



Universidad de
Oviedo



Universidad
Zaragoza

Trabajo de fin de máster

Máster en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y
Computación

Análisis numérico del modelo Advección-Difusión-Reacción para dinámica de incendios

Autor: David Miñón Alonso

Directores: Adrián Navas Montilla, José Luis Gracia Lozano

Oviedo, octubre 2024

Abstract

This work presents a numerical analysis of the Advection-Diffusion-Reaction (ADR) model applied to wildfire dynamics. The ADR model, which describes the physical processes involved in heat transfer during a wildfire, has been implemented by the research group from the Fluid Mechanics Department at the University of Zaragoza using high-order numerical schemes. The objective of this study is to implement a correction for the numerical diffusion present in low-order schemes in order to obtain results comparable to higher precision techniques. The derivation and correction of numerical diffusion, as well as its implementation in the computational model, are detailed. The results suggest that the correction significantly improves the performance of low-order methods without the computational cost associated with advanced schemes, making it a valuable tool for simulating wildfire dynamics and other fields where diffusion processes are numerically simulated.

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis numérico del modelo de Advección-Difusión-Reacción (ADR) aplicado a la dinámica de incendios forestales. El modelo ADR, que describe los procesos físicos implicados en la transferencia de calor durante un incendio forestal, ha sido implementado por el grupo de investigación del Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza mediante esquemas numéricos de volúmenes finitos de alto orden en la discretización espacial. Este estudio tiene como objetivo implementar una corrección de la difusión numérica que presentan los esquemas de bajo orden, para obtener resultados similares a los obtenidos con los de alto orden. Se detalla la derivación y corrección de la difusión numérica, además de su implementación en el modelo computacional. Los resultados sugieren que la corrección mejora significativamente el rendimiento de los métodos de bajo orden con un aumento despreciable en su costo computacional, lo que lo convierte en una herramienta valiosa para la simulación de la dinámica de incendios y, además, para otros campos de estudio en los que se trate de simular numéricamente procesos de difusión.

Índice

1.	Introducción y objetivos	3
2.	Descripción del modelo	5
2.1.	Ecuación de conservación	5
2.2.	Modelo de propagación de incendios	5
3.	Métodos numéricos	8
3.1.	Esquema de diferencias finitas (DF)	8
3.2.	Esquema Runge-Kutta 3 (SSPRK3)	11
3.3.	Estabilidad del esquema de diferencias finitas	14
3.4.	Estabilidad del esquema SSPRK3	16
3.5.	Método de los volúmenes finitos	20
4.	Análisis de modelo sin combustión	23
4.1.	Corrección numérica en esquemas de bajo orden	23
4.2.	Corrección numérica en FireDyn	29
5.	Análisis del modelo completo	31
5.1.	Resultados de FireDyn	31
5.2.	Corrección numérica en FireDyn	33
6.	Conclusiones	38
	Apéndice	39
A.	Estabilidad del esquema de diferencias finitas	39
B.	Estabilidad del esquema SSPRK3	40

1. Introducción y objetivos

Los incendios forestales son una parte crucial del sistema terrestre que da forma a los ecosistemas [1]. Aunque muchos ecosistemas dependen de un determinado régimen de incendios para mantenerse [2], los incendios forestales suponen una amenaza significativa para los biomas antropogénicos (ecosistemas que han sido profundamente modificados por la actividad humana), causando cambios significativos en la función hidrológica del área afectada [3], destruyendo propiedades y, en el peor de los casos, causando víctimas mortales. Los cambios socioeconómicos y el incremento de la población durante los últimos 40 años, han hecho necesario modificar las fuentes energéticas para poder alcanzar el nivel de desarrollo esperado. Este desarrollo ha favorecido el abandono de las zonas rurales lo que ha incrementado la cobertura ocupada por la vegetación y ha convertido amplias zonas en masas continuas de combustible. A este escenario hay que añadir el principal factor de la modificación del régimen de fuego, y, por tanto, del riesgo de incendios forestales, la climatología [4]. En general, el cambio climático está creando condiciones favorables para los incendios forestales en regiones anteriormente no afectadas, como el norte de Europa, y se espera que aumente tanto la frecuencia como la intensidad en la región mediterránea, que históricamente ha sido propensa a los incendios [4]. A medida que aumenta el riesgo de incendios forestales, la demanda de comprender y predecir mejor la dinámica de los incendios mediante modelos matemáticos y su resolución numérica para apoyar la toma de decisiones también está creciendo. En este contexto, los modelos matemáticos y computacionales pueden ayudar a comprender y predecir la dinámica de un incendio, además de estudiar la relación entre el fuego y la vegetación.

Una revisión exhaustiva sobre la modelización de la dinámica de propagación de incendios se puede encontrar en [5, 6]. En este trabajo, nos centramos en una clase específica de modelos de propagación de incendios basados en los procesos físicos de transmisión del calor: el modelo se fundamenta en ecuaciones de advección–difusión–reacción (ADR). Este modelo fue propuesto inicialmente en [7] para la propagación de incendios en un bosque bidimensional (2D) idealizado y fue explorado numéricamente en [8, 9]. Existen variaciones y extensiones de este modelo de propagación de incendios en la literatura. Por ejemplo, en [10] se presenta una forma tridimensional (3D) del modelo que permite distinguir entre incendios de copas y de superficie forestal. En [11], el modelo se extendió con el acoplamiento de un modelo de flujo atmosférico. Otra variación del modelo de propagación de incendios se discute en [12], que considera explícitamente las reacciones químicas subyacentes de la combustión. En [13], se utiliza una técnica de filtro de Kalman para incorporar las temperaturas reales, medidas en un incendio, en simulaciones en

curso basadas en el modelo ADR. En [14] se estudian modelos simplificados del modelo completo para comprender la influencia de los diferentes mecanismos de transmisión de calor, tanto de forma analítica como numérica, en el comportamiento no lineal del modelo completo.

Desde el área de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Zaragoza se está trabajando con el modelo basado en la ecuación ADR, que se describe en detalle en [14]. Se ha llevado a cabo una implementación computacional del modelo, “FireDyn”, utilizando una discretización de volúmenes finitos de orden alto. “FireDyn” se ha desarrollado a partir de [15], y permite trabajar con simplificaciones del modelo ADR, de gran utilidad para este trabajo. Se trata de una implementación muy completa que, además de los procesos de advección, difusión y reacción, permite utilizar un gran número de parámetros físicos adicionales y trabajar en 1D, 2D y 3D.

El objetivo de este trabajo es analizar los esquemas numéricos utilizados en el modelo propuesto en [14] e implementar una corrección numérica a esquemas de bajo orden, con el fin de obtener aproximaciones similares a las que se logran con esquemas de alto orden. Para ello, se han definido objetivos más específicos que son necesarios para llegar a los resultados esperados:

- Cuantificar de forma analítica la difusión numérica generada por los distintos esquemas utilizados para resolver la ecuación ADR.
- Utilizar una estrategia para corregir el error sin recurrir a métodos de alto orden.
- Implementar la corrección numérica en el código desarrollado por el grupo de investigación “FireDyn”, y evaluar los resultados en términos de precisión y eficiencia computacional.

2. Descripción del modelo

2.1. Ecuación de conservación

El modelo de propagación de incendios se basa en la modelación matemática de un fenómeno físico. Se modela mediante las leyes de conservación de una cantidad escalar, U . Para ello se considera un dominio espacial Ω , acotado por una superficie S , en el que se va a analizar la cantidad conservada de la forma más general posible. Suponemos fuentes de la cantidad U , que pueden ser fuentes de volumen, Q_v , o fuentes de superficie, Q_s . La variación por unidad de tiempo de la cantidad U en el dominio Ω viene dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = Q_v + Q_s, \quad (1)$$

donde el flujo \mathbf{F} es la cantidad de U que atraviesa una unidad de superficie por unidad de tiempo. Este flujo puede representar efectos de transporte advectivo y difusivo. Consideramos positiva la contribución del flujo a la cantidad U , cuando tenemos flujo de U entrando en el dominio Ω , es decir, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} < 0$. Esta expresión representa la ley de conservación en su forma más general.

2.2. Modelo de propagación de incendios

En el modelo de propagación de incendios la cantidad escalar conservada es $U = \rho_0 e$, donde e es la energía interna por unidad de masa y ρ_0 la densidad de masa. Consideramos un flujo advectivo $\mathbf{F} = \rho_0 e \mathbf{v}$, donde la velocidad de advección \mathbf{v} representa la velocidad del viento. La ecuación de conservación de la energía interna la escribiremos de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho_0 e d\Omega + \oint_S \rho_0 e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{comb} - Q_{conv}, \quad (2)$$

donde Q_{cond} , Q_{rad} , Q_{comb} , Q_{conv} son flujos de energía por conducción, radiación, combustión y conducción respectivamente y \mathbf{n} es el vector normal exterior a la superficie S . Asumiendo que la densidad ρ_0 y el calor específico c son constantes en el dominio Ω , la energía interna se puede expresar como $e = cT$, donde T es la temperatura. Así, la ecuación (2) podemos escribirla en términos de la temperatura T

$$\rho_0 c \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T d\Omega + \oint_S T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right] = Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{comb} - Q_{conv}, \quad (3)$$

El flujo de energía debido a la conducción térmica, Q_{cond} , está determinado por la ley de Fourier, según la cual, el flujo de transferencia de calor por conducción es proporcional y

de sentido contrario al gradiente de temperatura en esa dirección

$$Q_{cond} = \oint_S k \nabla T \, d\mathbf{S}, \quad (4)$$

donde k es la conductividad térmica del medio y $k/\rho_0 c$ es la difusividad térmica o parámetro de difusión. El flujo de energía debido a la radiación, Q_{rad} , se modela mediante la aproximación de Rosseland. Esta aproximación es aplicable en medios “opacos”, donde el camino libre medio de la radiación electromagnética δ es menor que las dimensiones espaciales del dominio Ω . Bajo esta condición, la aproximación de Rosseland asume que la radiación sufre un proceso de difusión a través del medio de forma análoga a la conducción de calor según la ley de Fourier, es decir, el gradiente de temperatura impulsa el flujo de radiación [12]

$$Q_{rad} = \oint_S 4\sigma\varepsilon\delta T^3 \nabla T \, d\mathbf{S}, \quad (5)$$

donde el término T^3 implica una transferencia de energía radiativa más significativa a temperaturas altas, σ es la constante de Boltzmann y ε es un factor de emisividad. Por otro lado, el flujo de energía debido a la diferencia de temperatura del dominio Ω y el exterior, Q_{conv} , viene determinado por la ley del enfriamiento de Newton, que establece que la tasa de pérdida de calor de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el exterior [12]

$$Q_{conv} = \oint_S h_0(T - T_\infty) \, dS, \quad (6)$$

donde T_∞ es la temperatura del ambiente fuera del dominio, h_0 es el coeficiente de convección natural. El término de flujo de energía debido a la combustión, Q_{comb} , viene dado por

$$Q_{comb} = \int_\Omega \rho_0 \frac{\partial Y(\mathbf{x}, t)}{\partial t} H \, d\Omega,$$

donde $Y(\mathbf{x}, t)$ es la distribución de biomasa en el dominio y H es el calor generado por la combustión por unidad de biomasa. Con este término se relaciona la variación de biomasa en el dominio con el calor generado por la combustión. La biomasa puede tomar los valores $0 \leq Y(t) \leq 1$, siendo $Y = 0$ la ausencia de biomasa e $Y = 1$ la máxima cantidad de biomasa que estamos considerando. El flujo de calor Q_{comb} aumentará a medida que crezca la cantidad de biomasa que se quema por unidad de tiempo. La ecuación diferencial que modela la variación de la fracción de biomasa es

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -s(T)AY,$$

donde A es la constante cinética en la combustión (está relacionado con el tipo de biomasa), y $s(T)$ es el factor de activación

$$s(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T < T_{comb}, \\ 1 & \text{si } T \geq T_{comb}, \end{cases}$$

donde T_{comb} es la temperatura a la que ocurre la combustión de la biomasa. Cuando $s(T) = 1$, el término que introduce el flujo de calor generado en la combustión de la biomasa, Q_{comb} , se activa.

$$Q_{comb} = \int_{\Omega} s(T) \rho_0 H A Y \, d\Omega. \quad (7)$$

Una vez que se han modelado todos los procesos energéticos que tienen lugar en la propagación del incendio, aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss para reescribir la ecuación de conservación. Agrupando en un único término los dos procesos difusivos debidos a la conducción y a la radiación, obtenemos

$$\rho_0 c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{v}) \right) = \nabla \cdot ((4\sigma \varepsilon \delta T^3 + k) \nabla T) - h(T - T_{\infty}) + s(T) A \rho_0 H Y.$$

Si se asume que el flujo es incompresible, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, obtenemos el modelo completo de propagación de incendios

$$\begin{cases} \rho_0 c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k_t(T) \nabla T) - h(T - T_{\infty}) + s(T) A \rho_0 H Y, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = -s(T) A Y, \end{cases} \quad (8)$$

donde k_t representa una conductividad térmica combinada. Las variables del modelo son la temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ y la biomasa $Y(\mathbf{x}, t)$. En esta memoria llamaremos a este sistema de ecuaciones en derivadas parciales el “modelo completo”. La primera ecuación modela los procesos de advección, difusión por conducción y radiación, enfriamiento y combustión, y nos referiremos a ella como “ecuación ADR”. La segunda ecuación del sistema describe la variación temporal de la biomasa en el dominio Ω , que participa en el proceso de combustión.

3. Métodos numéricos

Para realizar simulaciones del modelo de propagación de incendios (8) es necesario resolver el modelo computacionalmente mediante métodos numéricos. El esquema numérico utilizado en “FireDyn” utiliza el método de volúmenes finitos (FV) para la discretización espacial y un método Runge-Kutta de orden 3 para la integración temporal. La discretización espacial del modelo mediante FV introduce una difusión numérica que provoca una sobreestimación de la difusión física y hace necesario utilizar esquemas de alto orden en el término convectivo para reducir este error.

