac{41253}{BW_{-3dB}|_{\text{plano 1}} \cdot BW_{-3dB}|_{\text{plano 2}}} = \frac{41253}{69,8 \cdot 58} = 10,2 \Rightarrow 10,1 \text{ dB}$$

Ejercicio 4.25

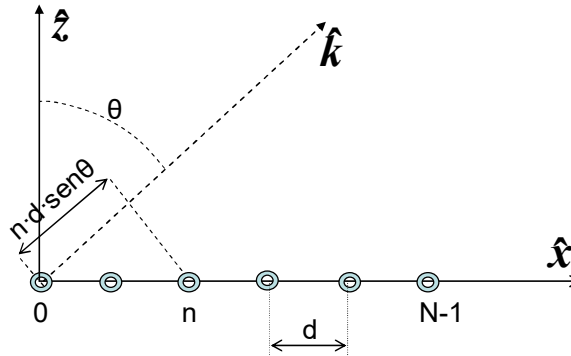
Se dispone de un array (agrupación de antenas) lineal de N=6 elementos, dispuestos a lo largo del eje 'x':

- a) Suponiendo que los elementos son dipolos cortos, paralelos entre sí (según \hat{y}), equiespaciados y excitados conforme a una distribución uniforme en amplitud y progresiva en fase (desfase entre elementos α), calcule dicho parámetro α y la separación entre dipolos (d/λ) para que el lóbulo principal, en el plano perpendicular a los dipolos, apunte a $\theta_0 = 10^\circ$ (respecto de la normal al array) y la antena tenga máxima directividad.
- b) Suponiendo elementos equiespaciados $d = \lambda/2$, calcule el valor de fase progresiva para obtener un array de tipo "endfire", así como una estimación de la directividad tanto con los dipolos cortos situados paralelos entre sí como si se dispusieran de forma colineal.
- c) Sustituyendo ahora los elementos de tipo dipolo por bocinas con diagrama de campo de tipo $\cos^{2.5}(\theta)$, $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$, equiespaciadas $d = \lambda/2$ y con excitaciones tales que configuran un array de tipo "broadside", calcule: los anchos de haz (a -3dB) del haz principal, una estimación de la directividad y el nivel de lóbulo secundario adyacente.

Notas: $\sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\psi} = e^{j\frac{N-1}{2}\psi} \frac{\text{sen}(N\psi/2)}{\text{sen}(\psi/2)}$ Directividad del dipolo corto: 1,5

Solución:

a)

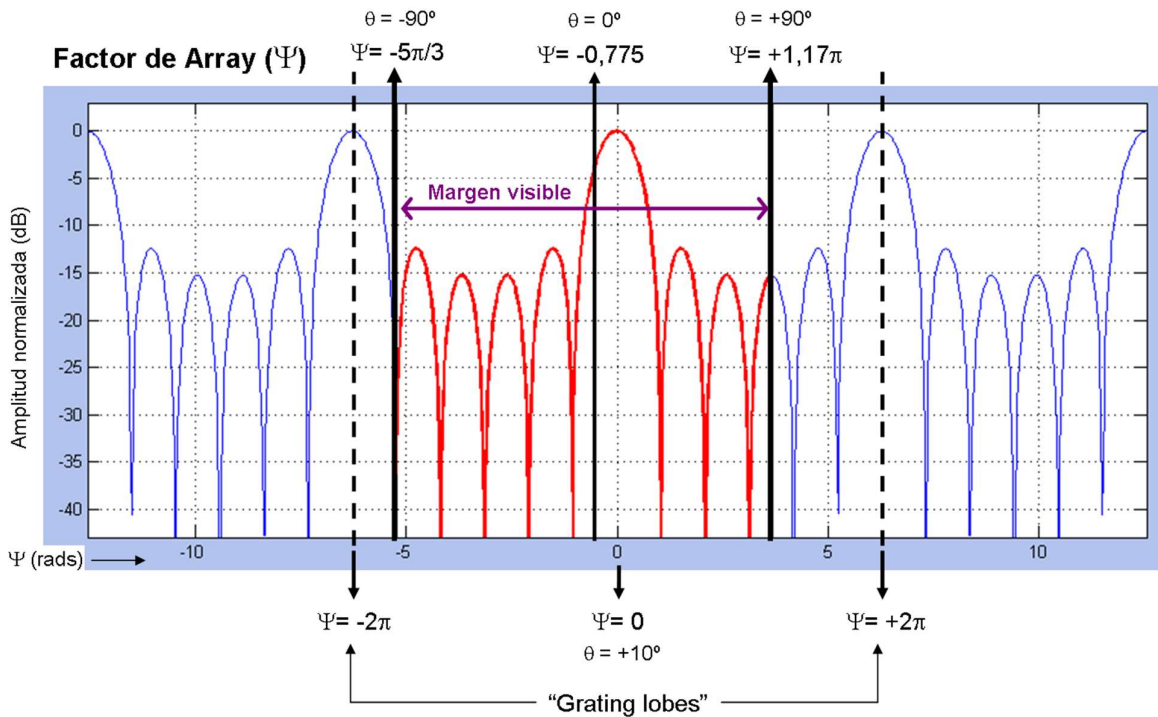


Si las alimentaciones tienen amplitud uniforme y fase progresiva:

$$a_n = |a_n| \cdot e^{j\alpha n} = e^{j\alpha n}$$

Con el array dispuesto sobre el eje X, se tendrá que el Factor de Array en el plano perpendicular a los dipolos (plano XZ) es entonces:

$$FA(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(kd \text{sen}\theta + \alpha)}, \text{ llamando } \Psi = kd \text{sen}\theta + \alpha, \text{ se tendrá: } FA(\Psi) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\Psi}$$



Factor de array periódico y margen visible.

Condiciones del enunciado del problema:

En el plano XZ el diagrama del elemento es omnidireccional => la directividad que se consiga en ese plano dependerá sólo del Factor de Array.

1ª condición, se desea que el máximo del Factor de Array ($\psi=0$), esté en $\theta = 10^\circ$:

$$\Psi = k_0 d \operatorname{sen}(10^\circ) + \alpha = 0 \quad (I)$$

2ª condición, se desea máxima directividad => interesa coger el mayor dominio en ψ (lóbulo principal queda más estrecho) sin llegar a meter el siguiente lóbulo principal repetido ("grating lobe"):

Se elige para ello que el 5º nulo (véase figura) del Factor de Array sea para $\theta = -90^\circ$

$$\text{Factor de Array (normalizado): } |FA(\Psi)|_{norm} = \frac{1}{N} \left| \frac{\operatorname{sen}(N\Psi/2)}{\operatorname{sen}(\Psi/2)} \right|$$

$$\text{Nulos del Factor de Array: } |FA(\Psi)|_{norm} = 0 \Rightarrow N \frac{\Psi}{2} = m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 1, N, \dots$$

Sin embargo, los valores de $m=0$ y $m=N$ no son en realidad nulos, sino que corresponden a la posición del máximo de los "grating lobes".

$$\text{El 5º nulo y con } \theta = -90^\circ \Rightarrow N \frac{k_0 d \operatorname{sen}(-90^\circ) + \alpha}{2} = \pm 5\pi \Rightarrow$$

$$-k_0 d + \alpha = \pm \frac{5}{3}\pi \quad (II)$$

Con las ecuaciones (I) y (II) y eligiendo el signo para que $d > 0$, se llega a:

$$-k_0 d - k_0 d \operatorname{sen}(10^\circ) = -\frac{5}{3}\pi$$

$$k_0 d = \frac{5\pi/3}{1 + \text{sen}(10^\circ)} = 1,42 \pi = 4,46 \text{ rad} = 255,6^\circ$$

$$d/\lambda = \frac{5/6}{1 + \text{sen}(10^\circ)} = 0,71$$

Por tanto, la separación entre elementos es de $0,71 \lambda$

Y el valor del desfase progresivo será:

$$\alpha = -k_0 d \text{sen}(10^\circ) = -0,775 \text{ rad} = -44,4^\circ$$

Obsérvese que se ha tenido que elegir $m = -5$ para obtener un valor de $d > 0$, es decir, que el margen visible incluye parte del período $[-2\pi; 0]$ de la función Factor de Array, tal como se ha representado en la figura. De hecho, el margen visible estará en el rango:

$$[\Psi_1, \Psi_2] = [\alpha - k_0 d; \alpha + k_0 d] = [-1,66 \pi \text{ rad}; 1,17 \pi \text{ rad}] \approx [-300^\circ; 211,2^\circ]$$

Si se hubiera elegido que el 5º nulo del Factor de Array correspondiera a $\theta = +90^\circ$, con ambas condiciones impuestas se llegaría a un valor:

$$k_0 d \text{sen}(10^\circ) + \alpha = 0$$

$$k_0 d + \alpha = \pm \frac{5}{3} \pi$$

$$k_0 d - k_0 d \text{sen}(10^\circ) = \pm \frac{5}{3} \pi$$

eligiendo el signo para que $d > 0$:

$$k_0 d = \frac{5\pi/3}{1 - \text{sen}(10^\circ)} = 2,02 \pi = 6,34 \text{ rad} = 363,04^\circ$$

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{5/6}{1 - \text{sen}(10^\circ)} = 1,01$$

$$\alpha = -k_0 d \text{sen}(10^\circ) = -1,1 \text{ rad} = -63,08^\circ$$

Y el margen visible sería:

$$[\Psi_1, \Psi_2] = [\alpha - k_0 d; \alpha + k_0 d] \approx [-426,12^\circ; 300^\circ]$$

Lo que implicaría que entrarían los "grating lobes" y no cumpliría requisito de máxima directividad.

b)

$$\Psi = kd \text{sen}(\theta) + \alpha = 0$$

Para un array "endfire":

$$\Psi = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = -k_0 d = -\pi = -180^\circ$$

$$\Psi = \pi \text{sen}(\theta) - \pi = \pi (\text{sen}\theta - 1)$$

- 1er caso: dipolos cortos paralelos entre sí y orientados según el eje 'y'

En el plano perpendicular a los dipolos (XZ) (corte omnidireccional de los dipolos):

Ancho de haz a -3dB del Factor de Array => caída de 3 dB desde el máximo del lóbulo principal:

$$|FA(\Psi_{-3dB})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\text{sen}(N\Psi_{-3dB}/2)}{\text{sen}(\Psi_{-3dB}/2)} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{\text{sen}(3\Psi_{-3dB})}{\text{sen}(\Psi_{-3dB}/2)} \right| = 1/\sqrt{2}$$

Ecuación que puede resolverse por el método iterativo de Newton o simplemente por tanteo como se indica en la tabla:

Ψ_{-3dB}	30°	20°	25°	26°	27°
$ FA(\Psi_{-3dB}) ^2$	0,41	0,69	0,55	0,52	0,497

Por tanto, $\Psi_{-3dB} \approx \pm 27^\circ = \pm 0,47 \text{ rad}$

$$\theta_{-3dB} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\Psi_{-3dB} - \alpha}{k_0 d} \right) = \text{sen}^{-1} \left(\frac{-0,47 + \pi}{\pi} \right) = 58,2^\circ$$

En consecuencia, $BW_{-3dB} = 2 \times (90^\circ - 58,2^\circ) = 2 \times 31,8^\circ = 63,6^\circ$, ya que el ángulo θ se mide desde la normal al array.

En el plano coplanar a los dipolos, en principio el diagrama de éstos contribuiría a conformar el diagrama final. Sin embargo, por lo poco directivo que es el dipolo (en su plano directivo), el lóbulo principal del diagrama total apenas se verá modificado por el diagrama del dipolo, pudiendo considerar el ancho de haz en este plano similar al obtenido en el plano perpendicular a los dipolos debido al Factor de Array. (Se podría realizar de forma exacta multiplicando el Factor de Array por el diagrama coseno del dipolo).

Directividad suponiendo 1 lóbulo "endfire":

$$D_{0,lób.endfire} \cong \frac{41253}{BW_{-3dB}|_{\text{plano 1}} \cdot BW_{-3dB}|_{\text{plano 2}}} = \frac{41253}{63 \cdot 6^2} = 10,2 \Rightarrow 10,1 \text{ dBi}$$

En realidad, puesto que existe también un lóbulo simétrico en $\theta = -90^\circ$, se puede aproximar la directividad como:

$$D_0 = \frac{D_{0,lób.endfire}}{2} \Rightarrow 7,1 \text{ dBi}$$

- 2º caso: dipolos cortos colineales:

En este caso el diagrama del dipolo impone un nulo en la dirección colineal por lo que *no se podría conseguir el diagrama típico del array "endfire"*, y no se podría dar una estimación de la ganancia por anchos de haz, salvo la integración directa de su diagrama.

c)

Array "broadside" y $d = \lambda/2$, con elementos de tipo bocina con diagrama de campo $\cos^{2,5}(\theta)$:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \Psi = kd \text{ sen}(\theta) + \alpha = \pi \text{ sen}(\theta)$$

Puesto que se indica que las bocinas tienen el máximo del diagrama en $\theta=0$, estarán apuntando en dirección del eje 'z':

- En el plano XZ:

El diagrama normalizado de campo será:

$$\frac{1 \text{ sen}(N\Psi/2)}{N \text{ sen}(\Psi/2)} \cdot \cos^{2,5}(\theta) = \frac{1 \text{ sen}(N \pi \text{ sen}(\theta)/2)}{N \text{ sen}(\pi \text{ sen}(\theta)/2)} \cdot \cos^{2,5}(\theta)$$

Por tanto, para calcular el ancho de haz:

$$|FA(\theta_{-3dB})| = \left| \frac{1 \text{ sen}(3\pi \cdot \text{sen}(\theta_{-3dB}))}{6 \text{ sen}(\pi \cdot \text{sen}(\theta_{-3dB})/2)} \cdot \cos^{2,5}(\theta_{-3dB}) \right| = 1/\sqrt{2}$$

Por tanteo:

θ_{-3dB}	10°	8°	8,25°
$ FA(\theta_{-3dB}) ^2$	0,353	0,526	0,503

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB es: $BW_{-3dB} \approx 16,5^\circ$

- En el plano YZ:

El diagrama del Factor de Array es omnidireccional, por lo que se tendrá que evaluar exclusivamente el ancho de haz en ese plano del elemento de tipo bocina:

$$\cos^{2,5}(\theta_{-3dB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_{-3dB} = \cos^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2,5}\right)}\right) = 29,5^\circ \Rightarrow BW = 59^\circ$$

Una estimación de la directividad vendrá dada por:

$$\text{Directividad: } D_0 \cong \frac{41253}{BW_{-3dB|plano 1} \cdot BW_{-3dB|plano 2}} = \frac{41253}{16,5^\circ \cdot 59^\circ} = 42,4 \Rightarrow 16,3 \text{ dBi}$$

El máximo del lóbulo secundario adyacente estará entre los nulos primero y segundo del Factor de Array:

$$\left. \begin{array}{l} 3\Psi_{nulo,1} = \pi \Rightarrow \Psi_{nulo,1} = \pi/3 \\ 3\Psi_{nulo,2} = 2\pi \Rightarrow \Psi_{nulo,2} = 2\pi/3 \end{array} \right\} \Psi_{lóbulo \text{ sec}} = \frac{\Psi_{nulo,1} + \Psi_{nulo,2}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{\pi}{2} = \pi \sin(\theta_{lob. \text{ sec}}) \Rightarrow \theta_{lob. \text{ sec}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

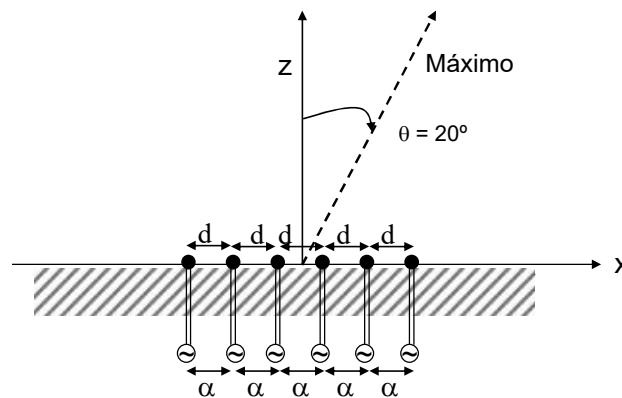
Nivel de lóbulo secundario adyacente (en relación al máximo del lóbulo principal):

$$SLL = FA_{norm}(\theta_{lob. \text{ sec}}) \cos^{2,5}(\theta_{lob. \text{ sec}}) = \frac{1 \text{ sen}\left(3 \pi \text{ sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{6 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{ sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)} \cdot \cos^{2,5}(\pi/6) = 0,1644 \Rightarrow -15,7 \text{ dB}$$

Ejercicio 4.26

Se desea diseñar una antena de tipo array con las siguientes características:

La antena está formada por 6 elementos equiespaciados "d", y alimentados con amplitud uniforme y un desfase progresivo "α". El eje de la agrupación es el eje "x". La posición del lóbulo principal es $\theta = +20^\circ$. En la posición $\theta = 0^\circ$ el nivel de campo será 3 dB menor que en el máximo.



Se pide calcular:

El valor de “ α ” necesario para que los lóbulos apunten en las direcciones indicadas.

El valor de “ d ” necesario para que los lóbulos apunten en las direcciones indicadas.

La posición del primer nulo a la izquierda del lóbulo principal.

El ancho de haz a -3 dB del diagrama de radiación.

Solución:

Considérese la expresión del factor de array para una antena de N elementos:

$$F_A = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 \vec{r}_n' \cdot \hat{r}} = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 |\vec{r}_n'| \sin(\theta)}$$

En el enunciado del problema se indica que los elementos están equiespaciados una distancia “ d ”, y alimentados uniformemente en amplitud y con fase progresiva. Por tanto, la ley de excitación viene dada por:

$$A_n = a_n e^{j\alpha_n} = e^{j\left(n - \frac{N+1}{2}\right)\alpha}, \quad |\vec{r}_n'| = \left(n - \frac{N+1}{2}\right)d$$

Donde A_n es la alimentación (amplitud y fase) del elemento n -ésimo, a_n es la amplitud, y α_n la fase.

Sustituyendo en la expresión del factor de array, se obtiene:

$$F_A = \sum_{n=1}^N e^{j\left(n - \frac{N+1}{2}\right)\alpha} e^{jk_0 \left(n - \frac{N+1}{2}\right)d \cdot \sin(\theta)}$$

A continuación, se efectúa el siguiente cambio de variable. Se define la variable Ψ como:

$$\Psi = k_0 d \sin(\theta) + \alpha$$

Sustituyendo de nuevo en la expresión del factor de array, y haciendo el cambio de variable

$$m = n - 1,$$

$$F_A(\Psi) = \sum_{n=1}^N e^{j\left(n - \frac{N+1}{2}\right)\Psi} \stackrel{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j\left(m - \frac{N-1}{2}\right)\Psi} = e^{-j\frac{N-1}{2}\Psi} \sum_{m=0}^{N-1} e^{jm\Psi}$$

El sumatorio anterior corresponde a una suma geométrica, que se puede expresar en forma de un cociente de dos funciones de tipo seno.

A partir del desarrollo de la suma geométrica, se obtiene la expresión:

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{jm\Psi} = 1 + e^{j\Psi} + \dots + e^{j(N-1)\Psi} = \frac{e^{j(N-1)\Psi} e^{j\Psi} - 1}{e^{j\Psi} - 1} = \frac{e^{jN\Psi} - 1}{e^{j\Psi} - 1}$$

Donde en dicha suma geométrica la razón es $e^{j\Psi}$.

Operando con el término que multiplica a la suma geométrica, se obtiene la expresión final en función del seno:

$$e^{-j\frac{N\Psi}{2}} \cdot e^{+j\frac{\Psi}{2}} \cdot \frac{e^{jN\Psi} - 1}{e^{j\Psi} - 1} = \frac{e^{-j\frac{N\Psi}{2}} \cdot e^{jN\Psi} - e^{-j\frac{N\Psi}{2}}}{e^{-j\frac{\Psi}{2}} \cdot e^{j\Psi} - e^{-j\frac{\Psi}{2}}} = \frac{2j \cdot \frac{e^{j\frac{N\Psi}{2}} - e^{-j\frac{N\Psi}{2}}}{2}}{2j \cdot \frac{e^{+j\frac{\Psi}{2}} - e^{-j\frac{\Psi}{2}}}{2}} = \frac{\text{sen}(N\Psi/2)}{\text{sen}(\Psi/2)}$$

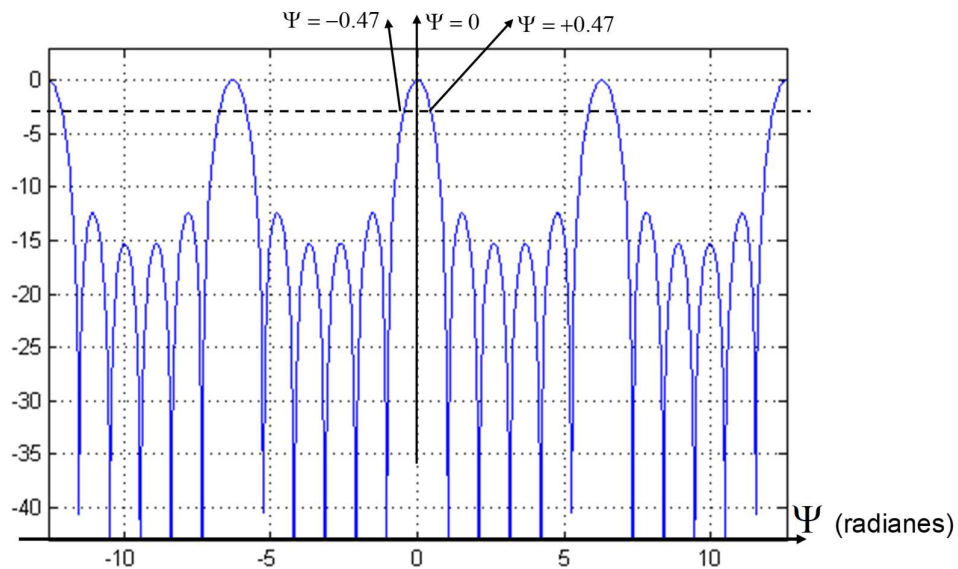
Si normalizamos el factor de array empleando el número de elementos, N :

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(N\Psi/2)}{N \text{sen}(\Psi/2)}$$

Y particularizando para $N = 6$:

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)}$$

Una vez deducida la expresión del factor de array normalizado, se representa el mismo en el dominio Ψ :



Representación del factor de array periódico

Donde el eje horizontal es la variable Ψ (en radianes), y el eje vertical es la amplitud de $\bar{F}_A(\Psi)$ (en dB).

Una de las condiciones del enunciado es que la ley de excitación del factor de array ha de cumplir que en la posición $\theta = 0^\circ$ el nivel de campo será 3 dB menor que en el máximo. Por tanto, es necesario calcular el valor de Ψ para el cual el factor de array tiene un valor de -3 dB ($1/\sqrt{2}$ en unidades naturales).

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)} = 1/\sqrt{2}$$

La ecuación anterior no tiene solución analítica, y es necesaria resolverla por aproximaciones sucesivas.

$$\text{sen}(3\Psi) - 6 \text{sen}(\Psi/2)/\sqrt{2} = 0$$

Valor de Ψ	2	1	0,5	0,45	0,46	0,47
Valor del término de la izda.	-3,85	-1,89	-0,05	0,03	0,015	< 0,001

Resolviendo la ecuación anterior, el valor de Ψ obtenido es: $\Psi = 0,47$. Es importante recordar que la solución $\Psi = 0$ corresponde a la posición del lóbulo principal, por tanto, no es solución válida de la ecuación anterior. Por otra parte, dadas las propiedades de la función seno, la solución $\Psi = -0,47$ también es válida.

En consecuencia, las especificaciones que ha de cumplir el factor de array en el dominio Ψ son las siguientes:

$$F_{A,N}(\Psi) = 1 \quad \text{en } \Psi = 0 \text{ [rad]}$$

$$F_{A,N}(\Psi) = 1/\sqrt{2} \quad \text{en } \Psi = \pm 0,47 \text{ [rad]}$$

Una vez planteadas las condiciones en el dominio Ψ , se expresan en función del ángulo θ mediante la relación $\Psi = k_0 d \text{ sen}(\theta) + \alpha$. Por una parte, se tiene que la posición del lóbulo principal está en $\theta = 20^\circ$ (es decir, $\Psi = 0$ rad), mientras que en la posición $\theta = 0^\circ$ (posición $\Psi = \pm 0,47$ rad) la amplitud del factor de array cae 3 dB.

Por tanto, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones, tomando $\Psi = 0,47$ rad:

$$\begin{cases} 0 = k_0 d \text{ sen}(\theta = 20^\circ) + \alpha \\ 0,47 = k_0 d \text{ sen}(\theta = 0^\circ) + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = k_0 d \text{ sen}(\theta = 20^\circ) + \alpha \\ 0,47 = \alpha \end{cases}$$

Por tanto, $\alpha = 27^\circ$

Despejando, se obtiene $d = -0,219 \lambda$. Esta es una solución no válida ya que la separación entre elementos, "d", no puede ser un valor negativo.

En consecuencia, se considera el valor $\Psi = -0,47$ rad para la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 0 = k_0 d \text{ sen}(\theta = 20^\circ) + \alpha \\ -0,47 = k_0 d \text{ sen}(\theta = 0^\circ) + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = k_0 d \text{ sen}(\theta = 20^\circ) + \alpha \\ -0,47 = \alpha \end{cases}$$

Por tanto, " α " = -27°

Despejando, se obtiene $d = +0,219 \lambda$. Que es una solución válida ya que $d > 0$.

Otra de las cuestiones planteadas en el enunciado es la determinación de la posición de los nulos del factor de array. Para ello, basta con igualar a cero la expresión del factor de array:

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{ sen}(\Psi/2)} = 0$$

Igualando el numerador a cero, se obtiene que la posición de los nulos en el dominio Ψ es:

$$\text{sen}(3\Psi) = 0 \rightarrow \Psi = \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{3\pi}{3}, \dots \text{ [rad]}$$

Calculamos el margen visible. Para ello, se parte de la expresión $\Psi = k_0 d \text{ sen}(\theta) + \alpha$. El margen visible está comprendido entre $\Psi \in [-k_0 d + \alpha, k_0 d + \alpha]$. Por tanto, $\text{sen}(\theta) = \pm 1$. Esta condición se cumple para los valores $\theta_1 = -90^\circ$ y $\theta_2 = +90^\circ$.

Se calculan los valores de Ψ correspondientes a los límites del margen visible.

$$\theta_1 = -90^\circ \Rightarrow \Psi = k_0 d \text{ sen}(\theta_1 = -90^\circ) + \alpha = -k_0 d + \alpha = -1,84 \text{ [rad]}$$

$$\theta_2 = +90^\circ \Rightarrow \Psi = k_0 d \text{ sen}(\theta_1 = +90^\circ) + \alpha = +k_0 d + \alpha = 0,904 \text{ [rad]}$$

Por tanto, teniendo en cuenta los límites del margen visible en el dominio Ψ así como la posición de los nulos, el primer nulo a la izquierda del lóbulo principal es $\Psi = -\pi/3$ [rad].

La posición de dicho nulo en el dominio angular θ es: $-\frac{\pi}{3} = k_0 d \sin(\theta) + \alpha$. Despejando θ se obtiene que la posición del primer nulo a la izquierda del lóbulo principal es $\theta = -24,8^\circ$

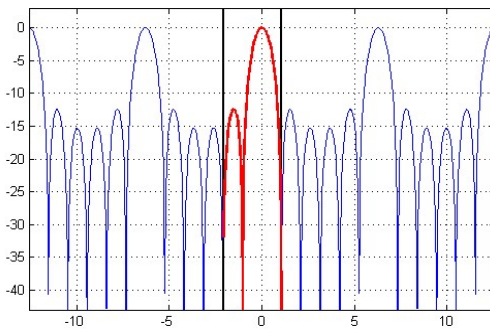
Finalmente se calcula el ancho de haz a -3 dB. Una de las posiciones ya se conoce (es la correspondiente a $\theta = 0^\circ$).

Recordemos que: $F_{A,N}(\Psi) = 1/\sqrt{2}$ en $\Psi = \pm 0,47$

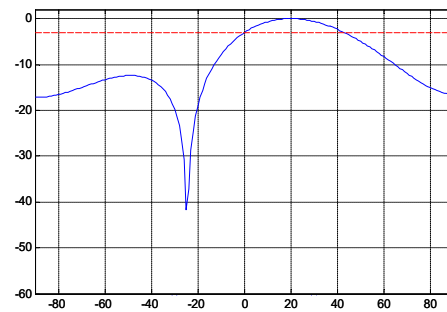
Por tanto, para el valor $\Psi = +0,47$, se calcula el valor de θ . $\Psi = k_0 d \sin(\theta) + \alpha = 0,47$. Despejando se obtiene: $\theta = 46,16^\circ$

En consecuencia, el ancho de haz a -3 dB es: $BW_{-3dB} = 46,16^\circ$

Finalmente, en la siguiente figura se representa el margen visible del factor de array periódico, así como el factor de array en el dominio θ .



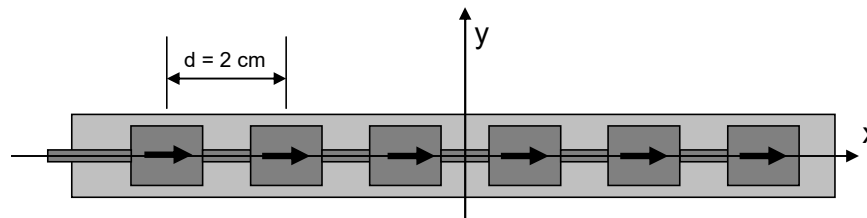
Factor de array periódico y margen visible (en rojo). Eje horizontal: Ψ (en rad), eje vertical: amplitud normalizada (en dB).



Factor de array. Eje horizontal: θ (en $^\circ$), eje vertical: amplitud normalizada (en dB).

