



Universidad de Oviedo

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

MODELO DE DISTORSIÓN
GENERADO POR LA
MODIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN
MASA DE PROBABILIDAD

Autora: IRINA LÓPEZ DA SILVA

Tutor: IGNACIO MONTES GUTIÉRREZ

Índice general

1. Introducción	1
2. Probabilidades imprecisas	3
2.1. Probabilidades y esperanzas	4
2.2. Probabilidades inferiores	8
2.3. Previsiones inferiores	16
2.4. Intervalos de probabilidad	22
3. Modelos de distorsión	25
3.1. Definición General	25
3.2. Transformaciones de probabilidades	27
3.3. Modelos Nearly-Linear	29
3.4. Casos particulares de modelos VBM	31
3.4.1. Modelo Linear Vacuous	31
3.4.2. Modelo Pari Mutuel	34
3.4.3. Modelo de la Variación Total	37
4. Un nuevo modelo de distorsión, el modelo (g_l, g_u)	41
4.1. Definiciones y resultados generales	41
4.2. Relación con los modelos de distorsión	46
4.2.1. Relación con el modelo LV	47

4.2.2.	Relación con el modelo PMM	49
4.2.3.	Relación con los modelos de distorsión	52
4.2.4.	Relación con el resto de modelos	56
4.3.	Algunos ejemplos	56
4.3.1.	Función cuadrática	56
4.3.2.	Función cuasi-lineal	60
5.	Conclusiones	62
	Bibliografía	64

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de la Probabilidad ocupa un papel crucial en el desarrollo de diversos campos de estudio, como pueden ser la psicología, la biología o la ingeniería, entre otros. Sin embargo, en muchas situaciones no es posible conocer con exactitud la información del experimento. De hecho, en la mayoría de las ocasiones la información con la que trabajamos es incompleta, inexacta o insuficiente, de manera que, obtendríamos conclusiones inexactas o, incluso, erróneas si trabajásemos con la teoría de probabilidad clásica, pues asumiríamos que tenemos información completa cuando la realidad es otra. Para subsanar esta cuestión surge la Teoría de las Probabilidades Imprecisas.

La Teoría de Probabilidades Imprecisas es una rama de la Teoría de la Probabilidad que incorpora de una manera más realista la imprecisión en los estudios probabilísticos, a diferencia de los enfoques clásicos. Cuando trabajamos con probabilidades imprecisas tenemos en cuenta y reconocemos la incertidumbre y la falta de información en las situaciones habituales del mundo real. Básicamente esta teoría se basa en el uso de conjuntos de probabilidades compatibles con la información disponible.

Dentro de esta teoría, uno de los modelos más destacados tanto por su interpretación como por sus buenas propiedades es el de los modelos de vecindario o de vecindario. Estos modelos consideran una bola cerrada entorno a una probabilidad con respecto a una determinada función que compara probabilidades, llamada función de distorsión, y un radio, llamado factor de

distorsión.

Este trabajo tiene un doble objetivo. Tras realizar una introducción a la teoría de las probabilidades imprecisas en el Capítulo 2, en el Capítulo 3 se realizará una revisión sobre los principales modelos de distorsión presentes en la literatura, enfatizando las conexiones existentes entre ellos. Por otra parte, en el Capítulo 4 se introducirá un nuevo modelo de distorsión que surge haciendo una modificación de la función masa de probabilidad y se analizará la conexión que hay entre los modelos del capítulo anterior y la nueva propuesta, tratando de explicar los pros y contras de cada uno de los modelos. Se concluirá el trabajo en el Capítulo 5 haciendo un resumen de lo visto a lo largo del trabajo y explicando posibles líneas de investigación futuras.

Capítulo 2

Probabilidades imprecisas

La Teoría de la Probabilidad tiene como base fundamental el espacio probabilístico, pues sobre él se definen y analizan los sucesos de interés del experimento. Por eso comenzaremos definiendo con claridad este concepto, que será la base sobre la que desarrollaremos toda la teoría. Todos los conceptos que introduciremos a continuación son ampliamente conocidos, y se pueden consultar por ejemplo en [2], para el caso de la Teoría de la Probabilidad, o en [17] para el caso de las Probabilidades Imprecisas.

Construiremos nuestra teoría sobre un espacio muestral finito con el fin de simplificar la manipulación y el trabajo con σ -álgebras y subconjuntos de Ω . Sea E un experimento aleatorio. Consideramos el conjunto finito de posibles resultados elementales del experimento E , que denotaremos como Ω y denominaremos espacio muestral. Consideramos un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ que tenga estructura de álgebra, y definimos una probabilidad como una aplicación

$$\begin{aligned} P: \mathcal{A} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

que verifica los axiomas de Kolmogorov:

1. No negatividad: $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
2. Normalización: $P(\Omega) = 1$.
3. Aditividad: Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Así, decimos que la tupla (Ω, \mathcal{A}, P) es un *espacio de probabilidad* o *espacio probabilístico*. Notemos que por haber tomado un espacio muestral Ω finito, no es necesario especificar finito-aditividad o sigma-aditividad, de hecho, nos referiremos a ella simplemente como aditividad.

Para dejar claros estos conceptos probabilísticos claves en el desarrollo de nuestro trabajo, veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 2.1. *Si tenemos un dado perfecto de 6 caras, y consideramos el experimento "Lanzar el dado al aire y anotar el resultado obtenido", tenemos los siguientes elementos para el espacio probabilístico:*

- *Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*
- *Álgebra de conjuntos: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.*
- *Dado que el dado es justo, la probabilidad asociada está definida como:*

$$\begin{aligned} P: \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(A) = \frac{|A|}{6} \end{aligned}$$

donde $|A|$ denota el cardinal del conjunto A .

A continuación, veremos algunas de las características más relevantes de las probabilidades e introduciremos el concepto de variable aleatoria, que será clave en el desarrollo del trabajo.

2.1. Probabilidades y esperanzas

Comenzamos la sección destacando algunas propiedades básicas que cumplen las probabilidades y que pueden ser útiles en el desarrollo de nuestro estudio. Estas propiedades, todas ellas bien conocidas, se resumen en el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Consideremos el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y sean $A, B \in \mathcal{A}$, entonces la probabilidad P verifica:*

- *Monotonía: Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.*

- *Conjunto vacío:* $P(\emptyset) = 0$.
- *Complementario:* $P(A) + P(A^c) = 1$.
- *Inclusión-exclusión:* $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

De la definición de probabilidad surge un nuevo concepto que simplifica el desarrollo teórico y la interpretación del mismo, las variables aleatorias. Estas nos permiten trabajar con funciones reales de variable real, con las que estamos mucho más familiarizados.

Definición 2.1. *Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad. Decimos que una función*

$$\begin{aligned} f: (\Omega, \mathcal{A}, P) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \\ \omega &\longmapsto f(\omega) \end{aligned}$$

es una variable aleatoria si es medible con respecto a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, es decir si para todo $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ se cumple $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

En rasgos generales, una variable aleatoria es una función definida de un espacio de probabilidad cualquiera en el espacio de probabilidad asociado a \mathbb{R} , y cuyo conjunto imagen inversa constituye un suceso de interés, o en otras palabras, es una función medible. Este hecho nos aporta una serie de facilidades, pues podemos replicar los resultados del análisis matemático, y más concretamente de la Teoría de la Medida, para desarrollar la Teoría sobre la Probabilidad. En nuestro caso particular, como estamos considerando el espacio muestral finito, la sigma-álgebra asociada puede ser $\mathcal{P}(\Omega)$ lo que implica que cualquier función f que definamos será medible y por tanto, una variable aleatoria.

Un concepto que utilizaremos a menudo relacionado con las variables aleatorias es la esperanza, pues nos permite conocer y estudiar de una manera más sencilla el comportamiento de nuestra variable.

Definición 2.2. *Sea f una variable aleatoria, se define la esperanza de f con respecto a la probabilidad P como:*

$$E_P(f) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})f(\omega). \quad (2.1)$$

De aquí en adelante, cometeremos un abuso de notación: en lugar de utilizar P para denotar la medida de probabilidad y E_P para denotar su operador esperanza, utilizaremos P para designar ambas medidas, dando por hecho que entenderemos P como la esperanza cuando sea aplicada a una variable aleatoria y como una probabilidad cuando sea aplicada a un suceso. Nos permitimos este abuso porque, en realidad, los conceptos de esperanza de una variable aleatoria y de probabilidad asociada a un suceso son nociones equivalentes. Basta considerar la función indicadora asociada al suceso, sobre la que se define la esperanza. Es decir, dado cualquier suceso A , podemos considerar la variable aleatoria

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ pertenece al suceso } A, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de manera que $P(A) = E_P(I_A)$. Por lo tanto, a partir de la probabilidad P se puede calcular la esperanza de cualquier variable aleatoria f según la Ecuación (2.1), y viceversa, a partir del operador esperanza E_P se puede calcular la probabilidad de cualquier suceso. Esto se muestra gráficamente en la Figura 2.1.

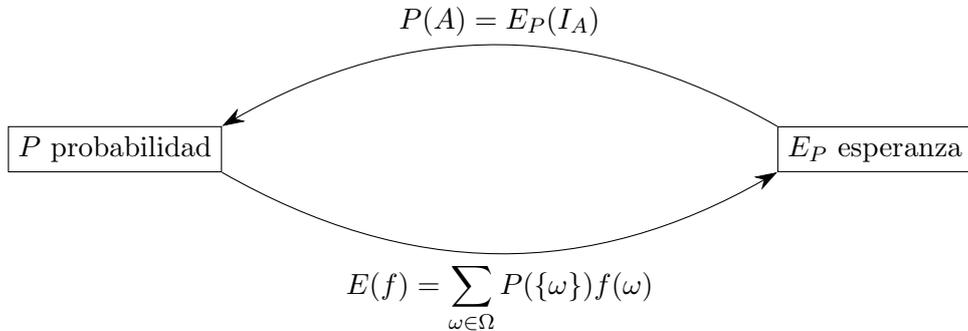


Figura 2.1: Descripción gráfica de la relación entre la probabilidad P y su operador esperanza E_P .

Este abuso de notación es habitual en la interpretación comportamental de la probabilidad y de las variables aleatorias dada por Bruno de Finetti [8]. Esta interpretación percibe las variables aleatorias como apuestas, de forma que el resultado de la variable aleatoria es la ganancia o pérdida del sujeto,

e interpreta la esperanza de la variable aleatoria como el precio justo de compra o venta de dicha apuesta para el individuo que está haciendo la asignación. Es decir, se sigue una interpretación subjetiva de la probabilidad. Por este motivo, en la interpretación comportamental no se suele hablar de variable aleatoria si no de apuesta, y se habla de la previsión de una apuesta en lugar de esperanza de la variable aleatoria. Veamos un ejemplo para entenderlo mejor.

Ejemplo 2.2. *Ana ha ido al centro hípico a ver un partido de polo, quiere probar suerte y decide hacer una apuesta. Los dos equipos que compiten son 'La Querencia' y 'Dos Lunas'. 'La Querencia' es el equipo favorito de los apostantes, y en concreto Ana considera que el precio justo de una apuesta a favor de este equipo es de 65\$ si tiene la posibilidad de ganar 100\$ en caso de que sean los ganadores.*

Ana también decidió invitar a su amigo Alejandro. Alejandro trabaja en un hípico y tiene más conocimiento sobre los equipos. De hecho, sabe que un caballo del equipo 'La Querencia' ha pasado por una lesión hace menos de dos meses, por lo que, para Alejandro, la probabilidad de que ganen es del 50%, es decir, con la información adicional considera que el precio justo por un apuesta a favor de 'La Querencia' es de 50\$.

Según la interpretación comportamental de las probabilidades de Bruno de Finetti, la probabilidad de que gane 'La Querencia' para Ana es del 0.65 y para Alejandro es del 0.50. Como se puede ver, la probabilidad es subjetiva puesto que depende del sujeto que haga la asignación.

De ahora en adelante, de acuerdo con la interpretación dada previamente, será habitual que denominemos las variables aleatorias como apuestas.

Por otro lado, cuando consideramos la compra o venta de una apuesta, se desprenden dos conceptos clave: el beneficio y el beneficio esperado. Cuando compro la apuesta f a un precio $P_0(f)$ obtengo un beneficio de $f - P_0(f)$ y un beneficio esperado de $P_0(f - P_0(f)) = P_0(f) - P_0(f) = 0$. Análogamente, si vendemos la apuesta f a un precio $P_0(f)$ el beneficio será $P_0(f) - f$ y el beneficio esperado será de 0. En el caso particular de Ana en el Ejemplo 2.2, si mantiene su precio para la apuesta, obtendrá un beneficio esperado de 0, pero si consigue comprar esta apuesta por un valor $c < 0.65$, tendrá un beneficio esperado de valor $P_0(f - c) = P_0(f) - c = 0.65 - c > 0$.

Es decir, para obtener un beneficio esperado distinto de cero, tendremos que modificar el precio justo de compra de la apuesta, es decir $P_0(f)$. En la Figura 2.2 podemos ver una representación gráfica de la situación.

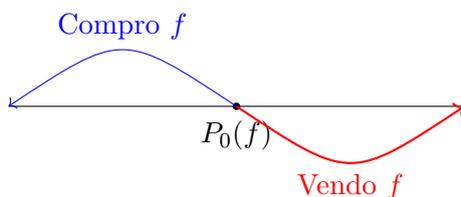


Figura 2.2: Esquema de decisión.

Observando el esquema, vemos que para cualquier precio inferior a $P_0(f)$ nos interesa (es decir, hay un beneficio esperado positivo) comprar la apuesta, mientras que para cualquier precio superior a $P_0(f)$ nos interesa vender la apuesta. Además, notamos que hay un único punto que separa la decisión de comprar o vender la apuesta. Quizá sería más interesante tener una transición más suave en el cambio de decisión entre compra y venta de la apuesta, pues no parece muy lógico que una ligera modificación en el precio haga que la decisión cambie de comprar a vender, o viceversa. Si pensamos en una situación real parece demasiado radical pensar que ese cambio de decisión esté dado por un único punto.

La problemática que observamos en este ejemplo se soluciona con los modelos de probabilidades imprecisas. Estos nos ayudan a modelar situaciones de nuestro día a día en las que no disponemos de suficiente información para determinar la distribución de probabilidad de un suceso o, siguiendo con la interpretación comportamental, situaciones en las que no hay suficiente información para determinar los precios justos de compra/venta. Veremos con detalle estos modelos, pero previamente es necesario introducir algunas nociones básicas que emplearemos con regularidad.

2.2. Probabilidades inferiores

En primer lugar, definiremos la noción de probabilidad inferior. Resulta interesante comenzar con un ejemplo del que se desprende la necesidad de

definir este concepto.

Ejemplo 2.3. *Continuemos con el Ejemplo 2.2. Ahora, Ana y Alejandro se lo están tomando más en serio y quieren barajar más posibilidades.*

- $W = \text{Gana 'La Querencia'}$.
- $L = \text{Pierde 'La Querencia'}$.
- $D = \text{Empatan}$.

Bajo el conocimiento de Ana sobre las habilidades de su equipo favorito, ya hemos visto que asocia $P(W) = 0.65$. Además, el campo en el que están jugando no es muy bueno para la mayoría de los caballos visitantes, por lo que apenas considera la posibilidad de que pierdan y le da una probabilidad de $P(L) = 0.10$, pero conociendo al capitán de 'Dos Lunas', sí que ve una pequeña posibilidad de que empaten contra él, es decir $P(D) = 0.25$. Estas probabilidades vienen de la interpretación probabilística de Bruno de Finetti, y como podemos observar, son completamente subjetivas y surgen ciertas dudas a raíz de ellas: ¿quizá esté siendo demasiado generosa con su equipo favorito? ¿Estará Ana subestimando al resto de competidores? ¿Está teniendo en cuenta factores externos, como un tropiezo o un caballo con un mal día? ¿Sabe que uno de los caballos de 'La Querencia' estuvo lesionado no hace mucho tiempo?

