Universidad de Oviedo

Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Trabajo de Fin de Grado

Modelos topológicos para la lógica modal

David Ronderos Valle

Dirigido por: Saúl Fernández González

Fecha de presentación: 14 de julio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La lógica modal, se centra en el estudio del "modo de ser verdad" de las proposiciones, en rasgos generales, puede definirse como el sistema formal que intenta capturar el comportamiento deductivo de algún grupo de operadores modales, por ejemplo, en la lógica alética si p y $p \to q$ son necesariamente ciertos entonces q también lo es. Por otro lado en la lógica temporal, si p y $p \to q$ son ciertos en el futuro, no necesariamente q lo es. Estos operadores modales se utilizan para calificar la veracidad de las distintas proposiciones de una lógica. En esta sección presentaremos los autores mas relevantes de esta área y los distintos tipos de lógicas, centrándonos en la llamada lógica epistémica (en la que se basará este trabajo).

1.1. Introducción histórica

La lógica modal se puede decir que parte de los análisis de Aristóteles, de aquellos enunciados en los que usaban términos como "necesario" o "posible". En los últimos años se debe nombrar al que es considerado el pionero en el tema, Clarence Irving Lewis, a quien se le atribuye el nacimiento de la lógica modal moderna. Este filósofo y catedrático estadounidense escribió desde 1910 a 1932 artículos como "A New System of Modal Logic"[1], que se publicó en el año 1912 (en el que asienta las bases del estudio de la lógica modal) o libros como “Symbolic Logic”[2] publicado en el año 1932, en el cual presenta los cinco sistemas clásicos S1 a S5 de lógica modal.

Después de nombrar a Clarence Irving Lewis no podemos dejar en el olvido a otros autores que hicieron grandes avances en este área, empezando por el filósofo y lógico neozelandés Arthur Prior, con su obra “Objects of Thought”[3] publicada póstumamente en 1971. En ella Prior contribuye en el estudio de la Teoría de los mundos posibles. Esta teoría establece un marco filosófico y lógico utilizado para analizar las distintas modalidades como la posibilidad o necesidad.La Teoría de los mundos posibles [4] se apoya en conceptos como los mundos posibles y las modalidades. Esta teoría hace una distinción entre los mundos hipotéticos y el mundo real. El mundo real difiere de los otros en unos pocos rasgos que hacen que pueda cambiar la veracidad de ciertas fórmulas en los distintos mundos.Prior utilizó esta teoría para poder formalizar y desarrollar la lógica temporal, esta lógica se ocupa de las relaciones entre momentos en el tiempo y la verdad de las proposiciones en esos momentos. Por otro lado Prior hace contribuciones en la semántica modal con sus desarrollos en sistemas formales utilizando la estructura de mundos posibles.

Los trabajos de Arthur Prior en la teoría de los mundos posibles influyeron en otros autores, entre los que destaca el filósofo y lógico estadounidense Saul Kripke, el cual propuso que para entender las expresiones “necesariamente” y “posiblemente”, propias de la lógica alética, no nos podemos restringir al mundo real sino que hay que estudiar la veracidad de la fórmula en todos los mundos posibles. Por otro lado desarrollo los modelos Kripkeanos, estos modelos están formados por el conjunto de mundos posibles[5], estos mundos están unidos mediante una relación de accesibilidad que nos aporta la información de que mundo es accesible desde otro y una interpretación de las fórmulas modales dependiendo del mundo en el que se sitúe. Sus obras más relevantes son “Semantical Considerations on Modal Logic”[6], en la que presenta su modelo Kripkeano y “Naming and Necessity”[7], la cual es una obra basada en las conferencias de Kripke de 1970 en las que desarrolla entre otras cosas sus ideas de la semántica de mundos posibles. Esta última obra se extiende en “Identity and Necessity”[8], obra publicada en 2005 donde se explora la noción de identidad necesaria.

Siguiendo con el estudio de los mundos posibles nos encontramos con otro filósofo y lógico estadounidense llamado David Lewis cuyos mayores avances fueron la argumentación de la multiplicidad de los mundos posibles, la idea de que las expresiones modales se entienden en términos de los mundos posibles alternativos y la defensa de un realismo modal robusto en el que se sostiene que los mundos posibles son tan reales como el mundo real. Esto se recoge en su obra "On the Plurality of Worlds"[9].

Por último hay que nombrar un autor que tuvo gran influencia en el campo de los juegos semánticos y lógica epistémica de la cual fue pionero, estamos hablando del filósofo y lógico finlandés Jaakko Hintikka[10]. Este filósofo desarrolló la noción de juegos semánticos como un enfoque distinto desde el que abordar la semántica de la lógica modal, estos juegos se basaban en que dos jugadores, un verificador y un falsificador, iban eligiendo movimientos basados en la estructura de la fórmula, el objetivo del juego era llegar a una proposición atómica que fuese claramente verdadera o falsa . En la lógica epistémica Hintikka influyó en el desarrollo de la teoría de juegos y la inteligencia artificial. Sus obras más representativas son "Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions"[11] donde se abordan las cuestiones centrales de la lógica epistémica y "The Logic of Epistemology and the Epistemology of Logic"[12] donde el autor investiga la relación entre lógica y epistemología.

1.2. Introducción conceptual

La lógica clásica proposicional, también llamada lógica de enunciados o lógica de orden, es un sistema formal que nos permite valorar si una fórmula es verdadera o falsa, siempre y cuando esta esté bien formada a través de variables proposicionales y elementos conectivos.
La lógica clásica proposicional como su nombre indica pertenece al conjunto de lógicas clásicas o lógicas estándar. Una lógica estándar es un sistema formal cuyos principios son: [13]

- Principio de identidad:
  Según este principio toda entidad es idéntica a si misma.
  Ejemplo: Raquel es idéntica a Raquel
- Principio de no contradicción:

Por este principio se establece que una proposición y su negación no pueden ser ciertas a la vez.
Ejemplo: Hace sol y no hace sol.

- Principio de Tercero excluido:
  A través de este principio podemos asegurar que si una proposición afirma algo, pero a su vez existe otra proposición que la contradice una de las dos obligatoriamente debe ser cierta y no es posible la existencia de una tercera opción.
  Ejemplo: Es martes o no es martes.

Las fórmulas de la lógica clásica proposicional se construyen mediante la unión de variables proposicionales utilizando conectivas booleanas y verificando los siguientes axiomas y normas.

1. Axiomas:

   a) $\varphi \wedge \psi \to \psi$

   b) $(\varphi \wedge \psi \to \theta) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$

   c) $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

2. Normas o reglas de inferencia:
   Modus ponens: Si φ y $\varphi \to \psi$ son teoremas entonces ψ es teorema

Observación 1.1. *Cabe destacar que los axiomas presentados anteriormente conforman uno de los varios sistemas axiomáticos de la LCP.Este sistema axiomático es equivalente al compuesto por los principios presentados al comienzo de la sección.*

Gracias a estas normas y axiomas podemos estudiar la veracidad de las fórmulas de la lógica clásica proposicional, para demostrar la veracidad de las fórmulas existen varios métodos como son el método semántico o sintáctico.El método semántico trata de demostrar una fórmula a través de una derivación que use los axiomas y las normas de la lógica.Por otro lado el método semántico asigna valores de verdad y falsedad a las variables proposicionales para posteriormente, comprobar si el valor de la fórmula completa es igual al valor de verdad.Un claro ejemplo del método semántico se encuentra en las tablas de verdad. Posteriormente en este trabajo utilizaremos ambos métodos para demostrar la misma fórmula y así observar sus diferencias.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$(p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$
V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F

1.3. Tipos de lógica modal y sus fórmulas

Antes de adentrarnos en los distintos tipos de la lógica modal, hay que destacar que la lógica es la ciencia formal que estudia los principios de la demostración y la inferencia válida, las falacias, las paradojas y la noción de verdad.

Vamos a presentar cinco elementos pero cabe destacar que si solo tuviéramos los cuatro primeros conjuntos de elementos tendríamos lo necesario para trabajar en la "lógica clásica proposicional", la cual hemos presentado en la introducción conceptual de este trabajo.

1. **Fórmulas atómicas:**

   Las fórmulas son los elementos más básicos de la lógica y están compuestas por el siguiente alfabeto.

   a) **Constantes proposicionales:** "$\perp$ e $\top$"
   $\top$ representara una tautología mientras que $\perp$ representa una contradicción.

b) **Variables proposicionales:** "$p, q, r, s \dots$"
Estas variables representan proposiciones básicas que pueden ser verdaderas o falsas pero nunca ambas simultáneamente.
Estas variables sirven de base sobre la cual se construyen proposiciones más complejas mediante el uso de los siguientes elementos.

2. **Conectivas de aridad 2:** "$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$"

   Gracias a estos podemos relacionar las distintas variables/constantes proposicionales. Estos son uno de los elementos principales en la lógica puesto que dependiendo del conector que usemos en cada situación, puede alterar la veracidad o falsedad de la fórmula.

3. **Conectiva de aridad 1:**"$\neg$"

   Si encontramos este símbolo antes de una variable proposicional estaremos estudiando la veracidad de la negación de dicha variable.

4. **Paréntesis**

   Los paréntesis nos ayudan a establecer un orden dentro de la fórmula, igual que con los conectores, los paréntesis pueden alterar el resultado final de la fórmula.

5. **Operadores modales.**$\Box$ $\Diamond$

   Estos operadores varían su significado dependiendo de la lógica modal que se este aplicando en cada momento, pueden estar relacionados a conceptos de conocimiento, tiempo, permiso...

Habiendo presentado ya todos los elementos de la lógica modal podemos llegar a una definición de lo que es una fórmula en la lógica modal.

Definición 1.1. *Dado un conjunto numerable Prop cuyos elementos se llaman variables proposicionales, llamamos fórmula,cuya longitud denotamos como long(), a lo siguiente:*

- *Si* $p \in Prop \cup \{\perp, \top\}$*, entonces p es una fórmula (de longitud 1).*
- *Si* φ, ψ *son fórmulas, entonces* $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi$ *son fórmulas (de longitud* $long(\varphi) + long(\psi) + 1$*)*

- *Si φ es una fórmula, entonces $\Box\varphi, \Diamond\varphi, \neg\varphi$ son fórmulas (de longitud $long(\varphi) + 1$)*

Denotamos como $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las fórmulas

Hay que añadir que podemos simplificar nuestro lenguaje utilizando como elementos primitivos las proposiciones y las conectivas $\Box, \wedge$ y $\neg$ y definiendo el resto de elementos a partir de estos tres a través de las siguientes equivalencias:
$\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi, \Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi, \bot := p \wedge \neg p, \top := \neg\bot$

Utilizando estas equivalencias podemos simplificar las demostraciones, en lugar de demostrar la implicación podremos recurrir a que tanto la negación como la unión están demostradas y por lo tanto la demostración de la implicación es obvia.Utilizando este proceso observamos que para demostrar que, por ejemplo, φ y ψ cumplen una propiedad solo necesitaríamos demostrar que $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \Box\varphi$ la cumplen.

Cabe notar que este proceso es un inducción sobre la longitud de la fórmula como vimos en la definición1.1

1.3.1. Distintos tipos de modalidades lógicas

Habiendo presentado las fórmulas tenemos que concretar cómo se forman las lógicas y cuáles son sus utilidades.
De manera informal, podemos definir una lógica como un conjunto de axiomas y normas que nos ayudan a estudiar la veracidad de las formulas que conforman un lenguaje.

Existe una variedad de lógicas modales, en estas el cambio que se produce es la "traducción"del operador modal, este cambio de traducción se utiliza para adaptarnos al aspecto de la fórmula en el que queramos estudiar su validez.

En la siguiente tabla expondremos algunas modalidades lógicas que no podemos dejar olvidadas pero que por el limite de extensión del trabajo no podremos profundizar en ellas, cabe destacar que dentro del apartado de ejemplos utilizaremos p como "llover"("ponerse las botas" en deónticas) y q denotará a la proposición "salir el sol".

Modalidad	Operador	Ejemplo de fórmula
Alética	$\Box$ ≡"Es necesariamente cierto que..." $\Diamond$ ≡ "Es factible/posible que..."	$\Box$p≡ "Es necesariamente cierto que llueva" $\Diamond$p≡"Es posible/contingentemente cierto que llueva"
Temporal (Arthur Prior 1950)	F≡ "cierto en algún momento futuro" G≡ "cierto a partir de ahora" P≡ "ha sido cierto.." H≡ cierto siempre hasta ahora	Fp≡"En un futuro lloverá" Gp≡"Lloverá a partir de ahora" Pp≡"Es cierto que ha llovido" Hp≡ "Hasta ahora siempre ha llovido"
Epistémicas/Doxáticas (Hintikka 1962)	B≡ Creencia K≡ Conocimiento	Bp≡ "Creo que llueve" Kp≡ "Sé que llueve"
Deónticas (Von Wright 1951)	O≡ obligación F≡ prohibición P≡ permiso	Op≡ "Estas obligado a ponerte las botas" Fp≡"Tienes prohibido ponerte las botas" Pp≡" Se te permite ponerte las botas"

Cuadro 1.1: Modalidades con sus respectivos operadores de la lógica

1.4. Lógica epistémica

Como se ha comentado en la introducción histórica, el estudio de la lógica modal comienza en los tiempos de Aristóteles, pero si hablamos de la lógica epistémica tenemos que avanzar al siglo XX en el que Clarence Irving Lewis abordó este tema desde el punto de vista simbólico y sistemático.Hintikka es reconocido como el fundador de la lógica epistémica. Hintikka continuo desarrollando la lógica epistémica apoyándose en los avances realizados por Kripke. Por ejemplo creó una semántica análoga a la semántica de los marcos Kripkeanos.

La lógica epistémica se centra en estudiar aspectos como el conocimiento y la creencia dentro de las formulas.
Los operadores modales de esta lógica son:
Operador de Conocimiento (K): Este operador indica el conocimiento de la veracidad de la fórmula.
Ejemplo: Kφ se podría traducir como "Sé que φ es cierto"

Por otro lado podemos definir el operador dual $\hat{K}$, este operador representa el desconocimiento sobre la falsedad de la fórmula.
Podemos reescribir el operador $\hat{K}$ respecto a K como : $\hat{K}\varphi$=¬K¬φ
Operador de Creencia(B):Este operador a su vez indicaría la creencia de que la fórmula es cierta en el mundo real.
Ejemplo:$\Diamond\varphi$ se podría traducir como "Creo que φ es cierto"
De igual manera que con el operador $\hat{K}$ podemos definir $\hat{B}$ como el operador dual de B.
Al igual que con los operadores de conocimiento se puede establecer la misma equivalencia entre los operadores de creencia: $\hat{B}\varphi$=¬B¬φ

La lógica epistémica más importante es S4, esta lógica será presentada en el capítulo 3.Cabe destacar que la lógica epistémica se suele usar como la lógica de las propiedades del conocimiento. La importancia de la lógica epistémica también radica de su conexión con la topología. La topología nos permite modelar la incertidumbre epistémica.

Capítulo 2

Modelos para la lógica modal

2.1. El lenguaje de la lógica

En la sección anterior hemos definido lo que es una fórmula,de la cual la lógica estudia su veracidad. A partir de las fórmulas podemos definir la lógica asociada a un conjunto de formulas.

Definición 2.1. *Llamando $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las fórmulas, llamamos lógica a cualquier conjunto de fórmulas, L$\subseteq \mathcal{L}$.(Según definición1.1)*

A partir de la definición de lógica podemos definir el concepto de *lógica modal normal*.

Definición 2.2. *Una lógica L se llama lógica modal normal si cumple.*

- *Todas las instancias de tautologías de la lógica clásica proposicional (sección 1.2) están en L, es decir para cualesquiera fórmulas $\varphi, \theta, \psi \in \mathcal{L}$:*

  1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \in L$

2. $(\varphi \wedge \psi \to \theta) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)) \in L$

3. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) \in L$

- *Contiene todas las instancias del axioma K:*
  $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \in \mathcal{L}$*,* $\forall \varphi, \psi \in L$

- *Es cerrada bajo las reglas modus ponens y necesidad:*

  1. *Si* $\varphi \to \psi, \varphi \in L$*, entonces* $\psi \in L$*.*
  2. *Si* $\varphi \in L$*, entonces* $\Box\varphi \in L$*.*

En este punto nos podríamos hacer la pregunta de ¿qué formas tengo de determinar computablemente si una fórmula φ?
La respuesta nos la encontramos en los métodos de demostración sintáctico y semántico, que serán desarrollados en el capítulo 3.