Ejercicio 4.27

Se presente diseñar un array que permita realizar “beamscanning” (escaneo mediante variación del lóbulo principal) variando la frecuencia de trabajo. El array está formado por 6 parches rectangulares alimentados en serie, es decir, con amplitud uniforme y desfase progresivo, con dicho desfase proporcional a $n \times d$, siendo n el número del elemento ($n = 1, 2, \dots, 6$) y d , la separación entre elementos ($d = 2$ cm). Los elementos están emplazados en el eje x (ver figura). Considere el plano XZ como plano de trabajo.



Determine la dirección de apuntamiento del lóbulo principal para $f = 15$ GHz

Determine la dirección de apuntamiento del lóbulo principal para $f = 12$ GHz

Determine el ancho entre nulos para $f = 15$ GHz

Determine el ancho entre nulos para $f = 12$ GHz

(Nota: En el factor de array periódico, considere el intervalo $\Psi = [\pi, 3\pi]$)

Solución:

En este problema, el desfase entre elementos viene dado por la separación entre los mismos (d). Dicho desfase dependerá de la frecuencia de trabajo.

En primer lugar, se calcula la ley de excitación a 15 GHz:

Siendo $\lambda = \frac{30}{15} = 2$ cm , el desfase entre elementos será: $\left(n - \frac{N+1}{2}\right) \cdot d(\text{cm}) \cdot \frac{2\pi}{\lambda(\text{cm})}$

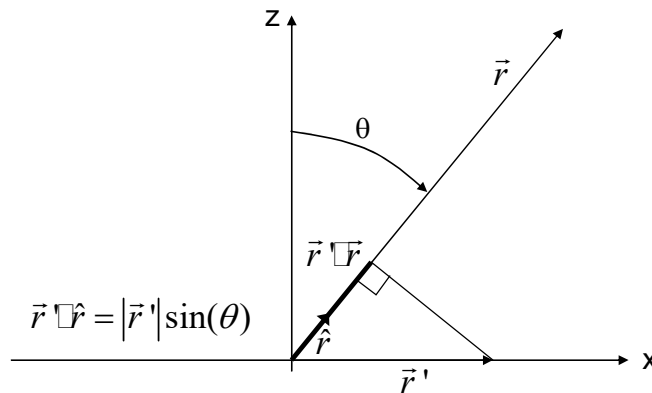
$$A_n = a_n e^{j\alpha_n} = 1 \cdot e^{j\left(n - \frac{N+1}{2}\right)\alpha} = 1 \cdot e^{j\left(n - \frac{N+1}{2}\right) \cdot d \cdot 2\pi/\lambda}$$

Para cada uno de los elementos, la fase viene dada en la siguiente tabla:

Elemento (n)	1	2	3	4	5	6
Posición (cm)	-5	-3	-1	1	3	5
Fase (°)	-900	-540	-180	180	540	900

Una vez determinada la posición y la fase de cada elemento, se calcula la expresión del factor de array. En este problema, los elementos están colocados según el eje "x":

Factor de array: $F_A = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 \vec{r}_n' \cdot \hat{r}} = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 |\vec{r}_n'| \sin(\theta)}$



Determinación del producto escalar del vector de posición de cada elemento por el vector unitario de observación del factor de array.

Para la frecuencia de trabajo de 15 GHz, se tiene un array lineal de elementos equiespaciados, con alimentación uniforme en amplitud y fase progresiva, siendo $\alpha = 360^\circ$, y $d = 1 \lambda$.

Ley de excitación: $A_n = a_n e^{j\alpha_n} = e^{j\left(n - \frac{N+1}{2}\right)\alpha}$, $|\vec{r}_n'| = \left(n - \frac{N+1}{2}\right) d$

$$F_A = \sum_{n=1}^N e^{j\left(n - \frac{N+1}{2}\right)\alpha} e^{jk_0 \left(n - \frac{N+1}{2}\right) d \cdot \sin(\theta)}$$

Definiendo $\Psi = k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha$, y desarrollando la expresión del factor de array como en el primer ejercicio de este tema, se llega a la expresión normalizada del factor de array para $N = 6$ elementos:

Particularizando para $N = 6$:
$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)}$$

Es importante destacar que, como se indica en el enunciado, el margen de trabajo es $\Psi = [\pi, 3\pi]$, por lo que en este problema se tiene que $F_{A,N}(\Psi) = 1$ en $\Psi = 2\pi$

- Lóbulo principal:

La posición del lóbulo principal en el dominio visible θ , se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Psi = 2\pi &= k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \lambda \cdot \text{sen}(\theta) + 2\pi \\ 2\pi - 2\pi &= 2\pi \cdot \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) &= 0 \\ \theta &= 0^\circ\end{aligned}$$

Por tanto, el lóbulo principal está en la posición $\theta = 0^\circ$.

- Ancho de haz entre nulos:

En primer lugar, se calcula la posición de los nulos del factor de array en el dominio Ψ :

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)} = 0, \quad \text{sen}(3\Psi) = 0$$

Por tanto, $\Psi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi, 7\pi/3, 8\pi/3, \dots$ Los números tachados corresponden a la posición del lóbulo principal y de los "grating lobes" (repeticiones del lóbulo principal debidas a la periodicidad de la función factor de array).

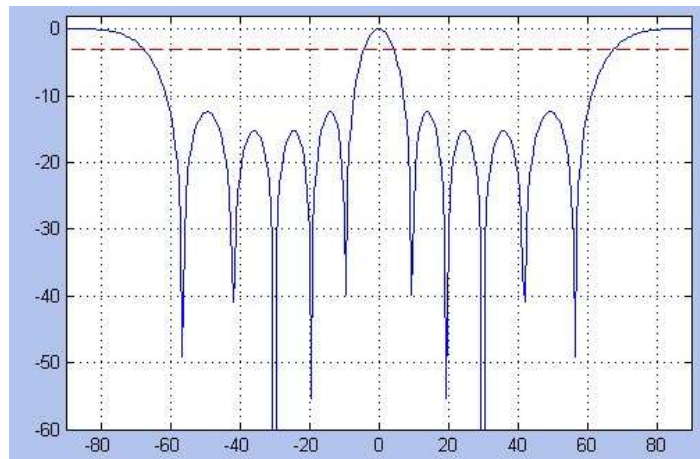
En el intervalo $\Psi = [\pi, 3\pi]$ hay los siguientes nulos: $\Psi = 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi, 7\pi/3, 8\pi/3$

Cogemos los nulos situados a ambos lados del lóbulo principal (indicados en negrita), y calculamos su posición en el margen visible:

Nulo a la izquierda del lóbulo principal:	Nulo a la derecha del lóbulo principal:
$\Psi = \frac{5\pi}{3} = k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha = 2\pi \cdot \text{sen}(\theta) + 2\pi$ $-1/3 = 2 \cdot \text{sen}(\theta)$ $\text{sen}(\theta) = -1/6$ $\theta = -9,6^\circ$	$\Psi = \frac{7\pi}{3} = k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha = 2\pi \cdot \text{sen}(\theta) + 2\pi$ $+1/3 = 2 \cdot \text{sen}(\theta)$ $\text{sen}(\theta) = +1/6$ $\theta = +9,6^\circ$

Por tanto, el ancho de haz entre nulos es de $19,2^\circ$

Finalmente, se representa el factor de array. Se puede observar la posición del lóbulo principal en $\theta = 0^\circ$ así como dos "grating lobes" en las posiciones $\theta = -90^\circ$ y $\theta = +90^\circ$.



Factor de array para $f = 15$ GHz. Eje horizontal: θ ($^\circ$). Eje vertical: amplitud normalizada del factor de array (dB).

Una vez determinada la ley de excitación y el factor de array para $f = 15$ GHz, se repiten los cálculos para la frecuencia de 12 GHz.

En este caso, $\lambda = 30/12 = 2,5$ cm. Por tanto, el desfase es: $\left(n - \frac{N+1}{2}\right) \cdot d(\text{cm}) \cdot \frac{2\pi}{\lambda(\text{cm})}$

La fase de cada elemento para esta frecuencia de trabajo viene indicada en la siguiente tabla:

Elemento (n)	1	2	3	4	5	6
Posición (cm)	-5	-3	-1	1	3	5
Fase ($^\circ$)	-720	-432	-144	144	432	720

Por tanto, se tiene un array lineal de elementos equiespaciados, con alimentación uniforme en amplitud y fase progresiva, siendo $\alpha = 288^\circ$, y $d = 0,8 \lambda$

- Lóbulo principal:

Se calcula de forma idéntica al caso de $f = 15$ GHz:

$$\Psi = 2\pi = k_0 d \sin(\theta) + \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0,8 \lambda \cdot \sin(\theta) + 288 \cdot \pi/180$$

$$2\pi - 1,6\pi = 1,6\pi \cdot \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = 0,25$$

Por tanto, $\theta = 14,5^\circ$. En este caso, el lóbulo principal no está en $\theta = 0^\circ$. Este fenómeno se debe al diseño de la antena, la cual permite hacer "beamscanning" al variar la frecuencia de trabajo.

- Ancho de haz entre nulos:

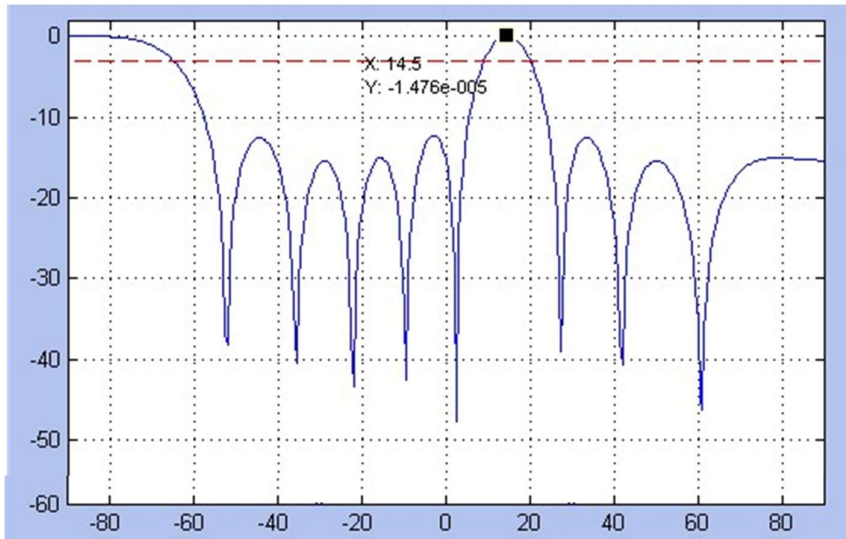
En el dominio Ψ , los nulos son los mismos que en el caso anterior ($f = 15$ GHz).

Cogemos los nulos situados a ambos lados del lóbulo principal, y pasamos al margen visible:

Nulo a la izquierda del lóbulo principal:	Nulo a la derecha del lóbulo principal:
$\Psi = \frac{5\pi}{3} = k_0 d \sin(\theta) + \alpha = 1,6\pi \cdot \sin(\theta) + 1,6\pi$ $5/3 - 1,6 = 1,6 \cdot \sin(\theta)$ $\sin(\theta) = 0,0417$ $\theta = +2,4^\circ$	$\Psi = \frac{7\pi}{3} = k_0 d \sin(\theta) + \alpha = 1,6\pi \cdot \sin(\theta) + 1,6\pi$ $+1/3 = 1,6 \cdot \sin(\theta)$ $\sin(\theta) = +0,458$ $\theta = +27,3^\circ$

Por tanto, el ancho de haz entre nulos es de $24,9^\circ$, algo mayor que en el apartado anterior, que era de $19,2^\circ$.

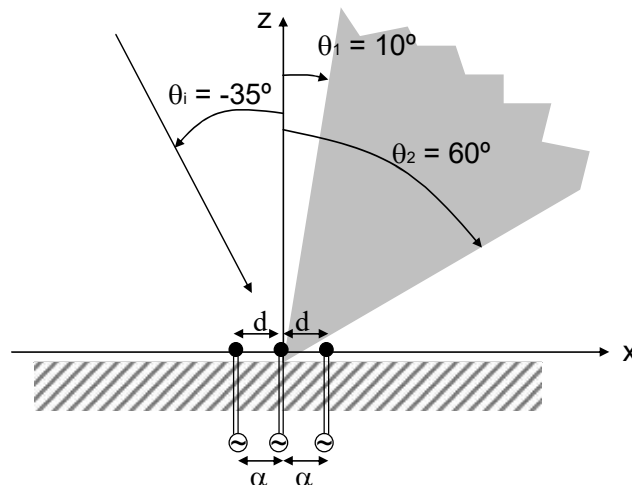
Finalmente, se representa el factor de array para esta frecuencia de trabajo. Se puede observar la posición del lóbulo principal en $\theta = 14,5^\circ$ así como un “grating lobe” en la posición de $\theta = -90^\circ$.



Factor de array para $f = 12$ GHz. Eje horizontal: θ ($^\circ$). Eje vertical: amplitud normalizada del factor de array (dB).

Ejercicio 4.28

Con el fin de implementar un sistema de localización para interiores a la frecuencia de 868 MHz, se desea diseñar una antena para dar cobertura a la zona sombreada en gris en la siguiente figura:



Para ello, se utilizará un array cuyos elementos son dipolos eléctricamente cortos orientados según el eje “y”, y cuyos centros están colocados en el eje “x”, estando separados una distancia “d”. Los dipolos están alimentados con amplitud uniforme y fase progresiva (“ α ”).

- a) Determinar el valor de “ α ” y “ d ” para que el ancho de haz a -3 dB del lóbulo principal del array se corresponda con la zona sombreada. Hallar la posición del máximo del diagrama y el margen visible.
- b) Teniendo en cuenta las características del diagrama de radiación, ¿cree que la recepción de una señal interferente que incide con un ángulo $\theta_i = -35^\circ$ podría distorsionar la señal recibida en la dirección del lóbulo principal (área sombreada)? Justifique la respuesta.

Solución:

a) Para el problema planteado, la expresión del factor de array es:

$$F_A = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 \vec{r}_n \cdot \hat{r}} = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 |\vec{r}_n| \text{sen}(\theta)}$$

Array lineal de elementos equiespaciados, con alimentación uniforme en amplitud y fase progresiva.

Ley de excitación: $A_n = a_n e^{j\alpha_n} = e^{j(n-\frac{N+1}{2})\alpha}$, $|\vec{r}_n| = (n - \frac{N+1}{2})d$

$$F_A = \sum_{n=1}^N e^{j(n-\frac{N+1}{2})\alpha} e^{jk_0(n-\frac{N+1}{2})d \cdot \text{sen}(\theta)}$$

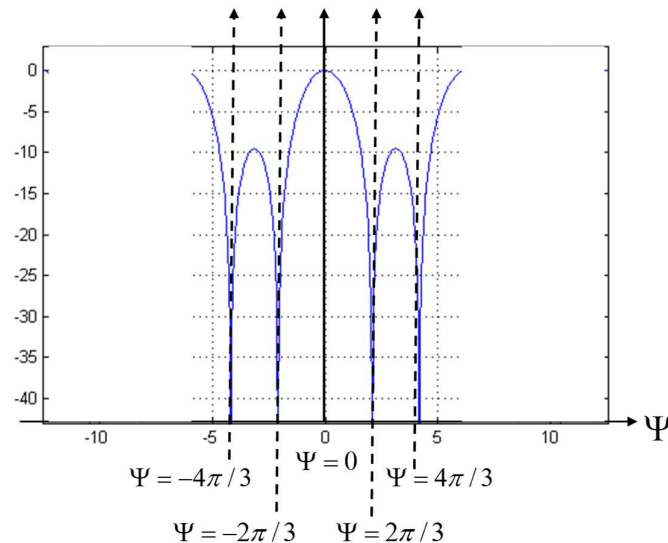
Definiendo: $\Psi = k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha$, y desarrollando la expresión como en problemas anteriores, se llega a la expresión normalizada del factor de array para $N = 3$ elementos:

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(3\Psi/2)}{3 \text{sen}(\Psi/2)}$$

Una vez determinada la expresión del factor de array, se representa su amplitud en el intervalo $\Psi = [-2\pi, 2\pi]$. Para simplificar la representación, se calcula la posición de los nulos:

$F_{A,N}(\Psi) = 0$ si se verifica $\text{sen}(3\Psi/2) = 0$. Por tanto, nulos en: $\Psi = \pm 2\pi/3$ [rad], $\Psi = \pm 4\pi/3$ [rad]

Tenemos 4 nulos en el intervalo $\Psi = [-2\pi, 2\pi]$.



Representación del factor de array periódico. Eje horizontal: Ψ (en rad), eje vertical: amplitud normalizada (en dB). En la figura se indica la posición de los nulos y del lóbulo principal.

El siguiente paso es determinar la ley de excitación del array visible de acuerdo a las especificaciones. En el enunciado se indican los ángulos para los cuales se ha de cumplir que la amplitud del factor de array ha de caer 3 dB con respecto al máximo. Es decir:

$$F_{A,N}(\Psi)|_{-3dB} = \frac{\text{sen}(3\Psi/2)}{3 \text{sen}(\Psi/2)} \Big|_{-3dB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Determinamos el valor de Ψ para el cual se cumple:

$$f(\Psi) = \frac{\sqrt{2} \text{sen}(3\Psi/2)}{3 \text{sen}(\Psi/2)} = 1$$

La expresión anterior no tiene solución analítica, por lo que es necesario calcular el valor de Ψ por aproximación:

Ψ	0,01	1	1,1	0,9
$f(\Psi)$	1,41	0,98	0,90	1,06

Por tanto, se puede considerar que el ángulo Ψ para el cual la amplitud del factor de array cae 3 dB con respecto al lóbulo principal es de ~ 1 rad. Por simetría de la función del factor de array, el valor $\Psi = -1$ rad también es una solución válida.

Una vez determinados los ángulos en el dominio Ψ , es posible plantear el sistema de ecuaciones para calcular "d" y " α " mediante la relación $\Psi = k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha$

$$\begin{cases} \pm 1 = k_0 d \text{sen}(\theta_1) + \alpha \\ \pm 1 = k_0 d \text{sen}(\theta_2) + \alpha \end{cases}$$

Siendo $\theta_1 = 10^\circ$, y $\theta_2 = 60^\circ$, los ángulos para los cuales se ha de cumplir que la amplitud del factor de array cae 3 dB con respecto al máximo.

El sistema de ecuaciones para el cual se obtiene $d > 0$ es:

$$\begin{cases} -1 = k_0 d \text{sen}(10^\circ) + \alpha \\ +1 = k_0 d \text{sen}(60^\circ) + \alpha \end{cases}$$

De su resolución, se obtiene: $d = 0,46 \lambda$, y $\alpha = -86^\circ$

Una vez determinada la ley de excitación, se puede calcular la posición del lóbulo principal:

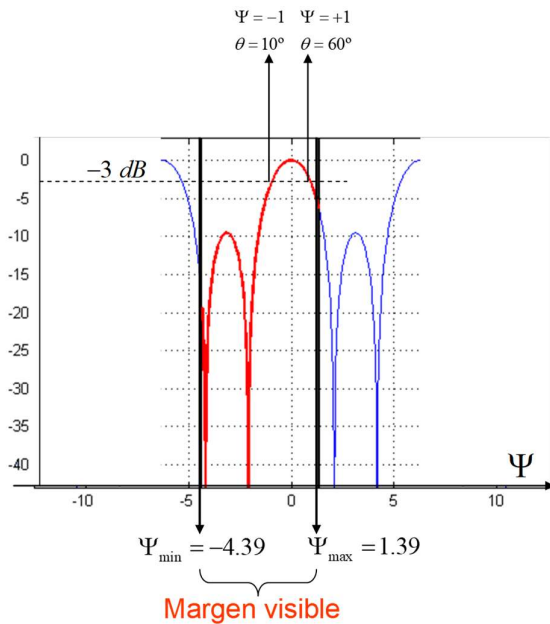
Lóbulo principal: $\Psi = 0 = k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha$, y despejando θ , se obtiene $\theta = 32^\circ$

Con respecto al margen visible, los límites son $\theta_{\min} = -90^\circ$ y $\theta_{\max} = +90^\circ$ (ver primer ejercicio de arrays). Los ángulos correspondientes en el dominio son:

$$\begin{cases} \theta_{\min} = -90^\circ \rightarrow \Psi_{\min} = k_0 d \text{sen}(-90^\circ) + \alpha = -4,39 \text{ [rad]} \\ \theta_{\max} = +90^\circ \rightarrow \Psi_{\max} = k_0 d \text{sen}(+90^\circ) + \alpha = 1,39 \text{ [rad]} \end{cases}$$

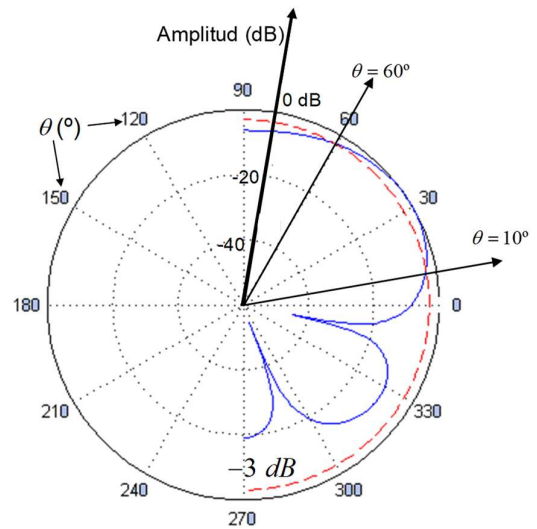
En la siguiente figura (apartado b) se representa el margen visible del factor de array periódico, así como el factor de array en el dominio visible (θ). En este último caso se representa en coordenadas polares.

b) En primer lugar, representamos el punto del diagrama correspondiente a un ángulo de incidencia de $\theta_{nc} = -35^\circ$. Observamos que corresponde con la posición del lóbulo secundario, que está unos 10 dB por debajo del lóbulo principal. En consecuencia, una señal interferente recibida bajo dicho ángulo de incidencia θ_{nc} se atenuará 10 dB (debido al diagrama de radiación de la antena) con respecto a cualquier señal recibida dentro del área de cobertura.

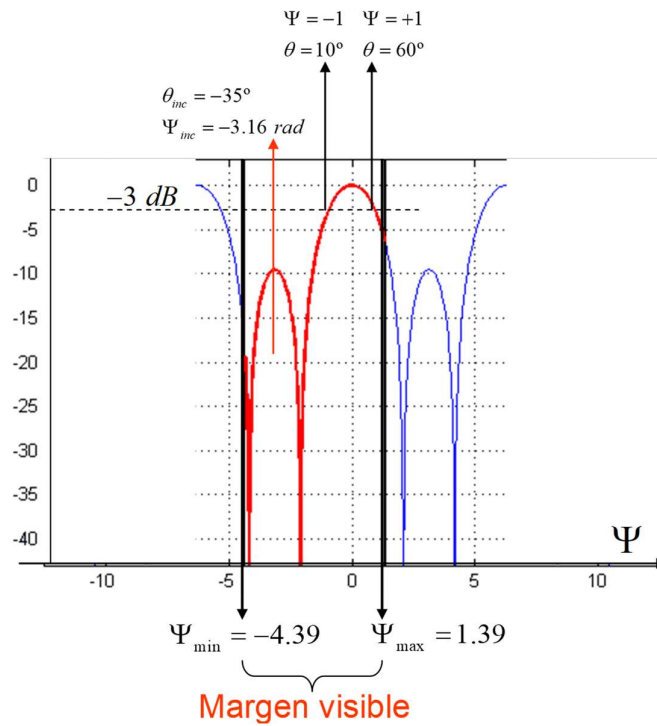


Factor de array periódico

Factor de array periódico y margen visible (línea roja). Eje horizontal: Ψ (en rad), eje vertical: amplitud normalizada (en dB).



Amplitud factor de array (en dB) en coordenadas polares. La escala radial indica la amplitud en dB.



Amplitud normalizada (en dB) del Factor de array periódico. Eje horizontal: Ψ (en rad)

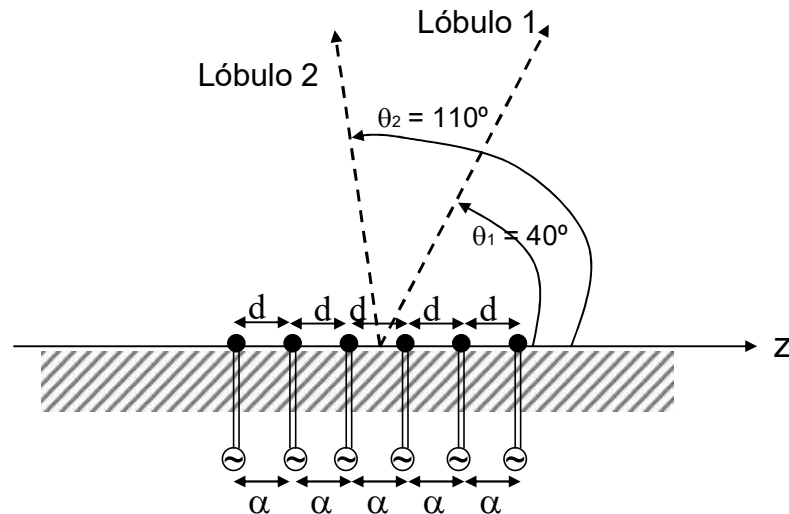
Ejercicio 4.29

Se desea diseñar una antena que permita establecer dos radioenlaces. Para ello, se requiere que el diagrama de radiación de la antena presente dos lóbulos principales.

La antena está formada por 6 elementos equiespaciados “d”, y alimentados con amplitud uniforme y un desfase progresivo “ α ”. El eje de la agrupación es el eje “z”. La posición de los lóbulos será (ver figura):

Lóbulo 1: apuntamiento en $\theta_1 = 40^\circ$.

Lóbulo 2: apuntamiento en $\theta_2 = 110^\circ$.



El valor de “ α ” necesario para que los lóbulos apunten en las direcciones indicadas es:

- a) -55° b) 111° c) 55° d) Ninguna de las anteriores

El valor de “d” necesario para que los lóbulos apunten en las direcciones indicadas es:

- a) $1,2 \lambda$ b) $0,6 \lambda$ c) $0,9 \lambda$ d) Ninguna de las anteriores

Considere ahora que los elementos no son fuentes isotrópicas, sino dipolos infinitesimales (o de Hertz) alineados según el eje “z”. ¿Cuál es la diferencia de nivel de campo entre el lóbulo $\theta_1 = 40^\circ$ y el lóbulo $\theta_2 = 110^\circ$, cuando se tiene en cuenta el diagrama de radiación del dipolo?

- a) 0 dB b) 6,6 dB c) 3,3 dB d) Ninguna de las anteriores

Solución:

Se trata de un array lineal de elementos equiespaciados, con alimentación uniforme en amplitud y fase progresiva. Para $N = 6$ elementos, se tiene que la expresión normalizada del factor de array es:

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(6\Psi/2)}{6 \text{sen}(\Psi/2)}$$

Queremos que se verifiquen las siguientes condiciones: un lóbulo principal en $\theta_1 = 40^\circ$ y el otro en $\theta_2 = 110^\circ$. Es decir, en el dominio Ψ :

$$F_{A,N}(\Psi) = 1 \text{ en } \Psi = 0$$

$$F_{A,N}(\Psi) = 1 \text{ en } \Psi = 2\pi$$

Por tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

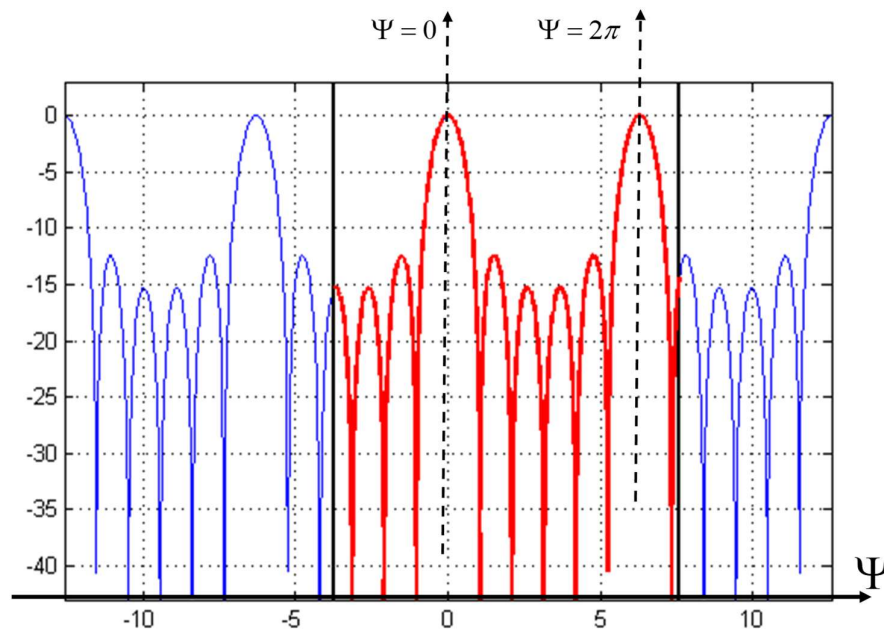
$$\begin{cases} 2\pi = k_0 d \cos(\theta_1) + \alpha \\ 0 = k_0 d \cos(\theta_2) + \alpha \end{cases}$$

Despejando, se obtiene $d=0,9 \lambda$, y $\alpha = 111^\circ$

Con este otro planteamiento, se obtendría $d < 0$, es decir, una solución no válida.

$$\begin{cases} 0 = k_0 d \cos(\theta_1) + \alpha \\ 2\pi = k_0 d \cos(\theta_2) + \alpha \end{cases}$$

Una vez determinada la ley de excitación, el cálculo del margen visible es análogo al de los ejercicios anteriores. En la siguiente figura se representa el factor de array periódico, así como el margen visible (en rojo).



Factor de array periódico y margen visible (línea roja). Eje horizontal: Ψ (en rad), eje vertical: amplitud normalizada (en dB).