Este tipo de imprecisiones son habituales en la mayoría de las situaciones de la vida real pues tenemos ciertos factores que no podemos “medir”, ni siquiera tener en cuenta porque pueden ser desconocidos. Una buena solución a esta cuestión es dar una “cota” para las probabilidades de un suceso y así tener un buen análisis de la situación que nos permita tomar la mejor decisión, y en el caso de las apuestas, decidir qué acción nos dará un mayor beneficio. Esas cotas de las que hablamos son las que dan lugar a los conceptos de probabilidad inferior y superior. Antes de introducirlos formalmente, notemos que como estamos trabajando con un espacio Ω finito, de ahora en adelante consideraremos que el álgebra de conjuntos donde está definida la probabilidad es $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Además, introducimos la siguiente notación: consideraremos el conjunto de todas las probabilidades definidas sobre $\mathcal{P}(\Omega)$

y lo denotaremos como

$$\mathbb{P}(\Omega) := \{P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \text{ siendo } P \text{ una probabilidad}\}$$

y denotaremos su interior como

$$\mathbb{P}^*(\Omega) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(A) > 0 \quad \forall A \neq \emptyset\}.$$

Una vez fijada esta notación, pasamos a introducir el concepto de probabilidad inferior.

Definición 2.3. Una aplicación $\underline{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ es una probabilidad inferior si verifica:

- $\underline{P}(\emptyset) = 0$.
- $\underline{P}(\Omega) = 1$.
- Dados $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $A \subseteq B$, entonces $\underline{P}(A) \leq \underline{P}(B)$.

A raíz de la definición de probabilidad inferior, tenemos la definición de probabilidad superior.

Definición 2.4. La aplicación $\overline{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ es la probabilidad superior conjugada de \underline{P} si para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se verifica $\overline{P}(A) = 1 - \underline{P}(A^c)$.

Las probabilidades inferiores y superiores tienen dos interpretaciones principales, la epistémica y la comportamental.

- Interpretación epistémica: en este caso se interpreta que $\underline{P}(A)$ y $\overline{P}(A)$ son cotas, inferiores y superiores, de la probabilidad real, pero desconocida, del suceso. De esta forma, se supone que hay una probabilidad real P_0 y que todo lo que se conoce sobre ella es que $\underline{P}(A) \leq P_0(A) \leq \overline{P}(A)$ para todo suceso A .
- Interpretación comportamental: esta interpretación va en línea con la interpretación comportamental de Bruno de Finetti. En este caso, $\underline{P}(A)$ se interpreta como el supremo de los precios que el individuo está dispuesto a pagar por I_A , es decir, la ocurrencia del suceso A , mientras que $\overline{P}(A)$ es el ínfimo de los precios de venta para I_A .

Siguiendo con esta segunda interpretación, y recordando el esquema de la Figura 2.2, observamos que quizá estos dos conceptos nos puedan resolver el problema de la diferencia entre compra y venta. Podemos ver que con estos nuevos conceptos el esquema de decisión se ve modificado y es un poco más realista.

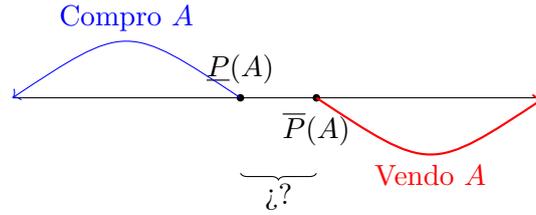


Figura 2.3: Esquema de decisión probabilidades inferior y superior para cierto suceso $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

En la Figura 2.3 observamos la casuística que nos interesa, lo que buscamos es hacer “más suave” el cambio de decisión entre comprar y vender. En el intervalo que señalamos en azul, el precio de la apuesta es bajo, por lo que el individuo estaría dispuesto a comprar la apuesta. En cambio, en el intervalo que indicamos en rojo el precio de la apuesta es muy alto para el individuo, y lo lógico es que su decisión fuese vender la apuesta. Si comparamos este esquema con la Figura 2.2, en este caso tenemos un intervalo $[\underline{P}(A), \bar{P}(A)]$ en el que el individuo estaría indeciso puesto que no tendría la suficiente información para saber si lo adecuado es comprar o vender.

Una probabilidad inferior y su probabilidad superior conjugada definen un conjunto de probabilidades de interés, habitualmente llamado conjunto credal.

Definición 2.5. Sea \underline{P} una probabilidad inferior y sea \bar{P} su probabilidad superior conjugada. Definimos el conjunto credal asociado a \underline{P} como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\underline{P}) &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(A) \geq \underline{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(A) \leq \bar{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Evidentemente, las dos expresiones dadas en la Ecuación (2.2) son equivalentes por la relación de conjugación entre \underline{P} y \bar{P} .

Al igual que hacíamos con las probabilidades inferiores y superiores, el conjunto credal también tiene dos posibles interpretaciones:

- Interpretación epistémica: consideramos el conjunto credal como el conjunto de probabilidades que son compatibles con las cotas dadas por la probabilidades inferior y superior. Es decir, aquellas probabilidades que son candidatas a ser la probabilidad P_0 real y desconocida.
- Interpretación comportamental: en este caso, el conjunto credal contendría todos los precios justos de venta/compra (según la interpretación de Bruno de Finetti). Es decir, probabilidades que son compatibles con el supremo precio de compra e ínfimo precio de venta dadas por las probabilidades inferior y superior.

Como con todo concepto matemático, es deseable que las probabilidades inferiores y superiores cumplan algunas propiedades de racionalidad para evitar ciertas situaciones que no nos interesan, como la que se da en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. *Continuando con el ejemplo anterior, Ana aún no ha decidido cuál será su apuesta. Quiere tomar una buena decisión por lo que continúa dándole vueltas y decide considerar los siguientes sucesos:*

- $W = \text{Gana 'La Querencia'}$.
- $L = \text{Pierde 'La Querencia'}$.
- $D = \text{Empatan}$.
- $WL = \text{Gana o pierde 'La Querencia'}$.
- $WD = \text{Gana o empata 'La Querencia'}$.
- $DL = \text{Empata o pierde 'La Querencia'}$.

En la siguiente tabla figuran las probabilidades inferiores que Ana ha asociado a cada suceso.

Suceso	W	L	D	WL	WD	DL
\underline{P}	0.5	0.2	0.3	0.2	0.1	0.6

Tabla 2.1: Probabilidades inferiores asignadas por Ana.

Cualquier P en el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$ debería cumplir, entre otras cosas:

$$P(DL) \geq \underline{P}(DL) = 0.6.$$

$$P(D) \geq \underline{P}(D) = 0.3.$$

$$P(L) \geq \underline{P}(L) = 0.2.$$

Veamos qué ocurre con este ejemplo. Si consideramos $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$, P debería satisfacer

$$P(W) \geq 0.5 \quad y$$

$$P(DL) \geq 0.6,$$

pero P no deja de ser una probabilidad, entonces por el axioma de normalización debe ocurrir $P(\Omega) = 1$ pero $\Omega = W \cup DL$ entonces

$$1 = P(\Omega) = P(W) + P(DL) = 1.1,$$

obteniendo una contradicción. En esta casuística, siempre va a tener lugar uno de los dos sucesos que estamos considerando, W o DL , de manera que Ana siempre ganaría 1\$, pues ha apostado por ambos sucesos. Pero no olvidemos que ella habría pagado $0.5 - \epsilon$ por W y $0.6 - \epsilon$ por DL , es decir, en total habría hecho una inversión de $1.1 - 2\epsilon$. Recordemos que ϵ es estrictamente positivo, de manera que Ana siempre perdería dinero, porque habría ganado 1\$ con total seguridad, pero tras haber pagado un precio superior. Ana va a obtener una pérdida segura.

Un conjunto credal vacío significa que no hay ninguna probabilidad compatible con la información dada por \underline{P} . De acuerdo con [17], eso significa que hay una combinación de apuestas que nos proporcionaría una pérdida segura, como le ocurre a Ana en el ejemplo anterior. De aquí se desprende el nombre de la siguiente propiedad: la propiedad de “evita la pérdida segura”, que denotaremos ASL por sus siglas en inglés, Avoid Sure Loss.

Definición 2.6. Diremos que una probabilidad inferior \underline{P} evita la pérdida segura, o tiene la propiedad de ASL, si su conjunto credal es no vacío, es decir, $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$.

Sin embargo, como vemos en el siguiente ejemplo, la propiedad de ASL es

demasiado débil y será necesario imponer alguna propiedad adicional.

Ejemplo 2.5. Ana ha modificado su tabla de probabilidades inferiores tras haber conocido la propiedad de ASL. Su nueva asignación se muestra en la Tabla 2.3.

Suceso	W	L	D	WD	WL	DL
\underline{P}	0.5	0.2	0.3	0.5	0.6	0.2

Tabla 2.2: Probabilidades inferiores para apostar.

Esta probabilidad inferior sí evita pérdida segura puesto que la probabilidad P que cumple $P(W) = 0.5$, $P(L) = 0.2$ y $P(D) = 0.3$ está en $\mathcal{M}(\underline{P})$. Con estas modificaciones, Ana se pregunta si existe $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $P(DL) = 0.2$, es decir, ¿existe un precio de compra para la apuesta DL que alcance el ínfimo precio de compra que ha asociado a dicho suceso? Sabemos que cualquier $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ cumple

$$P(DL) = P(D) + P(L) \geq \underline{P}(D) + \underline{P}(L) = 0.3 + 0.2 = 0.5 > 0.2 = \underline{P}(DL),$$

por lo que no será posible encontrar una probabilidad en el conjunto credal que satisfaga la condición que buscábamos. Esto ocurre porque Ana ha dado un mínimo precio de compra demasiado bajo para apostar por DL . Esto significa que está siendo demasiado conservadora con la asignación de DL , y de acuerdo con el resto de asignaciones puede aumentar su ínfimo precio de compra. De hecho, aumentar ligeramente el valor de $\underline{P}(DL)$ no modificaría el conjunto credal.

Para evitar situaciones como la descrita en este ejemplo se impone la condición de coherencia. Esta propiedad nos asegura que las probabilidades inferiores asignadas no son excesivamente bajas.

Definición 2.7. Diremos que una probabilidad inferior \underline{P} es coherente si para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ existe una probabilidad $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ cumpliendo $P(A) = \underline{P}(A)$.

Esta propiedad tiene consecuencias bastante interesantes y útiles para trabajar con probabilidades inferiores y superiores.

Proposición 2.2. *Sea \underline{P} una probabilidad inferior y \overline{P} su probabilidad superior conjugada. Si \underline{P} es coherente, dados $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ se verifican las siguientes propiedades:*

- $\underline{P}(A) = \min\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$.
- $\overline{P}(A) = \max\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$.
- \underline{P} evita la pérdida segura.
- $\underline{P}(A) \leq \overline{P}(A)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\underline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$.
- Se cumple $\overline{P}(A \cup B) \leq \overline{P}(A) + \overline{P}(B)$.
- Se cumple $1 + \underline{P}(A \cup B) \leq \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$.

Ahora que ya conocemos las características que debemos tener en cuenta para definir las probabilidades inferiores y superiores, podemos reformular el Ejemplo 2.5 para que las probabilidades inferiores y superiores verifiquen estas condiciones de racionalidad.

Ejemplo 2.6. *Ana ya ha entendido qué características deben tener sus probabilidades inferiores y superiores, por eso actualiza sus precios ínfimos de compra (\underline{P}), dado en la Tabla 2.3, donde también se muestran los precios supremos de venta (\overline{P}).*

Suceso	W	D	L	WD	WL	DL
\underline{P}	0.40	0.20	0.20	0.65	0.65	0.50
\overline{P}	0.50	0.35	0.35	0.80	0.80	0.60

Tabla 2.3: Probabilidades inferiores y superiores para apostar por 'La Que-rencia'.

En la siguiente imagen tenemos dibujado el conjunto credal, que es claramente no vacío, por lo que podemos asegurar que \underline{P} evita la pérdida segura. Por otro lado, es sencillo comprobar que para cualquier suceso $A \subseteq \Omega$, existe $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $P(A) = \underline{P}(A)$, por lo que también es coherente.

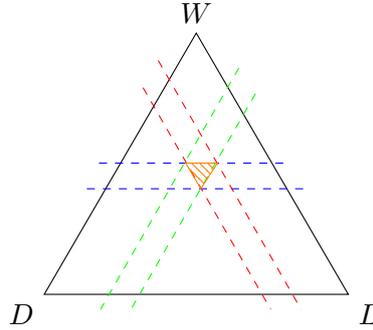


Figura 2.4: Conjunto credal asociado a la probabilidad inferior coherente dada en la Tabla 2.3.

Para finalizar la sección, definimos la última propiedad para las probabilidades inferiores que será relevante en el desarrollo del trabajo, la 2-monotonía.

Definición 2.8. Si \underline{P} es una probabilidad inferior que para todo $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ verifica

$$\underline{P}(A \cap B) + \underline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B),$$

entonces decimos que \underline{P} es 2-monótona.

Además, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3. Sea \underline{P} una probabilidad inferior 2-monótona, entonces \underline{P} es una probabilidad inferior coherente.

Ahora que ya conocemos brevemente las propiedades de las probabilidades inferiores, podemos pasar a estudiar un concepto más general: las previsiones inferiores.

2.3. Previsiones inferiores

En esta sección, introduciremos el concepto de previsiones inferiores como una extensión de las probabilidades inferiores. Comenzaremos con la definición de previsión inferior, y a partir de ahí repasaremos la teoría, en la que analizaremos sus propiedades y características más relevantes.

Para comenzar necesitamos considerar el conjunto $\mathcal{L}(\Omega)$ definido como el conjunto de todas las variables aleatorias, o apuestas, definidas sobre el espacio probabilístico Ω .

Definición 2.9. Una aplicación $\underline{P}: \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una previsión inferior si verifica que dados $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ y $f \leq g$ entonces $\underline{P}(f) \leq \underline{P}(g)$.

Conocida la definición de previsión inferior tenemos la noción de previsión superior conjugada.

Definición 2.10. La aplicación $\overline{P}: \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es la previsión superior conjugada de \underline{P} si para todo $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ se verifica $\overline{P}(f) = -\underline{P}(-f)$.

Veamos de nuevo las interpretaciones existentes para el concepto de previsión inferior:

- Interpretación epistémica: en este caso, $\underline{P}(f)$ y $\overline{P}(f)$ nos proporcionan cotas inferiores y superiores respectivamente para el operador esperanza de la probabilidad real desconocida, $E_{P_0}(f) = P_0(f)$.
- Interpretación comportamental: esta interpretación va en consonancia con la interpretación comportamental que veíamos en las probabilidades inferiores pero aplicada a apuestas. Si consideramos la apuesta f , sus previsiones inferior y superior se interpretan como el supremo del precio de compra y el ínfimo del precio de venta para la apuesta f . Es decir, $\underline{P}(f)$ representa el supremo de los precios que el sujeto está dispuesto a pagar para comprar f , en cambio, $\overline{P}(f)$ representa el ínfimo de los precios a los que el sujeto está dispuesto a vender f .

Veamos ahora los conceptos que surgen de estas dos definiciones y que guardan ciertas similitudes con los vistos en el apartado anterior.