2.2. Modelos relacionales,veracidad y validez de las fórmulas

Los modelos son las estructuras donde vamos a estudiar las características de veracidad y validez de cualquier fórmula, pero antes de definir la terna que lo compone, definiremos una estructura más básica de la que después podremos obtener la definición de modelo relacional.

Definición 2.3. *Un marco es una estructura* $F = \langle W, R \rangle$ *conformada por :*

- W*: es un conjunto no vacío que representa el conjunto de elementos o "mundos". Estos mundos son los puntos respecto a los cuales estudiaremos si se cumple la fórmula* φ *o no.*

- *R: Es una relación binaria en* W*, que se utiliza para representar las relaciones modales. La relación R se utiliza para definir la conectividad entre los diferentes estados posibles en* W*. En nuestro contexto los operadores modales se definen en referencia a la relación binaria.*

Dependiendo de la modalidad lógica en la que estemos trabajando podremos ver como la interpretación de la relación R cambia. Por ejemplo en la lógica temporal podemos ver R como una linea de tiempo, por otro lado en la lógica epistémica R representa la incertidumbre. Habiendo definido lo que es un marco podemos alcanzar la estructura de modelo relacional.

Definición 2.4. *Un modelo relacional es una estructura* $M = \langle W, R, V\rangle$ *compuesta por:*

- *Un marco* $F = \langle W, R\rangle$.
- V*:Una función a la que llamamos valuación que asigna a cada letra proposicional un subconjunto de W.*

$$V : Prop \to \mathcal{P}(W).$$

Utilizaremos esta valuación para estudiar la veracidad de las fórmulas, también veremos que la validez no deja de ser un concepto extendido de la veracidad a un modelo.

Definición 2.5. *Decimos que en un modelo* $M = \langle W, R, V\rangle$ *una fórmula* $\varphi \in \mathcal{L}$ *es cierta en* $x \in W$ *(denotado* $M, x \models \varphi$*) si [14]:*

1. $M, x \models p \iff x \in V(p)$
2. $M, x \models \top\ \forall x \in W$
3. $M, x \not\models \bot\ \forall x \in W$
4. $M, x \models \neg\varphi \iff M, x \not\models \varphi$
5. $M, x \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \iff M, x \models \varphi_1$ *y* $M, x \models \varphi_2$
6. $M, x \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \iff M, x \models \varphi_1$ *o* $M, x \models \varphi_2$
7. $M, x \models (\varphi_1 \to \varphi_2) \iff M, x \not\models \varphi_1$ *o* $M, x \models \varphi_2$
8. $M, x \models \Box\varphi \iff$ *para cada* $x' \in W$ *tal que* $xRx', M, x' \models \varphi$

9. $M, x \models \Diamond\varphi \iff$ *existe* $x' \in W$ *tal que* xRx' *y* $M, x' \models \varphi$

Cabe destacar que estamos definiendo la veracidad de una fórmula φ *en* x *por inducción sobre la longitud de la propia fórmula.(Utilizando definición1.1)*

Con todo esto podemos decir que un punto del modelo satisface una fórmula φ si esa fórmula es verdadera en el punto.
Podemos definir entonces el conjunto $V(\varphi)$ como el conjunto de puntos donde la fórmula φ es verdadera :

$$V(\varphi) := \{w \in W : M, w \models \varphi\}$$

Observación 2.1. *La definición de* $V(\varphi)$ *dada anteriormente es una extensión de* V *a todo* $\mathcal{L}$ *utilizando las propiedades:*

- $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \wedge V(\psi)$
- $V(\neg\varphi) = W \backslash V(\varphi)$
- $V(\Box\varphi) = \{x \in W : xRy \to y \in V(\varphi)\}$

A partir del estudio que hemos realizado de la veracidad de una proposición en un punto del modelo, podemos obtener sin muchos problemas la definición de validez en un modelo.

Definición 2.6. *Diremos que la fórmula* φ *es válida en un modelo* $M = \langle W, R, V\rangle$ *si es verdadera en todo punto del modelo* M*, equivalentemente si se cumple que* $V(\varphi) = W$*.*
Utilizando la relación que hay entre marco y modelo podemos de igual forma decir que una formula φ *es válida en un marco* F *si la formula es válida en cualquier modelo de la forma* $M = \langle W, R\rangle$ *con* V *una valuación cualquiera.*

Para ver más claro los modelos podemos utilizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. *Supongamos que está soleado en Oviedo y una persona esta en Oviedo.Esta persona sabe que llueve en Oviedo, pero no sabe si hace sol o no en Gijón.Entonces, la persona considera las siguientes posibles situaciones.*

1. *A:Está lloviendo en Oviedo y está soleado en Gijón.*
2. *B:Está lloviendo en Oviedo y no esta soleado en Gijón*

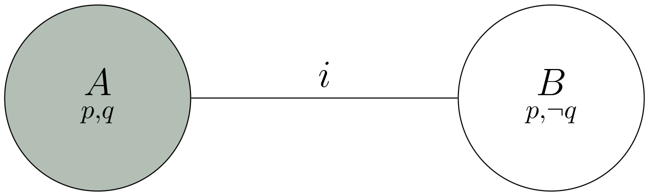
Habiendo presentado el contexto podemos definir las siguientes proposiciones.

1. *p="Está lloviendo en Oviedo"*
2. *q="Hace sol en Gijón"*

La incertidumbre de i surge respecto a si hace sol o no en Gijón y se puede representar a través de un modelo $M = \langle W, R, V \rangle$ *con :*

- *W=*$\{A,B\}$
- *R=*$\{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$
- *V(p)=*$\{A,B\}$ *y V(q)=*$\{A\}$

Podremos representar el modelo M gráficamente de la siguiente manera:



Si denotamos como w el mundo donde se describe la situación real tenemos que:

- $(M, w) \models Kp$ *La persona sabe que esta lloviendo en Oviedo ya que en los dos mundos posibles A y B en Oviedo llueve por lo que la proposición p es verdadera.*
- $(M, w) \models \neg Kq \wedge \neg K\neg q$ *La persona no sabe si en Gijón está soleado pero es posible que lo este, ya que en uno de los mundos se cumple q pero en el otro no.*

Capítulo 3

Sintaxis y canonicidad

3.1. Lógicas modales

En este apartado podremos caracterizar las distintas lógicas, las cuales se definen en base a axiomas y normas. En este trabajo pondremos el foco en la lógica que trabaja los marcos reflexivos y transitivos "S4", y para definir la misma utilizaremos otras lógicas mas sencillas.
En el capítulo anterior definimos el concepto de lógica modal normal. La lógica resultante de la intersección del resto de lógicas reciba el nombre de "lógica modal mínima".Esta lógica admite también el nombre de lógica K.
A partir de la lógica K podemos definir la lógica S4 como la lógica que cumple:

- Es una lógica modal normal (es decir contiene a K)
- Contiene todas las instancias de los axiomas de reflexividad y transitividad:
  $\Box\varphi \to \varphi \in$S4 y $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi \in$S,$\forall\varphi \in \mathcal{L}$

De misma forma podemos definir la lógica S5 a partir de S4 como la lógica que cumple:

- Contiene a S4
- Contiene todas las instancias del axioma de simetría: $\Box(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi) \in$S5 $\forall\varphi \in \mathcal{L}$

En la siguiente tabla presentaremos las distintas lógicas entendiendo que toda lógica tiene, además de las normas y axiomas que aparezcan directamente, las de las lógicas nombradas anteriormente

Lógica	Axiomas	Normas
Clásica Proposicional	1.$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ 2.$(\varphi \wedge \psi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$ 3.$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	Modus Ponens: Si φ y $\varphi \rightarrow \psi$ son teoremas entonces ψ es teorema
Modal mínima (K)	Axiomas de LCP Axioma K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$	Modus Ponens Necesidad: Si φ es teorema entonces $\Box\varphi$ lo es
S4	Axiomas de la lógica K Reflexividad: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ Transitividad: $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	Modus Ponens Necesidad
S5	Axiomas de S4 Simetría: $\Box(\varphi \rightarrow \Diamond\varphi)$	Modus Ponens Necesidad

Cuadro 3.1: Tipos de lógicas

3.2. Teoremas y demostraciones de proposiciones

Definición 3.1. *Dada una lógica modal normal L, llamamos teoremas de L a los elementos del conjunto L.*

Para determinar si una fórmula φ es un teorema de L, conociendo los axiomas de reglas de inferencia que componen L, basta ver si φ es producto de una derivación o demostración, es decir si existe una cadena de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n = \varphi$ donde toda φ_i es o bien un axioma o bien el resultado de aplicar una regla de derivación a las anteriores. Lo descrito anteriormente es el método sintáctico para hallar si $\varphi \in$L.

Existe otro método llamado método semántico que por su parte nos permite afirmar que $\varphi \in$L si φ es válida en una clase de modelos con respecto a la cual la lógica L es sólida y completa.

Si enfrentamos esas dos formas de estudiar la verdad de fórmulas podemos observar algunas diferencias como:

- El método semántico se preocupa por entender en qué condiciones la proposición es cierta. El método sintáctico se centra en la forma y estructura de las expresiones lógicas y en la manipulación de símbolos con las reglas sintácticas.
- Mientras que el método sintáctico usa reglas y derivaciones, para simplificar las fórmulas,el método semántico directamente estudia la veracidad de la proposición.
- El método semántico utiliza herramientas como los modelos semánticos,árboles de verdad y lógica de los mundos posibles para analizar la validez de las formulas mientras que el método sintáctico se apoya únicamente en las reglas sintácticas o de derivación,los axiomas y los teoremas.

Para contraponer ambas vertientes estudiaremos la veracidad de la fórmula $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$ a través tanto del método semántico como del método sintáctico.

Método sintáctico:
En cada punto nombraré que se ha usado. Al ser un si y solo si se demostrará en 2 partes.
1º.$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$

1. Hipótesis: $(\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

2. Descomposición de las hipótesis: $\begin{cases} \Box\varphi \\ \Box\psi \end{cases}$

3. Axioma K: $\Box(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box(\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$

4. Teorema de la LCP:$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$ (Afirmación 3.2.1)

5. Aplicando necesidad:$(\Box(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))))$

6. Aplicando el axioma K:$(\Box(\varphi \rightarrow \Box(\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))))$

7. Sabiendo que $\Box\varphi$ y $(\Box(\varphi \rightarrow \Box(\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))))$ aplicando Modus Ponens obtenemos: $\Box(\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

8. Aplicando el axioma K:$\Box\psi \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$

9. Sabiendo que $\Box\psi$ y $\Box\psi \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$ aplicando Modus Ponens inferimos: $\Box(\varphi \wedge \psi)$ que era lo que queriamos demostrar.

2.$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$

1. Hipótesis: $\Box(\varphi \wedge \psi)$

2. Expresamos la intersección como implicaciones para usar el axioma K: $\Box(\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi)$ y $\Box(\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi)$

3. Aplicando el axioma K obtenemos:
$\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi$ y $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\psi$

4. Usando Modus Ponens con las fórmulas anteriores y la fórmula de hipótesis obtenemos: $\Box\varphi$ y $\Box\psi$ o lo que es lo mismo $\Box\varphi \wedge \Box\psi$

Afirmación 3.2.1. *La fórmula* $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$ *es un teorema de la LCP*

Demostración:

1. Hipótesis:
$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

2. Usamos la equivalencia entre la unión y la implicación:
   $\varphi \rightarrow (\neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi))$

3. Usamos la equivalencia entre la unión y la implicación:
   $\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi))$

4. Reagrupamos para concluir más facilmente que estamos ante una tautología:
   $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \top$

Método semántico:

Para demostrar la veracidad de la fórmula a través del método semántico debemos tomar un modelo reflexivo y transitivo y un punto x del modelo, con esto tenemos que ver que si $M, x \models \Box\varphi \wedge \Box\psi$ entonces probaremos que $M, x \models \Box(\varphi \wedge \psi)$.

A través de $M, x \models \Box\varphi \wedge \Box\psi$ obtenemos que en el punto x $\Box\varphi \wedge \Box\psi$ se cumple, por la intersección sabemos que en x se cumplen $\Box\varphi$ y $\Box\psi$. Pues que el operador modal $\Box$ se usa para hablar de los sucesores de las fórmulas podemos llegar a que, en el punto x se cumplen los sucesores de φ y los sucesores de ψ. Por esto resulta obvio que en el punto x se cumplen las fórmulas que son sucesoras tanto de φ como de ψ. Esto se puede ver como $M, x \models \Box(\varphi \wedge \psi)$. Con lo que quedaría probada la implicación. La implicación inversa resulta análoga.

Observación 3.1. *Esta demostración a través del método semántico se puede llevar a cabo puesto que vamos a ver que:*

φ demostrable en S4 $\Leftrightarrow$ φ es válida en todos los modelos reflexivos y transitivos

En resumen,el método semántico se centra en la relación entre el lenguaje y el mundo utilizando herramientas semánticas para entender el significado de las formulas y su veracidad,por otro lado el método sintáctico se enfoca en la manipulación de símbolos según reglas sintácticas para encontrar nuevas expresiones y así demostrar propiedades lógicas.Estos dos enfoques se complementan y se usan a la vez para conseguir un estudio completo de la lógica.

3.3. S4 es la lógica de los modelos reflexivos y transitivos

La demostración de que S4 es la lógica de los modelos reflexivos y transitivos tiene dos partes puesto que tenemos que probar tanto la solidez como la completud del mismo, primero definiremos cada característica y a continuación se probará.

Definición 3.2. *Llamando Log($\mathcal{C}$) al conjunto de fórmulas que son válidas en todos los modelos que componen la clase $\mathcal{C}$, decimos que L es solida respecto a $\mathcal{C}$ si todo teorema de L es valido en $\mathcal{C}$, es decir si $L \subseteq Log(\mathcal{C})$*

Proposición 3.1. *S4 cumple la condición de solidez respecto a la clase de modelos reflexivos y transitivos.*

Demostración:

Basta ver que los axiomas de S4 y las normas Modus Ponens y Necesidad son válidos en cualquier modelo reflexivo y transitivo.
Sea $M = (W, R, V)$ un modelo tal que R es reflexiva y transitiva y sea $x \in W$ comprobemos que:

1. $x \models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ Este axioma ha sido probado anteriormente a través del método sintáctico y semántico.

2. $x \models \Box\varphi \to \varphi \; \forall\varphi$
   Para ver que el axioma se cumple basta tener en cuenta que todo punto del modelo es "sucesor"de si mismo por ser un modelo reflexivo, entonces como $\Box\varphi$ nos indica que φ se cumple para todo sucesor del w en el que estemos y todo punto es sucesor de si mismo podemos concluir que se cumple φ en w.

3. $x \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
   Para ver que el axioma se cumple basta tener en cuenta la condición de transitividad del modelo. Partiendo desde un mundo inicial w, $\Box\varphi$ exige que φ se cumpla en todo mundo sucesor (w') de w, tenemos que probar que φ es cierto en los sucesores de w'.Por transitividad tenemos que al estar relacionado w con w' y w' con sus sucesores podemos asegurar que w esta relacionado con los sucesores de w', por lo que podemos decir que φ se cumple en los sucesores de w' y quedaría probado el axioma.

4. Si $M \models \varphi, M \models \varphi \to \psi \Rightarrow M \models \psi$
   La demostración de este apartado es inmediata si tenemos en cuenta que la implicación $\varphi \to \psi$, se puede ver como $\neg\varphi \vee \psi$. Teniendo en cuenta que tanto $\varphi \to \psi$ como φ son válidas, podemos concluir que ψ es válida.

5. $M \models \varphi \to M \models \Box\varphi$
   Esta demostración es trivial puesto que si $\Box\varphi$ significa que φ se cumple en todos los mundos accesibles y esto se cumple utilizando la hipótesis de $M \models \varphi$

3.3.1. Resultados auxiliares para la completud

Antes de proceder con la completud del resultado enunciaremos y demostraremos unos resultados que nos serán necesarios para la demostración de la propiedad.

