



Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Grado en Física

Trabajo Fin de Grado:
Introducción a la Teoría Cuántica de
Campos

Autor: Luis Fernández-Catuxo Ortiz

Tutor: Patrick Meessen

Curso académico: 2020/24

Convocatoria: Extraordinaria

La naturaleza no “cuantiza”, es intrínsecamente cuántica. La “cuantización” es una actividad matemática formal reservada a los físicos teóricos que, sin que sea culpa suya, primero desarrollaron su intuición física observando el mundo en el límite de grandes números cuánticos. Por tanto, no sabemos cómo escribir una teoría cuántica a priori, pero la teoría clásica proporciona el marco para descubrir la teoría cuántica subyacente. [1]

David Atkatz

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Metodología y objetivos	2
1.2	Causalidad y Localidad en las teorías cuánticas	3
2	Teoría clásica de campos	5
2.1	Formalismo lagrangiano	5
2.2	Formalismo hamiltoniano	6
2.3	Teorema de Noether	6
2.4	Tensor energía-momento	8
3	Cuantización de una teoría clásica. Segunda cuantización	10
3.1	Límite continuo y cuantización	11
3.2	Cuantización y límite continuo	14
3.3	Construcción del espacio de Fock	15
4	Campos escalares	19
4.1	Campo escalar real	20
4.1.1	Operadores de creación y aniquilación	22
4.1.2	Energía y momento de los estados multipartícula	25
4.2	Campo escalar complejo: antipartículas	27
4.2.1	Invarianza bajo $U(1)$ global	30
5	Campo espinorial de Dirac	33
5.1	Ecuación de Dirac	33

5.2	Campo de Dirac	36
5.2.1	Invarianza bajo $U(1)$ global	40
6	Campo electromagnético	41
6.1	Electromagnetismo en forma covariante	41
6.2	Simetría gauge	42
6.3	Cuantización del campo electromagnético	44
6.3.1	Cuantización en el gauge de radiación	44
6.3.2	Cuantización covariante	46
7	Conclusiones	52
A	Convenios y notación	53
	Bibliografía	55

Capítulo 1

Introducción

Para el desarrollo en §1.2 me he basado en las ideas de Gaumé [2].

La Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés) surge como un intento de unificar mediante la teoría de campos las principales teorías del siglo XX, la Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica. Está considerada como uno de los logros más grandes de la física moderna ya que es la teoría probada experimentalmente con mayor precisión. Es la base del modelo estándar de partículas y es muy utilizada en numerosas ramas de la física, como en física de la materia condensada, donde se utiliza para poder tratar fenómenos que se dan lugar en sistemas con muchos cuerpos, en física estadística o en cosmología.

La Mecánica Cuántica, desarrollada en los años 20 del siglo pasado por Max Planck, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger y Paul Dirac, entre otros, no era capaz de explicar distintos procesos con exactitud, como es el caso de las líneas espectrales atómicas, los sistemas en los que el número de partículas no es fijo como sucede en los experimento de colisiones donde se pueden crear o destruir partículas. Estos procesos de dispersión invitan a pensar en términos de relatividad especial, ya que existen transformaciones de energía en masa y viceversa. No obstante, la mecánica cuántica no estaba formulada en términos covariantes (la ecuación de Schrödinger no es invariante Lorentz). El primer intento de dicha unificación comenzó buscando precisamente una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger, la llamada ecuación de Klein-

Gordon, sin embargo, el propio Schrödinger la rechazó por diferentes patologías como soluciones a la ecuación con energía negativa, quedándose con su famosa ecuación.

El salto conceptual que debe darse consiste en un cambio en la interpretación de los resultados y en un cambio profundo del punto de vista. Mientras que en la mecánica cuántica cuantizamos una partícula hablando en términos de funciones de onda, en la Teoría Cuántica de Campos identificaremos las partículas con los distintos modos de un único campo, se cuantiza el campo en sí mismo. Como veremos, de acuerdo con esta teoría, las partículas surgen de manera natural a partir de la cuantización de los campos.

1.1 Metodología y objetivos

Este trabajo pretende ser una introducción autocompleta y autocontenida a la Teoría Cuántica de Campos utilizando los conocimientos básicos en cuántica, electromagnetismo, relatividad especial y teoría clásica de campos adquiridos a un nivel de graduado en física.

Con este propósito, introduciremos unos conceptos previos de cómo la relatividad nos impone algunas restricciones sobre los operadores cuánticos. A continuación y como primer acercamiento a la teoría se cuantizará un sistema de osciladores armónicos llegando en última instancia a un campo cuántico. Introduciremos el concepto de espacio de Fock como la estructura necesaria para el desarrollo de la teoría así como la posibilidad de movernos por este espacio mediante los denominados operadores de creación y destrucción de partículas. Por último, partiendo de diferentes campos clásicos libres y empleando la cuantización canónica (debido a que es el método con el que un graduado en física está más familiarizado), se obtendrán los correspondientes campos cuánticos y cómo estos actúan sobre el espacio de Fock para dar lugar a las distintas partículas que existen.

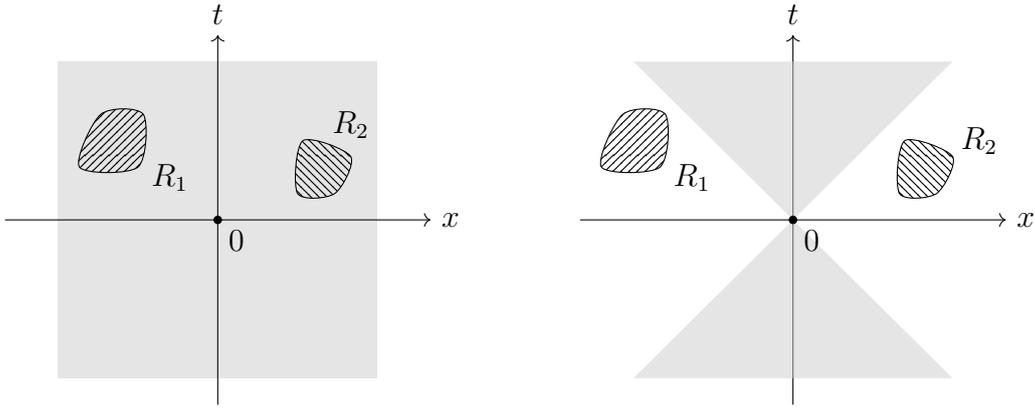


Figura 1.1: *Comparación entre dos tipos de espacio-tiempo: no relativista (izquierda) y relativista (derecha). Las regiones R_1 y R_2 están indicadas en cada caso. Todos los puntos que se encuentren dentro de la zona sombreada están causalmente conectados [2].*

1.2 Causalidad y Localidad en las teorías cuánticas

En la teoría cuántica no relativista, los observables son operadores hermíticos que actúan sobre los estados del sistema. Si nos restringimos a la imagen de Heisenberg, estos operadores dependen únicamente del tiempo, es por esto que las medidas son locales en el tiempo pero globales en el espacio. Debido a que no hay restricción sobre la velocidad a la que la información puede viajar, todos los puntos están conectados causalmente (ver figura 1.1).

En contraposición, la teoría relativista nos advierte de que esto no puede suceder debido a la causalidad y a la localidad de la física, de manera que ninguna información (como puede ser dicha medida) puede propagarse más rápido que la luz, por lo que las medidas tienen que ser locales tanto en el espacio como en el tiempo. Debido a que debe satisfacerse la causalidad, las medidas de un cierto observable \mathcal{O} en dos regiones R_1 y R_2 desconectadas causalmente no deberían interferir entre ellas (ver figura 1.1), es decir,

$$[\mathcal{O}_{R_1}, \mathcal{O}_{R_2}] = 0 \quad \text{si} \quad (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad \forall x_1 \in R_1 \quad x_2 \in R_2 . \quad (1.1)$$

Vemos por tanto, cómo al utilizar un formalismo cuántico-relativista, la causalidad nos impone una condición sobre los operadores asociados a observables: que en la

imagen de Heisenberg deben depender de las coordenadas espacio-temporales x^μ . Podemos generalizar la idea de la expresión (1.1) cuando R_1 y R_2 tienden a un punto, encontrando la condición que impone la microcausalidad,

$$[\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)] = 0 \quad \text{si} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (1.2)$$

Vemos cómo la invarianza relativista nos empuja a introducir el concepto de operadores cuánticos que actúan localmente y preservando la causalidad. Más adelante, veremos cómo estos operadores toman la forma de campos cuánticos, los cuales tienen su correspondencia con campos en la descripción clásica.

Capítulo 2

Teoría clásica de campos

Para este capítulo me he basado principalmente en [3].

En este Capítulo vamos a definir los conceptos básicos de teoría clásica de campos que nos serán de gran utilidad más adelante para la cuantización canónica.

2.1 Formalismo lagrangiano

El formalismo lagrangiano es fundamental en teoría cuántica de campos ya que nos proporciona un marco de trabajo dotado de invariancia Lorentz, además de que nos garantiza causalidad y que las interacciones sean locales, lo cuál vimos anteriormente que es un requisito imprescindible en una teoría relativista.

El principio de mínima acción de Hamilton establece que un campo evoluciona hacia la configuración espacio-temporal que extremice la acción. Esta acción, \mathcal{S} , es un funcional que se define como la integral espacio-temporal de la densidad lagrangiana, \mathcal{L} ,

$$\mathcal{S} = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) . \quad (2.1)$$

Donde consideraremos que \mathcal{L} es una función escalar que puede depender tanto del campo como de sus derivadas. Si extremizamos la acción, es decir, imponemos

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta(\partial_\mu\phi_i) \right] = \int d^4x \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] \delta\phi_i = 0 , \quad (2.2)$$

uno llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0, \quad (2.3)$$

donde el índice i recorre todos los campos presentes en la densidad lagrangiana \mathcal{L} . Estas ecuaciones, conocidas como ecuaciones de movimiento (EOM, por sus siglas en inglés), rigen la dinámica de cada campo clásico.

2.2 Formalismo hamiltoniano

En el formalismo hamiltoniano se define el momento conjugado canónico de un campo como

$$\Pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)}, \quad (2.4)$$

mientras que la densidad hamiltoniana se define mediante una transformada de Legendre de la densidad lagrangiana,

$$\mathcal{H} = \sum_i \Pi_i(x) \partial_0 \phi_i - \mathcal{L}. \quad (2.5)$$

El hamiltoniano del sistema se obtiene integrando la densidad hamiltoniana a todo el espacio

$$H = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}. \quad (2.6)$$

2.3 Teorema de Noether

El teorema de Noether [4] establece que existe una ley de conservación por cada simetría continua que posea un sistema físico. Consideramos una familia de campos ϕ_i gobernados por una acción \mathcal{S} y consideramos unas transformaciones infinitesimales tanto de las coordenadas como de los campos de la forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^a \xi^\mu_a(x), \quad (2.7)$$

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \varepsilon^a F_{ia}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.8)$$

donde ε^a donde $a = 1, \dots, N$ es un conjunto de parámetros infinitesimales. Decimos que existe una simetría si estas transformaciones dejan \mathcal{S} invariante. Distinguimos

entre simetrías globales o locales: las simetrías globales son aquellas donde ε^a son constantes mientras que en las locales $\varepsilon^a = \varepsilon^a(x)$ es una función arbitraria de las coordenadas. Otra distinción es entre simetrías internas o espaciotemporales. Las simetrías internas son aquellas que no actúan sobre las coordenadas, es decir, aquellas donde $\xi^\mu_a(x) = 0$, mientras que en las simetrías espaciotemporales sí que existe tal transformación.

