



Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**TFG: Teoría Cuántica de Campos y
renormalización en defectos**

AUTOR:
ROBERTO GALLEGO RUANO

TUTOR:
DIEGO RODRÍGUEZ GÓMEZ

13 de julio de 2024

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Grupos de Lorentz y Poincaré, y sus simetrías | 4 |
| 2.1. El grupo de Lorentz | 4 |
| 2.2. El álgebra de Lorentz | 7 |
| 2.2.1. Espinores en la teoría relativista | 9 |
| 2.3. Representaciones de los campos | 12 |
| 2.3.1. Campos escalares | 12 |
| 2.3.2. Campos de Weyl | 13 |
| 2.3.3. Campos de Dirac | 14 |
| 2.3.4. Campos de Majorana | 15 |
| 2.4. El grupo de Poincaré | 16 |
| 3. Teoría clásica de campos | 18 |
| 3.1. El principio de mínima acción | 18 |
| 3.2. El Teorema de Noether | 19 |
| 3.2.1. El tensor de energía-momento | 20 |
| 3.3. Campos escalares | 21 |
| 3.3.1. Campos escalares reales. La ecuación de Klein-Gordon. | 21 |
| 3.3.2. Campos escalares complejos. Carga $\mathcal{U}(1)$ | 24 |
| 3.4. Campos espinoriales | 26 |
| 3.4.1. Ecuación de Weyl. Helicidad | 26 |
| 3.4.2. La ecuación de Dirac | 27 |
| 3.4.3. Masa de Majorana | 30 |
| 3.5. El campo electromagnético | 31 |
| 3.5.1. Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell en el vacío | 31 |
| 3.5.2. Invarianza gauge. Gauges de Lorentz y de radiación. | 32 |
| 3.5.3. El tensor de energía-momento | 33 |
| 3.5.4. Acoplamiento mínimo y no mínimo a la materia | 34 |
| 3.5.5. Primera cuantización de la ecuación de ondas relativista | 36 |
| 4. Cuantización de campos escalares libres | 38 |
| 4.1. Campos escalares reales (espín 0). Espacio de Fock | 38 |
| 4.2. Campos escalares complejos. Antipartículas | 41 |
| 5. Teoría de perturbaciones y diagramas de Feynman. Campos de espín 0 con interacción y cálculo de scatterings | 43 |
| 5.1. Matriz S | 43 |
| 5.2. La fórmula de reducción LSZ | 44 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 5.3. | Expansión en teoría de perturbaciones | 47 |
| 5.4. | El propagador de Feynman | 50 |
| 5.5. | Teorema de Wick y diagramas de Feynman | 53 |
| 5.5.1. | Scattering $2 \rightarrow 2$ | 54 |
| 5.5.2. | Loops | 59 |
| 5.5.3. | Reglas de Feynman (campos escalares) | 61 |
| 5.5.4. | Divergencias | 61 |
| 5.6. | Renormalización | 65 |
| 5.7. | El punto de vista moderno de la renormalizabilidad | 69 |
| 5.8. | La dependencia de las constantes de acoplamiento de la energía | 71 |
| 6. | Grupo de renormalización: Defecto de superficie en el modelo $O(N)$ en la teoría escalar libre | 75 |
| 7. | Conclusiones | 78 |

1. Introducción

Tras el desarrollo de la Relatividad Especial y la conocida relación $E = mc^2$ por Albert Einstein en 1905, se constató que la masa de un sistema no es una cantidad fija, pudiendo surgir masa a partir de la energía de un sistema. Paralelamente, a principios del siglo XX, surgió la Mecánica Cuántica, describiendo el comportamiento de las partículas a escalas muy pequeñas, pero asumiendo que el número de partículas y la masa eran cantidades fijas. Para integrar ambas teorías, se creó la Teoría Cuántica de Campos, la cual trata a las partículas como excitaciones de campos fundamentales que recubren el espacio-tiempo, permitiendo la creación y aniquilación de partículas masivas según la Relatividad Especial.

Para el campo electromagnético, en la teoría clásica y en Relatividad Especial, este se describía mediante las ecuaciones de Maxwell como ondas electromagnéticas. En Mecánica Cuántica, surgió el concepto de cuanto, con el fotón como el cuanto de la interacción electromagnética, teniendo energía $E = h\nu$. En la Teoría Cuántica de Campos, estos conceptos se unifican en el campo electromagnético cuántico, donde el fotón es el cuanto de excitación, integrando así la Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica.