- Efecto del diagrama del elemento:

En el caso de un dipolo infinitesimal alineado con el eje "z", su diagrama viene dado por:

$$E_{dip}(\theta) = \text{sen}(\theta)$$

Siendo el factor de array de la antena, en el dominio visible (función de θ):

$$F_{A,N}(\theta) = \frac{\text{sen}(6(k_0 d \cos(\theta) + \alpha)/2)}{6 \text{sen}((k_0 d \cos(\theta) + \alpha)/2)}$$

Por tanto, el factor de array ponderado por el diagrama de radiación del elemento:

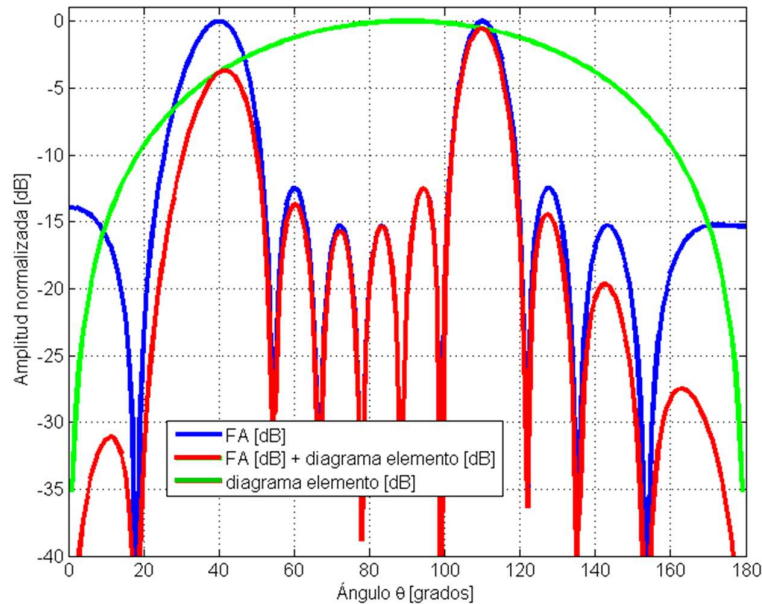
$$F_{A,dip}(\theta) = F_A(\theta) \cdot E_{dip}(\theta)$$

Se pide la diferencia de niveles entre las posiciones $\theta_1 = 40^\circ$ y $\theta_2 = 110^\circ$. La forma sencilla de hacer este apartado es recordando que, en dichas posiciones, el factor de array tiene dos máximos, es decir, el mismo valor. Por tanto, sólo es necesario calcular el valor de $E_{dip}(\theta) = \text{sen}(\theta)$ para los ángulos indicados:

$$E_{dip}(\theta_1) = \text{sen}(\theta_1) = -0,54 \text{ dB}$$

$$E_{dip}(\theta_2) = \text{sen}(\theta_2) = -3,84 \text{ dB}$$

La diferencia de nivel es, por tanto, 3,3 dB



Factor de array (línea azul). Diagrama del elemento (línea verde). Factor de array ponderado por el diagrama del elemento (línea roja).

Ejercicio 4.30

Se dispone de una agrupación de antenas de 5 elementos, orientados en el eje 'x'. Todos los elementos están alimentados con la misma amplitud, y fase progresiva, siendo la separación entre elementos constante.

De su factor de array se sabe que:

- El lóbulo principal (θ_{\max}) está en el ángulo $\psi = 0$ en el dominio transformado.
- En el intervalo (margen visible) θ_{\max} a 90° , hay un lóbulo secundario.
- En el intervalo (margen visible) θ_{\max} a -90° hay tres lóbulos secundarios.
- En (margen visible) $\theta \neq \pm 90^\circ$ el factor de array tiene un nulo.

Con los datos anteriores, calcule el factor de array y responda a las siguientes cuestiones:

- a) Posición del lóbulo principal (valor aproximado en $\pm 5^\circ$):
- b) Ancho de haz entre nulos (valor aproximado en $\pm 5^\circ$)
- c) Ancho de haz a -3 dB (valor aproximado en $\pm 5^\circ$)

Solución:

La expresión normalizada del factor de array para $N = 5$ elementos es:

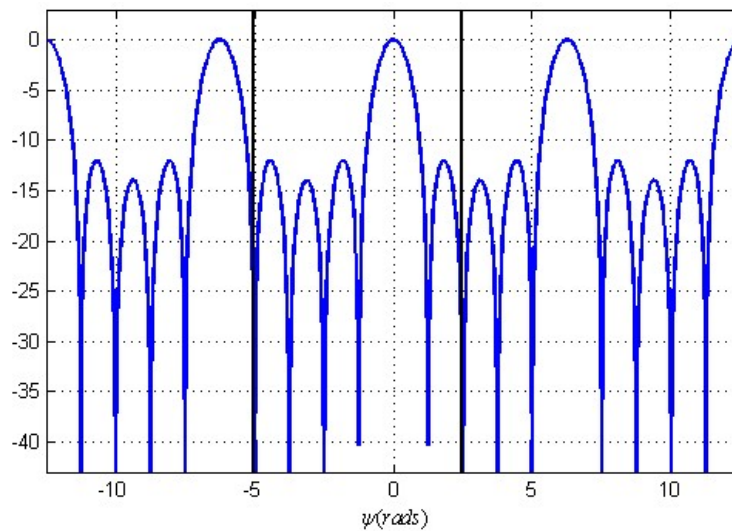
$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\text{sen}(5\Psi/2)}{5 \text{sen}(\Psi/2)}$$

Donde: $\psi = k_0 d \text{sen}(\theta) + \alpha$

Una vez conocida la expresión del factor de array periódico, se representa la amplitud del mismo. Para ello, se calcula la posición de los nulos:

$$FA(\psi) = 0 = \text{sen}(5\psi/2)$$

$$\psi = \pm 2\pi/5, \quad \pm 4\pi/5, \quad \pm 6\pi/5, \quad \pm 8\pi/5 \text{ [rad] en } \psi = [-2\pi, 2\pi]$$



Factor de array periódico. Eje horizontal: Ψ (en rad), eje vertical: amplitud normalizada (en dB).

Con las consideraciones del enunciado, tiene que haber 3 lóbulos secundarios a la izquierda del lóbulo principal (situado en la posición $\Psi = 0$), y uno a la derecha, correspondiendo los límites del margen visible con el cuarto nulo a la izquierda del lóbulo, y el segundo nulo a la derecha del lóbulo. Sobre la representación del factor de array periódico se pueden visualizar fácilmente dichas especificaciones (barras negras).

Por tanto, el margen visible estará en los siguientes nulos:

A la izquierda, en el nulo $\psi_1 = -8\pi/5$.

Y a la derecha, en el nulo $\psi_2 = 4\pi/5$.

Dado que el array está sobre el eje 'x', los límites del margen visible corresponden a los ángulos θ de -90° y $+90^\circ$. Por tanto, a partir de la correspondencia entre los límites del margen visible en el dominio θ y en el dominio Ψ , es posible obtener la ley de excitación (parámetros " α " y " d ") que cumple las especificaciones de diseño. Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones (nota: $k_0 = 2\pi/\lambda$):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{8\pi}{5} &= \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(-90^\circ) + \alpha \\ \frac{4\pi}{5} &= \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(+90^\circ) + \alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -8\pi/5 &= -\frac{2\pi}{\lambda} d + \alpha \\ 4\pi/5 &= \frac{2\pi}{\lambda} d + \alpha \end{aligned}$$

$$-\frac{12\pi}{5} = -\frac{4\pi}{\lambda} d \rightarrow d = \frac{3}{5} \lambda = 0,6\lambda$$

$$\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{5} \lambda = \alpha \rightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{5} = -72^\circ$$

Por tanto, para cumplir las especificaciones de diseño indicadas en el enunciado del problema, se requiere una separación entre elementos de $d = 0,6 \lambda$, y un desfase constante de $\alpha = -72^\circ$.

- Ancho de haz entre nulos:

Se pide el ancho de haz correspondiente a los nulos situados a cada lado del lóbulo principal, cuyas posiciones son $-2\pi/5$ y $+2\pi/5$:

$$-\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{5} \lambda \sin(\theta) - \frac{2\pi}{5} \rightarrow \theta = \sin^{-1}(0) = 0^\circ$$

$$+\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{5} \lambda \sin(\theta) - \frac{2\pi}{5} \rightarrow \theta = \sin^{-1}(2/3) = 42^\circ$$

Por tanto, el ancho de haz entre nulos es de 42° .

- Lóbulo principal:

$$0 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{5} \lambda \sin(\theta) - \frac{2\pi}{5} \rightarrow \theta = \sin^{-1}(1/3) = 20^\circ$$

El lóbulo principal está en la posición $\theta = 20^\circ$.

- Ancho de haz a -3 dB:

$$F_{A,N}(\Psi) = \frac{\sin(5\Psi/2)}{5 \sin(\Psi/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(\psi) = \frac{\sqrt{2} \sin(5\psi/2)}{5 \sin(\psi/2)} = 1$$

La función $f(\psi)$ no tiene solución analítica, por lo que se resuelve mediante aproximación:

ψ	1	2	0,5	0,55	0,56
$f(\psi)$	0,36	-0,32	1,08	1,02	1,009

Ancho de haz a -3 dB en $\psi = \pm 0,56$ rad. Calculamos sus ángulos equivalentes en el dominio θ .

$$+0,56 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{5} \lambda \sin(\theta_1) - \frac{2\pi}{5} \rightarrow \theta_1 = 11^\circ$$

$$-0,56 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3}{5} \lambda \sin(\theta_2) - \frac{2\pi}{5} \rightarrow \theta_2 = 29^\circ$$

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB es: $BW_{-3dB} = 18^\circ$

Ejercicio 4.31

Se dispone de una agrupación de antenas (array) lineal de $N = 6$ elementos de tipo dipolo resonante, paralelos y separados entre sí una distancia "d". Suponga los centros de los dipolos sobre el eje "z". Calcule:

- Las alimentaciones de los dipolos A_n ($n = 0, 1, \dots, 5$) y su separación “d” para que, siguiendo una distribución de fase progresiva (y módulo constante), se consiga un diagrama de máxima directividad con el máximo del lóbulo en $\theta = \pi / 18$ y un nulo de radiación en $\theta = \pi$.
- Comente, y calcule en su caso, sobre el “ancho de haz entre nulos” y el “ancho de haz a -3 dB” del haz principal.
- Una estimación de la directividad.
- Nivel del primer lóbulo secundario.

Nota:
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\Psi} = e^{j\frac{N-1}{2}\Psi} \cdot \frac{\text{sen}(N\Psi/2)}{\text{sen}(\Psi/2)}$$

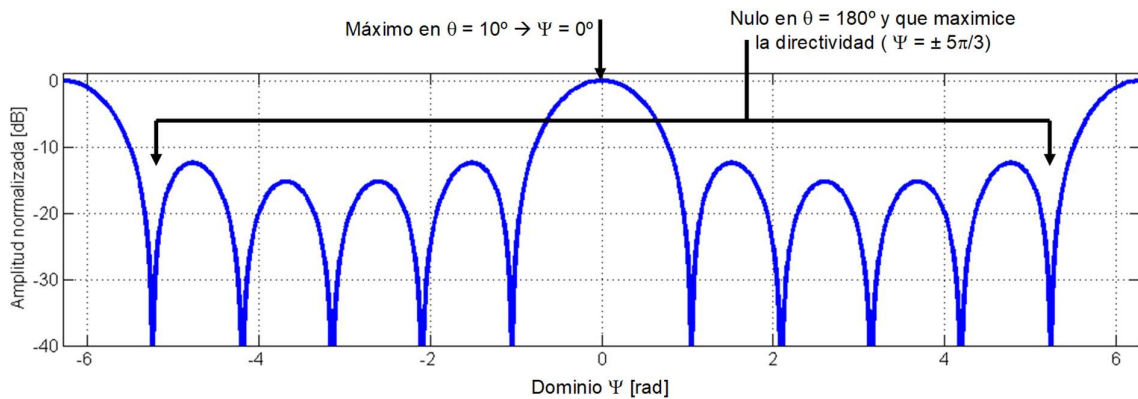
Solución:

Se tiene un array de $N = 6$ elementos equiespaciados, con alimentación uniforme en amplitud y fase progresiva. La expresión del factor de array viene dada por:

$$F_A = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 \vec{r}'_n \cdot \vec{r}} = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\alpha_n} e^{jk_0 |\vec{r}'_n| \cos(\theta)}$$

Dado que al estar los elementos en el eje z, $\vec{r}'_n \cdot \vec{r} = |\vec{r}'_n| \cos(\theta)$.

En primer lugar, se representa el factor de array para $N = 6$ en el dominio Ψ :



Factor de array periódico. Eje horizontal: Ψ (en rad), eje vertical: amplitud normalizada (en dB).

Como se indica en la figura, las condiciones de diseño del array son:

- Máximo del diagrama en $\theta = \pi / 18 = 10^\circ$. El máximo del diagrama está en $\Psi = 0$ en el dominio Ψ .
- En $\theta = \pi = 180^\circ$ tiene que haber un nulo del diagrama de radiación. Los nulos del factor de array están en:

$$\text{sen}(3\Psi) = 0 \rightarrow \Psi = \pm\pi/3, \quad \pm 2\pi/3, \quad \pm 3\pi/3, \quad \pm 4\pi/3, \quad \pm 5\pi/3$$

- La directividad del diagrama ha de ser máxima. Para ello, hay que conseguir que el margen visible abarque el mayor número de lóbulos secundarios comprendidos entre el

máximo del diagrama ($\Psi = 0$) y el siguiente “grating lobe” ($\Psi = \pm 2\pi$). Por tanto, el nulo situado en $\theta = \pi = 180^\circ$ tiene que corresponder a la posición $\Psi = \pm 5\pi/3$, que es la posición del nulo anterior al primer “grating lobe”, situado en $\Psi = \pm 2\pi$.

Por tanto, teniendo en cuenta las condiciones de diseño, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\Psi = 0 &= k_0 d \cos(10^\circ) + \alpha \\ \Psi = \pm \frac{5\pi}{3} &= k_0 d \cos(180^\circ) + \alpha = -k_0 d + \alpha\end{aligned}$$

Despejando:

$$\begin{aligned}-k_0 d \cos(10^\circ) &= \alpha \\ \pm \frac{5\pi}{3} &= -k_0 d - k_0 d \cos(10^\circ)\end{aligned}$$

Para que la distancia d sea mayor que cero, tomamos $\Psi = -5\pi/3$ (se observa claramente que si se considera $\Psi = +5\pi/3$ entonces $d < 0$).

$$\begin{aligned}-\frac{5\pi}{3} &= -\frac{2\pi}{\lambda} d - \frac{2\pi}{\lambda} d \cos(10^\circ) \\ d/\lambda &= \frac{5}{6(1 + \cos(10^\circ))} = 0,42\end{aligned}$$

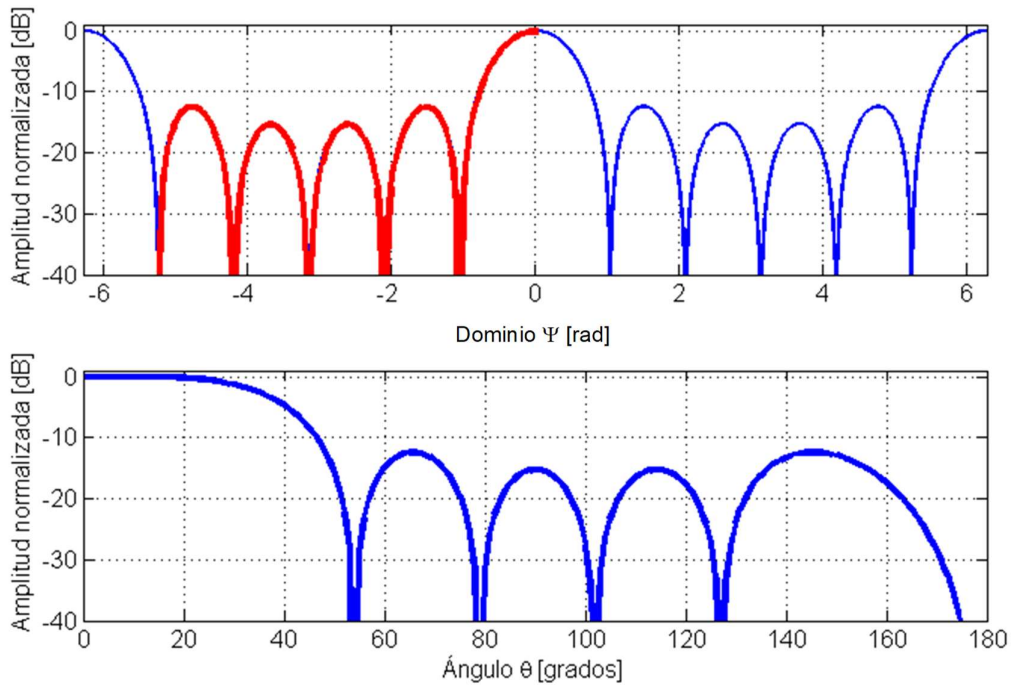
Sustituyendo en el desfase entre elementos: $\alpha = -2,6 = -148^\circ$

Margen visible: $\Psi \in [-k_0 d + \alpha; k_0 d + \alpha]$

- Uno de los extremos es $\Psi_1 = -k_0 d + \alpha = -5\pi/3$, que corresponde a $\theta_1 = 180^\circ$
- El otro extremo corresponde a $\theta_2 = 0^\circ$, por lo que $\Psi_2 = k_0 d \cos(\theta_2) + \alpha$. Despejando se obtiene $\Psi_2 = 0,0389 = 2,2^\circ$.

En la siguiente figura se representa el margen visible del factor de array periódico (línea roja, gráfica superior) así como el factor de array en el dominio θ .

En la representación del corte del factor de array se observa que apenas hay diferencia entre el valor del factor de array en el máximo ($\theta = 10^\circ$) y en el extremo del margen visible ($\theta = 0^\circ$). Por tanto, se podría considerar que el array corresponde a una configuración “end-fire”, donde el lóbulo principal está apuntando en la dirección del eje de la agrupación (eje z). La siguiente figura permite una mejor comprensión de dicho concepto mediante la representación tridimensional del factor de array.



Gráfica superior: factor de array periódico. Eje horizontal: Ψ (rad), eje vertical: amplitud normalizada (dB). La línea roja representa el margen visible. Gráfica inferior: factor de array. Eje horizontal: θ (grados), eje vertical: amplitud normalizada (dB).

Se va a comprobar numéricamente la diferencia del nivel del diagrama entre las posiciones $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 10^\circ$. En el caso de $\theta = 10^\circ$, consideramos $|FA(\text{dB})| = 0 \text{ dB}$ (factor de array normalizado).

Para $\theta = 0^\circ$,

$$\Psi = k_0 d \cos(0^\circ) + \alpha = 0,0407$$

$$|FA(\text{dB})| = \left| \frac{\text{sen}(3\Psi)}{6 \text{sen}(\Psi/2)} \right| = 0,9976 = -0,02 \text{ dB}$$

Por tanto, la consideración de un array "end-fire" con un haz de tipo pincel es válida.

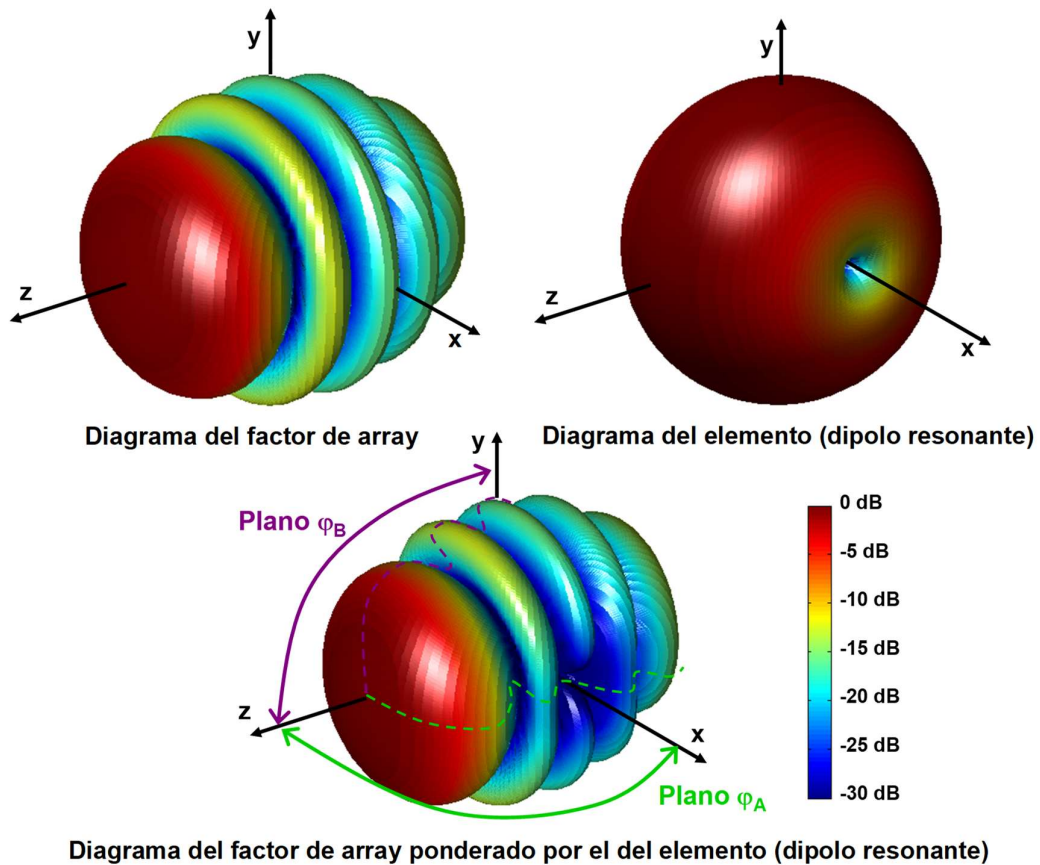
Para calcular el ancho de haz entre nulos, se considerará el margen angular entre la posición $\theta = 0^\circ$ y $\theta = [\text{Posición del primer nulo}]$.

El primer nulo está en la posición $\Psi = -\pi/3$, que se corresponde al ángulo:

$$-\pi/3 = k_0 d \cos(\theta_{\text{nulo}}) + \alpha$$

Despejando $\theta_{\text{nulo}} = 0,9425 = 54^\circ$

Por tanto, el ancho de haz entre nulos es: $BW_{\text{NULOS}} = 2 \times \theta_{\text{nulo}} = 108^\circ$

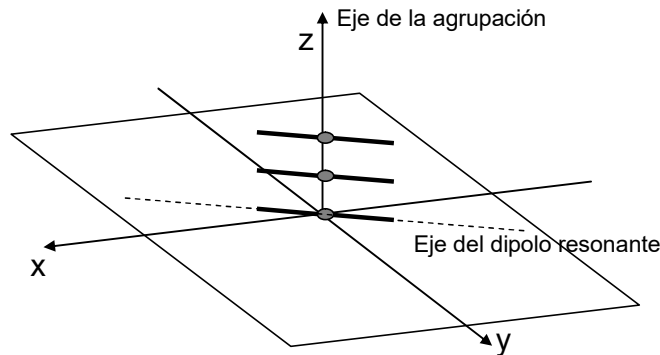


Representación tridimensional del factor de array (amplitud normalizada, en dB), del diagrama del elemento (dipolo resonante), y del diagrama del conjunto. Por simplicidad, se ha supuesto que el eje del dipolo es coincidente con el eje 'x'.

Con respecto al ancho de haz a -3 dB, hay que tener en cuenta la influencia del diagrama del elemento, que es un dipolo resonante, cuyo campo viene dado por (cuando el eje del dipolo está orientado según el eje 'z'):

$$E_{dip}(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

Pero los dipolos no están orientados según el eje 'z', sino contenidos en el plano XY. En el enunciado no se indica la orientación del eje de los dipolos, pero se deduce que el plano que contiene al eje de cada dipolo es un plano $z=cte.$, que es perpendicular al eje 'z'. Por tanto, para esta disposición geométrica, el diagrama del dipolo no sólo depende de θ sino también de φ .



Esquema de la posición de los dipolos resonantes con respecto a la orientación del array (eje z). El eje del dipolo resonante está contenido en el plano XY.

Un estudio exhaustivo del problema requerirá expresar el campo del dipolo en función de la orientación del dipolo en el plano XY. No obstante, el factor de array presenta simetría de revolución con respecto al eje z. Por tanto, los casos a analizar son:

- Plano formado por el eje de la agrupación -eje z- y el eje del dipolo (plano φ_A):

El diagrama de radiación del dipolo en el plano ($\varphi = \varphi_A$) responde a la función (nótese que se ha cambiado $\cos(\theta)$ por $\sin(\theta)$ y viceversa):

$$E_{dip}(\theta, \varphi = \varphi_A) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right)}{\cos(\theta)}$$

Por tanto, el campo total viene dado por:

$$E_{dip}(\theta, \varphi = \varphi_A) \cdot FA(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right)}{\cos(\theta)} \cdot \frac{\sin\left(3\left(\frac{2\pi}{\lambda} d \cos(\theta) + \alpha\right)\right)}{6 \sin\left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} d \cos(\theta) + \alpha\right)/2\right)}$$

Con respecto al ancho de haz a -3 dB para este plano, se evalúan las expresiones del factor de array, del diagrama del dipolo resonante, y el producto de ambos (suma, en dB):

Ángulo θ	Factor de array (dB)	Diagrama del elemento (dB)	Factor de array ponderado por el diagrama del elemento (dB)
0°	0 dB	0 dB	0 dB
20°	-0,18 dB	-0,78 dB	-0,96 dB
30°	-1,29 dB	-1,76 dB	-3,05 dB
35°	-2,60 dB	-2,41 dB	-5,01 dB
36°	-2,95 dB	-2,55 dB	-5,50 dB

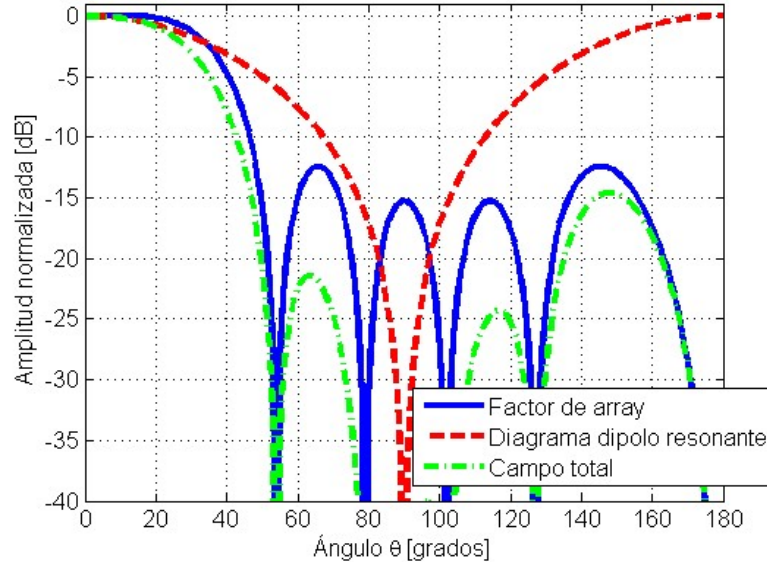
Por tanto, el ancho de haz a -3 dB para este plano es: $BW_{-3\text{ dB}}$, plano φ_A : 60°.

- Plano formado por el eje de la agrupación (eje z) y perpendicular al eje del dipolo (plano φ_B):

En este caso, el diagrama de radiación del dipolo es uniforme, ya que corresponde a un corte según el máximo del diagrama:

$$E_{dip}(\theta, \varphi = \varphi_B) = 1$$

Por tanto, el campo total sólo depende del factor de array. En consecuencia, para este plano, el ancho de haz a -3 dB es: BW_{-3dB} , plano φ_B : 72° (ver la tabla anterior).



Comparativa del diagrama de radiación sin considerar y considerando el efecto del diagrama del elemento (dipolo resonante) en el plano formado por el eje de la agrupación y el eje del dipolo resonante (plano $\varphi = \varphi_A$).

Con el fin de ilustrar mejor los conceptos explicados en este apartado, los planos φ_A y φ_B corresponderían a los planos XZ e YZ en la figura correspondiente a la representación tridimensional del factor de array ponderado por el diagrama del elemento.

Para estimar la directividad, dado que el diagrama es de tipo pincel, se puede realizar a partir de los anchos de haz a -3 dB calculados previamente:

$$D_0 = \frac{4\pi}{(BW_{-3dB, plano \varphi_A}) \cdot (BW_{-3dB, plano \varphi_B})} = \frac{4\pi}{\left(60 \frac{\pi}{180}\right) \cdot \left(72 \frac{\pi}{180}\right)} = 9,55 = 9,8 \text{ dB}$$

Nótese que, si no se considerara el diagrama del elemento, la directividad sería:

$$D_0 = \frac{4\pi}{(BW_{-3dB, plano \varphi_A}) \cdot (BW_{-3dB, plano \varphi_B})} = \frac{4\pi}{\left(72 \frac{\pi}{180}\right) \cdot \left(72 \frac{\pi}{180}\right)} = 7,95 = 9 \text{ dB}$$

Es decir, se comete un error de 0,8 dB en el cálculo de la directividad si no se tiene en cuenta el diagrama del dipolo resonante.

Finalmente, se pide el nivel del lóbulo secundario adyacente al lóbulo principal. Como se ha indicado anteriormente, dicho nivel dependerá del ángulo φ (plano φ_A o plano φ_B).

La posición del lóbulo secundario en el dominio Y es la posición intermedia entre el primer y el tercer nulo, es decir: $\Psi_{SLL} = (-\pi / 3 - 2 \pi / 3) / 2 = -\pi / 2$. Dicho ángulo corresponde a $\theta_{SLL} = 67^\circ$.