En primer lugar, podemos definir el conjunto credal asociado a \underline{P} como el conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\underline{P}) &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(f) \geq \underline{P}(f) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(f) \leq \overline{P}(f) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)\}.\end{aligned}$$

Recordando los ejemplos 2.4 y 2.5 de la sección anterior, nos encontrábamos con ciertos problemas a la hora de trabajar con probabilidades inferiores

por lo que era necesario imponer algunas propiedades para desarrollar una teoría consistente. En este caso, también necesitamos de esas propiedades para evitar y descartar ciertas casuísticas que no nos interesan o que no nos aportan información.

Definición 2.11. *Diremos que una previsión inferior \underline{P} evita la pérdida segura, o tiene la propiedad de ASL, si su conjunto credal es no vacío, es decir, $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$.*

Definición 2.12. *Diremos que una previsión inferior \underline{P} es coherente si para toda $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ existe una probabilidad $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ cumpliendo $P(f) = \underline{P}(f)$.*

A continuación, introducimos una caracterización para la coherencia.

Proposición 2.4. *Sea \underline{P} una previsión inferior. \underline{P} es coherente si y solo si para todo $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ y $\lambda > 0$ se cumple:*

- $\underline{P}(f) \geq \min_{\omega \in \Omega} f(\omega)$.
- $\underline{P}(\lambda f) = \lambda \underline{P}(f)$.
- $\underline{P}(f + g) \geq \underline{P}(f) + \underline{P}(g)$.

Además, si tenemos una previsión inferior coherente, se cumplen propiedades similares a las enumeradas en la Proposición 2.2.

Proposición 2.5. *Sea \underline{P} una previsión inferior y \bar{P} su previsión superior conjugada. Si \underline{P} es coherente, dadas $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$, se verifican las siguientes propiedades:*

- $\underline{P}(f) = \min\{P(f) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$.
- $\bar{P}(f) = \max\{P(f) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$.
- \underline{P} evita la pérdida segura.
- $\underline{P}(f) \leq \bar{P}(f)$.
- Si $f \leq g$ entonces $\bar{P}(f) \leq \bar{P}(g)$.
- $\bar{P}(f + g) \leq \bar{P}(f) + \bar{P}(g)$.

Por otro lado, también podemos definir una previsión inferior coherente a partir de un conjunto credal cerrado y convexo: si consideramos \mathcal{M} un conjunto cerrado y convexo de medidas de probabilidad, podemos definir una previsión inferior (resp. superior) mediante la expresión:

$$\begin{aligned}\underline{P}(f) &= \min\{P(f) \mid P \in \mathcal{M}\} \quad \text{y} \\ \overline{P}(f) &= \max\{P(f) \mid P \in \mathcal{M}\}\end{aligned}\tag{2.3}$$

cumpliendo que \underline{P} es coherente. Además, se cumple que $\mathcal{M}(\underline{P}) = \mathcal{M}$.

Este último comentario es interesante puesto que nos permite hablar indistintamente sobre conjuntos credales y previsiones inferiores coherentes (resp. superiores), pues son nociones equivalentes: una previsión inferior coherente determina un conjunto cerrado y convexo de probabilidades (su conjunto credal), y este a su vez determina la misma previsión inferior coherente mediante la Ecuación (2.3). Esta relación se muestra gráficamente en la Figura 2.5.

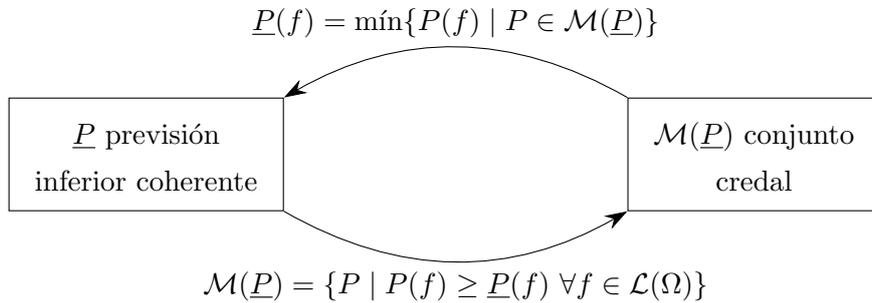


Figura 2.5: Descripción gráfica de la equivalencia entre previsiones inferiores coherentes y conjuntos credales.

Notemos que podemos definir una probabilidad inferior coherente a partir de una previsión inferior coherente de la siguiente manera.

Definición 2.13. [13, Cap.1] Sea \underline{P} una previsión inferior coherente, entonces podemos definir su probabilidad inferior coherente asociada como $\underline{P}'(A) = \underline{P}(I_A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ siendo I_A la función indicadora del suceso A .

Puede ocurrir que dos previsiones inferiores diferentes den lugar a la mis-

ma probabilidad inferior coherente. Consecuentemente, tenemos la misma casuística para los conjuntos credales, es decir, dos conjuntos cerrados y convexos de probabilidades distintos pueden dar lugar a la misma probabilidad inferior coherente. Esto ocurre por la relación biunívoca existente entre las previsiones inferiores coherentes y los conjuntos credales, como se puede ver en la Figura 2.5. Para que quede más claro, veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 2.7. *Consideremos el espacio probabilístico $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ y los siguientes conjuntos credales:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(\{x_2\}) \geq P(\{x_3\})\}. \\ \mathcal{M}_2 &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(\{x_3\}) \leq 0.5\}.\end{aligned}$$

En la Figura 2.6 podemos ver rasgado en azul el conjunto \mathcal{M}_1 y en rojo el conjunto \mathcal{M}_2 . Si calculamos las probabilidades inferiores asociadas a dichos conjuntos credales, obtenemos en ambos casos la probabilidad inferior dada por:

Suceso	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
\underline{P}	0	0	0	0.5	0	0

Es decir, hemos encontrado un ejemplo donde los conjuntos credales son distintos, pero tienen la misma probabilidad inferior coherente asociada. Destaquemos que las previsiones inferiores coherentes asociadas a \mathcal{M}_1 y a \mathcal{M}_2 , que podemos denotar como \underline{P}_1 y \underline{P}_2 , respectivamente, no coinciden puesto que por ejemplo para la apuesta $f = I_{x_2} - I_{x_3}$ se cumple:

$$\underline{P}_1(I_{x_2} - I_{x_3}) = 0 > -0.5 = \underline{P}_2(I_{x_2} - I_{x_3}).$$

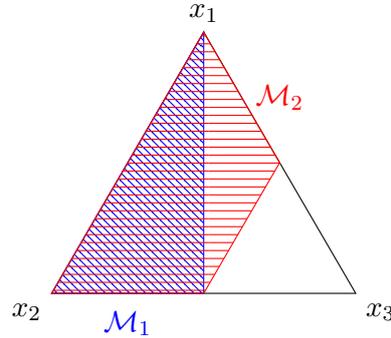


Figura 2.6: Gráfico de los conjuntos credales \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 y su probabilidad inferior coherente asociada.

Como consecuencia del Ejemplo 2.7 y de la Figura 2.6, podemos deducir que tanto las previsiones inferiores coherentes como los conjuntos credales siempre son, al menos, igual de informativos que sus probabilidades inferiores coherentes asociadas.

Sin embargo, es posible imponer una condición adicional que permite una equivalencia entre las probabilidades inferiores y las previsiones inferiores coherentes: la 2-monotonía.

Definición 2.14. [13, Cap.1] Sea \underline{P} una previsión inferior. Decimos que \underline{P} es 2-monótona o tiene la propiedad de 2-monotonía si para cada par de apuestas $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ verifica

$$\underline{P}(f \wedge g) + \underline{P}(f \vee g) \geq \underline{P}(f) + \underline{P}(g)$$

siendo \wedge, \vee el mínimo y máximo punto a punto.

Y tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.6. [13, Cap.1] Si \underline{P} una previsión inferior 2-monótona, entonces \underline{P} es coherente.

La propiedad de 2-monotonía nos proporciona ciertos resultados interesantes. Para empezar, la 2-monotonía es un concepto más restrictivo que la coherencia, por lo que previsiones o probabilidades inferiores 2-monótonas son también coherentes.

Por otra parte, consideremos una previsión inferior 2-monótona \underline{P} , y denotamos por \underline{P}' a su restricción a sucesos, es decir, su probabilidad inferior coherente asociada: $\underline{P}'(A) := P(I_A)$, entonces \underline{P}' es una probabilidad inferior 2-monótona y además, inducen el mismo conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P}) = \mathcal{M}(\underline{P}')$. De aquí se deduce que dos previsiones inferiores 2-monótonas que tengan la misma probabilidad inferior asociada han de coincidir.

Además, si consideramos una probabilidad inferior 2-monótona, tiene una única extensión a apuestas 2-monótona. De hecho, sabemos que dicha extensión se obtiene a partir de la integral de Choquet, concepto matemático que queda fuera del interés de este trabajo. Esto significa que, si bien las previsiones inferiores coherentes son más informativas que las probabilidades inferiores coherentes, bajo la propiedad de 2-monotonía ambos conceptos son equivalentes [13].

2.4. Intervalos de probabilidad

Los intervalos de probabilidad representan otro modelo dentro de las probabilidades imprecisas que, si bien son menos generales, sí son más sencillos de manejar desde el punto de vista práctico. Se trata de un caso particular de probabilidades inferiores en el que, en lugar de dar cotas para las probabilidades de todos los sucesos, solamente proponen cotas para las probabilidades de los unipuntuales. A continuación, definimos y estudiamos algunas de sus propiedades más relevantes, conceptos extraídos de [4].

Definición 2.15. *Sea $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ el espacio muestral. Consideramos el conjunto \mathcal{L} definido como*

$$\mathcal{L} := \{[l_i, u_i] \mid i = 1, \dots, n\}$$

con $0 \leq l_i \leq u_i \leq 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Decimos que \mathcal{L} es un intervalo de probabilidad que determina el conjunto credal:

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}) := \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid l_i \leq P(\{x_i\}) \leq u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Recordemos que un conjunto credal es un conjunto cerrado y convexo de medidas de probabilidad, y que además podemos definir una probabilidad

inferior asociada a dicho conjunto. Para este caso particular tenemos las siguientes definiciones.

Definición 2.16. *Sea \mathcal{L} un intervalo de probabilidad, $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ su conjunto credal asociado y $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Definimos la probabilidad inferior asociada a $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ como*

$$\begin{aligned} \underline{P}(A) &= \min\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\mathcal{L})\} \\ &= \min\{P(A) \mid l_i \leq P(\{x_i\}) \leq u_i, \forall i = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

y su probabilidad superior conjugada como

$$\begin{aligned} \overline{P}(A) &= \max\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\mathcal{L})\} \\ &= \max\{P(A) \mid l_i \leq P(\{x_i\}) \leq u_i, \forall i = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es relevante definir algunas propiedades deseables de los intervalos de probabilidad con el fin de evitar ciertas incoherencias como las que vimos en las secciones anteriores.

Definición 2.17. *Sea \mathcal{L} un intervalo de probabilidad. Decimos que \mathcal{L} evita la pérdida segura o tiene la propiedad de ASL si la probabilidad inferior \underline{P} dada en la Ecuación (2.4) tiene la propiedad de ASL, o equivalentemente si $\mathcal{M}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.*

Esta propiedad se puede caracterizar de la siguiente manera:

Proposición 2.7. *[4, Cap.1] Sea \mathcal{L} un intervalo de probabilidad y sea $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ su conjunto credal asociado. $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ es no vacío si y solo si $\sum_{i=1}^n l_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^n u_i$.*

Esta propiedad nos permite asegurar que existe al menos una probabilidad P en $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ que verifica $l_i \leq P(\{x_i\}) \leq u_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A continuación, damos la definición particular de la propiedad de coherencia para intervalos de probabilidad.

Definición 2.18. *[4, Cap.1] Diremos que el intervalo de probabilidad \mathcal{L} es coherente si la probabilidad inferior definida en la Ecuación (2.4) es coherente, o equivalentemente si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple*

$$\underline{P}(\{x_i\}) = l_i \quad y \quad \overline{P}(\{x_i\}) = u_i.$$

La coherencia para intervalos de probabilidad se puede caracterizar de forma sencilla:

Proposición 2.8. [4, Prop.1] Sea \mathcal{L} un intervalo de probabilidad. \mathcal{L} es coherente si y solo si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j \neq i} l_j + u_i \leq 1 \quad y \quad \sum_{j \neq i} u_j + l_i \geq 1.$$

Además, conocemos una forma sencilla de calcular $\underline{P}(A)$ y $\overline{P}(A)$ cuando tenemos un intervalo de probabilidad coherente.

Proposición 2.9. [4, Prop.4] Sea \mathcal{L} un intervalo de probabilidad coherente. Entonces, las siguientes expresiones nos permiten calcular las probabilidades inferiores y superiores de las Ecuaciones (2.4) y (2.5) para cada suceso $A \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$\underline{P}(A) = \max \left\{ \sum_{x_i \in A} l_i, 1 - \sum_{x_i \notin A} u_i \right\}.$$
$$\overline{P}(A) = \min \left\{ \sum_{x_i \in A} u_i, 1 - \sum_{x_i \notin A} l_i \right\}.$$

A continuación, vemos un resultado bastante relevante, que nos permite relacionar los intervalos de probabilidad con probabilidades inferiores 2-monótonas.

Proposición 2.10. [4, Prop.5] La probabilidad inferior asociada a un intervalo de probabilidad coherente es siempre 2-monótona.

Este resultado se puede interpretar de forma más general: a partir del conjunto credal $\mathcal{M}(\mathcal{L})$ se puede calcular su previsión inferior coherente asociada. Sin embargo, dado que se cumple la condición de 2-monotonía, la información que proporciona la probabilidad inferior coherente de la Ecuación (2.4) es la misma que la que proporciona la previsión inferior coherente.

Capítulo 3

Modelos de distorsión

Los modelos de distorsión son un tipo de modelo impreciso que se construye aplicando una distorsión a una probabilidad. Para definir estos modelos, tenemos principalmente dos procedimientos, el primero y más habitual es considerar conjuntos de probabilidad “similares” al original, bien tomando combinaciones convexas de estas o trabajando con las propias probabilidades, mientras que el segundo procedimiento consiste en transformar la medida de probabilidad original por medio de una función. A lo largo de este capítulo haremos una revisión de algunos modelos de distorsión que se pueden encontrar en la literatura.

3.1. Definición General

En nuestro caso, construiremos los modelos de distorsión tomando un entorno centrado en una probabilidad con respecto a una función de distorsión y con un radio o factor de distorsión δ .

Definición 3.1. *[13, Cap.3] Denominaremos función de distorsión a cualquier aplicación*

$$d: \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty).$$

Existen ciertas propiedades convenientes a la hora de considerar funciones de distorsión.

Definición 3.2. [13, Cap.3] Sea d una función de distorsión, entonces, dados $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}(\Omega)$ tenemos la siguiente lista de propiedades:

1. Definición positiva: $d(P_1, P_2) = 0$ si y solo si $P_1 = P_2$:
 - a. Si $d(P_1, P_2) = 0$ entonces $P_1 = P_2$.
 - b. $d(P, P) = 0$ para todo $P \in \mathbb{P}(\Omega)$.
2. Desigualdad triangular: $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.
3. Simetría: $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.
4. Cuasi-convexidad: Dado $\alpha \in [0, 1]$, se cumple:

$$d(\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2, P_3) \leq \max\{d(P_1, P_3), d(P_2, P_3)\}.$$

5. Continuidad: Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|P_1 - P_2\| < \delta$ implica que $|d(P_1, P_3) - d(P_2, P_3)| < \epsilon$ donde $\|\cdot\|$ denota la norma del supremo.