En el siguiente trabajo se establecerán las bases matemáticas para entender las transformaciones de Lorentz y Poincaré en términos de grupos y sus representaciones, estudiando sus simetrías más importantes, así como las corrientes y cargas conservadas correspondientes, siguiendo el Teorema de Noether. Además, se introducirá el espinor relativista y se hará un repaso de la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica Clásica con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Se establecerán las acciones que describen los campos escalares, reales y complejos, y espinoriales clásicos. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se encontrarán las ecuaciones de movimiento de estos campos: la Ecuación de Klein-Gordon, la Ecuación de Weyl, la Ecuación de Dirac y la Ecuación de Majorana. Finalmente, se aplicará la cuantización canónica a la solución de la ecuación de Klein-Gordon, encontrando así los campos escalares cuánticos libres, y algunas de sus consecuencias, como la existencia de antimateria.

Una vez cuantizados estos campos, se encontrará la matriz que da las probabilidades de amplitud de scattering, y los diagramas de Feynman que ayudarán a encontrar las integrales que dan las amplitudes. Veremos cómo muchos de estos diagramas divergen y será necesario aplicar un método conocido como renormalización para hacerlos finitos, desarrollando la ecuación del Grupo de Renormalización.

Para finalizar, se estudiará el flujo del grupo de renormalización, la función β , en una teoría con campos escalares libres y un defecto en dos-dimensiones. Se establecerá entonces una base introductoria sólida para entender las interacciones fundamentales, teniendo en cuenta la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial.

La información se ha extraído de las Refs. [1], [2], [3] y [4].

Nota: Se tomará en todo momento unidades naturales, por lo que $c = 1$ y $\hbar = 1$.

2. Grupos de Lorentz y Poincaré, y sus simetrías

2.1. El grupo de Lorentz

Se define el grupo ortogonal $O(n, m)$ como aquel que contiene las matrices que hacen transformaciones que mantienen invariante la cantidad $(y_1^2 + \dots + y_m^2) - (x_1^2 + \dots + x_n^2)$. Como nuestro interés físico radica en encontrar las transformaciones que mantengan el intervalo relativista invariante, buscamos el grupo ortogonal $O(3, 1)$, también conocido como grupo de Lorentz. Las matrices del grupo $O(3, 1)$ mantendrán invariante la siguiente cantidad:

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1)$$

Donde η es la métrica de Minkowski en la signatura $(+, -, -, -)$. Por tanto, para que las transformaciones $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ tales que $\Lambda \in O(3, 1)$, las matrices Λ deben cumplir:

$$\eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu}(\Lambda^\mu_\kappa x^\kappa)(\Lambda^\nu_\sigma x^\sigma) = \eta_{\kappa\sigma}x^\kappa x^\sigma \quad (2)$$

Y como debe ser cierto para cualquier vector x genérico, obtenemos que $\eta_{\kappa\sigma} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\kappa\Lambda^\nu_\sigma$. Entonces, en notación matricial y reorganizando índices, esto es equivalente a $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$. Podemos aplicar determinantes a ambos lados y ver que las matrices del grupo de Lorentz pueden tener determinante 1 o -1.

$$\det \eta = \det \Lambda^T \cdot \det \eta \cdot \det \Lambda \Rightarrow \det \Lambda^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad (3)$$

De esta manera la componente con determinante 1, es la que contiene el elemento unidad y por tanto forma un subgrupo. Este subgrupo se le conoce como $SO(3, 1)$ o grupo de transformaciones propias de Lorentz. Escribiendo la componente 00 de la ecuación $\eta_{\kappa\sigma} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\kappa\Lambda^\nu_\sigma$ llegamos a :

$$1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \implies (\Lambda^0_0)^2 \geq 1$$

donde se tiene en cuenta que en el grupo $SO(3, 1)$ las entradas de las matrices son reales. Entonces, nuestro grupo de Lorentz tendrá dos componentes desconexas, los elementos que tengan $\Lambda^0_0 \geq 1$ y los que tengan $\Lambda^0_0 \leq -1$. Puesto que la identidad tiene su componente 00 igual a 1, redefiniremos el grupo de Lorentz como la componente de $SO(3, 1)$ con $\Lambda^0_0 \geq 1$.

Vamos a tratar de encontrar los generadores del álgebra de Lorentz en dimensión 4. Si consideramos una transformación infinitesimal:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$$

introduciéndolo en la ecuación $\eta_{\kappa\sigma} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\kappa\Lambda^\nu_\sigma$ vemos que:

$$\eta_{\kappa\sigma} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\kappa\Lambda^\nu_\sigma \implies \eta_{\kappa\sigma} = (\delta^\mu_\kappa + \omega^\mu_\kappa)\eta_{\mu\nu}(\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma),$$

que desarrollando e ignorando términos de orden 2 o mayor en ω , se obtiene:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha},$$

por lo que finalmente llegamos a que:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \quad (4)$$

donde se han renombrado los índices κ y σ como α y β .

