Universidad de Oviedo

TRABAJO FIN DE GRADO

Un recorrido integral

Autor:
Alberto Caldera Morante

Tutor:
Antonio Martínez Abejón

Grado en Matemáticas

25 de julio de 2024

Agradecimientos

Muchas gracias a mi tutor, Antonio Martínez Abejón. Por su tiempo y dedicación para que el trabajo saliera adelante.

A mis padres y a mi hermano, por su cariño y guía.

A Marta, por su paciencia infinita y apoyo incondicional.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Reseña histórica

Según se describe en [26], el origen de la integración se remonta a más de dos mil años, cuando los griegos intentaban resolver problemas de cálculos de áreas de figuras geométricas como el círculo. Su idea se fundamentaba en que el área encerrada por ciertos tipos de curvas podía aproximarse mediante rectángulos o polígonos, cuya área era fácil de computar. Paulatinamente, este método se fue transformando en lo que a día de hoy se conoce como el Cálculo Integral, cuyas aplicaciones han sido fundamentales en el desarrollo de la ciencia tal y como la conocemos. Esta nueva corriente fue impulsada en el siglo XVII por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), considerados los padres del Cálculo Diferencial e Integral. Sus enfoques pasaban por entender la integral como una "antiderivada", en el sentido de que para integrar una función f bastaba encontrar una función F tal que $F' = f$, también conocida como primitiva, y definir la integral a partir de la que se conoce como la *fórmula de Newton-Leibniz*: $\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$.

Aunque los esfuerzos de Newton y Leibniz avanzaron significativamente esta nueva rama de las matemáticas, la formalización del concepto de integración vino de la mano de Bernhard Riemann (1826-1866), lo que le valió la cátedra de la Universidad de Gotinga, previamente ostentada por el archiconocido Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Algunos años antes Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) habían interpretado la integral como límite de suma de áreas, pero fueron las ideas de Riemann, junto con las de Jean Gaston Darboux (1842-1917) algunas décadas más tarde, las que aportaron el rigor suficiente para desarrollar una teoría de integración sobre la recta real. Esta integral era capaz de manejar funciones continuas a trozos, aunque rápidamente surgieron ejemplos de funciones más generales que no podían tratarse con su construcción. Además, el límite puntual de funciones integrables no era en general integrable, y la fórmula de

Newton-Leibniz no era válida para cualquier función derivable, existiendo incluso funciones con derivada acotada que no eran integrables en el sentido de Riemann, tal y como probó Vito Volterra (1860- 1940).

Estas deficiencias de la integral de Riemann estimularon la búsqueda de un concepto de integral más fuerte, que a principios del siglo XX fue liderada por Camille Jordan (1838-1922), con un embrión de la integral de Lebesgue que trabajaba con los conjuntos medibles Jordan (precursores de los conjuntos medibles de Lebesgue), por Emile Borel (1871-1956), con aportaciones esenciales para el desarrollo posterior de la Teoría de la Medida, y por Henri Lebesgue (1875-1941), que en su tesis *Intégrale, longueur, aire - Integral, longitud, área* de 1902 culminó los esfuerzos de la comunidad matemática de la época. La Teoría de la Medida había llegado para quedarse, permitiendo definir el concepto de integral sobre espacios más exóticos, algo fundamental en el Análisis Matemático Moderno. Sin embargo, esta formulación requería de un gran desarrollo inicial de la Teoría de la Medida, lo que llevó a Percy John Daniell (1889-1946) a construir una teoría de integración en la que los objetos centrales pasaban a ser funcionales lineales sobre retículos vectoriales. Sorprendentemente ambas teorías resultaron ser (en la mayoría de los casos) equivalentes, aunque por la ineludibilidad de la Teoría de la Medida en ámbitos tan fundamentales como la Probabilidad, la integral de Lebesgue se ha mantenido por encima de la de Daniell como la más indicada desde un punto de vista formativo.

La integral de Lebesgue sobre la recta real resolvía con elegancia los problemas de convergencia de funciones integrables, y era capaz de integrar una clase considerablemente más amplia que la integral de Riemann, pero el problema de las primitivas continuaba siendo un quebradero de cabeza para los matemáticos de la época. En la primera mitad del siglo XX se sucedieron numerosos intentos de construir una teoría de integración que resolviera los problemas con las primitivas, pero solo Arnaud Denjoy (1884-1974) y Oskar Perron (1880-1975) fueron capaces de encontrar una solución. Inesperadamente, ambas integrales resultaron ser equivalentes, aunque sus construcciones eran tan técnicas y complejas de entender que en ningún momento se las consideró teorías aptas desde un punto de vista formativo.

No fue hasta la segunda mitad del siglo XX, cuando Jaroslav Kurzweil (1926-2022) descubrió una sencilla generalización de la integral de Riemann que coincidía con la integral de Denjoy-Perron, y que denominó la *integral gauge*. De forma independiente, Ralph Henstock (1923-2007) introdujo en 1961 una integral similar que extendía la teoría desarrollada por Kurzweil, razón por la cual se la conoce a día de hoy como la integral de Henstock-Kurzweil. Esta integral generalizaba a la de Lebesgue sobre la recta real y resolvía el problema de las primitivas, permitiendo *integrar cualquier* *derivada*. Además, su elegancia, poderío y sencillez, ha provocado que en las últimas décadas muchos matemáticos aboguen por incorporarla en los primeros cursos de Cálculo y Análisis, sustituyendo así a la integral de Riemann.

1.2. Desarrollo del trabajo

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es aportar una discusión completa de las teorías de integración más destacadas sobre la recta real, así como estudiar su relación con la derivación en cada una de ellas. Analizaremos los atributos que esperamos de toda teoría de integración relevante, como son ciertas propiedades de retículo y linealidad, una buena relación con la derivación y que generalice a Riemann (o Riemann-Stieltjes). Además, dado que la extensión de este trabajo está bien acotada, nos limitaremos a desarrollar las integrales más fundamentales y de exposición más sencilla, dejando por tanto de lado integrales como la de Denjoy-Perron o Denjoy–Khinchin, así como otras construcciones como la de Jordan, que no llegó a ampliar el campo de acción de Riemann, y por tanto no es esencial en la discusión de este trabajo.

En el primer capítulo estudiaremos la integral de Riemann sobre un intervalo compacto, así como el desarrollo equivalente de Darboux. Además, repasaremos algunas de sus generalizaciones, como la integral impropia de Riemann o la integral de Riemann-Stieltjes, cuya relación con las funciones de variación acotada nos permitirán probar el Teorema de Representación de Riesz.

En el segundo capítulo repasaremos la integral de Lebesgue, introduciendo antes algunos conceptos básicos de la Teoría de la Medida. Discutiremos dos métodos distintos de construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$: el de Borel mediante inducción transfinita y el archiconocido método de extensión de Carathéodory. Además, construiremos explícitamente la integral de Lebesgue en su contexto más general, aunque finalmente nos limitaremos a estudiar la relación entre la integral de Lebesgue sobre la recta real y la integral de Riemann.

En el tercer capítulo nos sumergiremos en el método de Daniell para la extensión de integrales. Con el objetivo de estudiar la equivalencia entre la integral de Lebesgue sobre la recta real y la integral de Daniell, desarrollaremos antes la construcción de Daniell desde un punto de vista más general, similar a como se hizo para la integral de Lebesgue. Demostraremos el conocido Teorema de Stone-Daniell y plantearemos algunas cuestiones que no se llegan a desarrollar en la literatura, aportando así resultados *originales*. Por último, discutiremos la construcción de la integral de Daniell sobre la recta real, y una construcción de la integral de Lebesgue que, aunque utiliza herramientas de la Teoría de la Medida, tiene el enfoque funcional característico de la integral de Daniell.

En el cuarto capítulo hablaremos de la integral de Henstock-Kurzweil, introduciendo el concepto de calibre y construyendo dicha integral. Discutiremos la validez de los teoremas de convergencia clásicos, así como el Teorema de Hake, que soluciona el problema con las integrales impropias que ni siquiera la integral de Lebesgue fue capaz de tratar. Además, estudiaremos su relación con la integral de Riemann y la integral de Lebesgue sobre la recta real.

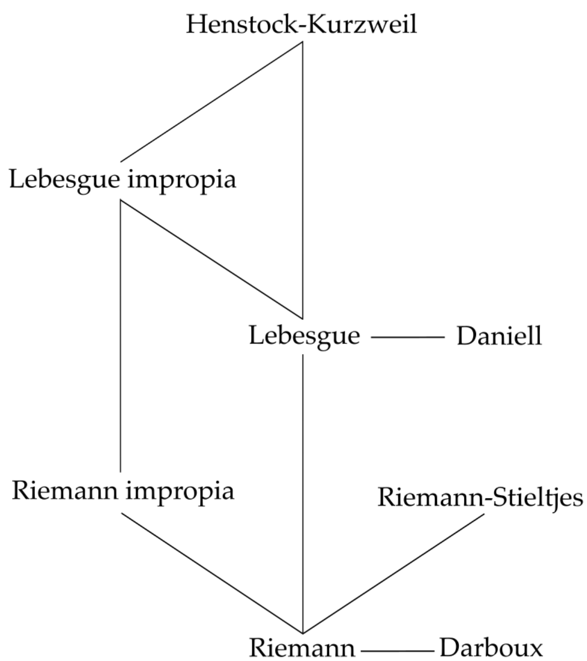

Figura 1.1: Esquema en sentido ascendente de generalidad de las distintas teorías de integración que se desarrollan en este Trabajo de Fin de Grado.

Finalmente, en el último capítulo hablaremos de la relación entre derivación e integración sobre un intervalo compacto. Estudiaremos estos dos conceptos a través de las distintas teorías estudiadas, e intentando responder por el camino dos preguntas fundamentales: ¿cúando se puede derivar la integral? y ¿cúando se puede integrar la derivada?

Capítulo 2

La integral de Riemann

Aunque a día de hoy la teoría de integración de Riemann ha sido opacada por otras teorías más completas y de mayor generalidad, su papel formativo en los primeros cursos de Análisis y su importancia histórica, la convierten en una de las teorías de integración más conocidas en el área de las Matemáticas.

En este capítulo desarrollaremos la construcción de la integral de Riemann sobre un intervalo compacto de la recta real, discutiendo sus propiedades y posibles defectos, así como su relación con la integral de Darboux [28]. Además, estudiaremos la integral impropia de Riemann [10] y la de Riemann-Stieltjes [3][21], a partir de la cual probaremos una versión del Teorema de representación de Riesz utilizando funciones de variación acotada.

2.1. Construcción de la Integral de Riemann

De ahora en adelante $[a, b]$ será un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. El primer paso en la construcción de la integral de Riemann es introducir las particiones de un intervalo.

Definición 2.1.1. Una *partición* de $[a, b]$ es una sucesión finita $\mathcal{P} = \{x_k\}_{k=0}^n$ tal que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Además, se define el *calibre de la partición* como el máximo de las longitudes de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, i.e

$$\operatorname{cal}(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Definición 2.1.2. Una *partición etiquetada* de $[a, b]$ es un conjunto de pares ordenados $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$, donde $\{x_k\}_{k=0}^n$ es una partición de $[a, b]$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $1 \leq i \leq n$. Además, el calibre de una partición etiquetada se define como el calibre de su partición asociada.

Definición 2.1.3. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $[a,b]$. Definimos la *suma de Riemann* de f asociada a la partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ como

$$S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Definición 2.1.4. Una función acotada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es *integrable Riemann* (o *integrable en el sentido de Riemann*) en $[a,b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que

$$|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - A| < \epsilon$$

para cada partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a,b]$ con $\text{cal}(\mathcal{P}_e) < \delta$. Además, en caso de que exista tal valor es fácil comprobar que es único, y se dice que A es la integral de Riemann de f en $[a,b]$, denotándose

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{ó} \quad (\mathcal{R}) \int_a^b f\, dx$$

La clase de todas las funciones integrables-Riemann en $[a,b]$ se denotará $\mathcal{R}([a,b])$.

Nota 2.1.5. En algunos libros se trabaja con la definición anterior eliminando la hipótesis de que f sea acotada. Sin embargo, se prueba más adelante si f es integrable Riemann entonces debe ser acotada, por lo que ambas definiciones son equivalentes.

Una vez se ha construido una integral, parece razonable pensar qué clase de funciones pueden ser integrables. En el caso de la integral de Riemann el siguiente resultado establece que $\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b])$, que además puede verse como un caso particular del Teorema 2.5.10, por lo que lo enunciaremos sin demostración. Además, la inclusión es estricta, tal y como vemos con el Ejemplo 2.1.7.

Teorema 2.1.6. *Toda función continua en $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$.*

Ejemplo 2.1.7. Consideremos la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) = 0$ si $x \in (1,2]$. Claramente $f \notin \mathcal{C}([0,2])$, sin embargo, dado $\epsilon > 0$ cualquiera y una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ de $[0,2]$ tal que $\text{cal}(\mathcal{P}_e) < \epsilon$, se tiene que

$$|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - 1| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = |x_k - 1| = 1 - x_k \leq x_{k+1} - x_k < \epsilon$$

donde $x_k \leq t_k \leq 1 \leq x_{k+1}$. Por tanto $f \in \mathcal{R}([0,2])$ y su integral de Riemann es igual a 1.

2.2. Integral de Darboux

Aunque el anterior es el planteamiento original dado por Riemann, en la asignatura de Análisis Matemático I de la Universidad de Oviedo se introduce el concepto de integral mediante la construcción de Darboux. En esta se toma otro punto de vista de la integral, buscando una aproximación mediante sumas superiores e inferiores.

Definición 2.2.1. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^n$ una partición de $[a, b]$. Definimos la *suma superior (inferior) de Darboux* de f respecto de $\mathcal{P}$ como la suma

$$\overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$
$$\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

donde, para un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se adopta la siguiente notación:

$$M(f, A) \coloneqq \sup\{f(x) : x \in A\} \qquad m_i(f) \coloneqq \text{ínf}\{f(x) : x \in A\}$$

Definición 2.2.2. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. La *integral superior de Darboux* de f sobre $[a, b]$ se define como

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \text{ínf}\{\, \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es una partición de } [a, b]\,\}$$

y análogamente la *integral inferior de Darboux*,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{\, \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es una partición de } [a, b]\,\}$$

Definición 2.2.3. Una función acotada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es *integrable Darboux en* $[a, b]$ si $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$. En tal caso, escribiremos:

$$(\mathcal{D}ar) \int_a^b f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Veamos ahora que la construcción de Darboux y Riemann son equivalentes. Para ello necesitamos el siguiente Lema, que probaremos por completitud.

Lema 2.2.4. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son particiones de $[a, b]$ tal que*

$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, entonces

$$\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) \le \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') \le \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') \le \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P})$$

Además, si B es una cota superior de $|f|$ y la partición $\mathcal{P}'$ contiene m puntos más que $\mathcal{P}$, se verifica que

$$\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) \le 2mB\,\mathrm{cal}(\mathcal{P}), \quad \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) - \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') \le 2mB\,\mathrm{cal}(\mathcal{P})$$

Demostración. La desigualdad $\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') \le \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}')$ es trivial por definición. Probemos entonces que $0 \le \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) \le 2mB\,\mathrm{cal}(\mathcal{P})$. Supongamos el caso $m = 1$, de manera que la partición $\mathcal{P}'$ solo contiene un punto más que $\mathcal{P}$. Por tanto, si $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^n$ entonces $\mathcal{P}' = \{x_0\}_{i=0}^k \cup \{u\} \cup \{x_i\}_{i=k+1}^n$ para algún $k = 1, ..., n-1$ y $x_k < u < x_{k+1}$. Claramente las sumas inferiores de Darboux para $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son las mismas exceptuando los términos involucrando a x_k o x_{k+1}, por lo que se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= m(f,[x_k,x_{k+1}])(u-x_k) + m(f,[x_k,x_{k+1}])(x_{k+1}-u) - m(f,[x_k,x_{k+1}])(x_{k+1}-x_k) \\
&\le m(f,[x_k,u])(u-x_k) + m(f,[u,x_{k+1}])(x_{k+1}-u) - m(f,[x_k,x_{k+1}])(x_{k+1}-x_k) \\
&= \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) = m(f,[x_k,u])(u-x_k) + m(f,[u,x_{k+1}])(x_{k+1}-u) \\
&- m(f,[x_k,x_{k+1}])(x_{k+1}-x_k) \le B(u-x_k) + B(x_{k+1}-u) + B(x_{k+1}-x_k) \\
&= 2B(x_k - x_{k-1}) \le 2B\,\mathrm{cal}(\mathcal{P})
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\mathcal{P}'$ tiene m puntos más que $\mathcal{P}$. Denotemos $\{u_i\}_{i=1}^m$ a dichos puntos y definamos las particiones $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_k = \mathcal{P} \cup \{u_i\}_{i=1}^k$ para cada $k = 1, 2, ..., m$. De esta manera $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_m$ y las particiones $\mathcal{P}_k$,$\mathcal{P}_{k-1}$ se diferencian en un solo elemento, por lo que aplicando el caso anterior se tiene que

$$\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) = \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}_m) - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}_0) = \sum_{k=1}^m \left[\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}_k) - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}_{k-1})\right] \ge 0$$

y de la misma manera se cumple que

$$\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}') - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^m \left[\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}_k) - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}_{k-1})\right] \le \sum_{k=1}^m 2B\,\mathrm{cal}(\mathcal{P}_{k-1}) = 2mB\,\mathrm{cal}(\mathcal{P})$$

Por último, para probar la otra desigualdad basta tener en cuenta que $\overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) = -\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(-f,\mathcal{P})$ para toda partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, y aplicar la desigualdad probada a $-f$. □

Teorema 2.2.5. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable Riemann si y* *solo si es integrable Darboux. Además, en estas condiciones se tiene que*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{D}ar)\int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable Riemann con integral $R \in \mathbb{R}$, y veamos que f es integrable Darboux. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario cualquiera, como f es integrable Riemann existe $\delta > 0$ tal que

$$|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - R| < \epsilon \tag{2.1}$$

para cada partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a, b]$ tal que $\text{cal}(\mathcal{P}_e) < \delta$. Consideremos una partición $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ tal que $\text{cal}(\mathcal{P}) < \delta$. Entonces existen dos sucesiones finitas $\{t_i\}_{i=1}^n$ $\{s_i\}_{i=1}^n$ verificando que

$$f(s_i) - \epsilon \leq m(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq M(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq f(t_i) + \epsilon, \quad x_{i-1} \leq s_i, t_i \leq x_i \tag{2.2}$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$. Por tanto $\mathcal{P}_e^1 = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ y $\mathcal{P}_e^2 = \{[x_{i-1}, x_i], s_i\}_{i=1}^n$ son particiones etiquetadas de $[a, b]$ tal que $\text{cal}(\mathcal{P}_e^1), \text{cal}(\mathcal{P}_e^2) < \delta$, de manera que por (2.1) y (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \overline{\int_a^b} f\,dx - \underline{\int_a^b} f\,dx \leq \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) \\
&\leq \sum_{k=1}^n (f(t_k) + \epsilon)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n (f(s_k) - \epsilon)(x_k - x_{k-1}) \\
&= S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e^1) - R + R - S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e^2) + 2\epsilon(b-a) < 2\epsilon + 2\epsilon(b-a)
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que f es integrable Darboux.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es integrable Darboux con integral $D \in \mathbb{R}$, y veamos que f es integrable Riemann. Dado $\epsilon > 0$, como f es integrable Darboux existe una partición $\mathcal{P}_0$ de $[a, b]$ tal que

$$\overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}_0) - \epsilon/2 \leq D \leq \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}_0) + \epsilon/2$$

Sea m el número de puntos de la partición $\mathcal{P}_0$ y $B > 0$ una cota superior de $|f|$. Definamos $\delta \coloneqq \frac{\epsilon}{4Bm}$ y consideramos una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a, b]$ cualquiera tal que $\text{cal}(\mathcal{P}_e) < \delta$. Claramente $\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) \leq S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P})$, $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$ y la partición $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$ tiene a lo sumo m puntos más que $\mathcal{P}$, por lo que por el Lema 2.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
D - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) &= D - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) + \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) \\
&\leq D - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}_0) + \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P})
\end{aligned}$$

$$\leq \epsilon/2 + 2mB\,\mathrm{cal}(\mathcal{P}) < \epsilon/2 + 2mB\delta = \epsilon$$

de donde se sigue que $\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) > D - \epsilon$. Análogamente se prueba que $\overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) < D + \epsilon$, por lo que

$$D - \epsilon < \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) \leq S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f,\mathcal{P}) < D + \epsilon$$

y

$$|S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}) - D| < \epsilon$$

Por tanto, concluimos que f es integrable-Riemann, y su integral de Riemann es igual a D. $\square$

2.3. Propiedades de retículo y linealidad

Toda teoría de integración debe satisfacer ciertas propiedades básicas de retículo y linealidad. Veamos a continuación algunas de estas propiedades para la integral de Riemann que, como ya que se vieron en el Grado de Matemáticas, enunciaremos sin demostración.

Proposición 2.3.1. *(Linealidad sobre el integrando) Sean $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}([a,b])$, y se cumple además que*

$$(\mathcal{R})\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha\left[(\mathcal{R})\int_a^b f\,dx\right] + \beta\left[(\mathcal{R})\int_a^b g\,dx\right]$$

Proposición 2.3.2. *(Retículo) Sean $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Si $f \leq g$ entonces se tiene que*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f\,dx \leq (\mathcal{R})\int_a^b g\,dx$$

Además, se tiene que $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ y se cumple que

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b f\,dx\right| \leq (\mathcal{R})\int_a^b |f|\,dx$$

Proposición 2.3.3. *(Linealidad sobre el dominio) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$ si y solo si $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$ y $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$, en cuyo caso se tiene que*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f\,dx = (\mathcal{R})\int_a^c f\,dx + (\mathcal{R})\int_c^b f\,dx$$

2.4. Integral Impropia de Riemann

En el contexto de la teoría de la integración sobre $\mathbb{R}$, las integrales impropias constituyen una manera de extender la teoría a dominios o funciones con singularidades. En el caso de la integral impropia de Riemann, se tratan funciones definidas sobre $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $[a,b)$ y $(a,b]$, donde $-\infty < a < b < \infty$. Sin embargo, será suficiente desarrollar esta integral sobre un intervalo de la forma $[a,\infty)$, dado que mediante adecuados cambios de variable cualquier integral impropia puede expresarse de esta manera [10].

Definición 2.4.1. Sea una función $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$. Decimos que *la integral impropia de Riemann de f converge* si $f|_J \in \mathcal{R}(J)$ para cada intervalo compacto $J \subset [a,\infty)$ y existe el límite $\lim_{t\to\infty} \left[(\mathcal{R}) \int_a^t f(x)\,dx\right]$, en cuyo caso definiremos la integral impropia de f como

$$(\mathcal{RI}) \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[(\mathcal{R}) \int_a^t f(x)\,dx\right]$$

Además, denotaremos $\mathcal{R}^l([a,\infty))$ a la clase de funciones con integral impropia de Riemann convergente en $[a,\infty)$.

Nota 2.4.2. Análogamente, se definen las integrales impropias sobre $(-\infty,b]$, $[a,b)$ y $(a,b]$, que denotaremos respectivamente como

$$(\mathcal{RI}) \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \quad (\mathcal{RI}) \int_a^{b^-} f(x)\,dx, \quad (\mathcal{RI}) \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$$

Claramente la integral impropia de Riemann generaliza a la integral de Riemann[1], y además lo hace "estrictamente". Funciones tan elementales como la del Ejemplo 2.4.3 pueden no ser Riemann integrables en un compacto, pero aún así poseer una integral impropia de Riemann convergente. Tal y como veremos en el penúltimo capítulo, esta discrepancia fue una de las motivaciones en el desarrollo de la integral de Henstock-Kurzweil, y fue finalmente solventada con el conocido Teorema de Hake.

Ejemplo 2.4.3. Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para cada $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$. Claramente f no es acotada en $[0,1]$ por lo que $f \notin \mathcal{R}([0,1])$. Sin embargo, como f es continua en $[\epsilon,\eta]$ para cualquier $0 < \epsilon < \eta < 1$, por el Teorema 2.1.6 se sigue que

[1] Esto es consecuencia de la Proposición 2.3.3 y 2.3.2, junto con el hecho de que como f es acotada, al disminuir la longitud del intervalo la integral tiende a 0.

$f \in \mathcal{R}([\epsilon, \eta])$. Además se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[2 - 2\sqrt{\epsilon}\right] = 2$$

por lo que $f \in \mathcal{R}^l([0,1])$.

Aunque la integral impropia de Riemann cumple las propiedades de linealidad y monotonía deseadas, su relación con el valor absoluto no es tan elemental como en la integral de Riemann. Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 2.4.4. Sea $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la integral impropia de Riemann de f *converge absolutamente* si la integral impropia de Riemann de $|f|$ converge.

Nota 2.4.5. Dada una función f denotaremos $f^+ = \max\{0, f\}$ y $f^- = \min\{0, f\}$. Por tanto, se tiene que $f = f^+ + f^-$ y $|f| = f^+ - f^-$.

Proposición 2.4.6. *Sea $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_J \in \mathcal{R}(J)$ para cada intervalo compacto $J \subset [a, \infty)$. Si la integral impropia de f converge absolutamente, entonces la integral impropia de f converge.*

Demostración. Claramente $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ para cada $x \geq a$, por lo que para todo $R > 0$ se tiene que

$$0 \leq (\mathcal{R}) \int_a^R f^+(x)\, dx \leq (\mathcal{R}) \int_a^R |f(x)|\, dx \leq (\mathcal{R}) \int_a^\infty f^+(x)\, dx < \infty$$

De esta manera se tiene que la integral de f^+ vista como función de R es creciente y acotada, por lo que debe converger. Entonces $f^+ \in \mathcal{R}^l([a, \infty)$, y como $f = 2f^+ - |f|$ se sigue que la integral impropia de f también converge. □

Aunque el valor absoluto de una función integrable Riemann es integrable Riemann (Proposición 2.3.2), en la integral impropia de Riemann esto deja de ser cierto, tal y como vemos en el siguiente ejemplo. Por tanto, la convergencia absoluta de la integral impropia de Riemann es una condición más fuerte que su convergencia usual.[2]

Ejemplo 2.4.7. Consideremos la función

$$f : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{(-1)^n}{n}\big(1 - |2(x-n)+1|\big) \quad \big(x \in \big[n-1, n\big], n \in \mathbb{N}\big)$$

[2] Aunque no lo discutiremos en este trabajo, las similitudes entre las integrales absolutamente convergentes y las series absolutamente convergentes se puede estudiar bajo el marco de la integral de Riemann-Stieltjes, donde las sumas infinitas se pueden entender como integrales de funciones constantes a trozos con un número numerable de discontinuidades [3, Chapter 7].

Claramente $f \in \mathcal{C}([1,\infty])$, por lo que por el Teorema 2.5.10 se tiene que $f \in \mathcal{R}([1,R])$ para todo $R > 0$. Además, por la Proposición 2.3.3 para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(\mathcal{R}) \int_0^N f(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \left((\mathcal{R}) \int_{n-1}^{n} f(x)dx \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(\mathcal{R}) \int_0^N |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{N} \left((\mathcal{R}) \int_{n-1}^{n} |f(x)|dx \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

por lo que la integral impropia de f converge pero no absolutamente.

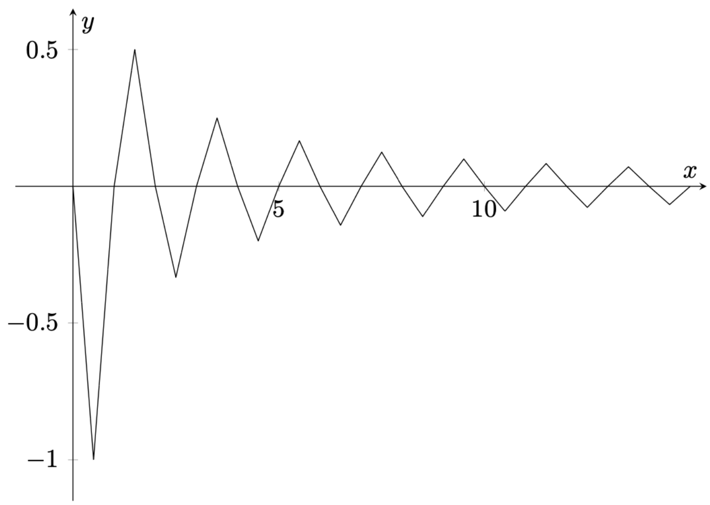

Figura 2.1: Gráfica de f.

2.5. Integral de Riemann-Stieltjes

A finales del siglo XIX, el matemático holandés Jan Stieltjes introdujo una generalización de la integral de Riemann basada en la asociación de un peso a cada punto del dominio de integración. Aunque el tratamiento original de Stieltjes sólo involucraba funciones crecientes, en esta sección abordaremos la integral de Riemann-Stieltjes desde un punto de vista más cercano al Análisis Funcional.

Definición 2.5.1. Sean $f, w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, y una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^{n}$. Definimos la *suma de Riemann-Stieltjes* de f respecto a w asociada a la partición etiquetada $\mathcal{P}_e$

como

$$S_{\mathcal{R}}(f, w, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot [w(x_i) - w(x_{i-1})]$$

Definición 2.5.2. Sea $w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es *integrable Riemann respecto de* w *en* $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que

$$|S_{\mathcal{R}}(f, w, \mathcal{P}_e) - A| < \epsilon$$

para cada partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a, b]$ con $\text{cal}(\mathcal{P}_e) < \delta$. Además, en caso de que exista tal valor es único, y se dice que A es la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto de w en $[a, b]$, denotándose como

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dw(x) \quad \text{ó} \quad (\mathcal{R}) \int_a^b f\, dw$$

La clase de todas las funciones integrables-Riemann respecto de ω en $[a, b]$ se denotará $\mathcal{R}(w, [a, b])$.

Nota 2.5.3. Otra manera de construir esta integral sería definir las sumas superiores e inferiores de Darboux de f (acotada) respecto de w asociada a la partición $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$.

$$\overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, w, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (w(x_i) - w(x_{i-1}))$$
$$\underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, w, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m(f, [x_{i-1}, x_i]) \cdot (w(x_i) - w(x_{i-1}))$$

Entonces se define, de forma análoga a como se desarrolló para la integral de Darboux, la integral superior e inferior de Darboux de f respecto de w, y se dice que una función es Darboux-Stieltjes integrable si ambas integrales coinciden. La clave está en que, cuando w es una función monótona, el Teorema 2.2.5 se traslada con una demostración prácticamente idéntica a este contexto, por lo que las dos definiciones mencionadas dan lugar a la misma integral.

Claramente la integral de Riemann se puede intepretar como una integral de Riemann-Stieltjes respecto de la función identidad en $[a, b]$, por lo que esta última generaliza a la de Riemann. Sin embargo, existen también algunas situaciones en las que la integral de Riemann-Stieltjes se puede reducir a una integral de Riemann, véase [3, Theorem 7.35]. En cualquier caso, podemos encontrar funciones peso w tal que $\mathcal{R}(w, [a, b]) \nsubseteq \mathcal{R}([a, b])$ (Ejemplo 2.5.4) y $\mathcal{R}([a, b]) \nsubseteq \mathcal{R}(w, [a, b])$ (Ejemplo 2.5.5).

Ejemplo 2.5.4. Sea w una función constante en un intervalo compacto $[a, b]$. Tomemos una función $f \notin \mathcal{R}([a, b])$ cualquiera, y veamos que $f \in \mathcal{R}(w, [a, b])$. Dada una partición etiquetada

$\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ de $[0,1]$ arbitraria, se tiene que $S_{\mathcal{R}}(f, w, \mathcal{P}_e) = 0$, por lo que $f \in \mathcal{R}(w, [a,b])$ y su integral de Riemann-Stieltjes es igual a 0.[3]

El siguiente ejemplo expone una de las grandes debilidades de la integral de Riemann-Stieltjes.

Ejemplo 2.5.5. Es bien sabido que la integral de Riemann permanece invariante al modificar un único valor de la función integrada [4], sin embargo, esto no se mantiene para la de Riemann-Stieltjes. Esta sutil modificación de la función puede permitir no solo alterar el valor de la integral, sino incluso afectar a su existencia. Para mostrar esta patología, consideramos las funciones $w, f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definidas como $w(x) = 0$, $f(x) = g(x) = 1$ para cada $x \neq 0$ y $w(0) = -1$, $f(0) = 2$, $g(0) = 1$.

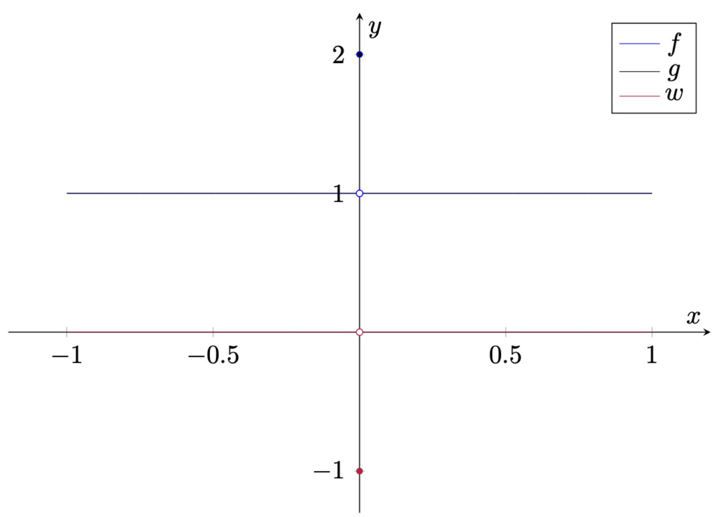

Figura 2.2: Gráficas de f, g y w.

Veamos en primer lugar que $g \in \mathcal{R}(w, [a,b])$. Dada una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ de $[0,1]$ arbitraria, se tiene que

$$S_{\mathcal{R}}(g, w, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)[w(x_i) - w(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} [w(x_i) - w(x_{i-1})] = w(1) - w(-1) = 0$$

por lo que $g \in \mathcal{R}(w, [a,b])$ y su integral de Riemann-Stieltjes es 0. Por otro lado, dada una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ de $[0,1]$ arbitraria tal que $x_k = 0$ para algún $k = 1, ..., n$ se tiene

[3] En realidad este argumento prueba que cualquier función definida en $[a,b]$ es integrable Riemann respecto de w.

[4] En el siguiente capítulo veremos que una función es integrable-Riemann si y solo si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

que

$$S_{\mathcal{R}}(f, w, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[w(x_i) - w(x_{i-1})]$$

$$= f(t_{k+1})[w(x_{k+1}) - w(0)] + f(t_k)[w(0) - w(x_{k-1})] = f(t_{k+1}) - f(t_k)$$

Esta suma valdrá 0,1 o -1 dependiendo de la elección de t_k y t_{k-1}, por lo que $f \notin \mathcal{R}(w, [a, b])$. Además, dado que el conjunto de discontinuidades de f tiene medida de Lebesgue nula[5], concluimos que $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Por tanto, aunque se diferencian *únicamente en un punto*, $f \notin \mathcal{R}(w, [a, b])$ y $g \in \mathcal{R}(w, [a, b])$.

2.5.1. Funciones de variación acotada

Aunque la integral de Riemann-Stieltjes puede desarrollarse sobre una función peso arbitraria, existe una clase de funciones que permiten recuperar algunos de los resultados más notorios de la integral de Riemann: *las funciones de variación acotada.*

Definición 2.5.6. Una función $w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es de *variación acotada* si

$$\mathrm{Var}(w, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |w(x_k) - w(x_{k-1})| : \{x_k\}_{k=0}^{n} \text{ partición de } [a, b] \right\} < \infty$$

Además, denotaremos $\mathrm{BV}([a, b])$ a la clase de las funciones de variación acotada en $[a, b]$.

Nota 2.5.7. Una de las virtudes de las funciones de variación acotada es que podemos definir una norma

$$\|w\| = |w(a)| + \mathrm{Var}(w, [a, b])$$

que además resulta dotar a $\mathrm{BV}([a, b])$ de una estructura de espacio de Banach. Esta observación nos permitirá dar una intepretación concisa del Teorema 2.5.14 desde el marco del análisis funcional.

Veamos una caracterización de estas funciones que será útil más adelante:

Proposición 2.5.8. *Una función es variación acotada en* $[a, b]$ *si y solo si se puede expresar como la diferencia de dos funciones crecientes acotadas en* $[a, b]$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $w \in \mathrm{BV}([a, b])$ arbitrario. Definamos las funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \mathrm{Var}(w, [a, x])$ y $g(x) = w(x) - f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ y veamos que f y g son funciones crecientes acotadas. Sea $x, y \in [a, b]$ tal que $x < y$ y una partición $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ arbitraria de $[a, x]$.

[5] Esta caracterización de las funciones integrables Riemann la veremos en el siguiente capítulo

Entonces $\{y_k\}_{k=0}^{n+1} = \{x_k\}_{k=0}^{n} \cup \{y\}$ es una partición de $[a, y]$ y se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} |w(x_k) - w(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n+1} |w(y_k) - w(y_{k-1})| - |w(y) - w(x)| \leq f(y) - |w(y) - w(x)|$$

Como esto se cumple para toda partición de $[a, x]$, deducimos que

$$w(y) - w(x) \leq |w(y) - w(x)| \leq f(y) - f(x)$$

por lo que f, g son funciones crecientes tal que $w = f - g$, y además acotadas, ya que $f(b) = \mathrm{Var}(w, [a, b]) < \infty$, $g(b) = w(b) - w(a) < \infty$ y $g(a) = f(a) = 0$.

($\Leftarrow$) Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes acotadas. Claramente $\mathrm{Var}(f, [a, b] = f(b) - f(a) < \infty$ y $\mathrm{Var}(g, [a, b]) = g(b) - g(a) < \infty$, por lo que $f, g \in \mathrm{BV}([a, b])$ y por tanto $f - g \in \mathrm{BV}([a, b])$. $\square$

Este resultado tiene una consecuencia adicional: $\mathrm{BV}([a, b]) \subsetneq \mathcal{C}([a, b])$. Además, el recíproco tampoco es cierto, como vemos con el Ejemplo 2.5.9.

Ejemplo 2.5.9. Consideremos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para cada $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

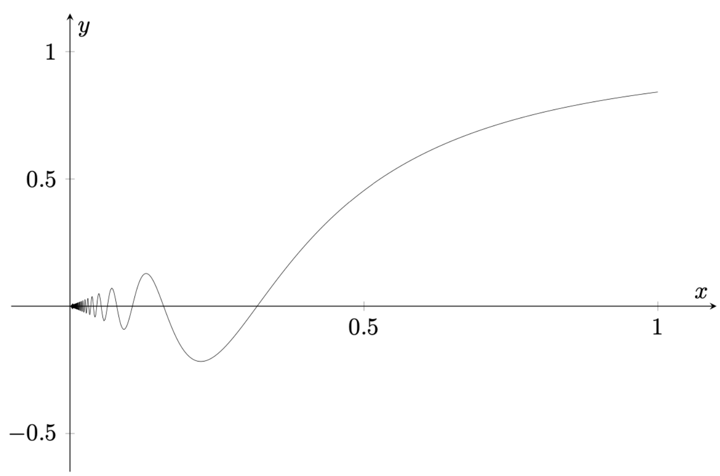

Figura 2.3: Gráfica de f.

Claramente $f \in \mathcal{C}([0, 1/\pi])$, por lo que veamos que $f \notin \mathrm{BV}([0, 1/\pi])$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ cualquiera y definamos la partición $\mathcal{P} = \{x_k\}_{k=0}^{N+1} = \{0\} \cup \{\frac{1}{k\pi}\}_{k=1}^{N} \cup \{1\}$, de manera que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \frac{1}{N\pi} + \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k-1)\pi} \right) + \operatorname{sen}(1) + \frac{1}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} + \operatorname{sen}(1) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Como esta suma diverge cuando $N \to \infty$, concluimos que $f \notin \mathrm{BV}([0, 1/\pi])$.

El siguiente Teorema es una generalización del Teorema 2.1.6, el cual nos permite entender el papel que juegan las funciones de variación acotada en la integral de Riemann-Stieltjes.