El conjunto credal asociado a la probabilidad $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$, la función de distorsión d y el factor δ se define como [13] la bola cerrada centrada en P_0 :

$$B_d^\delta(P_0) := \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid d(P, P_0) \leq \delta\}. \quad (3.1)$$

Es decir, la bola cerrada formada por todas las probabilidades que distan a lo sumo δ de P_0 con respecto a la función de distorsión d . Nos referimos a dicho conjunto credal como *modelo de distorsión en P_0 asociado a la función de distorsión d y al factor $\delta > 0$* .

El conjunto de probabilidades 3.1 define una previsión inferior coherente.

Definición 3.3. [13, Cap.3] Consideremos $B_d^\delta(P_0)$ un modelo de distorsión. Se define la previsión inferior coherente \underline{P} como la envolvente inferior de $B_d^\delta(P_0)$. Es decir, para cada apuesta f , $\underline{P}(f)$ viene dada como

$$\underline{P}(f) = \inf \{P(f) \mid P \in B_d^\delta(P_0)\} = \inf \{P(f) \mid d(P, P_0) \leq \delta\}.$$

Notemos que en la definición anterior se ha tomado el ínfimo y no el mínimo puesto que, en principio, no podemos garantizar que $B_d^\delta(P_0)$ sea un conjunto cerrado y convexo. El siguiente resultado nos da condiciones que debe

satisfacer la función de distorsión d para garantizar que la bola determine un conjunto credal cerrado y convexo.

Proposición 3.1. [13, Prop.1] Sean d una función de distorsión, $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$ una medida de probabilidad y $\delta > 0$ un parámetro de distorsión. Consideremos \underline{P} la previsión inferior asociada a $B_d^\delta(P_0)$. Si la función d satisface las propiedades 4 (cuasi-convexidad) y 5 (continuidad), entonces:

1. $B_d^\delta(P_0)$ es un conjunto credal (es decir, cerrado y convexo).
2. $\mathcal{M}(\underline{P}) = B_d^\delta(P_0)$ donde $\mathcal{M}(\underline{P})$ no es más que el conjunto credal asociado a la previsión inferior coherente \underline{P} definida en la Ecuación (2.2).

Este resultado nos asegura que si tenemos una función de distorsión continua y cuasi-convexa, entonces el conjunto credal asociado a la probabilidad P_0 , a la función de distorsión d y al parámetro de distorsión δ , es exactamente el conjunto credal inducido por la previsión inferior coherente asociada a dicha bola, dada por la Definición 3.3. Es decir, bajo condiciones bastante generales podemos asegurar que la bola $B_d^\delta(P_0)$ y su previsión inferior coherente asociada \underline{P} son modelos equivalentes.

En consonancia con la bibliografía que hemos consultado [13], cuando trabajemos con modelos de distorsión, asumiremos ciertas cuestiones que simplifican su manejo:

1. La función de distorsión d está definida sobre $\mathbb{P}^*(\Omega) \times \mathbb{P}^*(\Omega)$.
2. $P_0(\{x\}) > 0$ para cada $x \in \Omega$, lo que implica que $P_0 \in \mathbb{P}^*(\Omega)$.
3. El parámetro de distorsión $\delta > 0$ es suficientemente pequeño para asegurar que dado $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$, $\underline{P}(A) > 0$. Si d es continua y cuasi-convexa, esto es equivalente a que $B_d^\delta(P_0) \subseteq \mathbb{P}^*(\Omega)$.

3.2. Transformaciones de probabilidades

Como ya hemos comentado al inicio del capítulo, un procedimiento relevante para definir un modelo de distorsión consiste en transformar una medida de probabilidad por medio de una función de distorsión. En primer lugar, veremos cómo definir un modelo transformado.

Definición 3.4. Sea $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$ una medida de probabilidad. Consideremos una función

$$\varphi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(t) \leq t$ para todo $t \in [0, 1]$. Diremos que φ es la función de transformación. Entonces φ define una probabilidad inferior \underline{P} dada por $\underline{P}(A) = \varphi(P_0(A))$ para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, que es la probabilidad inferior del modelo transformado.

Notemos que la desigualdad $\varphi(t) \leq t$ para todo $t \in [0, 1]$ nos asegura que \underline{P} es una probabilidad inferior [3, Thm.7].

En general, la probabilidad inferior de un modelo transformado no es 2-monótona, basta considerar el modelo de ratios constantes [13, Cap.6]. Esto podría suponer un problema, pues como hemos visto en apartados anteriores la 2-monotonía es una propiedad bastante deseable para las probabilidades inferiores. En el siguiente resultado, aportamos condiciones sobre la función de transformación φ para asegurarnos la 2-monotonía de la probabilidad inferior del modelo transformado, \underline{P} .

Proposición 3.2. [5, 7] Sea φ una función de transformación. Si φ es una función convexa, entonces $\underline{P} = \varphi(P_0)$ es 2-monótona y, por tanto, coherente.

Este resultado asegura que si la función de transformación es convexa, entonces la probabilidad inferior que determina es 2-monótona y, por la Proposición 2.3, será también coherente.

Algo interesante sobre los modelos transformados es que podemos relacionarlos con los modelos de distorsión.

Proposición 3.3. [13, Prop.2] Sea \underline{P} la probabilidad inferior del modelo transformado por una determinada función φ . Entonces existen una función de distorsión d verificando la propiedad 1.b. y un parámetro $\delta > 0$ tales que $\mathcal{M}(\underline{P}) = B_d^\delta(P_0)$.

Es decir, podemos ver las transformaciones de probabilidades como casos particulares de modelos de distorsión.

3.3. Modelos Nearly-Linear

Los modelos Nearly-Linear (NL) son modelos similares a las transformaciones de probabilidades en los que se aplican transformaciones lineales sobre la probabilidad inicial.

Definición 3.5. [6, Def.3.1] Dada una probabilidad P_0 y dos elementos $a, b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, definimos para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset, \Omega\}$ la probabilidad inferior dada por:

$$\underline{P}(A) := \min\{\max\{bP_0(A) + a, 0\}, 1\}.$$

Diremos que \underline{P} es un modelo Nearly-Linear y lo denotaremos como $NL(a, b)$.

Notemos que por definición de probabilidad inferior, quedan determinadas $\underline{P}(\emptyset)$ y $\underline{P}(\Omega)$. Como podemos observar, las probabilidades inferiores de los modelos NL no son más que transformaciones lineales afines que imponen ciertas restricciones sobre P_0 . Estas restricciones nos aseguran que la transformación no tome valores fuera del intervalo $[0, 1]$. Además, tenemos la siguiente definición para la probabilidad superior conjugada.

Definición 3.6. Sea \underline{P} un modelo $NL(a, b)$, entonces la probabilidad superior definida como

$$\overline{P}(A) := \min\{\max\{bP_0(A) + 1 - (a + b), 0\}, 1\}.$$

para $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset, \Omega\}$ es la probabilidad superior conjugada de \underline{P} .

De nuevo, $\overline{P}(\emptyset)$ y $\overline{P}(\Omega)$ quedan determinadas por definición. Además, la probabilidad superior conjugada de un modelo Nearly-Linear también define un modelo Nearly-Linear.

Proposición 3.4. [6, Prop.3.1] Si \underline{P} es $NL(a, b)$, entonces \overline{P} es $NL(c, b)$ siendo $c = 1 - (a + b)$.

Así, podemos definir el modelo NL como el par $(\underline{P}, \overline{P})$, donde $\underline{P} = NL(a, b)$ y $\overline{P} = NL(c, b)$ siendo c como en la proposición anterior. La elección de los valores de a y b hará variar las propiedades del modelo NL.

Proposición 3.5. [6, Prop.3.2, Lema 3.2] Sea $\underline{P} = NL(a, b)$, entonces \underline{P} es coherente si $b + 2a \leq 1$. Además, $b + 2a \leq 1$ si y solo si $b + 2c \geq 1$.

Dentro del marco de los modelos Nearly-Linear, nos centraremos en los modelos de Barrera Vertical, o VBM por sus siglas en inglés. Estos modelos destacan por sus buenas propiedades y nos interesan especialmente porque, como veremos, pueden interpretarse como modelos de distorsión.

Veamos su interpretación comportamental [6, Cap.4]. En este caso, el comprador no está dispuesto a pagar más de cierta cantidad que estará determinada por $a + b$, por ningún evento, ni siquiera por aquellos cuyo precio justo es muy alto. Podríamos decir que el comprador que juega con este criterio está siendo excesivamente prudente. Vamos ahora con su definición formal.

Definición 3.7. Sea $\underline{P} = NL(a, b)$. Decimos que $(\underline{P}, \overline{P})$ es un modelo de Barrera Vertical, VBM, si $0 \leq a + b \leq 1$, $a \leq 0$ y $c = 1 - (a + b)$, en cuyo caso tenemos las siguientes expresiones para las probabilidades inferior y superior:

$$\begin{aligned}\underline{P}(A) &= \max\{bP_0(A) + a, 0\} \\ \overline{P}(A) &= \min\{bP_0(A) + c, 1\}\end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset, \Omega\}$, y además $\underline{P}(\Omega) = \overline{P}(\Omega) = 1$ y $\underline{P}(\emptyset) = \overline{P}(\emptyset) = 0$.

Es sencillo comprobar que las probabilidades inferior y superior del modelo VBM son coherentes [6, Prop.4.1], sin más que aplicar la Proposición 3.5.

La importancia de estos modelos viene dada sobre todo por el siguiente resultado.

Proposición 3.6. [6, Prop.4.1] Sea $(\underline{P}, \overline{P})$ un modelo de Barrera Vertical, entonces \underline{P} es 2-monótona.

Por otro lado, los modelos de Barrera Vertical pueden ser vistos como modelos de distorsión, tal como queda de manifiesto en el siguiente resultado.

Proposición 3.7. [11, Thm.5] Consideremos el modelo de Barrera Vertical $(\underline{P}, \overline{P})$ asociado a la probabilidad P_0 y a los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{M}(\underline{P}) = B_{d_{VBM}}^1(P_0)$ siendo $d_{VBM} : \mathbb{P}^*(\Omega) \times \mathbb{P}^*(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ definida como:

$$d_{VBM}(P, Q) = \max_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} \frac{P_0(A) - P(A)}{(1 - b)P_0(A) - a}.$$

Además, la función d_{VBM} está bien definida, es cuasi-convexa y es continua [11, Lema 3].

Estudiemos ahora algunos casos particulares de modelos de Barrera Vertical dentro del marco de modelos Nearly-Linear que poseen propiedades interesantes en relación a los modelos de distorsión.

3.4. Casos particulares de modelos VBM

En esta subsección, analizaremos algunos casos bastante relevantes de modelos Nearly-Linear, pues como ya hemos comentado, la elección de los parámetros a y b determinará las propiedades del modelo que variarán en función de dicha elección.

3.4.1. Modelo Linear Vacuous

El modelo Linear Vacuous o modelo δ -contaminado, al que nos referiremos como LV, es un modelo de distorsión que asume una simple relación lineal directa entre las variables, se caracteriza por su simplicidad, pero también puede ser visto como un caso particular de un modelo Nearly Linear.

Hagamos primero un breve repaso sobre la interpretación comportamental de este modelo [13, Cap.5]. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 3.1. *Recordemos a nuestra “apostadora” Ana del Ejemplo 2.2. Supongamos que Ana paga un precio t por el suceso W , recordemos que W representa que gane ‘La Querencia’. Si ocurre W , Ana obtendrá un beneficio de $I_W - t$, siendo I_W la función indicadora asociada al suceso W . Claramente, la casa de apuestas quiere asegurarse una ganancia positiva, por eso aplica una cierta tasa δ a la apuesta que ha hecho Ana, que será proporcional al beneficio que obtenga. Entonces, el beneficio de Ana se ha modificado, y ahora será de $I_W - t - \delta I_W = (1 - \delta)I_W - t$. Supongamos que el precio justo para apostar que gane ‘La Querencia’ es $P_0(W)$, entonces el beneficio esperado por Ana es de $(1 - \delta)P_0(W) - t$, de manera que el precio justo que Ana estaría dispuesta a pagar también se ve modificado y ahora se reduce a $(1 - \delta)P_0(W)$.*

El nuevo precio justo que el jugador está dispuesto a pagar es, como veremos a continuación, la probabilidad inferior del modelo Linear Vacuous. Todos los conceptos introducidos en esta sección se pueden encontrar en [10] y/o [17].

Definición 3.8. *Sea P_0 una medida de probabilidad y $\delta \in (0, 1)$ un parámetro de distorsión. El modelo Linear Vacuous asociado a P_0 y al parámetro δ está definido por las siguientes probabilidades inferior y superior conjugadas:*

$$\underline{P}_{LV}(A) = \begin{cases} (1 - \delta)P_0(A) & \text{si } A \neq \Omega \\ 1 & \text{si } A = \Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\overline{P}_{LV}(A) = \begin{cases} (1 - \delta)P_0(A) + \delta & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases} \quad (3.3)$$

para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Como hemos visto en el Capítulo 2, las probabilidades inferiores tienen un conjunto credal asociado que, en este modelo concreto, viene dado como sigue [13, Cap.5]:

$$\mathcal{M}(\underline{P}_{LV}) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid (1 - \delta)P_0(A) \leq P(A), \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\},$$

que se puede expresar de forma equivalente como:

$$\mathcal{M}(\underline{P}_{LV}) = \{(1 - \delta)P_0 + \delta P \mid P \in \mathbb{P}(\Omega)\}.$$

La probabilidad inferior asociada al modelo Linear Vacuous es 2-monótona, y por tanto coherente. Además \underline{P}_{LV} puede ser interpretada como un intervalo de probabilidad. Para ello, calculamos la restricción de \underline{P}_{LV} y \overline{P}_{LV} a los unipuntuales, dadas por [13, Cap.5]:

$$\begin{aligned} \underline{P}_{LV}(\{x_i\}) &= (1 - \delta)P_0(\{x_i\}) \quad \text{y} \\ \overline{P}_{LV}(\{x_i\}) &= (1 - \delta)P_0(\{x_i\}) + \delta \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces, el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P}_{LV})$ se puede

expresar como [13, Cap.5]:

$$\mathcal{M}(\underline{P}_{LV}) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid (1 - \delta)P_0(\{x_i\}) \leq P(\{x_i\}) \leq (1 - \delta)P_0(\{x_i\}) + \delta, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Es decir, el modelo LV es el intervalo de probabilidad dado por [13, Cap.5]:

$$\mathcal{L}_{LV} = \{[(1 - \delta)P_0(\{x_i\}), (1 - \delta)P_0(\{x_i\}) + \delta] \mid i = 1, \dots, n\}. \quad (3.4)$$

El hecho de que \underline{P}_{LV} sea 2-monótona nos permite asegurar que su extensión a apuestas es única como habíamos visto en el Capítulo 2.

Por otro lado, podemos obtener un modelo Linear Vacuous a partir de una función de distorsión, indicada en la siguiente proposición. En el Capítulo 3 veíamos algunas propiedades necesarias para trabajar con modelos de distorsión, en este caso concreto, para que se verifique $\underline{P}_{LV}(A) > 0$ debemos tomar $\delta < 1$.