Entonces vemos que los tensores ω deben ser antisimétricos. Escribiéndolos en forma de matriz:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \implies \eta_{\alpha\sigma}\omega^\sigma_\beta = -(\eta_{\beta\sigma}\omega^\sigma_\alpha)^T.$$

Escribiendo la matriz ω como una matriz genérica (aquí introducimos el hecho de que queremos una representación en dimensión 4):

$$\omega = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix},$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, encontramos las condiciones para cada una de las componentes, llegando a:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & g & h \\ c & -g & 0 & l \\ d & -h & -l & 0 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando obtenemos los generadores del álgebra de Lorentz en esta representación de dimensión 4, la de los cuadvectores:

$$\begin{aligned} \omega = & b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Encontramos entonces 6 generadores del álgebra de Lorentz, con sus seis respectivos parámetros. Los tres primeros generadores son los conocidos como Boosts de Lorentz y los tres últimos no son más que los generadores de las rotaciones de 3 dimensiones, es decir los generadores de $SO(3)$ pero en matrices de dimensión 4, ya que esta representación es reducible, debido a que el tiempo se comporta como singlete bajo rotaciones de $SO(3)$.

Vamos a encontrar el elemento del grupo de Lorentz generado al exponenciar esta primera matriz, a la que llamaremos momentáneamente M :

$$\Lambda = e^{\eta M} = I + \eta M + \frac{1}{2!}\eta^2 M^2 + \frac{1}{3!}\eta^3 M^3 + \frac{1}{4!}\eta^4 M^4 + \dots$$

donde η es el parámetro b renombrado (no es la métrica de Minkowski). Elevando a 0 tenemos que $M^0 = I$, y elevando al cuadrado, al cubo y así sucesivamente nuestra matriz M , encontramos que M^2 no es más que la matriz identidad 2×2 en la esquina superior izquierda y el resto de componentes 0 (llamaré a esta matriz $(I_2, 0)$ por comodidad), $M^3 = M$, $M^4 = (I_2, 0)$ y así sucesivamente. Entonces sustituyendo y reorganizando:

$$\Lambda = (0, I_2) + [1 + \frac{1}{2!}\eta^2 + \frac{1}{4!}\eta^4 + \dots](I_2, 0) + [\eta + \frac{1}{3!}\eta^3 + \frac{1}{5!}\eta^5 + \dots]M$$

Fijándonos en que el sumatorio del primer corchete es el desarrollo en serie del coseno hiperbólico y el segundo corchete es el desarrollo en serie del seno hiperbólico, obtenemos que:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, si hacemos actuar esta transformación en un vector de su espacio (un cuadrivector), obtenemos:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t' = t \cosh \eta + x \sinh \eta \\ x' = t \sinh \eta + x \cosh \eta \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

A esta transformación se la conoce como boost a lo largo del eje x . Realizando el cambio de variable $v = \tanh(\eta)$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh(\eta)$, obtenemos las conocidas transformaciones de Lorentz a lo largo del eje x :

$$\begin{cases} t' = \gamma(t + vx), & x' = \gamma(x + vt), \\ y' = y, & z' = z \end{cases}$$

Puesto que nuestro parámetro η , que físicamente se conoce como rapidez, podía variar en

$(-\infty, \infty)$, ahora el parámetro v variará en $(-1, 1)$. Por lo tanto, podemos observar que de los seis parámetros que tiene el grupo de Lorentz, tres son los tres ángulos de rotación, y otros 3 son las tres componentes de la velocidad v .

2.2. El álgebra de Lorentz

En un caso general, en el que no acudimos a ninguna representación, podemos escribir cualquier elemento del grupo de Lorentz como:

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \quad (5)$$

Donde ahora $\omega_{\mu\nu}$ son los parámetros y $J_{\mu\nu}$ los 6 generadores del álgebra de Lorentz. Sabemos que los generadores deben cumplir que $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$, y el factor 1/2 aparece debido a que estamos sumando sobre todas las parejas de μ y ν , por lo que cada generador se cuenta dos veces.

Todas las cantidades físicas pueden ser clasificadas de acuerdo a sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz. Por ejemplo, en el caso de un campo escalar, este es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Como la dimensión de la matriz generadora debe ser la misma que la del espacio en la que actúa, los generadores en este caso serían números. Y como por definición el campo escalar no debe transformarse bajo transformaciones de Lorentz, la única transformación posible es la identidad, $\Lambda = I$, por lo que todos los generadores deberán ser $J^{\mu\nu} = 0$

También podemos trabajar con campos de cuadvectores. Algunos ejemplos de cuadvectores son la cuadriposición, la cuadvirvelocidad y el cuadvimomento. En el caso de cuadvectores, tenemos que las matrices generadoras deben ser matrices 4x4, por lo que podemos asignar a las 6 matrices unos índices que funcionen igual que los índices espacio-temporales conocidos. Estas 6 matrices son las encontradas en el apartado anterior, y teniendo en cuenta el factor i que hay que añadir, podemos escribir de manera genérica:

$$(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma) \quad (6)$$

Donde los índices μ y ν son los que etiquetan el generador, y ρ y σ son los índices de la matriz, que recorren, en esta representación, de 0 a 3. Esta representación del grupo de Lorentz es irreducible ya que un elemento genérico del grupo en esta representación, mezcla las cuatro componentes de un cuadvector, por lo que no podremos construir ningún subespacio invariante bajo estas transformaciones, salvo los grupos triviales.