En el caso de las simetrías internas y transformaciones de Lorentz, dejar invariante la acción es equivalente a dejar invariante la densidad lagrangiana, ya que como vemos en la ecuación (2.1) d^4x no se ve afectado. Si estas simetrías dejan \mathcal{L} invariante, se puede demostrar que existen N corrientes conservadas J^μ_a , una por cada generador de la transformación que cumplen

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0, \quad a = 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

A cada corriente le corresponde una carga conservada (en el sentido de que es una constante del movimiento) definida como

$$Q_a = \int d^3\mathbf{x} J^0_a. \quad (2.10)$$

De manera general, podemos escribir las corrientes como

$$J^\mu_a = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} [\xi^\nu_a(x) \partial_\nu \phi_i - F_{ia}(\phi, \partial_\mu \phi)] - \xi^\mu_a(x) \mathcal{L}, \quad (2.11)$$

donde tenemos N corrientes para cada campo ϕ_i . Si nos restringimos a las transformaciones internas (aquellas en las que $\xi^\mu_a(x) = 0$), las corrientes toman la forma

$$J^\mu_a = - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} F_{ia}, \quad (2.12)$$

donde si consideramos transformaciones lineales del campo tenemos que $F_{ia} = (M_a)_i^j \phi_j$, donde $(M_a)_i^j$ es un conjunto de N matrices constantes.

2.4 Tensor energía-momento

Es lógico pensar que las traslaciones tanto temporales como espaciales son una simetría de las teorías físicas que estamos considerando, por lo que estas tendrán asociadas sus respectivas cantidades conservadas. Si consideramos una transformación definida como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu = x^\mu + \varepsilon^\nu \delta^\mu_\nu, \quad (2.13)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \quad (2.14)$$

y nos fijamos en la expresiones (2.7) y (2.8) podemos identificar $\xi^\mu_a(x) = \delta^\mu_\nu$ y $F_{ia} = 0$. Tendremos por tanto cuatro corrientes conservadas θ^μ_ν , una por cada valor de ν

$$\partial_\mu \theta^\mu_\nu = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (2.15)$$

Utilizando la ecuación (2.11) y subiendo el índice ν con la métrica ($\theta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\sigma} \theta^\mu_\sigma$) obtenemos el tensor energía-momento

$$\theta^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.16)$$

y la expresión (2.15) se traduce en la conservación del tensor energía-momento

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3). \quad (2.17)$$

Este tensor $\theta^{\mu\nu}$ no tiene por qué ser simétrico, no obstante, podemos definir un nuevo tensor energía-momento “mejorado” simplemente añadiendo un nuevo término, de manera que el conjunto sea simétrico,

$$\theta^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\rho G^{\rho\mu\nu}. \quad (2.18)$$

El tensor $G^{\rho\mu\nu}$ es antisimétrico en los índices ρ y μ . Debido a esta antisimetría y a la manera en que hemos definido el nuevo tensor la carga conservada asociada a ambos será la misma, por lo que $\theta^{\mu\nu}$ y $T^{\mu\nu}$ son físicamente equivalentes*.

*La forma más cómoda de obtener directamente el tensor energía-momento es acoplar los campos a la Relatividad General, ya que las ecuaciones de Einstein nos garantizan que $T_{\mu\nu}$ sea simétrico y conservado.

Esa carga conservada asociada a (2.16) es el cuadri-momento, definido como

$$P^\nu = \int d^3\mathbf{x} \theta^{0\nu} . \quad (2.19)$$

Deducimos entonces que la simetría bajo traslaciones espaciales tiene como consecuencia la conservación del momento lineal total,

$$P^i = \int d^3\mathbf{x} \theta^{0i} . \quad (2.20)$$

Si tomamos $\nu = 0$ en (2.19) recuperamos el hamiltoniano del sistema

$$P^0 = \int d^3\mathbf{x} \theta^{00} = \int d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \Pi_i \partial_0 \phi_i - \mathcal{L} \right] = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = H , \quad (2.21)$$

de donde podemos deducir que la energía del sistema es la carga conservada correspondiente a la invarianza de la teoría bajo traslaciones temporales.

Capítulo 3

Cuantización de una teoría clásica. Segunda cuantización

Para este primer acercamiento a los campos cuánticos me he basado en [5].

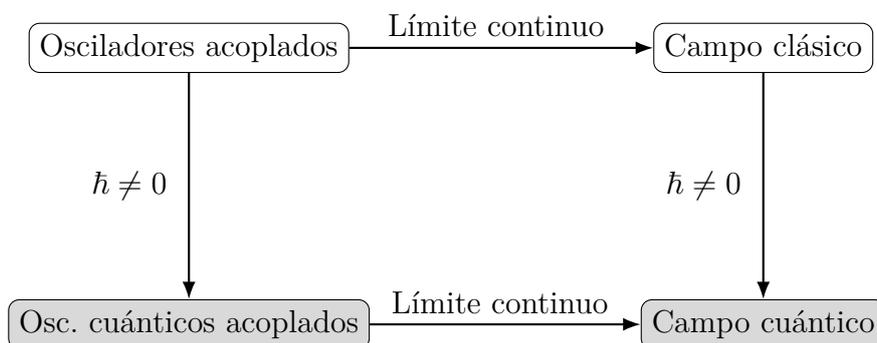


Figura 3.1: *Esquema de los distintos caminos para realizar la cuantización.*

Un buen primer acercamiento a la teoría es mediante el *toy model* de los osciladores armónicos, en el cual se considera un sistema discreto de osciladores unidimensionales acoplados. Podemos llegar a un campo cuántico a través de dos caminos: uno es tomado el límite al continuo para conseguir un campo clásico y más tarde imponer las relaciones de conmutación pertinentes para obtener el campo cuántico. El otro camino es considerar un conjunto de osciladores armónicos cuánticos y tomar el límite al continuo (ver figura 3.1).

3.1 Límite continuo y cuantización

Comencemos por imaginar un sistema unidimensional discreto formado por $N + 2$ cuerpos que pueden vibrar en una dimensión. Consideremos que se encuentran unidos a través de muelles idénticos con constante elástica k . Es fácil ver que el lagrangiano del sistema vendrá dado por la expresión

$$L = \sum_{i=0}^{N+1} \left[\frac{p_i^2}{2m} - \frac{k}{2} (q_i - q_{i+1})^2 \right], \quad (3.1)$$

donde m es la masa de los cuerpos, q_i es la distancia que se ha desplazado la masa en la posición i con respecto a su posición de equilibrio y $p_i = m\dot{q}_i$ es su momento lineal. El corchete de Poisson entre el desplazamiento y el momento es

$$\{q_i, p_j\}_P = \delta_{ij}. \quad (3.2)$$

El primer término en el lagrangiano (3.1) corresponde a la energía cinética de los osciladores mientras que el segundo corresponde a su energía potencial. Si establecemos condiciones de contorno periódicas

$$q_j(t) = q_{j+N}(t) \quad (3.3)$$

y resolvemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este sistema,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (3.4)$$

podemos obtener las ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{q}_j - k(q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j) = 0 \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Los modos normales de vibración del sistema nos quedan

$$q_j(t) = e^{i(pj - \omega t)}. \quad (3.6)$$

Para que las soluciones satisfagan las condiciones de contorno los p 's deben de estar discretizados de la siguiente manera:

$$e^{iNp} = 1 \Rightarrow p = \frac{2\pi n}{N} \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2. \quad (3.7)$$

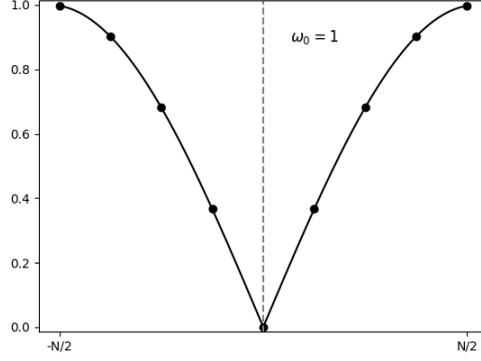


Figura 3.2: Relación de dispersión de la cadena discreta. Los puntos negros corresponden a las frecuencias normales de vibración.

Si introducimos las soluciones dadas en (3.6) en la ecuación de movimiento en (3.5) podemos obtener la relación de dispersión para nuestra cadena

$$m\omega^2 q_j(t) = k q_j(t) (2 - e^{ip} + e^{-ip}) \Rightarrow m\omega^2 = 2k (1 - \cos(p)) = 4k \sin^2 \left(\frac{p}{2} \right) .$$

Utilizando la condición de discretización de p 's llegamos a:

$$\omega_n = \omega_0 \sin \left(\frac{n\pi}{N} \right) ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} . \quad (3.8)$$

Si tomamos el límite al continuo, es decir, hacemos que el número de masas sea cada vez mayor mientras que la distancia en reposo entre ellas, a , sea cada vez menor

$$N \longrightarrow \infty , \quad a \longrightarrow 0 , \quad (3.9)$$

mientras que mantenemos la longitud de la cadena $l = Na$ constante, pasaremos de tener una cadena discreta a una cuerda continua. Llegados a este punto, las posiciones discretas de las masas pasan a ser una variable continua, de manera que podemos definir un campo continuo

$$q_j(t) = \phi(\mathbf{x}_j, t) \longrightarrow \phi(\mathbf{x}, t) , \quad (3.10)$$

donde aquí \mathbf{x} denota la variable continua espacial unidimensional.

Teniendo en cuenta esto y utilizando que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{q_{j+1} - q_j}{a} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\phi(\mathbf{x} + a) - \phi(a)}{a} \right] = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.11)$$

$$\sum q_j \longrightarrow \frac{1}{\Delta \mathbf{x}} \int_0^l \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{a} \int_0^l \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.12)$$

podemos reescribir el lagrangiano en términos del campo continuo

$$L = \int d\mathbf{x} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right] d\mathbf{x}, \quad (3.13)$$

donde hemos utilizado la densidad de masa $\rho = m/a$ y la tensión de la cuerda $\sigma = ka$.

Al haber pasado a una teoría de campos tendremos una densidad lagrangiana que se corresponde con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right]. \quad (3.14)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre esta densidad lagrangiana obtenemos las ecuaciones del movimiento para la cuerda continua,

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^2} = 0, \quad (3.15)$$

cuyas soluciones son ondas viajeras con velocidad de propagación $v = \sqrt{\sigma/\rho}$ de la forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{i(k\mathbf{x} - \omega_k t)} \quad (3.16)$$

y cuya relación de dispersión es $\omega = vk$. Llegados a este punto tenemos un campo clásico gobernado por la densidad lagrangiana (3.14) cuyo momento canónico asociado es

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}. \quad (3.17)$$

La delta de Kronecker de la expresión (3.2) se convierte en una delta de Dirac,

$$\{\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)\}_P = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.18)$$

Una vez tomado el límite al continuo y haber obtenido una teoría de campos clásica, debemos promover tanto el campo como su momento conjugado a operadores hermíticos e imponer las reglas de conmutación

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.19)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (3.20)$$

Obteniendo así una teoría cuántica de campos donde ϕ y Π son ahora campos cuánticos.

3.2 Cuantización y límite continuo

En este apartado obtendremos un campo cuántico a partir de tomar el límite de la cadena de osciladores cuánticos. Para cuantizar la cadena monoatómica, remplazaremos las masas unidas por muelles por osciladores cuánticos independientes. Promocionaremos el desplazamiento de cada oscilador q_j y su momento p_j por operadores hermíticos de manera que se cumplan las relaciones de conmutación

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} , \quad (3.21)$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 . \quad (3.22)$$

El hamiltoniano del sistema toma la forma

$$H = \sum_{i=0}^{N+1} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{k}{2} (q_i - q_{i+1})^2 \right] . \quad (3.23)$$

Si volvemos a tomar el límite al continuo de manera similar a como hicimos para la cadena clásica, el hamiltoniano se convierte en

$$H = \int \left[\frac{1}{2\rho} \Pi^2 + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \right] d\mathbf{x} , \quad (3.24)$$

donde $\Pi(\mathbf{x}, t)$ es el momento canónico conjugado del campo cuántico $\phi(\mathbf{x}, t)$. En este caso, como nuestro campo representa el desplazamiento de los osciladores, este momento coincide con el momento lineal de los osciladores, de manera que

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} . \quad (3.25)$$

Utilizaremos la imagen de Heisenberg, en la que los operadores dependen del tiempo, por lo que la relación de conmutación del campo con su momento conjugado se establece a tiempos iguales. Además, como estamos en el caso continuo, la delta de Kronecker de (3.21) promociona a una delta de Dirac, de manera similar a lo que ocurría con la delta del corchete de Poisson del apartado anterior. Tenemos por lo tanto que

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (3.26)$$

Como los osciladores son independientes, se cumple que

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = 0 , \quad (3.27)$$

volviendo a recuperar el mismo resultado que en el apartado anterior y verificando así el esquema de cuantización de la figura (3.1). Este método que hemos visto para cuantizar una teoría es lo que se denomina *second quantization*, consiste en considerar el sistema clásico y reinterpretar las variables dinámicas en términos de operadores que obedecen las reglas de conmutación canónicas [6], es por ello que este método también recibe el nombre de cuantización canónica. Estos operadores toman la forma de campos cuánticos que actúan sobre un espacio de estados denominado espacio de Fock y donde veremos que las partículas pasan a considerarse excitaciones de estos campos.