Definición 3.3. *Dada una lógica normal modal L, un conjunto de fórmulas A$\subseteq \mathcal{L}$ se dice L-inconsistente (o simplemente inconsistente si no hay lugar a ambigüedad)si existen fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n \in A$ tales que $\neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \in L$.*

Definición 3.4. *Dada una lógica normal modal L, un conjunto de fórmulas A$\subseteq \mathcal{L}$ se dice L-consistente (o simplemente consistente) si no es L-inconsistente.*

Observación 3.2. *Utilizando la definición anterior y la norma modus ponens obtenemos que la lógica L es L-consistente si y solo si $\perp \notin L$*

Definición 3.5. *Dada una lógica normal modal L, un conjunto de fórmulas A$\subseteq \mathcal{L}$ se dice maximalmente consistente (CMC) si es consistente y no existen superconjuntos propios suyos que sean consistentes:*

A CMC si y solo si A consistente y $\forall B \supsetneq A : B$ *inconsistente*

Lema 3.1. *Sea L es una lógica modal normal sin contradicciones.Si un conjunto* $X \subseteq \mathcal{L}$ *es L-consistente, entonces para cualquier fórmula* φ*,o bien* $X \cup \{\varphi\}$ *o bien* $X \cup \{\neg\varphi\}$ *es consistente.*

Demostración:

S.p.g supongamos que $X \cup \{\varphi\}$=A es inconsistente,por la definición 3.3 existen $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, \varphi \in$A tales que $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n \wedge \varphi) \in L$, hemos de notar que $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n \wedge \varphi) \equiv \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n \rightarrow \neg\varphi$ con $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n \in X$ con X un conjunto consistente. Por otro lado tenemos que $X \cup \{\neg\varphi\}$ tiene que ser un conjunto consistente, puesto que si no fuese así por la definición 3.3 tendríamos que $\exists\theta_1, ..., \theta_m$ tales que $\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_m \rightarrow \{\neg\neg\varphi\} \in L$.
Pero si se cumple esto podemos aplicar modus ponens para ver que:

$$L \ni \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n \wedge \theta_1 \wedge ... \wedge \theta_m \rightarrow \varphi \wedge \neg\varphi = \perp$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\neg(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n \wedge \theta_1 \wedge ... \wedge \theta_m) \in L$$

Esto implicaría que X es inconsistente lo que entra en contradicción con la hipotesis de X consistente.

Proposición 3.2. *Sea L una lógica modal normal. Un conjunto maximalmente L-consistente A verifica los siguientes puntos:*

1. $\varphi \wedge \psi \in A$ *si y solo si* $\varphi \in A$ *y* $\psi \in A$
2. *Para toda fórmula* φ*, o bien* $\varphi \in A$ *o bien* $\neg\varphi \in A$*, pero no las dos.*
3. $\varphi \vee \psi \in A$ *si y solo si o* $\varphi \in A$ *o* $\psi \in A$
4. $L \subseteq A$
5. *En el caso de que L=S4, si* $\Box\varphi \in A$ *entonces tanto* $\varphi \in A$ *como* $\Box\Box\varphi \in A$

Demostración:

1. $\Leftarrow$)Para esta demostración supongamos por reducción al absurdo que $\varphi \wedge \psi \notin$A. Con esta hipótesis podemos construir el conjunto B=A$\cup\{\varphi \wedge \psi\}$, claramente B no es conjunto consistente puesto que A$\subset$B y A es CMC. Utilizando la inconsistencia de B podemos asegurar la existencia de L:$\exists \psi_1, ..., \psi_n \in$B con $\neg(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) \in$L (Por la definición 3.3). Llegados a este punto solo tendríamos dos opciones:

   - Todas las ψ_i pertenecen a A:
     Esto provocaría que A cumpliese la definición de inconsistencia, pero esto entra en contradicción con la hipótesis de consistencia de A.
   - Se cumple que una de las fórmulas ψ_i es idénticamente $\varphi \wedge \psi$:
     Esto provocaría una contradicción con la misma hipótesis que en el caso 1, puesto que tenemos que $\neg(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) \in$L y a su vez $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_i (= \varphi \wedge \psi), ..., \psi_n \in$A obtendríamos que A es inconsistente.

   $\Rightarrow$) Para esta demostración supongamos por reducción al absurdo y sin perdida de generalidad que $\varphi \notin$A. Con esta hipótesis podemos construir el conjunto B=A$\vee\{\varphi\}$, claramente B no es conjunto consistente puesto que A$\subseteq$B y A es CMC. Utilizando la inconsistencia de B podemos asegurar la existencia de L:$\exists \psi_1, ..., \psi_n \in$A con $\neg(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n \wedge \varphi) \in$L (Por la definición 3.3).Por esto tenemos que $(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n \rightarrow \neg\varphi) \in L$, ahora usando que $\neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ es una tautología tenemos que $(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n \rightarrow \neg(\psi \wedge \varphi)) \in L$, utilizando la equivalencia de la implicación tenemos que $\neg(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n \wedge (\psi \wedge \varphi)) \in L$ con lo que obtendríamos que A es inconsistente, lo que entra en contradicción con la hipótesis de consistencia de A.

2. Consecuencia del lema 3.1. y de la maximalidad de A.

3. Tomamos $(\varphi \vee \psi) \in$A$\Leftrightarrow$ $\neg(\varphi \vee \psi) \notin$A$\Leftrightarrow$ $\neg\varphi \wedge \neg\psi \notin$A$\Leftrightarrow$o $\neg\varphi \notin$A o $\neg\psi \notin$A$\Leftrightarrow$ $(proposición 3{,}2{,}2)\varphi \in$A o $\psi \in$A

4. Supongamos por reducción al absurdo que existe una fórmula $\varphi \in$L que no pertenece a A,el conjunto A$\cup\{\varphi\}$ es inconsistente por ser A un CMC. Esto implica que φ entra en contradicción con las fórmulas de A. Esto implica que $\neg\varphi \in$A (proposición 3.2.2) pero esto contradice la hipótesis de que A es consistente.En conclusión φ tal que $\varphi \in$L y no pertenece a A, lo que implica que L$\subseteq$A.

5. Obvio por los axiomas de S4

Lema 3.2. *(Lema de Lindenbaum)[15]*
Un conjunto consistente puede ser extendido a un conjunto maximalmente consistente.

Demostración:

Sea $X \subseteq \mathcal{L}$ un conjunto L-consistente.Notamos que hay una cantidad numerable de fórmulas en el lenguaje, y las enumeramos $\mathcal{L} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\}$. Utilizando el lema 3.1 definimos recursivamente una cadena de conjuntos consistentes

$$X = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq ... \subseteq X_n \subseteq ...$$

tal que, para todo i, o bien φ_i o bien $\neg\varphi_i$ pertenecen a X_{i+1}. Lo hacemos de la siguiente forma: $X_0 := X, X_{n+1} := \begin{cases} \mathrm{X}_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ si } X_n \cup \{\varphi_n\} consistente \\ X_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\} \text{ si no} \end{cases}$
Notamos que $X^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un conjunto consistente (porque si fuese inconsistente,uno de los X_n tendría que ser inconsistente) que contiene a $X_0 = X$.Además es maximalmente consistente porque si $B \supsetneq X^*$, entonces sea $\varphi_n \in B\backslash X^*$.Como $\varphi_n \notin X^*$, entonces por construcción $\neg\varphi_n \in X_{n+1} \subseteq B$,luego $\varphi, \neg\varphi \in B$ y es por tanto inconsistente. X^* es por tanto el conjunto buscado.

Definición 3.6. *Definimos el modelo canónico M,como el modelo $\langle X, R, V\rangle$ tal que:*

- *X={Conjuntos maximalmente consistente}*
- *R: relación tal que si $xRy \Leftrightarrow \forall\varphi$ tal que $\Box\varphi \in x \Rightarrow \varphi \in y$*
- *V(p)=$\{x \in X : p \in x\}$*

Lema 3.3. *Lema de existencia.*
Si X es un conjunto maximalmente consistente y $\Diamond\varphi \in X$, existe un CMC Y con XRY y $\varphi \in Y$.

Demostración:

Supongamos que $\Diamond\varphi \in X$.Construiremos el conjunto Y de forma que XRY y $\varphi \in Y$. Sea $Y' = \{\varphi\} \cup \{\psi|\Box\psi \in X\}$. De esta forma Y' es consistente.Supongamos que no,utilizando la definición 3.3 podemos afirmar que existen $\theta_1, ..., \theta_n \in Y'$ tal que $\neg(\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n) \in L$.Suponiendo la inconsistencia de Y' tenemos dos posibles casos:

1. $\theta_1, ..., \theta_n$ cumplen que $\Box\theta_i \in X$
   En este caso tendríamos que $\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n \rightarrow \perp \in L$.Ahora aplicando la norma de necesidad, el axioma K y la propiedad distributiva de $\Box$ respecto al conector $\wedge$ obtendríamos que $\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n \rightarrow \Box \perp \in L$. Utilizando esta última fórmula junto a la hipótesis de $\Box\theta_i \in X$, podemos aplicar la norma modus ponens obteniendo que $\Box \perp \in X$, puesto que trabajamos en la lógica S4 tenemos el axioma de reflexividad por lo que es claro que $\perp \in X$, lo que entra en contradicción con X conjunto maximalmente consistente.

2. $\Box\theta_i \in X$ para $i = 1, ..., n-1$ y $\theta_n = \varphi$
   En este caso tendríamos que $\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n \rightarrow \neg\varphi \in L$ .Aplicando de nuevo la norma de necesidad, el axioma K y la propiedad distributiva de $\Box$ respecto al conector $\wedge$ obtendríamos que $\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n \rightarrow \Box\neg\varphi \in L$, utilizando que $\Box\neg\varphi = \neg\Diamond\varphi$ resulta en que $\Box\theta_1 \wedge ... \wedge \Box\theta_n \rightarrow \neg\Diamond\varphi \in L$. Esto provoca que X es inconsistente puesto que por hipótesis $\Diamond\varphi \in X$

Definición 3.7. *Llamando Log($\mathcal{C}$) al conjunto de fórmulas que son válidas en todos los modelos que componen la clase $\mathcal{C}$, decimos que L es completa respecto a $\mathcal{C}$ si todo fórmula que sea válida en todos los modelos de $\mathcal{C}$ es teorema de L , decir si Log($\mathcal{C}$) $\subseteq$L.*

Proposición 3.3. *S4 cumple la condición de completud respecto a la clase de modelos reflexivos y transitivos.*

Demostración:

Para demostrar la completud necesitamos ver que si tomamos un φ que se cumple en todo punto del modelo (X,R) $\Rightarrow \varphi$ es demostrable en S4.

En lugar de demostrar esto procederemos a probar el contrarrecíproco es decir, veremos que se cumple que si φ es indemostrable $\Rightarrow \exists$ algún modelo donde φ no se cumple.
Para demostrar esto probaremos previamente que $\forall\varphi$ se cumple que si φ es consistente $\Rightarrow \exists$ algún modelo con un punto en el que se verifica φ. Si probamos esto la demostración se basará en utilizar que si φ es indemostrable $\Rightarrow \neg\varphi$ es consistente $\Rightarrow \exists$ algún modelo donde se verifica $\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ no es valido $\equiv \exists$ algún modelo donde φ no se cumple.
Tomamos φ una fórmula consistente. Utilizando el Lema de Lindenbaum podemos asegurar que existe un conjunto maximalmente consistente que contiene a φ.
Ahora tomando el modelo canónico (X,R,V) definido en la definición 3.6.

Para trabajar en los modelos con relaciones reflexivas y transitivas necesitamos probar estas propiedades para la relación del modelo canónico.

1. Reflexividad:
   Esta propiedad es trivial puesto que si $\Box\varphi \in x$ donde x es un conjunto maximalmente consistente es obvio, puesto que $\Box\varphi \to \varphi \in S4 \subseteq X$ luego, como tanto $\Box\varphi \to \varphi$ como $\Box\varphi$ pertenecen a x, aplicando el Modus Ponens obtenemos que $\varphi \in x$ con lo que hemos probado que xRx

2. Transitividad:
   Tomando $x, y, z \in X$, nuestras hipótesis son que xRy e yRz, necesitamos probar que $\forall\varphi$ tal que $\Box\varphi \in$x$\Rightarrow \varphi \in$z. Tomamos φ tal que $\Box\varphi \in$x, por el axioma 2 de S4 tenemos que $\Box\Box\varphi \in X$, utilizando que xRy obtenemos que $\Box\varphi \in y$ y de nuevo aplicando por hipótesis que yRz concluimos que $\varphi \in z$ con lo que probamos que xRz.

Como ultimo paso de la demostración tomamos la valuación V y vamos a demostrar el lema de verdad.

Lema 3.4. *Lema de verdad:[16]*
Para todas las formulas modales φ se cumple que $\forall x \in X$:

$$x \models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in X$$

Demostración:

La demostración de este lema se realiza por inducción sobre la longitud de la fórmula. Hay que destacar que $\vee$ y $\rightarrow$ se pueden definir a partir de $\wedge$ y $\neg$

1. φ=p : x$\models$p$\Leftrightarrow$x$\in$V(p)=$\{$y:p$\in$y$\}$$\Leftrightarrow$p$\in$x
2. φ=$\varphi_1\wedge\varphi_2$: x$\models \varphi$ $\Leftrightarrow$x$\in$V(φ)$\equiv$V($\varphi_1\wedge\varphi_2$)=$\{$y:φ_1 $\in$y$\}\wedge\{$y:φ_2 $\in$y$\}$$\Leftrightarrow$$\varphi_1$ $\in$x y φ_2 $\in$x $\Leftrightarrow$ φ $\in$x
3. φ=$\neg\varphi_1$:x$\models$ φ $\Leftrightarrow$x$\in$V(φ)$\equiv$V($\neg\varphi_1$)=$\{$y:$\neg\varphi_1$ $\in$y$\}$$\Leftrightarrow$ φ_1 $\notin$X$\Leftrightarrow$ $\neg\varphi_1$ $\in$X (por ser en nuestro contexto X CMC)$\Leftrightarrow$ φ $\in$X
4. φ=$\Box\varphi_1$:x$\models$ φ $\Leftrightarrow$ $\forall$y: xRy,y$\models$ φ_1(Aplicando hipótesis de inducción)$\Leftrightarrow$ $\forall$y:xRy:φ_1 $\in$y$\Leftrightarrow$ $\Box\varphi_1$ $\in$x (utilizando el lema de existencia)

Habiendo demostrado estos apartados podemos concluir que la doble implicación se cumple para cualquier fórmula modal φ, esto se da debido a que podemos ir aplicando sucesivamente los apartados del 1 al 6 para ir reduciendo la fórmula, hasta llegar propiamente a uno de los 6 apartados.

Aplicando el lema de verdad obtenemos al fin que :

$$\text{x}\models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in\text{x}$$

Con todo estos resultados podemos demostrar la completud, puesto que tomando el φ consistente tenemos por el lema de Lindenbaum que existe un conjunto maximalmente consistente x tal que $\varphi \in x$ .Utilizando ahora la definición de modelo canónico que hemos tomado podemos asegurar, que en el modelo canónico, existe un punto x tal que φ $\in$x.Por último aplicando el lema de verdad, sabiendo que el modelo canónico cumple que la reflexividad y transitividad, obtenemos que existe un x en un modelo reflexivo y transitivo tal que x$\models$ φ.

Con todo esto llegamos a la conclusión de que si tenemos una fórmula φ consistente podemos asegurar la existencia de un modelo reflexivo y transitivo que satisface la formula en un punto.
Este resultado será el mas importante en todo el trabajo puesto que a partir de él podremos llegar a generalizar que S4 es la lógica de los espacios topológicos.