Teorema 2.5.10. *Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y w una función de variación acotada en $[a, b]$. Entonces f es integrable Riemann respecto de w en $[a, b]$.*

Demostración. Por la Proposición 2.5.8 podemos asumir que w es una función creciente y acotada con $w(b) > w(a)$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, como f es continua en el compacto $[a, b]$ sabemos que f es uniformemente continua, por lo que existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in [a, b]$ verificando que $|x - y| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/A$, donde $A \coloneqq 2(w(b) - w(a))$. Entonces, dada una partición $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ tal que $\operatorname{cal}(\mathcal{P}) < \delta$ cualquiera, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}_{\mathcal{D}ar}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} \Big[M(f, [x_{i-1}, x_i]) - m(f, [x_{i-1}, x_i]) \Big] (w(x_i) - w(x_{i-1})) \\ &\leq \frac{\epsilon}{A} \sum_{i=1}^{n} (w(x_i) - w(x_{i-1})) = \frac{\epsilon(w(b) - w(a))}{A} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos por la Nota 2.5.3 que $f \in \mathcal{R}(w, [a, b])$. □

2.5.2. El teorema de Representación de Riesz

La construcción de Stieltjes fue más tarde utilizada por F.Riesz, que vio la oportunidad de resolver el problema de representación de funcionales lineales en un intervalo compacto. A continuación probaremos este Teorema de Representación de Riesz, aunque antes necesitamos algunas observaciones y resultados previos.

Definición 2.5.11. Definimos el espacio normado $(\mathrm{B}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ como la clase de las funciones acotadas en $[a, b]$ con la norma del supremo

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

Proposición 2.5.12. *Sea $f \in \mathrm{B}([a,b])$ y $w \in \mathrm{BV}([a,b])$. Si $f \in \mathcal{R}(w,[a,b])$, entonces se tiene que*

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dw(x)\right| \le \|f\|_\infty \operatorname{Var}(w,[a,b])$$

Demostración. Sea $R = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dw(x)$ y $\epsilon > 0$ arbitrario. Como f es integrable Riemann respecto de w, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a,b]$ con $\operatorname{cal}(\mathcal{P}_e) < \delta$ se cumple que

$$|S_{\mathcal{R}}(f,w,\mathcal{P}_e) - R| < \epsilon$$

Sea $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1},x_i],t_i\}_{i=1}^n$ una de estas particiones etiquetadas de $[a,b]$ tal que $\operatorname{cal}(\mathcal{P}_e) < \delta$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}|S_{\mathcal{R}}(f,w,\mathcal{P}_e)| &= \Big|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot[w(x_k)-w(x_{k-1})]\Big| \le \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\cdot|w(x_k)-w(x_{k-1})| \\ &\le \|f\|_\infty \sum_{k=1}^n |w(x_k)-w(x_{k-1})| \le \|f\|_\infty \operatorname{Var}(w,[a,b])\end{aligned}$$

por lo que

$$|R| \le |R - S_{\mathcal{R}}(f,w,\mathcal{P}_e)| + |S_{\mathcal{R}}(f,w,\mathcal{P}_e)| \le \epsilon + \|f\|_\infty \operatorname{Var}(w,[a,b])$$

de donde, como $\epsilon > 0$ es arbitrario, deducimos el resultado. □

Definición 2.5.13. Decimos que dos funciones $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son *disjuntas* si $\min\{|f|,|g|\} = 0$. Además, si $f,g \in \mathrm{B}([a,b])$ es fácil comprobar que

$$|f+g| = |f| + |g| \quad \text{y} \quad \|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Teorema 2.5.14 (Riesz). *Todo funcional f de $\mathcal{C}([a,b])$ se puede representar por una integral de Riemann-Stieltjes como*

$$f(x) = (\mathcal{R})\int_a^b x(t)\,dw(t) \tag{2.3}$$

donde w es una función de variación acotada en $[a,b]$ tal que $\operatorname{Var}(w,[a,b]) = \|f\|$.

Demostración. Sea f un funcional de $\mathcal{C}([a,b])$ cualquiera. Claramente $(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ es un subespacio del espacio normado $(\mathcal{B}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$, por lo que por el Teorema de Hahn-Banach (Anexo A) podemos construir una extensión $\tilde{f}$ de f a $B([a,b])$ tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Entonces, como las funciones características son funciones acotadas, podemos definir la función

$$w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad w(t) = \tilde{f}(\chi_{[a,t]}) \quad \forall\, t \in (a,b], \quad w(a) = 0$$

Veamos que w es de variación acotada y $\mathrm{Var}(w,[a,b]) \leq \|f\|$. Consideremos una partición $\mathcal{P} = \{t_i\}_{i=0}^n$ arbitraria, y definamos

$$\begin{aligned} \epsilon_i &:= \mathrm{sign}\big(w(t_i) - w(t_{i-1})\big) \quad \forall\, 1 \leq i \leq n \\ y_1 := \chi_{[a,t_1]}, &\quad y_i := \chi_{(t_{i-1},t_i]} \quad \forall\, 2 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{2.4}$$

Claramente $\{y_i\}_{i=1}^n$ es una familia de funciones acotadas y disjuntas dos a dos, por lo que por la observación de la Definición 2.5.13 se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |w(t_i) - w(t_{i-1}| &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i\big[w(t_i) - w(t_{i-1})\big] = \epsilon_1 \tilde{f}(\chi_{[a,t_1]}) + \sum_{i=2}^n \epsilon_i\Big[\tilde{f}(\chi_{[a,t_i]}) - \tilde{f}(\chi_{[a,t_{i-1}]})\Big] \\ &= \tilde{f}\Big(\sum_{i=1}^n \epsilon_i y_i\Big) \leq \|\tilde{f}\|\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i y_i\Big\|_\infty = \|f\| \max_{1\leq i\leq n} |\epsilon_i|\|y_i\|_\infty = \|f\| \end{aligned}$$

de donde deducimos que w es de variación acotada y $\mathrm{Var}(w,[a,b]) \leq \|f\|$.

Veamos ahora que se cumple (2.3). Sea $x \in \mathcal{C}([a,b])$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Como hemos probado que w es de variación acotada, por el Teorema 2.5.10 sabemos que x es integrable Riemann respecto de w en $[a,b]$. Por tanto, si denotamos por I el valor de dicha integral, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|S_R(x,w,\mathcal{P}_e) - I| < \epsilon/2$$

para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a,b]$ tal que $\mathrm{cal}(\mathcal{P}_e) < \delta$. Como x es continua en un compacto está acotada, de manera que $\|x\|_\infty < \infty$, por lo que podemos escoger una partición etiquetada $\mathcal{P}_e' = \{[t_{i-1},t_i],t_i\}_{i=1}^n$ de $[a,b]$ tal que $\mathrm{cal}(\mathcal{P}_e) < \text{mín}\{\delta, \frac{\epsilon/2}{(1+\|x\|_\infty)(1+\|f\|)}\}$. Definamos la función $z = \sum_{i=1}^n x(t_i)y_i \in B([a,b])$, donde $\{y_j\}_{i=1}^n$ están definidas como en (2.4), de manera que

$$\tilde{f}(z) = \sum_{i=1}^n x(t_i)\tilde{f}(y_i) = \sum_{j=1}^n x(t_i)[w(t_i) - w(t_{i-1})] = S_R(x,w,\mathcal{P}_e')$$

Además, por la observación de la Definición 2.5.13, como $\{y_j\}_{i=1}^n$ es una familia de funciones acotadas y disjuntas dos a dos se tiene que

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &= \left|x(t)\Big(\sum_{i=1}^n y_i(t)\Big) - \sum_{i=1}^n x(t_i)y_i(t)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \big[x(t) - x(t_i)\big]y_i(t)\right| \\ &= \max_{1\leq i\leq n}\Big|x(t) - x(t_i)\Big|\Big|y_i(t)\Big| \leq \|x\|_\infty \max_{1\leq i\leq n} |t - t_i|\big|y_i(t)\big| = \|x\|_\infty \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \|x\|_\infty\, \mathrm{cal}(\mathcal{P}_e') < \|x\|_\infty \frac{\epsilon/2}{(1+\|x\|_\infty)(1+\|f\|)} < \frac{\epsilon/2}{1+\|f\|} \end{aligned}$$

para cada $t \in [a,b]$. Por tanto $\|x-z\|_\infty < \frac{\epsilon/2}{1+\|f\|}$, y como $\mathrm{cal}(\mathcal{P}'_e) < \delta$, por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)-I| \leq |\tilde{f}(x)-I| + |\tilde{f}(x)-\tilde{f}(z)| &\leq |S_R(x,w,\mathcal{P}'_e)-I| + \|\tilde{f}\|\,\|x-z\|_\infty \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \|f\|\frac{\epsilon}{2(1+\|f\|)} < \epsilon \end{aligned}$$

de donde, como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$f(x) = I = (\mathcal{R})\int_a^b x(t)\,dw(t)$$

Por último, veamos que $\mathrm{Var}(w,[a,b]) \geq \|f\|$. Sea $x \in \mathcal{C}([a,b])$ cualquiera. Hemos probado que f admite una representación en términos de una integral de Riemann-Stieltjes, por lo que por la Proposición 2.5.12 se tiene que

$$|f(x)| = \left|(\mathcal{R})\int_a^b x(t)\,dw(t)\right| \leq \|x\|_\infty\,\mathrm{Var}(w,[a,b])$$

de manera que $\|f\| \leq \mathrm{Var}(w,[a,b])$, lo que finaliza la demostración. □

Nota 2.5.15. Aunque la función de variación acotada w del teorema anterior no tiene por qué ser única, podemos lograr la unicidad si imponemos que $w(a) = 0$ y w sea continua por la derecha. Además, en estas condiciones

$$\|w\|_{\mathrm{BV}([a,b])} = \mathrm{Var}(w,[a,b]) = \|f\|$$

por lo que este Teorema de Representación de Riesz establece una isometría suprayectiva

$$T : \mathrm{BV}^a_{c,0}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])^*$$

donde

$$\mathrm{BV}^a_{c,0}([a,b]) = \{w \in \mathrm{BV}([a,b]) : w(a) = 0, w \text{ continua por la derecha}\}$$

Esto nos permite identificar unívocamente los funcionales de $\mathcal{C}([a,b])$ con ciertas funciones de variación acotada. Este es en realidad un caso particular del Teorema de Representación de Riesz general, también conocido como el Teorema de Riesz–Markov–Kakutani [38, Theorem 6.19], que utilizaremos más adelante para construir la medida de Lebesgue.

Capítulo 3

La integral de Lebesgue

Actualmente la integral de Lebesgue se ha alzado como la integral por excelencia, no solo por la generalidad que aporta, sino por sus destacables propiedades. En este capítulo repasaremos esta teoría de integración, para lo cual introduciremos algunos conceptos básicos de la Teoría de la Medida [16] [23] [38]. Además, estudiaremos dos construcciones de la medida de Lebesgue sobre la recta real: la de Borel basada en un procedimiento recursivo transfinito [19] [22] y el archiconocido método de Carathéodory [38]. Seguidamente construiremos la integral de Lebesgue en toda su generalidad y discutiremos algunas de sus propiedades [16] [23] [38], aunque finalmente nos limitaremos a analizar la integral de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, su relación con la integral de Riemann y la integral impropia de Lebesgue.

3.1. Teoría de la medida

Antes de andentrarnos en la construcción de la integral de Lebesgue, debemos repasar algunos conceptos básicos de la Teoría de la Medida que serán fundamentales en este capítulo. Además, dado que los resultados que se expondrán ya fueron probados en la asignatura de Análisis Matemático III (y no son el tema central de este trabajo), enunciaremos los resultados sin su demostración.

Definición 3.1.1. Un *anillo* definido en un conjunto Ω es una colección no vacía $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ verificando que

i) $E, F \in \mathcal{R} \Rightarrow E \setminus F \in \mathcal{R}$, $E \cup F \in \mathcal{R}$

Si además la colección es cerrada bajo uniones numerables diremos que $\mathcal{R}$ es un σ-*anillo de conjuntos*, esto es, si verifica

ii) $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$

Definición 3.1.2. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ definida en un conjunto Ω es un anillo para el que $\Omega \in \mathcal{A}$. Si además la colección es cerrada bajo uniones numerables diremos que $\mathcal{A}$ es una *σ-álgebra de conjuntos.*

Definición 3.1.3. Llamaremos *espacio medible* al par $(\Omega, \mathcal{A})$, donde Ω es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra[1] definida en Ω. Además, nos referiremos a los elementos de $\mathcal{A}$ como *elementos medibles.*

Es fácil comprobar que la intersección abitraria de σ-álgebras de un conjunto Ω es de nuevo una σ-álgebra, lo que induce la siguiente definición.

Definición 3.1.4. Sea un conjunto Ω y $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una colección de subconjuntos suyos. Denotaremos $\sigma(\mathcal{G})$ a la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$, que por la observación anterior existe y es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{G}$. Del mismo modo existe la menor álgebra, anillo y σ-anillo que contienen a la familia $\mathcal{G}$, los cuales denotaremos $\alpha(\mathcal{G})$, $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ respectivamente.

Definición 3.1.5. Una *medida positiva* μ definida en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ —-con $\mathcal{A}$ álgebra, anillo, σ-álgebra o σ-anillo—- es una aplicación no negativa

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

tal que $\mu(\emptyset) = 0$, y es *σ-aditiva*, es decir, verificando que para cualquier familia numerable $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \mathcal{A}$ (automático si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra o σ-anillo), se cumple que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Además, diremos que la medida positiva μ es *σ-finita* si existe una familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos verificando que $\mu(A_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Definición 3.1.6. Un *espacio de medida* es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ donde Ω es un conjunto, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra (σ-anillo) y μ es una medida positiva definida en $\mathcal{A}$.

Proposición 3.1.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) Si $E, F \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(F) < \infty$, entonces $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F)$.

(ii) μ es monótona, esto es, si $E, F \in \mathcal{A}$ son tales que $E \subset F$, entonces se tiene que $\mu(E) \leq \mu(F)$.

[1] En algunos contextos también se hablará de espacio medible aunque $\mathcal{A}$ sea tan sólo σ-anillo.

(iii) μ *es continua inferiormente, esto es, si* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ *tal que* $E_n \subset E_{n+1}$*, entonces se tiene que*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

(iv) μ *es continua superiormente, esto es, si* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ *tal que* $E_{n+1} \subset E_n$ *y* $\mu(E_1) < \infty$*, entonces se tiene que*

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Definición 3.1.8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, llamamos *restricción del espacio de medida respecto a un conjunto medible* $B \in \mathcal{A}$, al espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}_B, \mu\big|_B)$, donde

$$\mathcal{A}_B = \{\, A \cap B \,:\, A \in \mathcal{A} \,\}, \qquad \mu\big|_B(A) = \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}_B$$

3.1.1. La σ-álgebra de los borelianos

Una vez hemos expuesto las estructuras básicas con las que se trabaja en la Teoría de la Medida, recordamos un caso de especial relevancia, en el que se compatibiliza la estructura de espacio topológico con la de espacio de medida.

Definición 3.1.9. Dado un espacio topológico (Ω, τ), llamaremos *σ-álgebra de Borel* a la σ-álgebra generada por los abiertos de τ, y la denotaremos $\mathcal{B}(\Omega)$. Además, a sus elementos los llamaremos *borelianos.*

Definición 3.1.10. Sea (Ω, τ) un espacio topológico y Σ una σ-álgebra definida en Ω. Decimos que una medida μ definida en (Ω, Σ) es:

(i) *regular exterior* si $\forall\, E \in \Sigma$: $\mu(E) = \inf\{\, \mu(V) \,|\, E \subset V\,,\ V \text{ abierto}\}$

(ii) *regular interior* si $\forall\, E \in \Sigma$: $\mu(E) = \sup\{\, \mu(K) \,|\, K \subset E\,,\ K \text{ compacto}\}$

(iii) *regular* si es regular interior y exterior

Si además $\mathcal{B}(\Omega) \subset \Sigma$, diremos que es

(iv) *localmente finita* si $\forall\, K \subset \Omega$ compacto: $\mu(K) < \infty$

Definición 3.1.11. Sea (Ω, τ) un espacio topológico, decimos que una medida μ es *de borel* si está definida sobre los borelianos. Si μ es además regular y localmente finita, diremos que es *de radon.*

3.1.2. Compleción de un espacio de medida

Otra propiedad que será relevante en esta capítulo (y en el de la integral de Daniell) es la completitud de un espacio de medida:

Definición 3.1.12. Decimos que un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es *completo* si

$$B \subset A \text{ con } A \in \mathcal{A} \text{ y } \mu(A) = 0 \implies B \in \mathcal{A}$$

Definición 3.1.13. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, diremos que una propiedad *se verifica casi seguro respecto de* μ (c.s. o μ-a.e.) si el conjunto de puntos C donde no se verifica la propiedad está contenido en un medible $C \subset B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0$.

Nota 3.1.14. Aunque el conjunto C de la definición anterior no es necesariamente medible, si el espacio de medida es completo se tiene que $C \in \mathcal{A}$ y $\mu(C) = 0$.

Definición 3.1.15. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ dos espacios de medida. Decimos que $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ es *la compleción* de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ si se verifican las siguientes condiciones:

(i) $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ es completo

(ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$

(iii) $\mu_0|_{\mathcal{A}} = \mu$

(iv) Si $(\Omega, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ es otro espacio de medida completo satisfaciendo $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ y $\mu_1|_{\mathcal{A}} = \mu$, entonces $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$ y $\mu_1|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$.

Teorema 3.1.16. *Todo espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *admite una compleción* $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$*, y además la compleción es única.*

3.2. Construcción de la medida de Lebesgue (Borel)

Aunque la teoría de integración que desarrolló Lebesgue es muy poderosa, a la hora de aplicarla a un caso particular debemos pasar por un procedimiento no trivial: construir el espacio de medida en el que trabajaremos. En el caso de la integral de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ (que es en la que nos centraremos en este trabajo) necesitamos de alguna manera construir una medida que generalice la longitud del intervalo, y una σ-álgebra que como mínimo contenga los conjuntos abiertos y cerrados en la topología usual, para así poder integrar sobre los mismos. Existen diversos métodos para la construcción de la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Si bien es cierto que el método de extensión de

Carátheodory ha sido el idóneo desde un punto de vista formativo, en este Trabajo de Fin de Grado proponemos otro método menos conocido en la actualidad.

Una de las construcciones más conocidas en su momento se debe a F.É.J. Émile Borel, que en 1898 publicó *Leçons sur la théorie des fonctions - Lecciones sobre la teoría de funciones*, donde fue capaz de construir la σ-álgebra de los borelianos mediante inducción transfinita. Este artículo fue de vital importancia para Lebesgue, ya que aunque no llegó a plantear el concepto de integral, sentó las bases axiomáticas de la Teoría de la Medida moderna. A continuación presentamos este enfoque alternativo de Borel adaptado a la terminología actual [22]. Nuestro objetivo será construir la medida de Lebesgue sobre los borelianos por medio de dos extensiones sucesivas: una primera desde la clase de los semiintervalos acotados a su anillo generado, y una segunda mediante el método de Borel desde este anillo al σ-anillo generado por los semiintervalos acotados[2], en la cual haremos uso de la inducción transfinita.

3.2.1. Extensión al anillo generado por los semiintervalos acotados

En esta primera extensión seguiremos el esquema que podemos encontrar en [19]. Comenzamos denotando $\mathcal{C}$ a la clase de semiintervalos acotados en $\mathbb{R}$, i.e.

$$\mathcal{C} = \{[a, b) : -\infty < a \leq b < \infty\}$$

Además, llamaremos $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C})$ al anillo generado por $\mathcal{C}$, y definimos una función sobre la clase $\mathcal{C}$ que le asocie a cada semiintervalo acotado su longitud,

$$\mu([a, b)) = b - a$$

Nota 3.2.1. $\mu(\emptyset) = \mu([a, a)) = a - a = 0$

Veamos primero que esta función es σ-aditiva sobre la clase $\mathcal{C}$, para lo cual necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.2.2. *Sea $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{N}$ una familia finita de intervalos abiertos acotados y $[a_0, b_0]$ un intervalo compacto. Entonces,*

$$[a_0, b_0] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n) \quad \Longrightarrow \quad b_0 - a_0 < \sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n)$$

[2]Más adelante demostraremos que este σ-anillo es en realidad la σ-álgebra de los borelianos (véase Proposición 3.2.26)

Demostración. Denotemos $I = [a_0, b_0]$ y $U_n = (a_n, b_n)$ para cada $n = 1, ..., N$. Como $I \subset \bigcup_{n=1}^N U_n$ existe $k_1 \in \{1, ..., N\}$ tal que $a_0 \in U_{k_1}$. Si $b_{k_1} \leq b$ consideramos $k_2 \in \{1, ..., N\}$ tal que $b_{k_1} \in U_{k_2}$; si $b_{k_2} \leq b$ consideramos un k_3 al que $b_{k_2} \in U_{k_3}$, y repetimos este proceso hasta que $b_{k_m} > b_0$. Claramente $m \leq N$, $\{k_i\}_{i=1}^m \subset \{1, ..., N\}$ sin repeticiones y además se cumple que $a_{k_1} < a_0 < b_{k_1}$, $a_{k_m} < b_0 < b_{k_m}$ y si $m > 1$ se tiene que $a_{k_{i+1}} < b_{k_i} < b_{k_{i+1}}$ para cada $i = 1, ..., m-1$. Entonces se sigue que

$$b_0 - a_0 < b_{k_m} - a_{k_1} = (b_{k_1} - a_{k_1}) + \sum_{i=1}^{m-1}(b_{k_{i+1}} - b_{k_i}) \leq \sum_{i=1}^{m}(b_{k_i} - a_{k_i}) \leq \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n)$$

□

Teorema 3.2.3. *μ es σ-aditiva sobre $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea $\{I_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}$ una familia de semiintervalos disjuntos dos a dos tal que $I \coloneqq \bigcup_{n=1}^\infty I_n \in \mathcal{C}$. Denotemos $I = [a_0, b_0)$ y $I_n = [a_n, b_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y veamos en primer lugar que $\sum_{n=1}^\infty \mu(I_n) \leq \mu(I)$. Consideremos $N \in \mathbb{N}$ cualquiera y asumamos sin pérdida de generalidad que $a_1 \leq ... \leq a_N$. Como $\{I_n\}_{n=1}^N$ es una familia disjunta y $\bigcup_{n=1}^N I_n \subset I$ se cumple que $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq ... \leq a_N \leq b_N \leq b_0$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) \leq \sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) + \sum_{n=1}^{N-1}(a_{n+1} - b_n) = b_N - a_1 \leq b_0 - a_0$$

Como $\mu(I_n) > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{\sum_{n=1}^N \mu(I_n)\}_n$ es creciente y acotada superiormente por $\mu(I)$, por tanto converge y su límite cumple que $\sum_{n=1}^\infty \mu(I_n) \leq b_0 - a_0 = \mu(I)$.

Veamos ahora que $\mu(I) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(I_n)$. Si $a_0 = b_0$ el resultado es trivial; en caso contrario consideramos $0 < \epsilon < b_0 - a_0$ cualquiera. Tomando $\delta > 0$ arbitrario se tiene que

$$[a_0, b_0 - \epsilon] \subset [a_0, b_0) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{\delta}{2^n}, b_n\right)$$

Como $\{(a_n - \delta/2^n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto del intervalo compacto $[a_0, b_0 - \epsilon]$ sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$[a_0, b_0 - \epsilon] \subset \bigcup_{n=1}^{N}\left(a_n - \frac{\delta}{2^n}, b_n\right)$$

Aplicando a estos intervalos el Lema 3.2.2 deducimos que

$$\mu(I) - \epsilon = (b_0 - \epsilon) - a_0 \leq \sum_{n=1}^{N}\left(b_n - a_n + \frac{\delta}{2^n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n - a_n + \frac{\delta}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n) + \delta$$

Como $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ son arbitrarios concluimos el resultado. $\square$

Nota 3.2.4. De ahora en adelante utilizaremos el símbolo $\left(\bigsqcup\right)$ para hacer referencia a la unión de una colección de conjuntos disjuntos dos a dos.

Teorema 3.2.5. *Existe una única medida positiva y finita $\bar{\mu}$ en el anillo $\mathcal{R}$ que extiende a μ, es decir, satisfaciendo que*

$$\bar{\mu}(I) = \mu(I) \qquad \forall\, I \in \mathcal{C}$$

Demostración. Gracias al Teorema B.3 del Anexo B, podemos expresar todo elemento de $\mathcal{R}$ como unión disjunta de semiintervalos acotados, por lo que podemos definir la aplicación

$$\bar{\mu} \colon \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty), \qquad \bar{\mu}\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} I_n\right) := \sum_{n=1}^{N} \mu(I_n)$$

Veamos que $\bar{\mu}$ está bien definida. Dado $E \in \mathcal{R}$ cualquiera, consideremos dos representaciones del mismo $E = \bigsqcup_{n=1}^{N} I_n = \bigsqcup_{m=1}^{M} J_m$. Entonces para cada $n = 1, ..., N$ y $m = 1, ..., M$ se tiene que

$$I_n = I_n \cap E = \bigsqcup_{m=1}^{M} (I_n \cap J_m) \quad \text{y} \quad J_m = J_m \cap E = \bigsqcup_{n=1}^{N} (J_m \cap I_n)$$

donde $I_n \cap J_m \in \mathcal{C}$ por ser la intersección de dos semiintervalos. Además, como por el Teorema 3.2.3 sabemos que μ es σ-aditiva sobre $\mathcal{C}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \mu(I_n \cap J_m) \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{M} \mu(J_m) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \mu(J_m \cap I_n)$$

por lo que la aplicación $\bar{\mu}$ está bien definida. Claramente $\bar{\mu}$ coincide con μ en $\mathcal{C}$ y es trivialmente aditiva. Veamos que es la única en estas condiciones. Tomemos otra medida positiva ν sobre $\mathcal{R}$ que extienda a μ y consideramos $E = \bigsqcup_{n=1}^{N} I_n \in \mathcal{R}$ cualquiera. Entonces se tiene que

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{n=1}^{N} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{N} \nu(I_n) = \nu(\bigsqcup_{n=1}^{N} I_n) = \nu(E)$$

Por último probemos que $\bar{\mu}$ es σ-aditiva. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos tal que $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$, entonces E_n es unión disjunta de semiintervalos acotados $\forall\, n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$E_n = \bigsqcup_{m=1}^{M_n} E_n^m \qquad \text{y} \qquad \bar{\mu}(E_n) = \sum_{m=1}^{M_n} \mu(E_n^m)$$

donde $\{E_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $E \in \mathcal{C}$, como la familia $\{E_n^m\}_{n,m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ es numerable y disjunta, se sigue de que μ sea numerablemente aditiva (Teorema 3.2.3) que[3]

$$\bar{\mu}(E) = \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} \mu(E_n^m) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n)$$

En el caso más general, E es unión disjunta de semiintervalos $E = \bigsqcup_{k=1}^{L} F_k$, de manera que para cada $k = 1, ..., L$ se tiene que

$$F_k = F_k \cap E = F_k \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_k \cap E_n)$$

Por tanto, podemos aplicar el caso anterior para cada F_k, de donde concluimos que

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{k=1}^{L} \bar{\mu}(F_k) = \sum_{k=1}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(F_k \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{L} \bar{\mu}(F_k \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n)$$

□

Nota 3.2.6. En vista de este último teorema, podemos renombrar sin dar lugar a confusión a la extensión $\bar{\mu}$ como μ. Esto es, a partir de ahora escribiremos $\mu(E)$ en lugar de $\bar{\mu}(E)$, incluso cuando $E \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C}$.

3.2.2. Extensión del anillo al σ-anillo generado

La idea de Borel de usar recursión transfinita para la construcción de medidas fue resuelta en la primera mitad del siglo XX por distintos autores. A continuación revisaremos esta técnica en su forma más general [22], la cual nos permite extender una medida positiva definida en un anillo $\mathcal{R}$ sobre un conjunto Ω cualquiera a su σ-anillo generado $S(\mathcal{R})$ (Teorema 3.2.24). Por último, una vez hayamos descrito el método de Borel, lo aplicaremos al caso del anillo generado por los semiintervalos acotados y la medida construida en la sección anterior, para así obtener la medida de Lebesgue.

Nota 3.2.7. Aunque el uso de anillos y σ-anillos puede parecer menos natural que el de álgebras y σ-álgebras habitualmente utilizado en la literatura, la realidad es que ambos enfoques son en ciertos casos equivalentes. Mientras que en el enfoque de Borel para la extensión de medidas, trabajar con anillos o álgebras supone el mismo esfuerzo, en el de Carathéodory trabajar con álgebras supone una simplificación considerable de los resultados (véase [19, Chapter 3] sobre la construcción de medidas exteriores en σ-anillos).

[3] Es importante resaltar que los reordenamientos que se realizan en las sumas están justificados gracias a la positividad de la aplicación μ.

Definición 3.2.8. Dada una sucesión de conjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, definimos el *límite superior* y el *límite inferior* como los conjuntos

$$\operatorname{lím\,sup} E_n \coloneqq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \qquad \operatorname{lím\,ínf} E_n \coloneqq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n$$

Además, si ambos coinciden diremos que la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* al conjunto

$$\operatorname{lím} E_n \coloneqq \operatorname{lím\,sup} E_n = \operatorname{lím\,ínf} E_n$$

Nota 3.2.9. Sean $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes de conjuntos, entonces $\{E_n \cup F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{E_n \cap F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{E_n \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también convergen. Además se cumple que

(i) $\operatorname{lím}(E_n \cup F_n) = \operatorname{lím} E_n \cup \operatorname{lím} F_n$

(ii) $\operatorname{lím}(E_n \cap F_n) = \operatorname{lím} E_n \cap \operatorname{lím} F_n$

(iii) $\operatorname{lím}(E_n \setminus F_n) = \operatorname{lím} E_n \setminus \operatorname{lím} F_n$

Definición 3.2.10. Sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de Ω, decimos que una sucesión de conjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ es *creciente (decreciente)* si

$$E_n \subset E_{n+1} \qquad (E_n \supset E_{n+1}) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

A la clase de los límites de sucesiones crecientes (decrecientes) de conjuntos de $\mathcal{D}$ la denotaremos $\mathcal{D}^+$ $(\mathcal{D}^-)$, mientras que a la clase de los límites de sucesiones en $\mathcal{D}$ la denotaremos $\mathcal{D}^0$. De esta manera se tienen las siguientes inclusiones,

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^+ \subset \mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^{+-}, \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{D}^- \subset \mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^{-+},$$

Lema 3.2.11. *Dado $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene que $S(\mathcal{D})^0 = S(\mathcal{D})$.*

En los siguientes resultados trabajaremos con retículos de conjuntos, para lo cual conviene recordar su definición:

Definición 3.2.12. Decimos que una clase $\mathcal{D}$ de subconjuntos de Ω es un *retículo* si

$$A, B \in \mathcal{D} \implies A \cup B, A \cap B \in \mathcal{D}$$

Lema 3.2.13. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo. Entonces $\mathcal{R}^0$ es un anillo y $\mathcal{R}^+$ $(\mathcal{R}^-)$ es un retículo de conjuntos cerrado por uniones (intersecciones) numerables.*

Demostración. Por la Observación 3.2.9, es trivial comprobar que $\mathcal{R}^0$ es un anillo y $\mathcal{R}^+$ ($\mathcal{R}^-$) son retículos. Veamos que $\mathcal{R}^+$ es cerrado por uniones numerables (el caso $\mathcal{R}^-$ es análogo), para lo cual consideramos una sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ cualquiera. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión creciente $\{E_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ convergiendo a E_n, i.e. $E_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_n^m$. Definamos los conjuntos

$$F_n^m = \bigcup_{k=1}^{n} E_k^m \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$$

Claramente $\{F_n^m\} \in \mathcal{R}$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$, ya que $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones finitas por ser un anillo. Por otro lado, $\{E_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ es una sucesión creciente para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$F_n^n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k^n \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k^{n+1} \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} E_k^{n+1} = F_{n+1}^{n+1}$$

Además se tiene que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} E_k^m = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} E_k^{k+m} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq k} E_k^n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\leq n} E_k^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^n$$

por lo que $\{F_n^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ es una sucesión creciente convergiendo a $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, y en consecuencia $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{R}^+$. □

Esta resultado nos permite, dado un anillo $\mathcal{R}$, construir una secuencia transfinita de anillos:

$$\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{R}_\alpha \subset \ldots$$

donde $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\alpha-1}^0$ si α es un ordinal sucesor, y $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ si α es un ordinal límite. La relación entre esta cadena de anillos y el σ-anillo generado no es obvia, sin embargo, el siguiente resultado establece una relación muy estrecha entre ambas que será fundamental en el enfoque de Borel.

Nota 3.2.14. De ahora en adelante utilizaremos algunos resultados de Teoría de Conjuntos sobre los números ordinales, por lo que conviene recordar algunos aspectos fundamentales de los mismos. Su construcción comienza definiendo[4] $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $4 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$, ... y continua transfinitamente de forma que para cualquier ordinal α se tiene que $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, y para cualquier conjunto A de ordinales $\bigcup_{\beta\in\mathcal{A}} \beta$ es también un ordinal. Además, si un ordinal es el sucesor de otro ordinal decimos que es un *ordinal sucesor*, mientras que si no es ni 0 ni un ordinal sucesor se dice que es un *ordinal límite*.

[4]Esta definición de los ordinales fue sugerida por Von Neumann en 1923 (véase [36]).

Esta manera de construir los ordinales tiene una gran ventaja, y es que dados dos ordinales α, β tales que $\alpha < \beta$, se tiene a la vez $\alpha \in \beta$ y $\alpha \subset \beta$ [20, Lemma 2.11]. Esta apreciación nos permite demostrar una propiedad fundamental en nuestro desarrollo: toda colección numerable de ordinales numerables está acotada superiormente por un ordinal numerable.

Para probarlo basta considerar una colección numerable $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ordinales y $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Claramente $\alpha_n \leq \alpha \; \forall\, n \in \mathbb{N}$, α es numerable (por ser unión numerable de conjuntos numerables) y además α es un ordinal, lo que prueba la propiedad. Como complemento, podemos encontrar una demostración con mayor lujo de detalles en [17], y algunos aspectos sobre la relación con el Axioma de Elección y los axiomas de Zermelo-Fraenkel en [25].

Teorema 3.2.15. *Sea un anillo $\mathcal{R}$ y ω_1 el primer ordinal no numerable. Entonces $\mathcal{R}_{\omega_1} = S(\mathcal{R})$.*

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{R}_\alpha \subset S(\mathcal{R})$ para cualquier ordinal α por inducción transfinita. Claramente $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \subset S(\mathcal{R})$, por lo que supongamos que $\mathcal{R}_\beta \subset S(\mathcal{R})$ para todo ordinal $\beta < \alpha$. Si α es un ordinal sucesor se tiene que $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}^0_{\alpha-1} \subset S(\mathcal{R})^0 = S(\mathcal{R})$, mientras que si α es un ordinal límite se cumple que $\mathcal{R}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{R}_\beta \subset S(\mathcal{R})$. Por tanto $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_{\omega_1} \subset S(\mathcal{R})$, y basta probar que $\mathcal{R}_{\omega_1}$ es un σ-anillo para concluir el resultado:

(i) Sean $E, F \in \mathcal{R}_{\omega_1}$ cualesquiera. Entonces existen ordinales $\alpha_1, \alpha_2 < \omega_1$ tal que $E \in \mathcal{R}_{\alpha_1}$ y $F \in \mathcal{R}_{\alpha_2}$. Como el conjunto de ordinales está totalmente ordenado, $\alpha_1 \leq \alpha_2$ o $\alpha_1 \leq \alpha_2$, por lo que supongamos s.p.g. que nos encontramos en el primer caso . Entonces $E \in \mathcal{R}_{\alpha_1} \subset \mathcal{R}_{\alpha_2}$ y $F \in \mathcal{R}_{\alpha_2}$, por lo que como $\mathcal{R}_{\alpha_2}$ es un anillo, $E \setminus F \in \mathcal{R}_{\alpha_2} \subset \mathcal{R}_{\omega_1}$

(ii) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_{\omega_1}$ cualquiera. Entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existe un ordinal $\alpha_n < \omega_1$ tal que $E_n \in \mathcal{R}_{\alpha_n}$, y como por la Observación 3.2.14 toda familia numerable en ω_1 está acotada, existe un ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $\alpha_n \leq \beta \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. De esta manera, como $E_n \in \mathcal{R}_{\alpha_n} \subset \mathcal{R}_\beta \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ podemos aplicar el Lema 3.2.13 para finalizar la demostración:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}^+_\beta \subset \mathcal{R}^0_\beta = \mathcal{R}_{\beta+1} \subset \mathcal{R}_{\omega_1}$$

□

Como demostraremos más adelante, la clave del método de Borel es ser capaces de extender una medida definida en un anillo $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^0$, ya que en esas condiciones podríamos recursivamente extender μ a $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, ... y continuando así transfinitamente hasta $\mathcal{R}_{\omega_1}$, que por el Teorema anterior es el σ-anillo generado por $\mathcal{R}$. Por tanto, nos centramos a continuación en la extensión al anillo $\mathcal{R}^0$. Esta requiere algo de trabajo por lo que la dividiremos es dos partes: una extensión de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^+$ (Teorema 3.2.17), y otra de $\mathcal{R}^+$ a $\mathcal{R}^0$ (Teorema 3.2.19).

Definición 3.2.16. Dado un retículo de conjuntos $\mathcal{D}$, decimos que una aplicación

$$\mu : \mathcal{D} \longrightarrow [0, \infty]$$

es una medida positiva si $\mu(\emptyset) = 0$, es monótona y numerablemente aditiva.

Teorema 3.2.17. *Una medida positiva μ en un anillo $\mathcal{R}$ admite una extensión a una medida positiva μ^+ en el retículo $\mathcal{R}^+$.*

Demostración. Definamos la aplicación

$$\mu^+ : \mathcal{R}^+ \longrightarrow [0, \infty], \qquad \mu^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) := \lim_n \mu(E_n)$$

Veamos que μ está bien definida. Tomemos dos sucesiones crecientes $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{F_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ convergiendo a $E \in \mathcal{R}^+$ cualquiera, esto es $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Como μ es continua inferiormente en $\mathcal{R}$ (Proposición 3.1.7), y como por la monotonía de μ se tiene que a sucesión $\{\mu(E_n \cap F_m)\}_{n,m}$ es creciente en n y m, deducimos que

$$\begin{aligned}\lim_n \mu(E_n) = \lim_n \mu(E_n \cap E) = \lim_n \mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (E_n \cap F_m)\Big) = \lim_n \lim_m \mu(E_n \cap F_m) = \lim_m \lim_n \mu(E_n \cap F_m)\\ = \lim_m \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap F_m)\Big) = \lim_m \mu(F_m \cap E) = \lim_m \mu(F_n)\end{aligned}$$

Probemos que μ^+ es una medida positiva en el retículo $\mathcal{R}^+$. Claramente $\mu^+(\emptyset) = 0$, por lo que veamos primero que μ^+ es monótona. Sean $E, F \in \mathcal{R}^+$ tal que $E \subset F$ cualesquiera, y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ dos sucesiones crecientes convergiendo a E y F respectivamente. Por la monotonía de μ (Proposición 3.1.7) $\mu(E_n \cap F_m) \leq \mu(F_m)$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\mu^+(E) = \lim_n \mu(E_n) = \lim_n \mu(E_n \cap F) = \lim_n \mu\Big(E_n \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m\Big) = \lim_n \mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (E_n \cap F_m)\Big)\\ = \lim_n \lim_m \mu(E_n \cap F_m) \leq \lim_n \lim_m \mu(F_m) = \lim_n \mu^+(F) = \mu^+(F)\end{aligned}$$

Finalmente, basta probar que μ es numerablemente aditiva para concluir el resultado. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}^+$ una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos. Entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión creciente $\{E_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ convergiendo a E_n, i.e. $E_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_n^m$, y podemos definir como en el Lema 3.2.13 los conjuntos $F_n^m = \bigcup_{k=1}^{n} E_k^m$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, satisfaciendo que $\{F_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente convergiendo a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Además, como $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, dado $m \in \mathbb{N}$ cualquiera $\{E_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ también es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Por tanto $\{\mu(F_n^m)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en n y m, de manera que

$$\mu^+(E) = \lim_n \mu(F_n^n) = \lim_n \lim_m \mu(F_n^m) = \lim_n \lim_m \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k^m) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lim_m \mu(E_k^m) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^+(E_k)$$

□

Veamos a continuación algunas propiedades relevantes que verifica esta extensión a $\mathcal{R}^+$.