Con la expresión anterior se puede probar fácilmente cuál es el resultado de conmutar dos generadores para así encontrar el álgebra de Lorentz:

$$\begin{aligned} ([J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\kappa &= (J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta (J^{\rho\sigma})^\beta{}_\kappa - (J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta (J^{\mu\nu})^\beta{}_\kappa = \\ &= -[\eta^{\rho\nu}(\eta^{\mu\alpha}\delta^\sigma_\kappa - \eta^{\sigma\alpha}\delta^\mu_\kappa) + \eta^{\mu\rho}(\eta^{\sigma\alpha}\delta^\nu_\kappa - \eta^{\nu\alpha}\delta^\sigma_\kappa) + \\ &\quad - \eta^{\nu\sigma}(\eta^{\mu\alpha}\delta^\rho_\kappa - \eta^{\rho\alpha}\delta^\mu_\kappa) + \eta^{\mu\sigma}(\eta^{\nu\alpha}\delta^\rho_\kappa - \eta^{\rho\alpha}\delta^\nu_\kappa)] = \\ &= i[\eta^{\rho\nu}(J^{\mu\sigma})^\alpha{}_\kappa - \eta^{\mu\rho}(J^{\nu\sigma})^\alpha{}_\kappa - \eta^{\nu\sigma}(J^{\mu\rho})^\alpha{}_\kappa - \eta^{\mu\sigma}(J^{\nu\rho})^\alpha{}_\kappa] \end{aligned} \quad (7)$$

que escrito en notación matricial queda

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \quad (8)$$

Ahora realizamos un cambio muy interesante, donde se asume sumatorio en índices repetidos:

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i = J^{i0} \quad (9)$$

Donde ϵ^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita, y los índices corren en 1,2,3, así tenemos tres matrices J y otras 3 matrices K , recuperando las 6 originales. Las matrices J son matrices antisimétricas con componentes distintos de 0 en la parte "espacial", mientras que las K son matrices con componentes distintos de 0 en la parte "temporal".

Reordenando de esta manera las matrices generadoras, el álgebra de Lorentz se reescribe:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k, \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k, \quad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k, \quad \text{\%labelalgebraboosts} \quad (10)$$

El resultado de conmutar las matrices J son las constantes de estructura del grupo $SU(2)$, es decir, las matrices J forman una representación en tres dimensiones (ya que las demás componentes son 0) del grupo $SU(2)$, y por tanto forman un momento angular, como el del espín. Vamos a comprobar esto escogiendo (convenientemente) los índices de los generadores que hallamos anteriormente y multiplicamos por i , de manera que obtengamos generadores hermíticos, es decir:

$$J^1 = J^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = J^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = J^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y se comprueba fácilmente que:

$$[J^1, J^2] = iJ^3, \quad [J^2, J^3] = iJ^1, \quad [J^3, J^1] = iJ^2$$

Por ejemplo, usando los generadores de $SU(2)$ en una representación de dimensión 2 podemos comprobar que las constantes de estructura son las mismas. Utilizaremos las conocidas matrices de Pauli (divididas por 2) del momento angular intrínseco (espín):

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

También se comprueba fácilmente que el resultado de conmutar estos generadores es:

$$[S^1, S^2] = iS^3, \quad [S^2, S^3] = iS^1, \quad [S^3, S^1] = iS^2$$

Entonces vemos como ambas representaciones tienen las mismas constantes de estructura, por lo que

las dos representaciones tienen la misma estructura y realmente, como ya sabíamos, no son más que dos representaciones distintas del mismo grupo, el del momento angular. Este grupo $SU(2)$ aparece debido a que aunque hayamos comenzado por $SO(3,1)$, en el mundo cuántico las representaciones del grupo en dimensión 2, lo que viene siendo $SU(2)$, sí son admisibles, a diferencia del mundo clásico donde esto no es así. En el mundo cuántico, las fases complejas de $SU(2)$ se cancelan ya que la probabilidad viene dada como el módulo al cuadrado. La diferencia entre los generadores anteriores es que las matrices J representan el momento angular de una partícula de espín 1, mientras que las matrices de Pauli representan el momento angular de una partícula de espín $\frac{1}{2}$.