Capítulo 4

Modelos topológicos

4.1. Introducción

Llegado este punto nos preguntamos,¿por qué es útil la topología en el estudio de la lógica modal epistemológica?.
Existen dos vertientes de desarrollo que tratan de conectar la lógica modal epistemológica con la topología. La primera esta basada en el trabajo con los interiores de McKinsey y el lenguaje de la lógica modal básica de McKinsey y Tarski. En esta semántica establecen una relación entre los operadores modales y los abiertos de las topologías.
La otra vertiente fue investigada por Moss y Parikh, estos introdujeron la topología basada en los espacios bimodales. sus investigaciones tienen una fuerte motivación desde el punto de vista de la lógica epistemológica sugiriendo que "los aspectos simples de la topología están conectadas con las lógicas del conocimiento".

4.2. Semántica en un modelo topológico

Habiendo ya presentado los elementos propios de la rama de la lógica, las distintas modalidades y el resultado el cual nos da una condición para saber aquella lógica propia de los modelos reflexivos y transitivos, vamos a transicionar todos estos conocimientos hasta el área de la topología.
En la sección anterior hemos demostrado que S4 es la lógica de la clase de modelos

$$\{(\text{X,R}) : \text{R es reflexiva y transitiva}\}$$

Para hablar con conceptos topológicos, lo primero que deberíamos hacer es definir cual será nuestro espacio topológico y la topología de este.
Denotaremos como $T = (X, \tau_R)$ al espacio topológico conformado por X el espacio total y τ_R la topología inducida por una relación R y la podemos definir como:

$$\tau_R \equiv \{A \subseteq X\colon si\ x \in A\ y\ xRy \Rightarrow y \in A\}$$

Con esta definición de la topología inducida por una relación podemos obtener varias propiedades.

Definición 4.1. *Se denomina topología de Alexandroff como la topología que cumple que toda intersección de cualquier familia de conjuntos abiertos es abierta.*

Proposición 4.1. *Sea (X, R) un marco reflexivo y transitivo. Se verifica que (X, τ_R) es una topología de Alexandroff.*

Demostración:

Tenemos que probar que τ_R cumple los dos primeros axiomas de la definición de topología y sustituiremos el axioma de la intersección finita con la propiedad de la topología de Alexandroff.

1. $X, \emptyset \in \tau_R$
   Por como hemos definido τ_R se tiene que $X, \emptyset \in \tau_R$.

2. $\{A_i | i \in I\} \subseteq \tau_R \Rightarrow \underset{i \in I}{\cup} A_i \in \tau_R$
   Tenemos que ver que la condición de la topología se cumple para la unión infinita, tomo un elemento de la unión cualquiera, y un y tal que xRy, ¿se puede concluir que y pertenece a la unión infinita? Sí, por la condición de la topología podemos asegurar que en al menos un A_i se cumple que $x \in A_i$, y xRy por lo que y pertenecería a ese A_i y por tanto a la unión infinita.

3. $\{A_i | i \in I\} \subseteq \tau_R \Rightarrow \underset{i \in I}{\cap} A_i \in \tau_R$
   Tomamos un x perteneciente a la intersección de abiertos, en todos los abiertos, para que se cumpla que xRy en la intersección, es necesario que xRy en cada uno de los abiertos,esto provoca que y pertenezca a todos los abiertos y por tanto a su intersección.

Proposición 4.2. *Sea (X, R) un marco reflexivo y transitivo y $T = (X, \tau_R)$ el espacio topológico inducido, se verifica que:*

1. $R_{\tau_R} = R$

2. $\tau_{R_\tau} = \tau$

Demostración:

1. R_{τ_R} relaciona dos elementos de X si y solo si cumplen que pertenecen al mismo abierto bajo la topología τ_R, por la definición de esta topología para confirmar que dos elementos pertenecen a un abierto necesitamos la condición de xRy.De esta forma obtenemos que $xR_{\tau_R}y \Leftrightarrow xRy$.

2. τ_{R_τ} define una topología en la que se cumple que si x pertenece un abierto y $xR_\tau y$ provoca que y pertenece al abierto.
   La relación R_τ es la relación generada por la topología τ, esta relación establece que xRy sii x e y pertenecen al mismo abierto, de esta forma comprobamos que las condiciones de las topologías τ_{R_τ} y τ son las mismas, por lo tanto ambas topologías son iguales.

Para terminar de formar el modelo topológico necesitamos añadirle una valuación que se define idénticamente igual que en el caso de los modelos definidos para las lógicas modales.

4.2.1. Caracterización de los operadores modales en los modelos topológicos

Para terminar de transicionar de los modelos de la lógica a los modelos topológicos nos faltan por introducir las relaciones que hay entre $\Box, \Diamond$ y algunos conceptos topológicos. Asociaremos en primer lugar el carácter modal $\Box$ con el concepto de abierto, anteriormente utilizábamos $\Box$ para representar la necesidad de verificación de la fórmula que la procedía.En la topología hablamos del interior al mayor abierto contenido en el conjunto, con esto pasamos de que $\Box\varphi$ pase de " es necesario que φ sea cierto" a "φ es vierto en el interior del conjunto".
De igual manera podremos caracterizar a $\Diamond$ como la clausura del conjunto.
Estos cambios nos serán muy útiles puesto que ahora podremos aplicar todos los resultados que conocemos de topología para estudiar los modelos de la lógica modal.
Para ejemplificar esto podemos tomar la fórmula que usamos en los ejemplos del método sintáctico y semántico:

$$\Box\varphi \wedge \Box\psi \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$$

Si vemos esto a través de la caracterización que acabamos de enunciar resultaría en probar que:

$$Int(A) \cap Int(B) = \text{Int}(A \cap B)$$

Esta equivalencia desde el punto de vista topológico es obvia puesto que si tomo un $x \in Int(A) \cap Int(B) \Leftrightarrow \exists A, B \in \tau_R$ tal que $x \in A$ y $x \in B$ respectivamente $\Leftrightarrow x \in A \cap B$ y es obvio que de esta forma x pertenece al termino de la derecha. Puesto que la demostración se ha realizado a través de equivalencias también ha sido probada la otra implicación.

Definición 4.2. *Diremos que una fórmula φ es verdad en un punto x del modelo topológico $M = \langle X, \tau, V \rangle$ (Denotado $M, x \models \varphi$) si :*

- $M, x \models p \iff x \in V(p)$
- $M, x \models \top \iff x \in V(p)$
- $M, x \not\models \bot \iff x \in V(p)$
- $M, x \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \iff M, x \models \varphi_1$ *y* $M, x \models \varphi_2$
- $M, x \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \iff M, x \models \varphi_1$ *o* $M, x \models \varphi_2$
- $M, x \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \iff M, x \not\models \varphi_1$ *o* $M, x \models \varphi_2$
- $M, x \models \Box\varphi \iff \exists U \in \tau$ *tal que* $x \in U$ *y* $\forall y \in U$, $M, y \models \varphi$
- $M, x \models \Diamond\varphi \iff \forall U \in \tau$, *si* $x \in U, \exists y \in U$ *tal que* $y \in U$

Observación 4.1. *Si denotamos como $||\varphi||$ el conjunto de puntos donde φ es cierta. entonces $||\Box\varphi|| = Int||\varphi||$ y $||\Diamond\varphi|| = Cl||\varphi||$*

Habiendo presentado la definición de fórmula cierta para un modelo topológico, podemos establecer una equivalencia a través del siguiente resultado.

Proposición 4.3. *Una fórmula φ es cierta en un modelo relacional si y solo si es cierta para el modelo topológico asociado.*

Demostración:

Esta demostración se elaborara sobre la longitud de la fórmula φ. Tomemos un modelo relacional reflexivo y transitivo $M = \langle X, R, V \rangle$ y un modelo topológico $M_{Top} = \langle X, \tau_R, V \rangle$.

- $\varphi = p$: $M, x \models p \iff x \in V(p) \iff M_{Top}, x \models p$

- $\varphi = \psi \wedge \theta$:$M, x \models \psi \wedge \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{M,x}\models \psi \\ M, x \models \theta \end{cases}$

  $\Leftrightarrow$(aplicando hipótesis de inducción)$\begin{cases} \text{M}_{Top}, x \models \psi \\ M_{Top}, x \models \theta \end{cases}$

  $\Leftrightarrow M_{Top}, x \models \psi \wedge \theta$

- $\varphi = \neg\psi$:$M, x \models \neg\psi \Leftrightarrow M, x \not\models \psi \Leftrightarrow$ (aplicando la hipótesis de inducción)$M_{Top}, x \not\models \psi \Leftrightarrow M_{Top}, x \models \neg\psi$

- $\varphi = \Box\psi$:$M, x \models \Box\psi \Leftrightarrow M, y \models \psi$ ∀y tal que $xRy \Leftrightarrow$ (aplicando la hipótesis de inducción)$M_{Top}, y \models \psi$ para todo $y \in X$ tal que xRy o de igual forma viendolo como un abierto de τ_r $\forall y \in \{z|xRz\}$ $\Leftrightarrow$(Aplicando definición 4.2) $M_{Top}, x \models \Box\psi$

4.2.2. Ejemplos

Los siguientes ejemplos son sacados de la tesis doctoral de Aybüke Özgün[17]:

1. En la recta real.
   Tomemos $(\mathbb{R}, \tau)$ la topología de la recta real , sea p=" medir más que a y menos que b" y tomamos $V(p) = [a, b]$.
   El mundo real es x,donde la mesa mide x cm, con $x \in (a, b)$.Desconocemos el valor de x, pero sí puedo saber que $x \in (a, b)$. Esto se representa a través de la fórmula $x \models \Box p$, a su vez si lo traducimos en términos topológicos obtenemos que es equivalente a $x \in Int(V(p))$.

2. En $\mathbb{R}^2$.
   Supongamos que tenemos un robot cuya utilidad es conocer el material que compone el suelo donde se sitúa el robot. El robot realiza el estudio del suelo percibiendo un conjunto abierto a su alrededor.Supongamos que nos encontramos en un suelo que esta compuesto en una zona por arena y en otra por piedra, el robot solo podrá decir con certeza donde esta si todo el conjunto abierto que estudia es del mismo material.
   Tomamos p=" el suelo es de arena" y q="el suelo es de piedra", por otro lado definimos $V(p)$="área del suelo de arenaz $V(q)$="área del suelo de piedra". Con todo esto podemos ver que el robot nos dirá que el suelo

es arena si $\forall x, x \models \Box p$ o lo que es igual a que $\forall x, x \in Int(V(p))$.Análogamente podemos obtener las fórmulas para que el robot nos diga que el suelo es de piedra, si no se cumplen ninguna de las dos condiciones el robot no nos dirá el material, esto se debe a que existen dos punto en el área del robot que nos dan materiales distintos. En este apartado podríamos aplicar los conceptos topológicos de conexión, puesto que existe una desconexión entre el conjunto de puntos que tienen como suelo arena y los que tienen como suelo piedra.

3. Espacio de cantor.
   El espacio de Cantor se forma partiendo del intervalo [0,1] eliminando el segundo tercio, de los dos intervalos obtenidos eliminamos de igual forma sus segundos tercios.El conjunto de Cantor es la intersección de todos estos intervalos que quedan después de un número infinito de iteraciones.
   Por notación denotaremos como 0 si nos situamos en el primer tercio del intervalo y 1 si nos encontramos en el tercero. Por la construcción de este espacio podemos denotar el conjunto de Cantor como:

   $$C = \{(X_n)_{n \in \mathbb{N}} : X_n \in \{0,1\}\}.$$

   La topología que tomaríamos en este espacio seria la generada por la base:

   $$U_{(i_1 \dots i_n)} = \{x \in C : x_j = i_j,\ j = 1, \dots, n\}$$

   Con $(i_1 \dots i_n)$ una sucesión de 1's y 0's. Con esto obtendríamos otra relación entre la lógica y la topología puesto que los abiertos contienen a todos aquellos puntos que tienen en las n primeras tuplas los mismos valores independientemente de los siguiente. Esto también incluye a aquel punto cuyas coordenadas son exactamente una n-tupla igual que la del abierto. Por lo que podemos concluir que todos los puntos del abierto cumplen que son sucesores suyos.

4.3. S4 en los espacios topológicos

Para obtener el resultado de que S4 es la lógica de los espacios topológicos demostraremos que “Un modelo relacional reflexivo y transitivo da lugar a un espacio topológico que satisface las mismas fórmulas"de lo que obtendremos como corolario que S4 es la lógica de dichos espacios topológicos. Partimos de M un modelo reflexivo y transitivo, con la relación R podemos definir la topología:

$$\tau_R \equiv \{\ A \subseteq X : \text{si } x \in A \text{ y } xRy \Rightarrow y \in A\}$$

Ahora, utilizando la proposición 4.2 y 4.3, hemos demostrado que para una fórmula φ se cumple que:

$$(X, \tau), x \models \varphi \Leftrightarrow (X, R_\tau), x \models \varphi$$

4.4. Modelos finitos

En esta sección consideraremos marcos reflexivos y transitivos con un número finito de puntos, demostraremos a través de un método llamado filtración que S4 es la lógica de estos marcos. Es decir demostraremos que si φ es una fórmula consistente en S4 podemos encontrar un modelo finito donde se satisface la fórmula.
Primero definiremos el concepto de filtración.

Definición 4.3. *Sea $M = \langle W, R, V\rangle$ un modelo de S4 y tomemos $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ un conjunto de fórmulas. Llamamos filtración a la relación de equivalencia $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ definida como sigue:*

$$x \leftrightsquigarrow_\Sigma y \textit{ sii } \forall\varphi \in \Sigma \textit{ se cumple que } x \models \varphi \Leftrightarrow y \models \varphi$$

Con esta relación de equivalencia podemos considerar el conjunto cociente $W_\Sigma = \{|x|_\Sigma\ |x \in W\}$ donde $|x|_\Sigma$ es la clase de equivalencia de X.Es decir $|x|_\Sigma = \{y \in W : x \leftrightsquigarrow_\Sigma y\}$

Con esto podemos definir un nuevo modelo.
Defino como $M^f_\Sigma = \langle W^f, R^f, V^f\rangle$ al modelo que cumple que:

- $W^f = W_\Sigma$
- Se cumple que si xRy entonces $|x|R^f|y|$
- Si $|x|R^f|y|$ entonces para todo $\Box\varphi \in \Sigma$, si $M, y \models \varphi$ entonces $M, x \models \varphi$
- $V^f(p) = \{|x| | M, x \models p\}$ para todas las variables proposiciones de Σ

Existen varias formas de definir la relación R^f de forma que cumpla las propiedades anteriores, el ejemplo más sencillo que nos podemos encontrar es $|x|R^f|y| \Leftrightarrow \exists x' \in |x|, y'| \in |y|$ tal que $x'Ry'$

Definición 4.4. *Un conjunto de fórmulas Σ diremos que es un conjunto de subformulas cerrado si cumple:*

- $\forall \psi, \varphi$ *si* $\psi \vee \varphi \in \Sigma \Leftrightarrow \psi$ *y* $\varphi \in \Sigma$
- *Si* $\neg\varphi \in \Sigma \Rightarrow \varphi \in \Sigma$
- *Si* $\Box\varphi \in \Sigma \Rightarrow \varphi \in \Sigma$

Proposición 4.4. *Dado un modelo reflexivo y transitivo (X, R, V) y un punto $x \in X$ tal que $x \models \varphi$, tomando $\Sigma = \{$subfórmulas de $\varphi\}$. Se cumple que la filtración $(X_\Sigma, R_\Sigma, V_\Sigma)$ es un modelo finito reflexivo y transitivo donde $|x|_\Sigma \models \varphi$*

Demostración:

Esta demostración se hará a través de una inducción sobre la longitud de la fórmula:

- $\varphi = p$: $x \models p \iff x \in V(p) \iff$ (aplicando la definición de la valuación)$x \in V_\Sigma(p) \iff |x| \models p$
- $\varphi = \psi \wedge \theta$:$x \models \psi \wedge \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{x}\models \psi \\ x \models \theta \end{cases}$

  $\Leftrightarrow$(aplicando hipótesis de inducción y Σ conjunto de subfórmulas cerrado)$\begin{cases} |x| \models \psi \\ |x| \models \theta \end{cases}$

  $\Leftrightarrow |x| \models \psi \wedge \theta$

- $\varphi = \neg\psi$:$x \models \neg\psi \Leftrightarrow x \not\models \psi \Leftrightarrow$ (aplicando hipótesis de inducción y Σ conjunto de subfórmulas cerrado)$|x| \not\models \psi \Leftrightarrow |x| \models \neg\psi$
- $\varphi = \Box\psi$:$x \models \Box\psi \Leftrightarrow \exists x' \in X$ tal que $xRx', x' \models \psi \Leftrightarrow$(Como tenemos una filtración) $|x|R|x'| \Leftrightarrow$ (aplicando hipótesis de inducción y Σ conjunto de subfórmulas cerrado)$\psi \in \Sigma \Leftrightarrow$ (Aplicando la hipótesis de inducción)$|x'| \models \psi$ por lo que $|x| \models \Box\psi$

Con esto probamos que si tenemos una fórmula consistente, entonces podemos encontrar un modelo reflexivo,transitivo y finito que la satisface.