Proposición 3.2.18. *Sea un anillo $\mathcal{R}$ y μ una medida positiva sobre el mismo. Entonces la medida positiva μ^+ en el retículo $\mathcal{R}^+$ dada por el teorema anterior verifica las siguientes propiedades:*

(i) Si $E, F \in \mathcal{R}^+$ tal que $\mu^+(E), \mu^+(F) < \infty$ entonces se cumple que

$$\mu^+(E \cup F) = \mu^+(E) + \mu^+(F) - \mu^+(E \cap F)$$

(ii) Si $E, F \in \mathcal{R}^+$, entonces se cumple que $\mu^+(E \cup F) \leq \mu^+(E) + \mu^+(F)$

(iii) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$, entonces se cumple que

$$\mu^+\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^+(E_n)$$

(iv) μ^+ es continua superiormente en $\mathcal{R}^+$.

Demostración. (i) Sean $E, F \in \mathcal{R}^+$ tal que $\mu^+(E), \mu^+(F) < \infty$. Entonces existen dos sucesiones crecientes $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ convergiendo a E y F respectivamente. Claramente $\{E_n \cup F_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{E_n \cap F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ son sucesiones crecientes convergiendo a $E \cup F$ y $E \cap F$ respectivamente, de manera que

$$\begin{aligned}\mu^+(E \cup F) &= \lim_n \mu(E_n \cup F_n) = \lim_n \big[\mu(E_n) + \mu(F_n) - \mu(E_n \cap F_n)\big] \\ &= \lim_n \mu(E_n) + \lim_n \mu(F_n) - \lim_n \mu(E_n \cap F_n) = \mu^+(E) + \mu^+(F) - \mu^+(E \cap F)\end{aligned}$$

(ii) Si $\mu^+(E) = \infty$ o $\mu^+(F) = \infty$ el resultado es trivialmente cierto y en caso contrario es consecuencia de (i).

(iii) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ cualquiera. Aplicando reiteradamente (ii) deducimos que $\mu^+(\bigcup_{n=1}^{N} E_n) \leq$

$\sum_{n=1}^{N} \mu(E_n)\ \forall N \in \mathbb{N}$, que junto con la Proposición 3.1.7[5]

$$\mu^+\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \mu^+\Big(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) = \lim_N \mu^+\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) \leq \lim_N \sum_{n=1}^{N} \mu^+(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^+(E_n)$$

(iv) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ una sucesión decreciente convergiendo a $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}^+$ tal que $\mu(E_1) < \infty$. Veamos que $\mu^+(E) = \lim_n \mu(E_n)$.

Consideremos primero el caso $E = \emptyset$, para lo cual tomamos $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, como $E_n \in \mathcal{R}^+$ existe una sucesión creciente $\{E_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ convergiendo a E_n, i.e. $E_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_n^m$. Por definición $\mu^+(E_n) = \lim_m \mu(E_n^m)$, por lo que existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^+(E_n) - \mu(E_n^{m_n}) < 2^{-n}\epsilon$. Claramente $E_n \setminus E_n^{m_n} = \bigcup_{m=m_n+1}^{\infty} E_n^m \in \mathcal{R}^+$ y $E_n^{m_n} \in \mathcal{R}^+$. Como μ^+ es monótona, $\mu(E_1) < \infty$ y $E_n, E_n^{m_n} \subset E_1$, ambos conjuntos tienen medida finita y podemos aplicar (i) para deducir que

$$\mu^+(E_n \setminus E_n^{m_n}) = \mu^+(E_n) - \mu^+(E_n^{m_n}) = \mu^+(E_n) - \mu(E_n^{m_n}) < 2^{-n}\epsilon$$

Definamos $G_n = \bigcap_{k=1}^{n} E_k^{m_k}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de manera que $G_n \in \mathcal{R}$, $G_n \subset E_n$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Es trivial comprobar que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ es una sucesión decreciente convergiendo a $\emptyset$ tal que $\mu(G_1) < \infty$, por lo que como μ es continua superiormente deducimos que $\lim_n \mu(G_n) = \mu(\emptyset) = 0$. Además $E_n \setminus G_n \in \mathcal{R}^+$, de manera que

$$\mu^+(E_n) - \mu(G_n) = \mu^+(E_n \setminus G_n) = \mu^+\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(E_n \setminus E_k^{m_k})\Big) \leq \mu^+\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(E_k \setminus E_k^{m_k})\Big) \leq \sum_{k=1}^{n}\mu^+(E_k \setminus E_k^{m_k}) < \epsilon$$

de donde tomando límites deducimos que

$$\lim_n \mu^+(E_n) = \lim_n \mu^+(E_n) - \lim_n \mu(G_n) = \lim_n \Big[\mu^+(E_n) - \mu^+(G_n)\Big] < \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\lim_n \mu^+(E_n) = 0 = \mu^+(E)$.

En el caso general $E \in \mathcal{R}^+$, por lo que existe una sucesión creciente $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ convergiendo a E. Entonces $\{E_n \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ es una sucesión decreciente convergiendo a $\emptyset$ tal que $\mu(E_1 \setminus F_1) \leq \mu(E_1) < \infty$, por lo que aplicando el primer caso se tiene que

$$\mu^+(E) = \lim_n \mu(F_n) = \lim_n \mu(F_n) - \lim_n \mu(E_n) + \lim_n \mu(E_n) = -\lim_n \mu(E_n \setminus F_n) + \lim_n \mu(E_n) = \lim_n \mu(E_n)$$

$\square$

[5] En realidad en la Proposición 3.1.7 imponemos que la clase de conjuntos sea una σ-álgebra o σ-anillo. Sin embargo, los apartados (i) y (ii) siguen siendo ciertos si la clase de conjuntos forma un retículo cerrado por uniones numerables y la medida es numerablemente aditiva (como es el caso de $\mathcal{R}^+$).

Con estos resultados estamos ya en posición de demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 3.2.19. *Una medida positiva μ en un anillo $\mathcal{R}$ admite una extensión a una medida positiva μ^0 en el anillo $\mathcal{R}^0$.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{R}^0 \subset \mathcal{R}^{+-}$ cualquiera, entonces existe una sucesión decreciente $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ convergiendo a E. Definamos la aplicación

$$\mu^0 : \mathcal{R}^0 \longrightarrow [0,\infty]$$

de manera que si $\forall\, F \in \mathcal{R}^+$ tal que $E \subset F$ se tiene que $\mu^+(F) = \infty$, entonces $\mu^0(F) \coloneqq \infty$. En caso contrario, si existe $F \in \mathcal{R}^+$ tal que $E \subset F$ y $\mu^+(F) < \infty$, entonces se puede construir una sucesión decreciente $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ convergiendo a E tal que $\mu^+(E_1) < \infty$, lo que nos permite definir $\mu^0(E) \coloneqq \lim_n \mu^+(E_n) < \infty$.

En el primer caso la aplicación está trivialmente bien definida, por lo que supongamos que existen dos sucesiones decrecientes $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{F_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ convergiendo a E y verificando $\mu^+(E_1) < \infty$, $\mu^+(F_1) < \infty$. Entonces como μ^+ es superiormente continua por la Proposición 3.2.18, podemos razonar de forma análoga a la demostración del Teorema 3.2.17, de forma que

$$\begin{aligned}\lim_n \mu^+(E_n) &= \lim_n \mu^+(E_n \cup E) = \lim_n \mu^+\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}(E_n \cup F_m)\right) = \lim_n \lim_m \mu^+(E_n \cup F_m)\\ &= \lim_m \lim_n \mu^+(E_n \cup F_m) = \lim_m \mu^+\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_m)\right) = \lim_m \mu^+(E \cup F_m) = \lim_m \mu^+(F_m)\end{aligned}$$

por lo que μ^0 está bien definida. Veamos que μ^0 es una medida positiva en $\mathcal{R}^0$. Claramente $\mu^0(\emptyset) = 0$, por lo que probemos primero que μ^0 es monótona. Sean $E, F \in \mathcal{R}^+$ cualesquiera tales que $E \subset F$. Si $\mu^0(F) = \infty$ entonces $\mu^0(E) \leq \mu^0(F)$ trivialmente, por lo que supongamos que $\mu^0(F) < \infty$. Entonces por construcción $\mu^0(E) < \infty$ necesariamente, y existen dos sucesiones decrecientes $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ convergiendo a E y F respectivamente tal que $\mu(E_1), \mu(F_1) < \infty$. Como μ^+ es monótona, $\mu(E_n) \leq \mu(E_n \cup F_m)$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, y por ser continua superiormente (Proposición 3.2.18) se tiene que

$$\begin{aligned}\mu^0(F) &= \lim_m \mu^+(F_m) = \lim_m \mu^+(F_m \cup E) = \lim_m \mu^+\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(F_m \cup E_n)\Big)\\ &= \lim_m \lim_n \mu^+(F_m \cup E_n) \geq \lim_n \lim_m \mu^+(E_n) = \lim_n \mu^+(E_n) = \mu^0(E)\end{aligned}$$

Por último, veamos que μ es numerablemente aditiva. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}^+$ una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos y $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}^0$. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^0(E_{n_0}) = \infty$, como $E_{n_0} \subset E$ y μ^0 es monótona se tiene que $\mu^0(E) = \infty = \mu^0(E_{n_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^0(E_n)$. Supongamos entonces que $\mu^0(E_n) < \infty \; \forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existe una secuencia descendente $\{E_n^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+$ tal que $E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_n^m$ y $\mu^+(E_n^1) < \infty$. Entonces por la Proposición 3.2.18 se tiene que

$$\mu^+(E_1^m \cup E_2^m) = \mu^+(E_1^m) + \mu^+(E_2^m) - \mu^+(E_1^m \cap E_2^m)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Además $\bigcup_{m=1}^{\infty}(E_1^m \cap E_2^m) = E_1 \cap E_2 = \emptyset$, por lo que tomando límites en la expresión anterior deducimos que $\mu^0(E_1 \sqcup E_2) = \mu^0(E_1) + \mu^0(E_2)$. Reiterando este argumento inductivamente concluimos por la monotonía de μ^0 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^0(E_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu^0(E_n) = \lim_{N\to\infty} \mu^0\Big(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\Big) \leq \mu^0(E)$$

Para probar la desigualdad en el sentido opuesto consideramos $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces por la construcción de μ^0, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^+(E_n^{m_n}) - \mu^0(E_n) < 2^{-n}\epsilon$, por lo que aplicando la Proposición 3.2.18 deducimos que

$$\mu^0(E) = \mu^0\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \mu^+\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{m_n}\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^+(E_n^{m_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mu^0(E_n) + 2^{-n}\epsilon\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^0(E_n) + \epsilon$$

de donde concluimos el resultado por ser $\epsilon > 0$ arbitrario. $\square$

Nota 3.2.20. De ahora en adelante denotaremos μ^0 a la extensión de la medida positiva μ a $\mathcal{R}^0$ dada por el Teorema 3.2.19.

Una vez sabemos que se puede extender cualquier medida positiva definida en un anillo $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^0$, la secuencia transfinita de anillos que se definió anteriormente cobra especial importancia, lo que da pie a la siguiente definición.

Definición 3.2.21. Sea un anillo $\mathcal{R}$, y consideremos la secuencia transfinita de anillos:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{R}_\alpha \subset \ldots$$

Decimos que una extensión de una medida positiva μ en $\mathcal{R}$ a una medida positiva μ_α en $\mathcal{R}_\alpha$ es *normal* si para todo ordinal sucesor $\beta \leq \alpha$ se verifica que:

$$\mu_\beta = \mu_{\beta-1}^0$$

Nota 3.2.22. Toda extensión normal (si existe) es única.

Antes de discutir si existen extensiones normales necesitamos el siguiente lema, en el cual asumiremos su existencia para un ordinal arbitrario.

Lema 3.2.23. *Sea μ una medida positiva definida en un anillo $\mathcal{R}$, α un ordinal y μ_α una extensión normal de la misma. Entonces dado $\epsilon > 0$, para todo $E \in \mathcal{R}_\alpha$ de medida finita existe $E^+ \in \mathcal{R}^+$ tal que $E \subset E^+$ y $\mu_\alpha(E^+) - \mu_\alpha(E) < \epsilon$.*

Demostración. Probemos el resultado por inducción transfinita. Claramente este se cumple para $\alpha = 0$, por lo que probemos el resultado para un ordinal α asumiendo que es cierto para todo ordinal $\beta < \alpha$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y $E \in \mathcal{R}_\alpha$ cualquiera tal que $\mu_\alpha(E) < \infty$. Si α es un ordinal sucesor, supongamos primero que $E \in \mathcal{R}^+_{\alpha-1}$, de manera que existe una sucesión creciente $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_{\alpha-1}$ tal que $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Por hipótesis de inducción $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $E_n^+ \in \mathcal{R}^+$ tal que $E_n \subset E_n^+$ y $\mu_\alpha(E_n^+) - \mu_\alpha(E_n) < 2^{-n}\epsilon$. Definiendo $E^+ := \bigcup_{n=1}^\infty E_n^+ \in \mathcal{R}^+$, está claro que $E \subset E^+$ y además se cumple que

$$\mu_\alpha(E^+) - \mu_\alpha(E) = \mu_\alpha(E^+ \setminus E) = \mu_\alpha\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (E_n^+ \setminus E)\Big) \leq \mu_\alpha\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (E_n^+ \setminus E_n)\Big) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_\alpha(E_n^+ \setminus E_n) < \epsilon$$

Consideremos el caso general $E \in \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}^0_{\alpha-1}$. Como $\mu^0(E) < \infty$, por definición existe una sucesión decreciente $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}^+_{\alpha-1}$ convergiendo a E tal que $\mu_\alpha(E_1) < \infty$ y $\mu_\alpha(E) = \lim_n \mu_\alpha(E_n) < \infty$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_\alpha(E_m) - \mu_\alpha(E) < \epsilon/2$, por lo que aplicando el caso anterior a E_m sabemos que existe $E^+ \in \mathcal{R}^+$ tal que $\mu_\alpha(E^+) - \mu_\alpha(E_m) < \epsilon/2$. De esta manera se tiene que

$$\mu_\alpha(E^+) - \mu_\alpha(E) = \mu_\alpha(E^+) - \mu_\alpha(E_m) + \mu_\alpha(E_m) - \mu_\alpha(E) < \epsilon$$

En el caso en el que α es un ordinal límite $E \in \mathcal{R}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{R}_\beta$, por lo que existe un ordinal sucesor $\beta < \alpha$ tal que $E \in \mathcal{R}_\beta$ y el resultado se sigue por el caso anterior. □

Con este último lema estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección, que culmina el planteamiento propuesto por Borel sobre la extensión de medidas.

Teorema 3.2.24. *Sea μ una medida positiva definida en un anillo $\mathcal{R}$. Entonces μ admite una extensión $\bar{\mu}$ al σ-anillo $S(\mathcal{R})$, que se corresponde con su extensión normal.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.15, sabemos que $S(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{\omega_1}$ donde ω_1 es el primer ordinal no numerable. Por tanto, utilizando la inducción transfinita basta probar la existencia de una extensión normal μ_α para un ordinal $0 < \alpha \leq \omega_1$ asumiendo la existencia de extensiones normales para cualquier ordinal $\beta < \alpha$.

Si α es un ordinal sucesor, como $\mu_{\alpha-1}$ es una extensión normal de μ, entonces $\mu_\alpha := \mu^0_{\alpha-1}$ es también una extensión normal de μ. Supongamos entonces que α es un ordinal límite, de manera que

$\mathcal{R}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{R}_\beta$. Sea $E \in \mathcal{R}_\alpha$ cualquiera, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $E \in \mathcal{R}_\beta$, por lo que definimos $\mu_\alpha(E) := \mu_\beta(E)$. Como los ordinales $\beta < \alpha$ forman un conjunto bien ordenado y μ_β es una extensión normal de μ $\forall\, \beta < \alpha$, μ_α está trivialmente bien definida y es monótona. Por tanto, basta probar que μ_α es numerablemente aditiva, para lo cual tomamos una familia numerable $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_\alpha$ de conjuntos disjuntos dos a dos tal que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}_\alpha$$

Sabemos entonces que existe un ordinal $\tilde{\alpha} < \alpha$ tal que $E \in \mathcal{R}_\alpha$ y existen $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ordinales $\alpha_n < \alpha$ tal que $E_n \in \mathcal{R}_{\alpha_n}$. Definamos el ordinal $\beta_N = \bigcup_{n=1}^{N} \alpha_n \cup \tilde{\alpha} < \alpha$ para cada $N \in N$. Claramente $E_n, E \in \mathcal{R}_{\beta_N}$ $\forall\, 1 \leq n \leq N$ por lo que

$$\mu_\alpha(E) = \mu_{\beta_n}(E) \geq \mu_{\beta_n}(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu_{\beta_N}(E_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu_\alpha(E_n)$$

de donde tomando el límite $N \to \infty$ deducimos que $\mu_\alpha(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\alpha(E_n)$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_\alpha(E_n) = \infty$ la desigualdad contraria es trivial, por lo que supongamos que $\mu_\alpha(E_n) < \infty$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces dado $\epsilon > 0$ cualquiera, por el Lema 3.2.23 se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n^+ \in \mathcal{R}^+$ tal que $E_n \subset E_n^+$ y $\mu_\alpha(E_n^+) - \mu_\alpha(E_n) < 2^{-n}\epsilon$. Además, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+ \in \mathcal{R}^+$, por lo que

$$\mu_\alpha(E) \leq \mu_\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\alpha(E_n^+) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_\alpha(E_n) + 2^{-n}\epsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\alpha(E_n) + \epsilon$$

de donde concluimos la demostración por ser $\epsilon > 0$ arbitrario.

□

Nota 3.2.25. Es importante destacar que aunque la extensión normal de $\mathcal{R}$ a $S(\mathcal{R})$ es única, pueden existir otras extensiones de $\mathcal{R}$ a $S(\mathcal{R})$ no normales. Sin embargo, si la medida original es σ-finita puede probarse (véase [19, Theorem A pág. 54]) que la extensión a $S(\mathcal{R})$ es única.

3.2.3. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

El Teorema anterior nos permite extender la medida positiva que se construyó en el Teorema 3.2.5 definida en el anillo $\mathcal{R}$ (generado por los semiintervalos acotados) a una medida positiva

$$\mathrm{m} : S(\mathcal{R}) \longrightarrow [0, \infty]$$

La clave está en que trivialmente $S(\mathcal{R}) = S(\mathcal{C})$, y por la Proposición 3.2.26 se tiene que $S(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, de manera que en realidad hemos construido una medida

$$\mathrm{m} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$$

que generaliza la longitud de un intervalo, i.e. satisfaciendo que $\forall\, a \leq b$,

$$\mathrm{m}([a, b)) = b - a$$

Esta medida es la que conoce en la literatura como *la medida de Lebesgue unidimensional.*

Proposición 3.2.26. *Sea $\mathcal{C}$ la clase de semiintervalos acotados. Entonces*

$$S(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Demostración. Es trivial comprobar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$, por lo que basta probar que $\sigma(\mathcal{C}) = S(\mathcal{C})$. Claramente $S(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$, y como $S(\mathcal{C})$ es σ-anillo,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1) \in S(\mathcal{C})$$

De esta manera $S(\mathcal{C})$ es además σ-álgebra, por lo que $\sigma(\mathcal{C}) \subset S(\mathcal{C})$. □

3.3. Construcción de la medida de Lebesgue (Carathéodory)

El método de Carathéodory para la extensión de medidas es, aunque equivalente al de Borel para la medida de Lebesgue, radicalmente distinto en su planteamiento. Por un lado, el método de Borel busca ir extendiendo poco a poco el dominio en el que está definida la medida, consiguiendo así trabajar con anillos con más y más elementos hasta llegar al σ-anillo generado.

Por otro lado, el método de Carathéodory se desentiende en un principio de los conjuntos medibles y pasa a trabajar con funciones definidas sobre las partes del conjunto: las medidas exteriores. Una vez se conoce la medida exterior la idea es sencilla: se construye una σ-álgebra en la que la restricción de la medida exterior es una medida positiva. De esta manera el objeto fundamental en el tratamiento de Carathéodory no son las medidas, sino las medidas exteriores, cuya definición exponemos a continuación.

Definición 3.3.1. Una *medida exterior* en Ω es una función $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ verificando las siguientes condiciones:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) μ^* es *monótona*

(iii) μ^* es *σ-subaditiva* o *numerablemente subaditiva*, es decir, si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ entonces

$$\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Aunque el método de Carathéodory parece mucho más simple que el de Borel, la existencia de estas medidas exteriores no es para nada trivial. En algunas ocasiones se tiene una función $\mathbb{R}$-valuada definida en una clase pequeña de conjuntos $\mathcal{C}$, y se define la medida exterior de un conjunto cualquiera utilizando recubrimientos numerables de elementos de $\mathcal{C}$ (Ejemplo 3.3.2). En otro casos hay que combinar este tipo de argumentos con otros de tipo límite, como pueden ser las *medidas exteriores de Hausdorff p-dimensionales* [19].

Ejemplo 3.3.2. Medida exterior de Lebesgue. En $\mathbb{R}$, para cada $A \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : a_n \leq b_n,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n)\}$$

define una medida exterior en $\mathbb{R}$ conocida como la *medida exterior de Lebesgue.*

Una vez tenemos algo de intuición sobre las medidas exteriores estamos en condiciones de presentar el método de Carathéodory. Además, dado que este es el enfoque planteado en la asignatura de Análisis Matemático III del Grado de Matemáticas, nos limitaremos a enunciar los siguientes resultados sin demostración.

Definición 3.3.3. Sea μ^* una medida exterior en Ω. Diremos que $E \subset \Omega$ es μ^*-medible si para todo $A \subset \Omega$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

y denotaremos $\mathcal{A}_*$ a la clase de los conjuntos μ^*-medibles.

Teorema 3.3.4 (Carathéodory)**.** *Sea μ^* una medida exterior en Ω. Entonces $\mathcal{A}_*$ es una σ-álgebra, la restricción de μ^* a $\mathcal{A}_*$ es una medida positiva y $(\Omega, \mathcal{A}_*, \mu^*|_{\mathcal{A}_*})$ es un espacio de medida completo.*

Definición 3.3.5. En el caso de la medida exterior de Lebesgue, el Teorema de Carathédory construye un espacio de medida completo

$$(\mathbb{R}, \mathcal{A}_*, m^*\big|_{\mathcal{A}_*}) \equiv (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$$

Diremos que m es la *medida de Lebesgue 1-dimensional* y que los conjuntos de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ son *medibles de Lebesgue* en $\mathbb{R}$.

Nota 3.3.6. El método de Carathéodory permite por tanto construir una medida positiva a partir de una medida exterior general, sin embargo, cuando particularizamos al caso de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$) este enfoque podría considerarse innecesariamente abstracto. Una alternativa más orientada a $\mathbb{R}$ es aquella de Facenda y Freniche en [1], donde se construye la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ a partir de la descomposición de un abierto en una unión numerable de intervalos diádicos.

A priori no existe una buena intuición sobre los conjuntos medibles de Lebesgue. Es por esto que en los siguientes resultados veremos cuál la relación que tiene esta σ-álgebra con los conjuntos abiertos y cerrados en la topología usual de $\mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, con la σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ formada por los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$.

Proposición 3.3.7. *Todo abierto de $\mathbb{R}$ con la topología usual es medible de Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Teorema 3.3.8 (Caracterización topológica de los conjuntos medibles de Lebesgue)**.** *Sea $E \subset \mathbb{R}$, entonces los s.e.s.e.*

(i) $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$

(ii) $\forall\, \epsilon > 0 : \exists O \subset \mathbb{R}$ *abierto tal que* $E \subset O$ *y* $m(O \setminus E) < \epsilon$

(iii) $\forall\, \epsilon > 0 : \exists C \subset \mathbb{R}$ *cerrado tal que* $C \subset E$ *y* $m(E \setminus C) < \epsilon$

(iv) $\forall\, \epsilon > 0 : \exists C \subset \mathbb{R}$ *cerrado,* $O \subset \mathbb{R}$ *abierto tal que* $C \subset E \subset O$ *y* $m(O \setminus C) < \epsilon$

A raíz de esta caracterización podemos pensar en los conjuntos medibles de Lebesgue como conjuntos que pueden aproximarse bien por abiertos o cerrados, lo que incluye a conjuntos ciertamente patológicos, como pueden ser los *conjuntos nulos de Lebesgue* (conjuntos con medida de Lebesgue nula). Entre ellos destaca por su utilidad a la hora de dar contraejemplos el siguiente conjunto, comúnmente conocido como el *conjunto de Cantor*.

Ejemplo 3.3.9. Conjunto de Cantor. La construcción del Conjunto de Cantor comienza de la siguiente manera: dividamos el intervalo unidad $[0,1]$ en tres subintervalos cerrados de longitud $1/3$, y eliminemos el intervalo central para definir $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Volvamos a dividir $[0,1/3]$ y $[2/3,1]$ en tres subintervalos de longitud $1/9$, y eliminemos los intervalos centrales para definir $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1]$. Continuemos este proceso recursivo para construir $C_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_k^n$ donde $\{I_k^n\}_{k=0}^n$ son intervalos disjuntos dos a dos de longitud 3^{-n}, y definamos el *Conjunto de Cantor* como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

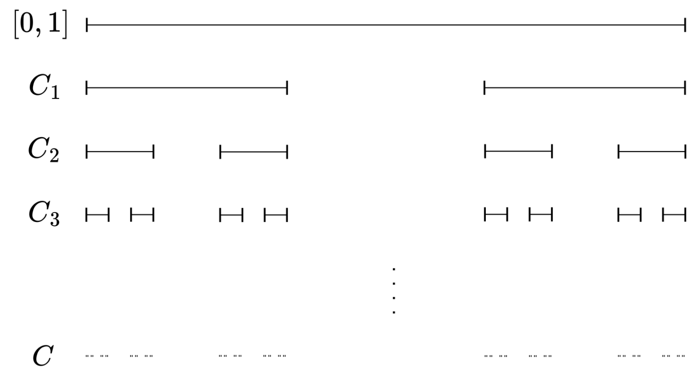

Figura 3.1: Construcción del conjunto de Cantor.

Claramente C es cerrado, por lo que $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Además como $m(C_1) \leq m([0,1]) < \infty$ y m es continua superiormente se tiene que

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_n m(C_n) = \lim_n \sum_{k=0}^{2^n-1} m(I_k^n) = \lim_n \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{3^n} = \lim_n \left(\frac{2^n}{3^n}\right) = 0$$

Por tanto el Conjunto de Cantor es un conjunto nulo de Lebesgue, y además tiene la cardinalidad del continuo. Para demostrar esta última afirmación basta tener en cuenta que por su construcción todo elemento $x \in C$ se puede expresar de forma única como $x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n 3^{-n}$ donde $b_n \in \{0,2\}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces podemos definir la aplicación $f : C \to [0,1]$ de manera que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2} 2^{-n}$. Como todo elemento de $[0,1]$ tiene una expansión en base 2 de la forma anterior, la aplicación f es suprayectiva, y en consecuencia $\mathrm{card}(C) = \mathrm{card}([0,1]) = \mathfrak{c}$.

Llegados a este punto es interesante discutir la relación entre los borelianos y los conjuntos medibles de Lebesgue, dado que las construcciones de Borel y Carathéodory acaban definiendo estas dos σ-álgebras. Aunque por la Proposición 3.3.7 se deduce trivialmente que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$, la inclusión en el sentido opuesto no es cierta, lo que implica la existencia de conjuntos medibles de Lebesgue que no son borelianos. Es posible construir explícitamente numerosos ejemplos de estos conjuntos aunque el proceso es generalmente laborioso, por lo que optamos por utilizar un escueto argumento en términos de cardinales.

Por un lado sabemos que como el conjunto de cantor tiene medida nula, todo subconjunto suyo es medible de Lebesgue, de manera que $\mathrm{card}(\mathcal{L}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(C)) = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$.[6] Por otro lado sabemos por el Teorema 3.2.15 y la Proposición 3.2.26 que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{R}_{\omega_1} = \bigcup_{\beta<\omega_1} \mathcal{R}_\beta$ donde $\mathcal{R}$ es el anillo

[6] La última desigualdad se sigue de que para todo conjunto X, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(X)) > \mathrm{card}(X)$ [20].

generado por los semiintervalos acotados. Entonces como $\mathrm{card}(\omega_1) \leq \mathfrak{c}$ y $\mathrm{card}(\mathcal{R}_\beta) < \mathfrak{c}\ \forall \beta < \mathfrak{c}$, deducimos por [16, Proposición 0.14] que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathfrak{c}$, de forma que

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) < \mathrm{card}(\mathcal{L}(\mathbb{R})) \implies \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

Por último, establecemos la relación entre los borelianos y los conjuntos medibles de Lebesgue con el siguiente teorema.

Teorema 3.3.10. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ *es la complección de* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$

Nota 3.3.11. Otra cuestión relevante es si $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, ya que en caso contrario sería posible medir cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue. Como cabe esperar no todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible de Lebesgue, aunque todas las demostraciones recurren al axioma de elección. Tanto es así, que Solovoy [31] probó que es imposible demostrar la existencia de conjuntos no medibles de Lebesgue sin el axioma de elección.

3.4. Propiedades de la medida de Lebesgue

A continuación estudiaremos algunas de las propiedades más relevantes de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (las cuales se trasladan también a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$). En concreto, veremos que la medida de Lebesgue conserva la longitud de los intervalos acotados, es invariante por traslaciones, regular y además es la única en estas condiciones.[7]

Nota 3.4.1. En este contexto es interesante mencionar una generalización de la medida de Lebesgue para grupos localmentes compactos: la *medida de Haar*. La clave de esta medida es que está definida sobre los borelianos del grupo topológico, es regular e invariante por traslaciones (por la derecha o por la izquierda). Esto hace que muchas de las construcciones que se realizan a partir de integral de Lebesgue sigan siendo válidas para las medidas de Haar (véase [19, Chapter XI] para un desarrollo detallado las medidas de Haar).

Teorema 3.4.2 (Invarianza por traslaciones)**.** *Sea* $x \in \mathbb{R}$ *y* $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$*, entonces* $x + B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ *y* $\mathrm{m}(B) = \mathrm{m}(x + B)$*. Además si* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, entonces* $x + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

Demostración. Claramente $\mathrm{m}([a, b)) = b - a$ es invariante por traslaciones sobre la clase de semiintervalos acotados, por lo que también lo será su medida exterior asociada $\mathrm{m}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$. Sea

[7] En realidad las dos primeras propiedades ya implican la unicidad de la medida de Lebesgue.

$B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$ cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}^*(A) &= \mathrm{m}^*(-x+A) = \mathrm{m}^*((-x+A)\cap B) + \mathrm{m}^*((-x+A)\cap B^c) \\
&= \mathrm{m}^*(x+(-x+A)\cap B) + \mathrm{m}^*(x+(-x+A)\cap B^c) \\
&= \mathrm{m}^*(A\cap(x+B)) + \mathrm{m}^*(A\cap(x+B^c)) = \mathrm{m}^*(A\cap(x+B)) + \mathrm{m}^*(A\cap(x+B)^c)
\end{aligned}$$

por lo que $x+B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ y $\mathrm{m}(B) = \mathrm{m}^*(B) = \mathrm{m}^*(x+B) = \mathrm{m}(x+B)$. Si además $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, como la aplicación $T_x : y \in \mathbb{R} \to x+y \in \mathbb{R}$ es un homeomorfismo, es en concreto medible, por lo que $x+B = T_x(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Teorema 3.4.3 (Unicidad)**.** *Sea μ una medida positiva definida en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariante por traslaciones tal que $\mu([0,1)) < \infty$. Entonces existe $c \in [0,\infty)$ tal que $\mu(A) = c\cdot \mathrm{m}(A)$ para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Denotemos $c = \mu([0,1)) \in [0,\infty)$ y veamos que $\mu = c\,m$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Probémoslo primero para la clase $\mathcal{C}$ de semiintervalos acotados, para lo cual tomamos $p/q \in \mathbb{Q}^+$ cualquiera. Entonces por la invarianza bajo traslaciones de μ,

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\Big[0,\frac{p}{q}\Big)\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{p}\Big[\frac{k-1}{q},\frac{k}{q}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{p}\mu\Big(\Big[\frac{k-1}{q},\frac{k}{q}\Big)\Big) = p\mu\Big(\Big[0,\frac{1}{q}\Big)\Big) \\
&= \frac{p}{q}q\mu\Big(\Big[0,\frac{1}{q}\Big)\Big) = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{q}\mu\Big(\Big[\frac{k-1}{q},\frac{k}{q}\Big)\Big) = \frac{p}{q}\mu([0,1)) = \frac{p}{q}c
\end{aligned}$$

Consideremos un semiintervalo $[a,b)$ con $a<b$ cualquiera. Sabemos entonces que existe una secuencia $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}^+$ tal que $q_n \uparrow b-a$, y como $[a,b) = a+[0,b-a)$, por la invarianza bajo traslaciones de μ y m se tiene que

$$\mu([a,b)) = \mu([0,b-a)) = \mu\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,q_n)\Bigg) = \lim_n \mu([0,q_n)) = \lim_n cq_n = c\cdot(b-a) = c\cdot m([a,b))$$

de manera que $\mu = c\,m$ sobre $\mathcal{C}$. Para probar que $\mu = c\,m$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tomemos $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\{I_n\} \subset \mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Entonces

$$\mu(A) \le \mu\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Bigg) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$$

por lo que por definición $\mu(A) \le c\,\mathrm{m}^*(A) = c\,\mathrm{m}(A)$. Para probar la desigualdad contraria supongamos primero que $A \subset [-n,n) = J_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$c\,\mathrm{m}(A) = c\,\mathrm{m}(J_n) - c\,\mathrm{m}(J_n\cap A) = \mu(J_n) - c\,\mathrm{m}(J_n\cap A) \le \mu(J_n) - \mu(J_n\cap A) = \mu(A)$$

que junto a la desigualdad anterior implica que $\mu(A) = c\,\mathrm{m}(A)$. Si A se encuentra el caso más general, aplicando el caso anterior se tiene que

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap J_n)\right) = \lim_n \mu(A \cap J_n) = c \lim_n \mathrm{m}(A \cap J_n) = c\,\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap J_n)\right) = c\,\mathrm{m}(A)$$

de donde se concluye el resultado. □

Teorema 3.4.4 (Regularidad)**.** *La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es regular.*

Demostración. Esto es consecuencia directa de la Caracterización Topológica de los conjuntos medibles de Lebesgue (Teorema 3.3.8). □

3.5. La integral de Lebesgue

Originalmente, la idea de Lebesgue a la hora de desarrollar su integral fue estudiar qué propiedades quería que la "integral" tuviese y, una vez tenía una buena descripción de las mismas, intentaba deducir la integral a partir de sus propiedades. Sin embargo, este enfoque sobre la definición de su integral ha caído en el olvido, y a día de hoy predomina en la literatura un procedimiento constructivo que será el que utilizaremos en este trabajo.

Nota 3.5.1. Este planteamiento fue el que se desarrolló en la asignatura de Análisis III del Grado de Matemáticas, por lo que nos limitaremos a enunciar los resultados sin su correspondiente demostración. En caso de consulta, estas pueden encontrarse en [4], [16], [19] o [38].

La idea primordial de la construcción es definir la integral de una función característica como la medida del conjunto que la define. A partir de ahí, extenderemos esta definición progresivamente a las funciones simples, funciones medibles positivas y finalmente a las funciones *sumables*. Sin embargo, antes de abordar estas etapas de la construcción debemos introducir algunas nociones básicas sobre las funciones medibles.

Nota 3.5.2. Dado que de ahora en adelante $\overline{\mathbb{R}}$ cobra cierta relevancia en los argumentos, es importante comentar algunos aspectos fundamentales sobre el mismo. Si bien $\overline{\mathbb{R}}$ surge desde un punto de vista topológico como una compactificación por dos puntos de $\mathbb{R}$, es posible dotarlo de estructura algebraica extendiendo las operaciones aritméticas básicas de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty \text{ para todo } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x/\infty = x/-\infty = 0 \text{ para todo } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty \text{ para todo } \forall x \in (0, \infty]$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty \text{ para todo } \forall x \in [-\infty, 0)$$

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$$

Con estas definiciones es fácil demostrar que se mantienen las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. [8]

3.5.1. Funciones medibles

Aunque la integral de Lebesgue se puede construir también a partir de σ-anillos [19] o inclusive álgebras [15], el contexto más apropiado para desarrollar la teoría de integración de Lebesgue son las σ-álgebras. Por tanto, de ahora en adelante trabajaremos únicamente con estas últimas.

Definición 3.5.3. Decimos que una aplicación entre espacios medibles

$$F : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$$

es *medible* si $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ para cada $B \in \mathcal{A}_2$. Además, si $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ — o $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ — diremos que F es *Borel medible* o *medible*, mientras que si $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ diremos que F es *Lebesgue medible.*

Nota 3.5.4. Es importante observar que si $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es medible, también lo es extendida a $\overline{\mathbb{R}}$ como $f : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ pues la inclusión $i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es continua y en consecuencia medible. Por tanto, toda función real la entenderemos sobre $\overline{\mathbb{R}}$.

Aunque en un principio debemos comprobar que toda preimagen de un boreliano de $\mathbb{R}$ se encuentra en la σ-álgebra correspondiente para probar que una función es medible, la siguiente caracterización nos permite limitarnos a estudiar los intervalos de la forma $(-\infty, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.[9]

Proposición 3.5.5. *Sea $f : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) f es medible

[8] Las expresiones $\infty - \infty$ y ∞/∞ (denominadas *formas indeterminadas*) se dejan indefinidas.

[9] Se podría obtener el mismo resultado considerando los intervalos de la forma (a, ∞) o (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\{\, x \in \Omega \,|\, f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\{\, x \in \Omega \,|\, f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$

Veamos ahora cómo se comportan las funciones medibles bajo operaciones lineales, de retículo y con límites de sucesiones de funciones.

Proposición 3.5.6. *Sean* $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *medibles y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces,*

(i) Si $f + g$ *está bien definida,* $f + g$ *es medible*

(ii) Si λf *está bien definida,* λf *es medible*

(iii) Si $f \cdot g$ *está bien definida,* $f \cdot g$ *es medible*

Proposición 3.5.7. *Sea* $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *una sucesión de funciones medibles. Entonces,*

(i) f_n^+ *y* f_n^- *son medibles* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) $|f_n|$ *son medibles* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

(iii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *y* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *son medibles*

(iv) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ *y* $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ *son medibles*

(v) Si $\lim\limits_{n} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ *existe para cada* $x \in \mathcal{A}$, *entonces* $\lim\limits_{n} f_n$ *es medible*

Las funciones medibles también se comportan bien bajo la composición de funciones:

Proposición 3.5.8. *Sean* $f : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}))$ *y* $g : (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *funciones medibles. Entonces* $g \circ f$ *es medible.*

Nota 3.5.9. Es importante destacar que el resultado anterior no es cierto en general cuando componemos dos funciones Lebesgue medibles [10]. Por tanto, por esta y otras patalogías de las funciones Lebesgue medibles, de ahora en adelante dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ escribiremos

$$f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

para hacer referencia a una función medible, entendiendo que trabajamos sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ respectivamente.

[10] El conjunto de Cantor permite se puede utilizar para construir sin mucho esfuerzo dos funciones en estas condiciones [19, pág. 83]

Veamos ahora una clase de funciones medibles de especial utilidad a la hora de definir la integral de Lebesgue:

Definición 3.5.10. Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$, decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es *simple* si es medible y toma un número finito de valores. Además, denotaremos $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$ a la clase de las funciones medibles definidas en $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposición 3.5.11. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es simple si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$, $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \qquad y \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

El siguiente resultado da una idea de por qué las funciones simples son de especial relevancia para la construcción de la integral de Lebesgue.