3.3 Construcción del espacio de Fock

En la mecánica cuántica no relativista se define un espacio de Hilbert encargado de albergar los diferentes estados en los que puede estar el sistema. Si consideramos un conjunto de N partículas idénticas, como el número de partículas no varía, es suficiente con definir un espacio de Hilbert \mathcal{H}_N , construido como el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada una de las partículas

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N . \quad (3.28)$$

No obstante, como en teoría cuántica de campos nos interesa tratar sistemas en el que el número de partículas no es una constante del movimiento, es necesario definir un nuevo espacio en el que pueda darse esta situación. Definimos entonces el espacio de Fock como

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N , \quad (3.29)$$

construido a partir de la suma directa de espacios de Hilbert a diferente número de partículas. Es importante notar que este nuevo espacio de Fock contiene al espacio \mathcal{H}_0 en el que vive un único estado denominado vacío caracterizado por no albergar partículas, denotado como $|0\rangle$,

$$|0\rangle \in \mathcal{H}_0 ; \quad \langle 0|0\rangle = 1 . \quad (3.30)$$

El siguiente paso natural consiste definir una serie de operadores que nos permitan movernos por los distintos subespacios del espacio de Fock (i.e. que crean o destruyen partículas). Vamos a pensar en un operador de este tipo que cree o aniquile partículas en puntos concretos del espacio, es decir, con posición definida. Supongamos entonces unos operadores en la imagen de Schrödinger $\psi(\mathbf{x})$ y $\psi^\dagger(\mathbf{x})$ tales que

$$\psi : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_{N-1} \quad \psi^\dagger : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_{N+1} . \quad (3.31)$$

Es decir, el operador $\psi(\mathbf{x})$ aniquila una partícula en la posición \mathbf{x} , mientras que su complejo conjugado $\psi^\dagger(\mathbf{x})$ la crea. Todos los operadores de aniquilación anulan el vacío,

$$\psi(\mathbf{x}) |0\rangle = 0 . \quad (3.32)$$

Los conmutadores entre estos operadores resultan ser

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad [\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')] = [\psi^\dagger(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{x}')] = 0 . \quad (3.33)$$

Estas relaciones de conmutación nos recuerdan a las de los operadores escalera del oscilador armónico cuántico, donde los operadores escalera nos aumentaban o disminuían modos de oscilación del sistema*.

Siguiendo en esta línea, podemos definir un operador denominado operador número N que conmuta con el hamiltoniano y que tiene como autovalores el número total de partículas. Las relaciones de conmutación con este nuevo operador son

$$[N, H] = 0 \quad [N, \psi(\mathbf{x})] = -\psi(\mathbf{x}) \quad [N, \psi^\dagger(\mathbf{x})] = \psi^\dagger(\mathbf{x}) . \quad (3.34)$$

Como el operador número conmuta con el hamiltoniano significa que podemos tener estados que sean a la vez autoestados de energía y que tengan un número de partículas definido. Como ya habíamos comentado antes, el operador $\psi^\dagger(\mathbf{x})$ crea una partícula en \mathbf{x} , esto significa que esta localizada en una posición concreta, con una función de onda de tipo delta de Dirac. Según el principio de incertidumbre de Heisenberg, al estar localizada en un sitio, estará infinitamente deslocalizada en momento, de

*En el oscilador armónico los operadores escalera actúan como $A^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ y $A |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, mientras que el conmutador entre ellos es $[A, A^\dagger] = 1$.

manera que podemos escribir estos operadores en función de ondas planas

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \psi^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \quad (3.35)$$

donde hemos omitido los factores de normalización de las ondas planas. Los operadores de creación $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y aniquilación $a_{\mathbf{k}}$ crean y destruyen partículas con momento definido \mathbf{k} , respectivamente. Cumplen las reglas de conmutación

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 , \quad (3.36)$$

$$\{d_{\mathbf{k}}, d_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \{d_{\mathbf{k}}, d_{\mathbf{k}'}\} = \{d_{\mathbf{k}}^\dagger, d_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = 0 , \quad (3.37)$$

donde las primeras relaciones son válidas para bosones mientras que las segundas para fermiones.

Como necesitaremos describir estados con muchas partículas, la notación de números de ocupación es especialmente útil. En ella caracterizamos los estados del sistema en términos de números de ocupación de los modos, de la misma manera en la que se hace con los estados del oscilador armónico. En esta representación de números de ocupación el estado de vacío toma la forma

$$|0\rangle = |0, 0, \dots, 0\rangle . \quad (3.38)$$

Un estado genérico del sistema viene dado por

$$|\Psi\rangle = |n_{\mathbf{p}}, \dots, n_{\mathbf{k}}, \dots, n_{\mathbf{q}}\rangle , \quad (3.39)$$

donde $n_{\mathbf{k}}$ es el número de partículas con momento \mathbf{k} . En el caso de partículas fermiónicas, debido al principio de exclusión de Pauli, no podrá haber dos partículas que compartan los mismos números cuánticos (el momento \mathbf{k} , en este caso), por lo que el número de ocupación solo podrá tomar los valores $n_{\mathbf{k}} = 0, 1$ mientras que en el caso bosónico no existe ninguna restricción sobre el número de partículas que pueden ocupar un estado, lo que se refleja en que el número de ocupación puede tomar valores desde $0, 1, 2, \dots, \infty$. Los operadores de creación y destrucción actúan de la siguiente manera sobre los estados

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger |n_{\mathbf{p}}, \dots, n_{\mathbf{k}}, \dots, n_{\mathbf{q}}\rangle = |n_{\mathbf{p}}, \dots, n_{\mathbf{k}} + 1, \dots, n_{\mathbf{q}}\rangle , \quad (3.40)$$

$$a_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{p}}, \dots, n_{\mathbf{k}}, \dots, n_{\mathbf{q}}\rangle = |n_{\mathbf{p}}, \dots, n_{\mathbf{k}} - 1, \dots, n_{\mathbf{q}}\rangle , \quad (3.41)$$

donde hemos omitido los factores de normalización que surgen al imponer la normalización del vacío. El operador hermítico $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ tiene como autovalores el número de partículas con momento \mathbf{k} . Si lo dejamos actuar sobre un estado,

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle = n_{\mathbf{k}} |n_{\mathbf{k}}\rangle , \quad (3.42)$$

por lo que podemos expresar el operador número N en función de los operadores de creación y aniquilación como una suma a todos los momentos

$$N = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} . \quad (3.43)$$

Al igual que ocurre con el oscilador armónico, es natural pensar que todos los operadores de destrucción aniquilen el vacío, como vimos anteriormente,

$$\left. \begin{array}{l} a_{\mathbf{k}} |0, 0, \dots, 0\rangle = 0 \\ |0\rangle = |0, 0, \dots, 0\rangle \end{array} \right\} \implies a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k} . \quad (3.44)$$

Podemos crear una partícula con un vector de onda \mathbf{k} haciendo actuar el operador de creación $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ sobre el estado de vacío

$$|\mathbf{k}\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle = a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle , \quad (3.45)$$

lo que nos lleva a pensar que podemos expresar cualquier estado como

$$|n_{\mathbf{p}}, \dots, n_{\mathbf{k}}, \dots, n_{\mathbf{q}}\rangle = C \prod_{\mathbf{k}'} (a_{\mathbf{k}'}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}'}} |0\rangle . \quad (3.46)$$

Vemos cómo un sistema con un número de partículas variable se describe naturalmente en términos de un espacio de Fock.

Capítulo 4

Campos escalares

Para la cuantización de los campos escalares me he basado principalmente en las ideas desarrolladas en [3], [7] y en menor medida en las de [2].

Como comentamos en la introducción, la ecuación de Schrödinger no es invariante Lorentz, y por tanto, relativista. Esto se debe a que es lineal en la derivada temporal pero presenta segundas derivadas en las coordenadas espaciales, por lo que no se puede utilizar para describir partículas cuánticas relativistas. El primer intento para encontrar una ecuación relativista consistió en utilizar la relación de dispersión de Einstein

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = p_\mu p^\mu = m^2, \quad (4.1)$$

promoviendo la energía y el momento a operadores cuánticos de tal manera que

$$(p_\mu p^\mu - m^2) |\phi\rangle = 0 \quad \forall |\phi\rangle. \quad (4.2)$$

Si realizamos la sustitución

$$p_\mu = i\partial_\mu, \quad (4.3)$$

se obtiene la conocida como ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.4)$$

donde $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ es el operador D'Alembertiano y $\phi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \phi \rangle$ es una función compleja. Sin embargo, la interpretación de $\phi(\mathbf{x}, t)$ no era del todo clara ya

que, si uno lo interpreta como la función de onda de una partícula relativista y calcula la densidad de probabilidad asociada se encuentra con que $\rho = \phi^*(\partial^0\phi) - (\partial^0\phi^*)\phi$ no es definida positiva, por lo que no puede ser interpretada como tal. La única manera de ver ϕ es como un campo cuántico que satisface la ecuación de Klein-Gordon y que no tiene por qué dar lugar a una densidad de probabilidad positiva.

4.1 Campo escalar real

Después de observar que la ecuación de Klein-Gordon debe interpretarse como una ecuación de campo, comenzaremos por cuantizar el ejemplo más sencillo: un campo escalar real $\phi(x)$, donde $x = x^\mu$ es el cuadri-vector posición. El campo escalar clásico satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0 . \quad (4.5)$$

Es fácil ver que la densidad lagrangiana correspondiente al campo escalar clásico libre vendrá dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 . \quad (4.6)$$

Vemos que es invariante Lorentz. Si introducimos la expresión en las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos recuperar las ecuaciones de Klein-Gordon

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi , \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma} [\delta_\mu^\sigma \partial_\mu\phi + \delta_\nu^\mu \partial_\sigma\phi] = \frac{1}{2}(\partial^\nu\phi + \partial^\nu\phi) = \partial^\nu\phi , \quad (4.8)$$

de modo que

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = (\square + m^2)\phi = 0 . \quad (4.9)$$

Es inmediato ver que el momento conjugado canónico es

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi . \quad (4.10)$$

La densidad hamiltoniana viene dada por

$$\mathcal{H} = \Pi \partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) \geq 0 , \quad (4.11)$$

por lo que es una cantidad semidefinida positiva. El tensor energía-momento viene dado por

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (4.12)$$

Nos interesa escribir el campo en función de los operadores de creación y destrucción de manera que podamos definir los estados sobre los que actúa. Si aplicamos la transformada de Fourier a nuestro campo

$$\phi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} , \quad (4.13)$$

donde $k = k^\mu$ es el cuadri-vector de onda. Si sustituimos esto en la ecuación (4.5) obtenemos

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-k^2 + m^2) \tilde{\phi}(k) e^{-ikx} = 0 , \quad (4.14)$$

de modo que llegamos a

$$(-k^2 + m^2) \tilde{\phi}(k) = 0 . \quad (4.15)$$

Debido a que $\tilde{\phi}(k)$ debe satisfacer la relación de dispersión $k^2 = k_\mu k^\mu = m^2$, se puede escribir como

$$\tilde{\phi}(k) = f(k) \delta(k^2 - m^2) , \quad (4.16)$$

donde $f(k)$ es una función arbitraria de k , si sustituimos esto en (4.13) se llega a

$$\phi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} . \quad (4.17)$$

Integrando sobre k^0 y desarrollando la delta de Dirac llegamos a la expresión

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[f(k^0 = \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{kx})} + f(k^0 = -\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t + \mathbf{kx})} \right] , \quad (4.18)$$

donde $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Para la integral sobre k^0 hemos utilizado la propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(g(x)) = \sum_{x_n | g(x_n)=0} \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} . \quad (4.19)$$

El primer término de la expansión se refiere a soluciones con energía* $k^0 = +\omega_{\mathbf{k}}$ positiva, mientras que el segundo término se refiere a soluciones con energía negativa

*Aquí con energía nos estamos refiriendo dentro del marco de la Relatividad Especial, donde $E = p^0 = k^0$, en Teoría Cuántica de Campos la energía se obtiene a partir del valor esperado del hamiltoniano H .