Si junto a este cambio en los generadores, realizamos el cambio en los parámetros $\omega_{\mu\nu}$ de la siguiente forma : $\theta^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega^{jk}$ y $\eta^i = \omega^{i0}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K} &= \theta_i J^i - \eta_i K^i = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm}\omega_{ij}J^{lm} - \omega_{i0}J^{i0} = \frac{1}{4}(\delta_j^l\delta_k^m - \delta_j^m\delta_k^l)\omega_{ij}J^{lm} - \omega_{i0}J^{i0} \\ &= \frac{1}{4}(\omega_{jk}J^{jk} - \omega_{kj}J^{kj})\omega_{ij}J^{lm} - \omega_{i0}J^{i0} = \frac{1}{2}\omega_{jk}J^{jk} - \omega_{i0}J^{i0} = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu},\end{aligned}$$

donde en el último paso se ha tenido en cuenta que $J^{i0} = -J^{0i}$ y se ha sumado dos veces dividiendo entre dos.

De esta manera la ecuación 5 , se puede escribir como:

$$\Lambda = e^{-i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K}}. \quad (12)$$

Y podemos escribir cualquier transformación de Lorentz en función de los ángulos de rotación y de los coeficientes de los boosts.

2.2.1. Espinores en la teoría relativista

Vamos a encontrar una representación espinorial del álgebra de Lorentz. Partiendo de los generadores J^i y K^j que siguen el álgebra de Lorentz dada en 10, vamos a definir los nuevos generadores de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}^\pm = \frac{\mathbf{J} \pm i\mathbf{K}}{2}. \quad (13)$$

Sustituyéndolos en las ecuaciones mencionadas anteriormente obtenemos el álgebra de Lorentz:

$$[J^{+,i}, J^{+,j}] = i\epsilon^{ijk}J^{+,k}, \quad [J^{-,i}, J^{-,j}] = i\epsilon^{ijk}J^{-,k}, \quad [J^{+,i}, J^{-,j}] = 0. \quad (14)$$

Obtenemos dos veces el álgebra de $SU(2)$ además de la conmutación entre las dos álgebras de $SU(2)$ (no se mezclan). Esto no significa que el grupo de Lorentz sea el mismo grupo que $SU(2) \times SU(2)$, si no que a nivel infinitesimal se comportan igual.

Ahora, igual que hicimos con el caso del grupo de rotaciones, debemos encontrar los generadores del grupo de Lorentz que cumplan el álgebra anterior, pero en la representación espinorial. Como conocemos las representaciones espinoriales de $SU(2)$ de mecánica cuántica, y sabiendo que el

álgebra de Lorentz es dos veces el álgebra de $SU(2)$, y que además conmutan entre ellas, obtenemos las siguientes "reglas":

- De la misma manera que podemos etiquetar las representaciones de $SU(2)$ por el número j , aquí denotamos las representaciones del álgebra de Lorentz por dos números que pueden tomar valores enteros (como en $SO(3)$) y semienteros (como en $SU(2)$): (j_-, j_+) .
- La dimensión de la representación (j_-, j_+) será entonces, al igual que con los espinores no relativistas, $(2j_-+1)(2j_++1)$.
- El generador de las rotaciones \mathbf{J} se relaciona con \mathbf{J}^+ y \mathbf{J}^- por: $\mathbf{J} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^-$. Siguen las mismas reglas de la suma de momentos angulares que en mecánica cuántica: en la representación (j_-, j_+) tendremos estados con todos los posibles valores de j en pasos enteros entre $|j_+ - j_-|$ y $(j_+ + j_-)$.

Las representaciones (j_-, j_+) deben incluir todas las representaciones tensoriales además de las representaciones espinoriales. Por ejemplo, algunos casos son:

- La representación $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tiene dimensión 1. Por lo tanto es la representación escalar.
- Las representaciones $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$ y $(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ tienen dimensión 2 cada una, así que son representaciones espinoriales. Entonces llamaremos ψ_L y ψ_R a los espinores que pertenezcan a cada representación, de tal manera:

$$\psi_L \in (\frac{1}{2}, \mathbf{0}), \quad \psi_R \in (\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \quad (15)$$

A estos espinores se los conoce como espinores de Weyl: ψ_L es el espinor levógiro de Weyl mientras que ψ_R se le conoce como espinor dextrógiro de Weyl.