Para este ángulo, se evalúa el nivel de campo del factor de array y del dipolo:

$$E_{dip}(\theta_{SLL}) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}(\theta_{SLL})\right)}{\cos(\theta_{SLL})} = 0,32 = -9,93 \text{ dB}$$

$$|FA(\psi_{SLL})| = \left| \frac{\text{sen}(3\psi_{SLL})}{6 \text{sen}(\psi_{SLL}/2)} \right| = 0,24 = -12,55 \text{ dB}$$

En consecuencia, el nivel del lóbulo secundario es:

Plano φ_A (plano que contiene el eje del array y el eje del dipolo):

$$SLL = -9,93 \text{ dB} - 12,55 \text{ dB} = -22,48 \text{ dB}$$

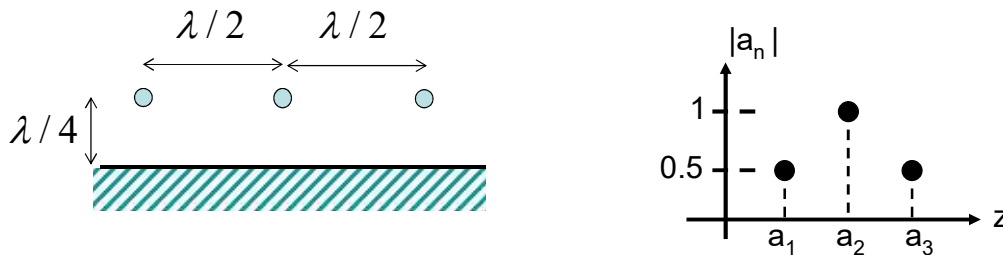
Plano φ_B (plano que contiene el eje del array y es perpendicular al eje del dipolo):

$$SLL = -0 \text{ dB} - 12,55 \text{ dB} = -12,55 \text{ dB}$$

Ejercicio 4.32

En un array de tres antenas, separadas entre sí $\lambda/2$ y situadas a una distancia $\lambda/4$ de un plano de masa (ver parte izquierda de la figura), se excitan uniformemente en fase, presentando una distribución de excitaciones triangular: [$a_1 = 0,5$; $a_2 = 1$; $a_3 = 0,5$] (véase parte derecha de la figura). Suponga fuentes "isotrópicas" a efectos de su diagrama pero con una dirección de su corriente paralela al plano de masa. Determine:

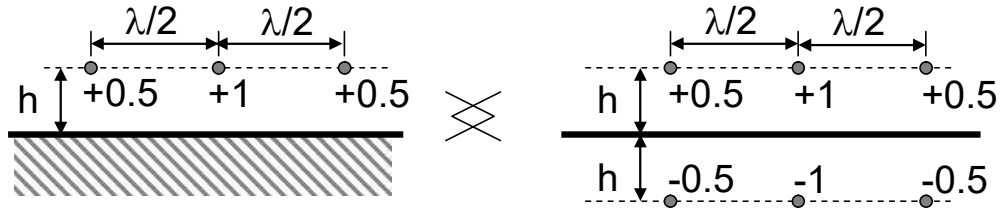
- El diagrama de radiación del sistema radiante en el plano que contiene al array y es perpendicular al plano de masa.
- Ancho de haz a -3 dB y ancho de haz entre nulos en el mismo plano que el apartado anterior.
- Una estimación de la directividad del sistema radiante.
- Comente las diferencias en el diagrama de radiación entre la distribución de amplitudes anteriormente indicada, y una distribución uniforme [$a_1 = a_2 = a_3 = 1$], especialmente en lo que se refiere a: i) ancho de haz a -3 dB, ii) niveles de lóbulos secundarios, iii) directividad.



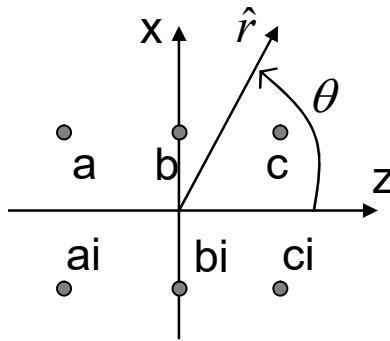
Solución:

a)

El siguiente problema se puede abordar como un problema de Factor de Array de 3x2 elementos, tal y como se observa en la siguiente figura:



En el caso del problema equivalente, las antenas isotrópicas imagen tendrán un desfase de 180° con respecto a las antenas isotrópicas originales. El cálculo del factor de array de la agrupación en el plano perpendicular al plano de masa se llevará a cabo tomando como referencia los ejes de coordenadas indicados en la siguiente figura:



$$FA(\theta, \varphi = 0^\circ) = \left\{ \begin{array}{l} +0.5 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_a \cdot \hat{r}} + 1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_b \cdot \hat{r}} + 0.5 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_c \cdot \hat{r}} \\ -0.5 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_{ai} \cdot \hat{r}} - 1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_{bi} \cdot \hat{r}} - 0.5 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_{ci} \cdot \hat{r}} \end{array} \right\}$$

$$\vec{r}'_a = -\frac{\lambda}{2} \hat{z} + \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_a \cdot \hat{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} (-\cos\theta) + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} (\text{sen}\theta) = \pi(-\cos\theta) + \frac{\pi}{2} (\text{sen}\theta)$$

$$\vec{r}'_b = 0 \hat{z} + \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_b \cdot \hat{r} = \frac{\pi}{2} (\text{sen}\theta)$$

$$\vec{r}'_c = \frac{\lambda}{2} \hat{z} + \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_c \cdot \hat{r} = \pi(\cos\theta) + \frac{\pi}{2} (\text{sen}\theta)$$

$$\vec{r}'_{ai} = -\frac{\lambda}{2} \hat{z} - \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_{ai} \cdot \hat{r} = \pi(-\cos\theta) + \frac{\pi}{2} (-\text{sen}\theta)$$

$$\vec{r}'_{bi} = 0 \hat{z} - \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_{bi} \cdot \hat{r} = \frac{\pi}{2} (-\text{sen}\theta)$$

$$\vec{r}'_{ci} = \frac{\lambda}{2} \hat{z} - \frac{\lambda}{4} \hat{x}$$

$$k_0 \vec{r}'_{ci} \cdot \hat{r} = \pi(\cos\theta) + \frac{\pi}{2} (-\text{sen}\theta)$$

$$FA(\theta) = +0.5 \cdot e^{-j\pi \cos\theta} \cdot e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} + 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} + 0.5 \cdot e^{j\pi \cos\theta} \cdot e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} \\ - 0.5 \cdot e^{-j\pi \cos\theta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} - 0.5 \cdot e^{j\pi \cos\theta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta}$$

Agrupando exponenciales y transformando a relaciones de senos y cosenos:

$$\begin{aligned}
 FA(\theta) &= (\cos(\pi \cos\theta)) \cdot e^{j\frac{\pi}{2} \cos\theta} - (\cos(\pi \cos\theta)) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \cos\theta} + 2j \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) = \\
 &= (\cos(\pi \cos\theta)) \cdot \left(2j \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)\right) + 2j \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) = \\
 &= 2j (1 + \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)\right)
 \end{aligned}$$

Factor de array normalizado (plano XZ):

$$|FA(\theta)|_N = \left| \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)\right) \right|$$

b) Cálculo del ancho de haz a -3 dB (valor: $1/(2^{1/2}) = 0,7071$)

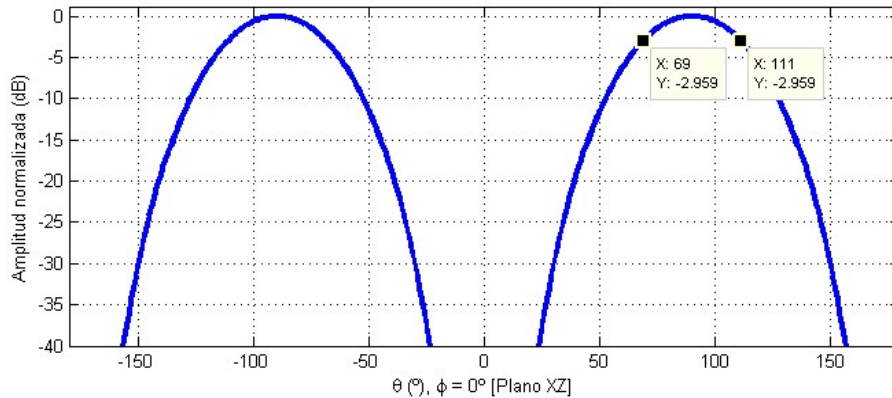
θ [°]	90	45	60	70	68	69	68,8
FA(θ) [normalizado]	1	0,177	0,489	0,734	0,687	0,7113	0,707

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB es de: $90^\circ - 68,8^\circ = 21,2^\circ \times 2 = 42,4^\circ$

Cálculo del ancho de haz entre nulos:

$$\begin{aligned}
 (1 + \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) &= 0 \quad \Rightarrow \\
 1 + \cos(\pi \cos\theta) &= 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) &= 0 \Rightarrow \theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$

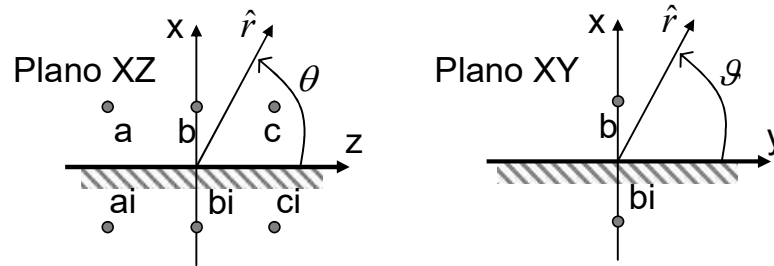
Por tanto, el ancho de haz entre nulos es de 180° .



Factor de array normalizado en el plano XZ (perpendicular al plano de masa).

c) Estimación de la directividad:

Se ha de tener en cuenta que la radiación trasera es nula, debido al plano de masa. La directividad se estimará a partir del ancho de haz a -3 dB en el plano XZ ($\varphi = 0^\circ$, calculado anteriormente), y en el plano XY. Para ello, se calcula el factor de array en dicho plano. En este caso, y asumiendo que el array 3x2 es una distribución separable:



$$FA(\vartheta) = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\text{sen}\vartheta} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\text{sen}\vartheta}$$

Agrupando términos:

$$FA(\vartheta) = 2j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\text{sen}\vartheta\right)$$

Factor de array normalizado (plano XY):

$$|FA(\theta)|_N = \left| \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\text{sen}\vartheta\right) \right|$$

Cálculo del ancho de haz a -3 dB (valor: $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$)

ϑ [°]	90	45	30
FA(ϑ) [normalizado]	1	0,896	0,707

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB es: $(90^\circ - 30^\circ) \times 2 = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$

La estima de la directividad viene dada por:

$$D_0 = \frac{41253}{BW_{-3dB,XZ} \times BW_{-3dB,XY}} = \frac{41253}{42,4^\circ \times 120^\circ} = 810 = 9,1 \text{ dBi}$$

Nota: el valor de la directividad calculado mediante integración numérica es de 9,17 dBi, por lo que la aproximación mediante anchos de haz es, para este problema, bastante exacta.

d)

Si se considera una distribución de amplitudes del tipo: $[a_1 = a_2 = a_3 = 1]$:

$$FA(\theta) = +1e^{-j\pi \cos\theta} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\text{sen}\theta} + 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\text{sen}\theta} + 1 \cdot e^{j\pi \cos\theta} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}\text{sen}\theta} \\ - 1 \cdot e^{-j\pi \cos\theta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\text{sen}\theta} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\text{sen}\theta} - 1 \cdot e^{j\pi \cos\theta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}\text{sen}\theta}$$

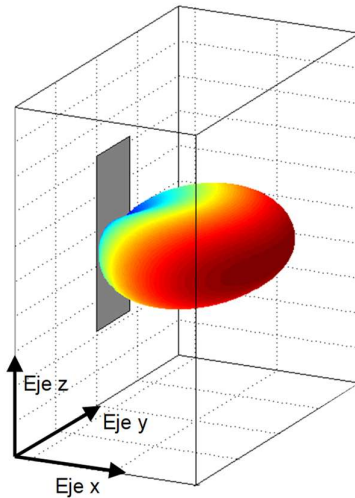


Diagrama de radiación de la agrupación

Agrupando exponenciales y transformando a relaciones de senos y cosenos:

$$\begin{aligned}
 FA(\theta) &= (2 \cos(\pi \cos\theta)) \cdot e^{j\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta} - (2 \cos(\pi \cos\theta)) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \text{se}} + 2j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right) = \\
 &= (2 \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \left(2j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right)\right) + 2j \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right) = \\
 &2j (1 + 2 \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right)\right)
 \end{aligned}$$

b) Factor de array normalizado (plano XZ):

$$|FA(\theta)|_N = \left| \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right)\right) \right|$$

El máximo es en $\theta = 90^\circ$.

Cálculo de los nulos:

$$\begin{aligned}
 (1 + 2 \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right) = 0 &\rightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cos(\pi \cos\theta) = 0 \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right) = 0 \end{cases} \\
 1 + 2 \cos(\pi \cos\theta) = 0 &\Rightarrow \cos(\alpha) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = [2\pi/3 \pm 2n\pi, 4\pi/3 \pm 2n\pi] \\
 \pi \cos\theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi &\Rightarrow \cos\theta = 2/3 \Rightarrow \theta = 48^\circ \\
 \pi \cos\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi &\Rightarrow \cos\theta = -2/3 \Rightarrow \theta = 132^\circ \\
 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \text{sen}\theta\right) = 0 &\Rightarrow \theta = 0^\circ, 180^\circ
 \end{aligned}$$

Por tanto, en el intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$, con una distribución uniforme el factor de array presenta nulos en 48° y 132° , mientras que con la distribución triangular no había nulos.

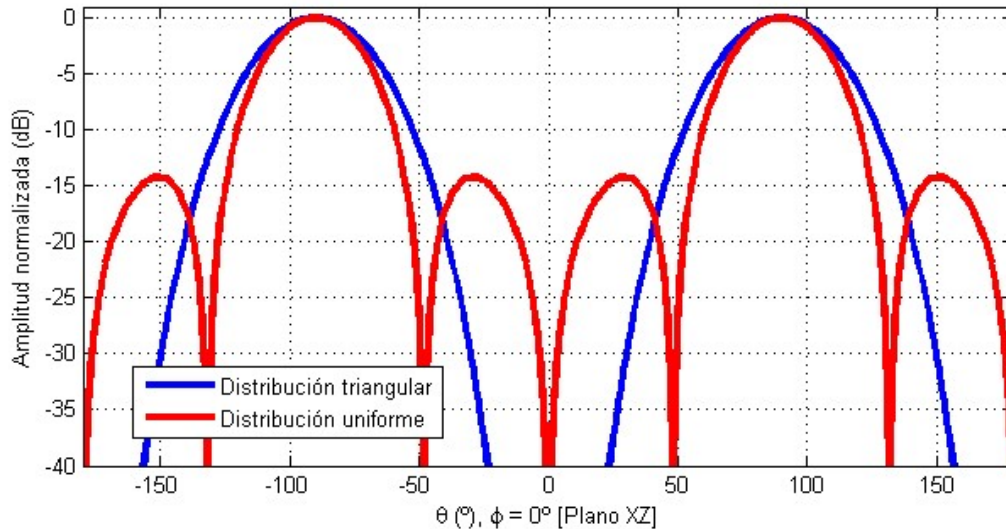
En consecuencia, se tendrá un lóbulo secundario a cada lado del lóbulo principal. La posición de dicho lóbulo se puede estimar como:

$$\theta_{\text{SLL}} (\text{°}) = (0^\circ + 48^\circ) / 2 = 24^\circ$$

Para $\theta_{\text{SLL}} = 24^\circ$, evaluamos el nivel del factor de array:

$$|FA(\theta = 24^\circ)| = 0,184 \equiv -14,6 \text{ dB}$$

Por tanto, el nivel de lóbulos secundarios en el caso de la distribución uniforme es de -14,6 dB con respecto al lóbulo principal.



Comparativa entre el factor de array normalizado de la distribución triangular y la distribución uniforme.

Calculamos el ancho de haz a -3 dB para la distribución uniforme:

$$|FA(\theta)|_N = \left| \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(\pi \cos\theta)) \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta\right) \right) \right|$$

θ [°]	90	60	70	75	68	72
FA(θ) [normalizado]	1	0,326	0,648	0,790	0,687	0,7077

Por tanto, el ancho de haz a -3 dB es: $(90^\circ - 72^\circ) \times 2 = 18^\circ \times 2 = 36^\circ$

Es decir, con respecto a la distribución triangular ($BW_{-3\text{dB}} = 42,4^\circ$), el ancho de haz a -3 dB se reduce en $6,4^\circ$. La contrapartida es la aparición de lóbulos secundarios.

Debido al estrechamiento del lóbulo principal, es esperable un aumento de la directividad:

$$D_0 = \frac{41253}{BW_{-3\text{dB},XZ} \times BW_{-3\text{dB},XY}} = \frac{41253}{36^\circ \times 120^\circ} = 9,55 = 9,8 \text{ dBi}$$

La directividad aumenta 0,7 dB.

5. Propagación en espacio libre

5.1. Fórmula de Friis

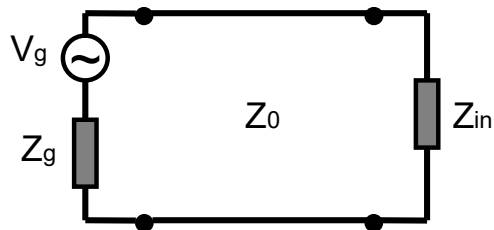
Ejercicio 5.1

Una antena directiva de 30 dB de ganancia, tiene una impedancia de entrada de $66 - j 20$ ohmios, y se alimenta a través de una línea de transmisión de $Z_0 = 50$ ohmios. Con una potencia disponible del generador (de impedancia de generador $Z_g = 50$ ohmios) de 10 dBW, calcule el nivel de campo radioeléctrico a una distancia de 1 km (en la dirección del máximo de la antena).

- a) 8,73 V/m b) 4,71 mV/m c) 9,53 mV/m d) 0,76 V/m

Solución:

$$\begin{aligned} G &= 30 \text{ dBi} \\ Z_{in} &= 66 - j 20 \\ Z_0 &= 50 \Omega \\ Z_g &= 50 \Omega \\ P_{dis} &= 10 \text{ dBW} \end{aligned}$$



Relación entre potencia disponible en el generador y potencia entregada (suponiendo la línea de transmisión sin pérdidas):

$$\frac{P_{entr}}{P_{dis}} = \frac{(1 - |\rho_{in}|^2)(1 - |\rho_{gen}|^2)}{|1 - \rho_{in}\rho_{gen}e^{-2\gamma d}|^2}$$

$$\rho_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{66 - j 20 - 50}{66 - j 20 + 50} = \frac{16 - j 20}{116 - j 20} \rightarrow |\rho_{in}| = 0,2176 \rightarrow |\rho_{in}|^2 = 0,0473$$

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0$$

$P_{entr} = 10 \text{ W} \cdot (1 - |0,2176|^2) = 9,527 \text{ W}$ corresponde a la potencia entregada.

Se calcula el campo radiado como:

$$PIRE = P_{entr} \cdot G \quad \langle S_{rad} \rangle = \frac{PIRE}{4\pi R^2} = \frac{1}{2\eta} |E_{rad}|^2$$

$$|E_{rad}|^2 = \frac{2\eta \cdot PIRE}{4\pi R^2} = \frac{2 \cdot 120\pi \cdot 9,527 \cdot 10^{30/10}}{4\pi \cdot (1000)^2} = 0,5716 \rightarrow |E_{rad}| = 0,756 \text{ V/m}$$

Ejercicio 5.2

Un transmisor con una potencia disponible $P_d=100 \text{ W}$ e impedancia de generador de $Z_g = 50 + j 10 \Omega$ alimenta el conjunto línea de transmisión y antena transmisora que ofrecen una impedancia conjunta de $60 + j 20 \Omega$ a aquél. Considerando unas pérdidas totales en la línea de transmisión (pérdidas óhmicas más pérdidas de desadaptación con la antena) de unos 6 dB y que la antena tiene una eficiencia del 60 % y un área equivalente de $20 \lambda^2$ ¿cuál es la densidad de potencia radiada a 10 m en la dirección del máximo de directividad?

- a) 2,3 W/m² b) 6,8 W/m²
c) 4,7 W/m² d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

$$P_{entr,LT+Ant} = P_{dis} [1 - |\Gamma_T|^2]$$

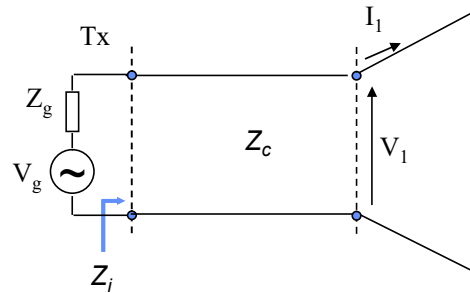
$$\Gamma_T = \frac{Z_i - Z_g^*}{Z_i + Z_g}$$

$$P_{entr,Ant} (dBW) =$$

$$P_{entr,LT+Ant} (dBW) - L_{\acute{o}hm+desap} (dB)$$

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e$$

$$\langle s(\theta_0, \varphi_0) \rangle = \frac{P_{entr,Ant} \cdot G_0}{4\pi r^2}$$



Cálculo del coeficiente de reflexión a la entrada de la línea de transmisión:

$$\Gamma_T = \frac{60+j20-(50-j10)}{60+j20+(50+j10)} = \frac{10+j30}{110+j30} \Rightarrow |\Gamma_T|^2 = \frac{100+900}{12100+900} = \frac{1000}{13000} = \frac{1}{13}$$

Potencia entregada al conjunto formado por la línea de transmisión y la antena:

$$P_{entr,LT+An} = 100 \left[1 - \frac{1}{13} \right] = \frac{1200}{13} = 92,31 \text{ W} = 19,7 \text{ dBW}$$

Potencia entregada a la antena:

$$P_{entr,Ant} (dBW) = 19,7 \text{ dBW} - 6 \text{ dB} = 13,7 \text{ dBW} = 23,4 \text{ W}$$

Ganancia de la antena: $G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} 20 \lambda^2 = 80 \pi$

Se calcula el campo radiado como:

$$PIRE = P_{entr} \cdot G \quad ; \quad \langle S_{rad} \rangle = \frac{PIRE}{4\pi R^2}$$

$$\langle S_{rad} \rangle = \frac{23,4 \cdot 80\pi}{4\pi \cdot (10)^2} = 4,68 \text{ W/m}^2$$

La densidad de potencia radiada a una distancia de 10 m es de 4,68 W/m²

Ejercicio 5.3

Cierta antena que radia una potencia P a la frecuencia f , en una dirección dada por (θ_a, φ_a) , presenta una polarización circular y tiene una directividad $D(\theta, \varphi)$. Escribir la expresión del vector campo eléctrico instantáneo en esa dirección (θ_a, φ_a) a la distancia R de la antena.

Solución:

Polarización circular: $\hat{e} = \frac{\hat{\theta} \pm j \hat{\varphi}}{\sqrt{2}}$ Campo eléctrico: $\vec{E} = E_0 \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \hat{e}$

Directividad: $D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi U(\theta, \varphi)}{P_{rad}} = \frac{4\pi R^2 \langle S(\theta, \varphi) \rangle}{P_{rad}} = \frac{4\pi R^2}{P_{rad}} \frac{1}{2\eta} (|\vec{E}_\theta|^2 + |\vec{E}_\varphi|^2)$

$$D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi R^2}{P_{rad}} \frac{1}{2\eta} (|\vec{E}_\theta|^2 + |\vec{E}_\varphi|^2) = \frac{4\pi R^2}{P_{rad}} \frac{1}{2\eta} \left(\frac{E_0^2}{2R^2} + \frac{E_0^2}{2R^2} \right) = \frac{4\pi}{P_{rad}} \frac{1}{2\eta} E_0^2$$

Para la dirección indicada (θ_a, φ_a) :

$$D(\theta_a, \varphi_a) = \frac{4\pi}{P_{rad}} \frac{1}{2\eta} E_0^2(\theta_a, \varphi_a) \rightarrow E_0(\theta_a, \varphi_a) = \sqrt{\frac{D(\theta_a, \varphi_a) \cdot P_{rad} \cdot \eta}{2\pi}}$$

$$\vec{E}(\theta_a, \varphi_a) = \sqrt{\frac{D(\theta_a, \varphi_a) \cdot P_{rad} \cdot \eta}{2\pi}} \cdot \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \left(\frac{\hat{\theta} \pm j \hat{\varphi}}{\sqrt{2}} \right)$$

Una vez expresado el campo en notación fasorial, se expresa en el dominio temporal:

$$\vec{E}(t, \theta_a, \varphi_a) = \Re \{ \vec{E}_0(\theta_a, \varphi_a) e^{j\omega t} \}$$

$$\vec{E}(t, \theta_a, \varphi_a) = \sqrt{\frac{D(\theta_a, \varphi_a) \cdot P_{rad} \cdot \eta}{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{R} \Re \{ e^{j(\omega t - k_0 R)} \hat{\theta} + e^{j(\omega t - k_0 R \pm \pi/2)} \hat{\varphi} \}$$

$$\vec{E}(t, \theta_a, \varphi_a) = \sqrt{\frac{D(\theta_a, \varphi_a) \cdot P_{rad} \cdot \eta}{4\pi}} \cdot \frac{1}{R} \{ \cos(\omega t - k_0 R) \hat{\theta} \mp \sin(\omega t - k_0 R) \hat{\varphi} \}$$

Por tanto, la expresión del campo eléctrico instantáneo es:

$$\vec{E}(t, \theta_a, \varphi_a) = \sqrt{\frac{D(\theta_a, \varphi_a) \cdot P_{rad} \cdot \eta}{4\pi}} \cdot \frac{1}{R} \{ \cos(2\pi f t - k_0 R) \hat{\theta} \mp \sin(2\pi f t - k_0 R) \hat{\varphi} \}$$

Ejercicio 5.4

Un radioaficionado instala como antena transmisora a 30 MHz (decamétricas) un dipolo horizontal de media onda y lo sitúa a una altura sobre el suelo $h=\lambda$.

- Suponiendo que la tierra se comporta como un conductor perfecto plano, obtener los campos radiados, representar el diagrama de plano H y calcular la posición angular del primer máximo sobre el suelo.
- Si se utiliza un transmisor de potencia disponible 100 W, una línea de transmisión, adaptada al transmisor y a la antena, que tiene unas pérdidas de 13 dB, calcule el nivel de campo existente cuando llega a la capa F2 de la ionosfera, suponiendo que se emplea el haz más próximo al horizonte. (Radio de la Tierra= 6370 km; suponga una altura de la capa F2 de 300 km).

Solución:

a) Se considera el dipolo orientado según el eje 'x', siendo el plano del suelo el XY. Como el suelo se comporta como un PEC, el campo radiado se puede calcular por teoría de imágenes:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\theta, \varphi) &= \vec{E}_{dip}(\theta, \varphi) \cdot FA(\theta, \varphi) \\ FA(\theta, \varphi) &= 1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_1 \cdot \hat{r}} - 1 \cdot e^{jk_0 \vec{r}'_2 \cdot \hat{r}} = e^{jk_0 \lambda \hat{z} \cdot \hat{r}} - e^{-jk_0 \lambda \hat{z} \cdot \hat{r}} \\ FA(\theta, \varphi) &= [e^{j2\pi \cos(\theta)} - e^{-j2\pi \cos(\theta)}] = 2j \cdot \text{sen}(2\pi \cos(\theta)) \\ \vec{E}(\theta, \varphi) &= \vec{E}_{dip}(\theta, \varphi) \cdot 2j \cdot \text{sen}(2\pi \cos(\theta))\end{aligned}$$

Ambos dipolos se encuentran a una altura $h = \lambda$.

$\vec{E}_{dip}(\theta, \varphi)$ es un dipolo $\lambda/2$ en el origen orientado según el eje 'x'.