$k^0 = -\omega_{\mathbf{k}}$. Si hacemos el cambio ($\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$) en el segundo término llegamos a

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[f(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}x} + f(-\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}x} \right]. \quad (4.20)$$

A continuación para cuantizar el campo debemos promover tanto ϕ como f a operadores e imponemos hermiticidad sobre ϕ ya que es un campo real, para lo que se debe cumplir que $f(-\mathbf{k}) = f^\dagger(\mathbf{k})$. Redefinimos por conveniencia[†] los coeficientes de la expansión haciendo $f(\mathbf{k}) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}$ de tal manera que el campo nos queda

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}x} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x} \right]. \quad (4.21)$$

Utilizando la relación

$$\Pi(x) = \partial_0\phi(x) \quad (4.22)$$

podemos escribir el operador momento conjugado en función de los operadores de creación y aniquilación,

$$\Pi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \right) \left[a_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}x} - a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k}x} \right]. \quad (4.23)$$

A continuación imponemos las reglas de conmutación entre el campo y su momento conjugado a tiempos iguales

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.24)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (4.25)$$

a partir de las cuales podemos obtener las relaciones de conmutación de los coeficientes de la expansión

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.26)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \quad (4.27)$$

4.1.1 Operadores de creación y aniquilación

Si recordamos el conmutador entre los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (4.28)$$

[†]Esta redefinición de los coeficientes nos permite eliminar la dependencia de la energía en (4.27), lo que nos dará pie a poder relacionarlo con los operadores de creación y destrucción de partículas.

podemos interpretar el conmutador obtenido en (4.27) como una colección de infinitos osciladores armónicos, uno para cada valor de \mathbf{k} . Podemos entonces construir el espacio de Fock de manera análoga a como se hace con el oscilador armónico, se interpretan $a_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ como operadores de creación y aniquilación de partículas con momento definido. Definimos un estado de vacío $|0\rangle$ normalizado que es anulado por todos los operadores de aniquilación,

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}. \quad (4.29)$$

Construimos los estados multipartícula dejando actuar los operadores de creación sobre el estado de vacío. Un estado del espacio de Fock vendrá dado por

$$|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\rangle = \prod_{i=1}^N \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}} a_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle, \quad (4.30)$$

donde los factores de normalización $\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_i}}$ nos garantizan que el producto escalar entre dos estados $|\mathbf{k}_1\rangle$ y $|\mathbf{k}_2\rangle$

$$\langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{k}_2 \rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}} \langle 0 | [a_{\mathbf{k}_1}, a_{\mathbf{k}_2}^\dagger] | 0 \rangle = 2\omega_{\mathbf{k}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (4.31)$$

resulta en una cantidad invariante Lorentz. Cabe notar que los estados multipartícula son invariantes bajo el intercambio de dos partículas debido a que como vemos en (4.27) todos los operadores de creación conmutan entre sí. Esto nos viene a decir que los campos escalares reales crean y destruyen partículas bosónicas con espín 0 y que los estados correspondientes son totalmente simétricos bajo el intercambio de partículas. Cuando cuanticemos el campo de espín $\frac{1}{2}$ veremos que para que el hamiltoniano no esté acotado inferiormente surgen estados antisimétricos bajo el intercambio de dos partículas, es decir, en teoría cuántica de campos la conexión espín-estadística no es un postulado, sino un teorema.

Si dejamos actuar el operador campo sobre el vacío

$$\phi(x) |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}] |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{ikx} |\mathbf{k}\rangle \quad (4.32)$$

obtenemos un nuevo estado que se puede escribir como una superposición de estados de una partícula con momento definido, por lo que podemos interpretar este resultado como algo parecido a un estado con posición definida, insinuando esto que el operador

campo actuando sobre el vacío crea una partícula en el punto x . Confirmamos esta interpretación cuando hacemos actuar el operador campo sobre un estado de una partícula y lo saturamos con el estado de vacío por la izquierda,

$$\langle 0 | \phi(x) | \mathbf{k} \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} \langle 0 | [a_{\mathbf{q}} e^{-iqx} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iqx}] a_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle = e^{-ikx} . \quad (4.33)$$

Este resultado puede interpretarse como la función (no normalizable) de onda del estado de una partícula $|\mathbf{k}\rangle$, debido al parecido con la función de onda de una partícula en la Mecánica Cuántica no relativista, $\langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle \propto e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$. Una vez hallamos (4.32) podemos preguntarnos cuánto vale el elemento de matriz

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle , \quad (4.34)$$

donde $T\{\phi(x)\phi(y)\}$ se denomina *time-ordered product* y nos garantiza que el campo con el tiempo mayor se sitúa a la izquierda del producto, es decir,

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \theta(x^0 - y^0) \phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0) \phi(y)\phi(x) , \quad (4.35)$$

donde $\theta(x^0)$ es la función de Heaviside,

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^0 < 0 , \\ 1 & \text{si } x^0 \geq 0 . \end{cases} \quad (4.36)$$

Este elemento de matriz está relacionado con la probabilidad de propagación de una partícula del punto y al x . Si lo evaluamos explícitamente se obtiene

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(x-y)} \right) . \quad (4.37)$$

Si reescribimos esta expresión expresándola como una integral sobre $d^4 k$ obtenemos lo que se denomina el propagador de Feynman[†]

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} , \quad (4.38)$$

donde $\epsilon \rightarrow 0^+$. También se puede expresar en el espacio de momentos tomando su transformada de Fourier inversa, llegando a la conocida expresión

$$\tilde{D}_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (4.39)$$

[†]El propagador de Feynman se representa como una línea que une dos vértices de interacción en un diagrama de Feynman.

Cabe destacar que el propagador es una función de Green de la ecuación de Klein-Gordon, de tal manera que

$$(\square + m^2)D_F(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y) . \quad (4.40)$$

4.1.2 Energía y momento de los estados multipartícula

Estudiemos ahora la energía y el momento de nuestros estados. Para ello, es útil encontrar una expresión del hamiltoniano en función de los operadores de creación y destrucción. Para ello, nos basta con sustituir las expresiones (4.21) y (4.23) en (4.11) obteniendo

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) . \quad (4.41)$$

Utilizando el conmutador entre $a_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ podemos reescribir el hamiltoniano como

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] \right) . \quad (4.42)$$

Si consideramos que nuestro campo se encuentra encerrado en un volumen finito[§], tenemos

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} \int d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{x}} = \int d^3\mathbf{x} = V . \quad (4.43)$$

El segundo término de (4.42) se corresponde con la energía del vacío o del punto cero de todos los osciladores

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} V , \quad (4.44)$$

que resulta ser proporcional al volumen del sistema de modo que podemos definir una densidad de energía del vacío dada por

$$\rho = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} . \quad (4.45)$$

Esta expresión diverge para valores grandes de $|\mathbf{k}|$, es lo que se llama una divergencia ultravioleta. Esto puede parecer un problema de primeras, sin embargo, debido a que experimentalmente sólo podemos medir diferencias de energía (si excluimos por

[§]Esta suposición es muy útil en Teoría Cuántica de Campos para regularizar divergencias, en este caso, proveniente del límite al volumen infinito.

supuesto la Relatividad General, en la que cada forma de energía contribuye a deformar el espacio-tiempo), podemos descartar esta contribución. Este procedimiento se puede definir de manera formal definiendo lo que se denomina *normal ordering* de un operador \mathcal{O} . Denotado como $:\mathcal{O}:$, consiste en escribir a mano todos los operadores de creación a la izquierda de todos los operadores de destrucción. Por ejemplo,

$$:a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger: = 2a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (4.46)$$

Definimos entonces nuestro hamiltoniano cuántico como

$$H \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} : (\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (4.47)$$

Una vez tenemos nuestro hamiltoniano, lo dejamos actuar sobre nuestros estados multipartícula para obtener la energía de estos. Si nos fijamos en nuestro hamiltoniano, podemos identificar $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ como el operador número $N_{\mathbf{k}}$ que nos devuelve el número de modos para una cierta \mathbf{k} , de modo que la energía total de un estado genérico vendrá dada por

$$H |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\rangle = (\omega_{\mathbf{k}_1} + \dots + \omega_{\mathbf{k}_N}) |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\rangle, \quad (4.48)$$

donde hemos usado las reglas de conmutación de los operadores de creación y destrucción y que $a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0$.

Si dejamos actuar el hamiltoniano cuántico sobre el estado de vacío tenemos

$$H |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0, \quad (4.49)$$

que es lo que cabe esperar una vez hemos despreciado la componente de la energía correspondiente al estado fundamental de los osciladores.

Utilizando la expresión (4.12) es fácil ver que

$$\theta^{0\nu} = \partial_0\phi\partial^\nu\phi - \eta^{0\nu}\mathcal{L}. \quad (4.50)$$

Debido a que definimos el hamiltoniano como la integral espacial de $:\mathcal{H}: = :\theta^{00}:$, por covarianza Lorentz definimos el operador momento total como la integral espacial de (4.50) aplicando *normal ordering*,

$$P^i \equiv \int d^3\mathbf{x} : \theta^{0i} : = \int d^3\mathbf{x} : \partial^0\phi\partial^i\phi :, \quad (4.51)$$

donde $i \in \{1, 2, 3\}$ indica un índice espacial. Si sustituimos (4.21) en esta última expresión obtenemos

$$P^i = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k^i a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} . \quad (4.52)$$

Es fácil ver que el momento total del vacío resulta ser nulo

$$P^i |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k^i a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 , \quad (4.53)$$

lo que era esperable si definimos el estado de vacío como aquel en el que no existen partículas. No obstante, si dejamos actuar el operador momento sobre un estado de una partícula nos devuelve el momento asociado a esa partícula

$$P^i |\mathbf{k}\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} q^i a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} |\mathbf{k}\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} q^i (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle = k^i |\mathbf{k}\rangle . \quad (4.54)$$

Esta expresión se puede generalizar a un estado genérico de modo que

$$P^i |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\rangle = (k_1^i + \dots + k_N^i) |\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\rangle . \quad (4.55)$$

Recordando el resultado en (4.48) y en (4.55) podemos deducir que los estados $|\mathbf{k}\rangle$ representan estados de una partícula de masa m , energía $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ y con un momento \mathbf{k} definido.