En este capítulo se resuelve el modelo completo (8) sin considerar el término de combustión ($A = 0$), por lo que el modelo se reduce a la ecuación ADR. Con la ecuación ADR se puede obtener una expresión para el error de difusión numérica y plantear una corrección del mismo. Para ello, como una primera aproximación al problema, se van a determinar los errores de truncamiento y la estabilidad de un esquema de diferencias finitas (DF) en el que se ha utilizado el método de Euler explícito para la integración temporal. Además, se van a analizar los errores de truncamiento y la estabilidad de los esquemas Runge-Kutta (RK), ya que éste es el esquema utilizado en “FireDyn” para la integración temporal.

Consideraremos primero la ecuación diferencial 1D de advección-difusión con coeficientes constantes.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (9)$$

siendo la temperatura, $T(x, t)$, la solución de la ecuación, v la velocidad de advección y $\alpha > 0$ el coeficiente de difusión. La ecuación de advección-difusión-reacción ADR

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + v \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} - h(\hat{T} - T_\infty), \quad (10)$$

contiene además un término de reacción (o de orden cero) y un término fuente. Utilizando el cambio de variable $\hat{T} = T_\infty - T e^{-ht}$ se recupera la ecuación (9). Por ello, los resultados de la ecuación de advección-difusión 1D se pueden extender fácilmente a la ecuación ADR, y por simplicidad vamos a estudiar esquemas numéricos aplicados a la ecuación (9).

3.1. Esquema de diferencias finitas (DF)

Para implementar el esquema de diferencias finitas realizamos una discretización del dominio espacial $\Omega = [a, b]$. Creamos una malla uniforme de $N + 1$ puntos, espaciados

una distancia $\Delta x = (b - a)/N$ y localizados en las coordenadas $x_i = i\Delta x$. En los puntos de la malla, x_i , aproximaremos las variables del esquema numérico tal y como se describe en la Figura 1.

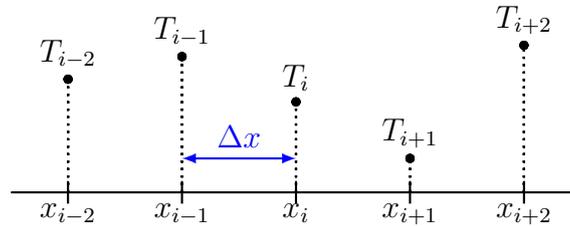


Fig 1: Discretización del dominio espacial Ω , con un paso de discretización Δx .

Para aproximar la ecuación de advección-difusión (9) usamos el método de Euler explícito sobre una malla uniforme t^n para la variable temporal y el método de diferencias finitas para discretizar las derivadas espaciales. Se trata de un esquema numérico explícito en tiempo en el que utilizamos diferencias centrales de segundo orden para el término difusivo y una discretización de tipo “upwind” para el término advectivo. La discretización upwind viene dada por

$$v \frac{\partial T}{\partial x}(x_i, t^n) \approx \begin{cases} v \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}, & \text{si } v \geq 0, \\ v \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}, & \text{si } v < 0. \end{cases}$$

y esta discretización es habitual cuando $\alpha = 0$ (ecuación del transporte) o en problemas de perturbación singular en los que α toma valores muy pequeños para evitar problemas de estabilidad. Por simplicidad, en esta memoria supondremos que $v > 0$ y por tanto la derivada de primer orden se discretiza con diferencias regresivas. De esta forma, resulta el siguiente esquema

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} = \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (11)$$

De esta forma, se tiene que $T(x_i, t^n) \approx T_i^n$. Reordenando los coeficientes, se puede determinar la única incógnita T_i^{n+1} de la ecuación (11) que viene expresada en términos de los valores de la solución en el instante anterior

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{v\Delta t}{\Delta x} (T_i^n - T_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n). \quad (12)$$

A continuación, vamos a determinar el error de truncamiento asociado al esquema numérico (11). Para ello tomamos desarrollos en serie de Taylor de las derivadas parciales de la variable T en los nodos de la malla:

$$T(x_i, t^{n+1}) = T(x_i, t^n) + \frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t^n)\Delta t + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i, t^n)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3),$$

$$T(x_{i-1}, t^n) = T(x_i, t^n) - \frac{\partial T}{\partial x}(x_i, t^n)\Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t^n)\frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(x_i, t^n)\frac{(\Delta x)^3}{6} + \mathcal{O}((\Delta x)^4),$$

$$T(x_{i+1}, t^n) = T(x_i, t^n) + \frac{\partial T}{\partial x}(x_i, t^n)\Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t^n)\frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(x_i, t^n)\frac{(\Delta x)^3}{6} + \mathcal{O}((\Delta x)^4).$$

El error de truncamiento viene dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &= \frac{T(x_i, t^{n+1}) - T(x_i, t^n)}{\Delta t} + v \frac{T(x_i, t^n) - T(x_{i-1}, t^n)}{\Delta x} - \alpha \frac{T(x_{i+1}, t^n) - 2T(x_i, t^n) + T(x_{i-1}, t^n)}{(\Delta x)^2} \\ &\quad - \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] (x_i, t^n). \end{aligned}$$

Tomando desarrollos de Taylor, resulta

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i, t^n) - v \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^2, (\Delta t)^2).$$

Utilizamos la ecuación diferencial (9) para escribir la derivada $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ como una combinación lineal de derivadas parciales con respecto a la variable espacial. Para ello, derivamos (9) con respecto a la variable temporal

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) - v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ &= \alpha^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - 2\alpha v \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + v^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Sustituyendo la expresión obtenida en (13) para $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ en el error de truncamiento, obtenemos

$$\varepsilon_T = v \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} - 1 \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t^n) - v\alpha\Delta t \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(x_i, t^n) + \alpha^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(x_i, t^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^2, (\Delta t)^2).$$

El primer término del error de truncamiento está multiplicado por una derivada segunda, por lo que el error tendrá un comportamiento predominantemente difusivo (los términos de difusión física se modelan mediante derivadas segundas). Es por ello que hablamos de *difusión numérica* introducida por esquema. En cuanto al siguiente término del error de truncamiento, está multiplicado por una derivada de tercer orden y tendrá un comporta-

miento dispersivo.

En este trabajo, buscamos mejorar el orden de convergencia del esquema numérico corrigiendo sólo el término difusivo del error ya que, como veremos más adelante en el criterio de estabilidad del esquema $\Delta t \approx (\Delta x)^2$ (en el caso que $\alpha \neq 0$), y es, por tanto, el término con un error de mayor orden. Definimos la difusión numérica del esquema, ν_{num}

$$\nu_{num} = \frac{v\Delta x}{2} \left(1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \right).$$

Conocido el valor de la difusión numérica, que depende de los parámetros de discretización $\Delta t, \Delta x$, proponemos la siguiente corrección del esquema numérico original que consiste en incorporar la siguiente aproximación del término principal del error de truncamiento

$$\nu_{num} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t^n) \approx \nu_{num} \frac{(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}.$$

El esquema que obtenemos es

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} = D \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (14)$$

donde D es el parámetro de difusión corregido y está definido de la siguiente forma

$$D = \begin{cases} \alpha - \nu_{num} = \alpha - \frac{v\Delta x}{2} \left(1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \right), & \text{si } \alpha - \nu_{num} \geq 0, \\ 0, & \text{si } \alpha - \nu_{num} < 0. \end{cases}$$

Con este nuevo esquema numérico corregido, se espera eliminar la difusión numérica de la solución computacional y mejorar la convergencia del esquema numérico. En el caso particular que $\alpha = 0$, hemos obtenido el esquema de Lax-Wendroff

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{v^2}{2} \Delta t \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

3.2. Esquema Runge-Kutta 3 (SSPRK3)

En FireDyn se han implementado discretizaciones de volúmenes finitos de orden alto para la variable espacial. Para obtener soluciones más precisas de la solución, vamos a considerar métodos Runge-Kutta para la integración temporal, que nos permitirán tratar la no linealidad del modelo completo (8).

El método de Runge-Kutta se basa en una formulación semidiscreta de la ecuación de advección-difusión (9). Para ello, discretizamos primero la ecuación (9) con respecto a la

variable espacial y obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \mathcal{L}(T_i), \quad (15)$$

donde el operador espacial discretizado $\mathcal{L}(T_i)$ está definido de la siguiente forma

$$\mathcal{L}(T_i^n) = -v \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (16)$$

Utilizamos el esquema “Strong Stability Preserving Runge-Kutta 3” (SSPRK3) para la integración temporal. Los métodos SSP son métodos que preservan la estabilidad en la integración temporal y consiguen evitar la generación de oscilaciones no físicas, especialmente en problemas con soluciones discontinuas o que evolucionan rápidamente [16], como en el caso del modelo completo de propagación de incendios. Este esquema se compone de las siguientes tres etapas

$$T_i^{(1)} = T_i^n + \Delta t \mathcal{L}(T_i^n),$$

$$T_i^{(2)} = T_i^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(T_i^{(1)}),$$

$$T_i^{n+1} = \frac{1}{3}T_i^n + \frac{1}{2}T_i^{(1)} + \frac{1}{6}T_i^{(2)} + \frac{1}{6}\Delta t \mathcal{L}(T_i^{(2)}).$$

Para calcular el error de truncamiento del esquema SSPRK3, expresamos el último paso del esquema como una función del T^n , sustituyendo $T^{(1)}$, $T^{(2)}$. De esta forma obtenemos la siguiente expresión equivalente

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \mathcal{L}(T_i^n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \mathcal{L}^2(T_i^n) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \mathcal{L}^3(T_i^n). \quad (17)$$

En general, se pueden definir métodos Runge-Kutta con orden de convergencia k de la siguiente forma

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \sum_{n=1}^k \frac{(\Delta t)^n}{n!} \mathcal{L}^n(T_i^n).$$

En esta memoria consideraremos únicamente el método Runge-Kutta de orden 3. Para realizar nuestro análisis determinamos las expresiones de los operadores $\mathcal{L}(T_i^n)$, $\mathcal{L}^2(T_i^n)$, $\mathcal{L}^3(T_i^n)$ y las sustituiremos en (17). Las expresiones de estos operadores se proporcionan a continuación

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^2(T_i^n) &= -\frac{v}{\Delta x} [\mathcal{L}(T_i^n) - \mathcal{L}(T_{i-1}^n)] + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} [\mathcal{L}(T_{i+1}^n) - 2\mathcal{L}(T_i^n) + \mathcal{L}(T_{i-1}^n)] \\
&= \frac{v^2}{(\Delta x)^2} (T_i^n - 2T_{i-1}^n + T_{i-2}^n) + \frac{2v\alpha}{(\Delta x)^3} (-T_{i+1}^n + 3T_i^n - 3T_{i-1}^n + T_{i-2}^n) \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^4} (T_{i+2}^n - 4T_{i+1}^n + 6T_i^n - 4T_{i-1}^n + T_{i-2}^n), \\
\mathcal{L}^3(T_i^n) &= -\frac{v}{\Delta x} [\mathcal{L}^2(T_i^n) - \mathcal{L}^2(T_{i-1}^n)] + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} [\mathcal{L}^2(T_{i+1}^n) - 2\mathcal{L}^2(T_i^n) + \mathcal{L}^2(T_{i-1}^n)] \\
&= -\frac{v^3}{(\Delta x)^3} (T_i^n - 3T_{i-1}^n + 3T_{i-2}^n - T_{i-3}^n) \\
&\quad + \frac{v^2\alpha}{(\Delta x)^4} (3T_{i+1}^n - 12T_i^n + 18T_{i-1}^n - 12T_{i-2}^n + 3T_{i-3}^n) \\
&\quad + \frac{v\alpha^2}{(\Delta x)^5} (-3T_{i+2}^n + 15T_{i+1}^n - 30T_i^n + 30T_{i-1}^n - 15T_{i-2}^n + 3T_{i-3}^n) \\
&\quad + \frac{\alpha^3}{(\Delta x)^6} (T_{i+3}^n - 6T_{i+2}^n + 15T_{i+1}^n - 20T_i^n + 15T_{i-1}^n - 6T_{i-2}^n + T_{i-3}^n).
\end{aligned}$$

Conocido estos operadores se toman desarrollos de Taylor y se sustituyen para obtener el error de truncamiento asociado al esquema SSPRK3

$$\varepsilon_T = \frac{v\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^n + \mathcal{O}((\Delta x)^2, (\Delta t)^3).$$

Al igual que para el esquema de diferencias finitas, en el esquema SSPRK3 tenemos un error predominantemente difusivo. Incorporamos al esquema original SSPKR3 una corrección de la difusión numérica del esquema $\nu_{num} = \frac{v\Delta x}{2}$

$$D = \begin{cases} \alpha - \frac{v\Delta x}{2}, & \text{si } \alpha - \nu_{num} \geq 0, \\ 0, & \text{si } \alpha - \nu_{num} < 0. \end{cases}$$

El operador espacial discretizado con la corrección anterior se escribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{DC}(T_i^n) &= -v \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \left(\alpha - \frac{v\Delta x}{2} \right) \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \\
&= -v \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2},
\end{aligned}$$

que resulta en un operador espacial en diferencias centrales. El esquema corregido se obtiene introduciendo el operador espacial $\mathcal{L}_{DC}(T_i^n)$ en el esquema original

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \mathcal{L}_{DC}(T_i^n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \mathcal{L}_{DC}^2(T_i^n) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \mathcal{L}_{DC}^3(T_i^n). \quad (18)$$

Se puede observar que el parámetro de difusión numérica del error de truncamiento para el esquema SSPRK3 es diferente que para el esquema de diferencias finitas. Esto es debido a que el esquema de diferencias finitas es de orden Δt en tiempo, mientras que el esquema SSPRK3 es de orden $(\Delta t)^3$ y sólomente el término advectivo del operador espacial introduce difusión numérica.