Vamos a encontrar la forma explícita de los generadores \mathbf{J} y \mathbf{K} en esta representación. Para el caso de $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$, tenemos que la dimensión de la representación de \mathbf{J}^- es 2, por lo que los generadores que cumplen la relación 14 son: $\mathbf{J}^- = \frac{\sigma}{2}$, donde σ son las matrices de Pauli. Mientras que la dimensión de la representación $\mathbf{0}$ es 1, y para que cumplan el álgebra de Lorentz se debe cumplir que: $\mathbf{J}^+ = 0$. De esta manera, y despejando \mathbf{J} y \mathbf{K} de la ecuación 13 obtenemos que:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^- = \frac{\sigma}{2}, \quad \mathbf{K} = -i(\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = i\frac{\sigma}{2} \quad (16)$$

Observamos que los generadores K^i no son hermíticos.

Entonces, sabiendo como son los generadores del grupo de Lorentz en la representación $(\frac{1}{2}, \mathbf{0})$, podemos observar como cambia un espinor de Weyl al aplicar una transformación de Lorentz. Usando la ecuación 12 encontramos que

$$\psi'_L = \Lambda_L \psi_L = e^{(-i\theta - \eta) \cdot \frac{\sigma}{2}} \psi_L, \quad (17)$$

donde en este caso θ ya no se refiere al ángulo de rotación ya que no es la representación cuadvectorial de antes.

De igual manera, para los espinores dextrógiros de Weyl (representación $(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$), encontramos que $\mathbf{J}^+ = \frac{\sigma}{2}$ y $\mathbf{J}^- = \mathbf{0}$ y por tanto $\mathbf{J} = \frac{\sigma}{2}$ y $\mathbf{K} = -i\frac{\sigma}{2}$, entonces un espinor ψ_R transformará como:

$$\psi'_R = \Lambda_R \psi_R = e^{(-i\theta + \eta) \cdot \frac{\sigma}{2}} \psi_R \quad (18)$$

Las dos componentes de un espinor de Weyl deberán ser números complejos, porque al hacer una transformación de Lorentz aparecen números complejos, debido a la matriz.

También se puede demostrar que la matriz de Pauli σ^2 tiene la siguiente propiedad: $\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 = \Lambda_R$, por lo tanto obtenemos que el espinor $\sigma^2 \psi_L^*$ transforma como:

$$\sigma^2 \psi_L^* \longrightarrow \sigma^2 (\Lambda_L \psi_L)^* = (\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2) \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R (\sigma^2 \psi_L^*). \quad (19)$$

Por tanto, $\sigma^2 \psi_L^*$ transforma como un espinor de Weyl dextrógiro. A partir de este resultado definimos la operación conjugación de carga como:

$$\psi_L^c = i\sigma^2 \psi_L^* \quad (20)$$

Y similarmente para transformar un espinor dextrógiro en uno levógiro:

$$\psi_R^c = -i\sigma^2 \psi_R^* \quad (21)$$

Se ha multiplicado por i para que de esta manera la operación conjugación de carga aplicada dos veces obtengamos la operación identidad:

$$(\psi_L^c)^c = (i\sigma^2 \psi_L^*)^c = -i\sigma^2 (i\sigma^2 \psi_L^*)^* = -i\sigma^2 (i\sigma^2 \psi_L) = \psi_L$$

- La representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tiene los valores $j = 0, 1$ (esto tiene sentido ya que la dimensión de la representación es 4 compleja, y con $j = 0$ tenemos 1 dimensión y $j = 1$, tenemos 3 dimensiones). Esta es una representación cuadvectorial compleja. Sin embargo en esta representación, al tener dimensión 4 compleja, es necesario añadir alguna condición de realidad para restringirnos a cuadvectores reales.

En esta representación cualquier elemento se puede poner como un par $((\psi_L)_\alpha, (\xi_R)_\beta)$ donde ψ_L y ξ_R son espinores de Weyl independientes, y α y β toman los valores 1 y 2. Vamos a encontrar la relación entre estas cuatro cantidades complejas y las cuatro componentes de un cuadvector complejo.

Definimos las matrices σ^μ y $\bar{\sigma}^\mu$ como

$$\sigma^\mu = (1, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i), \quad (22)$$

donde las matrices σ^i son las matrices de Pauli y 1 es la matriz identidad 2 x 2. Entonces las combinaciones

$$\xi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad \xi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \quad (23)$$

transforman como cuadvectores contravariantes. Se puede comprobar como obtenemos un índice de Lorentz. Estos son complejos, y como dijimos anteriormente se debe imponer alguna condición.

Podemos imponer la condición $V_\mu = V_\mu^*$ para cualquier cuadvector V^μ , la cuál puede excusarse sabiendo que las transformaciones de Lorentz son reales, y por tanto si un cuadvector es real en algún sistema de referencia, permanecerá real después de aplicar cualquier transformación de Lorentz.