4.2 Campo escalar complejo: antipartículas

Vamos a cuantizar ahora el campo escalar complejo. Para ello, introduciremos dos nuevos campos escalares reales: $\phi_1(x)$, representando la parte real, y $\phi_2(x)$, representando la imaginaria. Si denotamos el campo complejo como $\phi(x)$, podemos escribirlo como

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)] , \quad (4.56)$$

donde cada campo verifica la ecuación de Klein Gordon,

$$(\square + m^2)\phi_1(x) = 0 \quad (\square + m^2)\phi_2(x) = 0 . \quad (4.57)$$

Podemos escribir entonces la densidad lagrangiana de nuestro campo complejo como la semisuma de las densidades para cada campo real

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) - \frac{1}{4}m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{4}m^2 \phi_2^2 , \quad (4.58)$$

que podemos reescribir en función de $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$ como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^\dagger\phi. \quad (4.59)$$

Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange encontramos las ecuaciones de campo para $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (\square + m^2)\phi^\dagger(x) = 0. \quad (4.60)$$

Si calculamos el momento conjugado de los campos $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$ obtenemos

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \frac{1}{2}\partial_0\phi^\dagger \quad \Pi^\dagger = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\dagger)} = \frac{1}{2}\partial_0\phi. \quad (4.61)$$

La densidad hamiltoniana vendrá dada por

$$\mathcal{H} = \sum_i \Pi_i \partial_0\phi_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi\partial^0\phi^\dagger - \partial_i\phi^\dagger\partial^i\phi + m^2\phi^\dagger\phi). \quad (4.62)$$

Podemos realizar un procedimiento similar al que presentamos en el apartado del campo escalar real. Si tomamos la transformada de Fourier de las expresiones (4.60) podemos escribir la transformada de los campos como

$$\tilde{\phi}(k) = f(k)\delta(k^2 - m^2), \quad (4.63)$$

$$\tilde{\phi}^\dagger(k) = f(k)\delta(k^2 - m^2). \quad (4.64)$$

Si sustituimos estas expresiones en la ecuación transformada llegamos a una expansión en modos de Fourier para ambos campos complejos,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} [\varphi(k^0 = +\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})e^{-ikx} + \varphi(k^0 = -\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k})e^{ikx}], \quad (4.65)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} [\chi(k^0 = +\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})e^{-ikx} + \chi(k^0 = -\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k})e^{ikx}], \quad (4.66)$$

Donde ya hemos integrado sobre k^0 y hemos hecho la sustitución $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ en el segundo término de cada expansión. Tanto $\varphi(k)$ como $\chi(k)$ son funciones genéricas de k . Para cuantizar los campos promovemos tanto los campos como los coeficientes de la expansión a operadores, como hicimos para el caso del campo escalar real. Si tomamos el complejo conjugado de la primera expresión y lo comparamos con la segunda llegamos a que las relaciones entre los coeficientes son

$$\chi(k^0 = -\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}) = \varphi^\dagger(k^0 = +\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad (4.67)$$

$$\chi(k^0 = +\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = \varphi^\dagger(k^0 = -\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}). \quad (4.68)$$

Si renombramos $\varphi(k^0 = +\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}$ y $\chi(k^0 = +\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}$ podemos escribir los campos complejos en función de operadores de creación y aniquilación

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (4.69)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} + b_{\mathbf{k}} e^{-ikx} \right]. \quad (4.70)$$

Siguiendo con la cuantización, imponemos las reglas de conmutación de los campos con sus momentos conjugados a tiempos iguales,

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \Pi^\dagger(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.71)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (4.72)$$

a partir de las cuales podemos obtener las de todos los operadores de creación y aniquilación

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.73)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \quad (4.74)$$

Procedemos con la construcción el espacio de Fock haciendo actuar los operadores de creación $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ sucesivamente sobre el vacío, definido como el estado aniquilado por todos los operadores de destrucción $a_{\mathbf{k}}$ y $b_{\mathbf{k}}$,

$$a_{\mathbf{k}} |0\rangle = b_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}. \quad (4.75)$$

Podemos tener estados con cuantos del tipo a o del tipo b ,

$$|\mathbf{k}_a\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \quad |\mathbf{k}_b\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle. \quad (4.76)$$

Definimos el hamiltoniano cuántico del campo complejo a partir de sustituir (4.69) y (4.70) en (4.62) y aplicando *normal ordering*,

$$H \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} : \partial_0\phi\partial^0\phi^\dagger - \partial_i\phi^\dagger\partial^i\phi + m^2\phi^\dagger\phi : = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \right). \quad (4.77)$$

Como ocurría en el caso del campo escalar real, si dejamos actuar H sobre un estado gnérico nos devuelve la energía total del sistema, siendo esta la suma de las energías de las partículas de tipo a más la energía de las partículas de tipo b .

Utilizando que el tensor energía-momento toma la forma

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(2\partial^\mu \phi^\dagger \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) , \quad (4.78)$$

definimos el operador momento como

$$P^i \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} : \partial^0 \phi^\dagger \partial^i \phi : = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k^i \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \right) . \quad (4.79)$$

De nuevo, el operador P^i nos devuelve el momento total de un estado. De este desarrollo deducimos que existen dos tipos diferentes de cuantos que poseen la misma masa m , unos de tipo a , creados por los operadores $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ y otros de tipo b creados por los operadores $b_{\mathbf{k}}^\dagger$. Este resultado es concorde con el hecho de que tenemos dos campos reales $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, encargados de crear los dos tipos de cuantos, cuyas expresiones son

$$\phi_1(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right] , \quad (4.80)$$

$$\phi_2(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[b_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx} \right] . \quad (4.81)$$

4.2.1 Invarianza bajo $U(1)$ global

En este apartado calcularemos la carga conservada asociada a la invarianza de nuestro lagrangiano bajo una transformación global del grupo $U(1)$. La transformación reescala el campo como una fase global

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x) \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\theta} \phi^\dagger(x) , \quad (4.82)$$

donde θ es un parámetro que no depende de las coordenadas x (i.e. es global). Esta transformación sólo tiene sentido en campos complejos. Nuestro lagrangiano es invariante bajo esta transformación

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^\dagger e^{-i\theta} \right) \left(\partial^\mu \phi e^{i\theta} \right) - \frac{m^2}{2} \phi^\dagger e^{-i\theta} \phi e^{i\theta} = e^{-i\theta} e^{i\theta} \mathcal{L} = \mathcal{L} . \quad (4.83)$$

Utilizando el teorema de Noether visto en §2.3, podemos identificar (4.82) con unas transformaciones como las de la expresiones (2.7) y (2.8) donde $\xi^\mu_a = 0$, $\phi_i = \{\phi, \phi^\dagger\}$ y $M_\phi^\phi = i$, $M_{\phi^\dagger}^{\phi^\dagger} = -i$. Por tanto, utilizando la expresión (2.12), la corriente clásica conservada vendrá dada por

$$J^\mu_a = J^\mu = -i(\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) . \quad (4.84)$$

O equivalentemente,

$$J^\mu = i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi . \quad (4.85)$$

De modo que la carga conservada cuantizada se corresponde con

$$Q_{U(1)} \equiv \int d^3\mathbf{x} : J^0 : = \int d^3\mathbf{x} : i\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^0 \phi : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}) . \quad (4.86)$$

Si escribimos el operador carga conservada en función de los operadores número de cuantos del tipo a y de cuantos del tipo b ,

$$N_a = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad N_b = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} , \quad (4.87)$$

vemos que toma la forma

$$Q_{U(1)} = N_a - N_b . \quad (4.88)$$

De esta expresión podemos decir que los cuantos de tipo a se corresponden con partículas mientras que los cuantos de tipo b son sus antipartículas. La carga conservada entonces no es más que el número de partículas menos el número de antipartículas.

Si hacemos actuar el operador carga sobre el vacío

$$Q_{U(1)} |0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}) |0\rangle = 0 , \quad (4.89)$$

ya que $a_{\mathbf{k}} |0\rangle = b_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0$. Este resultado era esperable y nos está diciendo que en el vacío no existen partículas de ningún tipo. A partir de (4.86), (4.73) y (4.74) podemos deducir los conmutadores del operador carga junto con los operadores de creación y aniquilación de partículas y antipartículas, por ejemplo,

$$[Q_{U(1)}, a_{\mathbf{k}}] = - \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] a_{\mathbf{k}} = - \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) a_{\mathbf{k}} = -a_{\mathbf{k}} . \quad (4.90)$$

Para el cálculo de los demás conmutadores se procede de manera similar, obteniendo

$$[Q_{U(1)}, a_{\mathbf{k}}] = -a_{\mathbf{k}} \quad [Q_{U(1)}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] = a_{\mathbf{k}}^\dagger , \quad (4.91)$$

$$[Q_{U(1)}, b_{\mathbf{k}}] = b_{\mathbf{k}} \quad [Q_{U(1)}, b_{\mathbf{k}}^\dagger] = -b_{\mathbf{k}}^\dagger . \quad (4.92)$$

Podemos afirmar entonces que los estados $a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ y $b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ corresponden a estados con misma masa m , mismo momento \mathbf{k} y misma energía $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ pero con carga opuesta; $a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q_{U(1)} = +1$, mientras que $b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q_{U(1)} = -1$. Es

por esta razón que a $b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ se le denomina antipartícula de $a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$. Estamos en posición de entender las soluciones de energía negativa de la ecuación (4.60), el coeficiente de la solución con energía positiva de un campo complejo se convierte tras cuantizarlo en el operador de aniquilación de una partícula con carga unidad, mientras que el coeficiente de la solución con energía negativa se convierte en el operador de creación de su antipartícula.

En el caso de un campo escalar real, $a_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}$, por lo que la partícula es su propia antipartícula.

Capítulo 5

Campo espinorial de Dirac

Para la cuantización del campo de Dirac me he basado principalmente en [3] y [5].

5.1 Ecuación de Dirac

Una ecuación relativista debe tratar de manera covariante al espacio y al tiempo. La ecuación de Klein-Gordon lo hace, pero el hecho de tener una segunda derivada temporal impide que su solución sea interpretada como la función de onda de una partícula relativista. No obstante, vimos que podíamos interpretar la solución de Klein-Gordon como un campo $\phi(x)$ que al cuantizarlo describía partículas bosónicas de espín 0, ya que es escalar.

En el intento de buscar una ecuación cuántico-relativista para el electrón, Dirac propuso una expresión lineal en las derivadas tanto temporales como espaciales. Partiendo de la relación de Einstein

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (5.1)$$

buscamos que se cumpla

$$\mathbf{p}^2 + m^2 = (\alpha^k p^k + \beta m)^2, \quad (5.2)$$

para algunos objetos α^k y β , de modo que llegamos a la relación

$$E = \alpha^k p^k + \beta m. \quad (5.3)$$

Si promovemos los observables E y p^k a operadores y los hacemos actuar sobre una función de onda llegamos a la expresión

$$i\partial_t\Psi(x) = (i\alpha^k\partial^k + \beta m)\Psi(x) . \quad (5.4)$$

Si multiplicamos por β en la expresión y agrupamos los coeficientes en un único elemento $\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha)$ podemos reescribir la ecuación como

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 , \quad (5.5)$$

donde hemos usado que el coeficiente β debe cumplir $\beta^2 = 1$. Si utilizamos el *slash* de Feynman, $\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$, tenemos

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0 , \quad (5.6)$$

que es conocida como la ecuación de Dirac. Para satisfacer las cinemáticas relativistas, $\Psi(x)$ debe satisfacer también la ecuación de Klein-Gordon. Si multiplicamos la expresión (5.6) por $(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)$ por la derecha tenemos

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\Psi(x) = -\left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]\Psi(x) = 0 , \quad (5.7)$$

la cual se reduce a Klein-Gordon si satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} . \quad (5.8)$$

A partir de esta relación podemos leer que

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^i)^2 = -1 , \quad (5.9)$$

por lo que los objetos γ^μ no pueden ser simples números. Pueden ser representados por matrices 4×4 denominadas matrices de Dirac, una forma explícita que satisface (5.8) es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad (5.10)$$

donde σ^i son las matrices de Pauli de dimensión 2×2 utilizadas en mecánica cuántica como base del álgebra de Lie del grupo $SU(2)$ relativa a partículas con espín $\frac{1}{2}$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

y que satisfacen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1}_2 + i \epsilon^{ijk} \sigma^k . \quad (5.12)$$

La matriz γ^0 es hermítica mientras que las γ^i son antihermíticas.