3.3. Estabilidad del esquema de diferencias finitas

Podemos analizar la estabilidad del esquema explícito de diferencias finitas (12) para la ecuación de advección-difusión mediante el método de von Neumann. Consiste en asumir que, en un esquema lineal, la solución de la ecuación, T_i^n , puede ser escrita como suma finita de modos armónicos de Fourier, caracterizados por su número de onda k_j

$$T_i^n = \sum_{j=-N}^N V_j^n e^{Ik_j x_i} = \sum_{j=-N}^N V_j^n e^{Ik_j i \Delta x} = \sum_{j=-N}^N V_j^n e^{Ij\pi/N}.$$

donde i el índice del mallado espacial, j el índice del modo y hemos denotado por I a la unidad imaginaria ($I^2 = -1$) para distinguirla del índice de la malla espacial. Además, definimos el número de fase ϕ_j asociado al armónico de número de onda k_j como

$$\phi_j = k_j \Delta x = \frac{j\pi}{N}, \quad j = -N, \dots, 0, \dots, N.$$

El comportamiento de la solución con el tiempo viene representado por las amplitudes V_j^n , que representan la parte temporal, mientras que los modos armónicos $e^{Ik_j x}$ representan la parte espacial. El método de von Neumann se fundamenta en que, el esquema se satisface para cada armónico de forma individual [17]. De esta forma, como la condición de estabilidad garantiza que la amplitud de ningún armónico puede crecer de forma indefinida con el tiempo, la solución T_i^n tampoco lo hará. El factor de amplificación del esquema se define de la siguiente forma

$$\mathcal{M} = \frac{V^{n+1}}{V^n},$$

y sustituyendo un modo cualquiera, $T_i^n = V^n e^{Ik(i\Delta x)}$, en el esquema numérico de advección-difusión obtenemos el factor de amplificación

$$\mathcal{M} = 1 + \frac{\Delta t(v\Delta x + 2\alpha)}{(\Delta x)^2} [\cos \phi - 1] - i \frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin \phi.$$

Los detalles para deducir el factor de amplificación se encuentran en el Apéndice A. El

factor de amplificación debe cumplir la condición de estabilidad $|\mathcal{M}| \leq 1$ para cualquier modo. A partir de esta condición, obtenemos el criterio de estabilidad del esquema (12)

$$\Delta t = CFL \frac{(\Delta x)^2}{(v\Delta x + 2\alpha)}, \quad (19)$$

con $CFL \leq 1$. El número adimensional CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) mide la relación entre el paso de tiempo, el paso espacial, la velocidad de convección, v y el coeficiente de difusión, α . Observamos que, si $\alpha = 0$, obtenemos la definición original del número de CFL de la ecuación de advección $CFL = v\Delta t/\Delta x$, que mide el comportamiento advectivo del esquema. Si $v = 0$, obtenemos el número de Fourier $Fo = \alpha\Delta t/(\Delta x)^2$ que mide el comportamiento difusivo del esquema. Podemos escribir el factor de amplificación del esquema en función del CFL

$$\mathcal{M} = [1 + CFL(\cos \phi - 1)] + i \left[-CFL \frac{v\Delta x}{v\Delta x + 2\alpha} \sin \phi \right]. \quad (20)$$

En la figura 2 se muestra el factor de amplificación de los modos armónicos $\phi_j = k_j\Delta x \in [-\pi, \pi]$ para diferentes valores del número CFL . Se observa que el valor límite en el cual el factor de amplificación se encuentra dentro de la región estable para todos los modos es $CFL = 1$. Además, la ecuación (20) muestra que el factor de amplificación depende del tamaño de malla Δx y cuando Δx aumenta la amplificación de los modos $|\mathcal{M}| \rightarrow 1$.

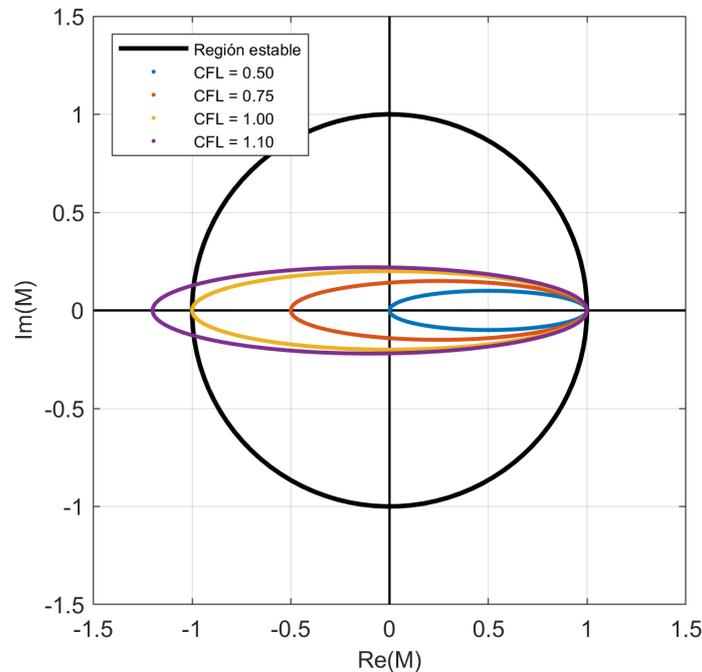


Fig 2: Factor de amplificación \mathcal{M} del esquema explícito de advección-difusión en diferencias finitas en función del CFL para $\Delta x = 1$ m, $v = 5$ m/s y $\alpha = 10$ m²/s. En negro, la región de estabilidad del esquema, círculo de radio unidad.

La corrección de la difusión numérica para el esquema de diferencias finitas, además de Δx , depende del paso temporal Δt (14), por lo que el coeficiente de difusión corregido, D , va a ser diferente en función del valor CFL que tomemos, recordamos que este viene dado por

$$D = \alpha - \nu_{num} = \alpha - \frac{v\Delta x}{2} \left(1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x}\right),$$

cuando $\alpha > \nu_{num}$. La Figura 3 muestra como varía el factor de amplificación sobre los modos, y podemos comprobar que la condición de estabilidad no se ve alterada por la corrección. Además, se observa que, en este caso, la diferencia en el factor de amplificación es muy pequeña y sólo cambia ligeramente la parte compleja.

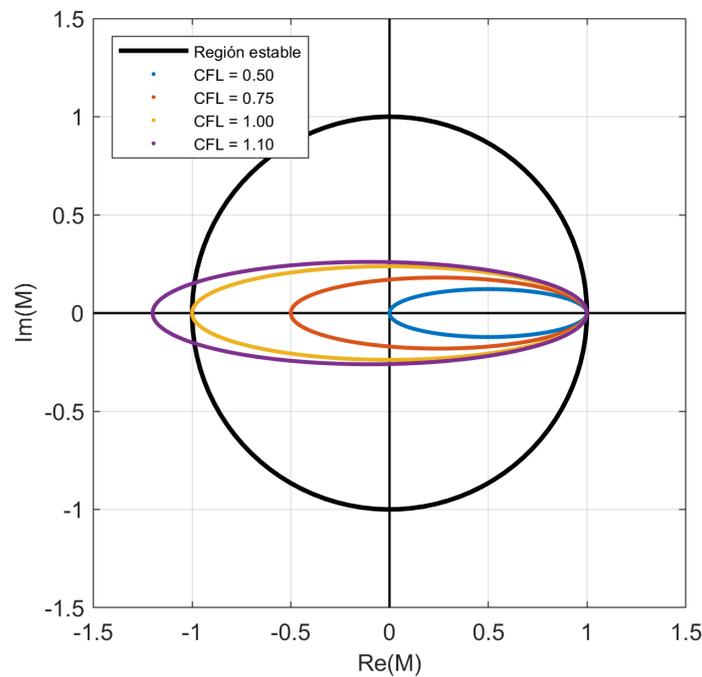


Fig 3: Factor de amplificación \mathcal{M} del esquema explícito de advección-difusión en diferencias finitas, con corrección de la difusión numérica, en función del CFL para $\Delta x = 1$ m, $v = 5$ m/s y $\alpha = 10$ m²/s. En negro, la región de estabilidad del esquema, círculo de radio unidad.

3.4. Estabilidad del esquema SSPRK3

Mientras que el análisis de estabilidad de von Neumann es de gran utilidad en esquemas discretos como el utilizado en el método de diferencias finitas (11), debemos aplicar una metodología más general para analizar la estabilidad de esquemas de varios pasos como los métodos Runge-Kutta. El método utilizado se trata del “*método matricial para el análisis de estabilidad*” [17]. Para ello, escribimos el esquema semidiscreto (15) de la siguiente forma

$$\frac{dU}{dt} = S \cdot U, \quad (21)$$

donde los valores de la variable, T_i , en los puntos de la malla los agrupamos en un vector columna U , y S es la matriz cuyas filas representan el operador discreto espacial (16) aplicado la variable T_i . El método matricial se basa en que la solución exacta de (21) está determinada por los valores y vectores propios de S . Sean λ_j con $j = 1, \dots, N$ los valores propios de S , N el número total de celdas en la malla y $V^{(j)}$ sus vectores propios asociados. Así se tiene que

$$S \cdot V^{(j)}(\mathbf{x}) = \lambda_j V^{(j)}(\mathbf{x}), \quad (22)$$

y hay tantos vectores propios como celdas tiene la malla. Cada vector propio $V^{(j)}$ consiste en un conjunto de valores v_i^j en cada punto de la malla, $V^{(j)} = (\dots, v_{i-1}^{(j)}, v_i^{(j)}, v_{i+1}^{(j)}, \dots)$. Como los vectores propios forman una base vectorial en un espacio de dimensión N , se puede escribir la solución U de la ecuación (21) como una descomposición modal

$$U(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \bar{U}_j(t) \cdot V^{(j)}(\mathbf{x}),$$

en la que los coeficientes $\bar{U}_j(t)$ dependen únicamente del tiempo y la dependencia espacial está contenida únicamente en los vectores propios $V^{(j)}(\mathbf{x})$. Los coeficientes de la descomposición modal del problema matricial son

$$\bar{U}_j(t) = U_j^0 e^{\lambda_j t} \quad (23)$$

donde U_j^0 son los coeficientes modales de la condición inicial del problema. Con este resultado, tenemos la propiedad de que los valores propios λ_j de la matriz S , determinan completamente el comportamiento temporal del esquema semidiscreto (21). La condición de estabilidad de establece que $\bar{U}_j(t)$ no tiene que crecer indefinidamente con el tiempo, por lo que es necesario que $\text{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \forall j$.

Para un modo λ_j podemos definir un factor de amplificación $G(\lambda_j)$ de la solución exacta del problema semi-discretizado en un tiempo $t^n = n\Delta t$. La condición de estabilidad establece que el factor de amplificación debe ser menor o igual que 1 para todos los modos, es decir, $|G| \leq 1$. Esta condición se da en la región del plano complejo $\lambda\Delta t$ con $\text{Re}(\lambda_j) \leq 0$, ya que si

$$\bar{U}_j(n\Delta t) = G(\lambda_j)\bar{U}_j((n-1)\Delta t),$$

o equivalentemente

$$U_j^0 e^{\lambda_j n \Delta t} = G(\lambda_j) U_j^0 e^{\lambda_j (n-1) \Delta t},$$

se tiene que

$$G(\lambda_j) = e^{\lambda_j \Delta t}. \quad (24)$$

En cuanto a los esquemas SSPRK, aplicando la teoría del “método matricial” se obtiene el factor de amplificación en forma polinomial [17], que puede ser comparado con el factor de amplificación de la solución exacta del problema semidiscreto

$$G_{RK}^k = 1 + \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2} + \frac{(\lambda \Delta t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} \approx e^{\lambda \Delta t} \quad (25)$$

donde k es el orden del del esquema SSPRK, en nuestro caso $k=3$. En la Figura 4 se muestran las regiones de estabilidad de los esquemas SSPRK de órdenes 1,2,3 y 4.

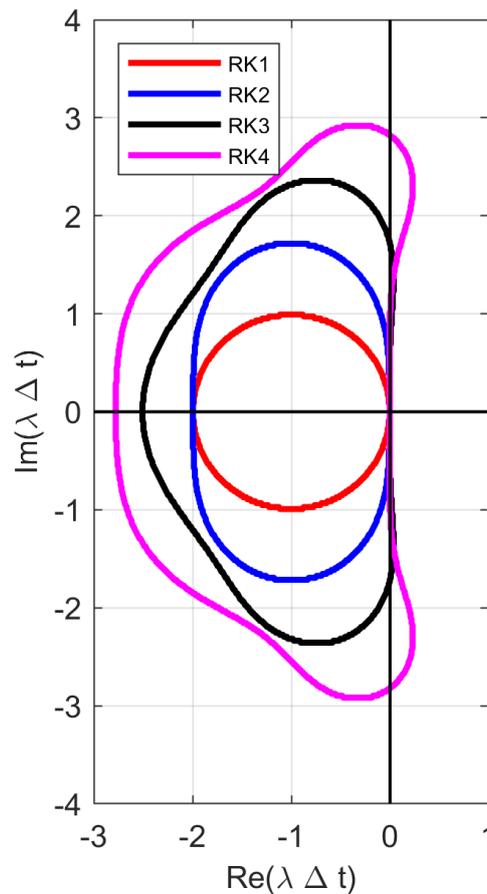


Fig 4: Límites de estabilidad de los métodos SSPRK de órdenes 1,2,3 y 4 en el plano complejo $\lambda \Delta t$.