2.3. Representaciones de los campos

Queremos encontrar una teoría de campos invariante Lorentz. Un campo es una función de las coordenadas que transforma con unas propiedades determinadas bajo transformaciones de Lorentz. Sabemos que $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, por tanto un campo $\phi(x)$ transformará a una nueva función de unas nuevas coordenadas $\phi'(x')$. Vamos a encontrar como se relaciona el campo $\phi'(x')$ con $\phi(x)$.

2.3.1. Campos escalares

Un campo escalar transforma, por definición de campo escalar, como:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (24)$$

Es decir, al hacer una transformación de Lorentz, un campo escalar transforma de manera que el valor que tiene en un punto según el campo será el mismo para cualquier sistema de referencia. Dicho de otra forma, un punto P de la variedad tiene coordenadas x en un sistema de referencia. y coordenadas x' en otro sistema de referencia, pero la forma funcional del campo cambia de manera que el valor del campo en P es el mismo, independientemente del sistema de referencia.

Recordemos que bajo una transformación infinitesimal de Lorentz, las coordenadas, que son un cuadvector, transforman como:

$$\delta x^\mu \simeq -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu$$

donde se ha usado 5. Los generadores $J^{\rho\sigma}$ vienen dados por la ecuación 6.

Entonces podemos hacer dos tipos de variaciones en los campos, una de ellas es:

$$\delta\phi \equiv \phi'(x') - \phi(x) = 0. \quad (25)$$

De esta transformación obtenemos que los generadores son la representación trivial $J^{\mu\nu} = 0$ pues la transformación es la identidad. En ese caso, el espacio sobre el que actúan las transformaciones es un solo punto $\phi(P)$.

Sin embargo, si mantenemos las coordenadas fijas, y lo que variamos es el punto P en el que "medimos" el campo, obtenemos una variación del valor del campo a lo largo de la variedad (espacio-tiempo). Es decir:

$$\delta_0\phi \equiv \phi'(x) - \phi(x). \quad (26)$$

En este caso el espacio base sobre el que actúan las transformaciones de Lorentz es el conjunto de los valores del campo ϕ en los distintos puntos P del espacio-tiempo. Es decir, es un espacio vectorial de funciones $\phi(P)$ por lo que el espacio vectorial base en este caso tiene dimensión infinita.

Vamos a encontrar los generadores del grupo de Lorentz de esta representación infinitodimensional:

$$\phi'(x) = \phi'(x' - \delta x) \simeq \phi(x) - \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \Rightarrow \delta_0\phi \simeq \phi(x) - \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu - \phi(x) = -\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad (27)$$

Si sustituimos δx^μ en la ecuación anterior encontramos:

$$\delta_0\phi = \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} L^{\rho\sigma} \phi \quad (28)$$

Donde podemos ver que el operador que actúa sobre el elemento del espacio base (ϕ) es:

$$L^{\mu\nu} = -(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (29)$$

Estos generadores cumplen el álgebra de Lorentz dado en la ecuación 8:

$$\begin{aligned} [L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] &= x^\rho (\eta^{\sigma\mu} \partial^\nu - \eta^{\sigma\nu} \partial^\mu) - x^\sigma (\eta^{\rho\mu} \partial^\nu - \eta^{\rho\nu} \partial^\mu) + \\ &\quad - x^\mu (\eta^{\nu\rho} \partial^\sigma - \eta^{\nu\sigma} \partial^\rho) + x^\nu (\eta^{\mu\rho} \partial^\sigma - \eta^{\mu\sigma} \partial^\rho) = \\ &\quad i[\eta^{\nu\rho} i(x^\mu \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\mu) - \eta^{\mu\rho} i(x^\nu \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\nu) + \\ &\quad - \eta^{\nu\sigma} i(x^\mu \partial^\rho - x^\rho \partial^\mu) + \eta^{\sigma\mu} i(x^\nu \partial^\rho - x^\rho \partial^\nu)] = \\ &\quad = i(\eta^{\nu\rho} L^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} L^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} L^{\mu\rho} + \eta^{\sigma\mu} L^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (30)$$

Estos forman una representación de dimensión infinita del grupo de Lorentz.

Usando el momento lineal, escrito como $p^\mu = i\partial^\mu$, encontramos que $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$.

En el caso particular de las rotaciones espaciales: $L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i$ y definimos $L^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} L^{jk} = \epsilon^{ijk} x^j p^k$. Entonces vemos que L^i es el momento angular orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

2.3.2. Campos de Weyl

Un campo levógiro (dextrógiro) de Weyl $\psi_L(x)$ ($\psi_R(x)$) se define como un campo que bajo una transformación de Lorentz, este transforma como:

$$\psi_L(x) \rightarrow \psi'_L(x') = \Lambda_L \psi_L(x), \quad \psi_R(x) \rightarrow \psi'_R(x') = \Lambda_R \psi_R(x) \quad (31)$$

Donde Λ_L es una matriz dada por 17 y Λ_R está dada por 18.