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}_4 \quad (5.13)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}_4 , \quad (5.14)$$

de modo que podemos generalizar el hermítico conjugado de las matrices de Dirac como

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 . \quad (5.15)$$

Debido a que las matrices γ^μ tienen dimensión 4×4 , la función de onda $\Psi(x)$ es un vector columna con cuatro entradas, denominado espinor de Dirac. Si tomamos el hermítico conjugado de la expresión (5.7) y multiplicamos por γ^0 por la derecha llegamos a

$$i(\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu + m \bar{\Psi} = 0 , \quad (5.16)$$

donde $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ se denomina el adjunto de Dirac. Si interpretamos $\Psi(x)$ como la función de onda de un electrón relativista, la densidad de probabilidad vendrá dada por

$$\rho = \Psi^\dagger \Psi = \Psi^\dagger (\gamma^0)^2 \Psi = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi , \quad (5.17)$$

que es definida positiva por lo que sí que puede ser interpretada como tal. Sin embargo, la ecuación (5.6) no es capaz de describir una única partícula a causa de otro problema: la parte negativa del espectro de energía de la ecuación de Dirac no está acotada inferiormente. La manera de solventar este problema es una redefinición del estado de vacío conocido como *Hole Theory*. El problema reside en que un electrón puede decaer infinitamente hacia estados cada vez más y más negativos, de modo que ninguna partícula con energía positiva podría existir. La manera de solucionar esto es diciendo que existe un límite inferior en los estados de energía negativa, de modo que se irán llenando todos ellos por pares de electrones definiendo un estado de vacío. Esta asunción nos obliga a abandonar la idea de una sola partícula y nos fuerza la introducción de un sistema de muchas partículas o campo cuántico que cumpla la estadística de Fermi-Dirac.

5.2 Campo de Dirac

Vimos que debemos interpretar $\Psi(x)$ como un campo libre que satisface la ecuación de Dirac y que describe partículas que deben seguir la estadística de Fermi-Dirac.

A partir de la ecuación de Dirac (5.7) y de la expresión (5.16) es fácil ver que la densidad lagrangiana viene dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi . \quad (5.18)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3) podemos obtener las ecuaciones de movimiento para el campo de Dirac, obteniendo

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi)} = i(\partial_\nu \bar{\Psi})\gamma^\nu , \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -m\bar{\Psi} . \quad (5.20)$$

recuperando la hermítica conjugada de la ecuación de Dirac*.

Podemos obtener los momentos conjugados de los campos utilizando la expresión (2.4)

$$\Pi_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi)} = i\bar{\Psi}\gamma^0 = i\Psi^\dagger \quad \Pi_{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\Psi})} = 0 . \quad (5.21)$$

Podemos obtener también la densidad hamiltoniana sustituyendo (5.21) en (2.5)

$$\mathcal{H} = \Pi_\Psi \partial_0 \Psi - \mathcal{L} = i\Psi^\dagger \partial_0 \Psi - \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = \bar{\Psi}(-i\gamma^j\partial_j + m)\Psi . \quad (5.22)$$

Utilizando la ecuación (2.16) y (5.7) podemos obtener la expresión del tensor energía-momento

$$\theta^{\mu\nu} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial^\nu\Psi - \eta^{\mu\nu}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi . \quad (5.23)$$

Un prototipo de ondas planas espinoriales vendrá dado por la expresión

$$\Psi(x) = u(k)e^{-ikx} , \quad (5.24)$$

o también por

$$\Psi(x) = v(k)e^{ikx} , \quad (5.25)$$

*Los campos que satisfagan la ecuación de movimiento anularán el lagrangiano, $\mathcal{L} = 0$.

donde $u(k)$ y $v(k)$ son espinores de Dirac con cuatro componentes que dependen tanto de la energía como del momento. La primera solución corresponde con energías positivas mientras que la segunda corresponde con soluciones de energía negativa. Si introducimos estas soluciones en la ecuación de Dirac obtenemos una condición para los espinores

$$(\not{k} - m)u(k) = 0 , \quad (5.26)$$

$$(\not{k} + m)v(k) = 0 , \quad (5.27)$$

donde se usó el *slash* de Feynman, es decir, $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$. Lo que se suele hacer es resolver la ecuación para un sistema de referencia en el centro de masas, para el cual $k = (m, 0, 0, 0)$ y mediante transformaciones de Lorentz escribir una solución general. Si nos situamos en este sistema de referencia, las ecuaciones (5.26) y (5.27) se reducen a

$$(\gamma^0 - \mathbb{1}_4)u(k) = 0 , \quad (5.28)$$

$$(\gamma^0 + \mathbb{1}_4)v(k) = 0 . \quad (5.29)$$

Si las resolvemos obtenemos los espinores en el sistema centro de masas. Si aplicamos una transformación de Lorentz genérica obtenemos

$$u^s(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{m+k^0} \chi^s \\ \frac{k^i \sigma^i}{\sqrt{m+k^0}} \chi^s \end{pmatrix} , \quad (5.30)$$

Donde el índice $s = 1, 2$ nos recoge dos soluciones independientes correspondientes a la proyección del espín en la dirección z de las partículas,

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (5.31)$$

El vector χ^1 se corresponde con el número cuántico magnético de espín $\frac{1}{2}$, mientras que χ^2 con $-\frac{1}{2}$. Por otro lado, podemos realizar el mismo procedimiento con las soluciones de energía negativa llegando a que tenemos otras dos soluciones independientes para las partículas con energía negativa

$$v^s(k) = \begin{pmatrix} \frac{k^i \sigma^i}{\sqrt{m+k^0}} \chi^s \\ \sqrt{m+k^0} \chi^s \end{pmatrix} . \quad (5.32)$$

La solución más general de la ecuación de Dirac vendrá dada por una combinación de estas soluciones

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{s=1,2} \left[a_{\mathbf{k},s} u^s(k) e^{-ikx} + b_{\mathbf{k},s}^\dagger v^s(k) e^{ikx} \right], \quad (5.33)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{s=1,2} \left[b_{\mathbf{k},s} \bar{v}^s(k) e^{-ikx} + a_{\mathbf{k},s}^\dagger \bar{u}^s(k) e^{ikx} \right], \quad (5.34)$$

donde el índice s suma a las dos posibles helicidades y promovemos los coeficientes $a_{\mathbf{k},s}$ y $b_{\mathbf{k},s}$ a operadores como hicimos en los ejemplos anteriores. Si imponemos las relaciones de anticonmutación

$$\{\Psi_a(\mathbf{x}, t), \Pi_b(\mathbf{x}', t)\} = i \{\Psi_a(\mathbf{x}, t), \Psi_b^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{ab}, \quad (5.35)$$

$$\{\Psi_a(\mathbf{x}, t), \Psi_b(\mathbf{x}', t)\} = \{\Pi_a(\mathbf{x}, t), \Pi_b(\mathbf{x}', t)\} = 0, \quad (5.36)$$

podemos obtener a partir de ellas las de todos los operadores de creación y aniquilación

$$\{a_{\mathbf{k}}^r, a_{\mathbf{k}'}^{s\dagger}\} = \{b_{\mathbf{k}}^r, b_{\mathbf{k}'}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta^{rs}, \quad (5.37)$$

$$\{a_{\mathbf{k}}^r, a_{\mathbf{k}'}^s\} = \{b_{\mathbf{k}}^r, b_{\mathbf{k}'}^s\} = \{a_{\mathbf{k}}^r, b_{\mathbf{k}'}^{s\dagger}\} = 0. \quad (5.38)$$

Interpretamos ahora los operadores $a_{\mathbf{k},s}^\dagger$ y $b_{\mathbf{k},s}^\dagger$ como operadores de creación de partículas con un momento y una helicidad definida. De manera similar al caso del campo complejo, podemos identificar los coeficientes que acompañan a los modos de energía negativos como operadores de creación de otro tipo de partículas.

Construimos el espacio de Fock dejando actuar los operadores sobre el vacío, definido como el estado aniquilado por todos los operadores de aniquilación

$$a_{\mathbf{k},s} |0\rangle = b_{\mathbf{k},s} |0\rangle = 0. \quad (5.39)$$

Los estados toman la forma

$$|\mathbf{k}_{a,s}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k},s}^\dagger |0\rangle \quad |\mathbf{k}_{b,s}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k},s}^\dagger |0\rangle, \quad (5.40)$$

y su normalización es la misma que para el caso del campo escalar. Como los operadores anticonmutan entre ellos el estado multipartícula es antisimétrico bajo el intercambio de dos partículas cualesquiera.

Definimos el hamiltoniano cuántico del sistema aplicando *normal ordering* para eliminar la contribución de la energía de vacío. Para el caso de operadores fermiónicos, el *normal ordering* consiste en colocar todos los operadores de creación a la izquierda de todos los de aniquilación añadiendo un signo negativo cada vez que realicemos un cambio, debido a que anticonmutan,

$$: a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^\dagger : = -a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} \quad : b_{\mathbf{k},s} b_{\mathbf{k},s}^\dagger : = -b_{\mathbf{k},s}^\dagger b_{\mathbf{k},s} . \quad (5.41)$$

Podemos obtenerlo integrando la expresión (5.22) a todo el espacio

$$H \equiv \int d^3\mathbf{x} : \bar{\Psi}(-i\gamma^j \partial_j + m)\Psi : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} + b_{\mathbf{k},s}^\dagger b_{\mathbf{k},s} \right) , \quad (5.42)$$

donde hemos utilizado

$$u^{r\dagger}(k)u^s(k) = 2\omega_{\mathbf{k}}\delta^{rs} \quad v^{r\dagger}(k)v^s(k) = 2\omega_{\mathbf{k}}\delta^{rs} , \quad (5.43)$$

$$\bar{u}^r(k)v^s(k) = 0 \quad \bar{v}^r(k)u^s(k) = 0 . \quad (5.44)$$

Si hubiéramos cuantizado el campo imponiendo reglas de conmutación en vez de anticonmutación habríamos obtenido una expresión en el hamiltoniano en la que el término $b_{\mathbf{k},s}^\dagger b_{\mathbf{k},s}$ se estaría restando, añadiendo una contribución de energía negativa arbitrariamente grande por lo que el espectro de energía no estaría acotado inferiormente.

Definimos el operador momento total integrando a todo el espacio el tensor energía-momento de la expresión (5.23) y aplicando *normal ordering*,

$$P^i \equiv \int d^3\mathbf{x} : \theta^{0i} : = \int d^3\mathbf{x} : i\Psi^\dagger \partial^i \Psi : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} k^i \left(a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} + b_{\mathbf{k},s}^\dagger b_{\mathbf{k},s} \right) . \quad (5.45)$$

Si nos fijamos en el momento angular, que corresponde con la carga conservada asociada a la invarianza bajo rotaciones espaciales, tiene una parte orbital y una de espín.

Esta última contribución viene dada por

$$S^i = \int d^3\mathbf{x} : \Psi^\dagger \Sigma^i \Psi : . \quad (5.46)$$

donde

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} . \quad (5.47)$$

Si sustituimos las expresiones del campo de Dirac en esta última expresión se puede demostrar que para el caso del sistema centro de masas los estados de una partícula creados por el operador $a_{\mathbf{k},s}^\dagger$ y con $s = 1$ tienen $S_z = +1/2$ mientras que si $s = 2$ tienen $S_z = -1/2$. Los estados creados por $b_{\mathbf{k},s}^\dagger$ y con $s = 1$ tienen $S_z = -1/2$ mientras que si $s = 2$ tienen $S_z = +1/2$.