Capítulo 5

Modelos genéricos para espacios topológicos

Hasta ahora hemos conseguido probar que S4 es la lógica de los espacios topológicos, pero esto se puede generalizar aún más. En este capítulo presentaremos una serie de resultados que nos llevaran a concluir que S4 es la lógica, no ya de los espacios topológicos, sino en particular de cualquier espacio topológico que cumpla ciertas propiedades. Esta demostración fue realizada por McKinsey y Tarski[18], en su demostración imponían unas condiciones iniciales al espacio X. Las tres condiciones eran:

1. El espacio X debe ser metrizable.
2. El espacio X debe ser denso en si mismo, esto quiero decir que no existe ningún conjunto abierto unipuntual.
3. El espacio X debe ser separable

Definición 5.1. *Sea* (X, τ_x) *un espacio topológico metrizable si existe una métrica* d *en* X *tal que* $\tau_x = \tau_x(d)$

Definición 5.2. *Un espacio topológico* (X, τ_x) *se dice separable si existe un subconjunto* $D \subseteq X$ *numerable y denso.*

Algunos ejemplos de espacios que cumplen las propiedades anteriores serian $\mathbb{R}$ o el espacio de Baire.

Definición 5.3. *Sea* (X, τ_x) *se dice espacio de Baire si toda intersección numerable de abiertos densos de* X *es densa.*

Con investigaciones futuras los matemáticos Rasiowa y Sirkowski [19]consiguieron demostrar el mismo resultado sin necesidad de imponer la condición de separabilidad.

Por último apareció otra demostración que solo utiliza las dos primeras propiedades, esta demostración fue elaborada por G. Bezhanishvili, N. Bezhanishvili, J. Lucero-Bryan y J. van Mill[20]. En este trabajo presentaremos la última de las demostraciones del resultado original de Mckinsey y Tarski por su sencillez.

Teorema 5.1. *S4 es la lógica de cualquier espacio denso en si mismo y metrizable.*

La demostración de este teorema por Bezhanishvili y otros, esta fundamentada en los siguientes resultados auxiliares:

1. Lema de Partición
2. S4 es la lógica de los cuasi-árboles
3. Sea $f : (Y, d) \to (X, \tau)$ una función continua,abierta y suprayectiva, entonces X e Y satisfacen las mismas fórmulas
4. Lema de Mapeado

Para la demostración de estos resultados primero necesitaremos unos resultados previos.

Sea X un espacio topológico, denotaremos como Int y Cl los operadores interior y clausura en X. Como es habitual diremos que U es un abierto en X si $U \subseteq X$ y Int(U)=U.

Definición 5.4. *Diremos que un espacio* (X, τ_x) *es regular si* $\forall x \in X$ *y* $\forall C$ $\tau_x - cerrado$ *con* $x \notin C$, $\exists U, V \in \tau_x$ *tal que* $x \in U, C \subseteq V$ *y* $U \cap V = \emptyset$

Definición 5.5. *Sea* (X, τ_x) *un espacio topológico y* $U \in \tau_x$*, diremos que* U *es un abierto regular si cumple que* $Int(Cl(U)) = U$

Definición 5.6. *Sea* X *el espacio topológico y* $\mathcal{A}$ *una familia de subconjuntos de* X*.*

1. *Diremos que* $\mathcal{A}$ *es discreta si cada* $x \in X$ *tiene un abierto* U *que cumple que* $\{A \in \mathcal{A} | A \cap U \neq \emptyset\}$ *tiene como máximo un elemento.*
2. *Diremos que* $\mathcal{A}$ *es* σ*-discreta si* $\mathcal{A} = \underset{n \in w}{\cup} \mathcal{A}_n$ *y cada* $\mathcal{A}_n$ *es discreta.*
3. *Diremos que* $\mathcal{A}$ *conserva la clausura si* $Cl(\cup\mathcal{B})$=$\cup\{Cl(B) | B \in \mathcal{B}\}$ *para cada* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$

Lema 5.1. *Sea* X *un espacio topológico,* B *un subconjunto abierto de* X *y* $\mathcal{U}$ *una familia de subconjuntos abiertos y regulares de* X *que conservan la clausura y que cumplen que* $\{Cl(U) | U \in \mathcal{U}\}$ *son disjuntos dos a dos. Entonces* $B \subseteq \cup\mathcal{U}$ *si y solo si* $B \subseteq Cl(\cup\mathcal{U})$

Demostración:
La implicación de izquierda a derecha es obvia puesto que todo conjunto está contenido en su clausura. Para probar la implicación de derecha a izquierda suponemos que $\mathcal{B} \subseteq Cl(\cup\mathcal{U})$ .Tomamos $U \in \mathcal{U}$ y el conjunto $\mathcal{V} = \mathcal{U} \backslash \{U\}$. Entonces utilizando la hipótesis de clausuras disjuntas dos a dos tenemos que $Cl(U) \cap (\cup\{Cl(V) | V \in \mathcal{V}\}) = \emptyset$ y $\mathcal{B} \subseteq Cl(\cup\mathcal{U}) = Cl(U) \cup \{Cl(V) | V \in \mathcal{V}\}$. Por lo tanto, $B \cap Cl(U) = B \backslash \cup \{Cl(V) | V \in \mathcal{V} = B \backslash Cl(\cup\mathcal{V})$ es abierto en X por lo que $B \cap Cl(U) \subseteq Int(Cl(U)) = U$.Entonces $B = \cup\{B \cap Cl(U) | U \in \mathcal{U}\} \subseteq \cup\mathcal{U}$.

Lema 5.2. *Sea* X *un espacio topológico regular, no vacío y denso en si mismo y sea* Y *un subespacio abierto de* X *tenemos que.*

1. *Existe un subconjunto abierto* U *no vacío y regular de* X *que cumple que* $Cl(U) \subset Y$

2. *Para cada n$\geq$1 existe una familia $\mathcal{U}$ formada por n subconjuntos abiertos, no vacíos y regulares de X tales que $\{$Cl(U)$|$ U$\in \mathcal{U}\}$ disjuntos dos a dos y Cl($\bigcup \mathcal{U}$) $\subset Y$*

Demostración:

1. Tomamos $x \in Y$. Puesto que X es un espacio T_1 y denso en si mismo, $Y \backslash \{x\}$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Puesto que X es regular, existe un subconjunto abierto y no vacío V de X tal que $Cl(V) \subseteq Y \backslash \{x\}$. Tomando $U := Int(Cl(V))$ se cumple la demostración.

2. Establecemos una inducción sobre n$\geq$1.
   Si n=1 estamos en el caso (1).
   Supongamos n$\geq$1 y existe una familia $\mathcal{V}$ formada por n subconjuntos abiertos regulares de X tal que $\{Cl(V)|V \in \mathcal{V}\}$ es disjunto dos a dos y $Cl(\cup\mathcal{V}) \subset Y$. Entonces $Y \backslash Cl(\cup\mathcal{V})$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Aplicando (1) obtenemos un subconjunto abierto regular no vacío de X al que denotaremos como W, el cual cumple que $Cl(W) \subset Y \backslash Cl(\cup\mathcal{V})$. La demostración queda completa si consideramos $\mathcal{U} := \mathcal{V} \cup \{W\}$.

Lema 5.3. *Sea X un espacio topológico denso en si mismo, F un subespacio discreto de X y de subconjuntos de X $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_n$ tales que $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$ es una familia de abiertos de X no vacíos que conservan la clausura. Supongamos además que esta familia cumple que $\{$Cl(U)$|$ U$\in \mathcal{U}\}$ es disjunta dos a dos y Cl(U)$\cap$F=$\emptyset$ para cada U$\in \mathcal{U}$.*
Si $\mathcal{B}$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos de X, entonces existen familias de subconjuntos de X $\mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_n$ y un subespacio cerrado y discreto D de X tal que:

1. *$\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{V}_i$ para cada i$\in \{1, ..., n\}$*

2. *La familia $\mathcal{V} := \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i$ es una familia de abiertos no vacíos de X que conservan la clausura y cumplen que el conjunto $\{$Cl(V)$|$ V$\in \mathcal{V}\}$ es disjunto dos a dos.*

3. *Cl(V)$\cap$(F$\cup$D)=$\emptyset$ para cada V$\in \mathcal{V}$*

4. Si $B\in \mathcal{B}$ y $B\nsubseteq \bigcup \mathcal{V}$ entonces:

a) *Para cada $i\in \{1,...,n\}$ existe $V_i\in \mathcal{V}_i$ tal que $Cl(V_i)\subseteq B$*

b) *El conjunto $B\cap D$ esta formado por al menos dos elementos*

Demostración:

Tomemos $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}|B \nsubseteq \cup\mathcal{U}\}$.Supongamos que $\mathcal{C} = \emptyset$.Tomemos $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i$ para $i \in \{1,...,n\}$ y $D = \emptyset$.Entonces D es un subespacio cerrado y discreto de X y $\mathcal{V} = \mathcal{U}$. De esta forma las condiciones del 1 al 4 se satisfacen de manera trivial.
Ahora supongamos que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.Tomemos $B \in \mathcal{C}$.Por esto $B \nsubseteq \cup\mathcal{U}$. Utilizando el lema 5.1 tenemos que $B \nsubseteq Cl(\cup\mathcal{U})$, así que $B\backslash Cl(\cup\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Teniendo en cuenta que F es un subespacio cerrado discreto y X denso en si mismo, obtenemos que $B\backslash(F \cup Cl(\cup\mathcal{U}))$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Utilizando el lema 5.2 tenemos una familia $\{B_1, ..., B_n\}$ de subconjuntos abiertos,no vacíos y regulares de X tales que $\{Cl(B_1), ..., Cl(B_n)\}$ son disjuntos dos a dos y $\bigcup_{i=1}^n Cl(B_i) = Cl(\bigcup_{i=1}^n B_i) \subset B\backslash(F \cup Cl(\cup\mathcal{U})$. Tomemos D_B como el conjunto formado por cualesquiera dos puntos en el subconjunto abierto no vacío $(B\backslash(F\cup Cl(\cup\mathcal{U}))\backslash \bigcup_{i=1}^n Cl(B_i)$ de X.
Tomaremos también $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cup \{B_i|B \in \mathcal{C}\}$ y $D = \cup\{D_B|B \in \mathcal{C}\}$.

Afirmación 5.3.1. *D es un subespacio cerrado y discreto de X*

Demostración:

Tomemos $X \in Cl(D)$.Puesto que $\mathcal{B}$ es una familia discreta, existe un recubrimiento abierto de x tal que $\{B \in \mathcal{B}|U \cap B \neq \emptyset\}$ esta formado por un solo elemento como máximo. Teniendo que $\emptyset \neq U \cap D \subseteq U \cup \bigcup\mathcal{C} \subseteq \bigcup\{U \cup B|B \in \mathcal{B}\}$, tomamos $B' \in \mathcal{C}$ tal que $\{B \in \mathcal{B}|U \cap B \neq \emptyset\} = \{B'\}$.Cabe notar que $D_{B'}\backslash\{x\}$ es un conjunto finito y por eso cerrado puesto que $D_{B'}$ es un conjunto conformado por dos elementos. A partir de esto podemos ver que $U\backslash(D_{B'}\backslash\{x\})$ es un recubrimiento abierto de x.
Por ultimo vemos que
$\emptyset \neq (U\backslash(D_{B'}\backslash\{x\})) \cap D = (U\backslash(D_{B'}\backslash\{x\})) \cap \bigcup\{D_{B'}|B \in \mathcal{C}\}=$
$\bigcup\{(U\backslash(D_{B'}\backslash\{x\})) \cap D_{B'}|B \in \mathcal{C}\} = (U\backslash(D_{B'}\backslash\{x\})) \cap D_{B'} \subseteq \{x\}$.
Teniendo en cuenta que $(U\backslash(D_{B'}\backslash\{x\})) \cap D = \{x\}$ podemos concluir que D es cerrado y discreto.

Afirmación 5.3.2. *Para cada V$\in \mathcal{V}$ es un subconjunto abierto regular no vacío de X*

Demostración:

Puesto que para cada $B \in \mathcal{C}$ y $i \in \{1, ..., n\}$, las familias $\{B_1, ..., B_n\}$ y $\mathcal{U}_i$ consisten en subconjuntos abiertos regulares no vacíos de X, para cada $V \in \mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cup \{B_i | B \in \mathcal{C}\}$ es un subconjunto abierto regular no vacío de X. El resultado se cumple puesto que $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i$

Afirmación 5.3.3. *La familia $\{$ Cl(V)$|$ V$\in \mathcal{V}\}$ es disjunta dos a dos*

Demostración:

Supongamos $V, W \in \mathcal{V}$ son distintos. Si $V, W \in \mathcal{U}$, entonces $Cl(V) \cap Cl(W) = \emptyset$ puesto que $\{Cl(U)|U \in \mathcal{U}\}$ son disjuntos dos a dos. Si $V \in \mathcal{U}$ y $W \notin \mathcal{U}$, entonces $W \in \{B_1, ..., B_N\}$ para algún $B \in \mathcal{C}$.Por lo tanto, $Cl(W) \subseteq \cup_{i=1}^{n} Cl(B_i) \subset B \backslash (F \cup Cl(\cup \mathcal{U})) \subseteq B \backslash Cl(V)$ con lo que obtenemos que $Cl(V) \cap Cl(W) = \emptyset$. El caso en el que $W \in \mathcal{U}$ y $W \notin \mathcal{U}$ es análogo. Si tuviéramos que $V, W \notin \mathcal{U}$, entonces $V \in \{B_1, ..., B_n\}$ y $W \in \{B'_1, ..., B'_n\}$ para algún $B, B' \in \mathcal{C}$. Si $B = B'$, entonces $Cl(V) \cap Cl(W) = \emptyset$ ya que $\{B_1, ..., B_n\} = \{B'_1, ..., B'_n\}$ y $\{Cl(B_1), ..., Cl(B_n)\}$ son disjuntos dos a dos.
Si $B \neq B'$ entonces $B \cap B' = \emptyset$ ya que $\mathcal{B}$ es discreto y por tanto disjunto dos a dos.
De este modo $Cl(V) \cap Cl(W) \subseteq (\cup_{i=1}^{n} Cl(B_i)) \cap (\cup_{i=1}^{n} Cl(B'_i)) \subseteq (B \backslash (F \cup Cl(\cup \mathcal{U})) \cap (B' \backslash (F \cup Cl(\cup \mathcal{U})) \subseteq B \cap B' = \emptyset$ y por consiguiente $\{Cl(V)|V \in \mathcal{V}\}$ es disjunto dos a dos.

Afirmación 5.3.4. *La familia $\mathcal{D}$:=$\{B_i|$ B$\in \mathcal{C}$ y $i \in \{1, ..., n\}\}$ es discreta.*

Demostración:

Tomemos $x \in X$. Utilizando que $\mathcal{B}$ es discreto sabemos que existe un recubrimiento abierto N_x de X tal que $\{B \in \mathcal{B} | B \cap N_x \neq \emptyset\}$ esta formado como máximo por un elemento. Si $\{B \in \mathcal{B} | B \cap N_x \neq \emptyset\}$ es vacío entonces $\{B_i | B \in \mathcal{C}, i \in \{1, ..., n\}, B_i \cap N_x \neq \emptyset\}$ es vacío porque $N_x \cap B_i \subseteq N_x \cap B$ para cada $B \in \mathcal{C}$ y $i \in \{1, ..., n\}$.