Teorema 3.5.12. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y una función $f : \Omega \to [0, \infty]$. Entonces existe una sucesión creciente $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$ tal que $0 \leq f_n \leq n \; \forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \uparrow f$.*

3.5.2. Integral de funciones medibles

Una vez conocemos algunas de las propiedades de las funciones medibles, podemos comenzar por definir la *integral de Lebesgue* para las funciones simples medibles:

Definición 3.5.13. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $h \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A})$ no negativa y $A \in \mathcal{A}$. Por la Proposición 3.5.11 sabemos que

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$$

donde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$, $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Definimos la *integral de h respecto de μ sobre A* como el valor

$$(\mathcal{L}) \int_A h \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap A) \in [0, \infty]$$

Nota 3.5.14. Aunque esta definición parece depender de a_i y A_i $1 \leq i \leq n$, se puede comprobar fácilmente que la integral definida no depende de la descomposición de la función simple en funciones características.

Por el Teorema 3.5.12 las funciones medibles no negativas se aproximan bien por funciones simples medibles, por lo que parece razonable definir su integral a partir de estas últimas:

Definición 3.5.15. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible y $A \in \mathcal{A}$. Definimos la *integral de f respecto de μ sobre A* como

$$(\mathcal{L}) \int_A f \, d\mu = \sup \left\{ (\mathcal{L}) \int_A s \, d\mu \, : s \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A}), 0 \leq s \leq f \right\}$$

Por último, la extensión a una función medible general se realiza por descomposición en su parte positiva y negativa, aunque hay que imponer adicionalmente que ambas integrales no sean ∞ para evitar formas indeterminadas.

Definición 3.5.16. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y $A \in \mathcal{A}$. Decimos que f es *integrable (en el sentido de Lebesgue) sobre A* si

$$(\mathcal{L}) \int_A f^+ \, d\mu < \infty \qquad \text{ó} \qquad (\mathcal{L}) \int_A f^- \, d\mu < \infty$$

y que f es *sumable (en el sentido de Lebesgue) sobre A* si

$$(\mathcal{L}) \int_A f^+ \, d\mu < \infty \qquad \text{y} \qquad (\mathcal{L}) \int_A f^- \, d\mu < \infty$$

En ambos casos se define la *integral de f respecto de μ sobre A* como

$$(\mathcal{L}) \int_A f \, d\mu = (\mathcal{L}) \int_A f^+ \, d\mu - (\mathcal{L}) \int_A f^- \, d\mu$$

Además, denotaremos $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ a la clase de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sumables sobre Ω.

Nota 3.5.17. Dada una función medible $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$; $|f| = f^+ + f^-$, por lo que f es sumable si y solo si $|f|$ es sumable.

Nota 3.5.18. Esta definición de la integral de Lebesgue es compatible con la restricción del espacio de medida, es decir, f es sumable sobre B si y solo si $f|_B \in \mathcal{L}_1(B, \mathcal{A}_B, \mu|_B)$.

Nota 3.5.19. Hay varios razones para no tener en cuenta funciones que tomen valores $\pm\infty$ en $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. En primer lugar el siguiente resultado (Proposición 3.5.20) muestra que toda función sumable es finita en casi todo punto, por lo que como para la teoría de integración desarrollada por Lebesgue dos funciones que coinciden en casi todo punto son indistinguibles, podemos asumir siempre que la función es finita en todo punto. Por otro lado $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio vectorial (lo cual es una propiedad de interés en toda teoría de integración) mientras que la clase de las funciones $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ no lo es en general.

Proposición 3.5.20. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función sumable. Entonces existe $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $f = g$ μ-a.e.*

3.6. Propiedades de retículo y linealidad

Como cabía esperar, esta integral cumple con creces los estándares impuestos por la integral de Riemann. Veamos a continuación algunas propiedades de linealidad y retículo que satisface la integral de Lebesgue.

Proposición 3.6.1 (Linealidad sobre el integrando)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $A \in \mathcal{A}$*,* $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Entonces se tiene que* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, y además se cumple que*

$$(\mathcal{L}) \int_A (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \left[(\mathcal{L}) \int_A f\, d\mu \right] + \beta \left[(\mathcal{L}) \int_A g\, d\mu \right]$$

Proposición 3.6.2 (Propiedades de retículo)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $A \in \mathcal{A}$*,* $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*. Entonces se tiene que*

(i) Si $f \leq g \implies (\mathcal{L}) \int_A f\, d\mu \leq (\mathcal{L}) \int_A g\, d\mu$

(ii) $\left| (\mathcal{L}) \int_A f\, d\mu \right| \leq (\mathcal{L}) \int_A |f|\, d\mu$

Proposición 3.6.3 (Linealidad sobre el dominio)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $A \in \mathcal{A}$*,* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ *disjuntos dos a dos y* $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*. Entonces se tiene que*

(i) $(\mathcal{L}) \int_A f\, d\mu = (\mathcal{L}) \int_\Omega \chi_A f\, d\mu$

(ii) $(\mathcal{L}) \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathcal{L}) \int_{A_i} f\, d\mu$

3.7. Teoremas de convergencia

A diferencia de la integral de Riemann, donde la herramienta más común para intercambiar límite e integral es la convergencia uniforme, en la integral de Lebesgue hay un gran abanico de teoremas sobre la convergencia de las integrales de una sucesión de funciones. A continuación presentamos los que se suelen considerar fundamentales en todo curso de Teoría de la Medida.

Teorema 3.7.1 (Convergencia Monótona)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una secuencia de funciones medibles no negativas tal que* $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$*. Sea* $f(x) = \lim_n f_n(x)$ $\forall\, x \in \Omega$*, entonces se tiene que*

$$(\mathcal{L}) \int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \left((\mathcal{L}) \int_\Omega f_n\, d\mu \right)$$

Lema 3.7.2 (Fatou). *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia de funciones medibles no negativas. Entonces*

$$(\mathcal{L}) \int_{\Omega} (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left((\mathcal{L}) \int_{\Omega} f_n \, d\mu \right)$$

Teorema 3.7.3 (Convergencia Dominada). *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{n} f$ μ-a.e . Si existe $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g \; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$(\mathcal{L}) \int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{L}) \int_{\Omega} f_n \, d\mu \right)$$

Nota 3.7.4. Otro de los teoremas clásicos de la integral de Lebesgue es el Teorema de Fubini-Tonelli, Sin embargo, dado que el objetivo de este trabajo es estudiar las teorías de integración sobre la recta real, no hará falta adentrarnos en la teoría sobre medidas y espacios de medida producto.

3.8. Relación con la integral de Riemann

Una vez hemos construido la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue y la integral de Lebesgue, estamos ya en condiciones de analizar esta integral sobre la recta real. El objetivo de las siguientes secciones es estudiar la relación entre la integral Riemann y la de Lebesgue. Al igual que antes, los siguientes resultados fueron probados en la asignatura de Análisis III del Grado de Mateméticas, por lo que los enunciaremos sin demostración.

Nota 3.8.1. De ahora en adelante $[a,b]$ será un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, y adoptaremos la notación

$$\mathcal{L}_1([a,b]) \coloneqq \mathcal{L}_1\big([a,b], \mathcal{L}(\mathbb{R})\big|_{[a,b]}, m\big|_{[a,b]}\big)$$

$$\mathcal{L}_1([a,\infty)) \coloneqq \mathcal{L}_1\big([a,\infty), \mathcal{L}(\mathbb{R})\big|_{[a,\infty)}, m\big|_{[a,\infty)}\big)$$

En el Capítulo sobre la integral de Riemann no se comentó ninguna condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable en el sentido de Riemann. Sin embargo, desde el marco de la Teoría de la Medida existe una caracterización de las funciones integrables Riemann en términos de la medida de Lebesgue:

Teorema 3.8.2 (Caracterización de las funciones integrables Riemann). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces $f \in \mathcal{R}([a,b])$ si y solo si f es continua m-a.e.*

En cuanto a la relación entre ambas integrales, el siguiente resultado expone que sobre los intervalos compactos la integral de Lebesgue generaliza a la de Riemann. Además esta generalización es estricta, i.e. $\mathcal{R}([a,b]) \subsetneq \mathcal{L}([a,b])$, ya que en el Ejemplo 3.8.4 construimos una función sumable en el sentido de Lebesgue que no es integrable en el sentido de Riemann.

Teorema 3.8.3 (Vitali-Lebesgue)**.** *Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Entonces $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ y se cumple que:*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{L}) \int_{[a,b]} f\, dm$$

Ejemplo 3.8.4 (Función de Dirichlet)**.** Se define la *función de Dirichlet* como

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Claramente $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ y $\mathrm{m}^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ por ser $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ numerable, por lo que f es medible y además es *sumable en el sentido de Lebesgue* con integral igual a 0. Veamos que f no es integrable en el sentido de Riemann por reducción al absurdo. Supongamos que f es integrable Riemann con integral igual a $A \in \mathbb{R}$. Tomamos $\epsilon < 1/2$ cualquiera y escogemos $\forall\, \delta > 0$ una partición $\pi = \{x_k\}_{k=0}^n$ de $[0,1]$ tal que $\mathrm{cal}(\pi) < \delta$, y dos selecciones $\sigma_r = \{r_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{I}$, $\sigma_q = \{q_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{Q}$ asociadas a π, que existen por ser $\mathbb{I} \cap [0,1]$, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ densos en $[a,b]$. Entonces

$$S_{\mathcal{R}}(f,\pi,\sigma_r) = \sum_{k=1}^n f(r_k)(x_k - x_{k-1}) = 0, \quad S_{\mathcal{R}}(f,\pi,\sigma_q) = \sum_{k=1}^n f(q_k)(x_k - x_{k-1}) = 1$$

y por tanto se tiene que

$$1 = |S_{\mathcal{R}}(f,\pi,\sigma_q) - S_{\mathcal{R}}(f,\pi,\sigma_r)| \leq |S_{\mathcal{R}}(f,\pi,\sigma_q) - A| + |A - S_{\mathcal{R}}(f,\pi,\sigma_r)| < 2\epsilon < 1$$

lo que nos lleva a contradicción, y concluimos que f *no es integrable en el sentido de Riemann.*

Aunque el Teorema 3.8.3 está pensado para la integral de Riemann, existe un resultado similar para la integral de Riemann-Stieltjes. Sin embargo, necesitamos una versión más general del *Teorema de Representación de Riesz*, que admite que el funcional pueda tomar valores positivos y negativos [16, Theorem 7.17][11] La idea es que, al igual que se explicará en el siguiente capítulo con la construcción de Riesz, dado $w \in \mathrm{BV}([a,b])$ se puede definir un funcional de las funciones continuas de soporte compacto a partir de la integral de Riemann-Stieltjes, el cual admite una representación en términos de la integral de Lebesgue respecto de una medida de Radón con signo[12] μ . De esta forma $\mathcal{R}(w,[a,b]) \subset \mathcal{L}(\mu)$, por lo que *la integral de Lebesgue generaliza también a la integral de*

[11] A este resultado se lo conoce como el Teorema de Riesz-Markov.

[12] Habitualmente a estas funciones de conjuntos se las conoce como *cargas*, aunque en este trabajo no trabajaremos con ellas.

Riemann-Stieltjes.

3.9. Relación con la integral impropia de Riemann

Veamos a continuación cuál es la relación entre la integral de Lebesgue y la integral impropia de Riemann, para lo cual basta considerar el caso de funciones definidas sobre $[a, \infty]$ (con $a \in \mathbb{R}$).

Teorema 3.9.1. *Sea $f \in \mathcal{R}^l([a, \infty))$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(i) Si $f \geq 0$, entonces f es integrable sobre $[a, \infty)$ respecto de m y además

$$(\mathcal{RI}) \int_a^\infty f(x)\, dx = (\mathcal{L}) \int_{[a,\infty)} f\, dm$$

(ii) Si $(\mathcal{R}) \int_a^\infty |f(x)|\, dx$ existe y es finita, entonces $f \in \mathcal{L}_1([a, \infty))$ y además

$$(\mathcal{RI}) \int_a^\infty f(x)\, dx = (\mathcal{L}) \int_{[a,\infty)} f\, dm$$

Es importante destacar que la hipótesis que aparece en (ii) es estrictamente necesaria, ya que se pueden encontrar funciones como las del Ejemplo 3.9.2 que tienen integral impropia de Riemann pero no son sumables en el sentido de Lebesgue. En general, la integral de Lebesgue no distingue entre integrabilidad e integrabilidad absoluta, razón por la cual se introduce un análogo de la integral impropia de Riemann: *la integral impropia de Lebesgue.*

Ejemplo 3.9.2. Consideremos la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \chi_{[n-1,n)}$$

Claramente el conjunto de discontinuidades de f es numerable, y por tanto tiene medida 0. Entonces por la Caracterización de las funciones integrables Riemann deducimos que f es integrable Riemann en todo intervalo compacto $[a, b]$, y además:

$$(\mathcal{RI}) \int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \left((\mathcal{R}) \int_0^N f(x)\, dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty$$

Entonces $f \in \mathcal{R}^l([0, \infty))$, y sin embargo se tiene que

$$(\mathcal{L}) \int_{[0,\infty)} f^+\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty, \qquad (\mathcal{L}) \int_{[0,\infty)} f^-\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$$

por lo que f *no es integrable en el sentido de Lebesgue.*

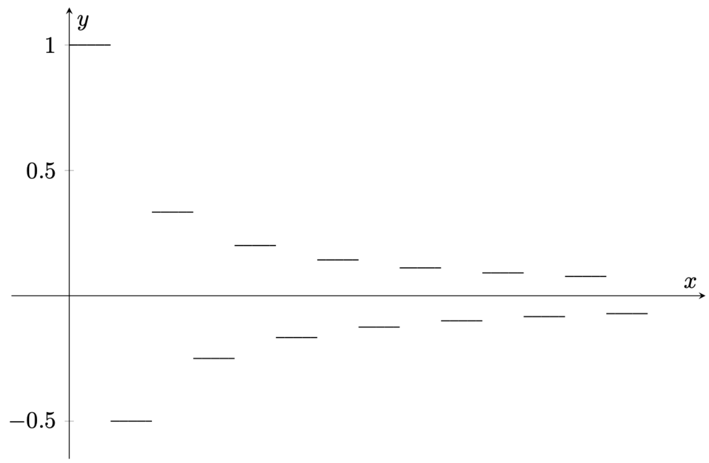

Figura 3.2: Gráfica de f.

Definición 3.9.3. Sea una función $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$. Decimos que *la integral impropia de Lebesgue de f converge* si $f|_J \in \mathcal{L}_1(J)$ para cada intervalo compacto $J \subset [a, \infty)$ y existe el límite $\lim_{t\to\infty} \left[(\mathcal{L}) \int_{[a,t]} f(x)\, dm\right]$, en cuyo caso definiremos la integral impropia de f como

$$(\mathcal{LI}) \int_{[a,\infty]} f(x)\, dm = \lim_{t\to\infty} \left[(\mathcal{L}) \int_{[a,t]} f(x)\, dm\right]$$

Además, denotaremos $\mathcal{L}_1^l([a, \infty))$ a la clase de funciones con integral impropia de Lebesgue convergente en $[a, \infty)$.

Por el Teorema 3.8.3 se tiene que la integral impropia de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ generaliza a la integral impropia de Riemann, de manera que el Ejemplo 3.9.2 sí que tiene una integral impropia de Lebesgue convergente. Además, si consideramos una función $f \in \mathcal{L}_1([a, \infty)$, aplicando el Teorema de la convergencia dominada sobre la sucesión de funciones $\{f\chi_{[a,n]}\}_{n=1}^{\infty}$, se puede demostrar que la integral impropia de Lebesgue coincide con la integral de Lebesgue. Sin embargo, el recíproco no es cierto, puede existir el límite de las integrales de Lebesgue pero no como una integral de Lebesgue (Ejemplo 3.9.2). Este es el signo de que en realidad la integral impropia de Lebesgue no deja de ser un "apaño" de la teoría de integración de Lebesgue sobre la recta real, y que necesitamos una noción de integración más poderosa para tratar con estas patologías: la *integral de Henstock-Kurzweil.*

Nota 3.9.4. La integral impropia de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ cumple las propiedades de linealidad y retículo esperadas, aunque a diferencia de la integral de Lebesgue usual sobre $\mathbb{R}$, no se cumple que

$f \in \mathcal{L}_1^l([a,\infty))$ si y solo si $|f| \in \mathcal{L}_1^l([a,\infty))$. Esto tiene una consecuencia fundamental, y es que $\mathcal{L}_1^l([a,\infty))$ *no es un retículo de funciones*. Para probarlo basta considerar la función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ del Ejemplo 2.4.7, y $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x+1)$ para cada $x \in [0,\infty)$. Se probó que $f \in \mathcal{R}^l([0,\infty)) \subset \mathcal{L}_1^l([0,\infty))$, y análogamente $g \in \mathcal{L}_1^l([0,\infty))$. Sin embargo, para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(\mathcal{L})\int_{[0,N]} f \vee g \, dm = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}, \quad (\mathcal{L})\int_{[0,N]} f \wedge g \, dm = -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

de manera que $f \vee g \notin \mathcal{L}_1^l([0,\infty))$ y $f \wedge g \notin \mathcal{L}_1^l([0,\infty))$.

Por último, es interesante mencionar un resultado comúnmente conocido como la *Layer Cake Representation* [23], cuya demostración es una sencilla aplicación del Teorema de Fubini-Tonelli y la buena relación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue sobre un intervalo compacto, por lo que nos limitaremos por concisión a enunciar el resultado sin demostración (véase [23, Theorem 1.13]). Además de expresar la integral de Lebesgue como una integral impropia de Riemann, esta igualdad da una idea de la diferencia fundamental entre estas dos aproximaciones. Heurísticamente, mientras que en la integral de Riemann se particiona el dominio en el que está definida la función, si analizamos la integral de Lebesgue a partir de esta representación, podemos interpretar que esta última *particiona el rango de la función*[13].

Proposición 3.9.5. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa. Entonces,*

$$(\mathcal{L})\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = (\mathcal{RI})\int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > t\})\, dt$$

Nota 3.9.6. En algunos libros como [23] podemos encontrar que la integral de Lebesgue se define vía esta fórmula, sin necesidad de pasar por las funciones simples medibles.

[13] En cierto modo esto es lo que se hace en la demostración del Teorema 3.5.12

Capítulo 4

La integral de Daniell

La integral de Daniell es considerada una de las teorías de integración más eficientes, en el sentido de que se requiere de un desarrollo inicial mínimo para llegar a la integral, y además demuestra los teoremas fundamentales de convergencia con facilidad. Más que una teoría de integración per se, el desarrollo de Daniel plantea un método de construcción de integrales. Al igual que en la integral de Lebesgue es necesario construir una medida para que la integral tenga sentido, el método de Daniell parte de una integral con pobres propiedades, y la extiende a una integral con grandes atributos.

En este capítulo desarrollaremos la integral de Daniell con el objetivo de extender la integral de Riemann, para lo cual seguiremos principalmente [12] y alternativamente [7]. Además, estudiaremos la equivalencia entre la integral de Daniell y la de Lebesgue, aportando resultados originales en este Trabajo de Fin de Grado.

4.1. Construcción de la integral de Daniell

En esta sección discutiremos el método de extensión de Daniell y el desarrollo de la integral homónima, siguiendo la adaptación [12] del artículo original [13]. Partimos de un conjunto X no vacío. Por concisión, denotaremos de ahora en adelante

$$\overline{\mathbb{R}}^X = \{\, x : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\}$$

Denotando $\leq$ al orden sobre $\overline{\mathbb{R}}^X$ definido puntualmente, está claro que $(\overline{\mathbb{R}}^X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. De hecho, forma un retículo con las operaciones de máximo y mínimo, que denotaremos para $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^X$ como[1]

$$(x \wedge y)(t) = \min\{x(t), y(t)\}, \quad \forall\, t \in X$$

$$(x \vee y)(t) = \max\{x(t), y(t)\}, \quad \forall\, t \in X$$

La idea del método de Daniell es partir de una integral (en nuestro caso la integral de Riemann), que denominaremos I-integral, y de un conjunto de funciones integrables con ciertas propiedades:

Definición 4.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $T_0 \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ es un *retículo vectorial extendido* (también conocido como *espacio de Riesz*) si es cerrado bajo $\wedge$, $\vee$ y combinaciones lineales, esto es, si dados $x, y \in T_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha x + \beta y$, $x \wedge y$ y $x \vee y$ están también en T_0.

Nota 4.1.2. Al tratar con funciones $\overline{\mathbb{R}}$-valuadas debemos establecer cómo trataremos con expresiones de la forma $\infty - \infty$. Sean $x, y \in T_0$ y $P_{x+y} \subset X$ el conjunto donde se presenta la ambigüedad, i.e.

$$P_{x+y} := \{\, t \in X : x(t) = \infty \text{ y } y(t) = -\infty, \text{ o } x(t) = -\infty \text{ y } y(t) = \infty \,\}$$

Para poder resolver el problema, debemos imponer que para cualquier $c \in \overline{\mathbb{R}}$ la siguiente función se encuentre en T_0:

$$f(t) = \begin{cases} x(t) + y(t) & \text{si } t \in P_{x+y} \\ c & \text{si } t \notin P_{x+y} \end{cases}$$

De esta manera podemos definir la función $x + y$ como

$$(x + y)(t) = \begin{cases} x(t) + y(t) & \text{si } t \in P_{x+y} \\ 0 & \text{si } t \notin P_{x+y} \end{cases}$$

Definición 4.1.3. Sea $T_0 \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ un retículo vectorial extendido. Decimos que una función $I : T_0 \to \mathbb{R}$ es una *I-integral* o *funcional de Daniell* si $\forall\, x, y \in T_0$ y $\forall\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ se satisfacen los siguientes axiomas:

(D1) $I(\alpha x + \beta y) = \alpha I(x) + \beta I(y)$

(D2) $x_n \downarrow 0 \implies \lim_{n\to\infty} I(x_n) = 0$.

(D3) $x \geq 0 \implies I(x) \geq 0$.

Definición 4.1.4. Decimos que una terna (X, T_0, I) es un *espacio de Daniell* si X es un conjunto no vacío, T_0 es un retículo vectorial extendido de funciones $\overline{\mathbb{R}}$-valuadas sobre X e I es un funcional de Daniell.

[1] En la literatura original se habla de $\wedge$ como la *suma lógica* y $\vee$ como el *producto lógico*.

4.1.1. Extensión de la I-integral

A lo largo de esta sección, T_0 será un retículo vectorial extendido y I una I-integral. El primer paso en la construcción de Daniell es extender la I-integral a una clase más amplia de funciones, la cual definimos a continuación:

Definición 4.1.5. Definimos $T_1 \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ como

$$T_1 \coloneqq \{\, x \in \overline{\mathbb{R}}^X : \text{existe } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0 \text{ tal que } x_n \uparrow x\}$$

Nota 4.1.6. Claramente T_1 no es retículo vectorial extendido, ya que no es cerrado bajo multiplicaciones por escalares negativos. Sin embargo, es cerrado bajo la suma, $\wedge$ y $\vee$. Para probarlo sean $x, y \in T_1$ cualquiera, entonces existen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ tal que $x_n \uparrow x$ y $y_n \uparrow y$. De esta manera $(x_n + y_n) \uparrow (x + y)$, $(x_n \wedge y_n) \uparrow (x \wedge y)$ y $(x_n \vee y_n) \uparrow (x \vee y)$, por lo que $x + y, x \wedge y, x \vee y \in T_1$.

Antes de definir la extensión, veamos algunos lemas que nos servirán para asegurar que esta extensión está bien definida.

Lema 4.1.7. *Sea $x \in T_1$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ tal que $x_n \uparrow x$. Si $h \in T_0$ tal que $h \leq x$, entonces $I(h) \leq \lim_{n\to\infty} I(x_n)$.*[2]

Demostración. Definamos $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $h_n = x_n \wedge h$, de manera que $h_n \in T_0$, $h_n \leq x_n$, y $h_n \leq h_{n+1}$. Entonces se tiene que $\sup_n h_n = \sup_n (x_n \wedge h) = (\sup_n x_n) \wedge h = h$, por lo que $h_n \uparrow h$. Por tanto $(h - h_n) \downarrow 0$, y por el axioma $(D2)$ se tiene que

$$0 = \lim_{n\to\infty} I(h - h_n) = \inf_n \big[I(h) - I(h_n) \big] = I(h) - \sup_n I(h_n)$$

Sabiendo que $h_n \leq x_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, concluimos por el axioma $(D3)$ el resultado:

$$I(h) = \sup_n I(h_n) \leq \sup_n I(x_n) = \lim_{n\to\infty} I(x_n)$$

$\square$

Lema 4.1.8. *Sean $x, y \in T_1$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ tal que $x_n \uparrow x$, $y_n \uparrow y$. Si $y \leq x$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} I(y_n) \leq \lim_{n\to\infty} I(x_n)$$

[2] Independientemente de si $\lim\limits_{n\to\infty} I(x_n) = \infty$.

Demostración. Claramente $\forall\, m \in \mathbb{N}$ se cumple que $y_m \leq y \leq x$ y $y_m \in T_0$. Entonces por el Lema 4.1.7 sabemos que $I(y_m) \leq \lim_{n\to\infty} I(x_n)\ \forall\, m \in \mathbb{N}$, de donde concluimos el resultando tomando límites:

$$\lim_{m\to\infty} I(y_m) = \sup_m I(y_m) \leq \lim_{n\to\infty} I(x_n)$$

□

Corolario 4.1.9. *Sea $x \in T_1$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ son tal que $x_n \uparrow x$, $y_n \uparrow x$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} I(x_n) = \lim_{n\to\infty} I(y_n)$$

Definición 4.1.10. Definimos la aplicación

$$I_1 : T_1 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad I_1(x) = \lim_{n\to\infty} I(x_n)$$

donde $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ es una sucesión tal que $x_n \uparrow x$.

Nota 4.1.11. La aplicación I_1 definida de esta manera respeta la suma y la multiplicación por un escalar no negativo. Para probar esta afirmación, sean $x, y \in T_1$ y $c \geq$ cualesquiera, entonces existen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ tal que $x_n \uparrow x$ y $y_n \uparrow y$. Como $(x_n + y_n) \uparrow (x + y)$ y $(cx_n) \uparrow (cx)$ se tiene que

$$I_1(x+y) = \lim_{n\to\infty} I(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} I(x_n) + \lim_{n\to\infty} I(y_n) = I_1(x) + I_1(y)$$

y además,

$$I_1(cx) = \lim_{n\to\infty} I(cx) = c \lim_{n\to\infty} I(x) = cI_1(x)$$

4.1.2. La integral de Daniell

Una vez hemos definido esta extensión de I, nos preguntamos cómo se comportan T_1 y I_1 al considerar sucesiones crecientes de elementos en T_1, lo que da pie al siguiente resultado.

Lema 4.1.12. *Sea $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ tal que existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T_1$ verificando que $x_n \uparrow x$. Entonces se tiene que $x \in T_1$ y además:*

$$I_1(x) = \lim_{n\to\infty} I(x_n)$$

Demostración. Como $x_n \in T_1\ \forall n \in \mathbb{N}$, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ una sucesión $\{x_n^m\}_{m=1}^{\infty} \subset T_0$ tal que $x_n^m \uparrow x_n$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $g_k = \sup_{n,m\leq k}(x_{n,m})$. Veamos que $x \in T_1$. Dado $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, como g_k es el supremo de un número finito de funciones de T_0 se tiene que $g_k \in T_0$, y $g_k \leq g_{k+1}$ trivialmente. Además, $g_k \leq x_k\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, por lo que tomando límites (puntualmente) deducimos que $\lim_{k\to\infty} g_k \leq \lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Para probar la desigualdad opuesta, consideremos $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$. Entonces $x_{n,m} \leq g_m$, y en el límite puntual se deduce que:

$$x_n = \lim_{m\to\infty} x_n^m \leq \lim_{m\to\infty} g_m \implies x = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{m\to\infty} g_m$$

De esta manera $g_k \uparrow x$, y como $g_k \in T_0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ se tiene que $x \in T_1$. Por otro lado, $g_k \leq x_k$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, por lo que por el Lema 4.1.7 $I(g_k) \leq I_1(x_k)$. Entonces se tiene que $I_1(x) = \lim_{k\to\infty} I(g_k) \leq \lim_{k\to\infty} I_1(x_k)$. Fijemos ahora $n \in \mathbb{N}$. Claramente $x_{n,m} \leq g_m\ \forall\, m \geq n$ y $x_n \leq x$, por lo que por el Lema 4.1.8 se tiene que

$$I_1(x_n) = \lim_{m\to\infty} I(x_n^m) \leq \lim_{m\to\infty} I(g_m) = I_1(x)$$

de donde tomando el límite $n \to \infty$ se concluye el resultado. $\square$

Una vez hemos extendido la I-integral a T_1, se construye la integral de Daniell a partir de una integral “superior” y una “inferior”, de forma similar a la integral de Darboux. Además, esta nuevo funcional extiende a I_1 de forma natural:

Definición 4.1.13. Dado $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$, definimos

$$\overline{I}(x) \coloneqq \inf\{I_1(\varphi) : x \leq \varphi, \varphi \in T_1\}, \quad \underline{I}(x) = -\overline{I}(-x)$$

Decimos que $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ es *I-integrable* si $-\infty < \overline{I}(x) = \underline{I}(x) < \infty$. Además, denotamos a este valor $(\mathcal{D})\int x$ y a la clase de las funciones I-integrables $\mathscr{L}$.

4.2. Propiedades de retículo y linealidad

Veamos ahora que la integral definida satisface las propiedades de retículo y linealidad deseadas:

Lema 4.2.1. *Sea $c \in [0, \infty)$ y $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}^X$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(i) $\overline{I}(cx_1) = c\overline{I}(x_1)$

(ii) $\overline{I}(x_1 + x_2) \leq \overline{I}(x_1) + \overline{I}(x_2)$

(iii) $x_1 \leq x_2 \implies \overline{I}(x_1) \leq \overline{I}(x_2)$

(iv) $\underline{I}(x_1) \leq \overline{I}(x_1)$

(v) $\overline{I}(x_1 \vee x_2) + \overline{I}(x_1 \wedge x_2) \leq \overline{I}(x_1) + \overline{I}(x_2)$

(vi) $0 \leq \overline{I}(|x_1|) - \underline{I}(|x_1|) \leq \overline{I}(x_1) - \underline{I}(x_1)$

Demostración. (i) Si $c \geq 0$, entonces se tiene que

$$\overline{I}(cx_1) = \text{ínf}\{I_1(\varphi) : cx \leq \varphi, \varphi \in T_1\} = \text{ínf}\{I_1(c\varphi) : cx \leq c\varphi, c\varphi \in T_1\} = c\overline{I}(x_1)$$

(ii) Si $\{I_1(\varphi) : cx \leq \varphi, \varphi \in T_1\} = \emptyset$ o $\{I_1(\varphi) : cx \leq \varphi, \varphi \in T_1\} = \emptyset$, la desigualdad es trivial, por lo que supongamos que ambos conjuntos son no vacíos. Consideremos $\varphi_1, \varphi_2 \in T_1$ cualesquiera tal que $x_1 \leq \varphi_1$ y $x_2 \leq \varphi_2$. Entonces $\varphi_1 + \varphi_2 \in T_1$ y $x_1 + x_2 \leq \varphi_1 + \varphi_2$, por lo que

$$\overline{I}(x_1 + x_2) \leq I_1(\varphi_1 + \varphi_2) = I_1(\varphi_1) + I_1(\varphi_2)$$

de donde se concluye que $\overline{I}(x_1 + x_2) \leq \overline{I}(x_1) + \overline{I}(x_2)$ por la arbitrariedad de φ_1 y φ_2.

(iii) Si $x_1 \leq x_2$ se tiene que $\{I_1(\varphi) : x_2 \leq \varphi, \varphi \in T_1\} \subset \{I_1(\varphi) : x_1 \leq \varphi, \varphi \in T_1\}$ trivialmente, por lo que $\overline{I}(x_1) \leq \overline{I}(x_2)$.

(iv) Trivialmente se tiene que $0 = \overline{I}(0) = \overline{I}(x_1 - x_1)$. Entonces, aplicando (ii) deducimos que

$$0 = \overline{I}(x_1 - x_1) \leq \overline{I}(x_1) + \overline{I}(-x_1) = \overline{I}(x_1) - \underline{I}(x_1)$$

Si $\underline{I}(x_1) < \infty$ se concluye de lo anterior que $\underline{I}(x_1) \leq \overline{I}(x_1)$. Supongamos entonces que $\underline{I}(x_1) = \infty$. Si $\overline{I}(x_n) < \infty$ se tendría por lo anterior que $0 \leq \overline{I}(x_1) - \underline{I}(x_1) = -\infty$, por lo que necesariamente $\overline{I}(x_n) = \infty \geq \underline{I}(x_n)$.

(v) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in T_1$ cualesquiera tal que $x_1 \leq \varphi_1$ y $x_2 \leq \varphi_2$. Entonces $x_1 \wedge x_2 \leq \varphi_1 \wedge \varphi_2$ y $x_1 \vee x_2 \leq \varphi_1 \vee \varphi_2$, por lo que por la Nota 4.2.2 se tiene que

$$\overline{I}(x_1 \wedge x_2) + \overline{I}(x_1 \vee x_2) \leq I_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) + I_1(\varphi_1 \vee \varphi_2) = I_1(\varphi_1) + I_1(\varphi_2)$$

de donde concluimos el resultado por la arbitrariedad de φ_1 y φ_2.

(vi) Trivialmente se tiene que $|x_1| = x_1 \wedge (-x_1)$ y $-|x_1| = x_1 \vee (-x_1)$. Entonces por (v) se tiene que

$$\overline{I}(|x_1|) + \overline{I}(-|x_1|) \leq \overline{I}(x_1 \wedge (-x_1)) + \overline{I}(x_1 \vee (-x_1)) \leq \overline{I}(x_1) + \overline{I}(-x_1)$$

de donde aplicando (iv) se concluye el resultado:

$$0 \leq \overline{I}(|x_1|) - \underline{I}(|x_1|) \leq \overline{I}(x_1) - \underline{I}(x_1)$$

□

Nota 4.2.2. Recordemos que dados $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^X$ se cumplen las siguientes identidades:

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \quad x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar que la integral de Daniell satisface las propiedades de linealidad y retículo que deseamos en toda teoría de integración:

Proposición 4.2.3. *(Linealidad y retículo) La clase $\mathscr{L}$ es un retículo vectorial extendido y $(\mathcal{D})\int : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal que conserva el orden.*

Demostración. Por la Nota 4.2.2, para concluir que $\mathscr{L}$ es un retículo vectorial extendido es suficiente probar que $\mathscr{L}$ es cerrado bajo combinaciones lineales y valor absoluto. Veamos primero que $\mathscr{L}$ es cerrado bajo multiplicación por un escalar. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathscr{L}$ cualesquiera. Si A es la integral de Daniell de x y $c \geq 0$, por el Lema 4.2.1 (i) se tiene que

$$\overline{I}(cx) = c\overline{I}(x) = cA, \qquad \text{y} \qquad \underline{I}(cx) = -\overline{I}(c(-x)) = -c\overline{I}(-x) = c\underline{I}(x) = cA$$

por lo que $cx \in \mathscr{L}$ y $(\mathcal{D})\int cx = c \cdot \left[(\mathcal{D})\int x\right]$. El caso $c \leq 0$ es análogo teniendo en cuenta que $\overline{I}(cx) = c\underline{I}(x)$ y $\underline{I}(cx) = c\overline{I}(x)$.

Veamos ahora que $\mathscr{L}$ es cerrado bajo la suma. Sean $x, y \in \mathscr{L}$ cualesquiera, entonces por el Lema 4.2.1 (i) se tiene que

$$(\mathcal{D})\int x + (\mathcal{D})\int y \leq -\overline{I}(-x-y) \leq \underline{I}(x+y) \leq \overline{I}(x+y) \leq (\mathcal{D})\int x + (\mathcal{D})\int y$$

De esta manera concluimos que $x + y \in \mathscr{L}$ y $(\mathcal{D})\int(x+y) = (\mathcal{D})\int x + (\mathcal{D})\int y$.

Por último, consideremos $x \in \mathscr{L}$ cualquiera y veamos que $|x| \in \mathscr{L}$. Aplicando el Lema 4.2.1 (v) sabemos que

$$0 \leq \overline{I}(|x|) - \underline{I}(|x|) \leq \overline{I}(x) - \underline{I}(x) = 0$$

Por tanto $-\infty < \overline{I}(|x|) = \underline{I}(|x|) < \infty$ y entonces $|x| \in \mathscr{L}$. De esta manera $(\mathcal{D})\int$ es una aplicación lineal, y por el Lema 4.1.8 (iii) conserva el orden. □

Definición 4.2.4. Decimos que la aplicación $(\mathcal{D})\int : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ es la *integral de Daniell* inducida por I en T_0.

4.3. Teoremas de convergencia

Tal y como ya se comentó, una de las principales ventajas del enfoque de Daniell es que permite probar, sin haber desarrollado la integral más allá de su definición, los teoremas de convergencia esenciales en la integración de Lebesgue: T.C.M, T.C.D y el Lema de Fatou.

Teorema 4.3.1 (Convergencia Monótona)**.** *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell, $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ tal que $x_n \uparrow x$. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\Big((\mathcal{D})\int x_n\Big) < \infty$, entonces $x \in \mathscr{L}$ y además:*

$$(\mathcal{D})\int x = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{D})\int x_n\right)$$

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ tal que $x_n \uparrow x$ y $A := \lim_{n\to\infty}\big((\mathcal{D})\int x_n\big) < \infty$. Claramente$-x_n \leq -x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\overline{I}(-x) \leq \overline{I}(-x_n)$. Entonces se tiene que

$$A = \lim_{n\to\infty}\underline{I}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\big[-\overline{I}(-x_n)\big] \leq -\overline{I}(-x) = \underline{I}(x)$$

Para probar la desigualdad en el otro sentido fijemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Tomando $x_0 := 0$, por la Proposición 4.2.3 se tiene que $x_n - x_{n-1} \in \mathscr{L}$ para cada $n \geq 1$, por lo que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ tal que $0 \leq x_n - x_{n-1} \leq \varphi_n$ y además verifica que

$$I_1(\varphi_n) \leq (\mathcal{D})\int(x_n - x_{n-1}) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

para cada $n \geq 1$. Definamos $\rho_n := \sum_{k=1}^n \varphi_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $0 \leq \varphi_n$ $\forall n \geq 2$, la sucesión $\{\rho\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, y además para cada $n \geq 1$ se tiene que

$$x_n = x_1 + \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \varphi_n = \rho_n$$

Sea $\psi \in T_1$ cualquiera tal que $x \leq \psi$, y definamos $\psi_n := \psi \wedge \rho_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Claramente la sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ es creciente y $x_n \leq \psi_n \leq \psi$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que existe el límite puntual $\lim_{n\to\infty}\psi_n$. Entonces por el Lema 4.1.12 se tiene que $\lim_{n\to\infty}\psi_n \in T_1$ y además se cumple que

$$\overline{I}(x) = \overline{I}\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \leq I_1\Big(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\Big) = \lim_{n\to\infty} I_1(\varphi_n)$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$I_1(\psi_n) \leq I_1(\rho_n) = \sum_{k=1}^n I_1(\varphi_k) \leq \sum_{k=1}^n \left((\mathcal{D})\int(x_n - x_{n-1}) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = (\mathcal{D})\int x_n + \epsilon \leq A + \epsilon$$

de manera que $A \leq \underline{I}(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} I_1(\varphi_n) \leq A + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que $x \in \mathscr{L}$, y su integral de Daniell es igual a A. □

Nota 4.3.2. El Teorema de la Convergencia Monotona tiene una implicación directa, y es que la integral de Daniel también es una I-integral. Claramente la integral de Daniell cumple (D1) y (D3) por la Proposición 4.2.3, por lo que basta probar (D3). Consideremos una sucesión $\{x_n\} \in \mathscr{L}$ tal que $x_n \downarrow 0$. Entonces $(-x_n) \uparrow 0$, y como su integral está acotada superiormente por 0, por el T.C.M. concluimos que $-((\mathcal{D}) \int x_n) \uparrow 0$, o equivalentemente $((\mathcal{D}) \int x_n) \downarrow 0$.