Para evaluar la estabilidad de la ecuación de advección-difusión utilizando el esquema

SSPRK3, calculamos los vectores propios del operador espacial (16). Asumimos que, aplicando condiciones de contorno periódicas, los vectores propios son los modos armónicos de Fourier [17], identificados por su número de onda k_j . Para una variable espacial unidimensional

$$V^{(j)}(\mathbf{x}) = e^{Ik_j\mathbf{x}},$$

donde recordamos que $I^2 = -1$. Hallamos los valores propios del operador espacial de la ecuación de advección-difusión usando la ecuación (22), donde especificamos el operador S de nuestro esquema y los modos $V^{(j)}$ en los que se descompone la solución

$$S \cdot e^{Ik_jx_i} = \lambda(\phi_j) \cdot e^{Ik_jx_i},$$

donde $\phi_j = k_j\Delta x$. En el apéndice B se detalla el cálculo de los valores propios que representaremos en el plano complejo $\lambda\Delta t$. Estos vienen dados por

$$\lambda(\phi)\Delta t = \left[- \left(\frac{\Delta t(v\Delta x + 2\alpha)}{(\Delta x)^2} \right) (1 - \cos \phi) \right] + I \left[\left(-\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right) \sin \phi \right].$$

Podemos escribir el factor de amplificación del esquema en función del número $CFL = \Delta t(v\Delta x + 2\alpha)/(\Delta x)^2$ y resulta la siguiente expresión

$$\lambda(\phi)\Delta t = [-CFL(1 - \cos \phi)] + I \left[-CFL \frac{v\Delta x}{v\Delta x + 2\alpha} \sin \phi \right]. \quad (26)$$

El esquema SSPRK3 aplicado al operador espacial de advección-difusión es estable, cuando $\forall \phi \in [-\pi, \pi]$ sus vectores propios satisfacen $\Re(\lambda) < 0$ y $\lambda\Delta t$ se encuentra dentro de la región de estabilidad de método SSPRK3, que fue representada en la Figura 4. El resultado (26) implica que, al igual que en el esquema DF (11), la estabilidad del esquema vendrá determinada por el parámetro CFL . El factor de amplificación de los diferentes modos cambiará también con la densidad de malla Δx , aunque no afectará a la estabilidad si el parámetro CFL está dentro del rango aquí indicado.

En la Figura 5 se muestran los valores propios del operador espacial de nuestro esquema numérico en el plano complejo $\lambda\Delta t$. Podemos observar que el valor límite del CFL para el esquema SSPRK3 se encuentra entre 1.20 y 1.30, y, por tanto, permite utilizar pasos de tiempo más grandes que para el esquema de DF sin perder la estabilidad. La parte derecha de la Figura 5 muestra como cambian los valores propios del operador espacial con el coeficiente de difusión corregido, D , definido en (3.2). La diferencia en este caso

es realmente pequeña y sólo afecta a la parte compleja de la ecuación de valores propios (26).

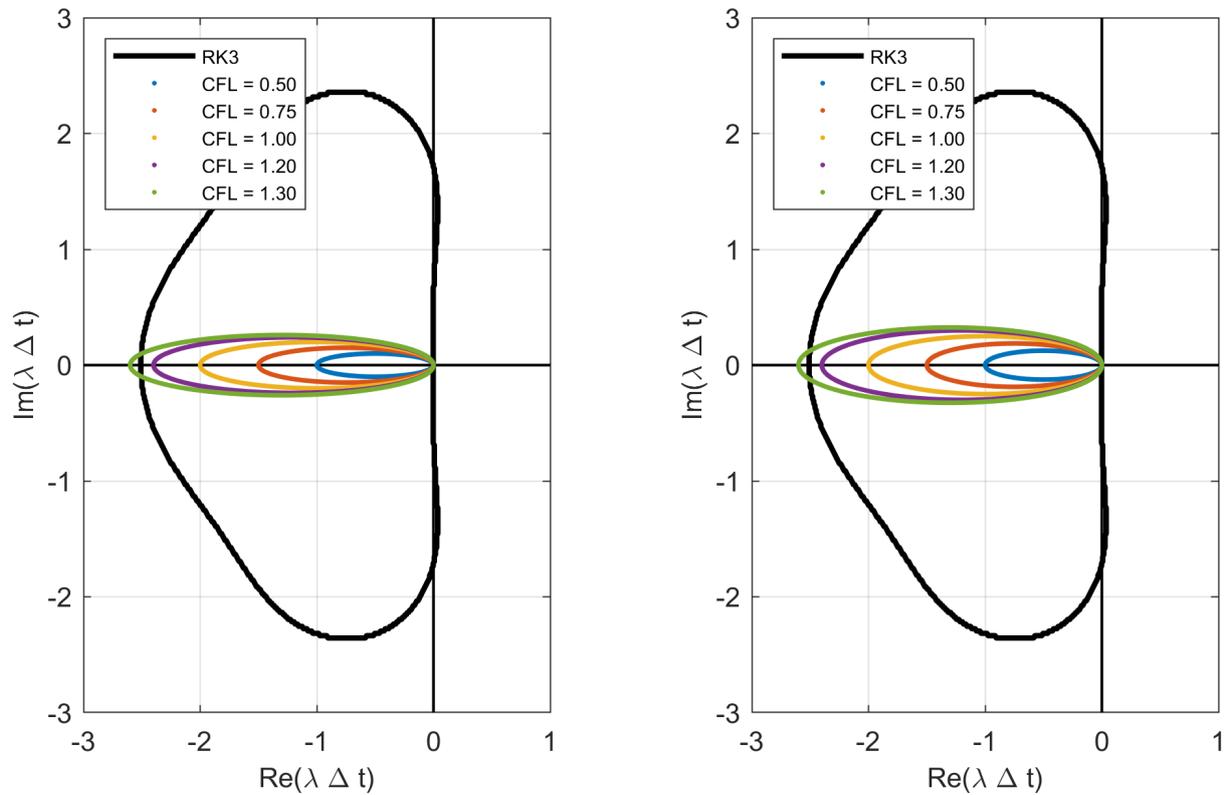


Fig 5: Valores propios $\lambda(\phi)$ del operador espacial advección-difusión, representado en el plano complejo $\lambda\Delta t$ para diferentes valores de CFL para $\Delta x = 1$ m, $v = 5$ m/s y $\alpha = 10$ m²/s. En negro, la región de estabilidad del método SSPRK3. A la izquierda el esquema SSPRK3. A la derecha el esquema SSPRK3 corregido.

3.5. Método de los volúmenes finitos

El método numérico utilizado para resolver el modelo completo (8) en FireDyn es el método de los volúmenes finitos (FV). Este método se fundamenta en la discretización del dominio espacial en celdas de volumen $\Omega_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ representadas en la Figura 6, donde se resuelve la ecuación diferencial en derivadas parciales, y obtenemos una solución T_i^n promediada en cada celda, que será la solución aproximada de la ecuación original.

El método de volúmenes finitos presenta algunas diferencias conceptuales respecto al método de discretización espacial de diferencias finitas que se ha utilizado anteriormente

- En lugar de discretizar el espacio en una malla de N nodos, en FV el espacio se discretiza en N celdas de volumen, Ω_i , cuyo centro es x_i y las paredes del dominio

de longitud L se denotan por

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = L.$$

- En lugar de obtener una aproximación numérica de la variable en los nodos de una malla, se obtienen las variables promediadas en cada celda $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$.

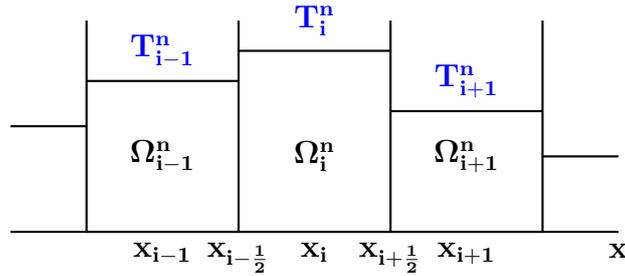


Fig 6: Entorno de la celda de volumen en la posición x_i .

Para resolver numéricamente la ecuación (9) mediante el método FV es conveniente escribir la ecuación en función de flujos

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vT) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0,$$

de tal forma que $F_c = vT$ es el flujo advectivo y $F_D = -\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ es el flujo difusivo,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(F_c + F_D) = 0. \quad (27)$$

Se definen los valores promedio en las celdas de la siguiente forma

$$T_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} T(x, t) dx,$$

con $\Delta x = L/N$. Definimos $F = F_c + F_D$ y se integra la ecuación (27)

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(F) dx.$$

Aplicamos la definición de valor promedio en las celdas y definimos $f_{i-\frac{1}{2}}^*$, $f_{i+\frac{1}{2}}^*$ los flujos numéricos en las paredes de la celda,

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_{i-\frac{1}{2}}^* \right).$$

A continuación, realizamos la integración numérica con el método de Euler explícito

$$T_i^{n+1} - T_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_{i-\frac{1}{2}}^*), \quad (28)$$

y se obtiene una fórmula de actualización de la variable discreta T_i^n en la celda Ω_i . El flujo numérico tiene una parte advectiva y otra difusiva, y depende de los valores de la variable promediada T a cada lado de la pared

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = f_{i+\frac{1}{2}}^*(T_i, T_{i+1}) = f_{C\ i+\frac{1}{2}}^* + f_{D\ i+\frac{1}{2}}^*.$$

Tomamos una discretización tipo upwind para el término advectivo

$$f_{C\ i+\frac{1}{2}}^* \begin{cases} vT_i^n & \text{si } v \geq 0 \\ vT_i^n & \text{si } v < 0, \end{cases}$$

$$f_{D\ i+\frac{1}{2}}^* = -\alpha \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}.$$

Sustituimos los flujos numéricos en la ecuación (28)

$$T_i^{n+1} - T_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(vT_i^n - vT_{i-1}^n - \alpha \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} + k \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} \right),$$

y agrupando términos obtenemos un esquema explícito para la actualización temporal de la variable discreta T_i^n en la celda Ω_i

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{v\Delta t}{\Delta x}(T_i^n - T_{i-1}^n) - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n). \quad (29)$$

Si consideramos la variable promediada en la celda Ω_i como el valor de la variable en el centro de la celda, el resultado anterior, obtenido mediante el método de los volúmenes finitos con una discretización del término advectivo de orden 1, es equivalente a los esquemas numéricos (11), (17) evaluados en este capítulo. Es por esta razón, que las correcciones de la difusión numérica realizadas en los esquemas de diferencias finitas se van a poder utilizar en FireDyn de orden 1 y evaluar las posibles mejoras introducidas por la corrección. En FireDyn los esquemas de bajo orden en el término advectivo 1, 3 producen una difusión numérica importante que va a sobreestimar los fenómenos físicos de difusión térmica y radiativa. Es por ello que se están utilizando los esquemas de órdenes 5, 7 para garantizar buenos resultados y evitar la difusión no física, a cambio de un mayor costo computacional.

4. Análisis de modelo sin combustión

En este capítulo vamos a resolver computacionalmente el modelo de propagación de incendios simplificado para evaluar los resultados del capítulo anterior sobre la ecuación ADR (10)

- La mejora del orden de convergencia de los esquemas numéricos mediante la corrección de la difusión numérica. Buscamos la consistencia de los esquemas numéricos con la solución analítica de la ecuación ADR.
- Aplicar los resultados de estabilidad basados en el número CFL (19) para garantizar la estabilidad del esquema y, además, utilizar el paso temporal Δt que optimice el coste computacional.

4.1. Corrección numérica en esquemas de bajo orden

Consideramos el modelo completo (8) en una dimensión sin combustión ($A = 0$) y asumimos $k_t(T) = k = 10 \text{ kW m}^{-1}\text{K}^{-1}$ constante. La ecuación resultante es la ecuación ADR analizada en el capítulo anterior

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta(T - T_\infty) \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (30)$$

donde $\alpha = k/(\rho_0 c) = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ y $v = 5 \text{ m/s}$. Por simplicidad se toma $\beta = h/(\rho_0 c) = 0$ ya que la ecuación (10) se reduce mediante el cambio de variable descrito en el capítulo anterior a (9). Las condiciones inicial y de contorno se toman de forma que la solución analítica del problema es

$$T(x, t) = 300 + \frac{100}{\sqrt{1 + 0.004\alpha t}} \exp\left(-\frac{0.001(x - x_0 - vt)^2}{1 + 0.004\alpha t}\right) \exp(-\beta t), \quad (31)$$

donde $x_0 = 250 \text{ m}$ y considerando un dominio $\Omega = [0, 1000]$. Así, la condición inicial $T(x, 0)$ es una función gaussiana

$$T(x, 0) = 300 + 100 \exp(-0.001(x - x_0)^2).$$

Conocida la solución analítica, $T(x, t)$, del modelo sin combustión (30) vamos a determinar el orden de convergencia de los esquemas numéricos de diferencias finitas y Runge-Kutta. Discretizamos el dominio espacial en N celdas del mismo tamaño, Ω_i , y haremos uso de la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$ para determinar los errores numéricos máximos de los métodos numéricos considerados. Seguiremos los siguientes pasos:

1. Escogemos un conjunto de $r = 8$ mallas de diferentes tamaños tal que el número de celdas de cada una es

$$N_j = N_0 \cdot 2^{j-1}$$

con $j = 1, \dots, 8$ y $N_0 = 80$, el número de celdas de la malla inicial. Por lo tanto, evaluaremos los esquemas en mallas de 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240 puntos.

2. Para las r mallas calculamos la solución numérica en un tiempo final, t_f .
3. Para las r mallas evaluamos la solución analítica (31) en todos los puntos.
4. Calculamos la norma infinito del error entre la solución numérica y analítica de los pasos 2 y 3.

$$\varepsilon_{N_j} = \|u_i^{t_f} - u(x_i, t_f)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq N_j+1} |u_i^{t_f} - u(x_i, t_f)|$$

5. Calculamos el orden de convergencia para cada pareja de mallas, M_j, M_{j-1} , con la siguiente fórmula:

$$o_j = \frac{\log\left(\frac{\varepsilon_{N_{j-1}}}{\varepsilon_{N_j}}\right)}{\log(2)}$$

Para el esquema SSPRK3, utilizamos un $CFL = 1.2$, un tiempo final $t_f = 60$ y los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1.

Cuadro 1: Esquema SSPRK3. Orden de convergencia calculado para cada pareja de mallas y norma infinito del error.

Número de celdas	Errores máximos	Orden de convergencia
80	24.340	-
160	16.898	0.527
320	10.654	0.665
640	6.198	0.782
1280	3.383	0.873
2560	1.776	0.931
5120	0.911	0.963
10240	0.461	0.981

Vemos que el orden de convergencia tiende a 1 a medida que $\Delta x \rightarrow 0$.