Para el cálculo del campo del dipolo se pueden plantear 3 opciones de cálculo:

- Derivar la expresión del campo de un dipolo $\lambda/2$ sobre el eje 'x'.
- Derivar la expresión del campo de un dipolo $\lambda/2$ sobre el eje 'z':

$$\vec{E}_{dip}(\theta, \varphi) = \hat{\theta} j \eta \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R} I_0 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\text{sen}(\theta)}, \text{ y posteriormente girarlo al eje 'x'.$$

- Analizar el campo en el plano H, que en este caso es el plano YZ. En este plano, el diagrama del dipolo es omnidireccional, siendo la polarización del campo eléctrico según 'x'.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{dip}(\text{plano } YZ) &= \hat{x} E_0 \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \\ E_0 &= j \eta I_0\end{aligned}$$

Por tanto, el campo radiado es:

$$\vec{E}(\text{plano } YZ) = \vec{E}_{dip}(\theta, \varphi) \cdot FA(\theta, \varphi) = \hat{x} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} (-2\eta I_0) \cdot \text{sen}(2\pi \cos(\theta))$$

Posiciones de los máximos:

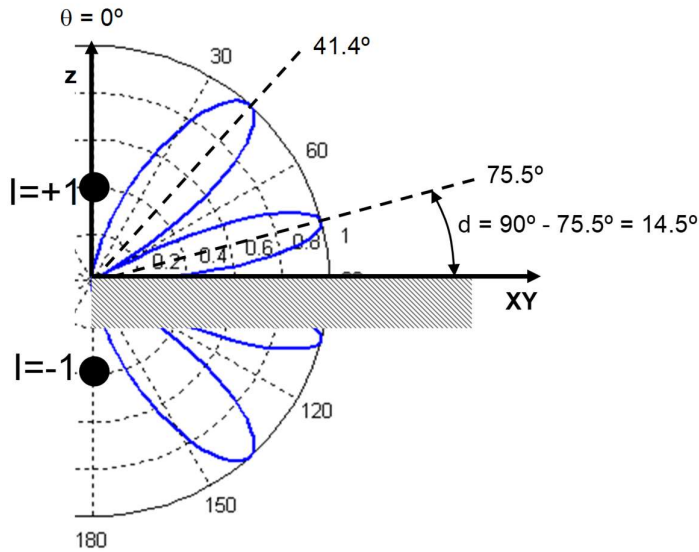
$$f(\theta) = \text{sen}(2\pi \cos(\theta))$$

$$f'(\theta) = -\cos(2\pi \cos(\theta)) \cdot \text{sen}(\theta) = 0$$

$$\text{sen}(\theta) = 0 \rightarrow \theta = 0^\circ; 180^\circ$$

$$\cos(2\pi \cos(\theta)) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\pi \cos(\theta) = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos(\theta) = \pm \frac{1}{4} \rightarrow \theta = 75,5^\circ; 104,5^\circ \\ 2\pi \cos(\theta) = \pm \frac{3\pi}{2} \rightarrow \cos(\theta) = \pm \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 41,4^\circ; 138,6^\circ \end{cases}$$

$$\max(f(\theta)) = 1$$



Por tanto, el primer máximo justo por encima del horizonte (plano XY) está en $\theta = 75,5^\circ$.

b) En primer lugar se calcula la distancia hasta la capa F2 empleando la regla del coseno (ver figura):

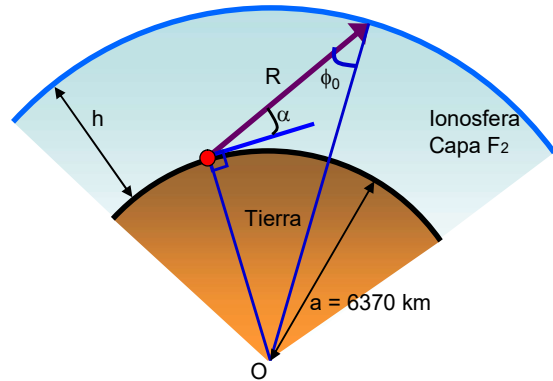
$$(a + h)^2 = a^2 + R^2 - 2aR \underbrace{\cos(90^\circ + \alpha)}_M$$

Siendo $\alpha = 14,5^\circ$

$$a^2 + h^2 + 2ah - a^2 - R^2 + 2aRM = 0$$

$$R^2 - 2aMR - (h^2 + 2ah) = 0$$

$$R = \frac{2aM \pm \sqrt{4a^2M^2 + 4(h^2 + 2ah)}}{2}$$



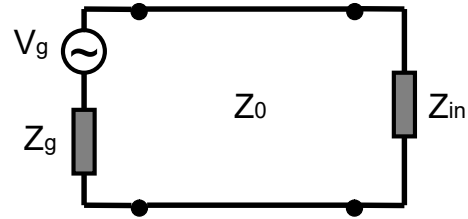
Por tanto, $R = 946 \text{ km}$ (la otra solución es negativa)

Potencia disponible en el transmisor:

$$P_{dis} = 100 \text{ W}$$

Pérdidas de la línea de transmisión:

$$L_{línea} = 13 \text{ dB}$$



Potencia entregada a la carga (antena):

$$P_{entr} = P_{dis} \frac{(1 - |\rho_g|^2)(1 - |\rho_{in}|^2)e^{-2\alpha d}}{|1 - \rho_g \rho_{in} e^{-2\gamma d}|^2}$$

Hay que tener en cuenta las pérdidas de la línea de transmisión (13 dB).

Como está adaptada, los coeficientes de reflexión son iguales a cero,

$$P_{entr} = P_{dis} - 13 \text{ dB} = 20 \text{ dBW} - 13 \text{ dB} = 7 \text{ dBW}$$

Densidad de potencia radiada:

$$\langle S(\theta_0, \varphi_0) \rangle = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} = \frac{PIRE}{4\pi R^2} = \frac{P_{in} \cdot G(\theta_0, \varphi_0)}{4\pi R^2}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot P_{in} \cdot G(\theta_0, \varphi_0)}{4\pi R^2}}$$

$$D_{dip}(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{U_{dip}(\theta, \varphi)}{P_{radiada,dip}} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_{dip}|^2}{P_{radiada,dip}}$$

$$D(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{P_{radiada}} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta} |\vec{E}|^2}{P_{radiada}} = \frac{4\pi r^2 \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_{dip}|^2 \cdot 4 \cdot \text{sen}^2(2\pi \cos(\theta))}{P_{radiada}}$$

Si aproximamos $P_{radiada} \approx P_{radiada,dip}$, entonces,

$$D(\theta, \varphi) \approx D_{dip}(\theta, \varphi) \cdot 4 \cdot \text{sen}^2(2\pi \cos(\theta))$$

$$G(\theta_0, \varphi_0) \approx G_{dip}(\theta_0, \varphi_0) \cdot 4 \cdot \text{sen}^2(2\pi \cos(\theta_0))$$

$$G(\theta_0, \varphi_0) \approx 2,15 + 20 \cdot \log_{10}(2 \cdot \text{sen}(2\pi \cos(75,5^\circ))) = 8,17 \text{ dBi}$$

donde se ha supuesto alta eficiencia de radiación, $G_{dip}(\theta_0, \varphi_0) \approx D_{dip}(\theta_0, \varphi_0) = 2,15 \text{ dBi}$

Finalmente,

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot P_{in} \cdot G(\theta_0, \varphi_0)}{4\pi R^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \cdot \pi \cdot 10^{7/10} \cdot 10^{8,17/10}}{4\pi(946000)^2}} = 4,7 \cdot 10^{-5} = -86,6 \text{ dBV/m}$$

$$= 33,4 \text{ dB}\mu\text{V/m}$$

Ejercicio 5.5

Se dispone de un radioenlace a la frecuencia f entre un satélite geostacionario (considere una altura de 36000 km) que hace de transmisor, y una antena receptora, embarcada en un coche, de tipo hélice de ganancia $G_r=10$ dB y apuntando con su máximo al satélite.

Calcule la PIRE, en dBW, del transmisor (satélite) para una relación señal a ruido a la salida del receptor de $(S/N)_o = 10$ dB y un margen de desvanecimiento de 15 dB.

Otros datos:

$f = 10$ GHz ; radio de la tierra: $a=6370$ km.

Antena del satélite: parábola de $G_t= 40$ dB, con alimentador de tipo bocina cónica corrugada.

Receptor: $T_e = 300$ K; $B(\text{ruido}) = 5$ MHz.

Temperatura de antena. $T_a=11,9$ K.

Cte. Boltzman= $K = 1,37 \cdot 10^{-23}$ W/(K·Hz).

Considere que las antenas siempre apuntan entre sus máximos de diagrama.

Solución:

Nivel de señal recibida en el receptor:

$$S_i = \frac{PIRE(\theta_t)}{4\pi R^2} \cdot A_{e,r}(\theta_r) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2 = \frac{PIRE_{\max} \cdot f_t(\theta_t)}{4\pi R^2} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_{r,0} \cdot f_r(\theta_r) \right) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2$$

Diagrama de radiación de la antena Tx y Rx:

Sus máximos están alineados: $f_t(\theta_t) = 1$ $f_r(\theta_r) = 1$

Desacoplo por pérdidas de polarización: $(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2 = \frac{1}{2}$ (una antena tiene polarización lineal, y la otra circular).

Distancia de propagación (superficie terrestre – satélite): $R = 36000$ km

Ruido a la entrada del receptor: $N_i = K \cdot (T_a + T_e) \cdot B$

Relación señal a ruido:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_o &= \frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{N_i} = \frac{PIRE_{\max}}{K \cdot (T_a + T_e) \cdot B} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot G_{r,0} \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2 \\ PIRE_{\max} &= \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_o \cdot K \cdot (T_a + T_e) \cdot B}{\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot G_{r,0} \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2} = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_o \cdot K \cdot (T_a + T_e) \cdot B \cdot R^2 \cdot (4\pi)^2}{\left(\frac{300}{f_{\text{MHz}}}\right)^2 \cdot G_{r,0} \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2} \\ PIRE_{\max} &= \frac{10 \cdot 1,37 \cdot 10^{-23} \cdot (11,9 + 300) \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot (36000)^2 \cdot 10^6 \cdot (4\pi)^2}{\left(\frac{300}{10000}\right)^2 \cdot 10 \cdot 0,5} \\ &= 9716,685 \text{ KW} \quad (69,9 \text{ dBW}) \end{aligned}$$

Incluyendo el margen de desvanecimiento de 15 dB:

$$PIRE = 84,9 \text{ dBW}$$

Ejercicio 5.6

Suponiendo dos dipolos resonantes enfrentados a distancia de campo lejano:

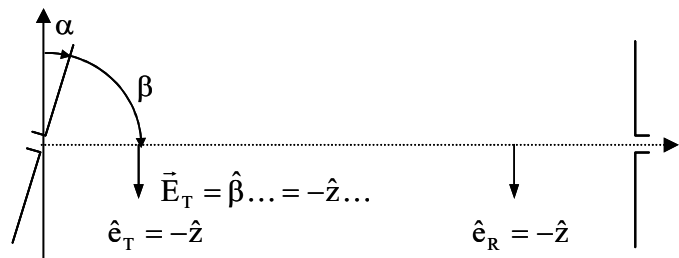
- Calcule las pérdidas adicionales producidas por el giro fortuito del dipolo transmisor del radioenlace de valor α en el plano que contiene a los dipolos.
- Calcule las pérdidas adicionales producidas por el giro fortuito del dipolo transmisor del radioenlace de valor α en el plano perpendicular al que contiene a los dipolos.

Solución:

- Si el dipolo se gira un ángulo α :

La directividad máxima D_0 del dipolo vale 1,64 y el campo radiado, cuando se sitúa sobre z tiene la expresión:

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = j \frac{\eta}{2\pi} \frac{e^{-jk}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \hat{\theta}$$



Las pérdidas adicionales producidas por este cabeceo no son producidas por desacoplo de polarización (los vectores de campo eléctrico del transmisor y del receptor siguen siendo paralelos) sino que vienen fijadas por la diferencia entre la ganancia máxima y la que corresponde a un ángulo β (o, equivalentemente, α , como se observa en la figura).

$$G_0 \approx D_0 = 1,64 \cdot f(\theta, \phi) = 1,64 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2$$

$$\text{Incremento de Perdidas} = \Delta G = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\beta\right)}{\sin\beta} \right]^2 = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\alpha\right)}{\cos\alpha} \right]^2$$

- Si el giro fuese en el plano ortogonal al papel, no se hubiese producido una disminución de la ganancia sino un desacoplo por polarización caracterizado por la expresión $|\cos\alpha|^2$

Ejercicio 5.7

Calcule la tensión en circuito abierto en bornes de una hélice que radia axialmente, de 16 dB de ganancia y 140Ω de impedancia de entrada, cuando incide frontalmente, en la dirección de su eje, una onda linealmente polarizada de 0,1 V/m, a 1 GHz.

Solución:

La longitud de onda es: $\lambda = \frac{30}{1 \text{ GHz}} \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$

La densidad de potencia radiada es: $\langle S_i \rangle = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_i|^2 = \frac{0,1^2}{240\pi} \text{ W/m}^2 = 13,3 \mu\text{W/m}^2$

Desacoplo de polarización: $|\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r|^2 = \left| \hat{x} \cdot \left(\frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 = 1/2$

Ganancia de la hélice: $G_0 = 10^{16/10} = 40$

Potencia disponible en bornas de la antena receptora:

$$P_{disponible} = \langle S_i \rangle \cdot A_e \cdot |\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r|^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \langle S_i \rangle \cdot G \cdot |\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r|^2 = 13,3 \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot 40 \cdot 0,5 = 1,91 \mu W$$

Nivel de tensión en circuito abierto:

$$P_{disponible} = \frac{1}{8} \frac{|V_{ca}|^2}{R_{IN}} \Rightarrow |V_{ca}| \approx \sqrt{8 \cdot 140 \cdot 1,91 \cdot 10^{-6}} = 0,046 V$$

Ejercicio 5.8

Se dispone de un radioenlace a la frecuencia f , con una distancia en horizontal d entre el transmisor y el receptor y alturas de transmisor y receptor h_t y h_r respectivamente (antenas suficientemente altas como para despreciar el efecto de la reflexión en el terreno). La antena transmisora y la receptora son dipolos eléctricamente cortos, dispuestos verticalmente cuya eficiencia de radiación es del 70 %.

Calcule la PIRE máxima del transmisor para una relación señal a ruido de $(S/N)_o = 10$ dB.

Otros datos: $T_e + T_a = 300$ K; $B(\text{ruido}) = 100$ kHz; $h_t = 1$ m; $h_r = 20$ m; $d = 1$ km; $f = 2,4$ GHz; $D_{dip} = 3/2$; cte. Boltzman: $1,37 \cdot 10^{-23}$ W/(K·Hz).

Solución:

Nivel de señal a la entrada del receptor:

$$S_i = \frac{PIRE(\theta_t)}{4\pi R^2} \cdot A_{e,r}(\theta_r) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2 = \frac{PIRE_{max} \cdot f_t(\theta_t)}{4\pi R^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \eta_r \cdot D_{r,0} \cdot f_r(\theta_r) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2$$

Directividad (dependiente del ángulo de apuntamiento) para las antenas emisora y receptora:

$$f_t(\theta_t) = \text{sen}^2(\theta_t) = \left(\frac{d}{R}\right)^2 \quad f_r(\theta_r) = \text{sen}^2(\theta_r) = \left(\frac{d}{R}\right)^2$$

$$\text{Desacoplo de polarización: } (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2 = (\hat{\theta}_t \cdot \hat{\theta}_r)^2 = (\hat{\theta} \cdot \hat{\theta})^2 = 1$$

$$\text{Vano del radioenlace: } R = \sqrt{d^2 + (h_r - h_t)^2}$$

$$\text{Nivel de ruido a la entrada del receptor: } N_i = K \cdot (T_a + T_e) \cdot B$$

Relación señal a ruido a la salida del receptor:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{N_i} = \frac{PIRE_{max} \cdot f_t(\theta, \varphi)}{K \cdot (T_a + T_e) \cdot B} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot \eta_r \cdot D_{r,0} \cdot f_r(\theta, \varphi) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2$$

Despejando la PIRE:

$$PIRE_{max} = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_o \cdot K \cdot (T_a + T_e) \cdot B}{f_t(\theta, \varphi) \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot \eta_r \cdot D_{r,0} \cdot f_r(\theta, \varphi) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r^*)^2} = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_o \cdot K \cdot (T_a + T_e) \cdot B \cdot R^6 \cdot (4\pi)^2}{d^4 \cdot \left(\frac{300}{f_{MHz}}\right)^2 \cdot \eta_r \cdot D_{r,0}}$$

Sustituyendo con los datos indicados en el enunciado del problema:

$$PIRE_{max} = \frac{10 \cdot 1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^5 \cdot ((10^3)^2 + (20 - 1)^2)^{6/2} \cdot (4\pi)^2}{(10^3)^4 \cdot \left(\frac{300}{2400}\right)^2 \cdot 0,7 \cdot 1,5} = 3,96 \cdot 10^{-5} \approx 40 \mu W$$

Alternativa operando directamente en unidades logarítmicas:

$$PIRE_{max}(dBW) = \left(\frac{S}{N}\right)(dB) + 10 \cdot \log_{10}(K(T_a + T_e)B) - 10 \cdot \log_{10}(f_t(\theta, \varphi)) - 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right) - 10 \cdot \log_{10}(\eta_r \cdot D_{r,o}) - 10 \cdot \log_{10}(f_r(\theta, \varphi)) - 20 \cdot \log_{10}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)$$

$$10 \cdot \log_{10}(K(T_a + T_e)B) = 10 \cdot \log_{10}(1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^5) = -153,9 \text{ dBW}$$

$$10 \cdot \log_{10}(f_t(\theta, \varphi)) = 10 \cdot \log_{10}(f_r(\theta, \varphi)) = 10 \cdot \log_{10}\left(\left(\frac{d}{R}\right)^2\right) = 0,0016 \text{ dB}$$

$$-20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right) = -20 \cdot \log_{10}\left(\frac{300}{4\pi \sqrt{(1000^2 + 19^2)}}\right) = 100,05 \text{ dB}$$

$$-20 \cdot \log_{10}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r) = 0 \text{ dB}$$

$$-10 \cdot \log_{10}(\eta_r \cdot D_{r,o}) = -10 \cdot \log_{10}(0,7 \cdot 1,5) = -0,2 \text{ dB}$$

Sustituyendo con los datos indicados en el enunciado del problema:

$$PIRE_{max}(dBW) = 10 \text{ dB} - 153,09 \text{ dBW} + 100,05 \text{ dB} - 0,2 \text{ dB} - 0,0016 \text{ dB} - 0,0016 \text{ dB} \\ = -44,1 \text{ dBW} = -14,1 \text{ dBm} (\approx 40 \mu W)$$

Ejercicio 5.9

En una red inalámbrica (WLAN) se están realizando pruebas de cobertura terrestre en la banda de 2,4 GHz. Para ello se está transmitiendo una portadora piloto en 2,4 GHz entre dos nodos de un BSS. Se dispone de un transmisor con una PIRE de 100 mW, una antena transmisora de tipo monopolo resonante de 5,16 dBi de directividad y una antena receptora de hélice (funcionando en modo axial) de 7 dBi de directividad; ambas antenas con coeficientes de reflexión de 0,8 y eficiencia de radiación del 80 %, que apuntan en sus respectivos máximos de radiación. Supóngase una temperatura total de ruido (de antena más receptor) de 100 K, y un ancho de banda de ruido del receptor es de 5 MHz.

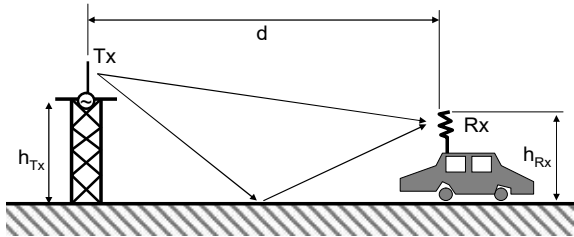
a) Calcule los diversos factores de atenuación y la distancia máxima de cobertura que asegure a la salida del receptor una relación señal a ruido de 30 dB, cuando sobre el trayecto cae una lluvia torrencial de 150 litros/hora.

b) Bajo las mismas condiciones del enlace, ahora el receptor se instala sobre un vehículo que circula a 50 km/h en un entorno multitrayecto que, manteniendo el apuntamiento entre máximos de radiación, describe una circunferencia alrededor del transmisor. Si el retardo rms de las señales reflejadas es de 10 ms y el tiempo de símbolo es de 1 ms, justifique adecuadamente si existirá dispersión en frecuencia y/o en el tiempo y el tipo de desvanecimiento existente.

Datos geométricos: d: distancia horizontal Tx-vehículo; altura del monopolo transmisor $h_{Tx} = 30$ m; altura de la hélice respecto del suelo $h_{Rx} = 1,5$ m.

c) Bajo estas condiciones, pero suponiendo que los máximos del diagrama de las antenas apuntan horizontalmente, indique la mínima distancia 'd' para la cual el nivel de señal recibido es nulo.

Considere un modelo de suelo de conductor perfecto. Suponga, para este apartado, que el diagrama de radiación de las antenas (expresado en campo) es de tipo $\cos(\theta)$.

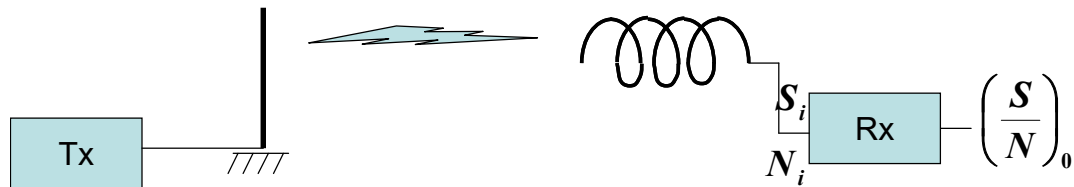


Frecuencia (GHz)	K_H	K_V	α_H	α_V
1	0,0000387	0,0000352	0,912	0,880
10	0,0101	0,00887	1,276	1,264
20	0,0751	0,0691	1,099	1,065
30	0,187	0,167	1,021	1,000
40	0,350	0,310	0,939	0,929

Notas: Utilice de forma determinista la atenuación específica: $\gamma_R(dB/km) = K_{H,V} \cdot I^{\alpha_{H,V}}$ (I , intensidad de lluvia en litros/h) para calcular las pérdidas por lluvia. A la frecuencia de trabajo del problema puede aproximar las constantes como valor medio de los existentes en la tabla a 1 y 10 GHz.

$K = 1,37 \times 10^{-23} \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{Hz})$.

Solución:



a) La potencia disponible en el receptor viene dada por la fórmula de Friis:

$$P_{disp,Rx} = S_i = \frac{PIRE}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{L_a} \cdot A_{ef,Rx} \cdot (\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*)^2$$

Donde:

$PIRE$: potencia isotrópica radiada equivalente: $PIRE = P_{entreg,Tx} \cdot G_{Tx}$

L_a : atenuación debida a la lluvia: $L_a(dB) = \gamma_R(dB/km) \cdot R_{km}$

$A_{e,Rx}$: Área equivalente de la antena receptora: $A_{e,Rx} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \eta_{Rx} \cdot D_{Rx}$

$\hat{e}_{Tx}, \hat{e}_{Rx}$: vectores de polarización de la antena transmisora y receptora, respectivamente.

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$S_i = PIRE \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{L_a} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \eta_{Rx} \cdot D_{Rx} \cdot (\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*)^2$$

$$S_i = PIRE \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot \frac{1}{L_a} \cdot \eta_{Rx} \cdot D_{Rx} \cdot (\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*)^2 \quad (\text{Ecuación 1})$$

Se calculan los diferentes términos de la ecuación (en dB):

$$PIRE(dBW) = 10 \log_{10}(0,1 \text{ W}) = -10 \text{ dBW}$$

$$\begin{aligned}
 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right) &= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{0,125 \text{ m}}{4\pi} \right) - 20 \cdot \log_{10}(R[m]) = \\
 &= -40,05 - 20 \cdot \log_{10}(R[m]) = -100,05 - 20 \cdot \log_{10}(R[km]) \\
 10 \cdot \log_{10}(\eta_{Rx} \cdot D_{Rx}) &= 10 \cdot \log_{10}(0,8 \times 10^{\frac{7}{10}}) = 6,03 \text{ dB} \\
 20 \cdot \log_{10}(\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*) &= 20 \cdot \log_{10} \left(\underbrace{\hat{z}}_{\text{LINEAL}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\hat{z} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \right)}_{\text{CIRCULAR}} \right) = -3 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

Atenuación por lluvia: polarización vertical (v):

$$\begin{aligned}
 f = 1 \text{ GHz} \rightarrow & \quad K_v = 0,0000352 & \quad \alpha_v = 0,880 \\
 f = 10 \text{ GHz} \rightarrow & \quad K_v = 0,00887 & \quad \alpha_v = 1,264 \\
 f = 2,4 \text{ GHz} \rightarrow & \quad K_v \sim (0,0000352 + 0,0087) / 2 = 0,0045 & \quad \alpha_v = 1,072
 \end{aligned}$$

(donde el promediado realizado representa una opción conservadora para la estimación de la atenuación por lluvia)

Lluvia: 150 litros/hora

$$\begin{aligned}
 \gamma_R(\text{dB/km}) &= K_v \cdot I^{\alpha_v} \cong 0,0045 \cdot 150^{1,072} \cong 0,968 \text{ dB/km} \\
 L_a(\text{dB}) &= \gamma_R(\text{dB/km}) \cdot R(\text{km}) = 0,968 \cdot R(\text{km})
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el ruido total referido a la entrada del receptor será:

$$N_i = K(T_A + T_{Rx})B$$

Como además se verifica que $\left(\frac{S}{N}\right)_i = \left(\frac{S}{N}\right)_0$, se tendrá:

$$S_i = \left(\frac{S}{N}\right)_0 \cdot [K(T_A + T_{Rx})B] \quad (\text{Ecuación 2})$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$$PIRE \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot \frac{1}{L_a} \cdot \eta_{Rx} \cdot D_{Rx} \cdot (\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*)^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_0 \cdot (K(T_A + T_{Rx})B)$$

Expresando la igualdad anterior en unidades logarítmicas:

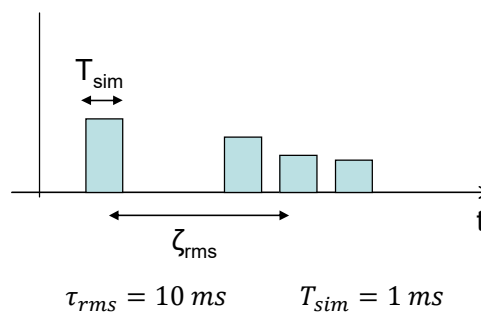
$$\begin{aligned}
 PIRE(\text{dBW}) + 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right) - \gamma_R(\text{dB/km}) \cdot R(\text{km}) + 10 \cdot \log_{10}(\eta_{Rx}) + 10 \cdot \log_{10}(D_{Rx}) + 20 \cdot \log_{10}(\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*) &= \\
 = \left(\frac{S_0}{N_0}\right) (\text{dB}) + 10 \cdot \log_{10}(K(T_A + T_{Rx})B) &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda(\text{m})}{4\pi R(\text{m})} \right) &= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda(\text{m})}{4\pi 1000 \cdot R(\text{m})} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda(\text{m})}{4\pi} \right) - 20 \cdot \log_{10}(R(\text{km})) - 20 \cdot \log_{10} 1000 = \\
 = -40,05 \text{ dB} - 20 \cdot \log_{10}(R(\text{km})) - 60 \text{ dB} &= -100,05 \text{ dB} - 20 \cdot \log_{10}(R(\text{km})) \\
 -10 \text{ dBW} - 100,05 - 20 \cdot \log_{10}(R(\text{km})) - 0,968 \cdot R(\text{km}) + 6,03 - 3 & \\
 = 30 + 10 \cdot \log_{10}(1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^6) & \\
 -20 \cdot \log_{10}(R(\text{km})) - 0,968 \cdot R(\text{km}) - 107,02 = 30 - 141,64 & \\
 20 \cdot \log_{10}(R(\text{km})) + 0,968 \cdot R(\text{km}) = 4,62 &
 \end{aligned}$$

R(km)	$20 \cdot \log_{10}(R(\text{km})) + 0,968 \cdot R(\text{km})$
10	29,68
2	7,96
1	0,968
1,5	4,97
1,4	4,28
1,45	4,63

Por tanto, la distancia máxima de cobertura es: R= 1,45 km

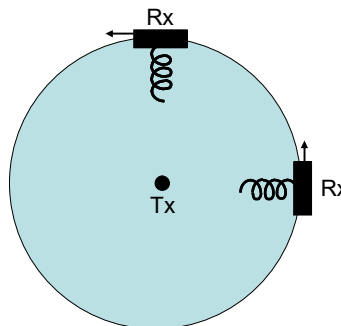
b) Estudio de la dispersión en frecuencia y/o en el tiempo y el tipo de desvanecimiento existente.



Como $\tau_{rms} \gg T_{sim}$:

- Existe retardo temporal → existe dispersión temporal
- Desvanecimiento selectivo “en frecuencia”.

El móvil describe una trayectoria circular alrededor del transmisor:



Desplazamiento Doppler:

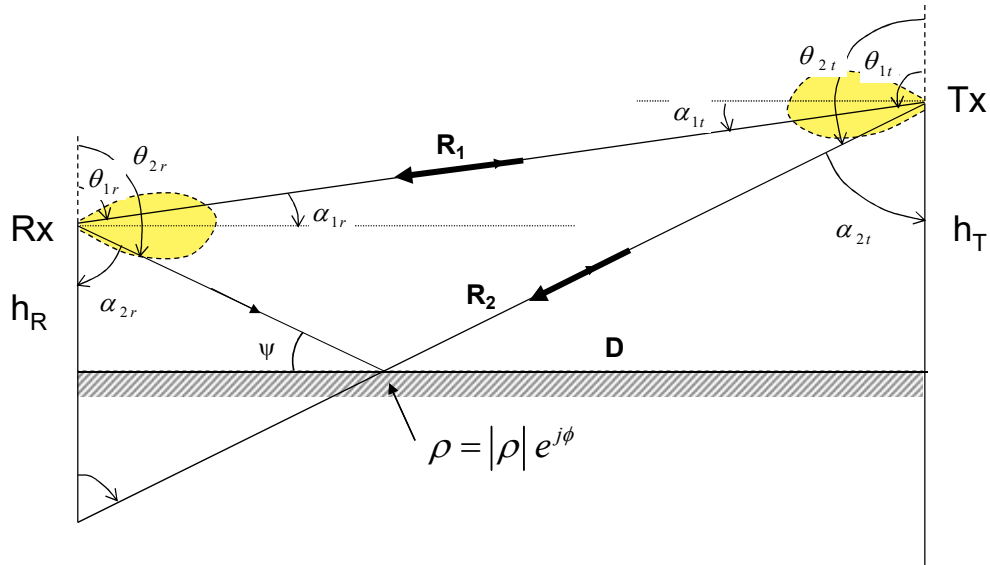
$\Delta f = f_0 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha = 0$. Es decir, la distancia del Rx al Tx no cambia (es el radio de la circunferencia).

Por lo tanto:

- No existe dispersión frecuencial.
- Desvanecimiento plano en el tiempo.

c) Estudio del multitrayecto:

Esquema de campo incidente y reflejado (se supone reflexión especular en el suelo).



Coefficiente de reflexión en el suelo: $\rho = |\rho| e^{j\phi} = -1$

Se asumen diagramas de radiación de tipo cosenoidal, correspondiendo el máximo al ángulo $\theta = 90^\circ$, y presentando nulos en $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$.