La demostración del Lema de Fatou y el Teorema de la Convergencia Dominada para la integral de Daniell es idéntica a la del teorema homónimo para la integral de Lebesgue. Es por esto que enunciaremos los resultados sin demostración, pudiéndose encontrar las mismas en [12, Theorem 3.19, 3.20].

Teorema 4.3.3 (Fatou). *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ una sucesión de funciones no negativas. Si $\liminf_{n\to\infty}\Big((\mathcal{D}) \int x_n\Big) < \infty$, entonces $\liminf_{n\to\infty} x_n \in \mathscr{L}$ y además:*

$$(\mathcal{D}) \int \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty}\left((\mathcal{D}) \int x_n\right)$$

Teorema 4.3.4 (Convergencia Dominada). *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ tal que $|x_n| \leq z$ para algún $z \in \mathscr{L}$. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ puntualmente, entonces $x \in \mathscr{L}$ y además:*

$$(\mathcal{D}) \int x = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{D}) \int x_n\right)$$

Nota 4.3.5. Aunque no lo desarrollaremos en este trabajo, es posible demostrar un resultado análogo al Teorema de Fubini, conocido como el Teorema de Fubini-Stone [27] [34].

4.4. Caracterización de las funciones I-integrables

En esta sección aportaremos cierta intuición sobre la clase de funciones I-integrables, lo que será fundamental en la equivalencia con la integral de Lebesgue. Para ello debemos introducir una nueva clase de funciones: las funciones nulas.

Nota 4.4.1. Mantenemos la notación T_0 para un retículo vectorial extendido e I para una I-integral sobre T_0.

Definición 4.4.2. Decimos que $x \in \mathscr{L}$ es una *función nula* si $(\mathcal{D}) \int |x| = 0$.

La siguiente propiedad establece una diferencia sutil con la integral de Lebesgue, ya que sólo se cumple si el espacio de medida sobre el que está construida la integral de lebesgue es completo[3].

[3] Más adelante, en los Teoremas 4.5.8 y 4.5.16, veremos las implicaciones que tiene este hecho.

Proposición 4.4.3. *Sea $x \in \mathscr{L}$ una función nula e $y \in \overline{\mathbb{R}}^X$. Si $|y| \leq |x|$, entonces y es también una función nula.*

Demostración. Si $|y| \leq |x|$, aplicando el Lema 4.2.1 se tiene que

$$0 \leq \underline{I}(y \vee 0) \leq \overline{I}(y \vee 0) \leq \overline{I}(|y|) \leq \overline{I}(|x|) = (\mathcal{D}) \int |x| = 0$$

Por tanto, $y \vee 0 \in \mathscr{L}$ y de forma similar $(-y) \vee 0 \in \mathscr{L}$. Claramente $y = y \vee 0 - (-y) \vee 0 \in \mathscr{L}$ y $|y| = y \vee 0 + (-y) \vee 0 \in \mathscr{L}$, por lo que concluimos por la linealidad de la integral de Daniell que

$$(\mathcal{D}) \int |y| = (\mathcal{D}) \int (y \vee 0) + (\mathcal{D}) \int ((-y) \vee 0) = 0$$

□

Definición 4.4.4. Definimos el espacio $T_2 \subset \mathscr{L}$ como

$$T_2 := \{x \in \mathscr{L} : \text{existe } \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1 \text{ tal que } \varphi_n \downarrow x\}$$

Nota 4.4.5. Llegados este punto del desarrollo, es importante recordar qué relaciones de inclusión se dan entre los conjuntos T_0, T_1, T_2 y $\mathscr{L}$:

$$T_0 \subset T_1 \cap \mathscr{L} \subset T_2 \subset \mathscr{L}$$

Proposición 4.4.6. *Sea $x \in T_2$, entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1 \cap \mathscr{L}$ tal que $\varphi_n \downarrow x$.*

Demostración. Como $x \in T_2$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ tal que $\varphi_n \downarrow x$. Además dado que $x \in \mathscr{L}$, $(\mathcal{D}) \int x = \overline{I}(x) < \infty$, por lo que existe $\varphi \in T_1$ tal que $I_1(\varphi_n) < \infty$ y

$$\overline{I}(x) \leq I_1(\varphi) \leq \overline{I}(x) + 1$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x \leq \varphi \wedge \varphi_n \leq \varphi_n$, de manera que como $\varphi_n \downarrow x$, concluimos que $(\varphi \wedge \varphi_n) \downarrow x$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $I_1(\varphi \wedge \varphi_n) \leq I_1(\varphi) \leq \overline{I}(x) + 1 < \infty$, lo que prueba el resultado. □

Ahora sí, ya estamos en condiciones de demostrar la caracterización con la que trabajaremos de ahora en adelante:

Teorema 4.4.7 (Caracterización de las funciones I-integrables)**.** *Sea $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$. Entonces $x \in \mathscr{L}$ si y solo si $x = y - z$ donde $y \in T_2$ y z es una función nula no negativa.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $x = y - z$ con $y \in T_2$ y z una función nula no negativa. Claramente $y, z \in \mathscr{L}$, por lo que por la Proposición 4.2.3 se tiene que $x \in \mathscr{L}$.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $x \in \mathscr{L}$. Entonces $\overline{I}(x) = (\mathcal{D}) \int x < \infty$, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n \in T_1$ tal que $x \leq \varphi_n$ y

$$\overline{I}(x) \leq I_1(\varphi_n) \leq \overline{I}(x) + \frac{1}{n} < \infty$$

Definamos $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $y_n \coloneqq \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$. Claramente para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_n \in T_1$, $y_{n+1} \leq y_n$ y $x \leq y_n \leq \varphi_n$. Por tanto, por el Lema 4.2.1 llegamos a que

$$-\infty < \overline{I}(x) \leq I_1(y_n) \leq \overline{I}(x) + \frac{1}{n} < \infty$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $y_n \in \mathscr{L}$ y $I_1(y_n) = (\mathcal{D}) \int y_n$. Además la desigualdad anterior implica que $\lim_{n\to\infty} \left[(\mathcal{D}) \int y_n\right] = \lim_{n\to\infty} I_1(y_n) = \overline{I}(x) < \infty$. Definiendo $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ puntualmente, por el Teorema de la Convergencia Monótona 4.3.1 se tiene que $y \in \mathscr{L}$ y

$$(\mathcal{D}) \int y = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{D}) \int y_n \right) = \overline{I}(x) = (\mathcal{D}) \int x$$

Además $y_n \downarrow y$ con $y_n \in T_1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $y \in T_2$. Sea $z \coloneqq y - z \in \mathscr{L}$. Como $y \geq x$ se tiene que $z \geq 0$, y además

$$(\mathcal{D}) \int |z| = (\mathcal{D}) \int z = (\mathcal{D}) \int y - (\mathcal{D}) \int x = 0$$

de manera que $x = y - z$, donde $y \in T_2$ y z es una función nula no negativa, lo que concluye la demostración. $\square$

Nota 4.4.8. Aunque no lo demostraremos explícitamente en este trabajo, no es difícil probar a partir de esta caracterización que la extensión dada por la integral de Daniell es única, véase [29, Proposition 16.16].

4.5. Relación con la integral de Lebesgue

En las secciones anteriores hemos visto que, dado un funcional lineal con ciertas propiedades (relativamente asequibles en nuestro contexto), es posible construir una extensión que puede ser interpretada como una integral. Esto es, el nuevo funcional es lineal, conserva el orden y cumple los teoremas de convergencia deseados para una integral.

Sin embargo, quedan algunas preguntas pendientes: ¿Cómo se relaciona esta construcción con la

Teoría de la Medida? y ¿Son las integrales de Daniell y de Lebesgue equivalentes en general, o sólo sobre la recta real? Los dos siguientes apartados se encargarán de dar respuesta a estas preguntas, cuyos desarrollos culminarán con los Teoremas 4.5.8 y 4.5.16 respectivamente.

4.5.1. Medida a partir de la integral de Daniell

En la teoría de integración de Lebesgue, el mínimo entre una función sumable y otra medible no negativa es también sumable (Lema 4.5.11). En principio, en un espacio de Daniell arbitrario no es posible hablar de funciones o conjuntos medibles; sin embargo, la propiedad anterior sí que se puede entender dentro de esta teoría de integración, lo que da pie a la siguiente definición:

Definición 4.5.1. Dado un espacio de Daniell (X, T_0, I), decimos que una función no negativa $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ es *medible Daniell* si $\forall \varphi \in \mathscr{L}$ se tiene que $\varphi \wedge x \in \mathscr{L}$. Por otro lado, diremos que un conjunto $A \subset X$ es *medible Daniell* si su función característica χ_A es *medible Daniell*, y denotaremos a la clase de estos conjuntos $\mathscr{A}$.

Lema 4.5.2. *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell, $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(i) Si x e y son medibles Daniell, entonces también lo son $x \wedge y$, $x \vee y$.

(ii) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles Daniell no negativas convergiendo puntualmente a x, entonces x es medible Daniell.

Demostración. Para probar (i) tomemos $\varphi \in \mathscr{L}$ cualquiera. Como x e y son medibles Daniell se tiene que $x\ \varphi \wedge x, \varphi \wedge y \in \mathscr{L}$, y dado que $\mathscr{L}$ es cerrado bajo la operación $\wedge$ concluimos que

$$\varphi \wedge (x \wedge y) = (\varphi \wedge x) \wedge (\varphi \wedge y) \in \mathscr{L}$$

De forma similar, sabemos que $\mathscr{L}$ es cerrado bajo la operación $\vee$, y por tanto

$$\varphi \wedge (x \vee y) = (\varphi \wedge x) \vee (\varphi \wedge y) \in \mathscr{L}$$

Como φ es arbitrario concluimos que $x \wedge y$ y $x \vee y$ son medibles Daniell. En el caso (ii), tomemos también $\varphi \in \mathscr{L}$ cualquiera. Por hipótesis $0 \leq x_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $|x_n \wedge \varphi| \leq |\varphi|$. Por la Proposición 4.2.3 sabemos que $|\varphi| \in \mathscr{L}$, por lo que aplicando el Teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$x \wedge \varphi = \lim_{n\to\infty} (x_n \wedge \varphi) \in \mathscr{L}$$

Por tanto, dado que φ es arbitrario, concluimos que x es medible Daniell. $\square$

El siguiente lema nos permitirá debilitar la definición de las funciones medibles:

Lema 4.5.3. *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell y $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ no negativa. Entonces x es medible Daniell si y solo si $\varphi \wedge x \in \mathscr{L}$ para cada $\varphi \in T_0$.*

Demostración. Claramente si x es medible Daniell entonces $\varphi \wedge x \in \mathscr{L}$ para cada $\varphi \in T_0$, ya que $T_0 \in \mathscr{L}$. Supongamos ahora que $\varphi \wedge x \in \mathscr{L}$ para cada $\varphi \in T_0$, y veamos que $\varphi \wedge x \in \mathscr{L}$ para cada $\varphi \in \mathscr{L}$. Sea $\varphi \in \mathscr{L}$ cualquiera. Asumimos en primer lugar que $\varphi \in T_1$ y $I_1(\varphi) < \infty$, de manera que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_0$ tal que $\varphi_n \uparrow \varphi$. Entonces por la Proposición 4.2.3 $\varphi_n \wedge x \in \mathscr{L}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{D})\int(\varphi_n \wedge x)\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{D})\int \varphi_n\right) \leq (\mathcal{D})\int \varphi = I_1(\varphi) < \infty$$

Entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada 4.3.4 concluimos que $\varphi \wedge x = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n \wedge x) \in \mathscr{L}$.

Supongamos ahora que $\varphi \in T_2$. Entonces, por la Proposición 4.4.6 existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ tal que $\varphi_n \downarrow \varphi$ y $I_1(\varphi_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que aplicando el caso anterior se tiene que $\varphi_n \wedge x \in \mathscr{L}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Además, como $x \geq 0$,

$$\varphi \wedge 0 \leq \varphi \wedge x \leq \varphi_n \wedge x \leq \varphi_1 \wedge x$$

por lo que $|\varphi_n \wedge x| \leq |\varphi \wedge 0| \vee |\varphi_1 \wedge x|$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Además, $\varphi \in T_2 \subset \mathscr{L}$, $0 \in \mathscr{L}$ y $\varphi_1 \wedge x \in \mathscr{L}$, por lo que por la Proposición 4.2.3 se tiene que $|\varphi \wedge 0| \vee |\varphi_1 \wedge x| \in \mathscr{L}$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada 4.3.4 para concluir que $\varphi \wedge x = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n \wedge x) \in \mathscr{L}$.

Por último, consideremos el caso general $\varphi \in \mathscr{L}$. Por el Teorema 4.4.7 sabemos que existe $\psi \in T_2$ y una función nula no negativa z tal que $\varphi = \psi - z$. Sea $w = \psi \wedge x - \varphi \wedge x$, entonces como $x \geq 0$ y $\psi \geq \varphi$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq w = \psi \wedge x - \varphi \wedge x &= \frac{1}{2}(\psi + x - |\psi - x|) - \frac{1}{2}(\varphi + x - |\varphi - x|) = \\ &= \frac{1}{2}(\psi - \varphi + |\varphi - x| - |\psi - x|) \leq \frac{1}{2}(\psi - \varphi + |\psi - \varphi|) = \psi - \varphi = z \end{aligned}$$

Entonces, como z es una función nula por la Proposición 4.4.3 deducimos que w es una función nula. Por tanto $w \in \mathscr{L}$, y por el caso anterior $\psi \wedge x \in \mathscr{L}$, por lo que por la Proposición 4.2.3 concluimos que $\varphi \wedge x = \psi \wedge x - w \in \mathscr{L}$, lo que finaliza la demostración. □

En sus investigaciones acerca de la teoría de la integración, M.H. Stone [32] encontró una condición sobre el espacio de Riesz de partida que tenía importantes repercusiones en las integrales de Daniell construidas sobre ese mismo espacio. Habitualmente se la conoce como la *condición de Stone* o el *axioma de Stone*, y se cumple en la gran mayoría de ejemplos relevantes[4].

Definición 4.5.4. Decimos que un espacio de Daniell (X, T_0, I) satisface la *condición de Stone* si $\chi_X \wedge \varphi \in T_0$ para cada $\varphi \in T_0$.

Veamos a continuación que, cuando se cumple la condición de Stone, los conjuntos medibles inducen naturalmente una σ-álgebra, y una medida positiva a través de la integral de Daniell.

Teorema 4.5.5. *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell. Entonces $\mathscr{A}$ es σ-anillo. Si además (X, T_0, I) satisface la condición de Stone, entonces $\mathscr{A}$ es σ-álgebra.*

Demostración. Veamos que $\mathscr{A}$ es un σ-anillo. Dados $E, F \in \mathscr{A}$ cualesquiera, es fácil comprobar que

$$\varphi \wedge \chi_{E \setminus F} = \varphi \wedge \chi_E - (\varphi \wedge \chi_E) \wedge \chi_F + \varphi \wedge 0$$

Como $\varphi \wedge \chi_E, \varphi \wedge \chi_F \in \mathscr{L}$, aplicando la Proposición 4.2.3 concluimos que $\varphi \wedge \chi_{E\setminus F} \in \mathscr{L}$. Dado que $\varphi \in \mathscr{L}$ es arbitrario, se sigue que $E \setminus F \in \mathscr{A}$.

Por otro lado, sea una familia numerable $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}$ y probemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} = \chi_{E_1} \vee ... \vee \chi_{E_n}$$

que por el Lema 4.5.2 es medible Daniell. Además $\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} \uparrow \chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}$, por lo que por el mismo Lema 4.5.2 se sigue que $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ es medible Daniell, y por tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}$.

De esta manera $\mathscr{A}$ es un σ-anillo. Si además se verifica la condición de Stone, $\chi_X \wedge \varphi \in T_0 \subset \mathscr{L}$ para cada $\varphi \in T_0$, por lo que por el Lema 4.5.3 se tiene que χ_X es medible Daniell. Entonces $X \in \mathscr{A}$, y $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra. $\square$

Teorema 4.5.6. *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell satisfaciendo la condición de Stone, y consideremos la función*

$$\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty], \quad \mu(E) = \begin{cases} (\mathcal{D}) \displaystyle\int \chi_E & \textit{si } \ \chi_E \in \mathscr{L} \\ \infty & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces μ es una medida positiva sobre $(X, \mathscr{A})$.

Demostración. Veamos primero que μ es positiva y $\mu(\emptyset) = 0$. Sea $E \in \mathscr{A}$ cualquiera. Si $\mu(E) = \infty$ la función es trivialmente positiva, mientras que si $\mu(E) < \infty$ se tiene que $\chi_E \geq 0$, por lo que por

[4] Veremos en la siguiente sección que la integral de Lebesgue la cumple.

la monotonía de la integral de Daniell (Proposición 4.2.3) se sigue que $0 \leq (\mathcal{D}) \int x = \mu(E)$. Además $\chi_\emptyset = 0$, por lo que por el mismo resultado se tiene que $\mu(\emptyset) = (\mathcal{D}) \int \chi_\emptyset = 0$.

Veamos a continuación que μ es σ-aditiva. Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{A}$ una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos. Como $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{A}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, se tiene que $\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} = \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}$. Si $\sum_{n=1}^\infty \big((\mathcal{D}) \int \chi_{E_n}\big) < \infty$, entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada 4.3.4 se tiene que

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} = \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n} \in \mathscr{L}$$

y además,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) = (\mathcal{D}) \int \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} = \sum_{n=1}^\infty \Big((\mathcal{D}) \int \chi_{E_n}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$$

Supongamos entonces que $\sum_{n=1}^\infty \big((\mathcal{D}) \int \chi_{E_n}\big) = \infty$, y veamos por reducción al absurdo que $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) = \infty$. Si $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) < \infty$, entonces $\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} \in \mathscr{L}$. Además, para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^N \Big((\mathcal{D}) \int \chi_{E_n}\Big) = (\mathcal{D}) \int \chi_{\bigcup_{n=1}^N E_n} \leq (\mathcal{D}) \int \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} < \infty$$

lo que contradice la hipótesis de que $\sum_{n=1}^\infty \big((\mathcal{D}) \int \chi_{E_n}\big) = \infty$. Por tanto concluimos que μ es una medida positiva. □

Nota 4.5.7. Por los Teoremas 4.5.5 y 4.5.6, sabemos que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida, pero este es además completo. Para probarlo, consideremos un conjunto $E \subset X$ y otro $F \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(F) = 0$. Entonces χ_F es una función nula y $\chi_E \leq \chi_F$, por lo que por la Proposición 4.4.3 se tiene que χ_E es una función nula, lo que implica que $\chi_E \in \mathscr{L}$ y por tanto $E \in \mathscr{A}$.

El siguiente Teorema de Stone y Daniell responde parcialmente a las preguntas que nos habíamos planteado, estableciendo que en caso de cumplirse la condición de Stone, la integral de Daniell no es más que un caso particular de la integral de Lebesgue.

Teorema 4.5.8 (Daniell-Stone)**.** *Sea (X, T_0, I) un espacio de Daniell verificando la condición de Stone. Entonces existe un espacio de medida completo $(X, \mathscr{A}, \mu)$ tal que toda función $\varphi \in \overline{R}^X$ es I-integrable si y solo si es μ-sumable. Además, en estas condiciones se tiene que*

$$(\mathcal{D}) \int \varphi = (\mathcal{L}) \int_X \varphi \, d\mu$$

Demostración. Como (X, T_0, I) es un espacio de Daniell que satisface la condición de Stone, sabemos por los Teoremas 4.5.5, 4.5.6 y la Nota 4.5.7 que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida completo.

($\Rightarrow$) Sea una función $x \in \mathscr{L}$ no negativa cualquiera. Veamos primero que x es medible en el sentido de Lebesgue. Definamos $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos $E_\alpha = \{t \in X : x(t) > \alpha\}$. Si $\alpha \leq 0$, entonces $E_\alpha = X \in \mathscr{A}$. Supongamos entonces que $\alpha > 0$, y definamos la función

$$y = \frac{1}{\alpha}x - \left(\frac{1}{\alpha}x\right) \wedge \chi_X$$

Como χ_X es medible Daniell $\left(\frac{1}{\alpha}x\right) \wedge \chi_X \in \mathscr{L}$, por lo que $y \in \mathscr{L}$. Notemos que dado $t \in X$, si $t \in E_\alpha$ entonces $\chi_X(t) \leq \frac{1}{\alpha}x(t)$, por lo que $0 < y(t)$; mientras que si $t \notin E_\alpha$ entonces $\frac{1}{\alpha}x(t) \leq \chi_X(t)$, y por tanto $y(t) = 0$. De esta manera $t \in E_\alpha$ si y solo si $0 < y(t)$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $\varphi_n \coloneqq \chi_X \wedge (ny)$. Claramente φ_n es medible Daniell $\forall\, n \in \mathbb{N}$, y además $\varphi_n \uparrow \chi_{E_\alpha}$. Entonces, aplicando el Lema 4.5.2 se tiene que χ_{E_α} es medible Daniell, y por tanto $E_\alpha \in \mathscr{A}$.

Veamos a continuación que x es μ-sumable. Definamos para cada $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n2^n + 1$ los conjuntos

$$E_{k,n} \coloneqq \{t \in X : (k-1)2^{-n} \leq x(t) < k2^{-n}\}, \quad E_{n2^n+1,n} \coloneqq \{t \in X : x(t) > n\} \tag{4.1}$$

y las funciones

$$s_{k,n} = 2^{-n}(k-1)\chi_{E_{k,n}}, \quad \varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n+1} s_{k,n} \tag{4.2}$$

Como x es medible en el sentido de Lebesgue, sabemos que $s_{k,n}$ es medible Daniell $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n2^n + 1$, y por su propia construcción se tiene que $x \geq s_{k,n}$. Por tanto, $s_{k,n} = s_{k,n} \wedge x \in \mathscr{L}$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n2^n$, por lo que $\varphi_n \in \mathscr{L}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $\{E_{k,n}\}_{k=1}^{n2^n+1}$ son disjuntos dos a dos, por lo que

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n+1} s_{k,n} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{n2^n+1} (k-1)\chi_{E_{k,n}} \leq x \tag{4.3}$$

Veamos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ es una sucesión creciente y $\varphi_n \uparrow x$. Sea $t \in X$ cualquiera. Si $x(t) = \infty$ entonces $\varphi_n(t) = n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \infty = x(t)$. Supongamos ahora que $x(t) < \infty$ y fijemos $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$n_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x(t)\} < \infty$$

Si $n < n_t$ entonces $\varphi_n(t) = n$, por lo que $\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$, y además $\varphi_{n_t+1}(t) \geq n_t = \varphi_{n_t}(t)$. Si

$n \geq n_t + 1$, entonces existe $1 \leq k \leq n$ tal que

$$x(t) \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) = \left[\frac{2(k-1)}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right)$$

Por tanto, $\varphi_n(t) = (k-1)2^{-n}$ y $\varphi_{n+1}(t) \in \{(k-1)2^{-n}, (2k-1)2^{-n-1}\}$, por lo que $\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$. Además, por (4.3) y que la longitud del intervalo $[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})$ es 2^{-n}, se tiene que

$$0 \leq x(t) - \varphi_n(t) \leq \frac{1}{2^n}$$

y por tanto $\varphi_n \uparrow x$. Como $\varphi_n \leq x\ \forall n \in \mathbb{N}$, por la monotonía de la integral de Daniell se tiene que $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{D})\int \varphi_n \leq (\mathcal{D})\int x < \infty$, y en consecuencia podemos aplicar el T.C.M. de la integral de Daniell y Lebesgue para concluir que

$$\begin{aligned}(\mathcal{D})\int x &= \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{D})\int \varphi_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{D})\int \sum_{k=1}^{n2^n+1} s_{k,n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n2^n+1}\left((\mathcal{D})\int s_{k,n}\right) \qquad (4.4)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n2^n+1}\frac{k-1}{2^n}\left((\mathcal{D})\int \chi_{E_{k,n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n2^n+1}\frac{k-1}{2^n}\mu(\chi_{E_{k,n}}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n2^n+1}\frac{k-1}{2^n}\left((\mathcal{L})\int_X \chi_{E_{k,n}}\,d\mu\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n2^n+1}\left((\mathcal{L})\int_X s_{k,n}\,d\mu\right) = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_X \sum_{k=1}^{n2^n+1} s_{k,n}\,d\mu\right) = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_X \varphi_n\,d\mu\right) = (\mathcal{L})\int_X x\,d\mu\end{aligned}$$

por lo que x es μ-sumable y las integrales coinciden.

($\Leftarrow$) Consideremos ahora una función $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ μ-sumable no negativa cualquiera, y veamos que es I-integrable. Definamos para cada $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n2^n + 1$ los conjuntos $E_{k,n}$ y las funciones $s_{k,n}$, φ_n por las expresiones (4.1) y (4.2) respectivamente. Entonces, tal y como se probó anteriormente, $\varphi \uparrow x$, $s_{k,n} \leq x$ y $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}\ \forall n, k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n2^n + 1$. Además, como x es medible en el sentido de Lebesgue se tiene que $E_{k,n} \in \mathscr{A}$, por lo que

$$\mu(E_{n,k}) = (\mathcal{L})\int_X \chi_{E_{n,k}}\,d\mu = \frac{2^n}{k-1}\left((\mathcal{L})\int_X s_{n,k}\,d\mu\right) \leq \frac{2^n}{k-1}\left((\mathcal{L})\int_X x\,d\mu\right) < \infty$$

y $s_{k,n} = 2^{-n}(k-1)\chi_{E_{n,k}} \in \mathscr{L}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, φ_n es una combinación lineal finita de las funciones $\{s_k, n\}$, por lo que por la Proposición 4.2.3 se tiene que $\varphi_n \in \mathscr{L}$. Entonces, de la misma manera que se hizo en la implicación anterior, podemos aplicar el T.C.M. para ambas integrales y concluir, a partir de la cadena de igualdades (4.4), que x es I-integrable y las integrales son iguales.

Por último, consideremos una función $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ arbitraria. Sabemos que se puede descomponer x como $x = x \wedge 0 - (-x) \wedge 0$, donde $x \wedge 0$ y $(-x) \wedge 0$ son funciones no negativas. Además, tanto las funciones I integrables como las μ-sumables forman un retículo vectorial extendido. Por tanto, como el resultado es cierto para funciones no negativas se tiene que

$$\begin{aligned} x\ I\text{-integrable} &\Longleftrightarrow x \wedge 0, (-x) \wedge 0\ I\text{-integrables} \Longleftrightarrow x \wedge 0, (-x) \wedge 0\ \mu\text{-sumables} \\ &\Longleftrightarrow x\ \mu\text{-sumable} \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}) \int x &= (\mathcal{D}) \int (x \wedge 0) - (\mathcal{D}) \int ((-x) \wedge 0) \\ &= (\mathcal{L}) \int (x \wedge 0)\, d\mu - (\mathcal{L}) \int ((-x) \wedge 0)\, d\mu = (\mathcal{L}) \int x\, d\mu \end{aligned}$$

por lo que las integrales coinciden. Esto concluye la demostración. □

Nota 4.5.9. A la vista de este resultado, podría pensarse que la condición de Stone sólo es necesaria para que $\mathscr{A}$ sea σ-álgebra, y por tanto si el espacio de Daniell no tuviera esta propiedad, la integral de Daniell sería equivalente a una integral de Lebesgue sobre un σ-anillo [19]. Sin embargo, la condición de Stone se utiliza también para probar la medibilidad en el sentido de Lebsgue de las funciones I-integrables, lo que hace de esta hipótesis imprescindible para concluir el resultado. En general, los espacios de Daniell que no satisfacen la condición de Stone son a menudo patológicos, permitiendo integrales que no podríamos considerar con la teoría de Lebesgue. En el último capítulo discutiremos algunos de estos ejemplos, tanto en dimensión finita como infinita, e incluso veremos que la derivada de ciertas funciones puede ser interpretada como una integral de Daniell.

4.5.2. Equivalencia con la integral de Lebesgue.

En la literatura sobre la Teoría de la Integración, encontramos habitualmente la afirmación de que las integrales de Daniell y Lebesgue son equivalentes, lo cual tiene ciertos matices. Por un lado, por el Teorema de Daniell-Stone sabemos que si se cumple la condición de Stone, entonces la integral de Daniell se puede interpretar como una integral de Lebesgue. A continuación discutiremos si la integral de Lebesgue puede entenderse como una integral de Daniell.

Nota 4.5.10. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. En esta sección adopataremos la notación $T_0(\mathcal{A}, \mu)$ para la clase de las funciones $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ que son μ-sumables[5], y $I_{\mathcal{L}}$ para la aplicación definida por la integral de Lebesgue, i.e.

$$I_{\mathcal{L}} : T_0(\mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I_{\mathcal{L}}(f) = (\mathcal{L}) \int_X f\, d\mu$$

[5] Por la Proposición 3.5.20 sabemos que toda función $x \in \overline{\mathbb{R}}^X$ μ-sumable se puede identificar con una función $\tilde{x} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}, \mu)$. Por tanto, podríamos sustituir $T_0(\mathcal{A}, \mu)$ por $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}, \mu)$ en los siguientes resultados, aunque en el contexto de la integral de Daniell es más común trabajar con funciones $\overline{\mathbb{R}}$-valuadas.

Lema 4.5.11. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida y $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ una función medible no negativa. Si $\psi \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$, entonces $\varphi \wedge \psi \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$ y además se cumple que*

$$(\mathcal{L}) \int_X |\varphi \wedge \psi| \, d\mu \leq (\mathcal{L}) \int_X |\psi| \, d\mu$$

Demostración. Sea $\psi \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$. Como φ y ψ son funciones medibles, entonces $|\varphi \wedge \psi|$ es una función medible no negativa, y por tanto su integral de Lebesgue existe (ya sea finita o infinita). Claramente se tiene que

$$(\mathcal{L}) \int_{\{\varphi \geq \psi\}} |\psi| \, d\mu \leq (\mathcal{L}) \int_{\{\varphi \geq \psi\}} \psi \, d\mu \leq (\mathcal{L}) \int_{\{\varphi \geq \psi\}} \varphi \, d\mu \leq (\mathcal{L}) \int_{\{\varphi \geq \psi\}} |\varphi| \, d\mu$$

de manera que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}) \int_X |\varphi \wedge \psi| \, d\mu &= (\mathcal{L}) \int_{\{\varphi \geq \psi\}} |\psi| \, d\mu + (\mathcal{L}) \int_{\{\varphi \leq \psi\}} |\varphi| \, d\mu \\ &\leq \mathcal{L}) \int_{\{\varphi \geq \psi\}} |\varphi| \, d\mu + (\mathcal{L}) \int_{\{\varphi \leq \psi\}} |\varphi| \, d\mu = \mathcal{L}) \int_X |\psi| \, d\mu \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\varphi \wedge \psi \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$. □

Teorema 4.5.12. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces $(X, T_0(\mathcal{A}, \mu), I_{\mathcal{L}})$ es un espacio de Daniell satisfaciendo la condición de Stone.*

Demostración. Por las Proposiciones 3.5.6, 3.5.20, 3.6.1 y 3.6.2 sabemos que $T_0(\mathcal{A}, \mu)$ es un retículo vectorial extendido y $I_{\mathcal{L}}$ cumple (D1) y (D3). Además, por el Lema de Fatou para la integral de Lebesgue, $I_{\mathcal{L}}$ también verifica (D2), por lo que $(X, T_0(\mathcal{A}, \mu), I_{\mathcal{L}})$ es un espacio de Daniell.

Veamos que $(X, T_0(\mathcal{A}, \mu), I_{\mathcal{L}})$ verifica la condición de Stone. Claramente $X \in A$ por ser $\mathcal{A}$ una σ-álgebra, de manera que χ_X es una función medible no negativa. Entonces por el Lema 4.5.11 se tiene que $\varphi \wedge \chi_X \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$ para cada $\varphi \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$, lo que concluye el resultado. □

A raíz de este último resultado, está claro que la integral de Daniell generaliza a la de Lebesgue. De esta manera, por el Teorema de Daniell-Stone podemos establecer finalmente la relación entre estas dos teorías de integración:

$$\text{Integral de Daniell} + \text{Condición de Stone} \Longleftrightarrow \text{Integral de Lebesgue}$$

Esto nos inclina a pensar que la integral de Daniell es estrictamente más general que la de Lebesgue, ya que existen espacios de Daniell que no verifican la condición de Stone, y que por tanto no pueden entenderse con la integral de Lebesgue. Sin embargo, tal y como ya se ha comentado estos espacios son a menudo patológicos, y en la mayoría de integrales relevantes se verifica la condición de Stone. Esta es la razón principal por la que, a efectos prácticos, se considera en la literatura que *las integrales de Lebesgue y Daniell son equivalentes.*

Por otro lado, una cuestión que no se discute en la literatura es cúal es realmente la integral de Daniell que genera la integral de Lebesgue. Esto es, partiendo de un espacio de medida cualquiera y construyendo su espacio de Daniell a partir de la integral de Lebesgue, ¿qué relación existe entre la integral de Lebesgue original y la extensión por el método de Daniell? A continuación responderemos esta pregunta, probando *resultados originales* en este Trabajo de Fin de Grado.

Nota 4.5.13. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida y $(X, T_0(\mathcal{A}, \mu), I_{\mathcal{L}})$ su espacio de Daniell asociado. Denotaremos $T_1(\mathcal{A}, \mu), T_2(\mathcal{A}, \mu)$ y $\mathscr{L}(\mathcal{A}, \mu)$ a los conjuntos dados por las Definiciones 4.1.5, 4.4.4 y 4.1.13 respectivamente. Además, denotaremos $I_1^{\mathcal{L}}$ a la aplicación de la Definición 4.1.10 y $(\mathcal{D}_{\mathcal{L}}) \int$ a su integral de Daniell.

Lema 4.5.14. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida. Entonces $x \in \mathscr{L}(\mathcal{A}, \mu)$ si y solo si $x = y - z$ donde $y \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$ y z es una función nula no negativa.*

Demostración. Por el Teorema 4.4.7, basta probar que $T_0(\mathcal{A}, \mu) = T_2(\mathcal{A}, \mu)$ para concluir el resultado. Trivialmente se tiene que $T_0(\mathcal{A}, \mu) \subset T_2(\mathcal{A}, \mu)$, por lo que solo es necesario probar que $T_2(\mathcal{A}, \mu) \subset T_0(\mathcal{A}, \mu)$.

Sea $x \in T_2(\mathcal{A}, \mu)$ cualquiera. Supongamos en primer lugar que $x \in \mathscr{L}(\mathcal{A}, \mu) \cap T_1(\mathcal{A}, \mu)$, de forma que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T_0(\mathcal{A}, \mu)$ tal que $x_n \uparrow x$. Claramente $x_1 \leq x_n \leq x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $0 \leq |x_n| \leq |x_1| + |x|$, y x es μ-medible por ser límite de funciones μ-medibles. De esta manera, la integral de Lebesgue de $|x|$ existe (ya sea finita o infinita) y aplicando el Lema de Fatou para la integral de Lebesgue se tiene que

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}) \int_X |x| \, d\mu = (\mathcal{L}) \int_X (\liminf_{n\to\infty} |x_n|) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left((\mathcal{L}) \int_X |x_n| \, d\mu \right) = \liminf_{n\to\infty} I_{\mathcal{L}}(|x_n|) \\ = \liminf_{n\to\infty} \left((\mathcal{D}_{\mathcal{L}}) \int |x_n| \right) \leq (\mathcal{D}_{\mathcal{L}}) \int |x_1| + (\mathcal{D}_{\mathcal{L}}) \int |x| < \infty\end{aligned} \tag{4.5}$$

por lo que $x \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$. En el caso general, sabemos por la Proposición 4.4.6 que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{L}(\mathcal{A}, \mu) \cap T_1(\mathcal{A}, \mu)$ tal que $x_n \downarrow x$. Aplicando el caso anterior se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$, y al igual que antes x es μ-medible por ser límite de funciones μ-medibles y $x \leq x_n \leq x_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $0 \leq |x_n| \leq |x_1| + |x|$. Entonces, por el Lema de Fatou para la integral de Lebesgue se cumple la cadena de desigualdades (4.5), y en consecuencia $x \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$. $\square$

Nota 4.5.15. Sean $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dos espacios de medida tal que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ y $\mu_2|_{\mathcal{A}_1} = \mu_1$. Entonces se puede probar (véase [8, Theorem 3.6.1.]) que toda función φ μ_1-sumable es también μ_2-sumable, y además se cumple que

$$(\mathcal{L})\int_X \varphi\, d\mu_1 = (\mathcal{L})\int_X \varphi\, d\mu_2$$

El siguiente resultado caracteriza la integral de Daniell generada por una integral de Lebesgue.

Teorema 4.5.16. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(X, T_0(\mathcal{A}, \mu), I(\mathcal{A}, \mu))$ su espacio de Daniell asociado. Si $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ es la complección de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces toda función $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ es $I_{\mathcal{L}}$-integrable si y solo si es $\tilde{\mu}$-sumable, y en estas condiciones se tiene que*

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{L}})\int \varphi = (\mathcal{L})\int_X \varphi\, d\tilde{\mu}$$

Demostración. Sea $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ la complección de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

($\Rightarrow$) Dada una función x $I_{\mathcal{L}}$-integrable cualquiera, veamos que x es $\tilde{\mu}$-sumable. Por el Lema 4.5.14 podemos descomponer $x = y - z$, donde $y \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$ y z es una función nula no negativa. Como y es μ-sumable, $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ y $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}}$, sabemos por la Nota 4.5.15 que y es $\tilde{\mu}$-sumable, de manera que basta probar que z es $\tilde{\mu}$-sumable. Veamos primero que z es $\tilde{\mu}$-medible, para lo cual definimos $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos

$$E_\alpha = \{t \in X : z(t) > \alpha\}$$

Si $\alpha < 0$ se tiene que $E_\alpha = X \in \tilde{A}$, por lo que supongamos que $\alpha \geq 0$. Como z es una función nula, sabemos por definición que z es $I_{\mathcal{L}}$-integrable, por lo que aplicando Lema 4.5.14 se tiene que $z = y_0 - z_0$ donde $y_0 \in T_0(\mathcal{A}, \mu)$ y z_0 es una función nula no negativa. Entonces $0 \leq z \leq y_0$ y y_0 es μ-medible, de donde se sigue que

$$E_\alpha \subset \{t \in X : y_0(t) > \alpha\} \in \mathcal{A} \subset \tilde{A}$$

y además

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{\mu}(\{t \in X : y_0(t) > \alpha\}) = \mu(\{t \in X : y_0(t) > \alpha\}) = (\mathcal{L})\int_{\{y_0 > \alpha\}} 1\, d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\left((\mathcal{L})\int_{\{y_0 > \alpha\}} y_0\, d\mu\right) \\ \leq \frac{1}{\alpha}\left((\mathcal{L})\int_X y_0\, d\mu\right) = \frac{1}{\alpha} I_{\mathcal{L}}(y_0) = \frac{1}{\alpha}\left((\mathcal{D}_{\mathcal{L}})\int y_0\right) = \frac{1}{\alpha}\left((\mathcal{D}_{\mathcal{L}})\int z + (\mathcal{D}_{\mathcal{L}})\int z_0\right) = 0 \end{aligned}$$

De esta manera, E_α está contenido en un conjunto nulo de $\tilde{A}$, por lo que como $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ es completo se tiene que $E_\alpha \in \tilde{A}$. Por tanto, z es $\tilde{\mu}$-medible y no negativa, de donde se sigue que su integral de

Lebesgue existe[6], y además cumple que

$$(\mathcal{L})\int_X z\,d\tilde{\mu} \leq (\mathcal{L})\int_X y_0\,d\tilde{\mu} = (\mathcal{L})\int_X y_0\,d\mu = (\mathcal{D}_{\mathcal{L}})\int y_0 = 0$$

Entonces z es $\tilde{\mu}$-sumable, y en consecuencia $x = y - z$ es $\tilde{\mu}$-sumable.