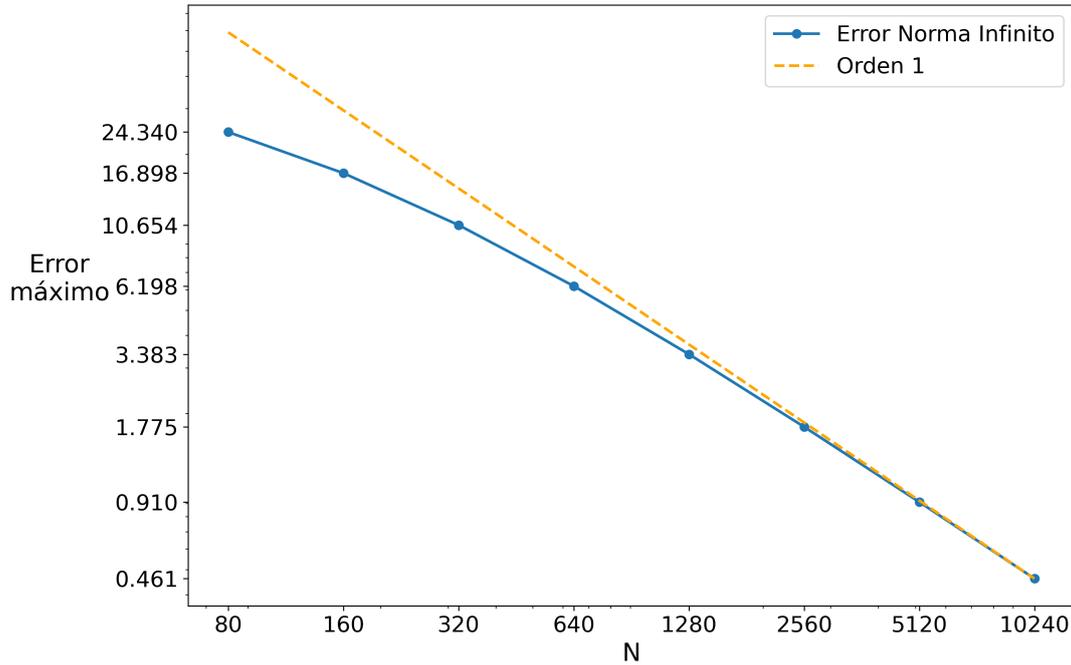


Fig 7: En azul, la evolución del error con el número de nodos en un gráfico log-log. En amarillo, la región asintótica de convergencia de orden 1.

En la Figura 7 se observa la evolución del error del esquema SSPRK3 con el número de nodos de la malla. El esquema es consistente con la solución analítica de la ecuación original de advección-difusión y tenemos orden 1 de convergencia. Por otro lado, si consideramos el mismo esquema SSPRK3 con la corrección de la difusión numérica, con el coeficiente de difusión corregido

$$D = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha - \frac{v}{2}\Delta x \leq 0 \\ \alpha - \frac{v}{2}\Delta x & \text{si } \alpha - \frac{v}{2}\Delta x > 0, \end{cases}$$

obtenemos los órdenes de convergencia que aparecen en la Tabla 2

Cuadro 2: Esquema SSPRK3 con corrección. Orden de convergencia calculado para cada pareja de mallas y norma infinito del error.

Número de celdas	Errores máximos	Orden de convergencia
80	2.101E+01	-
160	9.244	1.184
320	1.828	2.338
640	5.449E-01	1.746
1280	1.523E-01	1.832
2560	4.094E-02	1.902
5120	1.062E-02	1.947
10240	2.706E-03	1.972

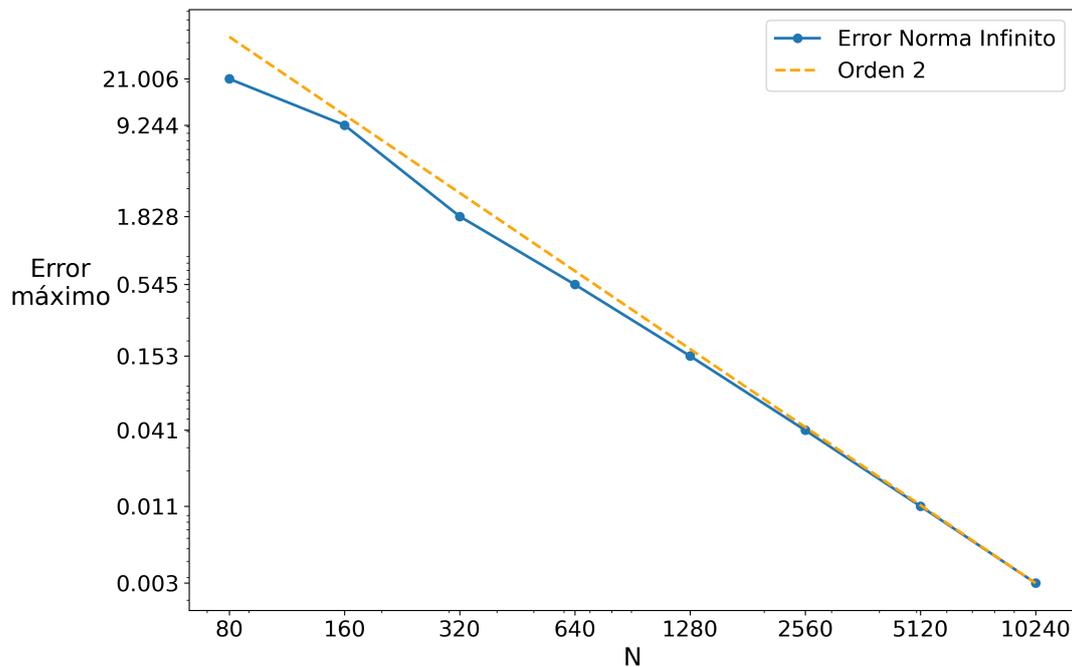


Fig 8: En azul, la evolución del error con el número de nodos en un gráfico log-log. En amarillo, la región asintótica de convergencia de orden 2.

Los resultados de esta tabla muestran que el orden de convergencia tiende a 2 a medida que $\Delta x \rightarrow 0$. En la Figura 8 se observa el comportamiento del error del esquema numérico SSPRK3 corregido en función del número de nodos de la malla. El esquema numérico es consistente con la solución analítica de la ecuación de advección-difusión. En la Figura 9 comparamos la evolución del error de ambos esquemas numéricos con el número de nodos en la malla. Se observa que los errores del método corregido son mucho menores. En la Figura 10 se compara la solución numérica de ambos esquemas SSPRK3. No hemos tomado

una malla más densa para poder ver diferencias significativas entre ambos modelos y la solución analítica. A partir de estos resultados podemos concluir que el esquema corregido aproxima mejor la solución analítica.

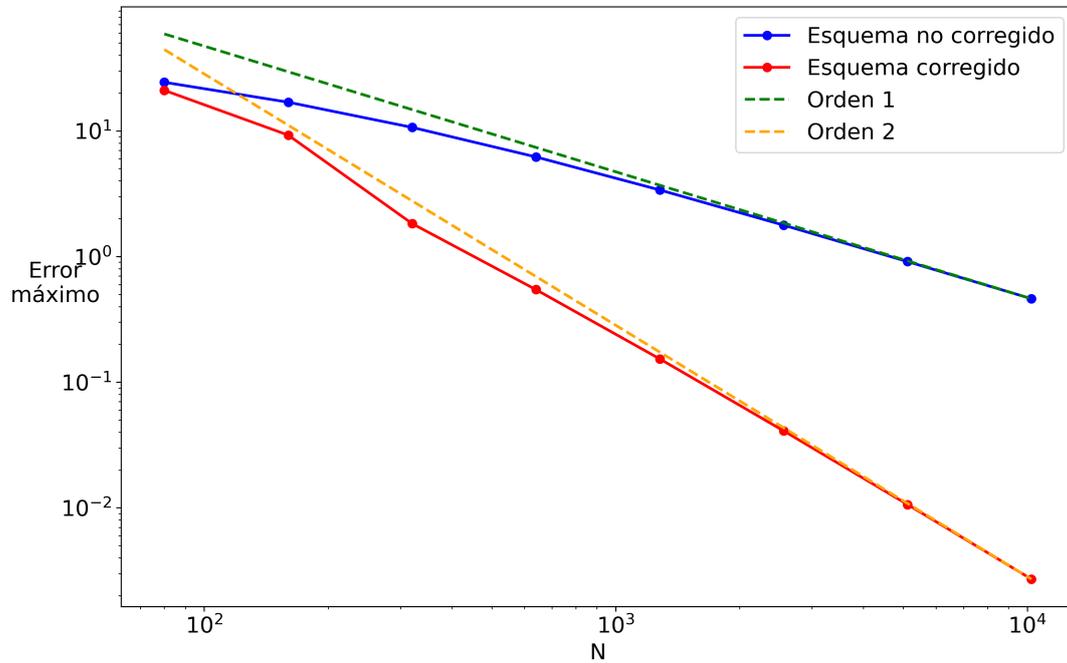


Fig 9: Aproximación a las regiones asintóticas de convergencia de orden 1 y 2 de los esquemas SSPRK3 y SSPRK3 corregido.

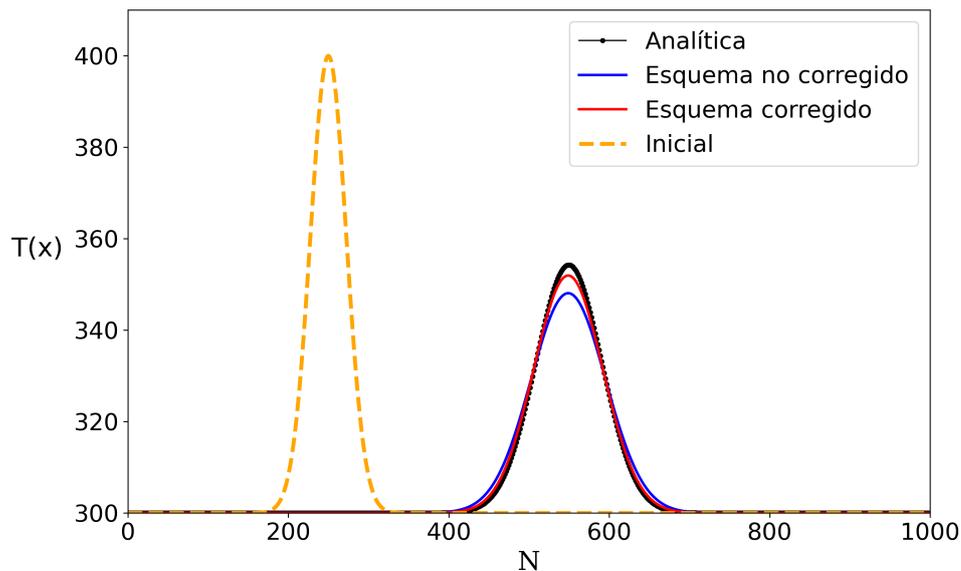


Fig 10: Solución de la ecuación de convección-difusión para un tiempo $t = 60 s$, $CFL = 1.2$, $N = 640$, en un dominio de longitud $L = 1000$, mediante los esquemas SSPRK3 y SSPRK3 corregido.

Realizamos el mismo análisis de convergencia para el esquema de diferencias finitas (11) aplicado a la ecuación de advección-difusión. Tomamos un $CFL = 1$, un tiempo final $t_f = 60$ y seguimos los seis pasos indicados anteriormente. El orden de convergencia para cada pareja de mallas es

Cuadro 3: Esquema DF. Orden de convergencia calculado para cada pareja de mallas y norma infinito del error.

Número de celdas	Errores máximos	Orden de convergencia
80	9.756	-
160	8.702	0.165
320	6.787	0.359
640	4.673	0.539
1280	2.876	0.700
2560	1.626	0.823
5120	0.869	0.903
10240	0.450	0.949

De nuevo, el orden de convergencia tiende a 1 a medida que $\Delta x \rightarrow 0$. El esquema es consistente con la solución analítica de la ecuación de advección difusión. Considerando el esquema de diferencias finitas con el coeficiente de difusión corregido, obtenemos una mejora en el orden de convergencia del esquema corregido. Vemos que el orden de convergencia tiende a 2 a medida que $\Delta x \rightarrow 0$. En la Figura 11 se compara la evolución del error de ambos esquemas de diferencias finitas en función del número de nodos de las mallas y observamos que, los errores del esquema corregido son mucho menores.

Cuadro 4: Esquema DF con corrección. Orden de convergencia calculado para cada pareja de mallas y norma infinito del error.

Número de celdas	Errores máximos	Orden de convergencia
80	6.213	-
160	2.336	1.411
320	7.975E-01	1.551
640	2.466E-01	1.693
1280	7.039E-02	1.809
2560	1.898E-02	1.891
5120	4.944E-03	1.941
10240	1.263E-03	1.969

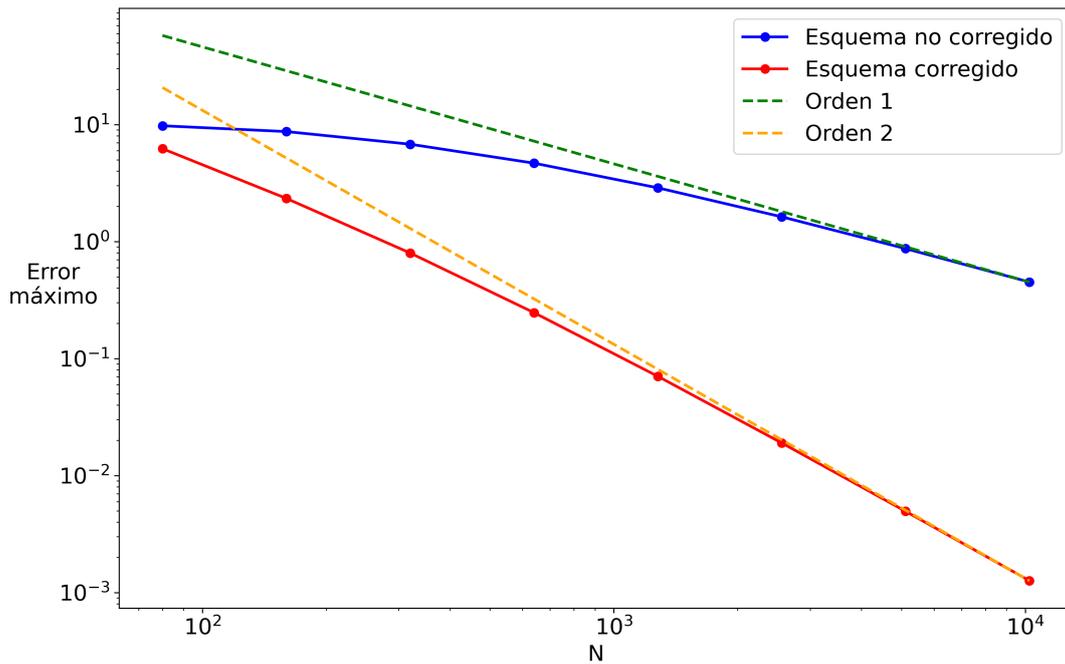


Fig 11: Aproximación a las regiones asintóticas de convergencia de orden 1 y 2 de los esquemas DF y DF corregido.