Proposición 3.8. [13, Thm.9] Consideremos el modelo LV, $(\underline{P}_{LV}, \overline{P}_{LV})$ asociado a la probabilidad $P_0 \in \mathbb{P}^*(\Omega)$ y al parámetro de distorsión δ . Entonces $\mathcal{M}(\underline{P}_{LV}) = B_{d_{LV}}^\delta(P_0)$ siendo $d_{LV} : \mathbb{P}^*(\Omega) \times \mathbb{P}^*(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ definida como:

$$d_{LV}(P, Q) = \max_{A \neq \emptyset} \frac{Q(A) - P(A)}{Q(A)}$$

para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Veamos algunas propiedades relevantes de la función de distorsión d_{LV} [13, Prop.10]:

- d_{LV} satisface las propiedades 1, 2, 4 y 5 dadas en la Definición 3.2, pero en general no satisface la propiedad 3.
- $d_{LV}(P, Q) = \max_{x \in \Omega} \frac{Q(\{x\}) - P(\{x\})}{Q(\{x\})}$ para cada $P, Q \in \mathbb{P}^*(\Omega)$.

Notemos que, para cada $\delta \in (0, 1)$, siempre podemos encontrar una probabilidad P en el conjunto credal de manera que la función de distorsión evaluada en P_0 y P tome el valor δ .

Proposición 3.9. [13, Prop.11] Consideremos el modelo LV, $(\underline{P}_{LV}, \overline{P}_{LV})$ asociado a la probabilidad P_0 y al parámetro de distorsión $\delta \in (0, 1)$. Entonces:

$$\max_{P \in \mathcal{B}_{d_{LV}}^\delta(P_0)} d_{LV}(P, P_0) = \delta.$$

Además, el modelo LV, es un caso particular de modelo Nearly-Linear y en concreto de modelo VBM.

Proposición 3.10. [15] Sea $(\underline{P}_{LV}, \overline{P}_{LV})$ un modelo Linear-Vacuous, entonces \underline{P}_{LV} es $NL(0, 1 - \delta)$ y \overline{P}_{LV} es $NL(\delta, 1 - \delta)$.

Por otro lado, el modelo $(\underline{P}_{LV}, \overline{P}_{LV})$ es un modelo VBM, basta notar $1 - \delta < 1$.

3.4.2. Modelo Pari Mutuel

El modelo Pari Mutuel tiene sus orígenes en las apuestas de carreras de caballos, y nos referiremos a él como PMM. Los conceptos introducidos y estudiados en esta sección pueden encontrarse en [12, 16, 17].

Para introducir este modelo, comencemos con su interpretación comportamental [16]. Supongamos que la casa de apuestas fija el precio $P_0(A)$ para cierta apuesta. Si el jugador apuesta por A ese precio, es fácil comprobar que su beneficio esperado será 0, así como la ganancia de la casa. La casa de apuestas es un negocio y necesita una ganancia positiva, de manera que fija un precio superior al precio justo para apostar por A , digamos $(1 + \delta)P_0(A)$, entonces la casa obtendrá un beneficio esperado positivo y el jugador saldrá perdiendo.

A lo largo de la sección se aclararán ciertas cuestiones sobre la interpretación, comenzaremos con su definición.

Definición 3.9. [17] Sea P_0 una medida de probabilidad y $\delta \in (0, 1)$ un parámetro de distorsión. El modelo Pari Mutuel asociado a P_0 y al parámetro δ está definido por las siguientes probabilidades inferior y superior conjugadas:

$$\underline{P}_{PMM}(A) = \max\{0, (1 + \delta)P_0(A) - \delta\} \tag{3.5}$$

$$\overline{P}_{PMM}(A) = \min\{1, (1 + \delta)P_0(A)\} \tag{3.6}$$

para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Denotaremos $(\underline{P}_{PMM}, \overline{P}_{PMM})$ al modelo *Pari Mutuel* asociado a la medida de probabilidad P_0 y al parámetro δ .

Es fácil comprobar que \underline{P}_{PMM} y \overline{P}_{PMM} cumplen la relación de conjugación $\overline{P}_{PMM}(A) = 1 - \underline{P}_{PMM}(A^c)$ para todo $A \subseteq \Omega$. Además, \underline{P}_{PMM} es coherente y 2-monótona [13, Cap.4].

El modelo PMM asegura una ganancia esperada no negativa para la casa de apuestas. En este sentido, podemos interpretar el parámetro δ como la tasa de inflación del precio de venta, es decir, esos costes fijos que comentamos en varias ocasiones.

Por otro lado, definimos el conjunto credal asociado a la probabilidad inferior \underline{P}_{PMM} como [13, Cap.4]

$$\mathcal{M}(\underline{P}_{PMM}) := \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(A) \geq \underline{P}_{PMM}(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\}.$$

Además de ser coherente y 2-monótona, \underline{P}_{PMM} puede ser interpretada como un intervalo de probabilidad. Si consideramos la restricción de \underline{P}_{PMM} y \overline{P}_{PMM} a los unipuntuales tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{P}_{PMM}(\{x_i\}) &= (1 + \delta)P_0(\{x_i\}) - \delta \quad y \\ \overline{P}_{PMM}(\{x_i\}) &= (1 + \delta)P_0(\{x_i\}) \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$. Podemos expresar el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P}_{PMM})$ de forma equivalente como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\underline{P}_{PMM}) &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid \\ & (1 + \delta)P_0(\{x_i\}) - \delta \leq P(\{x_i\}) \leq (1 + \delta)P_0(\{x_i\}), \quad \forall i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

y entonces podemos considerar el siguiente intervalo de probabilidad:

$$\mathcal{L}_{PMM} = \{[(1 + \delta)P_0(\{x_i\}) - \delta, (1 + \delta)P_0(\{x_i\})] \mid i = 1, \dots, n\}. \quad (3.7)$$

A continuación, veremos que el modelo PMM se puede expresar como un modelo de distorsión inducido por una determinada función de distorsión [13, Cap.4]. En el Capítulo 3 veíamos tres propiedades que necesitábamos asumir para trabajar con modelos de distorsión. En este modelo particular,

necesitamos elegir un $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que $\underline{P}_{PMM}(A) > 0$ para todo suceso A no trivial, de manera que debemos asumir

$$\delta < \min_{A \neq \emptyset, \Omega} \frac{P_0(A)}{1 - P_0(A)}.$$

Proposición 3.11. [13, Thm.5] Consideremos el modelo Pari Mutuel dado por $(\underline{P}_{PMM}, \bar{P}_{PMM})$, asociado a la probabilidad P_0 y al parámetro δ . Entonces $\mathcal{M}(\underline{P}_{PMM}) = B_{d_{PMM}}^\delta(P_0)$ siendo $d_{PMM} : \mathbb{P}^*(\Omega) \times \mathbb{P}^*(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ la función de distorsión definida como:

$$d_{PMM}(P, Q) = \max_{A \neq \Omega} \frac{Q(A) - P(A)}{1 - Q(A)}$$

para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Veamos algunas propiedades de la función d_{PMM} [13, Prop.6]. En primer lugar, esta función verifica las propiedades 1, 4 y 5 dadas en la Definición 3.2, pero en general d_{PMM} no verifica las propiedades 2 y 3. Además para cada $P, Q \in \mathbb{P}^*(\Omega)$, resulta que

$$d_{PMM}(P, Q) = \max_{x \in \Omega} \frac{P(\{x\}) - Q(\{x\})}{Q(\{x\})}.$$

Proposición 3.12. [13, Prop.7] Consideremos el modelo PMM asociado a cierta probabilidad P_0 y un determinado factor $\delta > 0$ verificando $\delta < \min_{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset, \Omega\}} \frac{P_0(A)}{1 - P_0(A)}$, entonces:

$$\max_{P \in B_{d_{PMM}}^\delta(P_0)} d_{PMM}(P, Q) = \delta.$$

Es decir, si el factor δ satisface dicha condición, la distorsión máxima se alcanza dentro de la bola $B_{d_{PMM}}^\delta(P_0)$.

Además, un modelo Pari Mutuel puede ser interpretado como un caso particular de un modelo NL.

Proposición 3.13. [6, Ex.3.1] Sea $(\underline{P}_{PMM}, \bar{P}_{PMM})$ un modelo Pari Mutuel, entonces \underline{P}_{PMM} es $NL(-\delta, 1 + \delta)$ y \bar{P}_{PMM} es $NL(0, 1 + \delta)$.

Para comprobarlo, basta tomar $a = -\delta$ y $b = 1 + \delta$. Además, se trata de un

modelo VBM, pues $a = -\delta \leq 0$ y $a + b = 1 \leq 1$.

3.4.3. Modelo de la Variación Total

El modelo de la Variación Total, al que nos referiremos como TV, es también un tipo de modelo Nearly-Linear.

La interpretación comportamental del modelo de la Variación Total [14, Cap.2] se basa en que la casa de apuestas impone un precio fijo para todas las apuestas que se realicen, al contrario de lo que ocurría en los modelos anteriores, en los que la tasa fija dependía del suceso. Veamos un breve ejemplo para entenderlo.

Ejemplo 3.2. *De nuevo, Ana considera el valor P_0 como el precio justo para apostar por el suceso W . En este caso, el beneficio esperado por la casa de apuestas es nulo, entonces, para lidiar con esa cuestión, impone una tasa fija $\delta > 0$ para todas las apuestas que se realicen en el hípico. Si ahora Ana quiere apostar por W , tendrá que pagar el precio justo que ella considere y la tasa impuesta por la casa, es decir, en total pagará un valor de $P_0 + \delta$ por la apuesta, de manera que el beneficio de la casa de apuestas se ha actualizado y ahora es de $(P_0(W) + \delta) - I_W$, asegurándose así una ganancia esperada positiva de valor δ .*

Ahora que ya entendemos la interpretación del modelo, podemos definir sus probabilidades inferior y superior.

Definición 3.10. [9] *Sea P_0 una probabilidad y consideremos un parámetro de distorsión $\delta > 0$. Definimos para cada $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\Omega, \emptyset\}$ las siguientes probabilidades inferior y superior conjugadas:*

$$\begin{aligned}\underline{P}_{TV}(A) &= \text{máx}\{0, P_0(A) - \delta\} \\ \overline{P}_{TV}(A) &= \text{mín}\{1, P_0(A) + \delta\}\end{aligned}$$

Así, \underline{P}_{TV} es el modelo de la Variación Total asociado a P_0 y a δ .

En el ejemplo, podemos ver que el parámetro de distorsión δ se identifica con la tasa que la casa impone para realizar una apuesta.

En el siguiente resultado entenderemos la importancia de este modelo.

Proposición 3.14. [14, Prop.4] Sea \underline{P}_{TV} el modelo de Variación Total asociado a una medida de probabilidad P_0 y a un parámetro δ , entonces \underline{P}_{TV} es 2-monótona.

A pesar de tener 2-monotonía este modelo no se puede interpretar como un intervalo de probabilidad, pues no está determinado por su restricción a unipuntuales.

Ejemplo 3.3. [14, Ex.1] Consideremos $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, P_0 una distribución de probabilidad uniforme y $\delta = 0.1$ un parámetro de distorsión fijo. En la Tabla 3.1 mostramos \underline{P}_{TV} y \bar{P}_{TV} en función del cardinal de $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$ A $	\underline{P}_{TV}	\bar{P}_{TV}
1	0.15	0.35
2	0.40	0.60
3	0.65	0.85
4	1	1

Tabla 3.1: Probabilidades inferiores y superiores asociadas a Ω .

Si consideramos $P = (0.15, 0.15, 0.35, 0.35)$, tenemos que para cada $x_i \in \Omega$ resulta que P es compatible con la restricción a sucesos de \underline{P}_{TV} y \bar{P}_{TV} puesto que $P(\{x_i\}) \in [\underline{P}_{TV}(\{x_i\}), \bar{P}_{TV}(\{x_i\})] = [0.15, 0.35]$.

Sin embargo, $P \notin \mathcal{M}(\underline{P}_{TV})$ puesto que según la definición de P y los valores de la Tabla 3.1 tenemos que

$$P(\{x_1, x_2\}) = 0.3 < 0.4 = \underline{P}_{TV}(\{x_1, x_2\}).$$

Con este ejemplo, podemos concluir que el modelo de la Variación Total no se puede ver como un intervalo de probabilidad ya que no queda determinado por su restricción a unipuntuales.

Además, el modelo de la Variación Total puede ser expresado como un modelo de distorsión. Recordando las propiedades de los modelos de distorsión dadas en la Sección 3.1, el hecho de que $\underline{P}_{TV}(A) > 0$ para todo $A \neq \emptyset$, nos

da una cota sobre el parámetro δ , en concreto [13, Cap.4],

$$\delta < \min_{x \in \Omega} P_0(\{x\}).$$

Así, podemos simplificar las definiciones de las probabilidades inferior y superior conjugada para $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset, \Omega\}$ [13, Cap.4]:

$$\begin{aligned} \underline{P}_{TV}(A) &= P_0(A) - \delta \quad \text{y} \\ \overline{P}_{TV}(A) &= P_0(A) + \delta. \end{aligned}$$

Proposición 3.15. [14, Cap.2] Consideremos el modelo de la Variación Total \underline{P}_{TV} asociado a una probabilidad P_0 y a un parámetro de distorsión $\delta \in (0, 1)$. Entonces $\mathcal{M}(\underline{P}_{TV}) = B_{d_{TV}}^\delta(P_0)$ siendo $d_{TV} : \mathbb{P}^*(\Omega) \times \mathbb{P}^*(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ definida como:

$$d_{TV}(P, Q) = \max_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} |P(A) - Q(A)|.$$

La función d_{TV} , conocida como *distancia de la variación total*, satisface las propiedades 1-5 de la Definición 3.2 [14, Prop.1] y además está acotada por 1 por definición.

De nuevo, existe una probabilidad en el conjunto credal que alcanza el valor δ .

Proposición 3.16. [14, Prop.3] Consideremos el modelo de Variación Total \underline{P}_{TV} asociado a cierta probabilidad P_0 y a un determinado factor $\delta > 0 \in (0, 1)$ tal que $\delta < \min_{x \in \Omega} P_0(\{x\})$ entonces:

$$\max_{P \in B_{d_{TV}}^\delta(P_0)} d_{TV}(P, P_0) = \delta.$$

Como ya hemos comentado al inicio de la sección, el modelo TV puede ser visto como un caso particular de modelo Nearly-Linear.

Proposición 3.17. [15] Sea $(\underline{P}_{TV}, \overline{P}_{TV})$ un modelo de Variación Total, entonces \underline{P}_{TV} es $NL(-\delta, 1)$ y \overline{P}_{TV} es $NL(\delta, 1)$.

Además, $1 - \delta < 1$ por lo que también es un caso particular de modelo VBM.

Para finalizar este capítulo, hacemos un breve resumen de lo presentado

hasta el momento. Hemos visto que los modelos de distorsión $B_d^\delta(P_0)$ permiten estudiar desde otro enfoque las transformaciones de probabilidades y en particular algunos modelos dentro del marco de los modelos Nearly-Linear, en concreto de los modelos de Barrera Vertical. De hecho, hemos comprobado que podemos definir una función de distorsión d para cada uno de estos modelos VBM que nos permite asociar el conjunto credal del modelo de distorsión $B_d^\delta(P_0)$ con el conjunto credal definido por la probabilidad inferior $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Las relaciones explicadas entre estos modelos se pueden ver gráficamente en la Figura 3.1. Hemos incrustado dentro del marco de modelos de distorsión las transformaciones de probabilidades, en concreto, hemos interpretado los modelos de Barrera Vertical como casos particulares de transformaciones de probabilidades y a su vez los modelos Pari-Mutuel, Linear-Vacuous y de la Variación Total como casos particulares dentro de los modelos de Barrera Vertical.