($\Leftarrow$) Sea x una función $\tilde{\mu}$-sumable, veamos que x es $I_{\mathcal{L}}$-integrable. Sabemos por el Teorema 4.5.12 que $(X, T_0(\mathcal{A},\mu), I_{\mathcal{L}})$ es un espacio de Daniell satisfaciendo la condición de Stone, por lo que por el Teorema 4.5.8 existe un espacio de medida completo[7] $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ tal que toda función φ es $I_{\mathcal{L}}$-integrable si y solo si φ es μ_0-sumable, y en cuyo caso

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{L}})\int \varphi = (\mathcal{L})\int_X \varphi\,d\mu_0$$

De esta manera, basta probar que x es μ_0-sumable y las integrales de Lebesgue de x respecto de $\tilde{\mu}$ y μ_0 coinciden. Veamos antes que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$ y $\mu_0|_{\mathcal{A}} = \mu$:

(i) Sea $E \in \mathcal{A}$ cualquiera, entonces χ_E es una función μ-medible no negativa. Aplicando el Lema 4.5.11 sabemos que $\chi_E \wedge \varphi \in T_0(\mathcal{A},\mu) \subset \mathscr{L}(\mathcal{A},\mu)$ para cada $\varphi \in T_0(\mathcal{A},\mu)$. Entonces por el Lema 4.5.3 se tiene que χ_E es medible Daniell, y por tanto $E \in \mathcal{A}_0$.

(ii) Sea $E \in \mathcal{A}$ cualquiera, veamos que $\mu(E) = \mu_0(E)$. Si $\mu(E) < \infty$ entonces χ_E es μ-sumable, por lo que $\chi_E \in T_0(\mathcal{A},\mu)$. Entonces χ_E es $I_{\mathcal{L}}$-integrable, y por tanto $\tilde{\mu}$-sumable, de manera que

$$\mu(E) = (\mathcal{L})\int \chi_E\,d\mu = I_{\mathcal{L}}(\chi_E) = (\mathcal{D}_{\mathcal{L}})\int \chi_E = (\mathcal{L})\int \chi_E\,d\mu_0 = \mu_0(E)$$

Si $\mu(E) = \infty$, supongamos por reducción al absurdo que $\mu_0(E) < \infty$. Entonces χ_E es μ_0-sumable, y por tanto $I_{\mathcal{L}}$-integrable. Aplicando el Lema 4.5.14 se tiene que $\chi_E = y - z$ donde $y \in T_0(\mathcal{A},\mu)$ y z es una función nula no negativa. Como χ_E e y son μ-medibles, entonces $z = y - \chi_E$ es μ-medible. Además, $0 \leq z \leq y$, por lo que

$$0 \leq (\mathcal{L})\int_X z\,d\mu \leq (\mathcal{L})\int_X y\,d\mu < \infty$$

De esta manera $z \in T_0(\mathcal{A},\mu)$, y por el Teorema 4.5.16 deducimos que $\chi_E = y - z \in T_0$. Entonces,

$$\mu(E) = (\mathcal{L})\int_X \chi_E d\mu < \infty$$

y llegamos a una contradicción.

[6] Ya sea finita o infinita.

[7] Para no complicar la notación, estamos reescribiendo $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0) \equiv (X, \mathscr{A}, \mu)$ en el Teorema original.

Por tanto $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ es un espacio de medida completo verificando que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$ y $\mu_0|_{\mathcal{A}} = \mu$, y dado $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ es la compleción de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, deducimos que $\tilde{A} \subset \mathcal{A}_0$ y $\mu_0|_{\tilde{A}} = \tilde{\mu}$. Además, x es $\tilde{\mu}$-sumable, por lo que por la Nota 4.5.15 se tiene que x es μ_0-sumable y además se cumple que

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{L}}) \int x = (\mathcal{L}) \int_X x \, d\mu_0 = (\mathcal{L}) \int_X x \, d\tilde{\mu}$$

lo que concluye la demostración. □

Nota 4.5.17. De esta manera, la integral de Daniell puede extender una integral de Lebesgue sólo hasta la compleción del espacio de medida de partida. Esto no hace más que reafirmar que, en el contexto de la teoría de la medida, los enfoques de Daniell y Lebesgue son equivalentes.

4.6. La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ a través de la integral de Daniell

En algunos libros como [3], se introduce la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$) sin ningún conocimiento previo sobre la Teoría de la Medida, para lo cual es de gran utilidad la integral de Daniell. La idea es partir del retículo formado por las funciones escalonadas, y definir la integral a partir de la longitud de cada escalón. Entonces, se demuestra que esto define un espacio de Daniell, cuya integral resulta ser equivalente a la integral de Lebesgue usual.

A continuación presentamos una idea similar [12], aunque partiendo de las funciones continuas de soporte compacto como espacio de Riesz base, y de la integral de Riemann como I-integral. Veremos que estos elementos conforman un espacio de Daniell, y que su integral de Daniell asociada es efectivamente la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Proposición 4.6.1. *Sea una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tal que $f_n \downarrow 0$. Entonces se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{R}) \int_{-\infty}^{\infty} f_n \, dx \right) = 0$$

Demostración. Como f_1 tiene soporte compacto, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que f_1 se anula fuera de $[a, b]$. Además $0 \leq f_n \leq f_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que f_n se anula también fuera de $[a, b]$. Entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq (\mathcal{R}) \int_{-\infty}^{\infty} f_n \, dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f_n \, dx \leq (b - a) \sup_{t \in [a,b]} f_n(t)$$

Como $[a, b]$ es compacto y $f_n \downarrow f$, se tiene por el Teorema de Dini que f_n converge uniformemente a 0. Entonces $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} f_n(t) = 0$, lo que concluye el resultado. □

Teorema 4.6.2. *La terna $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), I_{\mathcal{R}})$ es un espacio de Daniell satisfaciendo la condición de Stone. Además, si $(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mu)$ es el espacio de medida completo dado por el Teorema 4.5.8, se tiene que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$ y $\mu|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})} = m$, donde m es la medida de Lebesgue unidimensional.*

Demostración. Trivialmente se tiene que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial, y es fácil comprobar que para cada $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ se cumple que

$$supp(f \wedge g) \cup supp(f \vee g) \subset supp(f) \cup supp(g)$$

de manera que $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Entonces $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ es un retículo vectorial. Además, por la monotonía y linealidad de la integral de Riemann $I_{\mathcal{R}}$ cumple (D1) y (D3), mientras que por la Proposición 4.6.1 también cumple (D3). Por tanto $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), I_{\mathcal{R}})$ es un espacio de Daniell, y solo falta probar que satisface la condición de Stone. Dada $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ cualquiera, sabemos que como $\chi_{\mathbb{R}}(x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$supp(\varphi \wedge \chi_{\mathbb{R}}) \subset supp(\varphi)$$

y además $\chi_{\mathbb{R}}$ es continua, por lo que $\varphi \wedge \chi_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$.

Como $(\mathbb{R}, \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), I_{\mathcal{R}})$ es un espacio de Daniell satisfaciendo la condición de Stone, podemos aplicar el Teorema 4.5.8 y denotar $(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mu)$ al espacio de medida completo dado por este Teorema. Veamos primero que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$. Sea $I = [a, b)$ un semiintervalo acotado cualquiera. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n}{b-a}(x-a)+1 & \text{si } x \in \left[a - \frac{b-a}{2n}, a\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left[a, b - \frac{b-a}{2n}\right] \\ \frac{2n}{b-a}(b-x) & \text{si } x \in \left[b - \frac{b-a}{2n}, b\right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.6}$$

Claramente $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f_n \uparrow \chi_I$, de donde se sigue que $\chi_I \in T_1$. Además, si denotamos I_1 a la extensión de $I_{\mathcal{R}}$ a T_1 dada por la Definición 4.1.5, se tiene que

$$I_1(\chi_I) = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{R})\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left[(\mathcal{R})\int_{a-\frac{b-a}{2n}}^{a} f_n(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_{a}^{b-\frac{b-a}{2n}} f_n(x)\,dx\right.$$
$$\left. + (\mathcal{R})\int_{b-\frac{b-a}{2n}}^{b} f_n(x)\,dx\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{4n} + b - a - \frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{4n}\right] = b - a < \infty$$

Entonces $\chi_I \in \mathscr{L}$, de manera que χ_I es medible Daniell y $I \in \mathscr{A}$. Por la Proposición 3.2.26 sabemos que la clase $\mathcal{C}$ de los semiintervalos acotados generan la σ-álgebra de Borel, y por tanto

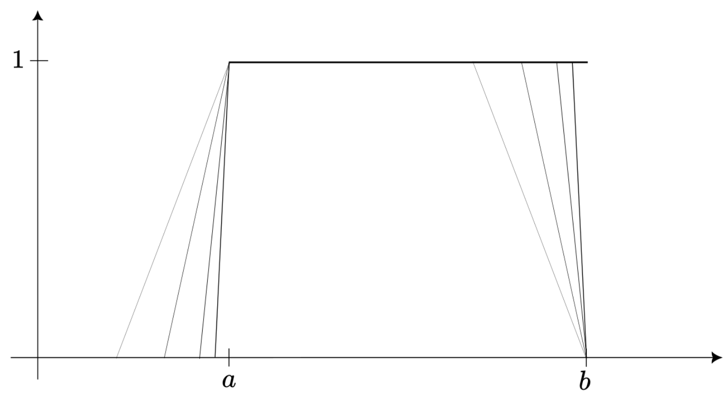

Figura 4.1: Esquema de las funciones f_n de (4.6).

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathscr{A}$. Además, por el Teorema 4.5.8 se tiene que χ_I es μ-sumable y se cumple que

$$\mu(I) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} \chi_I \, d\mu = (\mathcal{D}) \int \chi_I = I_1(\chi_I) = b - a = m(I)$$

De esta manera μ coincide con la medida de lebesgue unidimensional sobre $\mathcal{C}$, y por tanto también lo hace sobre el anillo generado por los semiintervalos acotados. Entonces por el Teorema 3.2.24 se tiene que μ coincide con la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Finalmente, hemos probado que $(\mathbb{R}, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio de medida completo tal que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$ y $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, por lo que sabiendo por el Teorema 3.1.16 que $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ es la compleción de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$, concluimos que $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$ y además $\mu|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})} = m$. □

4.7. Construcción de Riesz

La siguiente construcción, original de Riesz [38], plantea un procedimiento para construir la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, que aunque no utiliza las herramientas de desarrolladas en este capítulo, sigue la filosofía de Daniell de partir de una integral más sencilla (Riemann) para construir una más compleja (Lebesgue). La única diferencia sustancial con el enfoque de Daniell es que, en lugar de utilizar el Teorema de Daniell-Stone, usaremos el Teorema de Representación de Riesz sobre los funcionales definidos sobre las funciones continuas de soporte compacto de un espacio localmente compacto y Hausdorff (como es $\mathbb{R}$).

Definición 4.7.1. Sea (X, τ_X) un espacio topológico, decimos que un funcional $\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es *positivo* si dado $f \in \mathcal{C}_c(X)$ tal que $f \geq 0$ se tiene que $\Lambda f \geq 0$.

Dado que el espacio sea localmente compacto y Haussdorff es una hipótesis esencial en el siguiente teorema, recordamos estos dos conceptos. Decimos que un espacio topológico (X, τ_X) es *Haussdorf* si $\forall\, x, y \in X$ tal que $x \neq y$ existen $U, V \in \tau_X$ de manera que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por otro lado, decimos que (X, τ_X) es *localmente compacto* si todo punto tiene un entorno compacto.

Nota 4.7.2. Por simplicidad, de ahora en adelante hablaremos en todo momento de X como un espacio localmente compacto Hausdorff, sin hacer referencia a la topología.

El siguiente teorema es una generalización del Teorema de Representación de Riesz que se demostró en el capítulo anterior. De hecho, la equivalencia de estos dos teoremas para el caso de un intervalo $[a, b]$ compacto establece una correspondencia biyectiva entre las funciones de variación acotada, y las medidas regulares de radon definidas sobre dicho intervalo.[8] Dado que ya se probó la versión restringida a un intervalo compacto, y la demostración general es extensa, presentaremos su enunciado sin demostración, pudiéndose encontrar la misma en [38].

Teorema 4.7.3 (Riesz)**.** *Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, y $\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal positivo. Entonces existe una única medida de radon μ representando a Λ, i.e:*

$$\Lambda f = (\mathcal{L}) \int_X f \, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X)$$

A partir de este último resultado podemos probar la existencia y unicidad de la *medida de Lebesgue*:

Teorema 4.7.4. *Existe una única medida de borel μ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ satisfaciendo las siguientes propiedades:*

(i) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, $\mu\big([a, b)\big) = b - a$.

(ii) μ *es invariante bajo traslaciones.*

(iii) μ *es regular.*

Demostración. Veamos en primer lugar la existencia. Sea $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ cualquiera, sabemos que como su soporte es compacto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subset [-n, n]$. De esta manera, podemos utilizar la integral de Riemann para definir el funcional

$$\Lambda \colon \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \Lambda f = \int_{-n}^{n} f(t) \, dt$$

Por la linealidad y monotonía de la integral de Riemann está claro que Λ es un funcional lineal y positivo. De esta manera, como $\mathbb{R}$ con su topología natural es localmente compacto y Hausdorff,

[8] Esto invitó históricamente a definir la variación de una medida general, que se puede utilizar para demostrar el *Teorema de Descomposición de Hahn* [30, Theorem 6.4].

podemos aplicar el *Teorema de Representación de Riesz* 4.7.3 para concluir que existe una medida de radon μ que representa a Λ, i.e.

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \int_{-n}^{n} f(t)\, dt \ \ \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$$

Veamos que μ cumple las condiciones deseadas. Como μ es de radón es en particular regular, por lo que basta probar (i) y (ii). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ cualesquiera pero fijos, probemos que $\mu([a,b)) = b-a$. Al igual que se hizo en (4.6), podemos construir una sucesión creciente de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tal que $\chi_{[a_n,b_n]} \leq f_n \leq \chi_{[a_{n+1},b_{n+1}]}$ para cada $n \geq 1$, $a_n \uparrow a$ y $b_n \downarrow b$. Entonces escogiendo $M \in \mathbb{N}$ tal que $[a,b] \subset [-M,M]$, se tiene que

$$b_n - a_n = (\mathcal{R}) \int_{-M}^{M} \chi_{[a_n,b_n]}\, dt \leq (\mathcal{R}) \int_{-M}^{M} f_n\, dt \leq (\mathcal{R}) \int_{-M}^{M} \chi_{[a_{n+1},b_{n+1}]}\, dt = b_{n+1} - a_{n+1}$$

de donde tomando $n \to \infty$ deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{R}) \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{R}) \int_{-n}^{n} f_n(t)\, dt \right) = b - a$$

Como $a_n \downarrow a$ y $b_n \uparrow b$, entonces $f_n \xrightarrow{n} \chi_I$ y $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que por el Teorema de la Convergencia Monótona para la integral de Lebesgue concluimos que

$$\mu(I) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} \chi_I\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu \right) = b - a$$

Veamos a continuación que la medida es invariante por traslaciones. Fijemos $x \in \mathbb{R}$ y $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ cualesquiera. Si $E = [a,b)$ con $a < b$,

$$\mu(E) = b - a = b + x - (a + x) = \mu([x+a, x+b)) = \mu(x + E)$$

ya que $[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b)$, por lo que $\mu([a,b)) = \lim_n \mu((a-1/n,b)) = b - a$. Supongamos ahora que E es abierto, entonces por el Teorema B.5 se tiene que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, donde $\{I_n\}_n$ es una colección de semiintervalos acotados y disjuntos dos a dos. Por tanto, por la σ-aditividad de μ deducimos que

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(x + I_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (x + I_n)) = \mu(x + E)$$

En el caso general $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, basta tener en cuenta la regularidad de μ y que la aplicación $T_x : y \in \mathbb{R} \to y + x \in \mathbb{R}$ es un homeomorfismo, por lo que V abierto $\Leftrightarrow x + V$ abierto. Por tanto:

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \operatorname{ínf}\{\, \mu(V) \,|\, E \subset V \text{ abierto}\} = \operatorname{ínf}\{\, \mu(V) \,|\, x + E \subset x + V \text{ abierto}\} \\ &= \operatorname{ínf}\{\, \mu(-x + W) \,|\, x + E \subset W \text{ abierto}\} = \operatorname{ínf}\{\, \mu(W) \,|\, x + E \subset W \text{ abierto}\} = \mu(x + E)\end{aligned}$$

Por último, dado que la medida es invariante por traslaciones y conserva la longitud de los intervalos, por el Teorema 3.4.2 es única y se corresponde con la *medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$. $\square$

Capítulo 5

La integral de Henstock-Kurzweil

Aún sin hacer uso de la teoría de la medida, la integral de Henstock-Kurzweil es una de las teorías de integración más poderosas, y con una de las exposiciones más sencillas sobre la recta real. En este capítulo desarrollaremos la integral de Henstock-Kurzweil sobre un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Siguiendo a [5] y [6], estudiaremos su relación con la integral de Riemann y con la de Lebesgue, así como sus propiedades, teoremas de convergencia y el famoso Teorema de Hake.

5.1. Construcción de la integral de Henstock-Kurzweil

De ahora en adelante $[a, b]$ será un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. El primer paso para construir esta generalización de la integral de Riemann pasa por introducir el concepto de *calibre*.

Nota 5.1.1. Recordamos que una partición etiquetada de $[a, b]$ es un conjunto de pares $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, ..., n$ y $\{x_i\}_{i=0}^n$ forma una partición de $[a, b]$. Por concisión, en algunas demostraciones abreviaremos la notación como $\mathcal{P}_e = \{I_i, t_i\}_{i=1}^n$ donde $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ $\forall\, i = 1, ..., n$, y escribiremos la suma de Riemann de una función f asociada a $\mathcal{P}_e$ como

$$S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) l(I_i)$$

donde $l(I_i)$ es la longitud del intervalo i-ésimo.

Definición 5.1.2. Un *calibre* sobre $[a, b]$ es una función $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ estrictamente positiva. Además, dado un calibre δ y una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$, decimos que $\mathcal{P}_e$ es *δ-fina* si $0 < x_i - x_{i-1} \leq \delta(t_i)$ para cada $i = 1, ..., n$.

El siguiente Lema es fundamental para que la definición de la integral de Henstock-Kurzweil tenga sentido:

Lema 5.1.3 (Cousin)**.** *Sea* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *un calibre sobre* $[a,b]$*. Entonces existe una partición etiquetada* δ*-fina en* $[a,b]$*.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que no existe ninguna partición etiquetada de $[a,b]$ que sea δ-fina. Denotemos $I_0 = [a,b]$ y $c_0 = (a+b)/2$. Entonces se tiene que al menos uno de los dos intervalos $[a, c_0]$ o $[c_0, b]$ no posee ninguna partición δ-fina, ya que en caso contrario la unión de ambas particiones sería una partición δ-fina de $[a,b]$. Consideremos entonces $I_1 = [a_1, b_1]$ el intervalo de entre los dos que no contiene ninguna partición δ-fina. Tomando c_1 como el punto medio de I_1 podríamos continuar el proceso recursivamente, definiendo así una sucesión de intervalos compactos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \text{y} \quad l(I_n) = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$$

e I_n no posee particiones etiquetadas δ-finas para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el Teorema de los Intervalos Encajados existe un único $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [a,b]$. Como δ es un calibre sobre $[a,b]$ sabemos además que $\delta(x_0) > 0$, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $l(I_N) < \delta(x_0)$. De esta manera (I_N, x_0) es una partición etiquetada δ-fina de I_N, lo que supone la contradicción de donde se concluye el resultado. □

Definición 5.1.4. Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es *Henstock-Kurzweil integrable* (o *integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil*) si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibre δ sobre $[a,b]$ satisfaciendo que

$$|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - A| < \epsilon$$

para cada partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ δ-fina sobre $[a,b]$. En estas condiciones el valor A es único, y diremos que A es la *integral de Henstock-Kurzweil* sobre $[a,b]$, que denotaremos como

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{ó} \quad (\mathcal{HK}) \int_a^b f\, dx$$

Además, denotaremos a la clase de funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a,b]$ como $\mathcal{HK}([a,b])$.

La definición de la *integral de Henstock-Kurzweil generaliza trivialmente la integral de Riemann*, para la cual únicamente se consideran calibres de la forma $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(x) = \delta > 0$, es decir, los calibres constantes. De esta manera se tiene la inclusión $\mathcal{R}([a,b]) \subset \mathcal{HK}([a,b])$, que por el Ejemplo 5.1.5 es además estricta.

Ejemplo 5.1.5. Sea f la función de Dirichlet definida en el Ejemplo 3.8.4, donde se probó que $f \notin \mathcal{R}([0,1])$. Veamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1])$. Como $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es numerable, consideremos una enumeración

$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, y fijemos $\epsilon > 0$ cualquiera. Definamos el calibre δ sobre $[0,1]$ como

$$\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{2^{k+1}} & \text{si} \quad x = r_k,\ k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases} \tag{5.1}$$

y escojamos una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{I_i, t_i\}_{i=1}^{n}$ δ-fina cualquiera. Sea $i \in \{1, ..., n\}$ cualquiera, si $t_i \in \mathbb{I} \cap [0,1]$ se tiene que $f(t_i)l(I_i) = 0$, mientras que si $t_i = r_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 < f(t_i)l(I_i) = l(I_i) < \delta(t_i) = \delta(r_k) = \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

Como a lo sumo puede haber dos intervalos con la misma etiqueta racional se tiene que $|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e)| < \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon/2^k = \epsilon$, de donde concluimos que $f \in \mathcal{HK}([0,1])$ con integral de Henstock-Kurzweil igual a 0.

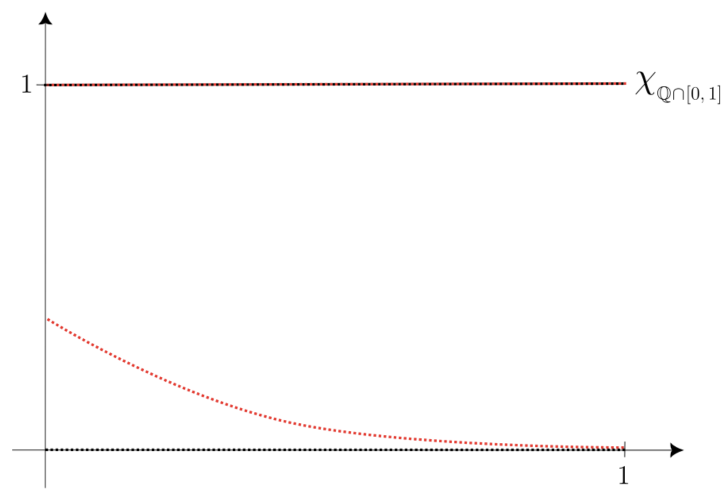

Figura 5.1: Esquema de la función de Dirichlet (negro), y el calibre δ (rojo) dado por la ecuación (5.1).

5.2. Propiedades de retículo y linealidad

Muchos de los resultados acerca de la integral de Riemann se siguen manteniendo para la integral de Henstock-Kurzweil. Además, las demostraciones son análogas, dado que si tomamos dos calibres δ_1, δ_2 sobre $[a,b]$, las funciones $\delta^+ = \delta_1 \vee \delta_2$ y $\delta_- = \delta_1 \wedge \delta_2$ también son calibres. De esta manera, exponemos a continuación algunas de las propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil, para las que solo adjuntaremos la demostración de la primera, siendo el resto de demostraciones pequeñas modificaciones de la que podemos encontrar para la integral de Riemann.

Proposición 5.2.1 (Linealidad sobre el integrando)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{HK}([a,b])$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Entonces* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{HK}([a,b])$*, y se cumple además que*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \left[(\mathcal{HK}) \int_a^b f\, dx \right] + \beta \left[(\mathcal{HK}) \int_a^b g\, dx \right]$$

Demostración. Sean A y B las integrales de Henstock-Kurzweil de f y g respectivamente. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario existen dos calibres δ_1,δ_2 sobre $[a,b]$ tal que

$$|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - A| < \frac{\epsilon}{2(1+|\alpha|)}, \quad |S_{\mathcal{R}}(g, \mathcal{P}_e) - A| < \frac{\epsilon}{2(1+|\beta|)}$$

para cada partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ δ_1-fina y δ_2-fina sobre $[a,b]$ respectivamente. Definamos el calibre $\delta \coloneqq \delta_1 \wedge \delta_2$ y consideremos una partición δ-fina $\mathcal{P}_e$ sobre $[a,b]$. Claramente $\mathcal{P}_e$ es una partición δ_1-fina y δ_2-fina, por lo que por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} |S_{\mathcal{R}}(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}_e) - [\alpha A + \beta B]| &= |\alpha[S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - A] + \beta[S_{\mathcal{R}}(g, \mathcal{P}_e) - B]| \\ &\leq |\alpha||S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - A| + |\beta||S_{\mathcal{R}}(g, \mathcal{P}_e) - B| < \epsilon \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{HK}([a,b])$ con integral de Henstock-Kurzweil igual a $\alpha A + \beta B$. □

Proposición 5.2.2 (Retículo)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{HK}([a,b])$ *tal que* $f \leq g$*. Entonces se tiene que*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f\, dx \leq (\mathcal{HK}) \int_a^b g\, dx$$

Proposición 5.2.3 (Linealidad sobre el dominio)**.** *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{P} = \{c_i\}_{i=1}^N$ *una partición de* $[a,b]$*. Entonces* $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ *si y solo si* $f|_{[c_{i-1},c_i]} \in \mathcal{HK}([c_{i-1}, c_i])$ *para cada* $i = 1, ..., N$*, en cuyo caso se tiene que*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f\, dx = \sum_{i=1}^N \left((\mathcal{HK}) \int_{c_{i-1}}^{c_i} f\, dx \right)$$

5.3. Teoremas de convergencia

Una de las principales diferencias de la integral de Henstock-Kurzweil respecto a la integral de Riemann es que se cumplen los teoremas de convergencia clásicos de la integral de Lebesgue. Tal y como veremos a continuación, la clave está en probar el Teorema de la Convergencia Monótona para la integral de Henstock, lo que puede ser realmente laborioso sin hacer uso de lemas previos.

Es por esta razón que nos apoyaremos en un resultado auxiliar conocido en la literatura como el Lema de Saks-Henstock.

Definición 5.3.1. Decimos que una colección finita de duplas $\mathcal{S}_e = \{(J_i, s_i)\}_{i=1}^n$ es una *subpartición etiquetada* de $[a,b]$ si existe una partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ de $[a,b]$ tal que $\mathcal{S}_e \subset \mathcal{P}_e$. Además, dado un calibre δ sobre $[a,b]$ diremos que la subpartición etiquetada es δ-fina si $l(J_i) < \delta(s_i)$ para cada $i = 1, ..., n$.

Lema 5.3.2 (Saks-Henstock)**.** *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, $\epsilon > 0$ y δ un calibre sobre $[a,b]$ tal que*

$$\left| S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - (\mathcal{HK}) \int_a^b f\, dx \right| < \epsilon$$

para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ δ-fina de $[a,b]$. Entonces para cualquier subpartición etiquetada $\mathcal{S}_e = \{J_i, s_i\}_{i=1}^n$ δ-fina de $[a,b]$ se tiene que

$$\left| \sum_{i=1}^n \left(f(s_i) l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f\, dx \right) \right| < \epsilon \qquad y \qquad \sum_{i=1}^n \left| f(s_i) l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f\, dx \right| < 2\epsilon$$

Demostración. Sea $\mathcal{S}_e = \{J_i, s_i\}_{i=1}^n$ una subpartición etiquetada δ-fina de $[a,b]$ cualquiera, veamos que se cumple la primera desigualdad. Para ello consideremos los intervalos compactos $K_1, ..., K_m$ contenidos en $[a,b]$ tal que la familia finita $\{K_j\}_{j=1}^m \cup \{J_i\}_{i=1}^n$ es una partición de $[a,b]$.

Sea $\alpha > 0$ cualquiera. Por la Proposición 5.2.3 sabemos que $f \in \mathcal{HK}(K_j)$ para cada $j = 1, ..., m$, por lo que existe un calibre δ_j sobre K_j tal que

$$\left| S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^j) - (\mathcal{HK}) \int_{K_j} f\, dx \right| < \alpha/m$$

para cualquier partición etiquetada $\mathcal{Q}_e^j$ δ_j-fina de $[a,b]$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $\delta_k(x) \leq \delta(x)$ para cada $x \in [a,b]$ y escojamos para cada $j = 1, ..., m$ una partición etiquetada $\mathcal{Q}_e^j$ δ_j-fina de $[a,b]$ (que existe por el Lema de Cousin). Claramente $\mathcal{P}_e^* = \mathcal{S}_e \cup \mathcal{Q}_e^1 \cup ... \cup \mathcal{Q}_e^m$ es una partición δ-fina de $[a,b]$ y además se cumple que

$$S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e^*) = S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) + \sum_{j=1}^m S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^j), \quad (\mathcal{HK}) \int_a^b f\, dx = \sum_{i=1}^n \left((\mathcal{HK}) \int_{J_i} f\, dx \right) + \sum_{j=1}^m \left((\mathcal{HK}) \int_{K_j} f\, dx \right)$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}\left(f(s_i)l(J_i)-(\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx\right)\right| = \left|S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}_e)-\sum_{i=1}^{n}\left((\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx\right)\right| \\
&= \left|\left[S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}_e^*)-(\mathcal{HK})\int_a^b f\,dx\right]-\left[\sum_{j=1}^{m}\left(S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{Q}_e^j)-(\mathcal{HK})\int_{K_j} f\,dx\right)\right]\right| \\
&\leq \left|S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}_e^*)-(\mathcal{HK})\int_a^b f\,dx\right|+\sum_{j=1}^{m}\left|S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{Q}_e^j)-(\mathcal{HK})\int_{K_j} f\,dx\right| < \epsilon+\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha}{m}=\epsilon+\alpha
\end{aligned}$$

de donde deducimos la desigualdad buscada por ser $\alpha > 0$ arbitrario.

Veamos ahora la segunda desigualdad. Para ello definamos la familia finita $\mathcal{S}_e^+$ formada por los pares de $\mathcal{S}_e$ tal que $f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx \geq 0$, y de forma similar $\mathcal{S}_e^+$ será la familia de los pares de $\mathcal{S}_e$ tal que $f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx < 0$. Claramente $\mathcal{S}_e^+$ y $\mathcal{S}_e^-$ son subparticiones etiquetadas δ-finas de $[a,b]$, por lo que podemos aplicar la desigualdad anterior a cada una de ellas para deducir que

$$\sum_{\mathcal{S}_e^+}\left|f(s_i)l(J_i)-(\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx\right| = \sum_{\mathcal{S}_e^+}\left(f(s_i)l(J_i)-(\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx\right) < \epsilon$$

$$\sum_{\mathcal{S}_e^-}\left|f(s_i)l(J_i)-(\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx\right| = -\sum_{\mathcal{S}_e^-}\left(f(s_i)l(J_i)-(\mathcal{HK})\int_{J_i} f\,dx\right) < \epsilon$$

de donde concluimos el resultado sumando estas dos expresiones y teniendo en cuenta que $\mathcal{S}_e = \mathcal{S}_e^+ \cup \mathcal{S}_e^-$. □

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el Teorema de la Convergencia Monótona para la integral de Henstock-Kurzweil:

Teorema 5.3.3 (Convergencia Monótona). *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{HK}([a,b])$ una sucesión creciente y $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ si y solo si $\lim_n \left((\mathcal{HK})\int_a^b f_n\,dx\right) < \infty$, en cuyo caso se tiene que*

$$(\mathcal{HK})\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{HK})\int_a^b f_n\,dx\right)$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Entonces $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que por la Proposición 5.2.2 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{HK})\int_a^b f_n\,dx\right) \leq (\mathcal{HK})\int_a^b f\,dx < \infty$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $A := \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{HK})\int_a^b f_n\,dx\right) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$ cualquiera, definamos $\tilde{\epsilon} = \epsilon/(b-a+2) > 0$. Entonces sabemos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-(r-2)} < \tilde{\epsilon}$ y

$$0 \leq A - (\mathcal{HK})\int_a^b f_r\,dx < \tilde{\epsilon} \tag{5.2}$$

Como $f_n \in \mathcal{HK}([a,b])$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un calibre δ_n sobre $[a,b]$ tal que para toda partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ δ_n-fina se tiene que $|S_{\mathcal{R}}(f_n,\mathcal{P}_e) - A| < 1/2^n$. Además, como $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para cada $x \in [a,b]$, existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $n(x) \geq r$ y

$$0 \leq f(x) - f_{n(x)}(x) \leq \tilde{\epsilon} \tag{5.3}$$

Definamos la función $\delta(t) = \delta_{k(t)}(t)$ para todo $t \in [a,b]$, de manera que δ es un calibre sobre $[a,b]$. Tomemos una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{I_i, t_i\}_{i=1}^N$ δ-fina cualquiera y veamos que $|S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}_e) - A| < \epsilon$. Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} |S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}_e) - A| \leq & \left|\sum_{i=1}^N f(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^N f_{n(t_i)}(t_i)l(I_i)\right| \\ & + \left|\sum_{i=1}^N f_{n(t_i)}(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^N\left((\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{n(t_i)}\,dx\right)\right| + \left|\sum_{i=1}^N\left((\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{n(t_i)}\,dx\right) - A\right| \end{aligned}$$

Por un lado, por (5.3) podemos acotar el primer término como

$$\left|\sum_{i=1}^N \left[f(t_i) - f_{n(t_i)}(t_i)\right]l(I_i)\right| \leq \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f_{n(t_i)}(t_i)|l(I_i) < \sum_{i=1}^N \tilde{\epsilon}l(I_i) = \tilde{\epsilon}(b-a) \tag{5.4}$$

Por otro lado sabemos que

$$\left|\sum_{i=1}^N f_{n(t_i)}(t_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^N\left((\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{n(t_i)}\,dx\right)\right| \leq \sum_{i=1}^N \left|f_{n(t_i)}(t_i)l(I_i) - (\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{n(t_i)}\,dx\right|$$

Para acotar esta expresión definamos $s := \max\{k(t_1),...,k(t_n)\} \geq r$ y $\mathcal{P}_e^p = \{(I_i,t_i) \in \mathcal{P}_e : k(t_i) = p\}$ para cada $p \in \{r,...,s\}$. Claramente $\mathcal{P}_e^p$ es una subpartición etiquetada de $[a,b]$, y como para cada $(I_i,t_i) \in \mathcal{P}_e^p$ se tiene que $l(I_i) < \delta(t_i) = \delta_{k(t_i)}(t_i) = \delta_p(t_i)$, entonces $\mathcal{P}_e^p$ es además δ_p-fina. Por tanto, por el Lema de Saks-Henstock 5.3.2 deducimos que

$$\sum_{i=1}^{N}\left|f_{n(t_i)}(t_i)l(I_i)-(\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{n(t_i)}\,dx\right| = \sum_{p=r}^{s}\sum_{k(t_i)=p}\left|f_{n(t_i)}(t_i)l(I_i)-(\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{n(t_i)}\,dx\right| \leq \sum_{p=r}^{s}\frac{2}{2^p}<\frac{1}{2^{r-2}}<\tilde{\epsilon} \tag{5.5}$$

Por último, sabemos que para cada $i=1,...,N$ se tiene que $r\leq k(t_i)\leq s$, por lo que $f_r\leq f_{k(t_i)}\leq f_s$. Entonces por las Proposiciones 5.2.2 y 5.2.3 se verifica que

$$(\mathcal{HK})\int_I f_r dx=\sum_{i=1}^{N}\left((\mathcal{HK})\int_{I_i} f_r dx\right)\leq\sum_{i=1}^{N}\left((\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{k(t_i)}dx\right)\leq\sum_{i=1}^{N}\left((\mathcal{HK})\int_{I_i} f_s dx\right)=(\mathcal{HK})\int_I f_s dx$$

y por tanto por (5.2) se tiene que

$$A-\tilde{\epsilon}\leq\sum_{i=1}^{N}\left((\mathcal{HK})\int_{I_i} f_{k(t_i)}\,dx\right)\leq A \tag{5.6}$$

De esta manera, podemos combinar (5.4), (5.5) y (5.6) para concluir que

$$|S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}_e)-A|<\tilde{\epsilon}(b-a)+\tilde{\epsilon}+\tilde{\epsilon}=\tilde{\epsilon}(b-a+2)=\epsilon$$

lo que demuestra que $f\in\mathcal{HK}([a,b])$ con integral de Henstock-Kurzweil igual a A. □

Una vez hemos probado el Teorema de la Convergencia Monótona, tanto el lema de Fatou como el Teorema de la Convergencia Dominada se demuestran de forma muy similar a sus variantes para la integral de Lebesgue. Por tanto, enunciaremos los resultados sin demostración, pudiéndose encontrar estas en [5, Chapter 8].

Lema 5.3.4 (Fatou)**.** *Sea una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{HK}([a,b])$. Supongamos que existe $\alpha\in\mathcal{HK}([a,b])$ tal que $\alpha\leq f_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, y además se cumple que*

$$\liminf_{n\to\infty}\left((\mathcal{HK})\int_a^b f_n\,dx\right)<\infty$$

Entonces $\liminf_{n\to\infty} f_n\in\mathcal{HK}([a,b])$, y se tiene que

$$-\infty<(\mathcal{HK})\int_a^b\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)dx\leq\liminf_{n\to\infty}\left((\mathcal{HK})\int_a^b f_n\,dx\right)<\infty$$

Teorema 5.3.5 (Convergencia Dominada). *Sea una sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{HK}([a,b])$ *y* $f(x) = \text{lím}_n f_n(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$*. Si existen* $\alpha, \omega \in \mathcal{HK}([a,b])$ *tal que* $\alpha \leq f_n \leq \omega$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ *y además se tiene que*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{HK}) \int_a^b f_n\,dx \right)$$

5.4. Relación con la integral de Riemann

En el primer capítulo se presentó la integral impropia de Riemann, cuya finalidad es extender la integral de Riemann a funciones con singularidades a partir de un procedimiento de tipo límite. La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ no logra generalizar este tipo de integración, lo que obliga a definir de forma análoga la *integral impropia de Lebesgue*.

Sorprendentemente, en la integral de Henstock-Kurzweil esta problemática desaparece. El siguiente resultado (probado originalmente por Hake en 1921 para la integral de Denjoy-Perron) establece que no podemos extender la integral de Henstock-Kurzweil a una ”integral impropia”. En otras palabras, si la integral impropia existe, entonces puede entenderse como una integral de Henstock-Kurzweil al uso, por lo que esta integral generaliza a la integral impropia de Riemann (y por la siguiente sección también a la impropia de Lebesgue).

Nota 5.4.1. En el Teorema de Hake necesitamos hacer uso del conocido como *procedimiento de derecha-izquierda*. Dada una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^m$ y una etiqueta $\xi := t_k$ del interior de uno de los intervalos, definamos la partición etiquetada $\mathcal{P}_e^*$ que surge de quitar el par $([x_{k-1}, x_k], t_k)$ de $\mathcal{P}_e$ y añadir los pares $([x_{k-1}, \xi], t_k)$, $([xi, x_k], t_k)$ a $\mathcal{P}_e$. Entonces dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ está claro que $f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)(x_k - \xi) + f(t_k)(\xi - x_{k-1})$, por lo que $S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) = S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e^*)$. De esta manera, podemos asumir sin pérdida de generalidad que todas las etiquetas se encuentran en los extremos de los subintervalos que define la partición.