Supongamos que $B' \in \mathcal{B}$ es el único elemento de $\{B \in \mathcal{B} | BN_x \neq \emptyset\}$. Si $B' \notin \mathcal{C}$, entonces $\{B_i | B \in \mathcal{C}, i \in \{1, ..., n\}, N_x \cap B_i \neq \emptyset\}$ es vacío.
Supongamos ahora que $B' \in \mathcal{C}$.Si $x \notin Cl(\cup_{i=1}^n B_i')$, entonces $U := N_x \backslash Cl(\cup_{i=1}^n B_i')$ es un recubrimiento abierto de x y $\{B_i | B \in \mathcal{C}, i \in \{1, ..., n\}, U \cap B_i \neq \emptyset\}$ es vacío.
Si $x \in Cl(\cup_{i=1}^n B_i')$ entonces tenemos que $\{Cl(B_1'), ..., Cl(B_n')\}$ es disjunto dos a dos, por lo que solo puede existir un $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in Cl(B_j')$. Así que, si tomamos $U := N_x \backslash \cup \{Cl(B_i') | i \neq j\}$ es un recubrimiento abierto de x y $\{B_i | B \in \mathcal{C}, i \in \{1, ..., n\}, U \cap B_i \neq \emptyset\} = \{B_j'\}$. Utilizando que $x \in Cl(B_j')$ y U un recubrimiento abierto de x, tenemos que $U \cap B_j' \neq \emptyset$. Si $U \cap B_i \neq \emptyset$ para algún $B \in \mathcal{C}$ y $i \in \{1, ..., n\}$ entonces $\emptyset \neq U \cap B_i \subseteq N_x \cap B$.Con esto podemos concluir que $B = B'$ y $\emptyset \neq U \cap B_i' = (N_x \backslash \cup \{Cl(B_i') | i \neq j\}) \cap B_i' = \emptyset$ para $i \neq j$.Por lo que $\mathcal{D}$ es discreta.

Afirmación 5.3.5. *La familia $\mathcal{V}$ conserva la clausura*

Demostración:

Tomemos $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Usando $\mathcal{D}$ como hemos definido en la afirmación 5.3.4 tenemos que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \mathcal{D}$ y $\mathcal{W} = (\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{W} \cap \mathcal{D})$. Ya que $\mathcal{D}$ es discreta, así es $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}$. Por lo tanto, $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}$ conserva la clausura. Como $\mathcal{U}$ conserva la clausura tenemos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{U}$.
De esta forma tenemos que:

$$
\begin{gathered}
Cl(\bigcup \mathcal{W}) = \\
\mathrm{Cl}(\bigcup ((\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{W} \cap \mathcal{D}))) = \\
\mathrm{Cl}(\bigcup (\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \cup \bigcup (\mathcal{W} \cap \mathcal{D})) = \\
\mathrm{Cl}(\bigcup (\mathcal{W} \cap \mathcal{U})) \cup Cl(\bigcup (\mathcal{W} \cap \mathcal{D})) = \\
\bigcup \{Cl(V) | V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{U}\} \cup \bigcup \{Cl(V) | V \in \mathcal{W} \cap \mathcal{D}\} = \\
\bigcup \{Cl(V) | V \in (\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \cup (\mathcal{W} \cap \mathcal{D})\} = \\
\bigcup \{Cl(V) | V \in \mathcal{W}\}
\end{gathered}
$$

Con esto queda probado que $\mathcal{V}$ conserva la clausura.

Afirmación 5.3.6. *La condición (3) del lema 5.3 se cumple*

Demostración:

Tomemos $V \in \mathcal{V}$. Si $V \in \mathcal{U}$, entonces $Cl(V) \cap F = \emptyset$ por hipótesis.Además, $Cl(V) \cap D = \emptyset$ puesto que para cada $B \in \mathcal{C}$ tenemos que :

$$D_B \subseteq (B \backslash (F \cup Cl(\bigcup \mathcal{U})) \backslash \bigcup_{i=1}^{n} Cl(B_i) \subseteq$$
$$\mathrm{B} \backslash (F \cup Cl(\bigcup \mathcal{U})) \subseteq X \backslash Cl(\bigcup \mathcal{U}) \subseteq X \backslash Cl(V)$$

Siguiendo esto podemos asegurar a que $D = \bigcup \{D_B | B \in \mathcal{C}\} \subseteq X \backslash Cl(V)$.Entonces, $Cl(V) \cap (F \cup D) = \emptyset$.
Si $V \notin \mathcal{U}$, entonces $V = B'_j$ para algún $B' \in \mathcal{C}$ y $j \in \{1, ..., n\}$.
Podemos deducir que $Cl(B'_j) \cap F = \emptyset$ si tenemos en cuenta que:

$$Cl(B'_j) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Cl(B'_i) \subseteq B' \backslash (F \cup Cl(\bigcup \mathcal{U}) \subseteq B' \backslash F \subseteq X \backslash F$$

Por otro lado podemos ver que se cumple que:

$$D_{B'} \subseteq (B' \backslash (F \cup Cl(\bigcup \mathcal{U}))) \backslash \bigcup_{i=1}^{n} Cl(B'_i) \subseteq X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} Cl(B'_i) \subseteq X \backslash Cl(B'_j)$$

por lo que podemos deducir que $Cl(B'_j) \cap D_{B'} = \emptyset$.
Utilizando que $\mathcal{B}$ es disjunto dos a dos tenemos que:

$$Cl(B'_j) \cap D = Cl(B'_j) \cap \bigcup \{D_B | B \in \mathcal{C}\} = \bigcup \{Cl(B'_j) \cap D_B | B \in \mathcal{C}\} =$$
$$(\mathrm{Cl(B'}_j) \cap D_{B'}) \cup \bigcup \{Cl(B'_j) \cap D_B | B \in \mathcal{C} \backslash \{B'\}\} \subseteq$$
$$\emptyset \cup \bigcup \{Cl(B'_j) \cap B | B \in \mathcal{C} \backslash \{B'\}\} \subseteq$$
$$\bigcup \{B' \cap B | B \in \mathcal{C} \backslash \{B'\}\} = \emptyset$$

Por lo cual, $Cl(V) \cap (F \cup D) = \emptyset$ y por consiguiente queda probada la condición (3).

Afirmación 5.3.7. *La condición (4) del lema 5.3 se cumple*

Demostración:

Supongamos que $B \in \mathcal{B}$ y $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}$. Entonces $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{U}$ puesto que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Teniendo esto en cuenta llegamos a que $B \in \mathcal{C}$. Tomemos $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $Cl(B_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} Cl(B_j) \subseteq B \backslash (F \cup Cl(\bigcup \mathcal{U}) \subseteq B$.Utilizando que $B_i \in \mathcal{V}_i$, la condición (4a) se cumple, por otro lado, como $\mathcal{B}$ es disjunto dos a dos y $D_{B'} \subseteq B'$ para cada $B' \in \mathcal{C}$ tenemos que:

$$B \cap D = B \cap \bigcup \{D_{B'} | B' \in \mathcal{C}\} =$$
$$\bigcup \{B \cap D_{B'} | B' \in \mathcal{C}\} = B \cap D_B = D_B$$

De este modo, $B \cap D$ esta formado por dos elementos, por lo que queda probado que (4b) se cumple.

Con todos estos resultados se completa la demostración del lema 5.3.

Habiendo demostrado el lema 5.3 podemos adentrarnos en la demostración del lema de partición.

Lema 5.4. ***LEMA DE PARTICIÓN***
Tomemos X un espacio topológico metrizable denso en sí mismo, F un subespacio no vacío cerrado y discreto de X y tomemos $n \geq 1$. Entonces existe una partición de X $\{G, U_1, \ldots, U_n\}$ cumpliendo:

1. *G es un subespacio cerrado denso en sí mismo y en ningún lugar denso de X que contiene a F.*
2. *Cada U_i es un subespacio abierto de X tal que existe un subespacio discreto F_i de U_i con $\mathrm{Cl}(F_i) = F_i \cup G$.*

Demostración:

Por el teorema de metrización de Bing[21],X tiene una base σ-discreta $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_m | m \geq 1\}$, donde cada $\mathcal{B}_m$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos de X, por el lema 5.2 (2), existe una familia $\mathcal{V}^0 = \{W_1, ..., W_n\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos regulares de X tales que $\{Cl(W_1), ..., Cl(W_n)\}$ son

disjuntos dos a dos y $Cl(\bigcup \mathcal{V}^0 \subset X \backslash F$.Sea $\mathcal{V}_i^0 = \{W_i\}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $D_0 = F$. Entonces $\mathcal{V}_1^0, ..., \mathcal{V}_n^0, \mathcal{V}^0 = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i^0$ y tenemos que D_0 cumple las condiciones del lema 5.3.
Para cada $m \geq 1$, definimos de manera las familias $\mathcal{V}_1^m, ..., \mathcal{V}_n^m$ de subconjuntos de X y sea D_m un subespacio discreto cerrado de X. Supongamos que para algún $m \geq 1$ las familias $\mathcal{V}_1^{m-1}, ..., \mathcal{V}_n^{m-1}$ y el subespacio discreto cerrado D_{m-1} ya esta definido tal que $\mathcal{V}^{m-1} := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i^{m-1}$ es una familia de subconjuntos abiertos regulares y no vacíos de X que conservan la clausura. Esta familia de abiertos cumple que $\{Cl(V) | V \in \mathcal{V}^{m-1}\}$ es disjunto dos a dos y $Cl(V) \cap D_{m-1} = \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}^{m-1}$.
Aplicando el lema 5.3 a $\mathcal{U}_i = \mathcal{V}_i^{m-1}, F = D_{m-1}$, y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_m$ producen las familias $\mathcal{V}_1^m, ..., \mathcal{V}_n^m$ y un subespacio cerrado y discreto D'_m tal que:

1. $\mathcal{V}_i^{m-1} \subseteq \mathcal{V}_i^m$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$
2. La familia $\mathcal{V}^m := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i^m$ es una familia de subconjuntos abiertos regulares no vacíos de X tales que $\{Cl(V) | V \in \mathcal{V}^m\}$ es disjunto dos a dos.
3. $Cl(V) \cap (D_{m-1} \cup D'_m) = \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}^m$
4. Si $B \in \mathcal{B}_m$ y $B \not\subseteq \bigcup \mathcal{V}^m$, entonces:
    a) Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe un $V_i \in \mathcal{V}_i^m$ tal que $Cl(V_i) \subseteq B$
    b) El conjunto $B \cap D'_m$ esta formado por el menos dos elementos.

Tomemos ahora el conjunto $D_m = D_{m-1} \cup D'_m$. Entonces D_m es un subconjunto cerrado y discreto de X, esto se da puesto que esta formado a través de la unión finita de cerrados.
Por lo tanto tenemos:

1. $\mathcal{V}_i^{m-1} \subseteq \mathcal{V}_i^m$ y $D_m \subseteq D_{m+1}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$
2. La familia $\mathcal{V}^m := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i^m$ es una familia de subconjuntos abiertos regulares no vacíos de X tales que $\{Cl(V) | V \in \mathcal{V}^m\}$ es disjunto dos a dos.
3. $Cl(V) \cap D_m = \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}^m$

4. Si $B \in \mathcal{B}_m$ y $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^m$, entonces:

   a) Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe un $V_i \in \mathcal{V}_i^m$ tal que $Cl(V_i) \subseteq B$

   b) El conjunto $B \cap D_m$ esta formado por el menos dos elementos.

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, tomamos $\mathcal{V}_i = \bigcup_{m\in w} \mathcal{V}_i^m, U_i = \bigcup \mathcal{V}_i$ y $G = X \backslash \bigcup_{i=1}^n U_i$. Nos queda probar que $\{G, U_1, ..., U_n\}$ cumple las condiciones requeridas en el enunciado.

Afirmación 5.4.1. $\{\mathcal{V}_i^m \mid i \in \{1, ..., n\}\}$ *es disjunto dos a dos para todo* $m \in w$

Demostración:

Haremos esta demostración por inducción sobre $m \in w$.
Para m=0, tomamos la familia $\{W_1, ..., W_n\}$ de forma que $\{Cl(W_1), ..., Cl(W_n)\}$ es disjunta dos a dos. Por lo que $\{\mathcal{V}_i^0 | i \in \{1, ..., n\}\} = \{\{W_1\}, ..., \{W_n\}\}$ son disjuntos dos a dos y por tanto se cumple para m=0.
Tomemos $m \geq 1$ y $\{\mathcal{V}_i^{m-1} | i \in \{1, ..., n\}\}$ son disjuntos dos a dos. Vemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ tenemos que:

$$\mathcal{V}_i^m = \mathcal{V}_i^{m-1} \cup \{B_i | B \in \mathcal{B}_{m-1} \text{ y } B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^{m-1}\}$$

También tenemos que para cada $i, k \in \{1, .., n\}, V \in \mathcal{V}_i^{m-1}$, y $B \in \mathcal{B}_{m-1}$ tal que $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^{m-1}$, tenemos que $V \cap B_k = \emptyset$, esto se da puesto que:

$$B_K \subseteq Cl(\bigcup_{j=1}^n B_j \subset B \backslash (D_{m-1} \cup Cl(\bigcup \mathcal{V}^{m-1})) \subseteq X \backslash \bigcup \mathcal{V}^m - 1 \subseteq X \backslash V$$

Tomemos $V \in \mathcal{V}_i^m \cap \mathcal{V}_j^m$ para algún $i, j \in \{1, ..., n\}$.Entonces $V \in \mathcal{V}_i^m$.Si $V \in \mathcal{V}_i^{m-1}$,las observaciones anteriores nos indican que $V \in \mathcal{V}_j^{m-1}$. De esta manera tendríamos que i=j por la hipótesis de inducción.
Supongamos ahora que $V \notin \mathcal{V}_i^{m-1}$, entonces $V \notin \mathcal{V}_j^{m-1}$, por lo que $V = B_i$ y $V = B'_j$ para algún $B, B' \in \mathcal{B}_{m-1}$ tal que $B, B' \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^{m-1}$.Por esto tenemos

que $\emptyset = B_i \cap B'_j$.Consecuentemente, $B = B'$, así $B_i = B'_j$ y por lo tanto i=j demostrando que $\{\mathcal{V}_i^m | i \in \{1,..,n\}\}$ es disjunto dos a dos, con lo que la afirmación queda demostrada.

Afirmación 5.4.2. *$\mathcal{V}_i$ es disjunto dos a dos para cada i∈{1,...,n}*

Demostración:

Tomemos $V, W \in \mathcal{V}_i = \bigcup_{m \in W} \mathcal{V}_i^m$ tales que $V \cap W \neq \emptyset$.Entonces existen $m', m'' \in w$ tales que $V \in \mathcal{V}_i^{m'}$ y $W \in \mathcal{V}_i^{m''}$. Tomemos $m = max\{m', m''\}$.Entonces $V, W \in \mathcal{V}_i^m \subseteq \mathcal{V}^m$.Usando que $\mathcal{V}^m$ es disjunto dos a dos, V=W. Por lo que $\mathcal{V}_i$ es disjunto dos a dos.

Afirmación 5.4.3. *Para cada m≥1 y B∈ $\mathcal{B}_m$, si B$\bigcap$G≠ ∅, entonces B$\nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^m$*

Demostración:

Tomemos $m \geq 1, B \in \mathcal{B}_m$, y $x \in B \cap G$. Entonces $x \in G$, usando que $X \notin \bigcup_{i=1}^n U_i$. Utilizando que $\mathcal{V}_i^m \subseteq \bigcup_{m' \in w} \mathcal{V}_i^{m'} = \mathcal{V}_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $\bigcup \mathcal{V}_i^m \subseteq \bigcup \mathcal{V}_i = U_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y por consiguiente $\bigcup \mathcal{V}^m = \bigcup \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i^m = \bigcup_{i=1}^n \bigcup \mathcal{V}_i^m \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Entonces, $x \notin \bigcup \mathcal{V}^m$ y por lo cual $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^m$.