4.2. Corrección numérica en FireDyn

Para evaluar la corrección de la difusión numérica en la implementación FireDyn, que utiliza el método SSPRK3 para la integración temporal, consideramos el modelo sin combustión tomando el parámetro $A = 0$. De esta forma reducimos el problema a la ecuación ADR (30) con condición inicial y solución analítica conocidas (4.1). Realizamos diferentes simulaciones manteniendo los parámetros del modelo constantes, pero cambiando el orden del esquema de advección (1, 3, 5, 7). Los parámetros utilizados en esta simulación se encuentran recogidos en la columna Sim.2 de la Tabla 6.

En las Figuras 12 y 13 se muestran los resultados de las simulaciones con FireDyn. Se observa que un esquema de orden 1 presenta un comportamiento difusivo muy superior a la solución analítica del problema, esto se debe a la difusión no física introducida por el esquema numérico. Con la corrección implementada en este trabajo se puede mejorar considerablemente la consistencia del esquema numérico con la solución analítica del problema físico que hemos planteado. Un esquema de orden 1 con la corrección, presenta resultados muy similares a la solución analítica y a los que se obtiene con un esquema de orden 3 o superior.

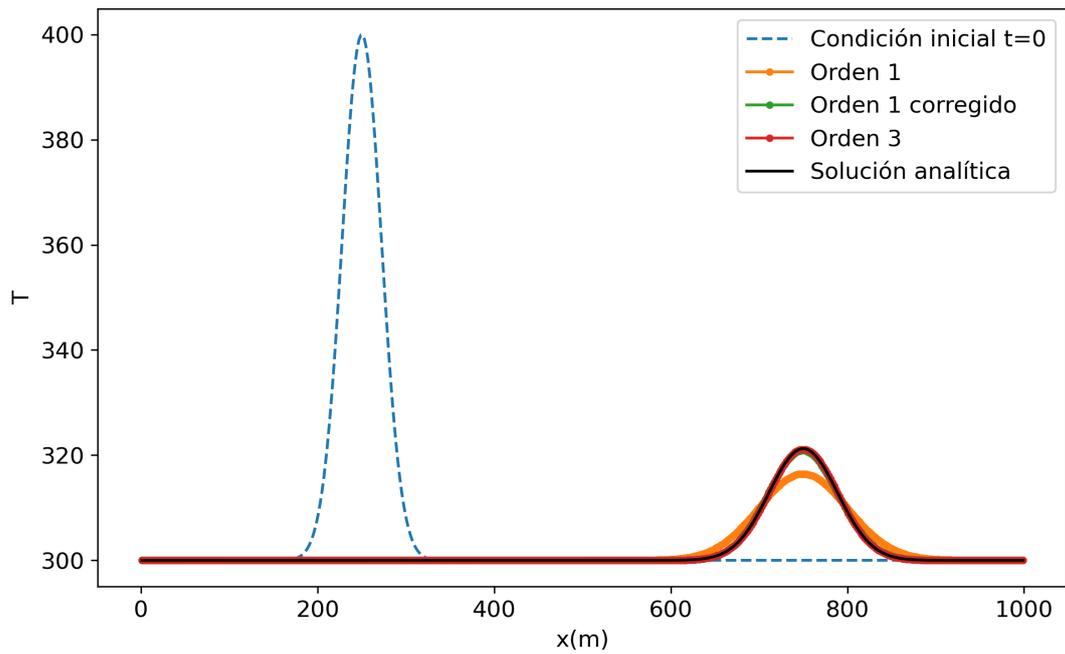


Fig 12: Resultados de los esquemas de orden 1, 3 sin corrección y orden 1 con corrección en $t = 100$ s para una velocidad $v = 5$ m/s. En negro la solución analítica.

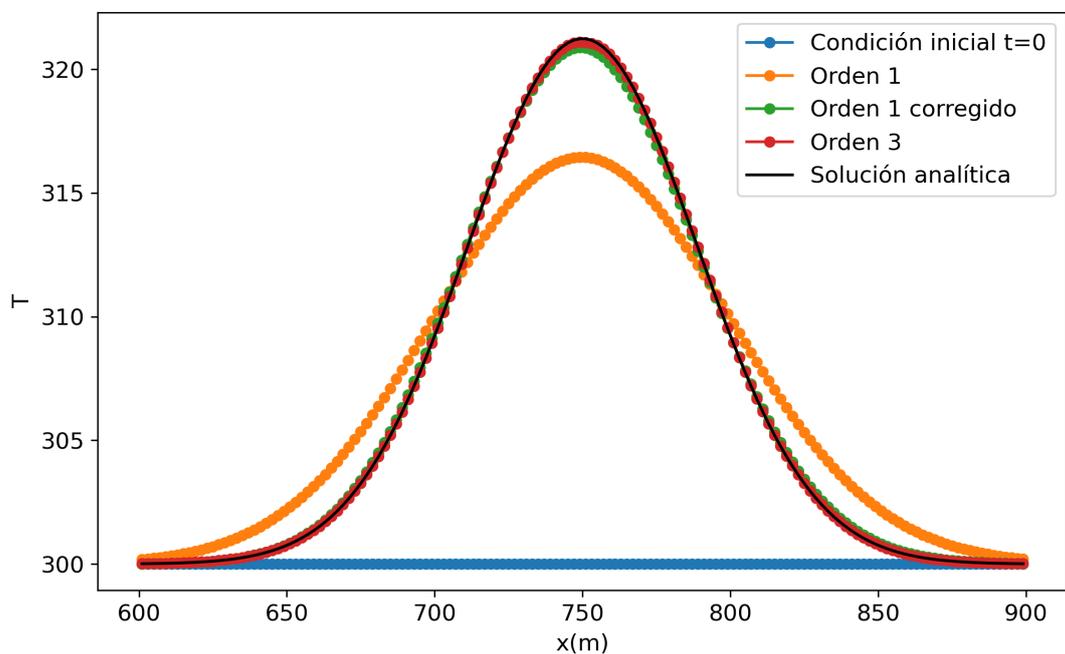


Fig 13: Resultados de los esquemas de orden 1, 3 sin corrección y orden 1 con corrección en $t = 100$ s para una velocidad $v = 5$ m/s. En negro la solución analítica.

5. Análisis del modelo completo

En los capítulos previos hemos introducido únicamente los parámetros físicos que intervienen en los procesos de advección, difusión y reacción. Además de estos, se han implementado en FireDyn parámetros adicionales relacionados con el entorno en el que se produce el incendio, la topografía y el tipo de biomasa. Algunos de estos parámetros son: el ratio entre madera viva y muerta, el contenido en agua de la biomasa, la porosidad volumétrica, etc. Estos parámetros adicionales no intervienen en la modelización matemática del incendio ni en la elección de esquemas numéricos, aunque los resultados de las simulaciones dependen de ellos. Por ello, se han mantenido constantes en todas las simulaciones realizadas en el trabajo.

En este capítulo se presentan algunos resultados numéricos 1D de FireDyn aplicado al modelo completo (8). Estos resultados combinan los procesos físicos de combustión, advección, difusión, convección natural e influyen los parámetros físicos adicionales ya mencionados.

5.1. Resultados de FireDyn

El proceso de advección en un incendio se produce por el movimiento del aire caliente, es decir, por el viento. El viento es un factor determinante durante el transcurso de los incendios forestales, siendo el principal factor que determina la velocidad y dirección de la propagación de los incendios. Por ello, la velocidad de advección, v , es un parámetro fundamental para entener la dinámica del fuego. La velocidad de advección es siempre menor que la velocidad del viento, por lo que sería necesario un factor de corrección [14]. Por simplicidad vamos a considerar que el parámetro v del modelo es la velocidad del viento.

Cuando la temperatura en el dominio de estudio supera la temperatura de combustión T_{comb} , se activa el término $s(T)$ y se libera energía de la combustión de biomasa Y . Debido al aumento de la temperatura por el proceso de combustión y la difusión del calor, el modelo completo presenta dos frentes de onda, propagándose en direcciones opuestas con diferente amplitud y velocidad de propagación. Se han considerado condiciones de contorno periódicas y la siguiente condición inicial

$$T(x) = \begin{cases} 670 & \text{si } x \in [220, 280], \\ 300 & \text{si } x \notin [220, 280]. \end{cases}$$

con la temperatura expresada en grados kelvin y el dominio espacial en metros. El gráfico superior de la Figura 14 muestra los frentes de onda para diferentes tiempos t y una velocidad del viento $v = 0.04$ m/s. El gráfico inferior de la Figura 14 muestra la evolución de la biomasa $Y \in [0, 1]$. Se observa que, al reducirse la fracción de biomasa disponible, la temperatura disminuye debido a los procesos de convección y difusión del calor. La Figura 15 muestra la evolución de las dos variables del modelo $T(x, t), Y(x, t)$ en un punto del dominio $x = 350.625$ m. Vemos que se produce un pico de temperatura durante el proceso de combustión de la biomasa, ya que se libera una gran cantidad de calor. Los parámetros utilizados en esta simulación se encuentran recogidos columna Sim.1 de la Tabla 6.

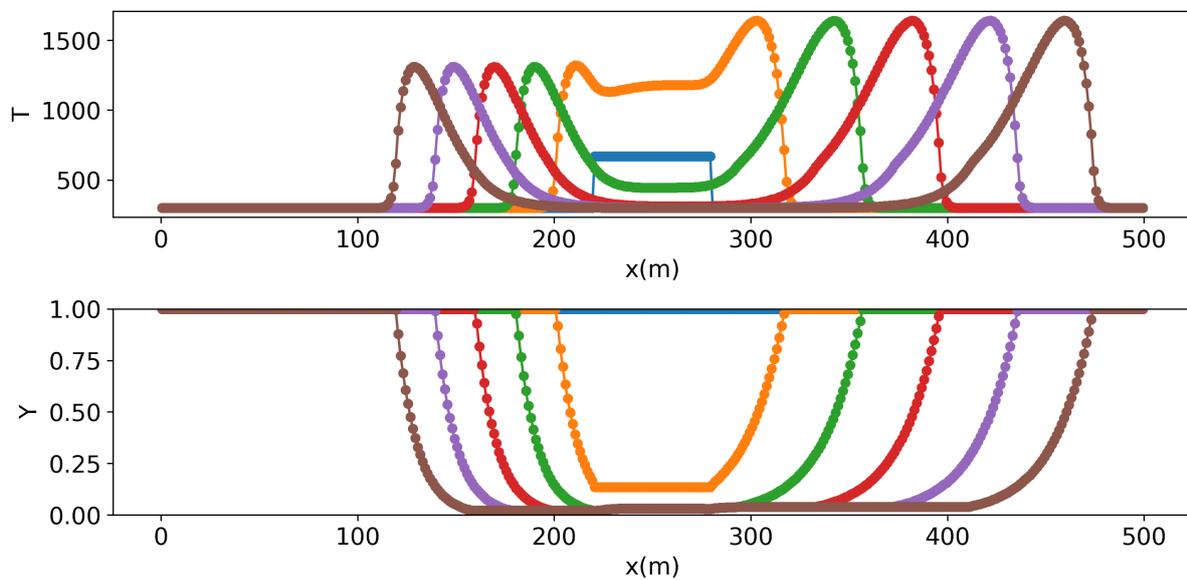


Fig 14: Temperatura (arriba) y biomasa (abajo) en el dominio para $t = 200, 400, 600, 800, 1000$ s, una velocidad del viento $v = 0.04$ m/s. En azul, la condición inicial.

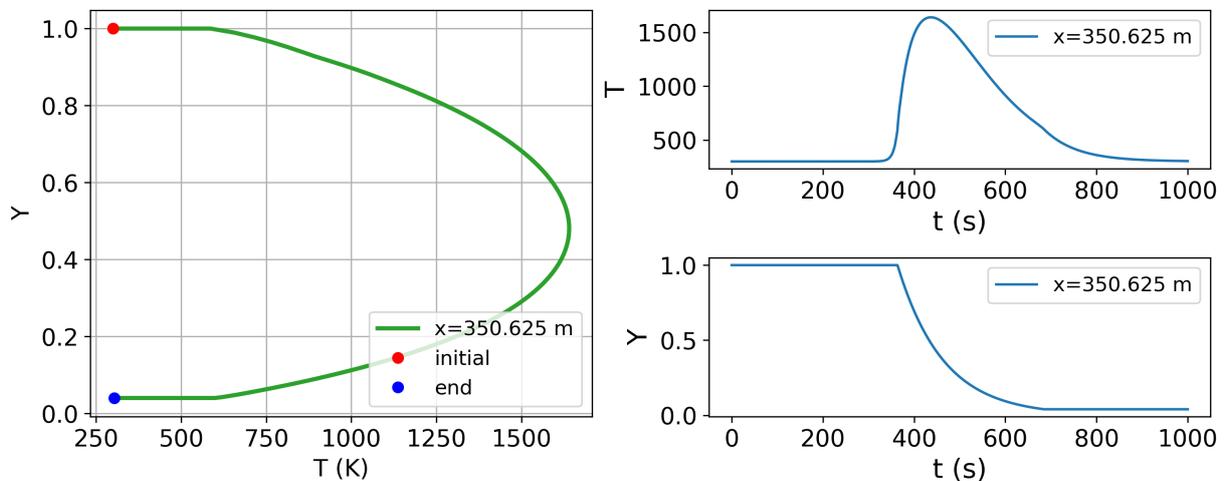


Fig 15: Evolución de las variables del modelo T, Y en $x = 350.625$ m.