5.2.1 Invarianza bajo $U(1)$ global

Por último, observamos que el campo de Dirac es invariante bajo una simetría $U(1)$ global definida por

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta}\Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = e^{-i\theta}\bar{\Psi}. \quad (5.48)$$

Similarmente al caso del campo escalar complejo, podemos calcular la corriente conservada asociada utilizando la expresión (2.12)

$$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (5.49)$$

de modo que la carga conservada asociada a esta simetría resulta ser

$$Q_{U(1)} = \int d^3\mathbf{x} : J^0 : = \int d^3\mathbf{x} : \Psi^\dagger\Psi : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left(a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} - b_{\mathbf{k},s}^\dagger b_{\mathbf{k},s} \right). \quad (5.50)$$

Vemos que la carga conservada es simplemente el número de cuantos del tipo a (con carga $Q_{U(1)} = +1$) menos los de tipo b (con carga $Q_{U(1)} = -1$) como sucedía por ejemplo en el caso del campo escalar complejo. Podemos llamar a las partículas del tipo a electrones mientras que las del tipo b serán sus antipartículas, los positrones. Concluimos entonces que el campo de Dirac Ψ describe partículas y antipartículas con espín $\frac{1}{2}$, misma masa y carga $U(1)$ opuesta.

Capítulo 6

Campo electromagnético

Para la cuantización del campo electromagnético me he basado exclusivamente en los desarrollos de [3].

6.1 Electromagnetismo en forma covariante

El electromagnetismo está descrito por el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, los cuales obedecen las leyes de Maxwell, que en ausencia de fuentes toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \tag{6.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \tag{6.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{B} , \tag{6.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \partial_0 \mathbf{E} . \tag{6.4}$$

No obstante, en vez de hablar en términos de estos campos podemos definir dos potenciales, uno escalar $\Phi(\mathbf{x}, t)$ y otro denominado potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ de modo que

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_0 \mathbf{A} , \tag{6.5}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \tag{6.6}$$

Para reformular el electromagnetismo en términos covariantes podemos agrupar estos potenciales un cuadvivector $A_\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ denominado potencial de gauge.

Una vez tenemos toda la información de los campos compactada en un cuadvivector podemos definir una densidad lagrangiana en términos de este nuevo potencial y que cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange reproduzcan las ecuaciones de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \quad (6.7)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es un tensor antisimétrico denominado tensor de Faraday. Las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (6.8)$$

Sin embargo, a partir de esta ecuación obtenemos únicamente (6.1) y (6.4), dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell, por lo que es necesario definir un nuevo tensor contrayendo $F^{\mu\nu}$ con el pseudotensor de Levi-Civita

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \quad (6.9)$$

de modo que se cumple

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (6.10)$$

Esta última expresión es conocida como la identidad de Bianchi*. A partir de ella se obtienen las ecuaciones de Maxwell restantes (6.2) y (6.3).

6.2 Simetría gauge

Es fácil ver que la densidad lagrangiana considerada anteriormente es invariante bajo transformaciones locales del cuadri-potencial (transformaciones gauge),

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha, \quad (6.11)$$

donde $\alpha = \alpha(x)$ es una función arbitraria de las coordenadas. Esto da lugar a una ambigüedad en la descripción de nuestro sistema ya que dos cuadri-potenciales distintos

*Se denomina identidad de Bianchi ya que tenemos $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma =$

pueden dar lugar a una misma configuración física de campos eléctricos y magnéticos que, contrariamente a los potenciales, sí que son medibles.

Debido a esta libertad que tenemos a la hora de escoger el potencial vector, es conveniente escoger una transformación tal que

$$A_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (6.12)$$

A esta elección se la conoce como el *radiation gauge*. Esta elección implica también el denominado *Lorentz gauge*

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (6.13)$$

Las ecuaciones de movimiento implican

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \square A^\nu, \quad (6.14)$$

donde vemos que cada componente del cuadri-potencial gauge satisface la ecuación de Klein-Gordon sin masa, desvelándonos que el campo electromagnético describirá partículas sin masa.

Definiremos el momento lineal conjugado como

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}. \quad (6.15)$$

Sustituyendo nuestra densidad lagrangiana obtenida en (6.7) llegamos a que

$$\Pi^\mu = -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} (\delta_0^\rho \delta_\mu^\sigma - \delta_0^\sigma \delta_\mu^\rho) = -F^{0\mu}. \quad (6.16)$$

El tensor energía-momento viene dado por

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\lambda\beta} F^{\lambda\beta}. \quad (6.17)$$

Sin embargo, esta expresión no es ni simétrica ni invariante gauge ya que depende de A_μ explícitamente. Podemos resolver estos problemas generando un nuevo tensor creado a partir del anterior mas un nuevo término de la forma $\partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu)$,

$$\theta^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\rho(F^{\mu\rho} A^\nu). \quad (6.18)$$

La ley de conservación se sigue cumpliendo debido a que $\partial_\mu \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) = 0$. Sustituyendo (6.17) en esta expresión llegamos a que el nuevo tensor energía momento toma la forma

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\lambda\beta} F^{\lambda\beta} + \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) = F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\lambda\beta} F^{\lambda\beta} = T^{(\nu\mu)} , \quad (6.19)$$

donde hemos usado que $\partial_\mu F^{\nu\mu} = 0$. Vemos cómo nuestro nuevo tensor es explícitamente invariante gauge al depender únicamente de la métrica y del tensor de Faraday[†].

6.3 Cuantización del campo electromagnético

Debido a la ambigüedad[‡] que presenta la descripción del campo electromagnético mediante el potencial gauge, vamos a tener que lidiar con grados de libertad superfluos a la hora de cuantizar la teoría. Existen dos principales métodos para lidiar con ello. El primero consiste en fijar esos grados de libertad mediante la elección de un gauge específico, mientras que en el segundo método se parte de una teoría que en primera instancia parece que no tiene nada que ver con el electromagnetismo y se impone una restricción sobre el espacio de estados para recuperarlo. No obstante, aunque este último método pueda parecer extraño, es importante recordar que es el conjunto de operadores y estados los que se comparan con el experimento.

6.3.1 Cuantización en el gauge de radiación

El primer método que veremos para cuantizar el campo electromagnético comienza restringiendo ese grado de libertad extra mediante la elección del gauge de radiación, que mencionamos anteriormente

$$A_0 = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 . \quad (6.20)$$

[†]Nuevamente, si acoplamos el Electromagnetismo a la gravedad, el tensor $T^{\mu\nu}$ se deduce inmediatamente.

[‡]Esta ambigüedad es la responsable de que en la ecuación (6.16) $\Pi^0 = 0$. En el primer método esto no es problema ya que $A^0 = 0$. En el segundo tampoco es problema debido a que (6.16) no se verifica.

Utilizando que en este gauge el campo cumple la ecuación de Klein-Gordon sin masa $\square A^i = 0$ podemos escribir la solución de las componentes no triviales del campo como una expansión en ondas planas parecido a como hicimos con el campo escalar real

$$\mathbf{A}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=1,2} \left[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (6.21)$$

Donde debe cumplirse $k^2 = 0$ de modo que recuperamos de forma natural la relación de dispersión característica de los fotones

$$k_\mu k^\mu = \omega_{\mathbf{k}}^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0 \Rightarrow \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|. \quad (6.22)$$

Los vectores $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$ y $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)$ son dos soluciones independientes para una misma \mathbf{k} y se corresponden con una base en la que se puede describir las dos posibles polarizaciones observadas que pueden presentar los fotones. Debido a la elección de este gauge, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, surge de manera natural que los vectores de polarización son ortogonales al cuadrivector de onda, es decir, $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$.

Realizamos un razonamiento similar a la del campo escalar e interpretamos $a_{\mathbf{k},\lambda}$ y $a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ como operadores de aniquilación y creación de fotones con una cierta polarización determinada por el índice λ , por lo que debemos imponer

$$\left[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \quad \left[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'} \right] = \left[a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger \right] = 0. \quad (6.23)$$

Veamos ahora cómo son las reglas de conmutación entre el campo y sus momentos conjugados. Recordamos que en el gauge en el que estamos trabajando $A_0 = 0$, su momento conjugado es

$$\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0. \quad (6.24)$$

En este caso como $A_0 = 0$ y Π_0 son nulos, no serán variables dinámicas y por tanto los podremos despreciar.

El momento conjugado para las demás componentes es

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\delta_0^\mu \delta_i^\nu - \delta_0^\nu \delta_i^\mu) = -F^{0i} = E^i. \quad (6.25)$$

Utilizando las relaciones de conmutación de (6.23) se puede obtener las de A^i con E^j ,

$$\left[A^i(\mathbf{x}, t), E^j(\mathbf{x}', t) \right] = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} \right). \quad (6.26)$$

Definimos un estado de vacío normalizado y que es aniquilado por todos los operadores de destrucción,

$$a_{\mathbf{k},\lambda} |0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}, \lambda . \quad (6.27)$$

Creamos el espacio de Fock dejando actuar los operadores de creación $a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ sobre este estado, obteniendo

$$|\mathbf{k}, \lambda\rangle = \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (6.28)$$

Definimos nuestro hamiltoniano cuántico utilizando la conservación del tensor energía momento derivado en (6.17) y aplicando *normal ordering*

$$H \equiv \int d^3\mathbf{x} : T^{00} : = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} : \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} . \quad (6.29)$$

De manera análoga podemos definir el operador momento

$$P^i \equiv \int d^3\mathbf{x} : T^{0i} : = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} : \mathbf{E} \times \mathbf{B} : = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} k^i a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} . \quad (6.30)$$

Estos operadores nos devolverán, respectivamente, la energía y el momento totales de los estados de nuestro sistema. Teniendo en cuenta estas expresiones podemos interpretar el estado $\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |0\rangle$ como un estado que describe una partícula sin masa denominada fotón, con momento \mathbf{k} , energía $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ y con dos estados de polarización distintos que vienen dados por $\lambda = 1, 2$. Del mismo modo, como sucedía en el ejemplo del campo escalar real, el fotón es su propia antipartícula.

6.3.2 Cuantización covariante

El segundo método para cuantizar el campo electromagnético se denomina covariante ya que no vamos a fijar ningún gauge, sino que vamos a trabajar con el campo A_μ en su completitud. Si seguimos el método habitual de cuantización visto hasta ahora utilizando el lagrangiano de Maxwell descrito en (6.7) deberíamos imponer un conmutador entre el campo y su momento conjugado canónico,

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), \Pi^\nu(t, \mathbf{x}')] = i\eta^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (6.31)$$

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), A^\nu(t, \mathbf{x}')] = 0 , \quad (6.32)$$

donde en este caso aparece la métrica $\eta^{\mu\nu}$ ya que en el lado izquierdo de la ecuación tenemos un tensor de rango dos. Sin embargo, si recordamos la expresión del momento conjugado

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} , \quad (6.33)$$

es fácil ver que como $F^{\mu\nu}$ es antisimétrico, la componente temporal del momento es idénticamente nula. Si nos planteamos el conmutador entre A^0 y Π^0 nos encontramos una contradicción, ya que por un lado la ecuación (6.31) nos arroja un valor no nulo mientras que por otro lado es imposible que el resultado sea distinto del trivial. Como queremos imponer una cuantización covariante podemos asumir que este error viene de la expresión del momento conjugado y que por lo tanto del lagrangiano (no tiene dependencia de $\partial_0 A_0$). Una solución pasa por definir una nueva densidad lagrangiana con dependencia en la derivada del campo

$$\mathcal{L}_{GB} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (6.34)$$

De primeras, parece que este nuevo lagrangiano describe una teoría completamente diferente ya que no es siquiera invariante gauge. Este punto es especialmente crítico ya que es dicha invarianza la que nos garantiza que el fotón presente únicamente dos polarizaciones.

Si calculamos el momento conjugado para esta nueva densidad llegamos a

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{GB}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} - \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)}(\partial_\mu A^\mu)^2 = -F^{0\mu} - \eta^{0\mu} \partial_\nu A^\nu . \quad (6.35)$$

Vemos cómo las componentes espaciales siguen siendo las mismas $\Pi^i = -F^{0i} = E^i$ mientras que en este caso la componente temporal no se anula, $\Pi^0 = -\partial_\nu A^\nu$ por lo que podemos imponer las reglas de conmutación de (6.31) y (6.32) sin problema alguno. Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange a (6.34) encontramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{GB}}{\partial A_\mu} = 0 , \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{GB}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = F^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \partial_\sigma A^\sigma , \quad (6.37)$$

de modo que la ecuación de movimiento es

$$\partial_\nu [F^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \partial_\sigma A^\sigma] = \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = -\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \square A^\mu = 0 . \quad (6.38)$$

Utilizando (6.38) podemos expresar la solución más general del campo como

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 \left[\epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right], \quad (6.39)$$

donde se vuelve a cumplir que $k^\mu k_\mu = 0$, por lo que el campo describirá partículas sin masa. Vemos como en este caso tenemos 4 grados de libertad para las polarizaciones de los fotones, mientras que en el caso de la cuantización en el gauge de radiación únicamente aparecían 2. No obstante vamos a proceder con la cuantización de la teoría y luego veremos cómo solucionar este pequeño inconveniente.