Afirmación 5.4.4. *Sea D=$\bigcup$\{ D_m| m∈w\}. Entonces D$\bigcap \bigcup_{i=1}^n U_i$=∅*

Teniendo en cuenta que $D \cap \bigcup_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (D \cap U_i)$ es suficiente probar $D \cap U_i = \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Utilizando que $D \cap U_i = (\bigcup_{m \in w} D_m \cap U_i = \bigcup_{m \in w} (D_m \cap U_i)$, es suficiente demostrar que $D_m \cap U_i = \emptyset$ para cada $m \in w$, esto se ve usando que :

$$D_m \cap U_i = D_m \cap \bigcup \mathcal{V}_i =$$
$$\mathrm{D}_m \cap \bigcup \{V \in \mathcal{V}_i^{m'} | m' \in w\} =$$
$$\bigcup \{D_m \cap V | m' \in w, V \in \mathcal{V}_i^{m'}\}$$

solo tenemos que probar que $D_m \cap V = \emptyset$ para cada $m' \in w$ y $V \in \mathcal{V}_i^{m'}$. Siguiendo las condiciones (1) y (3) tenemos que $D_m \cap V \subseteq D_{max\{m,m'\}} \cap V_{max\{m,m'\}} \cap Cl(V) = \emptyset$ así que $V \in \mathcal{V}_i^{m'} \subseteq \mathcal{V}_i^{max\{m,m'\}}$, con lo que queda completa la demostración.

Afirmación 5.4.5. *La familia $\{G, U_1, \ldots, U_n\}$ es una partición de X tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, U_i es un subconjunto abierto de X y G es un subconjunto cerrado de X que contiene F.*

Demostración:

Sea $i \in \{1, .., n\}$.Puesto que $U_i = \bigcup \mathcal{V}_i$ y cada $V \in \mathcal{V}$ un subconjunto abierto regular de X, U_i es un subconjunto abierto de X.
También tenemos que $U_i \supseteq W_i =\neq \emptyset$ utilizando que $\mathcal{V}_i \supseteq \mathcal{V}_i^m \supseteq \mathcal{V}_i^0 = \{W_i\}$.
Para ver que $\{U_1, ..., U_n\}$ es disjunta dos a dos, tomemos $x \in U_i \cap U_j$. Entonces existen $m_i, m_j \in w, V \in \mathcal{V}^{m_i}$, y $W \in \mathcal{V}_j^{m_j}$ tal que $x \in V$ y $x \in W$. Tomemos $m = max\{m_i, m_j\}$. Entonces $V \in \mathcal{V}_i^m \cap \mathcal{V}_j^m$, usando que $\mathcal{V}_i^m \cap \mathcal{V}_j^m = \emptyset$. Usando la afirmación 5.4.1 llegamos a que $i = j$ y por lo tanto $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es disjunto dos a dos.
Claramente $G = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$ es un subconjunto cerrado de X. Puesto que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una familia disjunta dos a dos de conjuntos no vacíos y $G = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$, solo necesitamos comprobar que G es no vació para concluir que $\{G, U_1, \ldots, U_n\}$ es una partición. Pero por la afirmación 5.4.4 tenemos que $\emptyset = F = D_0 \subseteq \bigcup\{D_m | m \in W\} = D \subseteq X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i = G$, completando la prueba.

Afirmación 5.4.6. *G es un subespacio de X denso en si mismo y en ningún lugar denso.*

Partiendo de que G es cerrado, para ver que no es denso en ningún lugar tomamos $Int(G) \neq \emptyset$.Entonces existe $m \geq 1$ y un $B \in \mathcal{B}_m$ no vacío tal que $B \subseteq G$. Por la afirmación 5.4.3, $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^m$.Por la condición (4a) existe un conjunto no vacío $V_1 \in \mathcal{V}_1^m$ tal que $Cl(V_1)$. Pero entonces tenemos que

$$\emptyset \neq V_1 = B \cap V_1 \subseteq G \cap V_1 \subseteq$$
$$\text{G} \cap \bigcup \mathcal{V}_1^m \subseteq G \cap \bigcup \mathcal{V}_1 =$$
$$\text{G} \cap U_1 = \emptyset$$

lo que da lugar a una contradicción.
Para ver que es G es denso en si mismo, tomamos $m \geq 1$ y $B \in \mathcal{B}_m$ tal que $B \cap G \neq \emptyset$. Por la afirmación 5.4.3 $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^m$.Por la condición (4b), $B \cap G \supseteq B \cap D \supseteq B \cap D_m$ contiene al menos dos elementos.

Afirmación 5.4.7. *Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple que $F_i \subseteq U_i$ es discreto y* $\mathrm{Cl}(F_i) = F_i \cup G$.

Demostración:

Tomemos $i \in \{1, ..., n\}$. Cada $V \in \mathcal{V}_i$ es no vacío, y por consiguiente podemos escoger un $x_V \in V$.Denotamos por $F_i = \{x_V | V \in \mathcal{V}_i\}$.Usando que $U_i = \bigcup \mathcal{V}_i$ tenemos que $F_i \subseteq U_i$.Por la afirmación 5.4.2 tenemos que $\mathcal{V}_i$ es disjunto dos a dos y $\{x_V\} = V \cap F_i$ para cada $V \in \mathcal{V}_i$. Puesto que cada $V \in \mathcal{V}_i$ es un subconjunto abierto de X, tenemos que F_i es discreto.
Tomemos $x \in G, m \geq 1$ y $B \in \mathcal{B}_m$ con $x \in B$. Entonces $x \in B \cap G$, y entonces $B \nsubseteq \bigcup \mathcal{V}^m$, por la afirmación 5.4.3. Por la condición (4a) existe un $V \in \mathcal{V}_i^m$ tal que $Int(V) \subseteq B$. Por otro lado, $V \in \mathcal{V}_i$ y $B \cap F_i \supseteq V \cap F_i = \{x_V\} \neq \emptyset$, con $x \in Cl(F_i)$. Por lo que $G \subseteq Cl(F_i)$ y por consiguiente $F_i \cup G \subseteq Cl(F_i)$.
Para probar la otra inclusión supongamos que $x \notin F_i \cup G$.Entonces $x \notin G$, de esta forma $x \in \bigcup_{j=1}^{n} U_j$.
Si $x \notin U_i$, entonces $\bigcup \{U_j | j \neq i\}$ es un recubrimiento abierto de x que es disjunto de F_i.Si $x \in U_i$, entonces $x \in V$ para algún $V \in \mathcal{V}_i$(este V es único,consecuencia de la afirmación 5.4.2). Cabe notar que $x \neq x_V$, esto provoca que $V \backslash \{x_V\}$ es un recubrimiento abierto de x disjunto de F_i. En ambos casos tenemos que $x \notin Cl(F_i)$. Entonces $Cl(F_i) \subseteq F_i \cup G$ y por consiguiente se da la igualdad. Con esto se completa la demostración del lema de partición.

A partir de este momento trataremos de demostrar el lema de mapeado para terminar demostrando el teorema 5.1.Para esto necesitamos un lema previo.

Lema 5.5. *Un espacio metrizable X denso en si mismo es m-resoluble para cada m≥1.*

Demostración:

Para cada $m \geq 1$, podemos construir recursivamente una familia disjunta dos a dos $\{A_1, ..., A_m\}$, la cual esta formada por subconjuntos densos de X. Tomemos $X_0 = X$.Supongamos que X_n es un subconjunto denso de X para algún $n \in w$.Entonces X_n es un espacio metrizable denso en si mismo. Por (Teorema 41,[22]), X_n es resoluble. Por lo que existe un $A_{n+1} \subseteq X_n$ tal que tanto A_{n+1} como $X_{n+1} := X_n \backslash A_{n+1}$ son densos en X_n. Por lo que $X_n = Cl(A_{n+1}) \cap X_n \subseteq Cl(A_{n+1})$ y similarmente tenemos que X_{nn+1}.Por lo cual tanto tenemos que A_{n+1} , X_{n+1} y X_n son densos en X. A través de un argumento de inducción tenemos que $X_m \subseteq X_n$ siempre y cuando $m \geq n$ puesto que por definición $X_{n+1} \subseteq X_n$.
Para ver que $\{A_1, ..., A_n\}$ es una familia disjunta dos a dos, sin perdida de generalidad tomemos $i > j \geq 1$.Entonces

$$A_i \cap A_j \subseteq X_{i-1} \cap A_j \subseteq X_j \cap A_j = (X_{j-1} \backslash A_j) \cap A_j = \emptyset$$

Claramente $\{A_1, ..., A_{m-1}, X \backslash \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\}$ es una partición densa de X con cardinalidad $m \geq 1$.

Definición 5.7. *Llamamos cuasi-árbol a un marco reflexivo y transitivo (M, R) que cumple que todos los antecesores de un punto x son comparables. Esto es que si yRx y zRx, entonces o yRz o bien zRy. Si tomamos la relación de equivalencia dada por $x \leftrightsquigarrow y \Leftrightarrow yRx$ e xRy, tomando las clases de equivalencia se pueden ordenar en forma de árbol.*

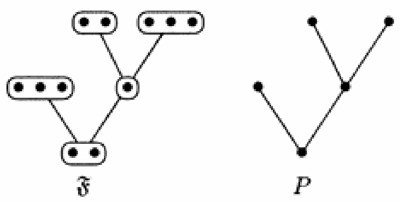


Figura 5.1: Ejemplo de cuasi-árbol $\mathcal{S}$ y el mismo cuasi-árbol tomando sus clases de equivalencia[20]

Proposición 5.1. *La lógica de los cuasi-árboles finitos es S4.*

Demostración:

Para demostrar este resultado necesitamos ver si se cumplen las propiedades de solidez y completud. La solidez se da ya que, al satisfacerse los teoremas de S4 en los modelos reflexivos y transitivos, también se satisfacen en particular para los cuasi-árboles.
Para demostrar la completud tomamos una fórmula φ consistente en S4, hemos visto en el capítulo anterior que existe un modelo finito $M = (X, R, V)$ y un punto x de este modelo tal que $M, x \models \varphi$. Tomamos ahora el submodelo $M = (X', R', V')$ definido de la siguiente forma:

- $X' = \{y \in X | xRy\}$
- $R' = R\big|_{X'}$
- $V' = V\big|_{X'}$

Habiendo definido el submodelo solo necesitamos probar que:

1. M' es un cuasi-árbol.
   Tomamos $y, z \in X'$ de forma que zRx y yRx, por la definición de X' tenemos que $xR'y$ e $xR'z$. La transitividad R' se da puesto que esta definida a partir de una relación transitiva, por lo que obtenemos zRy e yRz.

2. Los puntos de X' satisfacen las mismas formulas en M que en M'.
   Para esta demostración haremos una inducción sobre la longitud de la fórmula.

   - $\varphi = p$: $M, x \models p \iff x \in V(p) \iff x \in V'(p) \iff M', x \models p$
   - $\varphi = \psi \wedge \theta$:$M, x \models \psi \wedge \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{M,x}\models \psi \\ M, x \models \theta \end{cases}$

     $\Leftrightarrow$(aplicando hipótesis de inducción)$\begin{cases} \text{M',x}\models \psi \\ M', x \models \theta \end{cases}$

     $\Leftrightarrow M', x \models \psi \wedge \theta$
   - $\varphi = \neg\psi$:$M, x \models \neg\psi \Leftrightarrow M, x \not\models \psi \Leftrightarrow$ (aplicando la hipótesis de inducción)$M', x \not\models \psi \Leftrightarrow M', x \models \neg\psi$
   - $\varphi = \Box\psi$:$M, x \models \Box\psi \Leftrightarrow$ para cada $x' \in X'$ tal que $xRx', M, x' \models \psi \Leftrightarrow$(usando hipótesis de inducción) $M', x' \models \psi$ para cada $x' \in X'$ tal que xRx' $\Leftrightarrow M', x \models \Box\psi$

Con esto tenemos que $M', x \models \varphi$, de esta forma si una fórmula es consistente podemos encontrar un cuasi-árbol finito que la satisface. Con esto queda demostrada la completud.

Definición 5.8. *Sea (X, τ, V) un modelo topológico y sea (Y, σ) un espacio topológico cualquiera.Llamamos mapeo interior a una función $f : Y \to X$ continua,abierta y suprayectiva.*

A partir de un mapeo inferior f podemos definir una valuación $V_f(p) = \{y \in Y : f(y) \in V(p)\} = f^{-1}[V(P)]$

Proposición 5.2. *Sea $x \in X$ y sea $y \in Y$ una antiimagen de x. Entonces si $x \models \psi$ en $(X, \tau, V) \Leftrightarrow y \models \psi$ en (Y, σ, V_f)*

Para llevar a cabo esta demostración haremos una inducción sobre la longitud de la fórmula.

- $\varphi = p$: $x \models p \iff x \in V(p) \iff f^{-1}(x) \in f^{-1}(V(p)) \iff$ (aplicando la definición de la valuación)$y \in V_f(p) \iff y \models p$

- $\varphi = \psi \wedge \theta$:$x \models \psi \wedge \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{x}\models \psi \\ x \models \theta \end{cases}$

  $\Leftrightarrow$(aplicando hipótesis de inducción)$\begin{cases} \text{y}\models \psi \\ y \models \theta \end{cases}$

  $\Leftrightarrow y \models \psi \wedge \theta$

- $\varphi = \neg\psi$:$x \models \neg\psi \Leftrightarrow x \not\models \psi \Leftrightarrow$ (aplicando la hipótesis de inducción)$y \not\models \psi \Leftrightarrow y \models \neg\psi$

- $\varphi = \Box\psi$: Llamando $M = (X, \tau, V)$, $N = (Y, \sigma, V_f)$.

  Si $M, x \models \Box\psi$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $M, x' \models \psi$ para todo $x' \in U$. Tomamos y tal que $f(y) = x$. Tenemos que $y \in f^{-1}(U)$, puesto que Y es abierto por continuidad de f, y además, para todo $y' \in f^{-1}(U)$, tenemos que $f(y') \in U$, de modo que $M, f(y') \models \psi$ en (X, τ), y por hipótesis de inducción, $N, y' \models \psi$ en (Y, σ). Con esto concluimos que $N, y \models \Box\psi$.

  Recíprocamente, si $N, y \models \Box\psi$, entonces existe $V \in \sigma$ tal que $y \in V$ y $N, y' \models \psi$ para todo $y' \in V$. Pero entonces tomando $x = f(y)$,

$U = f(V)$, tenemos que U es abierto por ser f una función abierta), $x \in U$, y para todo $x' \in U$, $x' = f(y')$ para algún $y' \in V$, y como $N, y' \models \psi$, entonces $M, x' \models \psi$ por hipótesis de inducción. De modo que $M, x \models \Box\psi$.

Lema 5.6. ***Lema de Mapeado***
Sea X un espacio metrizable denso en si mismo y F un subespacio de X cerrado,discreto y no vacío. Entonces para cada cuasi-árbol finito $\mathcal{T}$ existe un mapeado interior de X sobre $\mathcal{T}$ tal que la imagen de F esta contenida en la raíz de $\mathcal{T}$.

Demostración:

Tomaremos el grupo raíz C de $\mathcal{T} = (W, R)$ conformado por m elementos, llamaremos $C = \{r_1, ..., r_m\}$. La demostración se realiza a través de inducción sobre la longitud de $\mathcal{T}$.

Primero supongamos que la long($\mathcal{T}$)=1. Entonces tendríamos que $W = C$. Por el lema 5.5, tenemos que X es resoluble.Tomemos $\{A_1, ..., A_m\}$ es una partición densa de X. Definiremos la función $f : X \to W$ tal que $f(x) = r_i$ siempre y cuando $x \in A_i$. Por(Lema 5.9 [23]), f está bien definido sobre el mapa interior.

Supongamos a continuación que la long($\mathcal{T}$) ≥ 2. Por la hipótesis de inducción, para cada espacio metrizable denso en si mismo Y, un subespacio cerrado discreto y no vacío Z de Y, y un cuasi-árbol finito $\mathcal{S}$ con longitud menor que la longitud de T, existe un mapa interior g de Y sobre $\mathcal{S}$ tal que $g(Z)$ esta contenida en el grupo raíz de $\mathcal{S}$. Tomemos $w_1, ..., w_n \in W$ tales que $\{C, R[w_1], ..., R[w_n]\}$ es una partición de W.
Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, tomamos $\mathcal{T}_i = (W_i, R_i)$ el submarco de $\mathcal{T}$ tal que $W_i = R[W_i]$.Entonces $\mathcal{T}_i$ es un cuasi-árbol tal que la $long(\mathcal{T}_i) < long(\mathcal{T})$ y $C_i := R_i^{-1}[w_i]$ es el grupo raíz de $\mathcal{T}_i$.