La Figura 16 muestra la dinámica del incendio para diferentes valores de la velocidad del viento en $t = 600$ s. Es interesante observar que los frentes de onda en direcciones opuestas tienen la misma amplitud y velocidad de propagación en ausencia de viento. A mayor velocidad del viento, la amplitud y velocidad de propagación del frente que se desplaza en sentido opuesto disminuye, mientras que el frente que se propaga en el sentido del viento aumenta en amplitud y velocidad de propagación. También, existe una velocidad límite, en nuestra simulación $v = 0.07$ m/s, a partir de la cual ya no tenemos propagación del incendio en la dirección opuesta del viento.

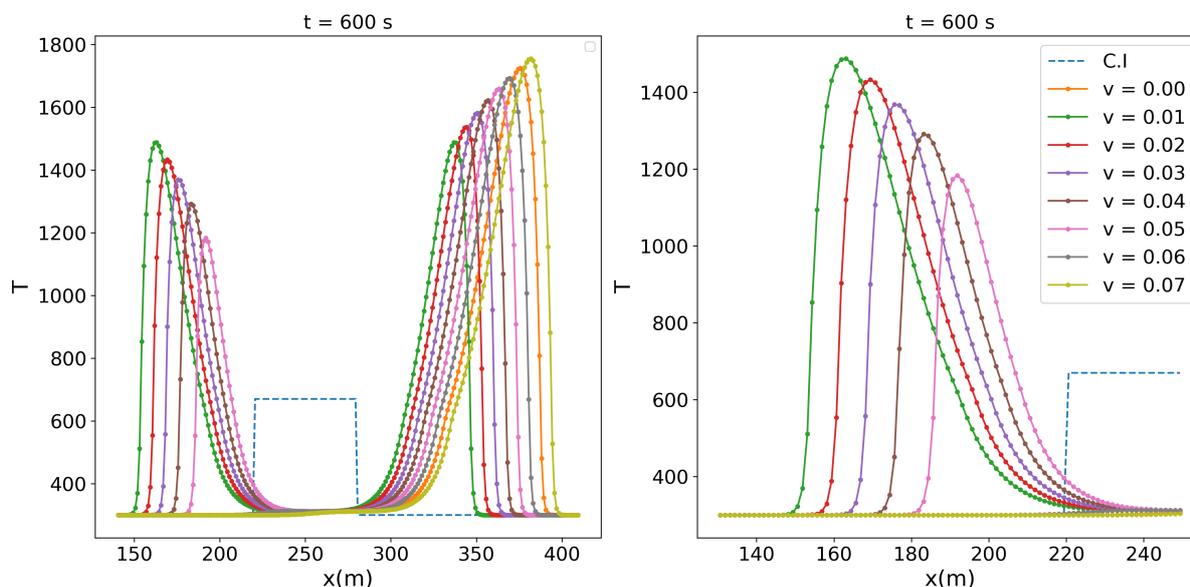


Fig 16: A la izquierda, frentes de onda para distintas velocidades del viento. A la derecha, el frente del incendio en la dirección opuesta al viento.

5.2. Corrección numérica en FireDyn

Consideramos la corrección de la difusión numérica del esquema SSPRK3 (3.2) en la implementación de FireDyn, esta vez utilizando el modelo completo. Realizamos diferentes simulaciones manteniendo los parámetros del modelo constantes, pero cambiando el orden del esquema de advección (1, 3, 7). Los parámetros utilizados en esta simulación se encuentran recogidos en la columna Sim.3 de la Tabla 6. En la Figura 17 se muestra la condición inicial y dos frentes de ondas en un tiempo $t = 800$ s que se propagan en sentido opuesto. Se observan diferencias significativas para el mismo frente de ondas calculado con esquemas de diferente orden.

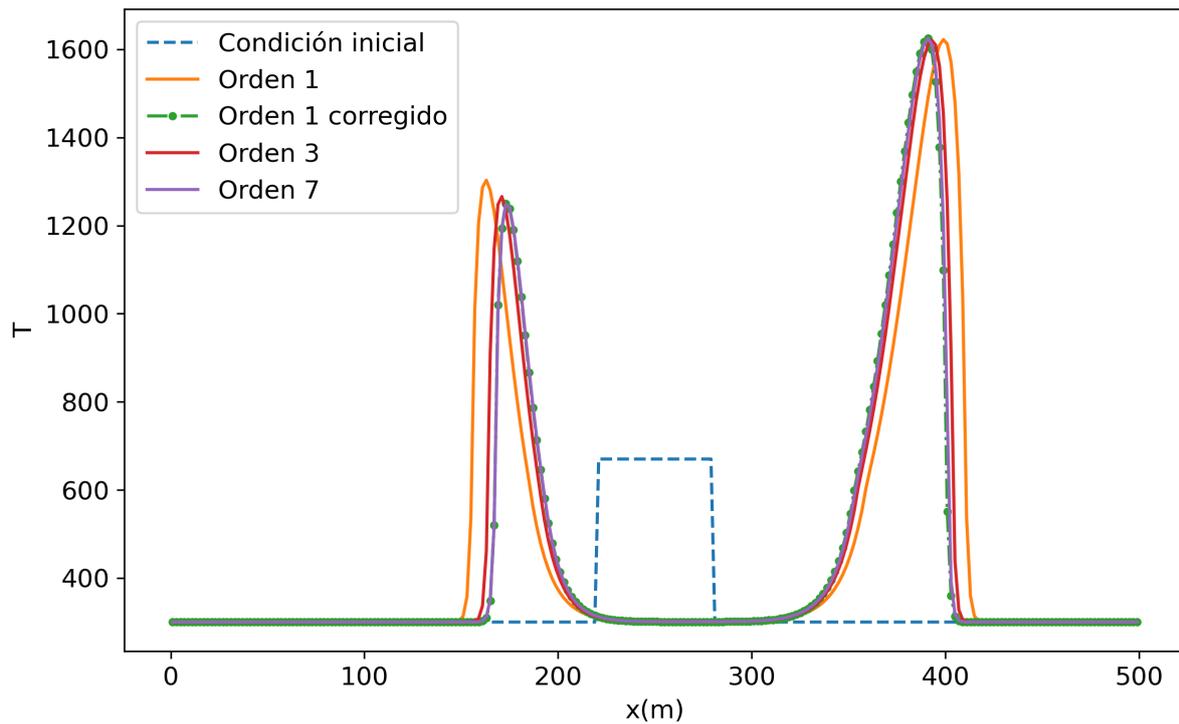


Fig 17: Frentes de onda en $t = 800$ s calculados con esquemas de orden 1, 3, 7 y orden 1 corregido. En azul la condición inicial.

Para el modelo completo con combustión no tenemos una solución analítica conocida, por lo que comparamos los resultados de los esquemas de orden 1,3,5 y orden 1 corregido con el esquema de orden 7, que es el más preciso. Las Figuras 18 y 19 muestran los mismos frentes de onda a escala más reducida. Se observa que el frente de ondas del esquema de orden 1 presenta un desplazamiento muy considerable respecto al esquema de orden 7 y, en menor medida, ocurre lo mismo con el esquema de orden 3. En cambio, el esquema de orden 1 con la corrección numérica planteada en este trabajo presenta un resultado muy bueno, la diferencia respecto al esquema de orden 7 es imperceptible.

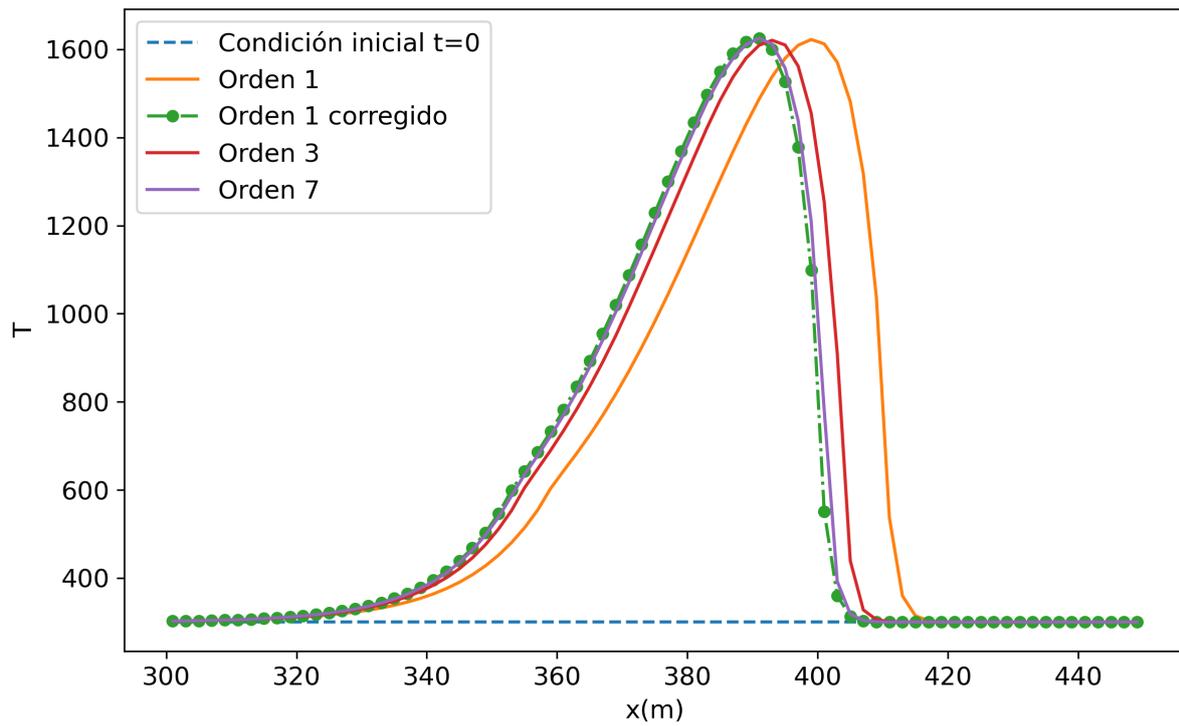


Fig 18: Frente de onda que se propaga en el mismo sentido que el viento. Calculado para esquemas de orden 1, 3, 7 y orden 1 corregido.

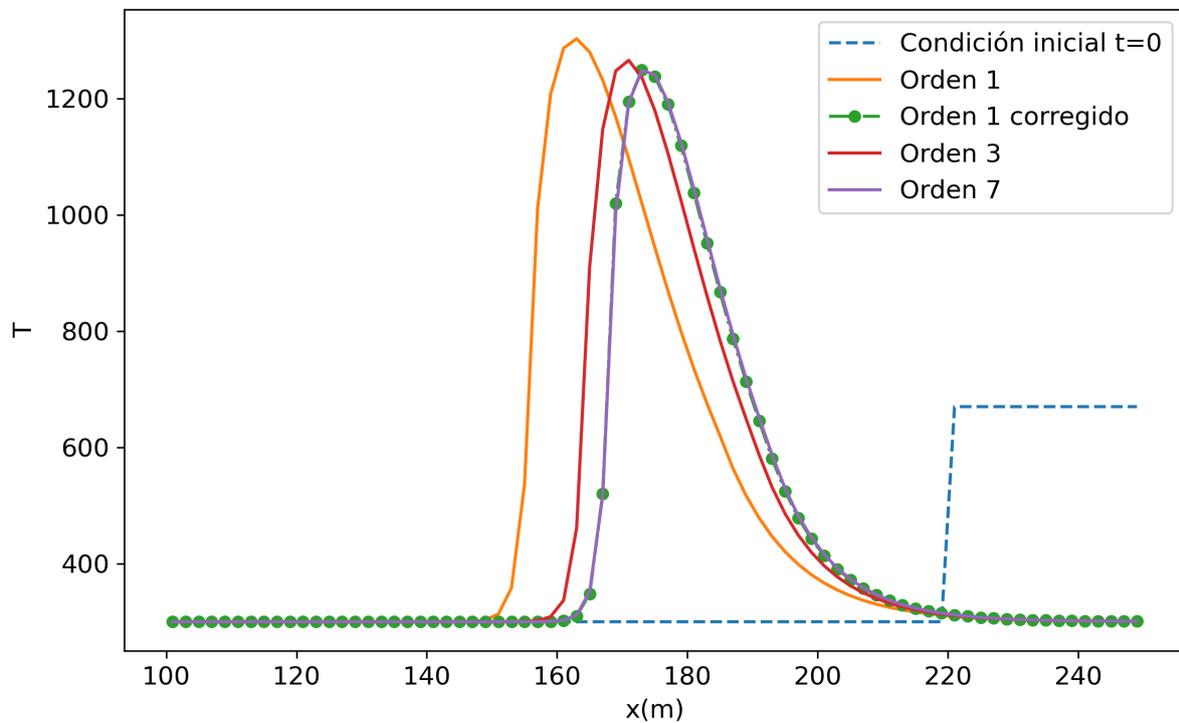


Fig 19: Frente de onda que se propaga en el sentido opuesto al viento. Calculado para esquemas de orden 1, 3, 7 y orden 1 corregido.

Para FireDyn sin combustión, Figuras 12 y 13, la difusión numérica produce un cambio en la amplitud del frente de onda. En cambio, si consideramos el modelo completo, se observa que la difusión numérica provoca un desplazamiento del frente de onda. Es conocido [14] que la difusión numérica introducida por el esquema numérico (29) modifica la velocidad de propagación. Este comportamiento se debe a que la sobreestimación de la difusión física provoca un aumento de temperatura en el entorno del frente de onda y activa el proceso de combustión, aumentando la velocidad de propagación del frente de onda. Las Figuras 18 y 19 muestran claramente que la corrección numérica ha conseguido eliminar la difusión numérica y reducir la velocidad de propagación.