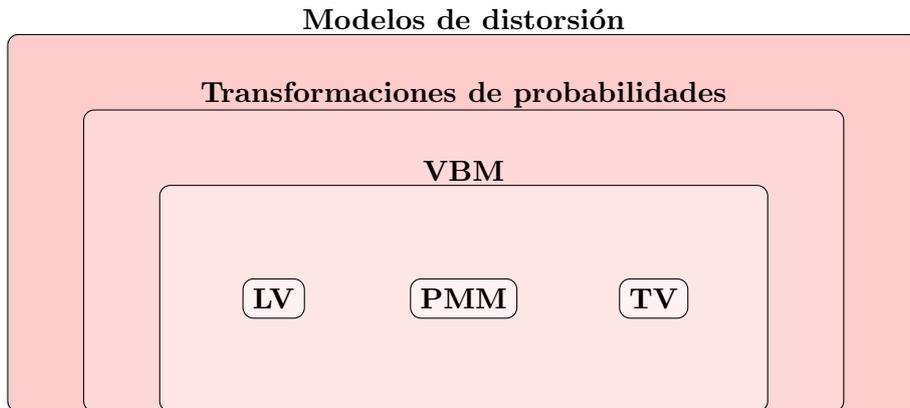


Figura 3.1: Relación existente entre los distintos modelos introducidos.

Capítulo 4

Un nuevo modelo de distorsión, el modelo (g_l, g_u)

Hasta ahora, nos hemos centrado en hacer un breve repaso sobre las definiciones, propiedades y casos particulares de los modelos de distorsión. En este capítulo intentaremos construir nuestro propio modelo de distorsión partiendo de dos funciones que denotaremos como (g_l, g_u) . A partir de estas funciones realizaremos una transformación de la probabilidad, siguiendo con la filosofía de las transformaciones de probabilidad, pero solamente en los unipuntuales. De esta forma, garantizaremos que el modelo obtenido es un intervalo de probabilidad, es decir, será sencillo de manejar y de interpretar. En primer lugar, construiremos un intervalo de probabilidad para posteriormente relacionarlo con el resto de modelos.

4.1. Definiciones y resultados generales

Comenzamos introduciendo las definiciones y los resultados generales para ir centrándonos poco a poco en nuestro objetivo.

Consideremos una medida de probabilidad P_0 y dos funciones definidas como

$$\begin{aligned}g_l &: [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \\g_u &: [0, 1] \longrightarrow [0, 1].\end{aligned}$$

Notemos que para cada $x_i \in \Omega$, tenemos que $P_0(\{x_i\}) \in [0, 1]$ por lo que podemos aplicar las funciones g_l, g_u sobre las probabilidades de los elementos en $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Utilizando estas dos funciones, podemos definir un intervalo de probabilidad:

Definición 4.1. *Consideremos el espacio $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$ una medida de probabilidad. Consideremos las funciones $g_l, g_u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ verificando*

- $g_l(0) = g_u(0) = 0$.
- $g_l(1) = g_u(1) = 1$.
- $g_l(t) \leq g_u(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Denotemos $l_i = g_l(P_0(\{x_i\}))$ y $u_i = g_u(P_0(\{x_i\}))$ para cada $x_i \in \Omega$. Entonces decimos que el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{[l_i, u_i] \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \{[g_l(P_0(\{x_i\})), g_u(P_0(\{x_i\}))] \mid i = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

es el intervalo de probabilidad asociado a (g_l, g_u) .

Una vez definido el intervalo de probabilidad, como se hizo en la Sección 2.4 podemos definir su conjunto credal asociado:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{L}) &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid l_i \leq P(\{x_i\}) \leq u_i, \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid g_l(P_0(\{x_i\})) \leq P(\{x_i\}) \leq g_u(P_0(\{x_i\})), \forall i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

así como su probabilidad inferior y superior asociada mediante las expresiones:

$$\underline{P}(A) = \min\{P(A) \mid l_i \leq P(\{x_i\}) \leq u_i, \forall i = 1, \dots, n\} \quad (4.2)$$

$$= \min\{P(A) \mid g_l(P_0(\{x_i\})) \leq P(\{x_i\}) \leq g_u(P_0(\{x_i\})), \forall i = 1, \dots, n\}.$$

$$\overline{P}(A) = \max\{P(A) \mid l_i \leq P(\{x_i\}) \leq u_i, \forall i = 1, \dots, n\} \quad (4.3)$$

$$= \max\{P(A) \mid g_l(P_0(\{x_i\})) \leq P(\{x_i\}) \leq g_u(P_0(\{x_i\})), \forall i = 1, \dots, n\}$$

para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Notemos que la condición $g_l(0) = g_u(0) = 0$ asegura que $\underline{P}(\emptyset) = \overline{P}(\emptyset) = 0$, mientras que la condición $g_l(1) = g_u(1) = 1$ asegura que $\underline{P}(\Omega) = \overline{P}(\Omega) = 1$. Por último, la condición $g_l \leq g_u$ garantiza que $l_i \leq u_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Recordemos que, como vimos en la Sección 2.4, existen ciertas propiedades deseables que se suelen imponer a las probabilidades inferiores: la propiedad de ASL y la coherencia. A continuación, estudiamos qué condiciones adicionales se han de imponer a (g_l, g_u) para garantizar su probabilidad inferior asociada cumplan estas propiedades. De aquí en adelante, por cuestiones de simplicidad, nos referiremos a $P_0(\{x_i\})$ como p_i para cada $x_i \in \Omega$.

Proposición 4.1. *Sea \mathcal{L} el intervalo de probabilidad asociado a las funciones g_l y g_u definido en la Ecuación (4.1). Si $g_l(t) \leq t \leq g_u(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces \mathcal{L} evita la pérdida segura, es decir, tiene la propiedad ASL.*

Demostración. Veamos si \mathcal{L} verifica la caracterización dada en la Proposición 2.7:

$$\mathcal{L} \text{ ASL} \iff \sum_{i=1}^n l_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^n u_i.$$

En primer lugar, por definición de l_i , tenemos

$$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n g_l(p_i)$$

pero estamos suponiendo que $g_l(t) \leq t$ para todo $t \in [0, 1]$, en particular, $p_i \in [0, 1]$, por lo tanto, tenemos que $g_l(p_i) \leq p_i$, de manera que

$$\sum_{i=1}^n g_l(p_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Análogamente, tenemos que $g_u(t) \geq t$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces $g_u(p_i) \geq p_i$ y

$$\sum_{i=1}^n g_u(p_i) \geq \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Luego \mathcal{L} tiene la propiedad de ASL por la Proposición 2.7. □

La propiedad de ASL también puede comprobarse con la Definición 2.17,

sin más que comprobar que bajo las condiciones de la proposición anterior, la propia P_0 está en $\mathcal{M}(\mathcal{L})$, de manera que el conjunto credal es no vacío.

Ya vemos que no son condiciones muy fuertes las que debemos imponer para que el intervalo de probabilidad asociado a dos funciones tenga la propiedad de ASL. Veamos qué ocurre con la coherencia.

Proposición 4.2. *Sea \mathcal{L} el intervalo de probabilidad asociado a g_l y g_u definido en la Ecuación (4.1). Si g_l y g_u verifican las siguientes propiedades:*

1. $g_u(t) = 1 - g_l(1 - t)$ para todo $t \in [0, 1]$;
2. g_l es superaditiva: $g_l(a + b) \geq g_l(a) + g_l(b)$ para todo $a, b \in [0, 1]$ cumpliendo $a + b \leq 1$;
3. g_u es subaditiva: $g_u(a + b) \leq g_u(a) + g_u(b)$ para todo $a, b \in [0, 1]$ cumpliendo $a + b \leq 1$;

entonces el intervalo de probabilidad \mathcal{L} es un intervalo de probabilidad coherente, y por tanto también 2-monótono.

Demostración. Veamos si \mathcal{L} verifica la caracterización de la Proposición 2.8: \mathcal{L} coherente si y solo si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple

$$\sum_{j \neq i} l_j + u_i \leq 1 \text{ y } \sum_{j \neq i} u_j + l_i \geq 1.$$

Veamos la primera desigualdad:

$$\sum_{j \neq i} l_j + u_i = \sum_{j \neq i} g_l(p_j) + g_u(p_i).$$

Utilizando la propiedad 1 y sumado y restando $g_l(p_i)$, resulta que podemos expresar

$$\sum_{j \neq i} g_l(p_j) + g_u(p_i) = \sum_{j \neq i} g_l(p_j) + (1 - g_l(1 - p_i)) + g_l(p_i) - g_l(p_i)$$

y ahora utilizando las propiedades 1, 2 y 3 en las siguientes desigualdades

tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \neq i} g_l(p_j) + (1 - g_l(1 - p_i)) + g_l(p_i) - g_l(p_i) \\
 & \leq g_l \left(\sum_{j=1}^n (p_j) \right) + 1 - g_l(1 - p_i) - g_l(p_i) \\
 & = g_l \left(\sum_{j=1}^n (p_j) \right) + 1 - (g_l(1 - p_i) + g_l(p_i)) \\
 & = g_l \left(\sum_{j=1}^n (p_j) \right) + 1 - (1 - g_u(p_i) + 1 - g_u(1 - p_i)) \\
 & \leq g_l(1) + 1 - (1 + 1 - g_u(1 - p_i + p_i)) \\
 & = g_l(1) + 1 - (1 + 1 - g_u(1)) = 1.
 \end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad el razonamiento es análogo:

$$\sum_{j \neq i} u_j + l_i = \sum_{j \neq i} g_u(p_j) + g_l(p_i) + g_u(p_i) - g_u(p_i)$$

utilizando la propiedad 3 resulta

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \neq i} g_u(p_j) + g_l(p_i) + g_u(p_i) - g_u(p_i) \\
 & = \sum_{j=1}^n g_u(p_j) + g_l(p_i) - g_u(p_i) \\
 & \geq g_u \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) + g_l(p_i) - g_u(p_i)
 \end{aligned}$$

y finalmente aplicando las propiedades 1,2 y 3,

$$\begin{aligned}
 g_u \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) + g_l(p_i) - g_u(p_i) & \\
 &= g_u(1) + 1 - g_u(1 - p_i) - g_u(p_i) \\
 &= g_u(1) + 1 - (g_u(1 - p_i) + g_u(p_i)) \\
 &= g_u(1) + 1 - (1 - g_l(p_i) + 1 - g_l(1 - p_i)) \\
 &\geq g_u(1) + 1 - (1 + 1 - g_l(p_i + 1 - p_i)) = 1.
 \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que si g_l y g_u verifican las propiedades 1,2 y 3, entonces están en las condiciones de la Proposición 2.8 y por tanto se trata de un intervalo de probabilidad coherente. \square

Bajo las condiciones del resultado anterior, hemos obtenido que el intervalo de probabilidad es coherente y, por tanto, debido a la Proposición 2.10, la probabilidad inferior que determina es también es 2-monótona.

Por otro lado, la coherencia nos proporciona una expresión para las probabilidades inferior y superior de acuerdo con la Proposición 2.9, dichas probabilidades dadas en las Ecuaciones (4.2) y (4.3) se pueden calcular como:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}(A) &= \max \left\{ \sum_{x_i \in A} g_l(P_0(\{x_i\})), 1 - \sum_{x_i \notin A} g_u(P_0(\{x_i\})) \right\} \\
 \overline{P}(A) &= \min \left\{ \sum_{x_i \in A} g_u(P_0(\{x_i\})), 1 - \sum_{x_i \notin A} g_l(P_0(\{x_i\})) \right\}
 \end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

4.2. Relación con los modelos de distorsión

En el Capítulo 3, hicimos un repaso sobre algunos de los modelos de distorsión más relevantes. En esta sección intentaremos ver qué relación tiene el nuevo modelo (g_l, g_u) con los modelos de distorsión que hemos visto.

4.2.1. Relación con el modelo LV

Veamos ahora cómo podemos relacionar el modelo (g_l, g_u) con el modelo Linear-Vacuous. En primer lugar, conocemos las expresiones de las probabilidades inferior y superior del modelo LV, dadas en las Ecuaciones (3.2) y (3.3), por lo que parece razonable definir las funciones g_l y g_u de la siguiente forma:

$$g_l^{LV}(p_i) = \begin{cases} (1 - \delta)p_i, & \text{si } p_i < 1 \\ 1, & \text{si } p_i = 1 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$g_u^{NL}(p_i) = \begin{cases} (1 - \delta)p_i + \delta, & \text{si } p_i > 0 \\ 0, & \text{si } p_i = 0 \end{cases}$$

para cierto $\delta > 0$.

De acuerdo con la Definición 4.1 tenemos el intervalo de probabilidad asociado a g_l^{LV} y g_u^{LV} :

$$\mathcal{L}^{LV} = \{[l_i, u_i] \mid i = 1, \dots, n\}$$

para $l_i = g_l^{LV}(p_i)$ y $u_i = g_u^{LV}(p_i)$. Veamos sus propiedades.

Proposición 4.3. *El intervalo de probabilidad \mathcal{L}^{LV} es un intervalo de probabilidad coherente.*

Demostración. Veamos que \mathcal{L}^{LV} verifica las propiedades de la Proposición 4.2.

Propiedad 1:

$$g_u^{LV}(t) = (1 - \delta)t + \delta = t - \delta t + \delta \quad \text{y}$$

$$1 - g_l^{LV}(1 - t) = 1 - (1 - \delta)(1 - t) = t + \delta - \delta t$$

por lo que $g_u^{LV}(t) = 1 - g_l^{LV}(1 - t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Propiedad 2: Diferenciaremos tres casos ya que $g_l^{LV}(t) = (1 - \delta)t$ si y solo si $t < 1$.

En primer lugar, si $t_1 = 1$, entonces $t_2 = 0$, o viceversa, es trivial.

Por otro lado, si $t_1 + t_2 = 1$ pero $t_1, t_2 < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}g_l^{LV}(t_1 + t_2) &= (1 - \delta)(t_1 + t_2) = (1 - \delta) \quad \text{y} \\g_l^{LV}(t_1) + g_l^{LV}(t_2) &= (1 - \delta)t_1 + (1 - \delta)t_2 = (1 - \delta)(t_1 + t_2) = (1 - \delta).\end{aligned}$$

Finalmente, si $t_1 + t_2 < 1$, resulta que $t_1, t_2 < 1$ y

$$\begin{aligned}g_l^{LV}(t_1 + t_2) &= (1 - \delta)(t_1 + t_2) = (1 - \delta)t_1 + (1 - \delta)t_2 \quad \text{y} \\g_l^{LV}(t_1) + g_l^{LV}(t_2) &= (1 - \delta)t_1 + (1 - \delta)t_2\end{aligned}$$

de manera que $g_l^{LV}(t_1 + t_2) = g_l^{LV}(t_1) + g_l^{LV}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

Propiedad 3: Razonaremos de nuevo con tres casuísticas ya que $g_u^{LV}(t) = (1 - \delta)t + \delta$ si y solo si $t > 0$. En primer lugar, si $t_1 = t_2 = 0$ la desigualdad es trivial.

En el caso de que $t_1 = 0$ y $t_2 > 0$, o viceversa, tenemos que $t_1 + t_2 > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}g_u^{LV}(t_1 + t_2) &= (1 - \delta)(t_1 + t_2) + \delta = (1 - \delta)t_2 + \delta \quad \text{y} \\g_u^{LV}(t_1) + g_u^{LV}(t_2) &= (1 - \delta)t_2 + \delta = (1 - \delta)t_2 + \delta\end{aligned}$$

es decir, $g_u^{LV}(t_1) + g_u^{LV}(t_2) = g_u^{LV}(t_1 + t_2)$.