Interpretamos entonces $a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k},\lambda}$ como operadores de creación y aniquilación e imponemos las reglas de conmutación

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \eta_{\lambda\lambda'}, \quad (6.40)$$

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}] = [a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = 0. \quad (6.41)$$

El factor $-\eta_{\lambda\lambda'}$ que aparece en el conmutador (6.40) tiene una consecuencia directa sobre la teoría. Si calculamos la norma de un estado nos encontramos

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{k}, \lambda \rangle = -2\omega_{\mathbf{k}} \langle 0 | a_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger | 0 \rangle = -2\omega_{\mathbf{k}} \langle 0 | [a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger] | 0 \rangle = -2\omega_{\mathbf{k}} \eta_{\lambda\lambda} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0). \quad (6.42)$$

Vemos que para $\lambda = 0$, $\eta_{00} = +1$ de modo que la norma de estos estados sería negativa, lo que da problemas. Por otro lado, si escogemos un sistema de referencia en el que un fotón se mueve en la dirección positiva del eje z con cuadri-momento $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ podemos crear una base para la polarización de dicho fotón denotando

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(\mathbf{k}, 0) &= (1, 0, 0, 0), & \epsilon^\mu(\mathbf{k}, 1) &= (0, 1, 0, 0), \\ \epsilon^\mu(\mathbf{k}, 2) &= (0, 0, 1, 0), & \epsilon^\mu(\mathbf{k}, 3) &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Utilizando este convenio se puede ver que los vectores con $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ representan polarizaciones transversas al cuadrimomento, es decir, $\epsilon^\mu k_\mu = 0$, requisito que no cumplen (en este convenio) los vectores con $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$. Sabemos por experiencia que los fotones presentan una polarización transversal a la dirección de propagación, concluyendo por tanto que los estados $|\mathbf{k}, 0\rangle$ y $|\mathbf{k}, 3\rangle$ creados por los operadores $a_{\mathbf{k},0}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k},3}^\dagger$, respectivamente, no pueden representar estados físicos (Si queremos que nuestra teoría reproduzca fotones reales).

Una vez hecho este razonamiento surge de manera natural pensar que si queremos recuperar el electromagnetismo de Maxwell tal y como lo conocemos es necesario crear una restricción sobre el espacio de Fock que nos permita discernir cuáles son los estados que pueden describir un estado físico. Este planteamiento es la base del método de cuantización covariante o *Gupta-Bleuler quantization*, en el que se parte de una teoría algo diferente al electromagnetismo en la que no se satisface ni la invarianza gauge (debido a un término que va como $(\partial_\mu A^\mu)^2$). No obstante, debido a esta “libertad” que permitimos sobre los operadores es necesario imponer restricciones sobre el espacio de estados. Este método se contrapone completamente con el anterior en el que seleccionábamos un gauge (y por tanto restringíamos los operadores, escogiendo los que nos interesaban) para luego permitir esa libertad sobre los estados.

La restricción que vamos a imponer sobre el espacio de Fock tiene que ser tal que

$$\langle \Phi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0 , \quad (6.44)$$

donde $|\Psi\rangle$ y $|\Phi\rangle$ son dos estados físicos. Podemos descomponer el operador $\partial_\mu A^\mu$ en uno que contenga las frecuencias negativas y otro con las positivas de tal modo que

$$\partial_\mu A^\mu = (\partial_\mu A^\mu)^+ + (\partial_\mu A^\mu)^- , \quad (6.45)$$

donde

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ = -i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-ikx} , \quad (6.46)$$

$$(\partial_\mu A^\mu)^- = i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu \epsilon^{\mu*}(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{ikx} . \quad (6.47)$$

Hemos utilizado que $(\partial_\mu A^\mu)^- = [(\partial_\mu A^\mu)^+]^\dagger$. Es fácil ver que utilizando esta descomposición del operador la condición (6.44) se satisface si se cumple

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ |\Psi\rangle = 0 , \quad (6.48)$$

ya que

$$\langle \Phi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = \langle \Phi | (\partial_\mu A^\mu)^+ | \Psi \rangle + \langle \Phi | (\partial_\mu A^\mu)^- | \Psi \rangle = [(\partial_\mu A^\mu)^+ | \Phi \rangle]^\dagger | \Psi \rangle = 0 . \quad (6.49)$$

La ecuación (6.48) será la nueva condición que defina el subespacio de estados físicos asociados al fotón. Volviendo al ejemplo de antes en el que teníamos un fotón con

cuadrimomento $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, el estado más genérico se puede escribir como una combinación de estados con polarizaciones distintas

$$|\Psi\rangle = \sum_{\lambda=0}^3 c_\lambda a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |0\rangle . \quad (6.50)$$

Si imponemos (6.48) sobre este estado tenemos

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ |\Psi\rangle = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^3 c_\lambda k_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{k}', \lambda') e^{-ik'x} a_{\mathbf{k}',\lambda'} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |0\rangle = 0 , \quad (6.51)$$

de donde sacamos la condición

$$c_1 + c_3 = 0 . \quad (6.52)$$

Vemos que la contribución de los estados con polarizaciones no transversales se debe cancelar. Es por esto que podemos escribir cualquier estado físico (en este ejemplo de un fotón con momento \mathbf{k} en la dirección z) como

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_T + |\psi\rangle_{NT} , \quad (6.53)$$

donde $|\psi\rangle_T$ representa la contribución al estado caracterizado por tener polarización transversal, pudiendo ser combinación lineal de $a_{\mathbf{k},0}^\dagger |0\rangle$ y $a_{\mathbf{k},2}^\dagger |0\rangle$. Por otro lado, $|\psi\rangle_{NT}$ representa la contribución no transversal, pudiendo ser combinación lineal de $a_{\mathbf{k},1}^\dagger |0\rangle$ y $a_{\mathbf{k},3}^\dagger |0\rangle$ cumpliéndose siempre que $c_1 + c_3 = 0$.

La pregunta que surge ahora es si esta contribución no transversal afecta al hamiltoniano o al momento de la teoría. Podemos construir tanto el hamiltoniano como el operador momento cuánticos utilizando el tensor energía-momento proveniente del teorema de Noether

$$H \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left[-a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} \right] , \quad (6.54)$$

$$P^i \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k^i \left[-a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} \right] . \quad (6.55)$$

Vemos que estas nuevas expresiones de los operadores tienen dos nuevos términos correspondientes con $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$. No obstante, cuando calculamos el valor esperado de un estado físico, la contribución del término $-a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0}$ se cancela con la de $a_{\mathbf{k},3}^\dagger a_{\mathbf{k},3}$, es decir,

$$\langle \Phi | -a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + a_{\mathbf{k},3}^\dagger a_{\mathbf{k},3} | \Psi \rangle = 0 . \quad (6.56)$$

Esto nos sugiere que las contribuciones a la energía y al momento son debidas a las polarizaciones transversales y las parte correspondiente a las polarizaciones no transversales no tiene relevancia física, la parte que define un estado físico es $|\Psi\rangle_T$, recuperando el resultado del primer método de cuantización.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de recopilación bibliográfica hemos visto una introducción a la teoría cuántica de campos llegando a ella mediante el método de cuantización canónica. Otro método que no se ha visto aquí es a través de la integral de caminos o *path integral* formulada inicialmente por Feynman sobre trabajo previo de Dirac, la cual ofrece una generalización del principio de mínima acción para la Mecánica Cuántica. Hemos partido de una teoría de campos clásicos invariante Lorentz, para luego promover a operadores los campos e imponer las correspondientes reglas de conmutación en función de la naturaleza bosónica o fermiónica de los mismos. Eso nos permitió construir una teoría cuántica de campos libres en la imagen de Heisenberg para el campo escalar (real y complejo), el de Dirac y el electromagnético. En este último realizamos los dos principales métodos de cuantización: mediante la elección de un gauge determinado o mediante el método de Gupta-Bleuler. A su vez, comprobamos cómo las partículas surgen naturalmente de la cuantización de los campos mediante los operadores de creación y destrucción.

El siguiente paso natural en el estudio de la teoría de campos sería la modelización de las posibles interacciones entre los distintos campos, lo que incluye procesos de dispersión y cálculos de amplitud de probabilidad asociados a estos así como todo el desarrollo conceptual y matemático que deriva en lo que conocemos actualmente como Modelo Estándar.

Apéndice A

Convenios y notación

Utilizaremos unidades donde

$$\hbar = c = 1 . \quad (\text{A.1})$$

Nuestra convención de signos para la métrica de Minkowski es la signatura *mostly minus*,

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -) . \quad (\text{A.2})$$

Además, usaremos el convenio de Einstein para índices repetidos, por lo que

$$a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 . \quad (\text{A.3})$$

En cuanto a los índices, las letras griegas designan índices espacio-temporales, tomando valores $\mu = 0, 1, 2, 3$, mientras que las letras latinas designan índices espaciales, tomando valores $i = 1, 2, 3$. La notación \mathbf{A} indica un vector espacial con componentes $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$, mientras que la notación $A = A^\mu$ denota un cuadrivector con componentes $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$.

Las coordenadas espacio-temporales vendrán dadas por $x = (t, \mathbf{x})$. El cuadrimomento será $p = (E, \mathbf{p})$. Utilizando la relación de De Broglie $p = \hbar k$ y que trabajamos en unidades donde $\hbar = c = 1$,

$$E_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{k}} , \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} . \quad (\text{A.5})$$

La derivada parcial será

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} . \quad (\text{A.6})$$

mientras que el operador d'Alambertiano tomará la forma

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} . \quad (\text{A.7})$$

El operador cuadrimomento actúa sobre las funciones de las coordenadas como

$$p_\mu = i\partial_\mu , \quad (\text{A.8})$$

$$p^0 = i\partial^0 = i\frac{\partial}{\partial t} \quad p^k = i\partial^k = -i\frac{\partial}{\partial x^k} = -i\nabla^k \implies \mathbf{p} = -i\nabla . \quad (\text{A.9})$$

Denotaremos

$$f \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu g = f(\partial_\mu g) - (\partial_\mu f)g . \quad (\text{A.10})$$

Definiremos la transformada de Fourier en cuatro dimensiones como

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \tilde{f}(k) , \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{f}(k) = \int d^4 x e^{ikx} f(x) . \quad (\text{A.12})$$

mientras que en tres dimensiones

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{k}) , \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3 \mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) . \quad (\text{A.14})$$

La delta de Dirac n -dimensional satisface

$$\int d^n x e^{ikx} = (2\pi)^n \delta^{(n)}(k) . \quad (\text{A.15})$$

Bibliografía

- [1] D. Atkatz, *Quantum cosmology for pedestrians*, *American Journal of Physics* **62** (1994) 619.
- [2] L. Álvarez Gaumé and M. Vázquez-Mozo, *Quantum Field Theory from operators to Path integrals*, Springer Berlín, Heidelberg (2012).
- [3] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books (1995).
- [4] E. Noether, *Invariante variationsprobleme*, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, S.* (1918) 235 [[arXiv:physics/0503066v3](https://arxiv.org/abs/physics/0503066v3)].
- [5] K. Huang, *Quantum Field Theory from operators to Path integrals*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2010).
- [6] P.A.M. Dirac, *Fundamental equations of quantum mechanics*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **109** (1925) 642.
- [7] M. Maggiore, *An modern introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press (2005).