Finalmente, se ha evaluado la eficiencia computacional de un esquema de orden con corrección de la difusión numérica frente a esquemas de orden superior. En la Tabla 5 se observan los resultados, en segundos, promediados en tres simulaciones diferentes.

Cuadro 5: Promedio del tiempo de simulación en segundos, para órdenes de discretización del término advectivo 1, 3, 5, 7 y 1 corregido. Evaluados para diferente número de celdas en un dominio de tamaño $L = 500$.

Orden	500 celdas	1000 celdas	2000 celdas
Orden 1	2.469	13.419	169.294
Orden 1 c	2.497	13.799	183.412
Orden 3	2.885	17.052	195.705
Orden 5	3.185	19.325	212.440
Orden 7	3.437	20.912	219.565

Se observa que los esquemas de alto orden son computacionalmente más costosos que los de bajo orden. Además, estos resultados se han obtenido para un modelo 1D, por lo que un modelo 2D o 3D presentará un número de celdas mucho mayor. Por lo tanto, la implementación de la corrección numérica en el esquema de orden 1 de volúmenes finitos es un método eficiente para la simulación de la dinámica de incendios, alcanzando una precisión comparable a la de los esquemas de orden superior sin incurrir en el alto costo computacional que estos últimos requieren.

A continuación presentamos un resumen de los parámetros utilizados en el modelo, con sus unidades y los valores utilizados en las distintas simulaciones realizadas en el trabajo.

Cuadro 6: Resumen de los parámetros del modelo ADR utilizados en las simulaciones.

Parámetros físicos	Símbolo	Unidades	Sim. 1	Sim. 2	Sim. 3
Difusividad térmica	k	$\text{kW}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$	1	5	0.5
Densidad	ρ_0	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	1	1	1
Calor específico	c	$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	1	1	1
Velocidad de advección	v	m/s	0.04	5	0.03
Factor de combustión	A	s^{-1}	0.01	0.01	0.01
Calor de combustión	H	$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$	4000	4000	4000
Convección natural	h	$\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}\text{K}^{-1}$	0.05	0.01	0.05
Temperatura ambiente	T_∞	K	300	300	300
Temperatura de ignición	T_{comb}	K	600	600	600
Parámetros numéricos					
Dominio	Ω	m	500	1000	500
Orden (1,3,5,7)	-	-	1	1,3	1,3,5,7
CFL	-	-	1	1	1
Celdas	-	-	400	500	250

6. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido implementar una corrección de la difusión numérica del esquema utilizado por el grupo de investigación en FireDyn, con la finalidad de mejorar los resultados de las simulaciones de dinámica de incendios. Para ello, se ha presentado una modelización matemática basada en los fenómenos físicos de advección, difusión, combustión y conducción del calor (8). Y posteriormente se han presentado diferentes métodos numéricos para resolver computacionalmente este modelo.

Se ha planteado un esquema numérico en diferencias finitas en espacio y Euler explícito en tiempo (11) como una primera aproximación al problema, y se ha estudiado la difusión numérica del esquema y su estabilidad. Se ha propuesto una corrección de la difusión no física introducida por el esquema y se ha conseguido corregir el error numérico, mejorando la convergencia del esquema de orden 1 a orden 2. Además, como en FireDyn se utiliza un esquema Runge-Kutta (SSPRK3) (17) para la integración temporal, se ha estudiado la difusión numérica introducida por este esquema y su estabilidad. Los resultados de estabilidad muestran que en los esquemas SSPRK3 se pueden tomar pasos temporales más grandes sin perder la estabilidad. Al igual que para el esquema de diferencias finitas, en SSPRK3 se ha planteado una corrección de la difusión numérica. Se ha conseguido corregir el error numérico, mejorando la convergencia del esquema de orden 1 a orden 2.

FireDyn tiene implementado el método de volúmenes finitos con diferentes órdenes (1, 3, 5, 7) en el esquema del término advectivo, y se ha mostrado que el esquema de volúmenes finitos con orden 1 es equivalente a los esquemas numéricos evaluados en este trabajo (11) y (17). La implementación de la corrección numérica en el esquema de orden 1 de volúmenes finitos demostró ser un método eficiente para la simulación de la dinámica de incendios, alcanzando una precisión comparable a la de los esquemas de orden superior sin incurrir en el alto costo computacional que estos últimos requieren. Esto convierte a la corrección numérica planteada en una herramienta valiosa no sólo para este tipo de simulaciones, sino también para otros campos en los que se simulan procesos de difusión numérica.

Apéndice

A. Estabilidad del esquema de diferencias finitas

Como hemos visto, realizando un análisis de Von Neumann podemos escribir la solución del esquema explícito en diferencias finitas mediante una descomposición modal, siendo los modos los armónico de Fourier. Sustituyendo un modo cualquiera $T_i^n = V^n e^{Ik(i\Delta x)}$ en el esquema de diferencias finitas

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{v\Delta t}{\Delta x} (T_i^n - T_{i-1}^n) + \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n),$$

obtenemos

$$V^{n+1} e^{Ik(i\Delta x)} = V^n e^{Ik(i\Delta x)} \left[1 - v \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-Ik\Delta x}) + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x}) \right].$$

Denotando por $\phi = k\Delta x$, el factor de amplificación \mathcal{M} del esquema satisface.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 - v \frac{\Delta t}{\Delta x} [1 - \cos(k\Delta x) + I \sin(k\Delta x)] + 2 \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} [\cos(k\Delta x) - 1] \\ &= \frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x} [1 - \cos(\phi)] + 2 \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} [\cos(\phi) - 1] - I \frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin(\phi) \\ &= 1 + \frac{\Delta t(v\Delta x + 2\alpha)}{(\Delta x)^2} [\cos \phi - 1] - I \frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin \phi. \end{aligned}$$

La condición de estabilidad se aplica sobre el factor de amplificación para cualquier modo ϕ

$$|\mathcal{M}| \leq 1 \implies \mathcal{M}^2 \leq 1$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}^2 = \left[1 + \frac{\Delta t(v\Delta x + 2\alpha)}{(\Delta x)^2} (\cos \phi - 1) \right]^2 + \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \phi \leq 1$$

Si denotamos $\nu = \frac{v\Delta t}{\Delta x}$ y $\mu = \frac{\Delta t(v\Delta x + 2\alpha)}{2(\Delta x)^2}$, obtenemos

$$\mathcal{M}^2 = (1 - 2\mu + 2\mu \cos \phi)^2 + \nu^2 \sin^2(\phi)$$

Podemos comparar esta expresión con la ecuación paramétrica de una elipse. La condición de estabilidad requiere que esta elipse esté inscrita dentro de la circunferencia unitaria.

Observando que trivialmente se cumple

$$v^2 \leq 2\mu,$$

se puede deducir fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &\leq (1 - 2\mu(1 - \cos \phi))^2 + 2\mu \sin^2 \phi \\ &= 1 + 4\mu^2(1 - \cos \phi)^2 - 2\mu(1 - \cos \phi)^2 \\ &= 1 + 2\mu(2\mu - 1)(1 - \cos \phi)^2. \end{aligned}$$

Por tanto, para que $\mathcal{M}^2 \leq 1$, obtenemos la siguiente condición

$$2\mu \leq 1,$$

es decir,

$$\frac{\Delta t(v\Delta x + 2\alpha)}{(\Delta x)^2} \leq 1.$$

Esta condición se puede escribir en términos del número CFL

$$\Delta t = CFL \frac{(\Delta x)^2}{(v\Delta x + 2\alpha)} \quad \text{con} \quad CFL \leq 1.$$

B. Estabilidad del esquema SSPRK3

Recordamos que el operador espacial de advección-difusión del esquema Runge-Kutta lo habíamos definido sobre la solución T_i^n

$$\mathcal{L}(T_i^n) = -v \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Para mantener la notación utilizada para describir el “método matricial para el análisis de estabilidad”, denominamos por S al operador de discretización espacial definido en (15). Sus valores propios $\lambda(\phi_j)$ y vectores propios asociados $e^{Ik(i\Delta x)}$, indexados por j , satisfacen la ecuación

$$S \cdot e^{Ik_j x} = \lambda(\phi_j) \cdot e^{Ik_j x}.$$

Desarrollando el producto que se encuentra en el primer término de esta expresión

$$\begin{aligned}
S \cdot e^{Ik_j(i\Delta x)} &= -\frac{v}{\Delta x} [e^{Ik_j(i\Delta x)} - e^{Ik_j(i-1)\Delta x}] + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} [e^{Ik_j(i+1)\Delta x} - 2e^{Ik_j i\Delta x} + e^{Ik_j(i-1)\Delta x}] \\
&= -\frac{v}{\Delta x} e^{Ik_j(i\Delta x)} [1 - e^{-Ik_j(\Delta x)}] + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} e^{Ik_j(i\Delta x)} [e^{Ik_j(\Delta x)} - 2 + e^{-Ik_j(\Delta x)}] \\
&= \lambda(\phi_j) e^{Ik_j(i\Delta x)},
\end{aligned}$$

podemos despejar fácilmente $\lambda(\phi_j)$

$$\begin{aligned}
\lambda(\phi_j) &= -\frac{v}{\Delta x} [1 - e^{-Ik_j\Delta x}] + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} [e^{Ik_j\Delta x} - 2 + e^{-Ik_j\Delta x}] \\
&= -\frac{v}{\Delta x} [1 - \cos(\phi_j) + I \sin(\phi_j)] + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} [-2 + 2 \cos(\phi_j)].
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la igualdad de Euler y multiplicando por Δt , deducimos la expresión para los valores propios del operador de discretización espacial que usaremos para representarlos en el plano complejo

$$\lambda\Delta t = \left[\left(-\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right) (1 - \cos(\phi)) + \left(\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (-2 + 2 \cos(\phi)) \right] + I \left[\left(-\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right) \sin(\phi) \right].$$

Bibliografía

- [1] D. M. J. S. Bowman, J. K. Balch, P. Artaxo et al. *Fire in the Earth system*. Science 324 (2009), 481-484. DOI: [10.1126/science.1163886](https://doi.org/10.1126/science.1163886).
- [2] S.P. Harrison, I.C. Prentice, K.J Bloomfield et al. *Understanding and modelling wildfire regimes: an ecological perspective*. Environ. Res. Lett. 16 (2021), 12. DOI: [10.1088/1748-9326/ac39be](https://doi.org/10.1088/1748-9326/ac39be).
- [3] F.Z. Maina y E.R. Siirila-Woodburn. *Watersheds dynamics following wildfiers: non-linear feedbacks and implications on hydrologic responses*. Hydrol. Process 34 (2019), 33-50. DOI: [10.1002/hyp.13568](https://doi.org/10.1002/hyp.13568).
- [4] D. Touma, S. Stevenson, F. Lehner et al. *Human-driven greenhouse gas and aerosol emissions cause distinct regional impacts on extreme fire weather*. Nat. Commun 12 (2021), 212. DOI: [10.1038/s41467-020-20570-w](https://doi.org/10.1038/s41467-020-20570-w).
- [5] A.L. Sullivan. *Wildland and surface fire spread modelling, 1900-2007. 1: Physical and quasi-physical models*. Int. J. Wildland Fire 18(4) (2009), 349. DOI: [10.1071/WF06143](https://doi.org/10.1071/WF06143).
- [6] A.L. Sullivan. *Wildland and surface fire spread modelling, 1900-2007. 2: Empirical and quasi-empirical models*. Int. J. Wildland Fire 18(4) (2009), 369. DOI: [10.1071/WF06143](https://doi.org/10.1071/WF06143).
- [7] M. I. Asensio y L. Ferragut. *On a wildland fire model with radiation*. Int. J. Numer. Methods Eng. 54 (2002), 137-157. DOI: [10.1002/nme.420](https://doi.org/10.1002/nme.420).
- [8] R. Bürger et al. *Exploring a convection–diffusion–reaction model of the propagation of forest fires: computation of risk maps for heterogeneous environments*. Mathematics 8 (2020), 1674. DOI: [10.3390/math8101674](https://doi.org/10.3390/math8101674).
- [9] R. Bürger et al. *Implicit-explicit methods for a convection-diffusion-reaction model of the propagation of forest fires*. Mathematics 8 (2020), 1034. DOI: [10.3390/math8061034](https://doi.org/10.3390/math8061034).

-
- [10] N.V. Baranovskiy y V.A. Kirienko. *Mathematical simulation of forest fuel pyrolysis and crown forest fire impact for forest fire danger and risk assessment*. Processes 10.3 (2022), 483. DOI: [10.3390/pr10030483](https://doi.org/10.3390/pr10030483).
- [11] M. I. Asensio, L. Ferragut y J. Simon. *A convection model for fire spread simulation*. Appl. Math. Lett. 18 (2005), 673-677. DOI: [10.1016/j.aml.2004.04.011](https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.04.011).
- [12] P. Grasso y M. S. Innocente. *Physics-based model of wildfire propagation towards faster-than-real-time simulations*. Comput. Math. App. 80 (2020), 790-808. DOI: [10.1016/j.camwa.2020.05.009](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.05.009).
- [13] J. Mandel et al. *A wildland fire model with data assimilation*. Math. Comput. Simul. 79.3 (2008), 584-606. DOI: [10.1016/j.matcom.2008.03.015](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.03.015).
- [14] A. Navas-Montilla, C. Reisch e I. Özgen-Xian. *Analytical and numerical insights into wildfire dynamics: Exploring the advection–diffusion–reaction model*. Comp. and Math. Appl. 158 (2024), 179-198. DOI: [10.1016/j.camwa.2024.01.024](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.01.024).
- [15] Adrian Navas-Montilla e Isabel Echeverribar. *CAELUM: An academic high-order finite-volume solver for the compressible Euler equations and related problems*. Ver. 1.0.0. URL: <https://github.com/navasmontilla/CAELUM>.
- [16] S. Gottlieb, C. W. Shu y E. Tadmor. *Strong stability-reserving high order time discretization methods*. SIAM Review 43 (2001), 89-112.
- [17] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. Elsevier, 2007.