Finalmente, si $t_1, t_2 > 0$ entonces $t_1 + t_2 > 0$ y resulta que

$$\begin{aligned}g_u^{LV}(t_1 + t_2) &= (1 - \delta)(t_1 + t_2) + \delta \quad \text{y} \\g_u^{LV}(t_1) + g_u^{LV}(t_2) &= (1 - \delta)t_1 + \delta + (1 - \delta)t_2 + \delta = (1 - \delta)(t_1 + t_2) + 2\delta\end{aligned}$$

entonces tenemos que $g_u^{LV}(t_1) + g_u^{LV}(t_2) \geq g_u^{LV}(t_1 + t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

Es decir, \mathcal{L}^{LV} es un intervalo de probabilidad coherente.

□

Como consecuencia directa, por la Proposición 2.10, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4. *El intervalo de probabilidad \mathcal{L}^{LV} es un intervalo de probabilidad 2-monótono.*

Finalmente, comprobemos si \mathcal{L}^{LV} coincide con el intervalo de probabilidad \mathcal{L}_{LV} definido en la Ecuación (3.4):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{LV} &= \{[(1 - \delta)P_0(\{x_i\}), (1 - \delta)P_0(\{x_i\}) + \delta] \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \{[(1 - \delta)p_i, (1 - \delta)p_i + \delta] \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \{[g_l^{LV}(p_i), g_u^{LV}(p_i)] \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \{[l_i, u_i], i = 1, \dots, n\} = \mathcal{L}^{LV}.\end{aligned}$$

De nuevo, concluimos que efectivamente el modelo LV es un caso particular de modelo (g_l, g_u) .

4.2.2. Relación con el modelo PMM

Pasemos a continuación a analizar el modelo PMM. Las Ecuaciones (3.5) y (3.6) nos proporcionan las expresiones generales para las probabilidades inferior y superior respectivamente del modelo Pari Mutuel. Por eso, tiene sentido definir las funciones g_l, g_u de la siguiente forma:

$$g_l^{PMM}(p_i) = \text{máx}\{0, (1 + \delta)p_i - \delta\} \quad \text{y} \quad (4.4)$$

$$g_u^{PMM}(p_i) = \text{mín}\{1, (1 + \delta)p_i\} \quad (4.5)$$

para cierto $\delta > 0$.

Entonces por la Definición 4.1 podemos considerar el intervalo de probabilidad asociado a (g_l^{PMM}, g_u^{PMM}) :

$$\mathcal{L}^{PMM} = \{[l_i, u_i] \mid i = 1, \dots, n\}$$

siendo $l_i = g_l^{PMM}(p_i)$ y $u_i = g_u^{PMM}(p_i)$. Veamos entonces qué propiedades tiene este nuevo intervalo de probabilidad.

Proposición 4.5. *El conjunto \mathcal{L}^{PMM} es un intervalo de probabilidad coherente.*

Demostración. Veamos que \mathcal{L}^{PMM} verifica las condiciones de la Proposición 4.2.

Propiedad 1: Es trivial para $t_1 = 0$

$$g_u^{PMM}(t) = (1 + \delta)t \quad y$$

$$1 - g_l^{PMM}(1 - t) = 1 - (1 - \delta)(1 - t) - \delta = (1 + \delta)t,$$

luego $g_u^{PMM}(t) = 1 - g_l^{PMM}(1 - t)$.

Propiedad 2: Debemos distinguir tres casos teniendo en cuenta que $g_l^{PMM}(t) = (1 + \delta)t - \delta$ si y solo si $t \geq \frac{\delta}{(1 + \delta)}$.

En primer lugar, si $t_1, t_2 < \frac{\delta}{(1 + \delta)}$, tenemos dos opciones:

- Si $t_1 + t_2 < \frac{\delta}{(1 + \delta)}$ entonces

$$g_l^{PMM}(t_1 + t_2) = g_l^{PMM}(t_1) + g_l^{PMM}(t_2) = 0.$$

- Si $t_1 + t_2 \geq \frac{\delta}{(1 + \delta)}$ entonces

$$g_l^{PMM}(t_1 + t_2) > 0 \quad y$$

$$g_l^{PMM}(t_1) + g_l^{PMM}(t_2) = 0.$$

Por otro lado, si $t_1 \geq \frac{\delta}{(1 + \delta)}$, entonces $t_1 + t_2 \geq \frac{\delta}{(1 + \delta)}$ de manera que

$$g_l^{PMM}(t_1 + t_2) = (1 + \delta)(t_1 + t_2) - \delta \quad y$$

$$g_l^{PMM}(t_1) + g_l^{PMM}(t_2) = (1 + \delta)t_1 - \delta.$$

Finalmente, si $t_1, t_2 \geq \frac{\delta}{(1 + \delta)}$, tenemos:

$$g_l^{PMM}(t_1 + t_2) = (1 + \delta)(t_1 + t_2) - \delta \quad y$$

$$g_l^{PMM}(t_1) + g_l^{PMM}(t_2) = (1 + \delta)t_1 - \delta + (1 + \delta)t_2 - \delta$$

$$= (1 + \delta)(t_1 + t_2) - 2\delta,$$

de manera que $g_l^{PMM}(t_1 + t_2) \geq g_l^{PMM}(t_1) + g_l^{PMM}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

Propiedad 3: Razonando de manera similar a la propiedad anterior, en este caso, $g_u(t) = (1 + \delta)t$ si y solo si $t \leq \frac{1}{(1 + \delta)}$.

En primer lugar, si $t_1, t_2 > \frac{1}{(1 + \delta)}$ entonces $t_1 + t_2 > \frac{1}{(1 + \delta)}$ y tenemos

$$g_u^{PMM}(t_1 + t_2) = 1 < 2 = g_u^{PMM}(t_1) + g_u^{PMM}(t_2).$$

Por otro lado, si $t_1 \leq \frac{1}{(1 + \delta)}$, entonces

$$\begin{aligned} g_u^{PMM}(t_1 + t_2) &= 1 \quad \text{y} \\ g_u^{PMM}(t_1) + g_u^{PMM}(t_2) &= (1 + \delta)t_1 + 1. \end{aligned}$$

Finalmente, si $t_1, t_2 \leq \frac{1}{(1 + \delta)}$

$$\begin{aligned} g_u^{PMM}(t_1 + t_2) &= (1 + \delta)(t_1 + t_2) \quad \text{y} \\ g_u^{PMM}(t_1) + g_u^{PMM}(t_2) &= (1 + \delta)t_1 + (1 + \delta)t_2. \end{aligned}$$

Luego $g_u^{PMM}(t_1) + g_u^{PMM}(t_2) \geq g_u^{PMM}(t_1 + t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

Así, podemos concluir que efectivamente \mathcal{L}^{PMM} es un intervalo de probabilidad coherente. □

Como consecuencia de este resultado, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.6. *El intervalo de probabilidad \mathcal{L}^{PMM} es un intervalo de probabilidad 2-monótono.*

Veamos para terminar que efectivamente el intervalo de probabilidad \mathcal{L}^{PMM} coincide con el intervalo de probabilidad \mathcal{L}_{PMM} definido en la Ecuación (3.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PMM} &= \{[(1 + \delta)P_0(\{x_i\}) - \delta, (1 + \delta)P_0(\{x_i\})] \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \{[(1 + \delta)p_i - \delta, (1 + \delta)p_i] \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \{[g_l^{PMM}(p_i), g_u^{PMM}(p_i)] \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= \{[l_i, u_i], i \in \{1, \dots, n\}\} = \mathcal{L}^{PMM}. \end{aligned}$$

De esta forma, podemos concluir que el modelo PMM es un caso particular

de modelo (g_l, g_u) para las funciones (g_l^{PMM}, g_u^{PMM}) dadas en las Ecuaciones (4.4) y (4.5).

4.2.3. Relación con los modelos de distorsión

Ya hemos visto algunos modelos conocidos que podemos expresar como casos particulares de un modelo (g_l, g_u) . Además, hemos estudiado cuáles son sus propiedades y hemos comprobado que son bastante interesantes, pues en todos ellos hemos sido capaces de obtener la 2-monotonía, pero aún nos queda una pregunta pendiente: ¿podemos expresar los modelos (g_l, g_u) como modelos de distorsión? Veámoslo.

En primer lugar, en la Proposición 3.7, vimos que todo modelo VBM se puede ver como un modelo de distorsión con respecto a cierta función de distorsión d_{VBM} y un parámetro $\delta = 1$. Esto nos hace pensar que quizá nuestro modelo de distorsión tenga asociado como parámetro de distorsión $\delta = 1$. De hecho, se verifica el siguiente resultado, que define la función de distorsión y el parámetro δ .

Teorema 4.7. *Consideremos g_l, g_u cumpliendo las propiedades de la Proposición 4.2 que garantizan que inducen un intervalo de probabilidad coherente. Supongamos también que $g_l(t) < g_u(t)$ para todo $t \in (0, 1)$. Si definimos la función d de la siguiente forma,*

$$d(P, P_0) = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{g_u(p_i) - P(\{x_i\})}{g_u(p_i) - g_l(p_i)}, \frac{P(\{x_i\}) - g_l(p_i)}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} \right\}, \quad (4.6)$$

entonces se verifica que

$$B_d^1(P_0) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(\{x_i\}) \in [g_l(p_i), g_u(p_i)] \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Demostración. Notemos que la Proposición 4.2 nos permite asegurar que el conjunto $\{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(\{x_i\}) \in [g_l(p_i), g_u(p_i)] \quad \forall i = 1, \dots, n\}$ es no vacío. Por otro lado, notemos que $d(P_0, P_0) = 0 < 1$, es decir $P_0 \in B_d^1(P_0)$ y por tanto $B_d^1(P_0) \neq \emptyset$.

Veamos ahora el resultado por doble contenido. Una vez visto que la bola es no vacía, consideremos $P \in B_d^1(P_0)$, que por definición cumple $d(P, P_0) \leq 1$.

Esto significa que se verifican las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{g_u(p_i) - P(\{x_i\})}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} \leq 1 &\Rightarrow g_u(p_i) - P(\{x_i\}) \leq g_u(p_i) - g_l(p_i) \\ &\Rightarrow P(\{x_i\}) \geq g_l(p_i), \\ \frac{P(\{x_i\}) - g_l(p_i)}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} \leq 1 &\Rightarrow P(\{x_i\}) - g_l(p_i) \leq g_u(p_i) - g_l(p_i) \\ &\Rightarrow P(\{x_i\}) \leq g_u(p_i), \end{aligned}$$

es decir, si $P \in B_d^1(P_0)$ entonces $P(\{x_i\}) \in [g_l(p_i), g_u(p_i)]$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Veamos el otro contenido. Sea P una probabilidad cumpliendo $P(\{x_i\}) \in [g_l(p_i), g_u(p_i)]$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces $g_l(p_i) \leq P(\{x_i\}) \leq g_u(p_i)$. Veamos ambas expresiones por separado:

$$\begin{aligned} P(\{x_i\}) \geq g_l(p_i) &\Rightarrow P(\{x_i\}) - g_l(p_i) \geq 0 \Rightarrow \\ P(\{x_i\}) - g_l(p_i) + g_u(p_i) - g_u(p_i) &\geq 0 \Rightarrow \\ P(\{x_i\}) - g_u(p_i) &\geq g_l(p_i) - g_u(p_i) \Rightarrow \\ g_u(p_i) - P(\{x_i\}) &\leq g_u(p_i) - g_l(p_i) \Rightarrow \\ \frac{g_u(p_i) - P(\{x_i\})}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{x_i\}) \leq g_u(p_i) &\Rightarrow P(\{x_i\}) - g_u(p_i) \leq 0 \Rightarrow \\ P(\{x_i\}) - g_u(p_i) + g_l(p_i) - g_l(p_i) &\leq 0 \Rightarrow \\ P(\{x_i\}) - g_l(p_i) &\leq g_u(p_i) - g_l(p_i) \Rightarrow \\ \frac{P(\{x_i\}) - g_l(p_i)}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} &\leq 1 \end{aligned}$$

luego $P \in B_d^1(P_0)$. Así, podemos concluir que

$$B_d^1(P_0) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid P(\{x_i\}) \in [g_l(p_i), g_u(p_i)] \quad \forall i = 1, \dots, n\}. \quad \square$$

Recordemos que tenemos una lista de propiedades deseables para una función de distorsión que resumíamos en la Definición 3.2.

Proposición 4.8. *La función d definida en la Ecuación (4.6) verifica las*

propiedades 4 y 5 de la Definición 3.2.

Demostración. Consideremos $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}(\Omega)$.

Definición positiva:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_0) = 0 &\iff g_u(p_i) = P_1(\{x_i\}) = g_l(p_i) \text{ para todo } i = 1, \dots, n \\ &\iff g_u(p_i) = g_l(p_i) \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

por lo que esta propiedad solo sería cierta si $g_u(t) = g_l(t) = t$ para todo $t \in [0, 1]$, es decir, cuando no se realiza ninguna distorsión. Por tanto, en general d no es definida positiva.

Desigualdad triangular: Consideremos las siguientes probabilidades P_1, P_2, P_0 definidas sobre el conjunto $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ definidas como sigue:

x_i	P_1	P_2	P_0
$\{x_1\}$	0.439	0.200	0.0279
$\{x_2\}$	0.236	0.524	0.5922
$\{x_3\}$	0.325	0.276	0.3799

Tabla 4.1: Probabilidades asociadas a Ω .

Si consideramos $g_l(P(\{x_i\})) = P(\{x_i\})^2$ y $g_u(P(\{x_i\})) = P(\{x_i\})(2 - P(\{x_i\}))$ tenemos:

$$d(P_1, P_2) = 1.2468$$

$$d(P_2, P_0) = 3.6727$$

$$d(P_1, P_0) = 8.0788$$

de manera que $d(P_1, P_0) = 8.0788 > d(P_1, P_2) + d(P_2, P_0) = 1.2468 + 3.6727 = 4.9195$, luego d no verifica la desigualdad triangular.

Simetría: Consideremos las siguientes probabilidades P_1, P_2 definidas sobre el conjunto $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ definidas como sigue:

x_i	P_1	P_2
$\{x_1\}$	0.439	0.400
$\{x_2\}$	0.236	0.424
$\{x_3\}$	0.325	0.176

Tabla 4.2: Probabilidades asociadas a Ω .

Tenemos

$$d(P_1, P_2) = 1.122$$

$$d(P_2, P_1) = 1.140$$

es decir, $d(P_1, P_2) \neq d(P_2, P_1)$, luego d no es simétrica.

Cuasi-convexidad: Dado $\alpha \in [0, 1]$, se cumple:

$$d(\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2, P_0) \leq \max\{d(P_1, P_0), d(P_2, P_0)\}.$$

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$, y sea $C_i = \alpha P_1(\{x_i\}) + (1 - \alpha)P_2(\{x_i\})$, C_i es una combinación lineal convexa de $P_1(\{x_i\})$ y de $P_2(\{x_i\})$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces se verifica lo siguiente:

$$C_i \leq \max\{P_1(\{x_i\}), P_2(\{x_i\})\}.$$

Por otro lado, sabemos que $g_u(p_i) - P_1(\{x_i\}), g_u(p_i) - P_2(\{x_i\}) > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, de manera que:

$$g_u(p_i) - C_i \leq \max\{g_u(p_i) - P_1(\{x_i\}), g_u(p_i) - P_2(\{x_i\})\},$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{g_u(p_i) - C_i}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} &= \frac{g_u(p_i) - \alpha P_1(\{x_i\}) - (1 - \alpha)P_2(\{x_i\})}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{g_u(p_i) - P_1(\{x_i\})}{g_u(p_i) - g_l(p_i)}, \frac{g_u(p_i) - P_2(\{x_i\})}{g_u(p_i) - g_l(p_i)} \right\}. \end{aligned}$$

Tomando el máximo en i y aplicando la definición de la función d , resulta:

$$d(\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2, P_0) \leq \max\{d(P_1, P_0), d(P_2, P_0)\}.$$

Es decir, d verifica la propiedad de cuasi-convexidad.