Campo eléctrico de la antena transmisora a una distancia R (aproximación de onda esférica, localmente plana, en espacio libre):

-De la contribución directa: $E_{directo}(\theta_{1t}) = E_{0,Tx} \text{sen}(\theta_{1t}) \frac{e^{-jk_0 R_1}}{R_1}$

-De la contribución de la reflexión: $E_{reflejado}(\theta_{2t}) = E_{0,Tx} \text{sen}(\theta_{2t}) \frac{e^{-jk_0 R_2}}{R_2}$

Distancias de la contribución directa y de la reflejada:

$$R_1 = \sqrt{D^2 + (h_t - h_r)^2} \quad R_2 = \sqrt{D^2 + (h_t + h_r)^2}$$

Campo eléctrico que incide a la antena receptora (se supone igual polarización de las ondas directa y reflejada):

$$E = E_{directo} + E_{reflejado} \cdot |\rho| \cdot e^{j\phi}$$

$$E = E_{0,Tx} \text{sen}(\theta_{1t}) \frac{e^{-jk_0 R_1}}{R_1} + E_{0,Tx} \text{sen}(\theta_{2t}) \frac{e^{-jk_0 R_2}}{R_2} \cdot |\rho| \cdot e^{j\phi}$$

$$E = E_{0,Tx} \left(\text{sen}(\theta_{1t}) \frac{e^{-jk_0 R_1}}{R_1} - \text{sen}(\theta_{2t}) \frac{e^{-jk_0 R_2}}{R_2} \right)$$

$$\text{sen}(\theta_{1t}) = \text{sen}(90^\circ + \alpha_{1t}) = \text{cos}(\alpha_{1t}) = \frac{D}{R_1} \quad \text{sen}(\theta_{2t}) = \text{sen}(180^\circ - \alpha_{2t}) = \text{sen}(\alpha_{2t}) = \frac{D}{R_2}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$f(D) = \frac{E}{E_{0,Tx}} = \frac{D}{(D^2 + (h_t - h_r)^2)} e^{-jk_0 (D^2 + (h_t - h_r)^2)^{1/2}} - \frac{D}{(D^2 + (h_t + h_r)^2)} e^{-jk_0 (D^2 + (h_t + h_r)^2)^{1/2}}$$

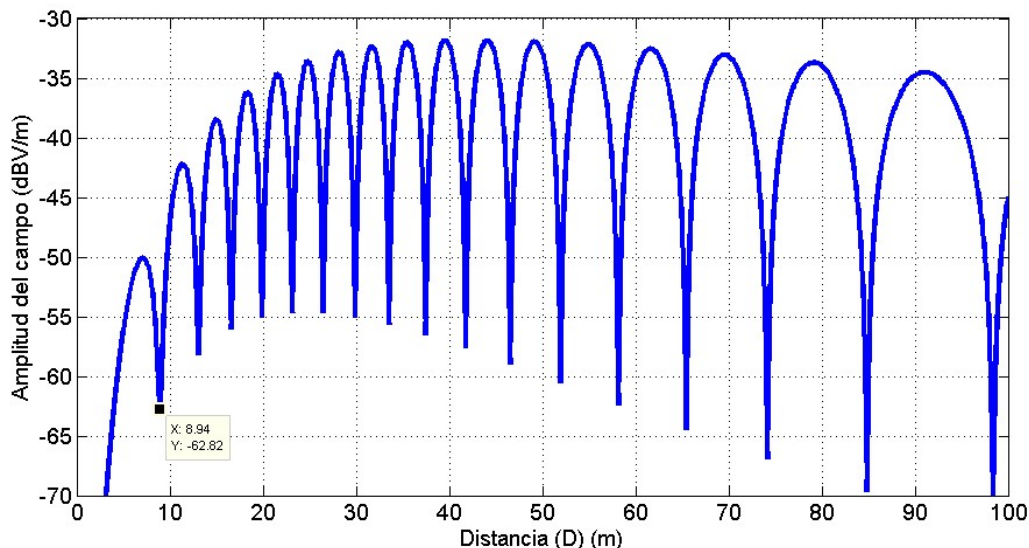
Evaluando la expresión para diferentes valores de D:

D [m]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$20 \log_{10}(f(D))$	-99	-84	-72	-63	-56	-52	-50	-52	-62	-47

Haciendo un “zoom” entre 8 y 9 m:

D [m]	8,6	8,8	8,9	9,2
$20 \log_{10}(f(D))$	-58	-62	-63	-58

Primer nulo para $D = 8,9$ m



Representación del nivel de campo (dBV/m) en función de la distancia (m). Interferencia multicamino.

5.2. Elipsoides de Fresnel

Ejercicio 5.10

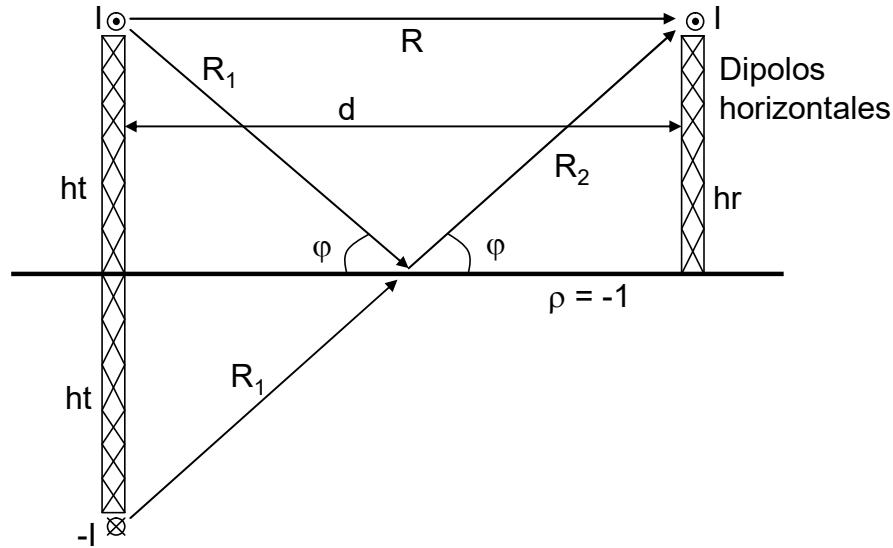
Se dispone de un radioenlace a la frecuencia f , con una distancia en horizontal d entre el transmisor y el receptor y alturas de transmisor y receptor h_t y h_r respectivamente. La antena transmisora y la receptora son dipolos eléctricamente cortos, dispuestos paralelos a tierra y paralelos entre sí. Considere que la tierra como un plano conductor perfecto y que el coeficiente de reflexión es -1 .

Demuestre el término de pérdidas de potencia a incluir en la fórmula de Friis debido a la suma de la contribución directa y la reflejada en tierra y calcule la PIRE para una relación señal a ruido a la salida de $(S/N)_o = 10$ dB.

Para el radioenlace anterior, se desea colocar un obstáculo a mitad del enlace que minimice el efecto de la reflexión en tierra. ¿Qué altura máxima debería tener dicho obstáculo para asegurar el enlace?

Otros datos: $T_e + T_a = 300$ K; $B(\text{ruido}) = 100$ kHz; $h_t = h_r = 20$ m; $d = 2$ km; $f = 2,4$ GHz; $G_{dip} = 3/2$; cte. Boltzman: $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/(K).

Solución:



Contribución del rayo directo y del rayo reflejado (considerando iguales las atenuaciones de ambos trayectos):

$$E = E_d(1 - 1 \cdot e^{-jk_0\Delta}) = E_d \cdot e^{-jk_0\Delta/2}(e^{jk_0\Delta/2} - e^{-jk_0\Delta/2}) = E_d \cdot e^{-\frac{jk_0\Delta}{2}} \left(e^{\frac{jk_0\Delta}{2}} - e^{-\frac{jk_0\Delta}{2}} \right) = E_d \cdot e^{-\frac{jk_0\Delta}{2}} 2j \operatorname{sen}(k_0\Delta/2)$$

Desfase del rayo reflejado:

$$\Delta = R - (R_1 + R_2) = \frac{\sqrt{d^2 + (ht - hr)^2}}{R} - d/\cos(\varphi)$$

$$ht = R_1 \operatorname{sen}(\varphi) \quad hr = R_2 \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$d = R_1 \cos(\varphi) + R_2 \cos(\varphi)$$

$$\left. \begin{array}{l} R_1 + R_2 = d/\cos(\varphi) \\ R_1 + R_2 = (ht + hr)/\operatorname{sen}(\varphi) \end{array} \right\} \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} \frac{d}{ht + hr} = 1 \rightarrow \tan(\varphi) = (ht + hr)/d \rightarrow 1 + \left(\frac{ht + hr}{d} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\varphi)}$$

Sustituyendo:

$$\Delta = R - (R_1 + R_2) = \frac{\sqrt{d^2 + (ht - hr)^2}}{R} - d \sqrt{1 + \left(\frac{ht + hr}{d} \right)^2}$$

$$\Delta = R - (R_1 + R_2) = \sqrt{d^2 + (ht - hr)^2} - \sqrt{d^2 + (ht + hr)^2}$$

$$\Delta/d = \sqrt{1 + ((ht - hr)/d)^2} - \sqrt{1 + ((ht + hr)/d)^2}$$

Los términos anteriores se pueden aproximar por su desarrollo en serie:

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + x/2 - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$\Delta/d = \sqrt{1 + ((ht - hr)/d)^2} - \sqrt{1 + ((ht + hr)/d)^2} \simeq$$

$$\simeq \left(1 + \frac{ht^2 + hr^2 - 2 \cdot ht \cdot hr}{2d^2} + \dots\right) - \left(1 + \frac{ht^2 + hr^2 + 2 \cdot ht \cdot hr}{2d^2} + \dots\right) = \frac{-2 \cdot ht \cdot hr}{d^2}$$

Por tanto: $\Delta \simeq \frac{-2 \cdot ht \cdot hr}{d}$

Sustituyendo en la expresión del campo radiado:

$$E = E_d \cdot e^{-\frac{jk_0\Delta}{2}} 2j \operatorname{sen}\left(\frac{k_0\Delta}{2}\right) = 2 E'_d \operatorname{sen}\left(\frac{k_0\Delta}{2}\right) = 2 E'_d \operatorname{sen}\left(k_0 \frac{ht \cdot hr}{d}\right)$$

En potencia: $F_{mult} = 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi ht \cdot hr}{\lambda d}\right)$ es el término debido al rayo reflejado.

Balance de enlace:

$$\frac{PIRE \lambda^2}{4\pi R^2 4\pi} G_{rx} = S_i \left\{ \left(\frac{S}{N}\right)_0 = \left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{PIRE \lambda^2}{4\pi R^2 4\pi} G_{rx} \frac{1}{K(T_e + T_a)B} (F_{mult}) \right.$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{PIRE \cdot G_{rx}}{K(T_e + T_a)B} \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \left(4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi ht \cdot hr}{\lambda d}\right)\right)$$

$$PIRE = \left(\frac{S}{N}\right)_0 + 10 \log_{10}(K(T_e + T_a)B) - G_{rx} + 20 \log_{10}\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right) - 10 \log_{10}\left(4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi ht \cdot hr}{\lambda d}\right)\right)$$

Evaluando términos:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 10 \text{ dB}$$

$$10 \log_{10}(K(T_e + T_a)B) = -153,86 \text{ dBW}$$

$$G_{rx} = 10 \log_{10}(1,5) = 1,76 \text{ dB (dipolos eléctricamente cortos)}$$

$$20 \log_{10}\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right) = 106,1 \text{ dB}$$

$$10 \log_{10}\left(4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi ht \cdot hr}{\lambda d}\right)\right) = 1,4 \text{ dB}$$

$$PIRE = 10 \text{ dB} - 153,86 \text{ dBW} - 1,76 \text{ dB} + 106,1 \text{ dB} - 1,4 \text{ dB} = -41 \text{ dBW} = 0,08 \text{ mW}$$

La PIRE mínima del transmisor es de -11 dBm

Elipsoides de Fresnel:

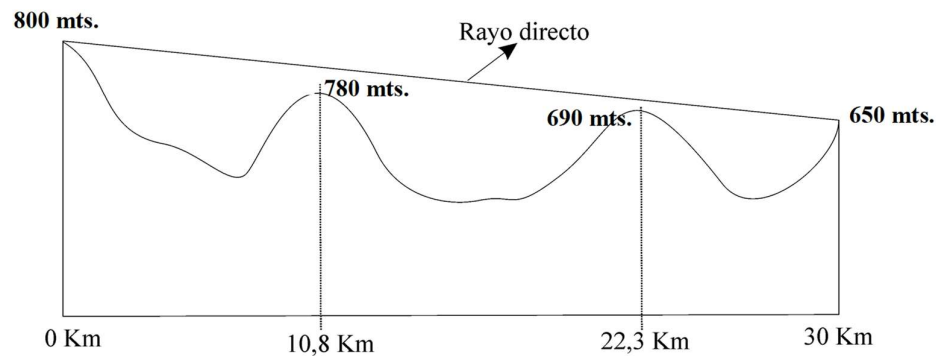
Primera zona de Fresnel ($n = 1$):

$$r = \sqrt{\lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}} = \sqrt{0,125 \text{ m} \frac{1000 \text{ m} \cdot 1000 \text{ m}}{1000 \text{ m} + 1000 \text{ m}}} = 7,9 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta que $ht = hr = 20 \text{ m}$, entonces, la altura máxima del obstáculo es de $12,1 \text{ m}$

Ejercicio 5.11

Suponga que tiene que planificar un radioenlace a 2 GHz. El perfil del trayecto (después de aplicar todos los factores correctores por el modelo de tierra) es el siguiente:



a) Determine la altura mínima a que se deben situar las antenas para que en todo el trayecto pueda suponerse condiciones de propagación en espacio libre.

b) Si el receptor tiene una sensibilidad de 0,5 mV (especificada como tensión de pico en circuito abierto) y despreciando contribuciones de reflexiones, justifique la máxima intensidad de lluvia (litros/h) que puede caer en la zona para se realice el enlace con un margen de desvanecimiento de 10 dB. Calcule y escriba ordenadamente todos los factores de pérdidas del enlace.

Ganancia antena transmisora: 10 dB; rendimiento de radiación de la antena transmisora: 70%; coeficiente reflexión antena transmisora: 0,8; PIRE del transmisor 40 dBW; área equivalente de la antena receptora 1,2 m²; impedancia de entrada de la antena receptora 35 Ω. Ambas antenas tienen polarización horizontal, están situadas apuntando su máximo del diagrama a una dirección horizontal respecto del dibujo adjunto ($\theta=0$), y tienen un diagrama de radiación en campo cuyo lóbulo principal, en el plano vertical, se puede aproximar con una variación del tipo $\cos^2\theta$.

Si determinara que el enlace nunca es viable, indique cuánto habría que incrementar las ganancias de ambas antenas (por igual).

c) Suponiendo que el perfil de la figura se ha obtenido tras corregir la refracción troposférica (en condiciones de refracción estándar con modelo de tierra esférica de radio $a' = 8490$ km, siendo el radio original de la tierra $a = 6370$ km), comente las alturas que le indicaría un altímetro si se situara en lo alto de las dos colinas intermedias del perfil orográfico representado.

d) Si no se dispusiera de medios que permitieran elevar las antenas para una propagación de espacio libre, valore la posibilidad de utilizar propagación ionosférica.

Notas:

- Considere el diseño para una atenuación por lluvia que se puede modelar de forma determinista mediante la atenuación específica $\gamma_R(\text{dB}/\text{km}) = K_{H,V} \cdot I^{\alpha_{H,V}}$, I (litros/h).

Frecuencia (GHz)	K_H	K_V	α_H	α_V
1	0,0000387	0,0000352	0,912	0,880
10	0,0101	0,00887	1,276	1,264
20	0,0751	0,0691	1,099	1,065
30	0,187	0,167	1,021	1,000
40	0,350	0,310	0,939	0,929

- Radio de las zonas de Fresnel: $r_n = \sqrt{n \lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}}$

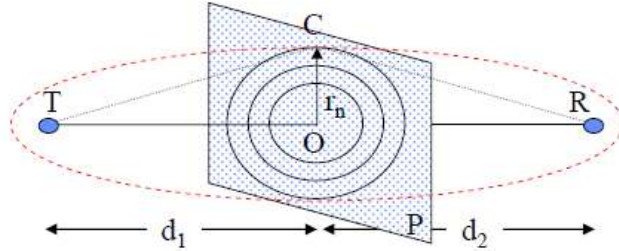
Solución:

a) Altura mínima para considerar condiciones de propagación en espacio libre:

Los radios de los elipsoides de Fresnel vienen dados por:

$$r_n = \sqrt{n \lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}}$$

Siendo $d_1, d_2 \gg r_n$



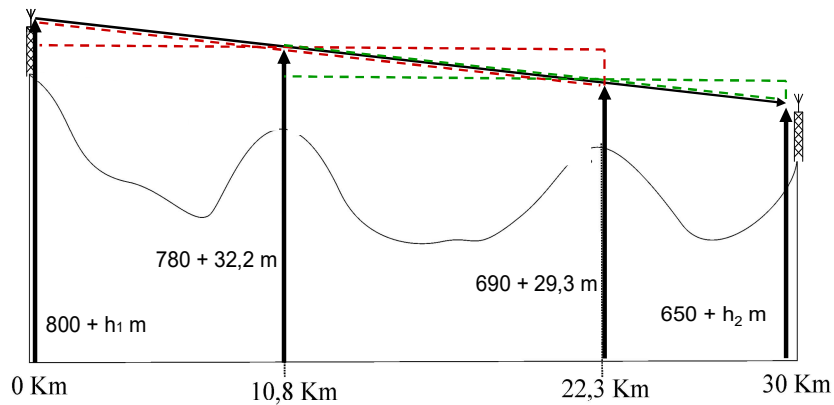
Siendo $\lambda = 15$ cm para $f = 2$ GHz. Se considerará la primera zona de Fresnel, es decir, $n = 1$

$$\text{Para } R = 10,8 \text{ km: } r_1 = \sqrt{n \lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}} = \sqrt{1 \cdot 0,15 \cdot \frac{10800 \cdot 19200}{10800 + 19200}} = 32,2 \text{ m}$$

$$\text{Para } R = 22,3 \text{ km: } r_1 = \sqrt{n \lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}} = \sqrt{1 \cdot 0,15 \cdot \frac{22300 \cdot 7700}{22300 + 7700}} = 29,3 \text{ m}$$

Por tanto, a una distancia de 10,8 km, la altura del obstáculo más la primera zona de Fresnel es de $32,2 \text{ m} + 780 \text{ m} = 812,2 \text{ m}$. Para la distancia de 22,3 km, la altura es de $29,3 \text{ m} + 690 \text{ m} = 719,3 \text{ m}$

Para determinar la altura mínima de las antenas h_1 y h_2 , será necesario tener en cuenta la altura de cada uno de los obstáculos junto con la primera zona de Fresnel sobre cada uno.



Aplicando semejanza de triángulos (teorema de Tales).

$$\frac{(800 + h_1) - (780 + 32,2)}{10800} = \frac{(780 + 32,2) - (690 + 29,3)}{22300 - 10800} \rightarrow h_1 = 99,45 \text{ m}$$

$$\frac{(780 + 32,2) - (690 + 29,3)}{22300 - 10800} = \frac{(690 + 29,3) - (650 + h_2)}{30000 - 22300} \rightarrow h_2 = 7,1 \text{ m}$$

Una vez determinadas las alturas de las antenas, se calcula la distancia entre ambas:

$$R = \sqrt{[(800 + 99,45) - (650 + 7,1)]^2 + 30000^2} \sim 30 \text{ km}$$

$$\text{Ángulo entre las antenas: } \theta_0 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{800 + 99,45 - 650 - 7,1}{30000} \right) = 0,46^\circ$$

b) Máxima intensidad de lluvia:

Diagrama de las antenas: $\cos^4(\theta)$, siendo $\theta = 0$ la dirección horizontal. Como $\theta_0 = 0,46^\circ$, entonces, $\cos^4(\theta_0) \sim 1$, es decir, están radiando prácticamente en el máximo.

Balance de enlace (Friis):

$$PIRE \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{L_{Lluvia}} \cdot A_{e,Rx} \cdot (\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*)^2 \cdot (\cos^2(\theta_0))^2 \geq \frac{V_s^2}{8R_{in,r}} \cdot M_{desv}$$

$$PIRE \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot \frac{1}{L_{Lluvia}} \cdot G_{Rx} \cdot (\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*)^2 \cdot (\cos^2(\theta_0))^2 \geq \frac{V_s^2}{8R_{in,r}} \cdot M_{desv}$$

donde V_s es la tensión de pico en circuito abierto del generador equivalente de la antena receptora.

PIRE = 40 dBW

$$\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 = \left(\frac{0,15}{4 \cdot \pi \cdot 30000}\right)^2 = 1,58 \cdot 10^{-1} = -128 \text{ dB}$$

$$G_{Rx} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{e,Rx} = \frac{4\pi}{0,15^2} \cdot 1,2 = 670 = 28,3 \text{ dB}$$

Desacoplo de polarización: $(\hat{e}_{Tx} \cdot \hat{e}_{Rx}^*)^2 = 1 = 0 \text{ dB}$

Desapuntamiento: $(\cos^2(\theta_0))^2 \approx 1 = 0 \text{ dB}$

Sensibilidad del receptor: $\frac{V_s^2}{8R_{in,r}} = \frac{(5 \cdot 10^{-4})^2}{8 \cdot 35} = 8,93 \cdot 10^{-10} = -90,5 \text{ dBW}$

Balance de enlace:

$$40 \text{ dBW} - 128 \text{ dB} + \left(\frac{1}{L_{Lluvia}}\right)_{dB} + 28,3 \text{ dB} + 0 \text{ dB} + 0 \text{ dB} \geq -90,5 \text{ dBW} + 10 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow L_{Lluvia} < 20,8 \text{ dB}$$

Atenuación por lluvia: $\gamma_R(\text{dB/Km}) = K \cdot I^\alpha$, I (litros/h).

Aproximando las constantes mediante interpolación lineal con las frecuencias más próximas en la tabla:

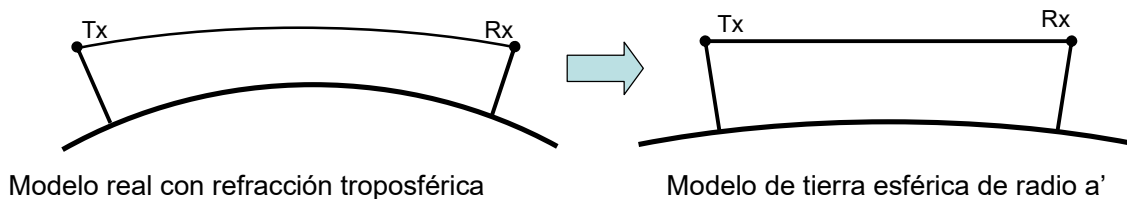
$$K_H = 0,00116 \quad \alpha_H = 0,9524$$

$$L_{Lluvia} = R \cdot \gamma_R(\text{dB/Km}) = R \cdot K_H \cdot I^{\alpha_H} = 30 \cdot (0,00116 \cdot I^{0,9524}) \leq 20,8 \text{ dB}$$

$$I \leq \left(\frac{20,8}{30 \cdot 0,00116}\right)^{1/0,9524} = 823 \text{ litros/hora}$$

Luego no parece que la lluvia a esta frecuencia vaya a ser un factor limitante en el enlace.

c)



En el problema anterior se ha empleado el modelo de tierra esférica de radio a' (alturas h'). Por tanto, se trata de calcular las alturas h considerando el radio $a = 6370$ km. Para ello:

$$h'_1(R = 10800 \text{ m}) = 780 \text{ m} \rightarrow h_1 = h'_1 \cdot \frac{a}{a'} = 780 \cdot \frac{6370}{8490} = 585 \text{ m}$$

$$h'_2(R = 22300 \text{ m}) = 690 \text{ m} \rightarrow h_2 = h'_2 \cdot \frac{a}{a'} = 690 \cdot \frac{6370}{8490} = 517,5 \text{ m}$$

d) No tiene sentido hablar de reflexión ionosférica a $f = 2$ GHz, ya que la reflexión ionosférica se produce para frecuencias inferiores a 30 – 40 MHz. Para $f = 2$ GHz, la trayectoria del rayo se podría curvar, pero terminaría escapando al espacio exterior.

5.3. Radioenlace digital

Ejercicio 5.12

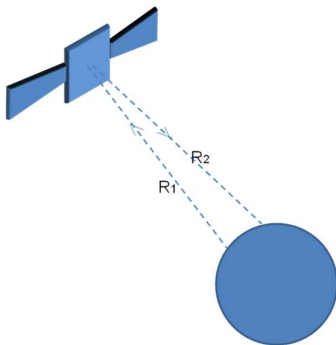
Se pretende establecer un radioenlace a 10 GHz a través de un transponder de un satélite geoestacionario (suponga altura de 36000 km sobre la tierra) cuyas características del receptor y transmisor embarcados en el satélite son $G/T = 200$ (1/K); $PIRE_{sat} = 65$ dBW.

Estación terrena transmisora: ganancia antena: 30 dB; rendimiento de radiación: 70%; coeficiente reflexión antena transmisora: 0,8; $PIRE$ del transmisor 40 dBW. Estación terrena receptora: área equivalente de la antena $1,2 \text{ m}^2$; impedancia de entrada 35Ω ; temperatura de antena: $T_a = 50$ K; temperatura de ruido del receptor de $T_{e,r} = 100$ K

Suponga ambas antenas con igual distancia al satélite (la altura anteriormente indicada), que ambas antenas tienen polarización vertical, están situadas apuntando su máximo del diagrama al satélite. Suponga máximo acoplo de polarización en ambos enlaces (“uplink” y “downlink”). Ancho de banda de ruido en ambos enlaces $B = 100$ MHz. Constante de Boltzman: $K = 1,3806505 \cdot 10^{-23}$ J/(K).

Calcule la relación señal a ruido para el enlace “uplink”.

Solución:



Enlace uplink:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_u = \frac{PIRE}{4\pi R_1^2} \left(\frac{\lambda^2}{4\pi}\right) G_{sat,r} \left(\frac{1}{K T_{sat} B}\right) = PIRE \left(\frac{\lambda}{4\pi R_1}\right)^2 \left(\frac{G_{sat,r}}{T_{sat}}\right) \left(\frac{1}{KB}\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{N}\right)_u (dB) &= 40 + 20 \log_{10} \left(\frac{0.03}{4\pi \cdot 36 \cdot 10^6} \right) + 10 \log_{10}(200) - 10 \log_{10}(1,3806505 \cdot 10^{-23} \cdot 10^8) \\ &= 8 \text{ dB} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.13

Calcule la relación señal a ruido para el enlace "downlink".

Solución:

Enlace "downlink":

$$\left(\frac{C}{N}\right)_d = \frac{PIRE_{sat}}{4\pi R_2^2} A_{e,r} \left(\frac{1}{KT_e B} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{N}\right)_d (dB) &= 65 - 10 \log_{10}(4\pi(36 \cdot 10^6)^2) + 10 \log_{10}(1,2) - 10 \log_{10}(1,3806505 \cdot 10^{-2} \cdot 100 \cdot 10^8) \\ &= 30,5 \text{ dB} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.14

Calcule la relación portadora a densidad espectral de ruido total del sistema.

Solución:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{N_o}\right)_u (dB) &= \left(\frac{C}{N}\right)_u (dB) + 10 \log_{10}(B) = 8 \text{ dB} + 80 \text{ dB} \cdot \text{Hz} = 88 \text{ dB} \cdot \text{Hz} \\ \left(\frac{C}{N_o}\right)_d (dB) &= \left(\frac{C}{N}\right)_d (dB) + 10 \log_{10}(B) = 30,5 \text{ dB} + 80 \text{ dB} \cdot \text{Hz} = 110,5 \text{ dB} \cdot \text{Hz} \\ \left(\frac{C}{N_o}\right)^{-1} &= \left(\frac{C}{N_o}\right)_u^{-1} + \left(\frac{C}{N_o}\right)_d^{-1} \\ \left(\frac{C}{N_o}\right) (dB \cdot \text{Hz}) &\cong \left(\frac{C}{N_o}\right)_u (dB \cdot \text{Hz}) = 88 \text{ dB} \cdot \text{Hz} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.15

Para una transmisión digital a través de dicho satélite, estime la máxima velocidad binaria (tasa de bit o régimen binario) si en el receptor de la estación terrena se dispone de un demodulador con $\left(\frac{E_b}{N_o}\right) = 8 \text{ dB}$.

Solución:

$$\left(\frac{E_b}{N_o}\right) (dB) = \left(\frac{C}{N_o}\right) (dB \cdot \text{Hz}) - 10 \log_{10}(R)$$

$$10 \log_{10}(R) = \left(\frac{C}{N_o}\right) (dB \cdot Hz) - \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_{dB} = 88 - 8 = 80$$

$$R = 100 \text{ Mbps}$$

5.4. Órbitas satelitales

Ejercicio 5.16

Calcule el período orbital y la excentricidad de un satélite Molniya sabiendo que la distancia de apogeo es 45730 km y que la distancia de perigeo es 7378 km.

Indique la relación (en dB) de PIREs del satélite en apogeo y perigeo para igual intensidad de señal recibida en el punto subsatelital desde dichas posiciones.

Cte. de Kepler: $\mu = G \cdot M = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Solución:

$$d_{apogeo} = a + c$$

$$d_{perigeo} = a - c$$

$$a = 0,5(d_{apogeo} + d_{perigeo}) = 0,5 \cdot (45730 + 7378) = 26554 \text{ km}$$

$$c = 0,5(d_{apogeo} - d_{perigeo}) = 0,5 \cdot (45730 - 7378) = 19176 \text{ km}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{19176}{26554} = 0,722$$

Velocidad angular media: $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$

A partir de la velocidad angular media o 3ª ley de Kepler, $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$, y que

$$a = 0,5(d_{apogeo} + d_{perigeo})$$

se tiene:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{45730 + 7378}{2} \cdot 10^3\right)^3}{3,986 \cdot 10^{14}}} = 43065 \text{ s} = 11,96 \text{ h} = 717,74 \text{ min} = (11\text{h } 57\text{m } 44,6\text{s})$$

Como lo único que afecta en la recepción de señal en los puntos subsatelitales corresponde a la diferencia de alturas de apogeo y perigeo y, por tanto, a la diferencia de pérdidas de espacio libre, se tendrá:

$$\left. \frac{PIRE_{apogeo}}{PIRE_{perigeo}} \right|_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{d_{apogeo} - r_{tierra}}{d_{perigeo} - r_{tierra}} \right)^2 = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{45730 - 6370}{7378 - 6370} \right) = 31,8 \text{ dB}$$

Ejercicio 5.17

Estime la altura de un satélite Molniya sobre la superficie terrestre después de una hora de haber pasado por el perigeo, y calcule las pérdidas de espacio libre asociadas a la propagación entre el satélite en dicho instante y un receptor en el punto subsateliteal suponiendo una frecuencia de trabajo de 5 GHz. Datos:

Distancia de apogeo= 45730 km; distancia de perigeo= 7378 km; radio de la tierra= 6370 km.