Teorema 5.4.2 (Hake). *Una función* f *pertenece a* $\mathcal{HK}([a,b])$ *si y solo si pertenece a* $\mathcal{HK}([a,c])$ *para todo* $c \in (a,b)$ *y existe* $\text{lím}_{c\to b^-} \left((\mathcal{HK}) \int_a^c f\,dx \right)$*. Además, en ese caso se tiene que*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f\,dx = \lim_{c\to b^-} \left((\mathcal{HK}) \int_a^c f\,dx \right)$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, entonces por la Proposición 5.2.3 se tiene que $f \in \mathcal{HK}([a,c])\ \forall\, c \in (a,b)$. Además por el Teorema de la convergencia dominada es fácil comprobar que la integral indefinida de f es continua[1], por lo que

$$(\mathcal{HK})\int_a^b f\,dx = \lim_{c\to b^-}\left((\mathcal{HK})\int_a^c f\,dx\right)$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $f\in\mathcal{HK}([a,c])$ para cada $c\in(a,b)$ y existe el límite $A:=\lim_{c\to b^-}\left((\mathcal{HK})\int_a^c f\,dx\right)$. Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente cualquiera tal que $c_0=a$ y $c_n\uparrow b$. Dado $\epsilon>0$ cualquiera, existe $r\in\mathbb{N}$ tal que para cada $t\in[c_r,b)$ se tiene que

$$\left|(\mathcal{HK})\int_a^t f\,dx - A\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad b-c_r\le\frac{\epsilon}{3(|f(b)|+1)}$$

Por la Proposición 5.2.3 sabemos que $f\in\mathcal{HK}([c_{n-1},c_n])$ para cada $n\in\mathbb{N}$, por lo que existe un calibre δ_n sobre $I_n:=[c_{n-1},c_n]$ tal que para cualquier partición etiquetada $\mathcal{P}_e^n$ δ_n-fina de I_n se tiene que

$$\left|S_{\mathcal{R}}(f,\mathcal{P}_e^n)-(\mathcal{HK})\int_{I_n} f\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3\cdot 2^n}$$

Asumamos sin pérdida de generalidad que para cada $n\ge1$ se cumple que

(i) $\delta_1(c_0)\le\frac{1}{2}(c_1-c_0)$

(ii) $\delta_{n+1}(c_k)\le\min\{\delta_n(c_n),\frac{1}{2}(c_n-c_{n-1}),\frac{1}{2}(c_{n+1}-c_n)\}$

(iii) $\delta_n(t)\le\min\{\frac{1}{2}(t-c_{n-1}),\frac{1}{2}(c_n-t)\},\quad \forall\, t\in(c_{n-1},c_n)$

Definamos el calibre δ sobre $[a,b]$ como

$$\delta(t):=\begin{cases}\delta_n(t) & \text{si} \quad t\in[c_n,c_{n+1}),n\in\mathbb{N}\\ b-c_r & \text{si} \quad t=b\end{cases}$$

y consideremos una partición etiquetada $\mathcal{P}_e=\{[x_{i-1},x_i],t_i\}_{i=1}^m$ δ-fina sobre $[a,b]$ cualquiera. Veamos que $t_m=b$. Si $t_m<b$ entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $t_m\in[c_{n-1},c_n]$, de manera que por (iii) se tiene que $b-t_m\le b-x_{m-1}<\delta(t_m)<c_n-t_m$, por lo que $b<c_n$ y llegamos a una contradicción. Por tanto se cumple que

$$c_r=b-\delta(b)=b-x_{m-1}+\delta(b)+x_{m-1}<x_{m-1}$$

Sea $s\in\mathbb{N}$ el menor natural tal que $x_{m-1}<c_s$, que cumple por lo anterior que $r\le s$. Fijemos $n\in\{2,...,s-1\}$ (el caso $n=1$ es análogo). Sabemos que existe $1\le i\le m$ tal que $c_n\in[x_{i-1},x_i]$, y además $c_n=t_i$. Para probar esto último supongamos que $c_n>t_i$ (el caso $c_n<t_i$ es análogo),

[1] Basta tener en cuenta que $-f\le\chi_{[a,c]}f\le f$ y aplicar el Teorema de la convergencia dominada.

entonces por (iii) se tiene que

$$0 < c_n - t_i \leq x_i - x_{i-1} < \delta(t_i) < \frac{1}{2}(c_n - t_i)$$

lo que supone una contradicción. Por tanto, como $c_0, ..., c_{s-1}$ son etiquetas de $\mathcal{P}_e$, por el procedimiento de derecha-izquierda podemos asumir sin pérdida de generalidad que $c_0, ..., c_{s-1}$ son puntos de $\mathcal{P}_e$. Definamos entonces las familias de pares

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_e^n &\coloneqq \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \mathcal{P}_e : [x_{i-1}, x_i] \subset I_n\} \\
\mathcal{Q}_e^s &\coloneqq \{([x_{i-1}, x_i], t_i) \in \mathcal{P}_e : [x_{i-1}, x_i] \subset [c_{s-1}, x_{m-1}]\} \\
\mathcal{Q}_e^b &\coloneqq \{([x_{m-1}, b], b)\}
\end{aligned}$$

para cada $n = 1, ..., s-1$. Claramente $\mathcal{Q}_e^n$ es una partición etiquetada δ_n-fina de I_n para cada $n = 1, ..., s-1$, por lo que

$$\left| S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^n) - (\mathcal{HK}) \int_{I_n} f\, dx \right| < \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n}$$

Por otro lado $\mathcal{Q}_e^s$ es una subpartición etiquetada δ_s-fina de I_s, por lo que por el Lema de Saks-Henstock 5.3.2 se tiene que

$$\left| S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^s) - (\mathcal{HK}) \int_{c_{s-1}}^{x_{m-1}} f\, dx \right| < \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n}$$

Además $S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^b) = f(b)(b - x_{m-1})$, por lo que $|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^b)| = |f(b)|(b - x_{m-1}) < \epsilon/3$. Claramente $\mathcal{P}_e = \mathcal{Q}_e^1 \cup ... \cup \mathcal{Q}_e^s \cup \mathcal{Q}_e^b$, lo que nos permite deducir por la Proposición 5.2.3 que

$$\begin{aligned}
|S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - A| &= \left| \sum_{n=1}^{s} S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^n) + S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^b) - A \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{s} S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^n) - (\mathcal{HK}) \int_a^{x_{m-1}} f dx \right| + |S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{Q}_e^b)| \\
&+ \left| (\mathcal{HK}) \int_a^{x_{m-1}} f\, dx - A \right| < \sum_{n=1}^{s} \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^n} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ con integral de Henstock-Kurzweil A. $\square$

5.5. Relación con la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Aunque la definición de la integral de Henstock-Kurzweil no es conceptualmente muy distinta a la de Riemann, esta teoría de integración es realmente poderosa. Tanto es así, que incluso generaliza a la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$:

Teorema 5.5.1. *Sea $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y además se tiene que*

$$(\mathcal{L}) \int_{[a,b]} f \, dm = (\mathcal{HK}) \int_a^b f \, dx$$

Demostración. Realizaremos la demostración por casos. Supongamos en primer lugar que f es una función escalonada[2]. Entonces el conjunto de discontinuidades de f es finito, y por tanto tiene medida de Lebesgue nula. Esto implica por la Caracterización de las funciones integrables Riemann 3.8.2 que $f \in \mathcal{R}([a,b])$, y como la integral de Henstock-Kurzweil generaliza a la de Riemann, por el Teorema 3.8.3 se tiene que

$$(\mathcal{L}) \int_{[a,b]} f \, dm = (\mathcal{R}) \int_a^b f \, dx = (\mathcal{HK}) \int_a^b f \, dx$$

Supongamos que $f = \chi_G$ con G un subconjunto abierto de $[a,b]$. Sabemos que existe una familia de semiintervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ disjuntos dos a dos tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Definamos $f_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq 1$, $\chi_G = \lim_{n\to\infty} f_n$ y f_n es escalonada, por lo que por el caso anterior $f_n \in \mathcal{HK}([a,b])$. Entonces por el Teorema de la Convergencia Monótona para la integral de Lebesgue y para la de Henstock-Kurzweil se tiene que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y además se cumple que

$$(\mathcal{L}) \int_{[a,b]} \chi_G \, dm = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{L}) \int_{[a,b]} f_n \, dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{HK}) \int_a^b f_n \, dx \right) = (\mathcal{HK}) \int_a^b \chi_G \, dx$$

Consideremos ahora que $f = \chi_E$ donde $E \subset [a,b]$ es un conjunto medible Lebesgue. Por el Teorema 3.3.8 sabemos que existe una sucesión decreciente de abiertos $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n)$. Definamos $f_n \coloneqq \chi_{G_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de manera que $\chi_E = \lim_{n\to\infty} f_n$ y por el caso anterior $f_n \in \mathcal{HK}([a,b])$. Entonces por el Teorema de la Convergencia Monótona para ambas integrales se tiene que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y además se cumple que

$$(\mathcal{L}) \int_{[a,b]} \chi_E \, dm = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{L}) \int_{[a,b]} f_n \, dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left((\mathcal{HK}) \int_a^b f_n \, dx \right) = (\mathcal{HK}) \int_a^b \chi_E \, dx$$

Claramente la linealidad de ambas integrales hace que, por el caso anterior, si f es una función simple se tiene que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y las integrales coinciden, por lo que supongamos que f es una función no negativa. Entonces por el Teorema 3.5.12 existe una sucesión creciente de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $0 \leq f_n \leq n \; \forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n \uparrow f$. Por el caso anterior está claro que $f_n \in \mathcal{HK}([a,b])$ para cada

[2]Decimos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *escalonada* si es constante a trozos con un número finito de discontinuidades.

$n \in \mathbb{N}$, por lo que por el Teorema de la Convergencia Monótona para ambas integrales deducimos que

$$(\mathcal{L})\int_{[a,b]} f\,dm = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_{[a,b]} f_n\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{HK})\int_a^b f_n\,dx\right) = (\mathcal{HK})\int_a^b f\,dx$$

Para probar el caso general $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ basta tener en cuenta que $f = f^+ - f^-$ donde $f^+, f^- \in \mathcal{L}_1([a,b])$ son funciones positivas. Entonces por el caso anterior $f^+, f^- \in \mathcal{HK}([a,b])$ y sus integrales de Lebesgue y Henstock-Kurzweil son iguales, por lo que el resultado se sigue por la linealidad en ambas integrales. $\square$

Por tanto, se tiene la inclusión $\mathcal{L}_1([a,b]) \subset \mathcal{HK}([a,b])$. El siguiente ejemplo muestra que la inclusión es además estricta, i.e. $\mathcal{L}_1([a,b]) \subsetneq \mathcal{HK}([a,b])$.

Ejemplo 5.5.2. Consideremos la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$.

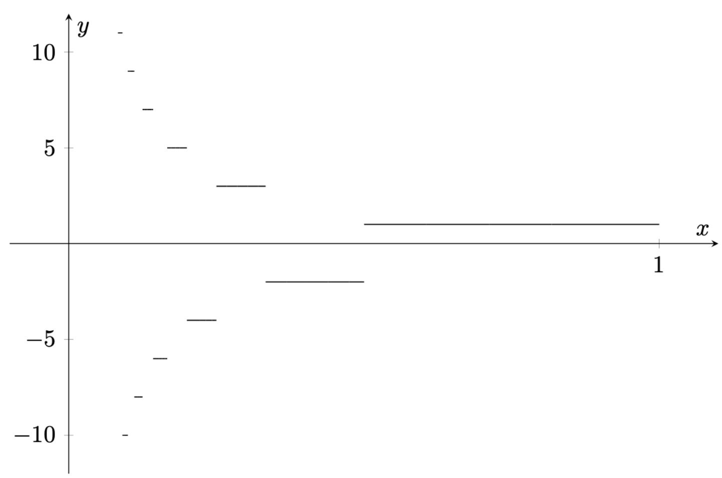

Figura 5.2: Gráfica de f.

Claramente f es medible por ser límite de funciones medibles, y se tiene que

$$(\mathcal{L})\int_{[0,1]} f^+\,dm = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1} = \infty, \qquad (\mathcal{L})\int_{[0,1]} f^-\,dm = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+2} = \infty$$

por lo que $f \notin \mathcal{L}_1([0,1])$. Veamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1])$. Dado $N \in \mathbb{N}$ cualquiera, sabemos que $|f(x)| \leq N$ para cada $x \in [1/N, 1]$ y su conjunto de discontinuidades tiene medida de Lebesgue nula (por ser numerable), por lo que por el Teorema 3.8.3 se tiene que $f \in \mathcal{R}([1/N,1]) \subset \mathcal{HK}([1/N,1])$. Además

$$(\mathcal{HK})\int_{\frac{1}{N}}^1 f dx = (\mathcal{R})\int_{\frac{1}{N}}^1 f dx = \sum_{n=1}^{N-1}\left((\mathcal{R})\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n(-1)^n dx\right) = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

por lo que existe el límite $\lim_{N\to\infty}\left[(\mathcal{HK})\int_{1/N}^{1} f dx\right]$. Por tanto, por la Proposición 5.2.3 y el Teorema de Hake concluimos que $f \in \mathcal{HK}([0,1])$.

Nota 5.5.3. Aunque el resultado anterior prueba que la integral de Henstock-Kurzweil es más general que la de Lebesgue sobre un intervalo compacto $[a,b]$, la integral de Lebesgue parece poder integrar sobre dominios mucho más complejos que intervalos. Sin embargo, dado $E \in \mathcal{L}([a,b])$ sabemos que $\chi_E \in \mathcal{L}_1([a,b]) \subset \mathcal{HK}([a,b])$ por lo que podemos definir la integral de Henstock-Kurzweil de $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ sobre E como

$$(\mathcal{HK})\int_E f\,dx := (\mathcal{HK})\int_a^b f\chi_E\,dx$$

Capítulo 6

Derivación e integración

En los capítulos anteriores hemos desarrollado varias teorías de integración sobre un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, sin embargo, hemos reservado para este capítulo su relación con una operación fundamental en este contexto: *la derivación*. Aunque en los primeros cursos de Cálculo y Análisis aprendemos que (en cierto sentido que discutiremos más adelante) la integración y la derivación son operaciones inversas, las condiciones necesarias y suficientes en las que se da esta relación dependen de la teoría de integración con la que trabajemos.

La idea este capítulo es desarrollar la relación entre derivación e integración sobre un intervalo compacto $[a, b]$ en cada una de las teorías de integración estudiadas. Para ello, buscaremos responder las siguientes preguntas fundamentales:

(P1) (*Derivada de la integral*) Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y la función $F(x) = \int_a^x f\,dx$, ¿es F derivable en $[a, b]$?, y en tal caso ¿se cumple que $F' = f$?

(P2) (*Integral de la derivada*) Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ¿cuándo se cumple la fórmula $\int_a^b f'\,dx = f(b) - f(a)$?¿es necesario que f sea derivable en todo punto de $[a, b]$?¿se pueden dar condiciones necesarias y suficientes sobre f para que $f(x) = \int_a^x g\,dx$ para alguna función integrable g?

Con este objetivo, las referencias que seguiremos en este capítulo serán los apuntes de Análisis Matemático II para la integral de Riemann, [14] y [29] para la integral de Lebesgue, [9] para la de Daniell, y [5] y [18] en el caso de la integral de Henstock-Kurzweil.

6.1. Integral de Riemann

La relación entre derivación e integración para la integral de Riemann se recoge en el famoso *Teorema fundamental del Cálculo*, que habitualmente se presenta en dos partes: una para la derivada de la integral (Teorema 6.1.3) y otra para la integral de la derivada (Theorem 6.1.4). Sin embargo, antes de establecer estos enunciados debemos atender al concepto de función integral e integral definida, cuya definición se traslada análogamente al resto de teorías de integración.

Nota 6.1.1. De ahora en adelante $[a,b]$ será un intervalo compacto cualquiera de $\mathbb{R}$.

Definición 6.1.2. Sea $f:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ una función Riemann integrable[1]. Se define la *función integral* o *integral indefinida de f con punto base a* como la función

$$F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\qquad F(x)=(\mathcal{R})\int_a^x f\,dx$$

Además, diremos que una función $\tilde{F}:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una *integral indefinida de f* si difiere de su función integral en una constante.

Los siguientes teoremas fueron probados en la asignatura de Análisis Matemático I del Grado de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, por lo que los presentaremos sin demostración.

Teorema 6.1.3 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f\in\mathcal{C}([a,b])$. Entonces su función integral F es derivable en $[a,b]$ y cumple que $F'=f$.*

Teorema 6.1.4 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función derivable en $[a,b]$. Si $f'\in\mathcal{R}([a,b])$, entonces se cumple que*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f'\,dx=f(b)-f(a)$$

Aunque las condiciones de estos teoremas puedan parecer excesivamente restrictivas, son de hecho las mejores posibles. En efecto, en el caso del Primer Teorema Fundamental del Cálculo el Ejemplo 6.1.5 expone una función continua a trozos cuya función integral no es derivable en un punto, mientras que para el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo el Ejemplo 6.1.6 da una función derivable cuya derivada no es Riemann integrable.

Ejemplo 6.1.5. Consideremos la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=1/2$ si $x\in[0,1/2]$ y $f(x)=1$ si $x\in(1/2,1]$. Claramente f es continua en casi todo punto de $[0,1]$, por lo que por la caracterización de las funciones Riemann integrables sabemos que $f\in\mathcal{R}([a,b])$. Por tanto, podemos construir su función integral $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, que verifica que $F(x)=x/2$ si $x\in[0,1/2]$ y $F(x)=x-1/4$ si $x\in(1/2,1]$. De esta manera se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\left(\frac{F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right)=1\neq\frac{1}{2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\right)$$

[1] La definición es análoga para la integral de Lebesgue y Henstock-Kurzweil.

por lo que F no es derivable en $x = 1/2$.

Ejemplo 6.1.6. Consideremos la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces para cada $x \neq 0$ se tiene que f es derivable y su derivada en x es $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x^2})$, y además se tiene que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(h) - f(0)}{h} \right] = \lim_{h\to 0} \left[h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) \right] = 0$$

Por tanto, f es derivable en $[-1, 1]$ y f' no es acotada $[-1, 1]$, por lo que $f' \notin \mathcal{R}([-1, 1])$.

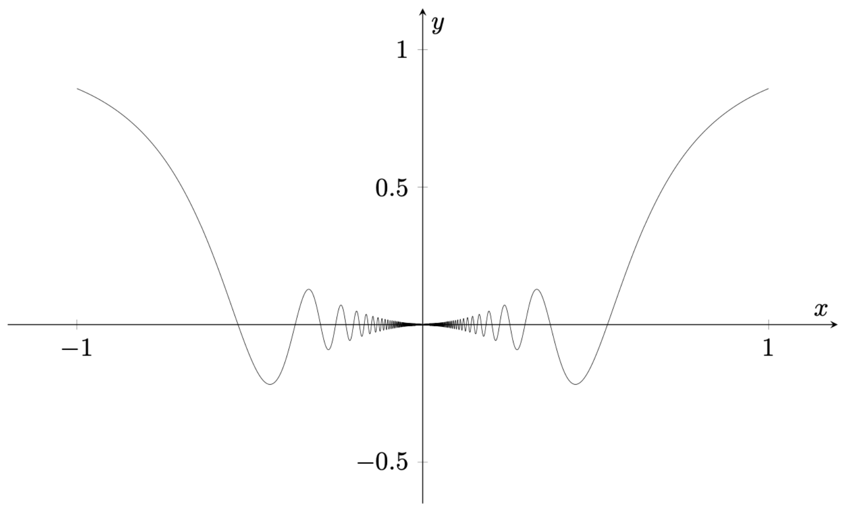

Figura 6.1: Gráfica de f.

De esta manera, los Teoremas Fundamentales del Cálculo responden a casi todas las preguntas de (P1) y (P2), faltando caracterizar las integrales de Riemann indefinidas. Aunque esta cuestión pueda parecer elemental, no existe a día de hoy una caracterización tan elegante como la que veremos para la integral de Lebesgue (y en menor medida para la de Henstock-Kurzweil). Dicho esto, es interesante mencionar aquella que se encuentra en [35], donde se caracteriza a estas funciones a partir de una generalización de las funciones de variación de pendiente acotada (*bounded slope variation*).

6.2. Integral de Lebesgue

A diferencia de lo visto para la integral de Riemann, la relación entre derivación e integración para la integral de Lebesgue requiere de un desarrollo más sutil y elaborado. Por ello, comenzamos introduciendo un lema clásico de especial importancia en este contexto: *el lema de los recubrimientos de Vitali.*

Nota 6.2.1. De ahora en adelante denotaremos m a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, m^* a su medida exterior asociada, y dado un intervalo $[a,b]$ y $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ escribiremos (para conciliar la notación con las otras integrales estudiadas):

$$(\mathcal{L})\int_a^b f\,dm := (\mathcal{L})\int_{[a,b]} f\,dm$$

Definición 6.2.2. Sea $E \subset [a,b]$ y $\mathcal{F}$ una familia de intervalos cerrados no degenerados de $\mathbb{R}$. Se dice que $\mathcal{F}$ es un *recubrimiento de Vitali de* E si para cada $x \in E$ y $\epsilon > 0$ existe un intervalo $J \in \mathcal{F}$ tal que $x \in J$ y $0 < l(J) < \epsilon$.

Nota 6.2.3. Observemos que si $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de Vitali de $E \subset [a,b]$ y O es un abierto tal que $E \subset O$, entonces la familia formada por los intervalos $I \in \mathcal{F}$ tales que $I \subset O$ también es un recubrimiento de Vitali de E.

Lema 6.2.4 (Vitali)**.** *Sea $E \subset [a,b]$ y $\mathcal{F}$ un recubrimiento de Vitali de E. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe una familia finita $I_1,...,I_N$ de elementos de $\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos, y tales que*

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \epsilon \tag{6.1}$$

Demostración. Por la Nota 6.2.3 podemos asumir sin pérdida de generalidad que $I \subset (a-1,b+1)$ para cada $I \in \mathcal{F}$. Consideremos $I_1 \in \mathcal{F}$ arbitrario. Si $E \subset I_1$ el resultado es trivial, por lo que supongamos que $E \subsetneq I_1$ y definamos $\mathcal{F}_1$ como la familia formada por los intervalos $I \in \mathcal{F}$ tales que $I \cap I_1 = \emptyset$. Por la asunción inicial sabemos que $k_1 = \sup_{I \in \mathcal{F}_\infty} l(I) \le b-a+2 < \infty$, y como $E \subsetneq I_1$ se tiene además que $k_1 > 0$. Por tanto, existe $I_2 \in \mathcal{F}_1$ tal que $l(I_2) > k_1/2$. Continuando este proceso recursivamente, si ya se tienen los intervalos $I_1,...,I_r$ y $E \subset \bigcup_{n=1}^r I_i$ concluimos el resultado, por lo que supongamos que $E \subsetneq \bigcup_{n=1}^r I_i$. Entonces definiendo $\mathcal{F}_r$ como aquellos intervalos $I \in \mathcal{F}$ tales que $I \cap I_n = \emptyset$ para cada $n = 1,...,r$, sabemos que $0 < k_r = \sup_{I \in \mathcal{F}_r} l(I) < \infty$ y existe $I_{r+1} \in \mathcal{F}_r$ tal que $l(I_{r+1}) > k_r/2$.

De esta manera hemos construido una sucesión infinita de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ contenidos en $(a-1,b+1)$ y disjuntos dos a dos, por lo que por la monotonía de la medida de Lebesgue se tiene que

$$\sum_{n=1}^\infty l(I_n) = \sum_{n=1}^\infty m(I_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^\infty I_n\right) \le m((a-1,b+1)) = b-a+2 < \infty$$

y en consecuencia existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^\infty l(I_n) < \epsilon/5$. Claramente $I_1,...,I_n$ es una familia finita de intervalos de $\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos, por lo que basta probar que cumple (6.1). Definamos para todo $n > N$ el intervalo

$$J_n := \left[x_n - \frac{5}{2}l(I_n), x_n + \frac{5}{2}l(I_n)\right]$$

donde x_n es el punto medio del intervalo I_n y tomemos $x \in E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n$ cualquiera. Como $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de Vitali de E existe $I_x \in \mathcal{F}$ tal que $I_x \cap I_n = \emptyset$ para cada $n = 1, ..., N$, por lo que $I_x \in \mathcal{F}_N$. Supongamos por reducción al absurdo que $I_x \in \mathcal{F}_n$ para todo $n > N$. Entonces $0 < l(I_x) < k_n < 2l(I_n)$, pero como $\lim_n l(I_n) = 0$ llegamos a una contradicción. Por tanto, podemos considerar el menor natural $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $I_x \cap I_{n(x)} \neq \emptyset$, que por lo anterior cumple que $n(x) > N$. Como $I_x \in \mathcal{F}_{n(x)-1}$ se tiene que $l(I_x) \leq k_{n(x)-1} \leq 2l(I_{n(x)})$, de manera que tomando $\tilde{x} \in I_x \cap I_{n(x)}$ se cumple que

$$|x - x_{n(x)}| \leq |x - \tilde{x}| + |\tilde{x} - x_{n(x)}| < l(I_x) + \frac{1}{2}l(I_{n(x)} \leq \frac{5}{2}l(I_{n(x)})$$

y en consecuencia $x \in J_{n(x)} \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n$. Por tanto hemos probado que $E \setminus \bigcup_{i=1}^N I_i \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n$, de donde concluimos el resultado por la monotonía de la medida exterior de Lebesgue:

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n\right) \leq m^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} m(J_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} l(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon$$

□

6.2.1. Derivación de funciones monótonas

Antes de adentrarnos en la relación entre derivación e integración para funciones sumables generales, nos limitaremos al estudio de las funciones monótonas. La idea es probar que toda función monótona es derivable en casi todo punto y su derivada es una función sumable no negativa (Teorema 6.2.8). Sin embargo, antes de esto debemos definir unas generalizaciones de la derivada usual que se aplican a cualquier función $\overline{\mathbb{R}}$-valuada definida sobre nuestro intervalo compacto: *las derivadas de Dini*.

Definición 6.2.5. Sea $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se definen las *derivadas de Dini* de f en x_0 como los límites en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$D^+f(x_0) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad D^-f(x_0) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$D_+f(x_0) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad D_-f(x_0) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Nota 6.2.6. Las derivadas de Dini existen como elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ en todo punto donde f es finita. Además, se tiene que $D^+f(x_0) \geq D_+f(x_0)$ y $D^-f(x_0) \geq D_-f(x_0)$, y la condición necesaria para que una función sea derivable en x_0 en el sentido usual es que las cuatro derivadas de Dini sean finitas e iguales entre sí. En tal caso denotaremos al valor común $f'(x_0)$.

Lema 6.2.7. *Sea $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ monótona creciente. Entonces el conjunto de puntos donde las cuatro derivadas de Dini no son iguales es m-nulo.*

Demostración. Dado que los distintos casos a considerar se demuestran de forma análoga, basta probar que el conjunto medible Lebesgue $E \coloneqq \{x \in [a,b] : D^+f(x) > D_-f(x)\}$ es m-nulo. Además, definiendo para cada $u, v \in \mathbb{Q}$ con $u > v$ los conjuntos

$$E_{u,v} \coloneqq \{x \in [a,b] : D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\}$$

se tiene que $E = \bigcup_{u\in\mathbb{Q}} \bigcup_{v\in\mathbb{Q}, v<u} E_{u,v}$. Por tanto, como la unión es numerable es suficiente probar que $m(E_{u,v}) = 0$ para cada $u, v \in \mathbb{Q}$.

Sean $u, v \in \mathbb{Q}$ cualesquiera y definamos $s \coloneqq m(E_{u,v})$. Fijemos $\alpha > 0$ cualquiera. Como $E_{u,v}$ es medible Lebesgue, por la Caracterización topológica de los conjuntos medibles Lebesgue existe un abierto O tal que $E_{u,v} \subset O$ y $m(O) < s + \alpha$. Entonces dado $\epsilon > 0$ y $x \in E_{u,v}$, como $D_-f(x) < v$ existe $0 < h < \epsilon$ tal que el intervalo $I_{x,\epsilon} \coloneqq [x-h, x]$ está contenido en O, cumple que $l(I_{x,\epsilon}) = h < \epsilon$ y se verifica que $f(x) - f(x-h) < vh$.

Claramente la familia $\mathcal{F} = \{I_{x,\epsilon}\}_{x\in E_{u,v}, \epsilon>0}$ es un recubrimiento de Vitali de $E_{u,v}$, por lo que por el Lema de los recubrimientos de Vitali existe una colección finita de intervalos $I_1 = [x_1, x_1 + h_1], ..., I_N = [x_N, x_N + h_N]$ de $\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos tal que

$$m\Big(E_{u,v} \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) < \alpha$$

Por tanto se tiene que

$$s = m(E_{u,v}) = m\Big(E_{u,v} \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) + m\Big(E_{u,v} \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) < \alpha + m\Big(E_{u,v} \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big)$$

Definiendo $A_1 := E_{u,v} \cap \big(\bigcup_{n=1}^{N} \mathring{I}_n\big)$, está claro por lo anterior que $m(A_1) > s - \alpha$, ya que los extremos de los intervalos tienen medida de Lebesgue nula. Tomemos $\epsilon > 0$ e $y \in A_1$ cualesquiera. Como $\{\mathring{I}_n\}_{n=1}^{N}$ es una colección finita de abiertos disjuntos dos a dos que contiene a A_1, existe $0 < k < \epsilon$ tal que el intervalo $J_{y,\epsilon} := [y, y+k]$ está contenido en un único $I_{n(x,\epsilon)}$ con $n(x,\epsilon) \in \{1, ..., N\}$ y se verifica que $f(y+k) - f(y) > uk$. Por tanto, razonando como antes, por el Lema de los recubrimientos de Vitali existe una colección finita $J_1 = [y_1, y_1 + k_1], ..., J_M = [y_M, y_M + k_M]$ de tales intervalos, que son disjuntos dos a dos y satisfacen que

$$m\Big(A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{M} J_j\Big) < \alpha$$

de forma que

$$s - \alpha < m(A_1) = m\Big(A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{M} J_j\Big) + m\Big(A_1 \cap \bigcup_{j=1}^{M} J_j\Big) < \alpha + m\Big(A_1 \cap \bigcup_{j=1}^{M} J_j\Big) \tag{6.2}$$

Denotemos $I_{n(j)}$ al único intervalo que contiene a J_j para cada $j = 1, ..., M$. Entonces por (6.2) y la monotonía de f se tiene que

$$\begin{aligned} u(s - 2\alpha) &< u \cdot m\Big(A_1 \cap \bigcup_{j=1}^{M} J_j\Big) \leq u \cdot m\Big(\bigcup_{j=1}^{M} J_j\Big) = u \sum_{j=1}^{M} l(J_j) = \sum_{j=1}^{M} uk_j \\ &< \sum_{j=1}^{M} [f(y_j + k_j) - f(y_j)] = \sum_{n=1}^{N} \sum_{n(j)=n} [f(y_j + k_j) - f(y_j)] \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < \sum_{n=1}^{N} vh_n = v \sum_{n=1}^{N} l(I_n) = v \cdot m\Big(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) \leq v \cdot m(O) < v(s + \alpha) \end{aligned}$$

Como $\alpha > 0$ es arbitrario, la desigualdad anterior implica que $us \leq vs$. Sin embargo $u > v$, por lo que concluimos que $m(A) = s = 0$.

$\square$

Teorema 6.2.8. *Sea $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ monótona creciente. Entonces f es derivable en casi todo punto, su derivada f' (supuesta no negativa en los puntos donde f no es derivable) es una función sumable* *no negativa, y se tiene que*

$$(\mathcal{L})\int_a^b f'\,dm \leq f(b)-f(a) \tag{6.3}$$

Demostración. Por el Lema 6.2.7 sabemos que f' existe m-a.e. como una función $\overline{\mathbb{R}}$-valuada. Claramente f es derivable siempre que f' sea finita, por lo que basta probar que f' es una función sumable no negativa y finita m-a.e. que satisface (6.3). Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función

$$g_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$$

donde entendemos que $f(y)=f(b)$ para todo $y \geq b$. Como f es monótona creciente, se tiene que g_n es medible y no negativa. Además está claro que $f' = \lim_{n\to\infty} g_n$ en los puntos donde existe f'. Por tanto f', definida como $f' = \lim_{n\to\infty} g_n$ en el conjunto de puntos de medida donde las derivadas de Dini no son iguales entre sí (que tiene medida de Lebesgue nula), es una función medible no negativa. Por último, aplicando el Lema de Fatou para la integral de Lebesgue se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L})\int_a^b f'\,dm &\leq \liminf_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_a^b g_n dm\right) = \liminf_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_a^b n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dm(x)\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} nf\,dm - (\mathcal{L})\int_a^b nf\,dm\right) = \liminf_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_b^{b+\frac{1}{n}} nf\,dm - (\mathcal{L})\int_a^{a+\frac{1}{n}} nf\,dm\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left(f(b) - (\mathcal{L})\int_a^{a+\frac{1}{n}} nf\,dm\right) \leq f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

Por tanto, f' es sumable y finita m-a.e., por lo que f es derivable en casi todo punto. De esta manera queda probado el resultado. $\square$

Nota 6.2.9. La desigualdad en la integral del anterior teorema no puede mejorarse en general a una igualdad. Un contraejemplo clásico es la escalera de Cantor, que comentaremos en el Ejemplo 6.2.17 y para la cual la desigualdad es estricta.

6.2.2. Derivación de integrales

En esta sección estudiaremos las condiciones bajo las cuales podemos derivar la integral de una función, y su derivada es la función original, respondiendo así (P1). Como cabe esperar en el marco de la teoría de la medida, el resultado será cierto m-a.e. (Teorema 6.2.14), aunque antes deberemos demostrar una serie de resultados auxiliares.

Nota 6.2.10. Consideremos una función $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$. Entonces podemos escribir su función integral como

$$F(x) = (\mathcal{L})\int_a^x f\,dm = (\mathcal{L})\int_a^x f^+\,dm - (\mathcal{L})\int_a^x f^-\,dm$$

Por tanto F es la diferencia de dos funciones monótonas crecientes, por lo que por el Teorema 6.2.8 sabemos que F *es derivable en casi todo punto* y $F' \in \mathcal{L}_1([a,b])$.

Lema 6.2.11. *Sea $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$. Si su función integral se anula en $[a,b]$, entonces $f = 0$ m-a.e.*

Demostración. Definamos el conjunto $A \coloneqq \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$ (la demostración es análoga para el conjunto de puntos donde f es estrictamente negativa). Claramente $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde $A_n \coloneqq \{x \in [a,b] : f(x) > 1/n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f es medible, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que A_n es un conjunto medible Lebesgue, y como A es unión numerable de estos conjuntos, basta probar que $m(A_n) = 0$ para concluir el resultado.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y supongamos por reducción al absurdo que $m(A_n) > 0$. Entonces por la Caracterización topológica de los conjuntos medibles Lebesgue existe un cerrado C tal que $C \subset A_n$ y $m(C) > 0$. Definamos el conjunto $B \coloneqq (a,b) \setminus C$. Claramente B es abierto, por lo que existe una familia numerable de intervalos abiertos $\{(a_m, b_m)\}_{m=1}^{\infty}$ disjuntos dos a dos tal que $B = \bigcup_{m=1}^{\infty}(a_m, b_m)$. Por tanto, como la función integral de f se anula en todo el intervalo se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\left((\mathcal{L})\int_a^{b_n} f\,dm - (\mathcal{L})\int_a^{a_n} f\,dm\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left((\mathcal{L})\int_{a_n}^{b_n} f\,dm\right) = (\mathcal{L})\int_B f\,dm \\
&= \left((\mathcal{L})\int_a^b f\,dm\right) - \left((\mathcal{L})\int_C f\,dm\right) = -\left((\mathcal{L})\int_C f\,dm\right) \leq -\frac{1}{n}m(C)
\end{aligned}
$$

Esto es una contradicción, por lo que $m(A_n) = 0$ y concluimos la demostración. $\square$

Proposición 6.2.12. *Sea $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ no negativa. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \in \mathcal{L}([a,b])$ con $m(A) < \delta$ se tiene que*

$$(\mathcal{L})\int_A f\,dm < \epsilon$$

Demostración. Notemos que si f es acotada el resultado es trivial. Definamos las funciones $f_n = f \wedge n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones medibles tal que $f_n \to f$, sabemos por el Teorema de la convergencia monótona que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\mathcal{L})\int_E f_N\,dm > (\mathcal{L})\int_E f\,dm - \frac{\epsilon}{2}$$

Definamos $\delta \coloneqq \epsilon/(2N)$. Entonces dado $A \in \mathcal{L}([a,b])$ con $m(A) < \delta$ cualquiera concluimos que

$$(\mathcal{L})\int_A f\,dm = (\mathcal{L})\int_A (f - f_N)\,dm + (\mathcal{L})\int_A f_N\,dm < \frac{\epsilon}{2} + Nm(A) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\square$

Lema 6.2.13. *Sea $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$, entonces su función integral F es continua en $[a,b]$. Además, para todo $x \in [a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_x^{x+\frac{1}{n}} nF\,dm\right) = F(x)$$

Demostración. La continuidad de la función integral F es trivial por la Proposición 6.2.12. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [a,b]$ arbitrarios. Como F es continua es integrable Riemann, por lo que podemos definir su función integral en el sentido de Riemann $H : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces por el Teorema fundamental del cálculo 6.1.3 se tiene que $H'(x) = F(x)$, por lo que como la integral de Lebesgue generaliza a la de Riemann concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_x^{x+\frac{1}{n}} nF\,dm\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[H\left(x+\frac{1}{n}\right) - H(x)\right] = H'(x) = F(x)$$

$\square$

Ahora ya estamos en condiciones de probar el resultado mencionado, que podría verse como un Primer Teorema Fundamental del Cáclculo para la integral de Lebesgue:

Teorema 6.2.14. *Sea $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$. Entonces su función integral F es derivable en casi todo punto y además $F' = f$ m-a.e.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que f está acotada por una constante $K > 0$. Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ su función integral. Como $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ sabemos por la Nota 6.2.10 que F es derivable en casi todo punto y además F' es sumable. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones medibles

$$f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right] = n\left[(\mathcal{L})\int_x^{x+\frac{1}{n}} f\,dm\right]$$

donde entendemos que $f(y) = f(b)$ y $F(y) = F(b)$ para todo $y \geq b$. Claramente $F' = \lim_{n\to\infty} f_n$ m-a.e. y como $|f| \leq K$ se tiene que $|f_n(x)| \leq K$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Teorema de la convergencia dominada y el Lema 6.2.13 se tiene para cada $x \in [a,b]$ que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L})\int_a^x F'\,dm &= \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_a^x f_n\,dm\right) = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_a^x n\left[F\left(y+\frac{1}{n}\right) - F(y)\right]dm(y)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_{a+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} nF\,dm - (\mathcal{L})\int_a^x nF\,dm\right) = \lim_{n\to\infty}\left((\mathcal{L})\int_x^{x+\frac{1}{n}} nF\,dm - (\mathcal{L})\int_a^{a+\frac{1}{n}} nF\,dm\right) \\
&= F(x) - F(a) = (\mathcal{L})\int_a^x f\,dm
\end{aligned}$$

Por tanto, la función integral de $F' - f$ se anula en $[a,b]$, por lo que por el Lema 6.2.11 se cumple que $F' = f$ m-a.e.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ es no negativa. Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ su función integral. Como f es no negativa sabemos que F es creciente, por lo que por el Teorema 6.2.8 se tiene que F es derivable en casi todo punto, $F' \in \mathcal{L}_1([a,b])$ y además se tiene que

$$(\mathcal{L})\int_a^b F'\,dm \leq F(b) - F(a) = (\mathcal{L})\int_a^b f\,dm$$

Veamos que $F' \geq f$ m-a.e. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones $f_n = f \wedge n$, y denotemos $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ a la función integral de f_n y $G_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ a la función integral de $f - f_n$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Claramente $|f_n| \leq n$, por lo que por el caso anterior sabemos que F_n es derivable m-a.e. y $F_n' = f$ m-a.e. Además, como $f - f_n \geq 0$ sabemos que G_n es una función creciente, por lo que por el Teorema 6.2.8 sabemos que es derivable m-a.e. y su derivada G_n' es no negativa. Por tanto, como $F = G_n + F_n$ se tiene que $F' = G_n' + F_n' \geq F_n' = f_n$ m-a.e., de donde tomando límites deducimos que $F' \geq \lim_{n\to\infty} f_n = f$ m-a.e. De esta manera hemos probado que

$$(\mathcal{L})\int_a^b (F' - f)\,dm = 0$$

Sin embargo, $F' - f \geq 0$ m-a.e., por lo que necesariamente $F' = f$ m-a.e.

En el caso general $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ basta tener en cuenta que $f = f^+ - f^-$ donde $f^+, f^- \in \mathcal{L}_1([a,b])$ son funciones no negativas. De esta manera, si $F^+(F^-) : [a,b] \to \mathbb{R}$ es la función integral de $f^+(f^-)$, por el caso anterior se tiene que $F = F^+ - F^-$ es derivable $m - a.e.$ y además $F' = (F^+)' - (F^-)' = f^+ - f^- = f$ m-a.e. Esto concluye la demostración. □

6.2.3. Integración de derivadas

Pasamos ahora a estudiar las cuestiones (P2) acerca de la integración de la derivada. Para ello, debemos introducir una clase de funciones que serán esenciales en este aspecto: *las funciones asbolutamente continuas.*

Definición 6.2.15. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice que es *absolutamente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada subpartición $\{[x_i, x_i']\}_{i=1}^n$ de $[a,b]$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| < \delta \implies \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_i')| < \epsilon \tag{6.4}$$

Además, denotaremos $\mathrm{AC}([a,b])$ a la clase de estas funciones sobre $[a,b]$.