Continuidad: Sabemos que $g_l(t) < g_u(t)$ para todo $t \in (0, 1)$, por lo que $g_u(p_i) - g_l(p_i) \neq 0$ para todo $p_i \in [0, 1]$. Así, podemos asegurar la continuidad de la función d por ser composición de funciones continuas. \square

4.2.4. Relación con el resto de modelos

Como hemos visto en el Ejemplo 3.3, el modelo de la Variación Total no es, en general, un caso particular de intervalo de probabilidad, por lo que no podremos relacionar este tipo de modelos con nuestro nuevo modelo (g_l, g_u) .

Por otro lado, podemos concluir también que los modelos Nearly-Linear tampoco son, en general, intervalos de probabilidad debido a que el modelo TV es un caso particular de modelo Nearly-Linear. Con este mismo argumento, dado que el modelo TV es un caso particular de transformaciones de probabilidades, deducimos a su vez que las transformaciones de probabilidades no tienen por qué ser casos particulares de un modelo (g_l, g_u) .

4.3. Algunos ejemplos

Una vez construido nuestro nuevo modelo, estamos en condiciones de analizar algunos ejemplos para dejar claros todos los conceptos introducidos y estudiados.

4.3.1. Función cuadrática

Comencemos con un ejemplo sencillo. Consideremos la función

$$\begin{array}{ccc} g_l: [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$$

y veamos si verifica las condiciones introducidas en la Sección 4.1 de nuestro modelo. En primer lugar, necesitamos una función g_u , pero para comenzar, consideramos una expresión general

$$g_u: [0, 1] \longrightarrow [0, 1].$$

En consonancia con la Definición 4.1, por un lado, la función g_l verifica:

- $g_l(0) = 0$.
- $g_l(1) = 1$.

También debemos imponer para la función g_u las siguientes condiciones:

- $g_u(0) = 0$.
- $g_u(1) = 1$.
- $g_l(t) \leq g_u(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

A partir de esta función g_l , buscamos definir un intervalo de probabilidad coherente, por lo que según la propiedad 1 de la Proposición 4.2, tenemos que $g_u(t) = 1 - g_l(1 - t)$, es decir:

$$\begin{aligned} g_u: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto t(2 - t). \end{aligned}$$

Recordemos que denotamos $P_0(\{x_i\}) = p_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces podemos definir el intervalo de probabilidad como sigue:

$$\mathcal{L}^{t^2} = \{[(p_i)^2, p_i(2 - p_i)] \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Veamos si tiene la propiedad de ASL y si se trata de un intervalo de probabilidad coherente.

Comencemos con la propiedad de ASL, notemos que se verifica $g_l(t) \leq t$ para todo $t \in [0, 1]$ y $g_u(t) \geq t$ para todo $t \in [0, 1]$, así, por la Proposición 4.1 tenemos que \mathcal{L}^{t^2} tiene la propiedad de ASL.

Para ver la coherencia, comprobamos si verifica las condiciones de la Proposición 4.2. Claramente, verifica la propiedad 1 por definición. Vamos ahora con las siguientes propiedades.

La función g_l es superaditiva puesto que es convexa y $g_l(0) = 0$, además es sencillo comprobar la subaditividad de g_u :

$$\begin{aligned} g_u(t_1 + t_2) &= (t_1 + t_2)(2 - (t_1 + t_2)) = 2(t_1 + t_2) - (t_1 + t_2)^2, \\ g_u(t_1) + g_u(t_2) &= t_1(2 - t_1) + t_2(2 - t_2), \end{aligned}$$

Si hacemos la resta, resulta:

$$\begin{aligned} g_u(t_1 + t_2) - (g_u(t_1) + g_u(t_2)) &= 2(t_1 + t_2) - (t_1 + t_2)^2 - (t_1(2 - t_1) + t_2(2 - t_2)) \\ &= 2(t_1 + t_2) - (t_1 + t_2)^2 - (2t_1 - t_1^2 + 2t_2 - t_2^2) = -2t_1t_2 \leq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, g_u es subaditiva y podemos concluir que \mathcal{L}^{t^2} es un intervalo de probabilidad coherente.

Vamos ahora con un ejemplo concreto.

Ejemplo 4.1. Consideremos un espacio muestral $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ siendo $P_0 = (0.2, 0.3, 0.5)$. Si consideramos el modelo (g_l, g_u) asociado a P_0 , el intervalo de probabilidad \mathcal{L}^{t^2} tendrá las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} P(\{x_1\}) &\in [0.04, 0.36]. \\ P(\{x_2\}) &\in [0.09, 0.51]. \\ P(\{x_3\}) &\in [0.25, 0.75]. \end{aligned}$$

De esta forma, determina la siguiente probabilidad inferior coherente \underline{P} con probabilidad superior conjugada \overline{P} :

Suceso	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
\underline{P}	0.04	0.09	0.25	0.25	0.49	0.64
\overline{P}	0.36	0.51	0.75	0.75	0.91	0.96

Veamos gráficamente su conjunto credal.

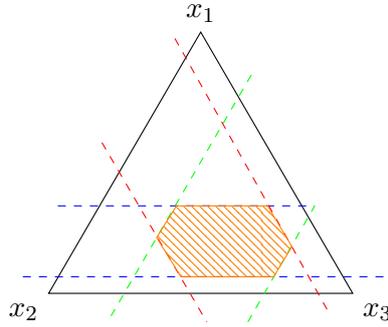


Figura 4.1: Conjunto credal inducido por \mathcal{L}^{t^2} .

Notemos que, para este caso particular de un espacio de 3 elementos, obtendremos el mismo resultado si consideramos la función de transformación $\varphi(t) = t^2$ y construimos el modelo transformado tal como indicamos en la Sección 3.2. No tenemos más que considerar $\underline{P}_\varphi(A) = \varphi(P_0(A)) = (P_0(A))^2$ para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, de donde obtendríamos su probabilidad superior conjugada $\overline{P}_\varphi(A) = 1 - \underline{P}_\varphi(A^c)$.

Sin embargo, si considerásemos un espacio de cardinal mayor de 3, esta equivalencia entre el modelo (g_l, g_u) donde g_l es una función cuadrática y el modelo determinado por la transformación $\varphi(t) = t^2$ no sería equivalente. Consideremos $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y P_0 la distribución uniforme discreta, es decir, $P_0(\{x_i\}) = 0.25$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Entonces para los sucesos de cardinal 2, como por ejemplo el suceso $\{x_1, x_2\}$, tendremos para el modelo (g_l, g_u) según la Proposición 2.9:

$$\underline{P}(\{x_1, x_2\}) = \text{máx} \left\{ \sum_{x_i \in \{x_1, x_2\}} l_i, 1 - \sum_{x_i \notin \{x_1, x_2\}} u_i \right\} = 0.125,$$

mientras que para el modelo transformado será:

$$\underline{P}_\varphi(\{x_1, x_2\}) = \varphi(P_0(\{x_1, x_2\})) = (0.25 + 0.25)^2 = 0.25,$$

es decir, no tenemos distribuciones equivalentes.

4.3.2. Función cuasi-lineal

En este último apartado, trabajaremos con una función g_l cuasi-lineal, por ejemplo dada por:

$$\begin{aligned} g_l: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto \min\{\max\{0.5 \cdot t - 0.05, 0\}, 1\} \end{aligned}$$

Comprobemos que efectivamente g_l verifica las condiciones de la Definición 4.1.

- $g_l(0) = 0$.
- $g_l(1) = 1$.

Además, busquemos

$$g_u: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

que verifique

- $g_u(0) = 0$.
- $g_u(1) = 1$.
- $g_l(t) \leq g_u(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Definamos $g_u(t) = 1 - g_l(1 - t)$, que verifica las condiciones necesarias y además nos asegurará la coherencia del modelo. Apliquemos estas transformaciones al mismo ejemplo que en la sección anterior.

Ejemplo 4.2. Consideremos $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $P_0 = (0.2, 0.3, 0.5)$. Para el modelo (g_l, g_u) introducido, obtenemos el intervalo de probabilidad $\mathcal{L}^{0.5t-0.05}$ que vendrá determinado por las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} P(\{x_1\}) &\in [0.05, 0.65], \\ P(\{x_2\}) &\in [0.10, 0.70], \\ P(\{x_3\}) &\in [0.20, 0.80], \end{aligned}$$

que determinan la probabilidad inferior \underline{P} y su probabilidad superior conjugada \overline{P} dadas por:

Suceso	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
\underline{P}	0.05	0.10	0.20	0.20	0.30	0.35
\overline{P}	0.65	0.70	0.80	0.80	0.90	0.95

Su conjunto credal está representado en la Figura 4.2. Como se puede observar, la forma del conjunto credal difiere del conjunto credal obtenido con la función g_l cuadrática mostrado en la Figura 4.1. Esto muestra que, evidentemente, a medida que varían las funciones g_l, g_u , varía también el resultado obtenido.

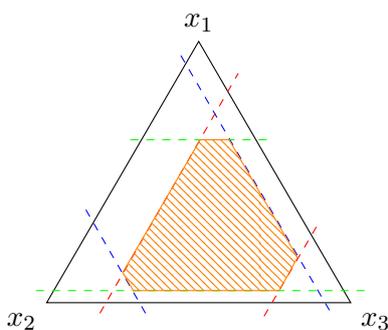


Figura 4.2: Conjunto credal inducido por $\mathcal{L}^{0.5t-0.05}$.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha presentado un estudio de los distintos modelos de distorsión presentes en la literatura, partiendo de la definición más general en términos de una bola cerrada centrada en la probabilidad dada, hasta llegar a modelos más particulares como son las transformaciones de probabilidad, los modelos nearly-lineal, particularmente los de barrera vertical, o algunos modelos más conocidos: Pari-Mutuel, Linear-Vacuous y de la Variación Total.

Posteriormente construimos un nuevo modelo de distorsión en el Capítulo 4. Este nuevo modelo (g_l, g_u) es un intervalo de probabilidad, por lo que el trabajo con él estará bastante simplificado y será más simple de interpretar. Además, conseguimos relacionar nuestro modelo con los modelos conocidos como son el PMM y el LV, no así pudimos hacerlo con el modelo de la Variación Total. También definimos una función de distorsión asociada a las funciones (g_l, g_u) que define un conjunto credal y por tanto un modelo de distorsión.

En la Figura 5.1 se muestran las relaciones que hemos visto entre el nuevo modelo introducido y los distintos modelos de distorsión vistos en el Capítulo 3. Por una parte, en el Teorema 4.7 hemos visto que todo modelo generado por las funciones (g_l, g_u) es en particular un modelo de distorsión puesto que puede expresarse como una bola centrada en P_0 con radio 1 y con respecto a la función de distorsión definida en la Ecuación 4.6. También hemos visto que los modelos LV y PMM se pueden expresar como modelos (g_l, g_u) , pero

no así el modelo TV. Por último, también hemos visto en el Ejemplo 4.2 que, en general, las transformaciones de probabilidad y, en particular, los modelos de barrera vertical no están relacionados con los modelos (g_l, g_u) .

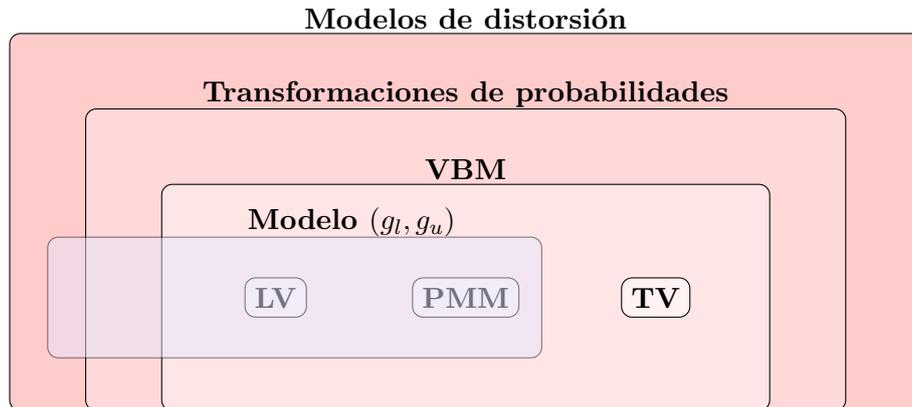


Figura 5.1: Relación existente entre el modelo (g_l, g_u) y el resto de modelos de distorsión.

Como posibles temas de investigación futura, podemos plantearnos estudiar más en profundidad el nuevo modelo, buscar nuevas propiedades que nos proporcionen características interesantes e intentar relacionarlo con otros modelos conocidos, como pueden ser el modelo de ratios constantes, el modelo asociado a la distancia euclídea o incluso los conocidos como modelos de barrera horizontal. Asimismo, se podría investigar si las buenas propiedades del nuevo modelo, principalmente el hecho de ser un intervalo de probabilidad, pueden ser de ayuda en aplicaciones de los modelos de distorsión como por ejemplo en la estimación de probabilidades de error humano [1].

Bibliografía

- [1] P.R. Alonso-Martín, I. Montes, E. Miranda, Distortion models for estimating human error probabilities, *Safety Science* 157:105915, 2023.
- [2] P. Billingsley, *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, 1986.
- [3] A. Bronevich, On the closure of families of fuzzy measures under event-wise aggregations, *Fuzzy Sets and Systems* 153:45-70, 2005.
- [4] L.M. de Campos, J.F. Huete, and S. Moral, Probability intervals: A tool for uncertain reasoning, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based –Systems* 2:167–196, 2011.
- [5] G. Choquet, Theory of capacities, *Annales de l’Institut Fourier*, 5:131-295, 1953-1954.
- [6] C. Corsato, R. Pelesoni and P. Vicig, Nearly-Linear uncertainty measures, *International Journal of Approximate Reasoning*, 114:1–28, 2019.
- [7] D. Denneberg, *Non-additive Measure and Integral*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.
- [8] B. de Finetti, *Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment*, John Wiley & Sons Ltd, 1974.
- [9] T. Herron, T. Seidenfeld and L. Wasserman, Divisive conditioning: further results on dilation, *Philosophy of Science*, 64:411-444, 1997.
- [10] P.J. Huber, *Robust Statistics*, Wiley, New York, 1981.
- [11] E. Miranda, R. Pelesoni and P. Vicig, Evaluating uncertainty with vertical barrier models, *International Journal of Approximate Reasoning*, 167:109132, 2024.

- [12] I. Montes, E. Miranda and S. Destercke, Pari-mutuel probabilities as an uncertainty model, *Information Sciences*, 481:550-573, 2019.
- [13] I. Montes, E. Miranda and S. Destercke, Unifying neighbourhood and distortion models: part I – new results on old models, *International Journal of General Systems*, 49(6):602-635, 2020.
- [14] I. Montes, E. Miranda and S. Destercke, Unifying neighbourhood and distortion models: part II – new models and synthesis, *International Journal of General Systems*, 49(6):636–674, 2020.
- [15] R. Pelessoni, P. Vicig and C. Corsato, Inference with nearly-linear uncertainty models, *Fuzzy Sets and Systems*, 412 (2021), pp. 1-26.
- [16] R. Pelessoni, P. Vicig and M. Zaffalon, Inference and risk measurement with de pari-mutuel model, *International Journal of Approximate Reasoning*, 51:1145-1158, 2010.
- [17] P. Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman & Hall, 1991.