Cte. de Kepler: $\mu = G \cdot M = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Solución:

$$d_{apogeo} = a + c$$

$$d_{perigeo} = a - c$$

$$a = 0,5(d_{apogeo} + d_{perigeo}) = 0,5 \cdot (45730 + 7378) = 26554 \text{ km}$$

$$c = 0,5(d_{apogeo} - d_{perigeo}) = 0,5 \cdot (45730 - 7378) = 19176 \text{ km}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{19176}{26554} = 0,722$$

Velocidad angular media: $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{3,986 \cdot 10^{14}}{(26554 \cdot 10^3)^3}} = 0,000146 \text{ rad/s}$

$$E - e \cdot \text{sen}E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p)$$

$$E - e \cdot \text{sen}E = \sqrt{\frac{3,986 \cdot 10^{14}}{(26554 \cdot 10^3)^3}} \cdot 3600 = 0,525$$

$E(^{\circ})$	$(E - 0,722 \cdot \text{sen}E) - 0,525$
30	-0,3624
50	-0,2054
80	0,1602
65	-0,0449
68	-0,0076
69	0,0052

De lo que se puede considerar que $E \approx 68,5^{\circ}$.

$$r = a(1 - e \cdot \cos E)$$

$$r = 26554 \cdot (1 - 0,722 \cdot \cos(68,5^{\circ})) = 17450$$

$$\text{altura} = r - r_{tierra} = 17450 - 6370 = 11080 \text{ km}$$

$$L_b = -10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda}{4\pi \cdot \text{altura}} \right)^2 = -20 \cdot \log_{10} \left(\frac{300/5000}{4\pi \cdot 11080 \cdot 10^3} \right) = 187,3 \text{ dB}$$

Ejercicio 5.18

Calcule la máxima distancia sobre la superficie terrestre de un satélite del que se conoce que, tras una hora de su paso por perigeo, su anomalía excéntrica es 120° y que la excentricidad de la órbita es de 0,8. Determine las pérdidas de espacio libre entre el satélite y el punto subsatelital para una longitud de onda de trabajo de 3 cm.

Datos: Cte. de Kepler: $\mu = G \cdot M = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Solución:

Lo que se está pidiendo es la altura de apogeo. Con la anomalía excéntrica, la excentricidad y el tiempo, se puede obtener el semieje mayor de la elipse:

$$E - e \cdot \text{sen}E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p)$$

$$a = \left[\mu \left(\frac{t - t_p}{E - e \cdot \text{sen}E} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} = \left[3,986 \cdot 10^{14} \left(\frac{3600}{\frac{120\pi}{180} - 0,8 \cdot \text{sen}(120^\circ)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$a = 13802,89 \text{ km}$$

Con los valores de excentricidad y semieje mayor se obtienen los valores de apogeo y perigeo:

$$e = \frac{c}{a}, \quad c = a \cdot e = 13802,89 \cdot 0,8 = 11042,31 \text{ km}$$

$$r_{\text{apogeo}} = a + c = 24845,20 \text{ km}$$

Altura máxima sobre la tierra:

$$h_{\text{max}} = r_{\text{apogeo}} - r_{\text{tierra}} = 24845,20 - 6370 = 18475,20 \text{ km}$$

$$L_b = -10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda}{4\pi \cdot h_{\text{max}}} \right)^2 = -20 \cdot \log_{10} \left(\frac{0,03}{4\pi \cdot 18475,20 \cdot 10^3} \right) = 197,8 \text{ dB}$$

Ejercicio 5.19

Calcule de forma exacta el perigeo de la órbita geoestacionaria si su período orbital es de 23 horas, 56 minutos y 4,09 segundos, y determine las pérdidas de espacio libre entre el satélite y el punto subsatelital para una longitud de onda de trabajo de 3 cm.

Cte. de Kepler: $\mu = GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Solución:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

$$a = \left(\frac{\mu T_o^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 42164,15 \text{ km}$$

$$L_b = -10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\lambda}{4\pi \cdot a} \right)^2 = -20 \cdot \log_{10} \left(\frac{0,03}{4\pi \cdot 42164,15 \cdot 10^3} \right) = 204,9 \text{ dB}$$

6. Otros mecanismos de propagación

6.1. Propagación terrestre (reflexión en tierra)

Ejercicio 6.1

En el diseño de un radioenlace terrestre y suponiendo una tierra altamente conductora indique la condición que deben cumplir las alturas de las antenas (ht , hr), en función de la frecuencia y la distancia entre antenas, d , para que esté en zona óptima de trabajo respecto del efecto de desvanecimiento (“fading”).

- a) $4 ht \cdot hr \ll \lambda d$ b) $4 ht \cdot hr \ll d/\lambda$ c) $4 ht \cdot hr \ll (d/\lambda)^2$ d) Ninguna de las anteriores

Solución:

Para que no haya desvanecimiento, se necesita que el rayo directo y el rayo reflejado en el suelo no se sumen en contrafase.

Contribución rayo directo y rayo reflejado:

$$E = E_d(1 - 1 \cdot e^{-jk_0\Delta}) = E_d \cdot e^{-jk_0\Delta/2}(e^{jk_0\Delta/2} - e^{-jk_0\Delta/2}) = E_d \cdot e^{-\frac{jk_0\Delta}{2}} \left(e^{\frac{jk_0\Delta}{2}} - e^{-\frac{jk_0\Delta}{2}} \right) = E_d \cdot e^{-\frac{jk_0\Delta}{2}} 2j \operatorname{sen}(k_0\Delta/2)$$

El término de desfase viene dado por: $k_0\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$

Siendo Δ la diferencia de caminos del rayo directo y del rayo reflejado:

$$\Delta = R_{\text{directo}} - R_{\text{reflejado}} = \sqrt{d^2 + (ht - hr)^2} - \sqrt{d^2 + (ht + hr)^2}$$

$$\Delta/d = \sqrt{1 + ((ht - hr)/d)^2} - \sqrt{1 + ((ht + hr)/d)^2}$$

Los términos anteriores se pueden aproximar por su desarrollo en serie:

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$$

$$\Delta/d = \sqrt{1 + ((ht - hr)/d)^2} - \sqrt{1 + ((ht + hr)/d)^2} \simeq \left(1 + \frac{ht^2 + hr^2 - 2 \cdot ht \cdot hr}{2d^2} + \dots \right) - \left(1 + \frac{ht^2 + hr^2 + 2 \cdot ht \cdot hr}{2d^2} + \dots \right) = \frac{-2 \cdot ht \cdot hr}{d^2}$$

Por tanto: $|\Delta| \approx \left| \frac{-2 \cdot ht \cdot hr}{d} \right| = \frac{2 \cdot ht \cdot hr}{d}$

La condición requerida es: $\frac{k_0 \Delta}{2} \ll \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi \cdot 2 \cdot ht \cdot hr}{2\lambda \cdot d} \ll \frac{\pi}{2} \rightarrow 4 \cdot ht \cdot hr \ll d \cdot \lambda$

Ejercicio 6.2

Demuestre y calcule las pérdidas adicionales a las de “espacio libre” que se producen por la reflexión en una tierra altamente conductora (coef. Reflexión = -1) en un radioenlace donde las alturas de la antena transmisora y receptora son iguales y de valor 10λ , y la distancia del radioenlace es diez veces la altura de las antenas. Suponga antenas omnidireccionales, acoplo perfecto de polarización y no utilice aproximaciones geométricas adicionales.

- a) 8,3 dB b) 18,2 dB c) 22,3 dB d) Ninguno de los anteriores.

Solución:

$$h_t = h_r = h = 10 \lambda ; \quad d = 10 h ; \quad \rho = -1 ; \quad F_{e_1} = F_{e_2} = 1$$

Omnidireccionales: cumplirán $G_t(\theta_{t1}) = G_t(\theta_{t2}) = G_r(\theta_{r1}) = G_r(\theta_{r2}) = G$

$$\langle s(\theta_{it}) \rangle = \frac{P_T G}{4\pi R^2} ; \quad \langle s(\theta_{it}) \rangle = \frac{1}{2\eta} |E_i|^2 \Rightarrow E_i(\theta_{it}) = \sqrt{60 P_T G} \frac{e^{-j\beta R_i}}{R_i}$$

$$\begin{aligned} E &= E_{directo} + E_{reflejado} = \sqrt{60 P_T G} \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} - \sqrt{60 P_T G} \frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2} = \\ &= \sqrt{60 P_T G} \cdot \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} \cdot \left[1 - \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{-j(R_2 - R_1)} \right] \end{aligned}$$

Distancias de la contribución directa y de la reflejada: $R_1 = d$, $R_2 = \sqrt{d^2 + 4h^2}$

La potencia recibida será proporcional al campo eléctrico al cuadrado:

$$|E|^2 = \frac{60 P_T G}{R_1^2} \cdot \left| 1 - \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{-jk(R_2 - R_1)} \right|^2$$

El nuevo factor de “pérdidas” debido a la reflexión será: $\frac{|E|^2}{|E_{directo}|^2} = \left| 1 - \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(R_2 - R_1)} \right|^2$

$$R_1 = \sqrt{d^2} = d = 10 h = 100 \lambda$$

$$R_2 = \sqrt{d^2 + (h_t + h_r)^2} = \sqrt{d^2 + 4h^2} = \sqrt{100h^2 + 4h^2} = 10 \sqrt{104} \lambda$$

$$10 \cdot \log_{10} \left| 1 - \frac{R_1}{R_2} \cdot e^{-j(R_2 - R_1)} \right|^2 = 18,2 \text{ dB}$$

Por tanto, las pérdidas adicionales debidas a la contribución del rayo reflejado son 18,2 dB

6.2. Propagación por onda superficie

Ejercicio 6.3

Empleando las cartas del ITUR obtenga la distancia a que se alcanza un campo de 100 μV/m eficaces sobre la superficie del mar transmitiendo con un mástil de 75 m colocado al borde del mar que se alimenta a 1 MHz con una potencia de 91,5 kW.

Solución:

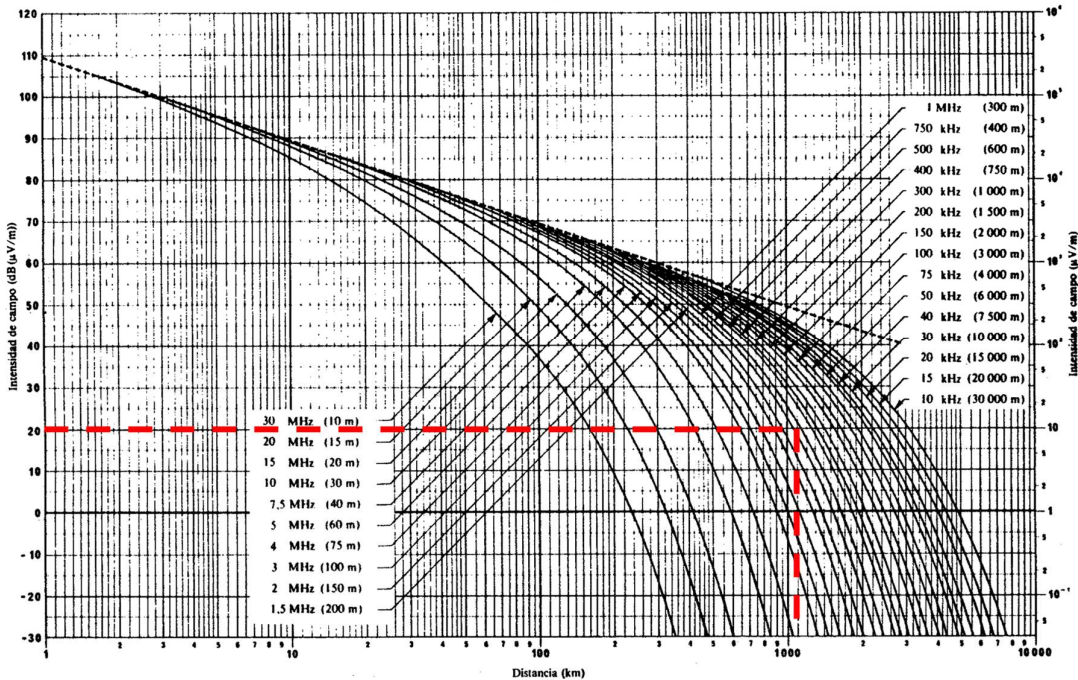
Un monopolo de 75 m a la frecuencia de 1 MHz es un monopolo λ/4. Por tanto, la ganancia del dipolo equivalente es dos veces la ganancia del monopolo sobre plano de masa, la cual es G_m = 1,64 x 2 = 3,28 (en unidades naturales).

$$\left. \begin{aligned} \ell &= 75 \text{ m} \\ \lambda &= \frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^6} = 300 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ell/\lambda = 0,25 \Rightarrow G_m = 3,28 \Rightarrow 5,16 \text{ dBi}$$

Por otra parte, los valores de campo vienen dados por la expresión:

$$E = E_{carta} \sqrt{\frac{1}{3} P_t (kW) G_t} \Rightarrow E_{carta} = \frac{E}{\sqrt{\frac{1}{3} P_t (kW) G_t}} = \frac{100 \mu V/m}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot 91,5 \cdot 3,28}} = 10 \mu V/m \Rightarrow 20 \text{ dB}\mu V$$

Finalmente, a partir de la siguiente gráfica se puede estimar la distancia correspondiente al nivel de campo indicado, que corresponde a d = 1100 km



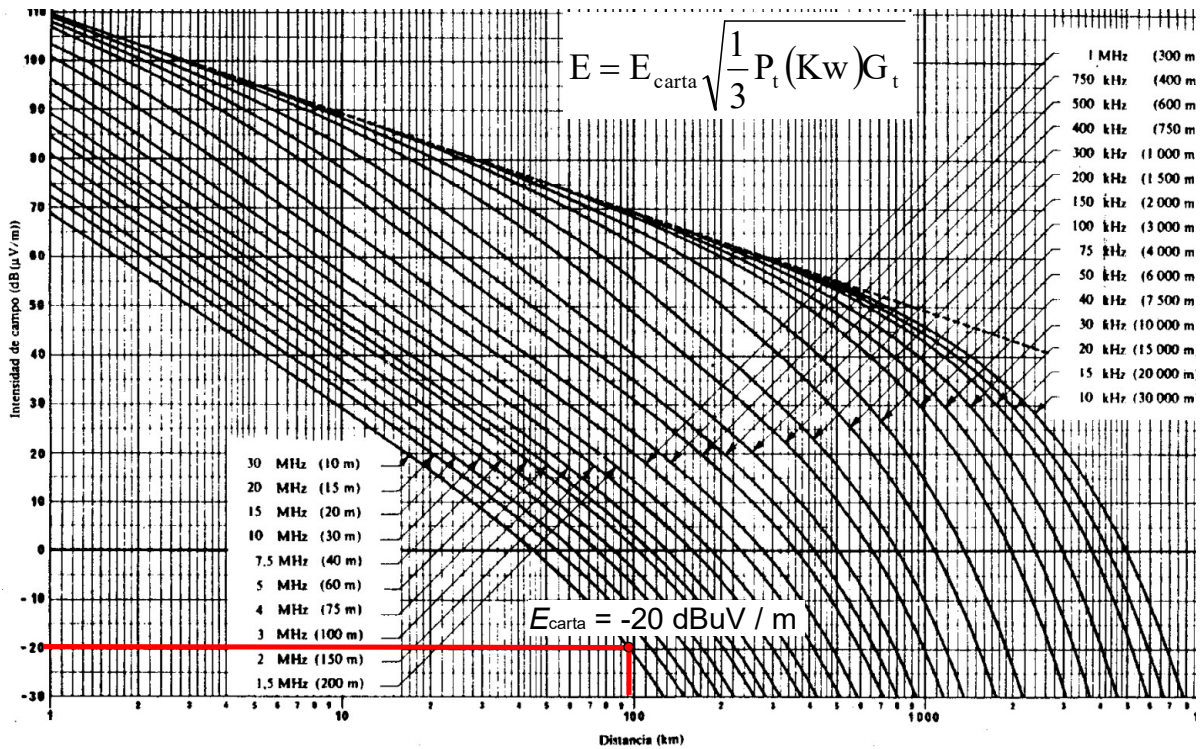
Intensidad de la onda de superficie sobre mar (ITUR), Pt = 1 kW

Ejercicio 6.4

Para un sistema de transmisión AM a 30 MHz por onda de superficie, en un área geográfica predominantemente terrestre, el valor eficaz de ruido (industrial y atmosférico) es del orden de 0,1 $\mu\text{V/m}$. Suponiendo que se necesita una relación S/N de 20 dB, estime la potencia del transmisor para lograr una cobertura de 95 km, suponiendo una antena de tipo monopolo vertical eléctricamente corto.

Solución:

$$f = 30 \text{ MHz}, d = 95 \text{ km}, E_{\text{carta}} = -20 \text{ dB}\mu\text{V/m} = 0,1 \mu\text{V/m}$$



Intensidad de la onda de tierra seca (ITUR), $P_t = 1 \text{ kW}$

$$E_{\text{ef,ruido}} = 0,1 \mu\text{V/m}$$

$$\text{SNR} = 20 \text{ dB}$$

$$E = E_{\text{ef,ruido}} + \text{SNR} = -20 \text{ dB}\mu\text{V/m} + 20 \text{ dB} = 0 \text{ dB}\mu\text{V/m}$$

Monopolo corto sobre tierra: $D_{\text{monopolo}} = 2D_{\text{dipolo}} = 2 \cdot 1,5 = 3$

$$E = E_{\text{carta}} \sqrt{\frac{1}{3} P_t (\text{kW}) G_t} \Rightarrow \left(\frac{E}{E_{\text{carta}}} \right)^2 = \frac{1}{3} P_t (\text{kW}) G_t \rightarrow$$

$$\rightarrow P_t (\text{kW}) = \frac{3}{G_t} \left(\frac{E}{E_{\text{carta}}} \right)^2 = \frac{3}{3} \left(\frac{1}{0,1} \right)^2 = 100 \text{ kW}$$

6.3. Propagación ionosférica

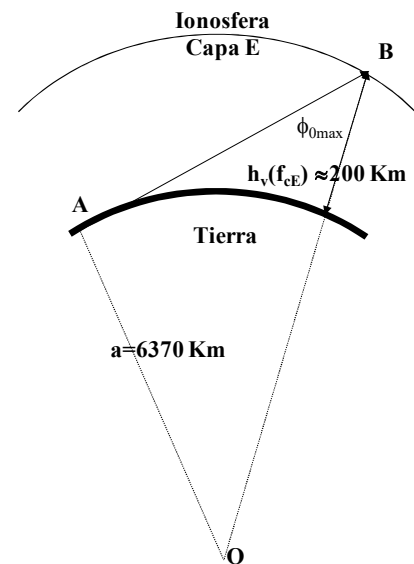
Ejercicio 6.5

Suponiendo una frecuencia crítica de la capa E de aprox. $f_c = 3$ MHz y una altura virtual de $h_v = 200$ km, la frecuencia de trabajo óptima para máximo alcance será:

- a) 10,5 MHz b) 12,3 MHz c) 8,5 MHz d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\begin{aligned}
 MUF &= f_c \cdot \sec(\phi_0) \\
 OWF &= 0,85 \cdot MUF \\
 \text{sen}(\phi_{0\max}) &= \frac{a}{a + h_v} \Rightarrow 1 - \cos^2(\phi_{0\max}) = \left(\frac{a}{a + h_v}\right)^2 \Rightarrow \\
 \cos(\phi_{0\max}) &= \sqrt{1 - \left(\frac{a}{a + h_v}\right)^2} = \sqrt{\frac{h_v^2 + 2ah_v}{(a + h_v)^2}} = \frac{\sqrt{h_v^2 + 2ah_v}}{a + h_v} \\
 \sec(\phi_{0\max}) &= \frac{a + h_v}{\sqrt{h_v^2 + 2ah_v}} \\
 OWF &= 0,85 \cdot f_c \cdot \frac{a + h_v}{\sqrt{h_v^2 + 2ah_v}} \\
 &= 0,85 \cdot 3 \cdot \frac{6370 + 200}{\sqrt{(200)^2 + 2 \cdot 6370 \cdot 200}} \\
 OWF &= 10,414 \text{ MHz}
 \end{aligned}$$



Ejercicio 6.6

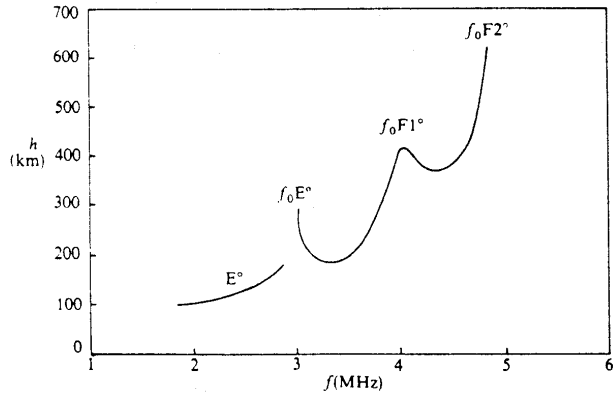
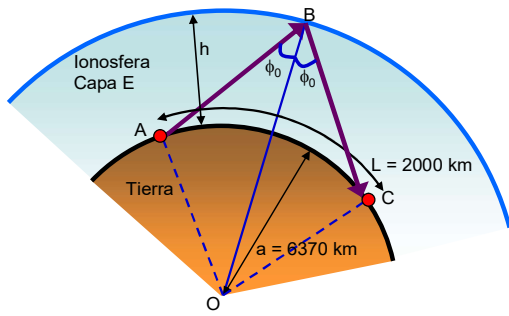
Se desea establecer un radioenlace para transmisión de datos entre 2 puntos sin visión directa. Para ello, se propone como solución emplear reflexión ionosférica, con un transmisor que cubre toda la banda de HF.

A partir del ionograma de la figura y considerando un modelo de Tierra esférica:

- a) Calcule la MUF del enlace ionosférico para máxima distancia del enlace utilizando la capa E.
 b) Considerando ahora que se quiere establecer un enlace entre dos puntos (A y C en la figura) cuya distancia sobre la superficie terrestre es de $L = 2000$ km, calcule la potencia de señal disponible en bornas de la antena receptora considerando los siguientes datos:

Datos: Potencia disponible del transmisor de 100 W (suponga la impedancia de generador de 50 ohm), antenas transmisora y receptora de tipo Yagi de 10 dBi de ganancia, de polarización horizontal y ancho de banda del 10%, pérdidas de reflexión ionosférica de 15 dB y que la onda se

despolariza transformándose en polarización circular. Suponga valores de ROE=1,5 para ambas antenas respecto de sus líneas de transmisión de 50 ohm, que introducen unas pérdidas de 4 dB cada una y desprecie el efecto de reflexión en tierra. Especifique y recuadre todos los elementos del balance de potencia de la fórmula de Friis. El transmisor se desea utilizar como un modem fax con la máxima velocidad posible.



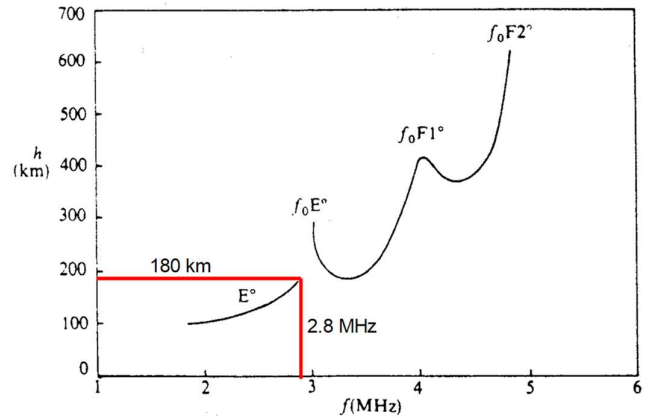
Solución:

a) Cálculo de la "MUF":

Del ionograma de la figura se puede inferir que:

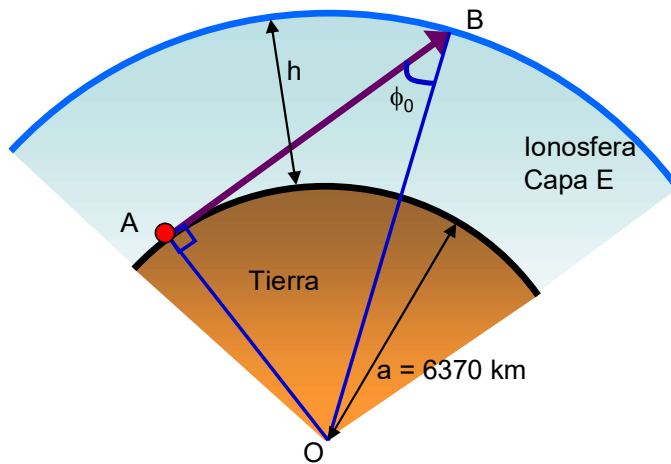
$$f_c = f_{crit, capa E} \cong 2,8 \text{ MHz}$$

$$h_v \cong 180 \text{ km}$$



Utilizando la expresión de la ley de la secante: $MUF(\phi_0) = f_c \cdot \sec(\phi_0)$

Para alcance máximo la dirección de apuntamiento del haz de la antena deberá ser rasante a la superficie de la Tierra:



$$\text{sen}(\phi_0) = \frac{a}{a + h_v}$$

$$\text{cos}^2(\phi_0) = 1 - \left(\frac{a}{a + h_v}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{sec}(\phi_0) &= \frac{1}{\text{cos}(\phi_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{a + h_v}\right)^2}} = \frac{a + h_v}{\sqrt{(a + h_v)^2 - (a)^2}} = \\ &= \frac{a + h_v}{\sqrt{(a + h_v + a)(a + h_v - a)}} = \frac{a + h_v}{\sqrt{h_v(2a + h_v)}} \\ &= \frac{6370 + 180}{\sqrt{180(2 \cdot 6370 + 180)}} \\ &= 4,295 \quad \phi_0 = 76,5^\circ \\ R &= 2 \cdot AB = 2 \cdot \sqrt{(h_v + a)^2 - (a)^2} = 2 \cdot \sqrt{(h_v + a + a)(h_v + a - a)} = \\ &= 2 \cdot \sqrt{h_v^2 + 2 \cdot a \cdot h_v} = 2 \cdot \sqrt{180^2 + 2 \cdot 6370 \cdot 180} \end{aligned}$$

$R = 3050$ km es la máxima distancia de la propagación ionosférica a través de dicha capa.

$MUF(76,5^\circ) = 2,8 \text{ MHz} \cdot \text{sec}(76,5^\circ) = 12 \text{ MHz}$ para este radioelance con rebote ionosférico en capa E.

b) Para máxima velocidad de transmisión, es necesario emplear la máxima frecuencia disponible.

Si consideráramos que la reflexión ionosférica se produce en la capa E y sabiendo que la distancia entre los puntos A y C por la superficie terrestre es de $L = 2000$ km, se puede calcular el ángulo ϕ_0 y la MUF

$$MUF(\phi_0) = f_c \cdot \text{sec}(\phi_0)$$

Longitud del arco de circunferencia AC: $2000 \text{ km} \rightarrow$ Ángulo AC: $\frac{2000}{2\pi \cdot 6370} \times 360^\circ = 18^\circ$

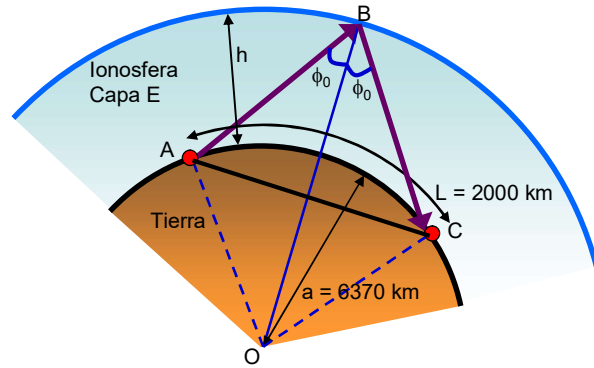
Por tanto, ángulo AOB: 9°

Segmento OB: 6370 km + 180 km = 6550 km

Segmento OA: 6370 km

Para calcular el ángulo ϕ_0 , aplicamos la regla del coseno en el triángulo OAB:

$$AB = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos(9^\circ)}$$



$$AB = \sqrt{(6370)^2 + (6550)^2 - 2(6370)(6550)\cos(9^\circ)} = 1030 \text{ km}$$

Una vez conocida la distancia AB calculamos el ángulo ϕ_0 :

$$\cos(\phi_0) = \frac{-(OA)^2 + (OB)^2 + (AB)^2}{2(AB)(OB)} = \frac{-(6370)^2 + (6550)^2 + (1030)^2}{2(1030)(6550)} = 0,25 \rightarrow \phi_0 = 75,5^\circ$$

¡Una diferencia de 1000 km sobre la superficie terrestre implica únicamente un cambio de 1° en el ángulo ϕ_0 !