Claramente las funciones absolutamente continuas son continuas, y por la siguiente Proposición también de variación acotada. Sin embargo el recíproco no es cierto, siendo la escalera de Cantor (Ejemplo 6.2.17) una función continua de variación acotada pero no absolutamente continua.

Proposición 6.2.16. $\mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathrm{BV}([a,b])$

Demostración. Sea $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ cualquiera, veamos que es de variación acotada. Dado $\epsilon > 0$, como f es absolutamente continua existe $\delta > 0$ verificando la Definición 6.2.15. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta' = \frac{b-a}{N} < \delta$, y definamos los intervalos $I_n \coloneqq [a + n\delta', a + (n+1)\delta']$ para cada $n = 0, ..., N-1$.

Sea $\mathcal{P} = \{x_i\}_{i=0}^m$ una partición arbitraria de $[a,b]$. Consideremos la partición $\mathcal{P}' = \{y_j\}_{j=1}^M \supset \mathcal{P}$ resultado de añadir a $\mathcal{P}$ los extremos de los intervalos $I_1, ..., I_N$ que no se encuentran en $\mathcal{P}$, y definamos la secuencia $\{m_n\}_{n=0}^N \subset \{1, ..., m\}$ verificando que $y_{m_n} = a + n\delta'$ para cada $n = 0, ..., N$. Entonces $\{[y_{j-1}, y_j]\}_{m_n+1}^{m_{n+1}}$ es una subpartición de $[a,b]$ tal que $\sum_{j=m_n+1}^{m_{n+1}} |y_j - y_{j-1}| = l(I_n) = \delta' < \delta$ para cada $n = 0, ..., N-1$, por lo que

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{j=1}^{M} |f(y_j) - f(y_{j-1})| = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=m_n+1}^{m_{n+1}} |f(y_j) - f(y_{j-1})| < N\epsilon$$

Por tanto $\mathrm{Var}(f, [a,b]) \leq N\epsilon < \infty$, por lo que f es de variación acotada. $\square$

Ejemplo 6.2.17 (La escalera de Cantor)**.** Construyamos la función $\Lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera. Sea $\Lambda_0(x) = x$ para todo $x \in [a,b]$, definamos recursivamente las funciones

$$\Lambda_n : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \Lambda_n(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}\Lambda_{n-1}(3x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Lambda_{n-1}(3x-2) & \text{si} \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

para cada $n \geq 1$. Entonces, dado $n \geq 1$ está claro que Λ_n es continua, y si definimos $K \coloneqq \text{máx}_{x \in [a,b]} |\Lambda_1(x) - \Lambda_0(x)| < \infty$, es fácil comprobar separando los tres casos adecuadamente que

$$\underset{x \in [a,b]}{\text{máx}} |\Lambda_{n+1}(x) - \Lambda_n(x)| \leq \frac{1}{2} \underset{x \in [a,b]}{\text{máx}} |\Lambda_n(x) - \Lambda_{n-1}(x)| \leq ... \leq \frac{1}{2^n} K$$

para cada $n \geq 1$. De esta manera, para cada $m > n$ se tiene que

$$\underset{x \in [a,b]}{\text{máx}} |\Lambda_m(x) - \Lambda_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \underset{x \in [a,b]}{\text{máx}} |\Lambda_{k+1}(x) - \Lambda_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} K \leq \frac{1}{2^{n-1}} K$$

Por tanto $\{\Lambda_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$, pero como este es un espacio de Banach, sabemos que existe $\Lambda = \text{lím}_{n \to \infty} \Lambda_n \mathcal{C}([a,b])$. Además, por construcción Λ_n es una función creciente no negativa para cada $n \geq 1$, por lo que Λ también lo es. De esta manera, Λ es una función de variación acotada, creciente y continua. Por otro lado, es fácil comprobar que Λ es constante sobre el complementario del conjunto de Cantor, y como este último es m-nulo, se tiene que Λ es derivable m-a.e. y $\Lambda' = 0$. Entonces, si Λ fuera absolutamente continua, por el Teorema 6.2.20 se tendría que

$$0 = (\mathcal{L}) \int_0^1 \Lambda' \, dm = \Lambda(1) - \Lambda(0) = 1$$

lo que es una constradicción. Por tanto, se sigue que Λ es una función continua, creciente, de variación acotada pero no absolutamente continua.

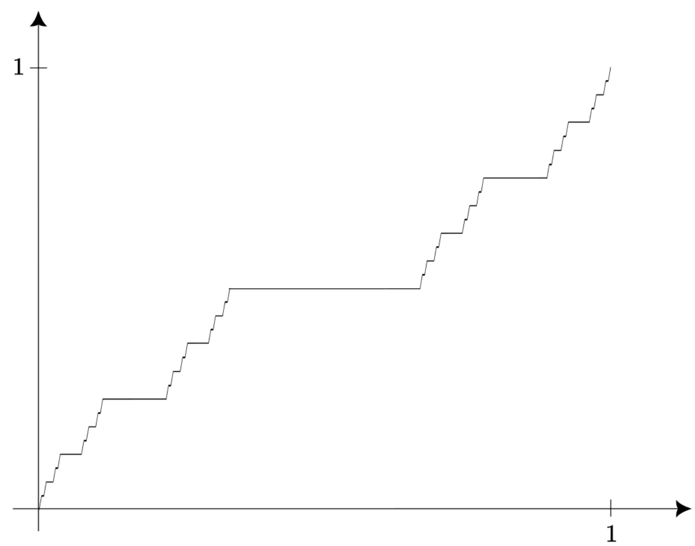

Figura 6.2: La escalera de Cantor.

Nota 6.2.18. Observemos que como toda función absolutamente continua es de variación acotada, puede expresarse como la diferencia de dos funciones crecientes, por lo que por el Teorema 6.2.8 es derivable en casi todo punto.

Nos centraremos a continuación en caracterizar las funciones que pueden expresarse como integrales indefinidas de cierta función sumable, para lo cual necesitamos el siguiente lema:

Lema 6.2.19. *Sea $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. Si $f' = 0$ m-a.e. entonces f es constante.*

Demostración. Basta probar que $f(a) = f(b)$, ya que para cada $x \in [a,b]$ podemos restringirnos al intervalo $[a,x]$ y demostrar análogamente que $f(a) = f(x)$. Definamos el conjunto $E \coloneqq \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\}$, que por hipótesis cumple que $m(E) = b - a$. Fijemos $\alpha > 0$ y $\eta > 0$ arbitrarios. Entonces dado $x \in E$ y $\epsilon > 0$, como $f'(x) = 0$ existe $0 < h < \epsilon$ tal que el intervalo $I_{x,\epsilon} = [x, x+h]$ está contenido en $[a,b]$ y se cumple que $|f(x+h) - f(x)| < \eta h$.

Claramente la familia $\mathcal{F} = \{I_{x,\epsilon}\}_{x\in E, \epsilon>0}$ es un recubrimiento de Vitali de E. Además, como f es absolutamente continua existe $\delta > 0$ asociado a α en el sentido de la Definición 6.2.15, por lo que por el Lema de los recubrimientos de Vitali existe una colección finita de intervalos $I_1 = [x_1, x_1 + h_1]$, ..., $I_N = [x_N, x_N + h_N]$ de $\mathcal{F}$ disjuntos dos a dos tal que

$$m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \delta$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 < x_2 < ... < x_N$, y definamos $y_0 \coloneqq a$, $y_1 \coloneqq x_1 + h_1$, ..., $y_n \coloneqq x_n + h_n$, $y_{n+1} = b$. Entonces como I_1, ..., I_N son disjuntos dos a dos se tiene que

$$a = y_0 \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < ... \leq x_N < y_N \leq y_{N+1} = b$$

por lo que

$$\sum_{n=0}^{N} |x_{n+1} - y_n| = b - a - \sum_{n=1}^{N} h_n = m(E) - m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \leq m(E) - m\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) = m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \delta$$

Por tanto, como $\delta > 0$ se ha escogido para que se verifique (6.4) se tiene que

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left|\sum_{n=0}^{N}[f(x_{n+1}) - f(y_n)] + \sum_{n=1}^{N}[f(y_n) - f(x_n)]\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |f(x_{n+1}) - f(y_n)| \\ &+ \sum_{n=1}^{N} |f(y_n) - f(x_n)| < \alpha + \sum_{n=1}^{N} \eta h_n = \alpha + \eta \cdot m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \leq \alpha + \eta(b - a) \end{aligned}$$

de donde, por ser $\alpha > 0$ y $\eta > 0$ arbitrarios, concluimos que $f(a) = f(b)$. De esta manera queda probado el resultado. □

Teorema 6.2.20 (Caracterización de las integrales de Lebesgue indefinidas)**.** *Una función* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una integral indefinida de una función sumable si y solo si* $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. *Además, en estas condiciones se tiene que*

$$(\mathcal{L})\int_a^b F'\,dm = F(b) - F(a)$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe una función $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ y $C \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in [a,b]$ se tiene

$$F(x) = C + (\mathcal{L})\int_a^x f\,dm$$

Veamos que F es absolutamente continua. Fijemos $\epsilon > 0$ abitrario. Entonces por la Proposición 6.2.12 existe $\delta > 0$ tal que para cualquier subpartición $\{[x_i, x_i']\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ tal que $\sum_{i=1}^n |x_i - x_i'| = m\big(\bigcup_{i=1}^n (x_i, x_i')\big) < \delta$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_i')| = \sum_{i=1}^n \left|(\mathcal{L}) \int_{x_i}^{x_i'} f\, dm\right| \leq \sum_{i=1}^n \left((\mathcal{L}) \int_{x_i}^{x_i'} |f|\, dm\right) = (\mathcal{L}) \int_{\bigcup_{i=1}^n (x_i, x_i')} |f|\, dm < \epsilon$$

y por tanto $F \in \mathrm{AC}([a, b])$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $F \in \mathrm{AC}([a, b])$. Entonces por la Proposición 6.2.16 se tiene que F es de variación acotada, por lo que existen dos funciones monótonas crecientes F_1 y F_2 tal que $F = F_1 - F_2$. Por tanto, por el Teorema 6.2.8 sabemos que F_1 y F_2 son derivables m-a.e. y sus derivadas F_1' y F_2' son funciones sumables no negativas. De esta manera F es derivable m-a.e. y su derivada $F' = F_1' - F_2'$ es una función sumable, por lo que podemos definir la función

$$H : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad H(x) = (\mathcal{L}) \int_a^x F'\, dm$$

Entonces H es la integral indefinida de una función sumable, por lo que por la implicación probada anteriormente se tiene que $H \in \mathrm{AC}([a, b])$. Por tanto, la función $h \coloneqq f - H$ es absolutamente continua, y por el Teorema 6.2.14 se tiene que H es derivable m-a.e. y cumple que $h' = F' - H' = 0$ m-a.e. De esta manera, por el Lema 6.2.19 concluimos que h es constante, por lo que para cada $x \in [a, b]$ se tiene que

$$F(x) - F(a) = H(x) - H(a) = (\mathcal{L}) \int_a^x F'\, dm$$

lo que prueba que F es la integral indefinida de una función sumable. □

Nota 6.2.21. El desarrollo que se ha realizado para la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ tiene una generalización para la integral de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. El Teorema 6.2.14 sobre la derivada de la integral se traslada a $\mathbb{R}^n$ mediante el Teorema de Diferenciación de Lebesgue[2] [38, Theorem 7.11], mientras que la caracterización de las integrales de Lebesgue indefinidas se puede ver como un caso particular del famoso Teorema de Radon-Nikodym [38, Theorem 6.10].

6.3. Integral de Daniell

En el capítulo sobre la integral de Daniell vimos que, cuando se satisface la condición de Stone, los enfoques de Lebesgue y Daniell son equivalentes. Por tanto, la relación entre derivación e integración

[2]Este teorema se puede probar también en algunos espacios métricos de medida, como son los espacios geométricamente doblantes [2].

para la integral de Daniell construida a partir de la integral de Riemann es la misma que para la integral de Lebesgue. Sin embargo, es posible construir algunas integrales de Daniell sobre la recta real que no satisfacen la condición de Stone, y que por tanto no podemos estudiar bajo el marco de la integral de Lebesgue. Los siguientes ejemplos muestran un comportamiento especialmente patológico entre derivación e integración según Daniell, permitiendo incluso definir la integral de una clase de funciones como su propia derivada.

Ejemplo 6.3.1. Consideremos la terna $([0,1], T_0, I_1)$ donde $T_0 = \{re : r \in \mathbb{R}\}$, e es la función identidad en $[0,1]$ e $I_1(f) = r = f'$ para cada $f = re \in T_0$. Claramente $([0,1], T_0, I_1)$ es un espacio de Daniell que no satisface la condición de Stone, por lo que su integral de Daniell no puede verse como una integral de Lebesgue. Además, como T_0 es unidimensional y $\mathbb{R}$ es completo, se tiene que $\mathscr{L} = T_0$ y

$$(\mathcal{D}) \int f = I_1(f) = f', \qquad \forall f \in \mathscr{L}$$

Claramente la clave del ejemplo anterior es que el espacio de funciones que podemos integrar es unidimensional, lo que permite esta extraña patología. Sin embargo, podemos construir un ejemplo igual de problemático en espacios de dimensión infinita:

Ejemplo 6.3.2. Consideremos la terna $([0,2], T_0, I_2)$ donde T_0 está formado por las funciones $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ tal que $f|_{[0,1]} = re$ para algún $r \in \mathbb{R}$ y $f|_{[1,2]}$ es una función sumable en el sentido de Lebesgue sobre $[1,2]$, y definamos el funcional

$$I_2 : T_0 \to \mathbb{R}, \quad I_2(f) = I_1(f|_{[0,1]}) + (\mathcal{L}) \int_{[1,2]} f \, dm$$

Claramente $([0,2], T_0, I_2)$ es un espacio de Daniell que no satisface la condición de Stone, por lo que su integral de Daniell tampoco puede verse como una integral de Lebesgue. Además, como $([1,2], \mathcal{L}([1,2]), m|_{[1,2]})$ es un espacio de medida completo, por el Teorema 4.5.16 y el ejemplo anterior se tiene que $\mathscr{L} = T_0$ y la integral de Daniell coincide con el funcional I_2.

Este tipo de construcciones hacen que no tenga sentido cuestionarse cuál es la relación entre derivación e integración en una integral de Daniell sin la condición de Stone. Además, nos permiten justificar el hecho de que informalmente se diga que el enfoque de Daniell es equivalente al de Lebesgue, ya que sin la condición de Stone perdemos los buenos atributos de nuestra integral con la derivación.

6.4. Integral de Henstock-Kurzweil

Una de las características más destacadas de la integral de Henstock-Kurzweil, que inclina a muchos matemáticos a considerarla la mejor integral sobre un intervalo compacto (y sobre $\mathbb{R}$), es su relación con la derivación. Las restricciones que se presentan en el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann desaparecen casi en su totalidad, exponiendo así la relación entre derivación e integración de la forma más elegante conocida.

En lo relativo a las cuestiones (P1), la derivación de la integral indefinida de Henstock-Kurzweil se comporta de la misma manera que la de Lebesgue, esto es:

Teorema 6.4.1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Entonces su función integral F es derivable en casi todo punto y además $F' = f$ m-a.e.*

Demostración. Sea A el conjunto de puntos $x \in [a,b]$ tal que $D^+F(x) = D^-F(x) = f(x)$ es finito y $E = [a,b] \setminus A$. Entonces basta probar que E es m-nulo, ya que la demostración para las otras dos derivadas de Dini es análoga. Dado $x \in E$ cualquiera, negando que $D^+F(x) = D^-F(x) = f(x)$ sea finito, sabemos que existe $\alpha(x) > 0$ tal que para cada $h > 0$ existe $y_{x,h} \in [a,b]$ con $x < y_{x,s} < x + h$ de manera que

$$\left| \frac{F(y_{x,h}) - F(x)}{y_{x,h} - x} - f(x) \right| > \alpha(x) \tag{6.5}$$

Claramente $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde $E_n \coloneqq \{x \in E : \alpha(x) > 1/n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como esta familia es numerable, basta probar E_n es m-nulo para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ cualquiera. Dado $\epsilon > 0$, como $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ existe un calibre δ sobre $[a,b]$ tal que, para cada partición etiquetada $\mathcal{P}_e$ δ-fina en $[a,b]$, se tiene que

$$\left| S_{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}_e) - (\mathcal{HK}) \int_a^b f \, dx \right| < \epsilon/n \tag{6.6}$$

Consideremos la familia de intervalos $\mathcal{F}_n \coloneqq \{[x, y_{x,s}] : x \in E_n,\ 0 < s \leq \delta(x)\}$. Claramente $\mathcal{F}_n$ es un recubrimiento de Vitali de E_n, por lo que por el Lema de los recubrimientos de Vitali existe una colección finita de intervalos $I_1 = [x_1, y_1], ..., I_M = [x_M, y_M]$ de $\mathcal{F}_n$ disjuntos dos a dos tal que

$$m^*\left(E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{M} I_i\right) < \epsilon$$

Por construcción se tiene que $x_i \leq y_i \leq x_i + \delta(x_i)$ para cada $i = 1, ..., M$, por lo que $\mathcal{P}_e = \{I_i, x_i\}_{i=1}^M$ es una subpartición etiquetada δ-fina de $[a,b]$. Entonces, como δ cumple (6.6), por el Lema de

Saks-Henstock junto con (6.5) se tiene que

$$\sum_{i=1}^{M}(y_i - x_i) < \sum_{i=1}^{M} n\alpha(x_i)[y_i - x_i] \leq n\sum_{i=1}^{M}\left|F(y_i) - F(x_i) - f(x_i)[y_i - x_i]\right|$$
$$= n\sum_{i=1}^{M}\left|(\mathcal{HK})\int_{x_i}^{y_i} f\,dx - f(x_i)[y_i - x_i]\right| \leq 2\epsilon$$

Por tanto, se tiene que

$$m^*(E_n) \leq m^*\left(E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{M} I_i\right) + m^*\left(E_n \cap \bigcup_{i=1}^{M} I_i\right) \leq \epsilon + m^*\left(\bigcup_{i=1}^{M} I_i\right) = \epsilon + \sum_{i=1}^{M}(y_i - x_i) < 3\epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que E_n es m-nulo. Esto concluye la demostración. □

Nota 6.4.2. Aunque en la integral de Riemann la función integral es derivable en todo punto de $[a, b]$, para la integral de Lebesgue y la de Henstock-Kurzweil sólo podemos asegurarlo m-a.e. Basta considerar el Ejemplo 6.1.5, que es sumable con función integral no derivable en un punto.

Por otro lado, es la respuesta a (P2) donde la integral de Henstock-Kurzweil mejora no solo las hipótesis de Riemann, sino también las de Lebesgue. En esencia el siguiente resultado expone que *toda derivada es integrable Henstock-Kurzweil*, lo cual es cuanto menos sorprendente.

Teorema 6.4.3 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[a, b]$. Entonces $f' \in \mathcal{HK}([a, b])$ y se cumple que*

$$(\mathcal{HK})\int_a^b f'\,dx = f(b) - f(a)$$

Demostración. Fijemos $\epsilon > 0$ cualquiera. Como f es derivable en $[a, b]$, para todo $x \in [a, b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que, para cada $y \in [a, b] \cap [x - \delta_x, x + \delta_x]$, se tiene que

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \frac{\epsilon}{b - a}|y - x|$$

Definamos el calibre $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $\delta(x) = \delta_x$ para todo $x \in [a, b]$. Consideremos una partición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ δ-fina de $[a, b]$ arbitraria. Dado $i \in \{1, ..., n\}$, como $0 < x_i - x_{i-1} < \delta(t_i) = \delta_{t_i}$ y $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, por la desigualdad triangular sabemos que

$$\left|f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \left|f(t_i) - f(x_{i-1}) - f'(t_i)(t_i - x_{i-1})\right| +$$
$$\left|f(x_i) - f(t_i) - f'(t_i)(x_i - t_i)\right| \leq \frac{\epsilon}{b - a}(|t_i - x_{i-1}| + |x_i - t_i|) = \frac{\epsilon}{b - a}(x_i - x_{i-1})$$

Por tanto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|S_{\mathcal{R}}(f', \mathcal{P}_e) - [f(b) - f(a)]| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \Big[f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) - f(x_i) + f(x_{i-1}) \Big] \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \Big| f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) - f(x_i) + f(x_{i-1}) \Big| \leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon
\end{aligned}
$$

de donde concluimos que $f' \in \mathcal{HK}([a,b])$ y su integral de Henstock-Kurzweil es $f(b) - f(a)$. □

Nota 6.4.4. La hipótesis de que la función f sea derivable en $[a,b]$ puede ser ligeramente debilitada [5, Theorem 4.7] permitiendo funciones derivables excepto en un conjunto numerable de puntos. Sin embargo, no es posible debilitarla hasta funciones derivables en casi todo punto, ya que funciones como la escalera de Cantor son derivables en casi todo punto pero no cumplen la fórmula que se establece en este resultado.

Por último, faltaría saber si es posible caracterizar las integrales indefinidas de Henstock-Kurzweil. En efecto es posible, aunque la demostración es altamente no trivial y elaborada, por lo que nos limitaremos a incluir el resultado en cuestión por completitud (véase [18, Chapter 9] para una demostración detallada de este resultado). La idea es generalizar la noción de continuidad absoluta a un concepto que incluya los calibres tan manejados en la integral de Henstock-Kurzweil, lo que da lugar a la siguiente definición.

Nota 6.4.5. Al igual que se definió en el capítulo anterior una subpartición etiquetada sobre un intervalo $[a,b]$, decimos que $\mathcal{S}_e = \{J_i, s_i\}_{i=1}^{n}$ es una *subpartición de un conjunto* $E \subset [a,b]$ si $\mathcal{S}_e$ es una subpartición de $[a,b]$ tal que $s_i \in E$ para todo $i = 1, ..., n$.

Definición 6.4.6. Dado $E \subset [a,b]$, decimos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece a $\mathrm{AC}_\delta(E)$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ y un calibre δ sobre E tal que, para toda subpartición etiquetada $\mathcal{P}_e = \{[x_i, x_i'], t_i\}_{i=1}^{n}$ δ-fina sobre E, se tiene que

$$
\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| < \eta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i')| < \epsilon
$$

Por otro lado, diremos que f es una función *absolutamente continua generalizada* en $[a,b]$ si existe una sucesión de conjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[a,b]$ tal que $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $f \in \mathrm{AC}_\delta(E_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, denotaremos $\mathrm{ACG}_\delta([a,b])$ a la clase de estas funciones sobre $[a,b]$.

Nota 6.4.7. Se puede comprobar, sin mucha dificultad, que sobre un intervalo compacto $[a,b]$ se tiene $\mathrm{AC}_\delta([a,b]) = \mathrm{AC}([a,b])$.

Claramente las funciones absolutamente continuas sobre $[a,b]$ son también absolutamente continuas generalizadas en $[a,b]$, sin embargo el recíproco no es cierto, tal y como vemos en el Ejemplo 6.4.8. De esta manera se tiene que $\mathrm{AC}([a,b]) \subsetneq \mathrm{ACG}_\delta([a,b])$.

Ejemplo 6.4.8. Consideremos la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Claramente $f \notin \mathrm{AC}([0,1])$, ya que f no es continua. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Entonces f es derivable en $[1/n, 1]$, con derivada $f'(x) = -1/x^2$ para cada $x \in [1/n, 1]$. Por tanto f' es continua en $[1/n, 1]$, por lo que por el Teorema 6.1.4 se tiene que f es una integral indefinida en $[1/n, 1]$ de una función Riemann integrable. De esta manera, como la integral de Lebesgue generaliza a la de Riemann, f es integral indefinida en $[1/n, 1]$ de una función sumable, por lo que por el Teorema 6.2.20 concluimos que $f \in \mathrm{AC}([1/n, 1]) = \mathrm{AC}_\delta([1/n, 1])$. Como $[0,1] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty [1/n, 1]$ y $f \in \mathrm{AC}_\delta(0) = \mathrm{AC}_\delta([0,0])$ trivialmente, se sigue que $f \in \mathrm{ACG}_\delta([0,1])$.

Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar la caracterización buscada:

Teorema 6.4.9 (Caracterización de las integrales de Henstock-Kurzweil indefinidas)**.** *Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una integral indefinida de una función Henstock-Kurzweil integrable si y solo $F \in \mathrm{ACG}_\delta([a,b])$*

Este resultado tiene dos consecuencias especialmente relevantes. Por un lado, como $\mathrm{AC}([a,b]) \subset \mathrm{ACG}_\delta([a,b])$, se deduce que la la integral de Henstock-Kurzweil generaliza a la de Lebesgue (hecho ya probado en el capítulo anterior). Por otro lado, históricamente este resultado fue clave en la demostración de que las integrales de Denjoy-Perron y Henstock-Kurzweil son equivalentes. La idea es que se puede probar un resultado análogo para la integral de Denjoy-Perron [18] en términos de otra generalización de la continuidad absoluta, cuya clase de funciones denotaremos $\mathrm{ACG}_*([a,b])$. Entonces, es posible demostrar que $\mathrm{ACG}_*([a,b]) = \mathrm{ACG}_\delta([a,b])$, lo que implica que ambas integrales son en efecto equivalentes.

Conclusiones

El concepto de integral está anclado en los orígenes de la matemática moderna. A lo largo de este trabajo hemos visto cómo evoluciona la forma de entender este concepto matemático, pasando de unos orígenes eminentemente prácticos a un formalismo teórico en continuo desarrollo, siempre buscando mejorar las propiedades y resultados de las teorías precursoras, aunque sin olvidar ese pensamiento (en la línea del concepto de medida más físico) de que el valor de la integral no debe depender de la teoría de integración utilizada. Es en esta dirección donde emerge un principio, que aunque no escrito, es fundamental para dar una última visión al trabajo: *si una teoría de integración gana en generalidad, entonces pierde en sus propiedades.*

Desde la integral de Riemann hasta la de Henstock-Kurzweil, vemos cómo, al mismo tiempo que ciertas propiedades e hipótesis de los resultados desaparecen y aparecen, se consigue extender el concepto de integral a más y más funciones. El reducido espacio de las funciones Riemann integrables deja paso a las funciones con integral impropia de Riemann, perdiendo así la estructura de retículo y obligando a introducir el concepto de integrabilidad absoluta. Al estudiar la integral de Lebesgue llegamos a una teoría de integración donde se satisfacen poderosos teoremas de convergencia, con buenas propiedades de retículo y linealidad, y una relación con la derivación más profunda que la que se da para la integral de Riemann. Sin embargo, el hecho de que las funciones sumables deban ser absolutamente integrables resulta ser un problema para la integral de Lebesgue, lo que entre otras cosas nos lleva a introducir la integral impropia de Lebesgue (donde nuevamente se pierde la estructura de retículo). Similar es el caso de la integral de Daniell, equivalente a la de Lebesgue en la mayor parte de los casos, y que en los únicos en los que se la puede considerar más general da lugar a patologías con la derivación poco deseables. Por último, la integral de Henstock-Kurzweil consigue la clase de funciones integrables más general, tiene la relación con la integral impropia de Riemann que deseábamos, y además su relación con la derivación es perfecta. Esto nos plantea la pregunta, ¿es la integral de Henstock-Kurzweil la mejor integral sobre la recta real?

Nada más alejado de la realidad, la integral de Henstock-Kurzweil tiene por supuesto algunos incovenientes. A diferencia de las funciones sumables, no toda función Henstock-Kurzweil integrable lo es absolutamente[3]. Más aún, y aunque no se demuestra en este trabajo, se puede probar que $f, |f| \in \mathcal{HK}([a,b])$ si y solo si $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ [33, Theorem 5.52], por lo que no tiene sentido definir una norma sobre $\mathcal{HK}([a,b])$ de la misma manera que lo hacemos para $\mathcal{L}_1([a,b])$ (ya que por lo anterior acabaríamos con el mismo espacio).

Esto tiene consecuencias prácticas muy problemáticas. Mientras que $\mathcal{L}_1([a,b])$ tiene una norma natural que hace a este espacio completo (técnicamente al espacio de clases de equivalencias de funciones sumables), el espacio $\mathcal{HK}([a,b])$ no admite una norma natural. Es posible construir diversas seminormas sobre este espacio, como la de Alexiewicz basada en sus integrales indefinidas, sin embargo ninguna de ellas mantiene propiedades como la completitud del espacio.

Otra problemática similar de $\mathcal{HK}([a,b])$ es que no es un retículo de funciones, aunque esta es una característica ineludible si deseamos que el Teorema de Hake sea válido. Si queremos que una teoría generalice a la integral impropia de Riemann, sabemos que vamos a tener que lidiar con funciones no absolutamente integrables, lo que nos va a romper la estructura de retículo (ya que si lo fuera, la parte positiva y negativa de las funciones integrables serían integrables, y en consecuencia el valor absoluto de la función también lo sería). Recíprocamente, si queremos que las funciones integrables formen un retículo, entonces toda función va a ser absolutamente integrable, de manera que no podemos generalizar a la integral de Riemann impropia. De esta manera, a la hora de construir una teoría de integración debemos realizar una elección: generalizar a la integral impropia de Riemann (Henstock-Kurzweil) o mantener una buena estructura de retículo vectorial (Lebesgue).

Por otro lado, y aunque en este trabajo nos limitamos a explorar teorías de integración sobre la recta real, cabe destacar que la integral de Henstock-Kurzweil carece de la gran generalidad de la integral de Lebesgue, dado que solamente el paso a cubos de $\mathbb{R}^n$ ya trae una serie de problemas. Aunque algunos teoremas de convergencia y el Teorema de Fubini son ciertos, otros tan clásicos como el Teorema de la Divergencia dejan de ser válidos. Además, a diferencia de la integral de Lebesgue, esta integral no se comporta bien bajo rotaciones del espacio. Todo esto ha provocado que diversos autores hayan intentado en los últimos años encontrar una manera de construir una teoría de integración condicional en $\mathbb{R}^n$ que satisfaga los teoremas clásicos, aún sin exito.
De esta manera, queda claro por qué la integral de Lebesgue continúa siendo la integral por excelencia, tanto a nivel formativo como de investigación. Aún así, la introducción de la integral de

[3]En algunos lugares de la literatura se habla de que la integral de Henstock-Kurzweil es una *integral condicional* para referirse a este hecho.

Henstock-Kurzweil en lugar de la de Riemann en los primeros cursos de Análisis y Cálculo es una opción más que razonable. No solo desarrolla una potente y económica teoría de integración, sino que es una sutil modificación de la integral de Riemann, por lo que no debería suponer un gran esfuerzo adicional para los estudiantes de los primeros cursos del Grado de Matemáticas.

Anexos

En estos anexos expondremos algunos resultados auxiliares que, o bien no son el tema central del trabajo, o bien fueron probados en alguna asignatura del Grado de Matemáticas. Las referencias utilizadas son [21] para el Teorema de Hahn-Banach y [19] para las cuestiones sobre semiintervalos.

A. El Teorema de Hahn-Banach

Definición A.1. Un *espacio normado* es una dupla $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma, i.e. una aplicación

$$\|\cdot\| : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

verificando las siguientes condiciones:

(N1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \, \forall \, \alpha \in \mathbb{R}, \, \forall \, x \in X$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|x\|, \, \forall \, x, y \in X$

Además, si toda sucesión de Cauchy es convergente diremos que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach.*

Definición A.2. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$, decimos que una dupla $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un *subespacio* de $(X, \|\cdot\|_X)$ si Y es un subespacio vectorial de X y $\|\cdot\|_Y$ es la restricción de $\|\cdot\|_X$ a Y.

Definición A.3. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$, decimos que una aplicación lineal $f : X \to \mathbb{R}$ es un *funcional sobre* X si existe $C > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq C \, \|x\|$$

para cada $x \in X$. Además, en estas condiciones se define *la norma de* f como

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Teorema A.4 (Hahn-Banach)**.** *Sea f un funcional sobre un subespacio $(Z, \|\cdot\|_Z)$ de un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$. Entonces existe un funcional $\tilde{f}$ sobre sobre X que es una extensión de f a X y tiene la misma norma, esto es*

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$$

B. Algunos resultados sobre semiintervalos

Proposición B.2. *Sea $N \in \mathbb{N}$ y $\{I_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{C}$. Entonces existe $\{J_m\}_{m=1}^M \subset \mathcal{C}$ tal que*

$$\bigcup_{n=1}^N I_n = \bigsqcup_{m=1}^M J_m$$

Teorema B.3. *Sea $\mathcal{R}$ el anillo generado por los semiintervalos acotados. Entonces*

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigsqcup_{n=1}^N I_n : \{I_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{C} \right\}$$

Definición B.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es un *intervalo diádico de orden n* si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$I = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$$

Teorema B.5. *Sea $O \subset \mathbb{R}$ un abierto. Entonces existe una familia numerable de semiintervalos diádicos $\{I_i\}_{i=1}^\infty$ disjuntos dos a dos tal que $O = \bigcup_{i=1}^\infty I_i$.*

Lista de Símbolos

$[a, b]$	Intervalo compacto de $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}([a, b])$	Espacio de las funciones continuas en $[a, b]$
$\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$	Espacio de las funciones continuas con soporte compacto en $\mathbb{R}$
$\mathcal{R}([a, b])$	Espacio de las funciones integrables Riemann en $[a, b]$
$\mathcal{R}^l([a, \infty))$	Espacio de las funciones con integral impropia de Riemann convergente en $[a, \infty)$
$\mathcal{R}(w, [a, b])$	Espacio de las funciones integrables Riemann respecto de w en $[a, b]$
$\mathcal{L}_1([a, b])$	Espacio de las funciones sumables en $[a, b]$
$\mathcal{L}_1^l([a, \infty))$	Espacio de las funciones con integral impropia de Lebesgue convergente en $[a, \infty)$
$\mathcal{HK}([a, b])$	Espacio de las integrables Henstock-Kurzweil en $[a, b]$
$\mathrm{B}([a, b])$	Espacio de las funciones acotadas en $[a, b]$
$\mathrm{BV}([a, b])$	Espacio de las funciones de variación acotada en $[a, b]$
$\mathrm{AC}([a, b])$	Espacio de las funciones absolutamente continuas en $[a, b]$
$\mathrm{ACG}_\delta([a, b])$	Espacio de las funciones absolutamente continuas generalizadas en $[a, b]$
$\mathcal{P}$	Partición de un intervalo $[a, b]$
$\mathcal{S}$	Subpartición de un intervalo $[a, b]$
$\mathcal{P}_e$	Partición etiquetada de un intervalo $[a, b]$
$\mathcal{S}_e$	Subpartición etiquetada de un intervalo $[a, b]$
$\mathcal{C}$	Clase de los semiintervalos acotados en $\mathbb{R}$
$l(I)$	Longitud del intervalo I
$\mathrm{Var}(w, [a, b])$	Variación de w en $[a, b]$
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	σ-álgebra de los conjuntos de borel de $\mathbb{R}$
$\mathcal{L}(\mathbb{R})$	σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue de $\mathbb{R}$

m	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$
$\bigsqcup$	Unión de una familia de conjuntos disjuntos dos a dos
χ_E	Función característica del conjunto E
$f \wedge g$	$(f \wedge g)(t) = \text{mín}\{f(t), g(t)\}$
$f \vee g$	$(f \vee g)(t) = \text{máx}\{f(t), g(t)\}$
$f^+(f^-)$	$f^+ = f \vee 0$, $f^- = f \wedge 0$
$\overline{\mathbb{R}}^X$	Funciones $\overline{\mathbb{R}}$-valuadas definidas sobre X

Referencias

[1] José A Facenda Aguirre y Francisco J Freniche. “A construction of Lebesgue measure”. En: (2004).

[2] Jesús M Aldaz. “Boundedness of averaging operators on geometrically doubling metric spaces”. En: *arXiv preprint arXiv:1710.04233* (2017).

[3] Tom Mike Apostol. *Mathematical Analysis*. 2.ª ed. Addison-Wesley, 1974.

[4] Robert B Ash. *Real analysis and probability: probability and mathematical statistics: a series of monographs and textbooks*. Academic press, 2014.

[5] Robert Gardner Bartle. *A modern theory of integration*. Vol. 32. American Mathematical Society Providence, 2001.

[6] Robert Gardner Bartle. “Return to the Riemann integral”. En: *The American Mathematical Monthly* 103.8 (1996), págs. 625-632.

[7] Elliot Blackstone y Piotr Mikusinski. “The Daniell Integral”. En: *arXiv preprint arXiv:1401.0310* (2014).

[8] Vladimir Igorevich Bogachev y Maria Aparecida Soares Ruas. *Measure theory*. Vol. 1. Springer, 2007.

[9] Witold M Bogdanowicz. “Daniell and Daniell-Bochner type integrals”. En: *Vector and Operator Valued Measures and Applications*. Elsevier, 1973, págs. 43-50.

[10] Andrew Browder. *Mathematical analysis: An introduction*. Springer, 2001.

[11] Riccardo Camerlo. “Descriptive set theory, from Cantor to Wadge and beyond”. En: (2022), págs. 4-6.

[12] Adriaan de Clercq. “The Daniell Integral: Integration without measure”. En: *arXiv preprint arXiv:2211.14964* (2022).

[13] Percy J Daniell. “A general form of integral”. En: *Annals of mathematics* (1918), págs. 279-294.

[14] Florencio Del Castillo. *Análisis matemático II*. Alhambra, 1980.

[15] Nelson Dunford y Jacob T Schwartz. *Linear operators, part 1: general theory.* Vol. 10. John Wiley & Sons, 1988.

[16] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* Vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.

[17] Gilles Godefroy. *Introduction aux méthodes de Baire.* Calvage & Mounet, 2022.

[18] Russell A Gordon. *The integrals of lebesgue, denjoy, perron, and henstock.* 4. American Mathematical Soc., 1994.

[19] Paul R Halmos. *Measure theory.* Vol. 18. Springer, 2013.

[20] Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded.* Springer, 2003.

[21] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley, 1978.

[22] L Leblanc y GE Fox. "On the extension of measure by the method of Borel". En: *Canadian Journal of Mathematics* 8 (1956), págs. 516-523.

[23] Elliott H Lieb y Michael Loss. *Analysis.* Vol. 14. American Mathematical Soc., 2001.

[24] Lynn H Loomis. *Introduction to abstract harmonic analysis.* Courier Corporation, 2013.

[25] Lucía Mallo Fernández. "El axioma de elección y sus consecuencias". Universidad de Oviedo, 2023.

[26] Elisa Pis Vigil. "Un recorrido integral: De la idea en la Antigüedad Griega a la teoría en el Siglo XX". Universidad de Oviedo, 2023.

[27] Gerhard Rompf y Götz Kersting. "Products of Daniell integrals". En: *arXiv preprint arXiv:2208.00762* (2022).

[28] Kenneth A Ross. *Elementary analysis.* Springer, 1980.

[29] Halsey L. Royden. *Real analysis.* 3.ª ed. New York: Macmillan, 1988.

[30] Stanisław Saks. "Theory of the Integral". En: (1937).

[31] Robert M Solovay. "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable". En: *Annals of Mathematics* (1970), págs. 1-56.

[32] Marshall Harvey Stone. "Notes on integration". En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 34.7 (1948), págs. 336-342.

[33] Charles W Swartz y Douglas S Kurtz. *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane.* Vol. 13. World Scientific Publishing Company, 2011.

[34] Angus Ellis Taylor. *General theory of functions and integration.* Courier Corporation, 1985.

[35] Brian S Thomson. “Characterizations of an indefinite Riemann integral”. En: (2009).

[36] John Von Neumann. “Zur einführung der transfiniten zahlen”. En: *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, sectio scientiarum mathematicarum* 1 (1923), págs. 199-208.

[37] Eddward Melvin Wadsworth. “Daniell integral”. En: (1965).

[38] Rudin Walter. “Real and complex analysis”. En: (1987).