Aplicando el lema de partición, existe una partición $\{G, U_1, ..., U_n\}$ de X tal que G es un subespacio de X denso en si mismo y denso en ningún lugar que contiene a F, y cada U_i es un subespacio abierto de X que contiene un subespacio discreto no vacío F_i tal que $Cl(F_i) = F_i \cup G$.Partiendo de que G es un espacio metrizable denso en si mismo, aplicando el lema 5.5 obtenemos una partición densa de G $\{A_1, ..., A_n\}$.También cada U_i es un espacio metrizable denso en si mismo y F_i es un cerrado relativo de U_i puesto que:

$$Cl_{U_i}(F_i) = Cl(F_i) \cap U_i = (F_i \cup G) \cap U_i = F_i$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que existe un mapa interior f_i de U_i sobre $\mathcal{T}_i$ tal que $f_i(F_i) \subseteq C_i$.Defino $f : X \to$ tal que:

$$f(X) = \begin{cases} \text{r}_i \text{ si } x \in A_i \text{ para } i \in \{1, ..., m\} \\ \text{f}_j(x) \text{ si } x \in U_j \text{ para } j \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Entonces f esta bien definido puesto que $\{A_1, ..., A_m, U_1, ..., U_m\}$ es una partición de X.

Para ver que f es continua, es suficiente ver que $f^{-1}(R[w])$ es un abierto en X para cada $w \in W$.Si $w \in C$ entonces $R[w] = W$ y por lo tanto $f^{-1}(R[w]) = f^{-1}(W) = X$. Si $x \notin C$, entonces $w \in W_i$ para un único $i \in \{1, ..., n\}$ y por eso $R[w] = R_i[w] \subseteq W_i$. Porque f_i es un mapa interior, $f^{-1}(R_i[w])$ es un subconjunto abierto de U_i. Partiendo de que U_i es un abierto en X, concluimos que $f^{-1}(R[w])$=$f^{-1}(R_i[w])$ es un subconjunto abierto de X. Por lo que concluimos que f es continua.

Para ver que f es abierta, tomamos U un subconjunto abierto de X, recordando que $\{G, U_1, ..., U_n\}$ es una particion de X tenemos que:

$$f(U) = f(U(G \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i)) = f((U \cap G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (U \cap U_i)) =$$
$$\text{f}(\text{U}\cap G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} f(U \cap U_i) = f(U \cap G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} f_i(U \cap U_i)$$

Cada $U \cap U_i$ es un subconjunto abierto de U_i.Partiendo de que f_i es un mapa interior, $f_i(U \cap U_i)$ es un $R_i - cono$ de $\mathcal{T}_i$ y por lo tanto un $R - cono$ de $\mathcal{T}$. Si $U \cap G = \emptyset$ entonces $f(U) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(U \cap U_i)$ es una unión de $R - conos$ de $\mathcal{T}$, por lo que es un $R - cono$ de $\mathcal{T}$.

Supongamos ahora que $U \cap G = \emptyset$. Podemos ver que $f(U) = W$.Partiendo de una partición densa de G, $\{A_1, ..., A_n\}$ tenemos que $(U \cap G) \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$.
Por lo tanto, $\{r_i\} = f(U \cap G \cap A_i) \subseteq f(U \cap G)$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$,utilizando esto obtenemos que $f(U \cap G) = C$.Partiendo de $U \cap G \neq \emptyset$ tenemos que $U \cap cl(F_j) \neq \emptyset$, por lo que $U \cap F_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$.Tomemos $x_j \in U \cap F_j$. Entonces $f(x_j) = f_j(x_j) \in C_j$, el cual es el grupo raiz de $\mathcal{T}_j$.Pero $f(x_j) \in f_j(U \cap U_j)$, el cual es un $R_j - cono$ de $\mathcal{T}_j$ utilizando que f_j es un mapa interior.De este modo, $f_j(U \cap U_j) = W_j$.Consecuentemente, $f(U) = C \cap \bigcup_{i=1}^{n} W_i = W$, y por esto f es abierta, completando la demostración.

Con todos estos resultados podemos probar que si tomamos una fórmula consistente en S4 y un espacio topológico metrizable y denso en si mismo.

1. Existe un cuasi-árbol finito (Y, R) y un punto $y \in Y$ tal que $y \models \varphi$ Esto se obtiene la proposición 5.1
2. Existe un mapeo interior $f : X \leftarrow Y$. Esto se cumple por el lema de mapeado
3. Existe una valuación V_f en (X, τ) y existe un punto $x \in f^{-1}(y)$ tal que $(X, \tau, V_f), x \models \varphi$ Aplicando la suprayectividad del mapeado interior y la característica de que en el cuasi-árbol se verifican las mismas fórmulas, obtenemos que existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $(X, \tau, V_f), x \models \varphi$.

Con lo que concluimos el resultado.

Capítulo 6

Aplicaciones y conclusión

En este último apartado veremos de que forma podemos aplicar los conceptos lógicos o topológicos en aspectos tanto de la vida real como en otras áreas de las matemáticas.

6.1. Teoría de la mente de segundo orden

La teoría de la mente tiene varios ordenes, en nuestro caso utilizaremos la teoría de segundo orden.Esta se basa en la capacidad de pensar acerca de los pensamientos de otra persona. La mejor manera de explicar estos conceptos es a través de un ejemplo.

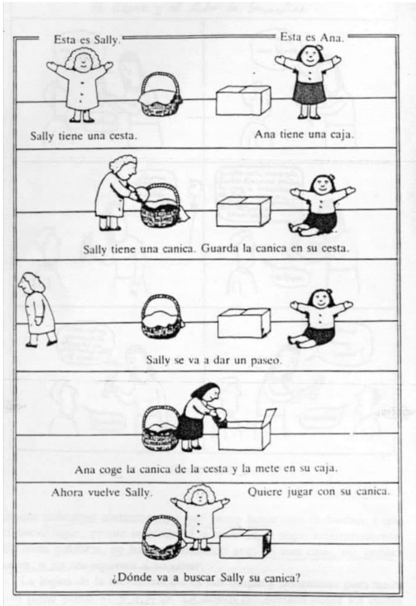


Figura 6.1: Ejemplo de interacción en la teoría de la mente de segundo orden[24]

En la figura 1 podemos apreciar un ejemplo de un test con el que se comprueba si una persona realiza tareas de segundo orden.
Primero vamos a describir la secuencia de la imagen. En la imagen podemos observar como Sally tiene una cesta y Ana una caja, posteriormente vemos como Sally guarda una canica en su cesta y abandona la habitación. Por último podemos ver como Ana extrae la canica de Sally de la cesta y la guarda en su caja.
En este momento le debemos preguntar a la persona que realiza el test donde cree que Sally va a buscar su canica cuando vuelva a la habitación.
En este momento nos aparecen 2 respuestas posibles.

1. "Sally buscara su canica en la caja".
   Con esta respuesta podemos ver que la persona de estudio no realiza tareas de segundo grado, esto se debe a que no tiene en cuenta que Sally al no haber visto el cambio de posición de su canica, tiene la falsa creencia de que esta permanece en su cesta.

2. "Sally buscara su canica en la caja".
   Con esta respuesta podemos asegurar que la persona de estudio realiza

tareas de segundo grado puesto que esta teniendo en cuenta para responder la información que tiene Sally. De esta forma asegurarnos que puede razonar respecto a los pensamientos de otras personas.

Habiendo presentado la situación y la utilidad del estudio podemos realizar el mismo estudio utilizando los caracteres lógicos que hemos estado utilizando durante todo el trabajo.

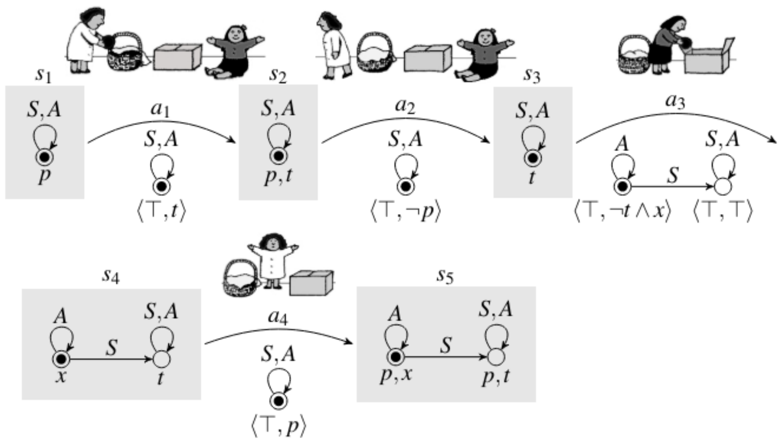


Figura 6.2: Ejemplo de interacción en la teoría de la mente de segundo orden por caracteres lógicos[24]

Usando la llamada lógica dinámica epistémica [25], en particular la lógica de modelos de acciones [14], el informático Thomas Bolander [24] fue capaz de modelar el test de Sally-Ann. Gracias a la decidibilidad de esta lógica, en 2020, programa un robot que supera el test.[26]

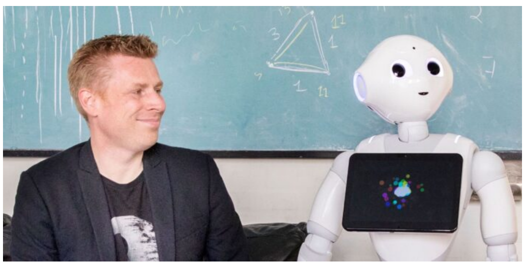


Figura 6.3: Thomas Bolander junto a su robot[26]

6.2. Conclusión

Durante este trabajo hemos ido presentando distintos conceptos lógicos y topológicos, gracias a los cuales, hemos podido establecer una serie de relaciones entre ellos. Empezamos con una introducción histórica y conceptual para contextualizar el trabajo, aquí detallamos los axiomas y la norma que conforman la Lógica clásica proposicional y las distintas formas que hay para demostrar la veracidad de las fórmulas.

La investigación abordó una presentación de las distintas lógicas modales, entre las que destaca la lógica epistémica por su capacidad de modelar la incertidumbre. Por otro lado, se incluyó la teoría de la mente de segundo orden, concepto de la psicología que se usa para expresar la capacidad de razonar sobre lo que saben y no saben otros; este estudio se ejemplificó a través del análisis de la figura 6.1, trabajando con lo que se llaman lógicas dinámicas.

Caben destacar dos de los resultados más importantes de la investigación han sido:

- S4 es la lógica de los modelos reflexivos y transitivos.
- S4 es la lógica de cualquier espacio metrizable y denso en si mismo

Para el segundo resultado utilizamos la demostración simplificada de McKinsey y Tarski.

En resumen, la utilización de modelos topológicos y semánticos nos permiten avanzar en la comprensión conceptos lógicos, estos conceptos se ven aplicados en áreas como la inteligencia artificial. Como ejemplo práctico podemos recurrir al robot fabricado por Thomas Bolander.

Estos conceptos siguen en continuo desarrollo, cabe destacar la figura de Aybüke Ozgün. En el artículo [27] Ozgün junto con Adam Bjorndahl consiguen elaborar estructuras lógicas, las cuales pueden ser vistas como generalizaciones de espacios topológicos. Por otro lado en el artículo [28] Aybüke , Alexandru Baltag y Ana Lucia Vargas Sandoval consiguen introducir lo que llaman “memoria” en las condiciones iniciales y utilizan los operadores modales para recurrir a esa memoria. Estos tres investigadores, demostraron que esa lógica es axiomatizable de manera recursiva, esto es sorprendente puesto que la axiomatización de esta lógica prescindiendo de la memoria todavía no ha sido probada. Otros autores que continúan con sus investigaciones en este área y que merecen ser nombrados son Alexandry Baltag[29] y Hans van Ditmarsch[14]

Bibliografía

[1] C. I. Lewis. A new system of modal logic. *The Monist*, 24(4):495–527, 1914.

[2] Clarence Irving Lewis, Cooper Harold Langford, and P Lamprecht. *Symbolic logic*, volume 170. Dover publications New York, 1959.

[3] Arthur N Prior. *Objects of thought*. Oxford University Press, 1971.

[4] Manuel Asensi Pérez et al. Teoría de los modelos de mundo y teoría de los mundos posibles. *Actio Nova: Revista de teoría de la literatura y literatura comparada*, pages 38–55, 2016.

[5] María Pía Fava Pérez, Alba Massolo, and Luis Adrián Urtubey. La semántica de mundos posibles y las nociones modales en peirce.

[6] Saul A Kripke. Semantical considerations on modal logic. *Acta philosophica fennica*, 16, 1963.

[7] Saul A Kripke et al. *Naming and necessity*, volume 217. Springer, 1980.

[8] Saul Kripke and Milton K Munitz. Identity and necessity. *1971*, pages 135–164, 1971.

[9] David K Lewis et al. *On the plurality of worlds*, volume 322. Blackwell Oxford, 1986.

[10] Juan José Acero. Jaakko hintikka (1929-2015). *Teorema: Revista Internacional de Filosofía*, pages 139–147, 2016.

[11] Kaarlo Jaakko Juhani Hintikka. Knowledge and belief: An introduction to the logic of the two notions. 1962.

[12] Jaakko Hintikka. *The Logic of Epistemology and the Epistemology of Logic*. 1991.

[13] A. Klinoff. Lógica clásica y lógicas no clásicas en su relación a la lógica del significante. *Revista el rey está desnudo*, 13(16):145–152, 2020.

[14] Johan van Benthem and Guram Bezhanishvili. Modal logics of space. In *Handbook of spatial logics*, pages 217–298. Springer, 2007.

[15] Dick de Jongh and Ana Lucia Vargas Sandoval. Minimal negation. 2015.

[16] Patrick Blackburn, Maarten De Rijke, and Yde Venema. *Modal logic: graph. Darst*, volume 53. Cambridge University Press, 2001.

[17] Aybüke Özgün. *Evidence in epistemic logic: a topological perspective.* PhD thesis, University of Amsterdam, 2017.

[18] J. C. C. McKinsey and Alfred Tarski. The algebra of topology. *Annals of Mathematics*, 45(1):141–191, 1944.

[19] Helena Rasiowa. The mathematics of metamathematics. 1963.

[20] Guram Bezhanishvili, Nick Bezhanishvili, Joel Lucero-Bryan, and Jan van Mill. A new proof of the mckinsey–tarski theorem. *Studia Logica*, 106:1291–1311, 2018.

[21] Ryszard Engelking. General topology. *Sigma series in pure mathematics*, 6, 1989.

[22] Edwin Hewitt. A problem of set-theoretic topology. 1943.

[23] Guram Bezhanishvili, Nick Bezhanishvili, Joel Lucero-Bryan, and Jan van Mill. Krull dimension in modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 82(4):1356–1386, 2017.

[24] Thomas Bolander. Seeing is believing: Formalising false-belief tasks in dynamic epistemic logic. In *European conference on social intelligence (ECSI 2014)*, pages 87–107, 2014.

[25] J. Plaza. Logics of public communications. In *Proceedings of the 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems (IS-MIS)*, pages 201–216. Oak Ridge National Laboratory, 1989.

[26] Lasse Dissing Hansen and Thomas Bolander. Implementing theory of mind on a robot using dynamic epistemic logic. In *Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1615–1621. International Joint Conference on Artificial Intelligence Organization, 2020.

[27] Adam Bjorndahl and Aybüke Özgün. Uncertainty about evidence. *arXiv preprint arXiv:1907.09098*, 2019.

[28] Alexandru Baltag, Aybüke Özgün, and Ana Lucia Vargas Sandoval. Arbitrary public announcement logic with memory. *Journal of Philosophical Logic*, 52(1):53–110, 2023.

[29] Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss, and Slawomir Solecki. The logic of common knowledge, public announcements and private suspicions. In *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, pages 43–56, 1998.