Por tanto:

$$MUF(\phi_0) = f_c \cdot \sec(\phi_0) = 2,8 \text{ MHz} \sec(75,5^\circ) \approx 11,2 \text{ MHz}$$

La máxima frecuencia práctica de utilización para dicha capa E será la frecuencia operativa de trabajo: $OWF = 0,85 \cdot MUF = 9,5 \text{ MHz}$

Balance de potencia: relación entre potencia disponible en el receptor y la disponible en el transmisor:

$$P_{disp,rx} = P_{disp,tx} \cdot \frac{(1 - |\rho_g|^2)(1 - |\rho_t|^2)e^{-2\alpha d}}{|1 - \rho_g \rho_t e^{-2\gamma d}|^2} G_{tx} \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{L_{refl.ionosf}} \cdot A_{ef,rx} \cdot (\hat{e}_{tx} \cdot \hat{e}_{rx}^*)^2$$

Por una parte: $P_{ent,tx} = P_{disp,tx} \frac{(1 - |\rho_g|^2)(1 - |\rho_t|^2)e^{-2\alpha d}}{|1 - \rho_g \rho_t e^{-2\gamma d}|^2} = (1 - |\rho_t|^2) \frac{1}{L_{LdT,tx}}$

Como $A_{ef,rx} = G_{rx} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$ y $\rho_g = 0$, se tiene que:

$$P_{disp,rx} = P_{disp,tx} \cdot (1 - |\rho_t|^2) \cdot G_{tx} \cdot \frac{1}{L_{LdT,tx}} \cdot \frac{1}{L_{refl.ionosf}} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot (\hat{e}_{tx} \cdot \hat{e}_{rx}^*)^2 \cdot G_{rx}$$

Diversos elementos del balance de potencia:

$$P_{disp,tx} = 100 \text{ W} \rightarrow 20 \text{ dBW}$$

$$ROE = \frac{1 + |\rho_t|}{1 - |\rho_t|} \Rightarrow |\rho_t| = \frac{ROE - 1}{ROE + 1} \quad |\rho_t| = \frac{1,5 - 1}{1,5 + 1} = 0,2$$

$$(1 - |\rho_t|^2) = 1 - |0,2|^2 = 0,96 \Rightarrow -0,18 \text{ dB}$$

$$G_t = G_r = 10 \text{ dBi}$$

Término de Friis debido a las pérdidas LdT del transmisor: $\frac{1}{L_{LdT,tx}} \Rightarrow -4 \text{ dB}$

Término de Friis debido a las pérdidas por reflexión ionosférica: $\frac{1}{L_{refl.ionosf}} \Rightarrow -15 \text{ dB}$

Término de propagación en espacio libre ($R = 1030 \text{ km} \times 2 = 2060 \text{ km}$):

$$\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 10^8 / 9,5 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 2060 \cdot 10^3}\right)^2 = 1,488 \cdot 10^{-12} \Rightarrow -118,3 \text{ dB}$$

Desacoplo de polarización: aunque las antenas emisora y receptora tienen la misma polarización, se indica en el enunciado que la ionosfera despolariza la onda, haciendo que ésta presente polarización circular. Por tanto, la antena Yagi receptora recibe una señal polarizada circularmente, con lo cual:

Término de desacoplo de polarización: $(\hat{e}_{tx} \cdot \hat{e}_{rx}^*)^2 = (1/\sqrt{2})^2 = -3 \text{ dB}$

Finalmente, sumamos los términos del radioenlace:

$$P_{disp,rx} = 20 \text{ dBW} - 0,18 \text{ dB} + 10 \text{ dBi} - 4 \text{ dB} - 15 \text{ dB} - 118,3 \text{ dB} - 3 \text{ dB} + 10 \text{ dB}$$

$$P_{disp,rx} = -100,5 \text{ dBW} = -70,5 \text{ dBm}$$

Pero en el enunciado se indica que el Tx cubre toda la banda de HF, por tanto, para poder tener la mayor velocidad de transmisión posible en el modem-fax, es necesario evaluar si capas más altas de la ionosfera permiten trabajar con una mayor frecuencia:

Para el caso de la capa F2, del ionograma se obtienen unos valores aproximados:

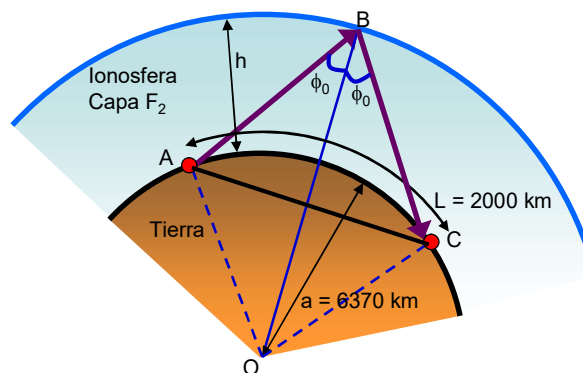
$$f_c = f_{crit,capa F2} \cong 4,7 \text{ MHz}$$

$$h_v \cong 400 \text{ km}$$

Los nuevos valores de ϕ_0 y MUF serán:

Longitud del arco de circunferencia AC: $2000 \text{ km} \rightarrow \text{Ángulo AOC}: \frac{2000}{2\pi \cdot 6370} \times 360^\circ = 18^\circ$

Por tanto, ángulo AOB: 9°



Segmento OB: $6370 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6770 \text{ km}$

Segmento OA: 6370 km

Para calcular el ángulo ϕ_0 , aplicamos la regla del coseno en el triángulo OAB:

$$AB = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos(9^\circ)}$$

$$AB = \sqrt{(6370)^2 + (6770)^2 - 2 \cdot 6370 \cdot 6770 \cdot \cos(9^\circ)} = 1150 \text{ km}$$

Una vez conocida la distancia AB calculamos el ángulo ϕ_0 :

$$\cos(\phi_0) = \frac{-(OA)^2 + (OB)^2 + (AB)^2}{2 \cdot AB \cdot OB} = \frac{-(6370)^2 + (6770)^2 + (1105)^2}{2 \cdot 1105 \cdot 6770} = 0,43 \rightarrow \phi_0 = 64,3^\circ$$

Por tanto:

$$MUF(\phi_0) = f_c \cdot \sec(\phi_0) = 4,7 \text{ MHz} \sec(64,3^\circ) \approx 11 \text{ MHz}$$

6.4. Propagación con multitrayecto y movilidad

Ejercicio 6.7

En un entorno multitrayecto se tiene un Tx de una estación base de telefonía móvil GSM900 y un Rx como parte del teléfono móvil de una persona que se aleja a una velocidad de 3,6 km/h. Si el tiempo de símbolo de transmisión fuera de 10 ms y el ancho de banda de coherencia es de $B_c = 20$ Hz, diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- Existe dispersión temporal y no hay desvanecimiento selectivo en frecuencia.
- Hay desvanecimiento plano en el tiempo y desvanecimiento selectivo en frecuencia.
- Hay dispersión temporal y desvanecimiento selectivo en el tiempo.
- No hay desvanecimiento selectivo ni en el tiempo ni en la frecuencia.

Solución:

GSM 900 \rightarrow Frecuencia: 900 MHz

La persona se aleja de la BTS a una velocidad de 3,6 km/h, es decir, 1 m/s

Sea $\tau_{rms} \approx \frac{1}{B_c} = \frac{1}{20} = 50 \text{ ms}$, como $\tau_{rms} > T_s$, entonces se tiene cierta dispersión temporal y por tanto, algo de desvanecimiento selectivo en frecuencia.

Por otra parte, $\Delta f_{Doppler} = f_0 \cdot \frac{v}{c} = 900 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8} = 3 \text{ Hz}$

$$B_{rms} \sim \Delta f_{Doppler}$$

$$T_c \sim \frac{1}{B_{rms}} = \frac{1}{3} = 333 \text{ ms}$$

Como $T_c \gg T_s$, no existe dispersión frecuencial: se tiene desvanecimiento plano en el tiempo.

Por tanto, hay desvanecimiento plano en el tiempo y desvanecimiento selectivo en frecuencia.

Ejercicio 6.8

En un canal radio con multitrayecto y movilidad del receptor (portadora a 10 GHz y receptor circulando a una velocidad de 108 km/h en dirección al transmisor), se ha estimado un ancho de banda de coherencia de $B_c = 2$ MHz. Si se desea realizar una transmisión digital con tiempo de símbolo de 5 ms,

- Indique la mejor estimación del retardo y del tiempo de coherencia de las siguientes opciones:

- a) $\tau_{rms} \approx 5 \mu s$; $T_c \approx 0,1 \mu s$ b) $\tau_{rms} \approx 0,5 \mu s$; $T_c \approx 1 ms$
 c) $\tau_{rms} \approx 5 \mu s$; $T_c \approx 1ms$ d) $\tau_{rms} \approx 1 ms$; $T_c \approx 0,5 \mu s$

2) Para el canal radio anterior, en las condiciones mencionadas, indique cuál es la afirmación correcta:

- a) Existe desvanecimiento selectivo en el tiempo y dispersión temporal.
 b) Existe desvanecimiento plano en frecuencia y desvanecimiento selectivo en el tiempo.
 c) Existe desvanecimiento plano en frecuencia y dispersión temporal.
 d) Existe desvanecimiento selectivo en frecuencia y dispersión temporal.

Solución:

1)

$$B_{rms} \approx \Delta f = f_c \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos(\alpha)$$

$$B_{rms} \approx \Delta f = 10^{10} \cdot \frac{108 \cdot 10^3}{3600} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8} \cdot \cos(0^\circ) = 1000 \text{ Hz}$$

Como $T_c \approx \frac{1}{B_{rms}}$, entonces $T_c \approx 1 \text{ ms}$

Por otra parte, $\tau_{rms} \approx \frac{1}{B_c} = \frac{1}{2 \cdot 10^6} = 0,5 \mu s$

En consecuencia, la respuesta correcta es $\tau_{rms} \approx 0,5 \mu s$; $T_c \approx 1 \text{ ms}$.

2) $T_s = 5 \text{ ms}$; $\tau_{rms} \approx 0,5 \mu s$; $T_c \approx 1 \text{ ms}$.

Como $\tau_{rms} \ll T_s$, entonces no existe dispersión temporal, y por tanto, se tiene desvanecimiento plano en frecuencia.

Como $T_s > T_c$, entonces se tiene dispersión en frecuencia y, por tanto, desvanecimiento selectivo en el tiempo.

Luego existe desvanecimiento plano en frecuencia y desvanecimiento selectivo en el tiempo.

Ejercicio 6.9

En un entorno multitrayecto se tiene un transmisor Tx, de una estación base de telefonía móvil (suponga $f_0 = 900 \text{ MHz}$) y un receptor Rx, a bordo de un vehículo que se aleja a velocidad de 100 km/h . Si el tiempo de símbolo de transmisión fuera de 10 ms y el promedio de los retardos que llegan al vehículo es de unos $0,8 \text{ ms}$, diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- a) Hay dispersión temporal y no hay desvanecimiento selectivo en frecuencia.
 b) Hay dispersión en frecuencia y no hay desvanecimiento selectivo en frecuencia.
 c) Hay dispersión temporal y no hay desvanecimiento selectivo en el tiempo.
 d) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Ancho de banda $B_{rms} \approx \Delta f = f_c \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos(\alpha)$

Estación base de telefonía móvil => considerando la frecuencia de trabajo 900 MHz se tiene:

$$f_c = 900 \text{ MHz} \quad \Delta f = 9 \cdot 10^8 \cdot \frac{100 \cdot 10^3 / 3600}{3 \cdot 10^8} = 83,33 \text{ Hz}$$

$$\text{Tiempo de coherencia: } T_c \approx \frac{1}{B_{rms}} \quad T_c(f_c = 900 \text{ MHz}) \approx 12 \text{ ms}$$

$T_c \approx T_s \rightarrow$ no existe dispersión en frecuencia \rightarrow desvanecimiento plano en el tiempo

$\Delta\tau = 0,8 \text{ ms} \ll T_s \rightarrow$ no existe dispersión temporal \rightarrow desvanecimiento plano en frecuencia

Ejercicio 6.10

Se dispone de un radioenlace a la frecuencia f entre un satélite geostacionario (considere la órbita de 42000 km) que hace de transmisor, y una antena receptora, embarcada en un coche, de tipo hélice apuntando con su máximo al satélite.

Si la órbita geostacionaria del satélite es concéntrica al ecuador terrestre, a qué velocidad, en km/h, tendría que ir el coche con la antena receptora por la línea del ecuador para que pudiera generarse en algún momento desvanecimiento selectivo en el tiempo. Suponga un tiempo de símbolo de $T_s = 10 \text{ ms}$.

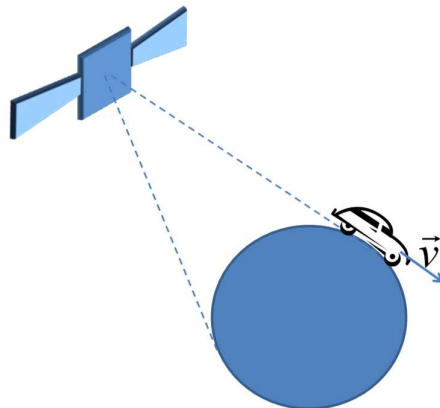
Otros datos:

$f = 10 \text{ GHz}$; radio de la tierra: $a = 6370 \text{ km}$

Considere que las antenas siempre apuntan entre sus máximos de diagrama.

Solución:

Planteamiento del problema:



Plano del ecuador

Variación en frecuencia:

$$\Delta f = f \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos\alpha$$

$$\Delta f_{\max} = f \cdot \frac{v}{c}$$

$$B_{rms} \approx \Delta f_{\max}$$

$$T_c = \frac{1}{B_{rms}} = \frac{1}{f \cdot \frac{v}{c}} = \frac{c}{f \cdot v}$$

Habrà desvanecimiento selectivo en el tiempo si:

$$T_c < T_s \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{f \cdot v} < T_s \quad \Rightarrow \quad v > \frac{c}{f \cdot T_s} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10} \cdot 10^{-2}} = 3 \text{ m/s} = 10,8 \text{ km/h}$$

Ejercicio 6.11

Para la retransmisión de una etapa de vuelta ciclista se utiliza como reemisor un helicóptero que actúa como receptor de las unidades móviles terrestres (motos transmisoras) mediante un enlace a $f = 5\text{GHz}$.

Durante un determinado intervalo de tiempo (objeto del enlace propuesto), el helicóptero se queda fijo a una altura de $h = 200\text{m}$. Dicho helicóptero dispone, en su parte inferior, de una antena receptora de tipo monopolo vertical resonante. Una de las motos que se considera como el extremo transmisor del enlace propuesto dispone también de una antena de tipo monopolo vertical resonante.

a) Suponiendo que la calidad de servicio requiere una relación señal a ruido a la salida del receptor de $(S/N)_0 = 15\text{ dB}$, que el multitrayecto/canal variante con el tiempo y la lluvia pueden originar desvanecimientos de hasta $L_{\text{fad}} = 20\text{ dB}$ y que se desea un margen de protección de $M = 10\text{ dB}$, ¿cuál es la potencia disponible, P_{disp} , necesaria en el transmisor (moto) que garantiza la transmisión cuando la moto se aleja $d = 2\text{ km}$ respecto de la vertical del helicóptero?

Escriba en primer lugar la expresión algebraica en función de los diversos parámetros y luego calcule el valor.

Otros datos:

- El transmisor con impedancia de generador de $Z_g = 50\ \Omega$ se conecta a la antena a través de un cable coaxial suficientemente largo de impedancia característica de $Z_0 = 50\ \Omega$ y $L_{\text{coax}} = 3\text{ dB}$ de pérdidas totales.
- Características de las antenas:
 - Directividad de los dipolos equivalentes de los monopolos transmisor y receptor: $D_{\text{o,dip}} = 2,16\text{ dBi}$.
 - Diagrama de campo del dipolo equivalente de los monopolos transmisor y receptor
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\text{sen}\theta}$$
 - Impedancia de los dipolos equivalentes de los monopolos transmisor y receptor: $Z_{\text{dip}} = 73\ \Omega$.
 - Eficiencia de los monopolos: $\eta_t = \eta_r = 70\%$
- Suponga que la temperatura total de ruido (de antena más receptor) es de $T_A + T_e = 100\text{ K}$, el ancho de banda de ruido del receptor es de $B = 5\text{ MHz}$ e incluye una amplificación de ganancia $G_{\text{amplif}} = 27\text{ dB}$.
- $K = 1,37 \cdot 10^{-23}\text{ W / (K}\cdot\text{Hz)}$
- Impedancia de entrada del receptor: $Z_{\text{recep}} = 50\ \Omega$

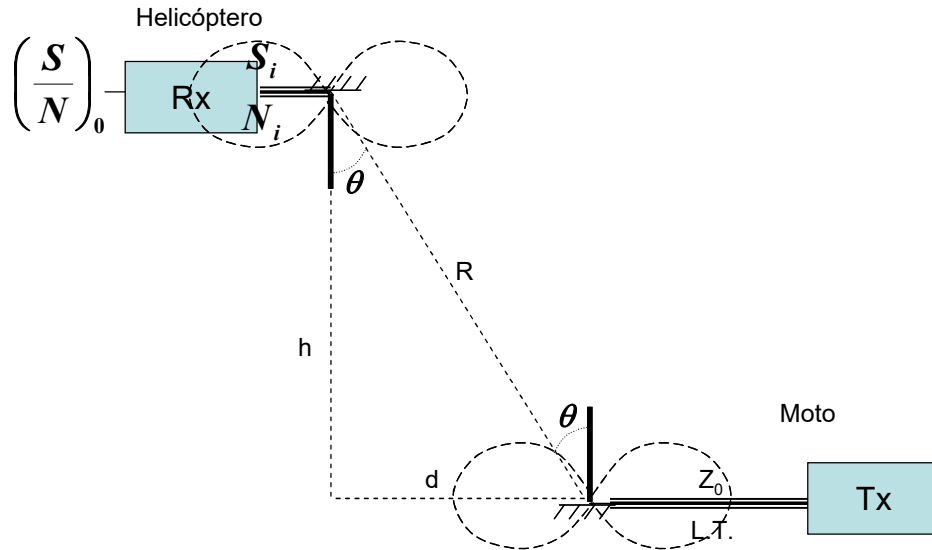
b) Se dispone la opción de colocar en el helicóptero una bocina sectorial con sistema de apuntamiento automático con el máximo en la dirección del móvil correspondiente. Si se supone que el desvanecimiento asociado al multitrayecto se debe a obstáculos laterales y que se dispone de 2 bocinas sectoriales de igual ganancia: una plano H de dimensiones $A \times b$, y otra sectorial plano E de dimensiones $a \times B$, razone adecuadamente cuál de ellas elegiría para minimizar los efectos de desvanecimiento.

c) Si el tiempo de símbolo de la transmisión fuera de 10 ms , el promedio de los retardos que llegan al helicóptero es de unos 30 ms , y la moto se alejara del helicóptero a una velocidad de 120 km/h , calcule y justifique si existirá dispersión en frecuencia y/o en el tiempo y el tipo de desvanecimiento existente.

Solución:

a) Se pide la potencia disponible en el transmisor:

El esquema general del radioenlace es:



La potencia disponible en bornas de la antena receptora (S_i) viene dada por la siguiente expresión en la cual se tienen todos los términos del radioenlace:

$$P_{disp,r} = S_i = \frac{PIRE(\theta)}{4\pi R^2} \cdot A_{e,r} \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2 = P_{entreg,t} \cdot \eta_t \cdot D_t(\theta) \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \eta_r \cdot D_r(\theta) \right) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2$$

Donde:

$$A_{e,r} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \eta_r \cdot D_r$$

$$PIRE(\theta) = P_{entreg,t} \cdot \eta_t \cdot D_t(\theta)$$

$$P_{entreg,t} = P_{disp,t} \cdot \frac{(1-|\Gamma_g|^2)(1-|\Gamma_{in}|^2)e^{-2\alpha d}}{|1-\Gamma_g \Gamma_{in} e^{-2\gamma d}|^2} = P_{disp,t} \cdot (1-|\Gamma_{in}|^2) \cdot \frac{1}{L_{coax}}, \quad \text{ya que}$$

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0 \quad \Gamma_{in} = \frac{Z_{in,t} - Z_0}{Z_{in,t} + Z_0}$$

Por tanto:

$$P_{disp,r} = S_i = \frac{PIRE(\theta)}{4\pi R^2} \cdot A_{e,r} \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2 = P_{disp,t} \cdot (1-|\Gamma_{in}|^2) \cdot \frac{1}{L_{coax}} \cdot \eta_t \cdot D_t(\theta) \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \eta_r \cdot D_r(\theta) \right) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2$$

$$S_i = P_{disp,t} \cdot (1-|\Gamma_{in}|^2) \cdot \frac{1}{L_{coax}} \cdot \eta_t \cdot D_t(\theta) \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \eta_r \cdot D_r(\theta) \right) \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2$$

Donde:

$PIRE$: potencia isotrópica radiada equivalente en la dirección θ : $PIRE(\theta) = P_{entreg,t} \cdot G_t(\theta)$

$D_t(\theta)$: directividad en la dirección θ de la antena transmisora.

$D_r(\theta)$: directividad en la dirección θ de la antena receptora.

η_t, η_r : eficiencias de radiación de las antenas transmisora y receptora.

$P_{entreg,t}$: potencia entregada a la antena transmisora.

$P_{disp,t}$: potencia disponible del transmisor.

L_{coax} : atenuación debida a la línea de transmisión.

$A_{e,r}$: Area equivalente de la antena receptora.

\hat{e}_t, \hat{e}_r : vectores de polarización de la antena transmisora y receptora, respectivamente.

$Z_{in,t}, Z_{in,r}$: Impedancias de entrada de las antenas transmisora y receptora.

Z_{recep} : Impedancia entrada del equipo receptor.

Z_o : Impedancia característica del coaxial en el transmisor.

Z_g : Impedancia del generador del transmisor.

En cuanto a la directividad:

Como el campo eléctrico es proporcional a $\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}$, y según la figura:

$$\cos\theta = h/R, \quad \sin\theta = d/R$$

la directividad en la dirección de interés del problema será:

$$D_t(\theta) = D_r(\theta) = D_0 \cdot \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \right]^2 = D_0 \cdot \frac{\cos^2(\frac{\pi h}{2R})}{(\frac{d}{R})^2} \Rightarrow D_t(\theta) \cdot D_r(\theta) = D_0^2 \cdot \frac{\cos^4(\frac{\pi h}{2R})}{(\frac{d}{R})^4}$$

De forma que el nivel de señal a la entrada del receptor viene dado por:

$$S_i = P_{disp,t} \cdot (1 - |\Gamma_{in}|^2) \cdot \frac{1}{L_{coax}} \cdot \eta_t \cdot \eta_r \cdot D_0^2 \cdot (h^2 + d^2) \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{\pi h}{2\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}{d^4} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

Los valores de D_0 y de la impedancia de entrada de los monopolos se obtienen a partir de los valores dados del dipolo equivalente:

$$\left. \begin{aligned} P_{rad,mon} &= \frac{1}{2} P_{rad,dip} \\ E_{\max}(\theta_o, \varphi_o)|_{mon} &= E_{\max}(\theta_o, \varphi_o)|_{dip} \end{aligned} \right\} D_0 = D_{mon} = 2 \cdot D_{dip} = 2 \cdot 1,64 = 3,28 \quad (5,16 \text{ dBi})$$

Respecto del valor D_0 , el valor de pérdidas por no apuntar en el máximo del diagrama de cada antena es de aproximadamente 0,13 dB.

$$\left. \begin{aligned} P_{rad} &= \frac{1}{2} I_0^2 R_{in} \\ P_{rad,mon} &= \frac{1}{2} P_{rad,dip} \end{aligned} \right\} R_{in,mon} = \frac{1}{2} \cdot R_{in,dip} \cong \frac{73}{2} = 36,5 \Omega$$

Por otra parte, la potencia disponible de ruido referida a la entrada del receptor será:

$$N_i = K (T_A + T_r) B$$

Como además se verifica que $\left(\frac{S}{N}\right)_i = \left(\frac{S}{N}\right)_0$, la potencia disponible de señal a la entrada del receptor será:

$$S_i = \left(\frac{S}{N}\right)_0 \cdot (K(T_A + T_r)B) \quad (\text{ecuación 2})$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) y teniendo en cuenta el margen deseado $M = 10$ dB y el máximo de desvanecimiento por lluvia, $L_{fad} = 20$ dB:

$$\begin{aligned} P_{disp,t} \cdot (1 - |\Gamma_{in}|^2) \cdot \frac{1}{L_{coax}} \cdot \eta_t \cdot \eta_r \cdot D_0^2 \cdot (h^2 + d^2) \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}{d^4} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2 \\ = \left(\frac{S}{N}\right)_0 \cdot (K(T_A + T_r)B) \cdot M \cdot L_{fad} \end{aligned}$$

Despejando, la potencia disponible del transmisor puede calcularse como:

$$P_{disp,t} = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_0 \cdot (K(T_A + T_r)B) \cdot M \cdot L_{fad}}{(1 - |\Gamma_{in}|^2) \cdot \frac{\eta_t \cdot \eta_r}{L_{coax}} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \cdot D_0^2 \cdot (h^2 + d^2) \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}{d^4} \cdot (\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r)^2}$$

En dB:

$$\begin{aligned} P_{disp,t,x}(dBW) &= \left(\frac{S}{N}\right)_0 + 10 \log_{10}(K(T_A + T_r)B) + M(dB) + L_{fad}(dB) - \\ &- 10 \log_{10}(1 - |\Gamma_{in}|^2) - 10 \log_{10}\left(\frac{\eta_t \cdot \eta_r}{L_{coax}}\right) - 20 \log_{10}\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right) - \\ &- 2D_0 - 10 \log_{10}(h^2 + d^2) - 20 \log_{10}\left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}{d^2}\right) - 20 \log_{10}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r) \end{aligned}$$

Con los valores del enunciado, se evalúa cada término:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 15 \text{ dB}$$

$$10 \log_{10}(K(T_A + T_r)B) = -141,64 \text{ dBW}$$

$$M = 10 \text{ dB} ; \quad L_{fad} = 20 \text{ dB}$$

$$10 \log_{10}(1 - |\Gamma_{int}|^2) = -0,11 \text{ dB}$$

$$10 \log_{10}\left(\frac{\eta_t \cdot \eta_r}{L_{coax}}\right) = 10 \log_{10}(\eta_t \cdot \eta_r) - L_{coax} = -6,1 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10}\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right) = -46,4 \text{ dB}$$

$$10 \log_{10}(h^2 + d^2) = 66,1 \text{ dB}$$

$$2D_0 = 10,32 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10} \left(\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right)}{d^2} \right) = -132,25 \text{ dB}$$

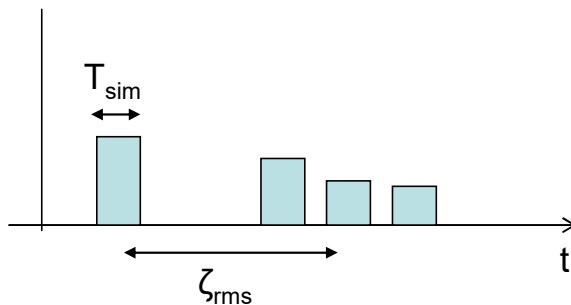
$$20 \log_{10}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_r) = 0 \text{ dB}$$

En consecuencia, la potencia disponible necesaria es:

$$P_{disp,t} = 11,8 \text{ dBW} = 41,8 \text{ dBm}$$

b) La bocina sectorial plano H, de dimensiones A x b y con una distribución de campo en la apertura del tipo $e^{jx^2} \cdot \cos(k_0 x)$, tendrá un ancho de haz en el plano horizontal menor que la bocina sectorial plano E, de dimensiones axB y distribución de campo en el plano horizontal del tipo $e^{jy^2} \cdot \cos(k_0 x)$, fundamentalmente por el hecho de que $A > a$. Por tanto, será la bocina sectorial plano H la más conveniente para minimizar las reflexiones en trayectos sobre el plano horizontal.

c) Movilidad:



$$\left. \begin{array}{l} T_{sim} = 10 \text{ ms} \\ \langle \tau \rangle = 30 \text{ ms} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{rms} \cong 30 \text{ ms}$$

Como $\tau_{rms} > T_{sim}$:

- Existe cierto retardo temporal => existe cierta dispersión temporal
- Hay cierto desvanecimiento selectivo "en frecuencia"

Desplazamiento Doppler:

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \Rightarrow \Delta f = f_0 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha = f_0 \cdot \frac{v}{c} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

$$\text{Para } d = 0 \Rightarrow \Delta f = 0$$

Para $d \gg h$ (como corresponde a la situación del problema) =>

$$\Delta f = f_0 \cdot \frac{v}{c} = 5 \cdot 10^9 \cdot \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8} = \frac{5}{9} \cdot 10^3 \text{ Hz} \Rightarrow T_c \cong \frac{1}{\Delta f} = \frac{9}{5} \cdot 10^{-3} \cong 2 \text{ ms}$$

Como $T_c < T_{sim}$:

- Existe cierta dispersión frecuencial => Desvanecimiento selectivo en el tiempo.

Este libro presenta una colección de ejercicios y problemas que intenta cubrir, de forma práctica, diferentes aspectos de las Radiocomunicaciones, tanto en el ámbito de la Radiación Electromagnética (en particular las Antenas) como de la Radiopropagación (en particular los enlaces radio o inalámbricos).

El libro está dividido en capítulos según las diferentes temáticas, con ejercicios agrupados según los aspectos particulares que se intentan desarrollar en ellos.

El libro comienza con la resolución de las ecuaciones que permiten calcular el campo electromagnético de cualquier distribución de corriente, pasa por los parámetros de ingeniería con que se caracterizan las antenas, el análisis de algunos tipos de antenas (antenas de hilo, bocinas, reflectores, arrays de antenas) y llega hasta el cálculo del balance de radioenlaces terrestres y por satélite (incluyendo algunos cálculos orbitales) así como otros elementos y fenómenos de la propagación en diferentes bandas de frecuencia.

La extensión de la temática y el nivel de detalle con que se abordan las soluciones convierten a este texto en una herramienta docente para estudiantes en el ámbito de la Ingeniería y la Física que deseen mejorar sus capacidades en el ámbito de materias relacionadas con las Antenas, la Propagación, las Radiocomunicaciones y los fundamentos de sistemas inalámbricos.