Realizando operaciones similares al caso del campo escalar para obtener los generadores del álgebra de Lorentz en la representación de los campos espinoriales de Weyl, obtenemos:

$$\delta_0 \psi_L \equiv \psi'_L(x) - \psi_L(x) = \psi'_L(x' - \delta x) - \psi_L(x) \simeq \psi'_L(x') - \psi_L(x) - \partial_\rho \psi_L(x) \delta x^\rho = (\Lambda_L - 1) \psi_L(x) - \partial_\rho \psi_L(x) \delta x^\rho$$

Podemos observar que el segundo término del lado derecho de la ecuación tiene la misma forma que en los campos escalares, solo que en este caso actúa sobre el campo de Weyl levógiro $\psi_L(x)$, es decir:

$$-\frac{\partial \psi_L}{\partial x^\rho} \delta x^\rho = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \psi_L, \quad L^{\mu\nu} = -(J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma \partial_\rho = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (32)$$

Escribiendo el elemento del grupo de Lorentz Λ_L de manera genérica como en 5, (solo que en este caso llamaremos a los generadores $S^{\mu\nu}$ y serán matrices 2×2 por actuar sobre espinores) y haciendo un desarrollo a primer orden:

$$\Lambda_L = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \simeq 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}. \quad (33)$$

Entonces sustituyendo:

$$\delta_0 \psi_L \simeq -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \psi_L - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \psi_L \equiv -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \psi_L, \quad J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}. \quad (34)$$

Comparando la ecuación 33 con la ecuación 17, obtenemos que los generadores $S^{\mu\nu}$ se relacionan con las matrices de Pauli mediante:

$$S^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} S^{jk} = \frac{\sigma^i}{2} \quad \text{y} \quad S^{i0} = i \frac{\sigma^i}{2}. \quad (35)$$

De esta manera distinguimos la componente de momento angular orbital y la componente de espín. Esta separación es general para toda representación. Sin embargo, el momento angular $L^{\mu\nu}$ mantiene la misma forma dada en la ecuación 29 para cualquier representación, mientras que la forma del momento angular de espín depende de cada representación.

De igual manera, para los campos de Weyl dextrógiros realizamos las mismas operaciones. Obtenemos que la parte del momento angular orbital es igual, y comparando con la ecuación 18 obtenemos que los generadores S^i tienen la misma forma mientras que los generadores $S^{i0} = -i \frac{\sigma^i}{2}$.

2.3.3. Campos de Dirac

Vamos a definir la operación cambio de paridad al cambio $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x})$. Bajo esta operación los boosts, de Lorentz transforman como $\mathbf{K} \rightarrow -\mathbf{K}$, mientras que los generadores del momento angular (o rotaciones) transforman como $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}$. Por tanto esta transformación cambia los generadores J_\pm^i de manera que $J_-^i \longleftrightarrow J_+^i$. Entonces bajo esta transformación, un objeto que pertenezca a la representación (j_-, j_+) se transformará a un objeto que pertenezca a la representación (j_+, j_-) . Esto nos dice que la representación (j_-, j_+) no es a la vez una base para una representación del grupo de Lorentz y una base para una representación de las transformaciones de paridad (a menos

que $j_- = j_+$). Un espinor de Weyl levógiro bajo transformaciones de Lorentz sigue siendo levógiro, pero bajo transformaciones de paridad, se convierte en un espinor dextrógiro. Entonces ψ_L y ψ_R de manera independiente no son una base para la representación de las transformaciones de paridad.

Sabemos experimentalmente que la fuerza débil viola la paridad. Sin embargo la fuerza fuerte y la electromagnética la conservan. Por tanto, en estos casos es importante trabajar con campos que provean una representación para transformaciones de Lorentz y de paridad a la vez. Entonces definimos el *campo de Dirac*, que escrito en la base quiral se escribe como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Estos transforman bajo una transformación de Lorentz como $\Psi \rightarrow \Psi' = \Lambda_D \Psi$, con

$$\Lambda_D = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix} \quad (37)$$

donde Λ_L y Λ_R están dadas por 17 y 18 respectivamente.

Finalmente, bajo la operación conjugación de carga obtendríamos que el espinor de Dirac transforma como:

$$\Psi^c = \begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_L^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \psi_R^* \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \Psi^* \quad (38)$$

De nuevo, si conjugamos dos veces un espinor recuperamos el original:

$$(\Psi^c)^c = \Psi \quad (39)$$

Las coordenadas x^μ no cambian bajo la conjugación de carga.

2.3.4. Campos de Majorana

Un espinor de Majorana es similar a un espinor de Dirac pero cuyas componentes no son independientes, si no que son $\psi_L = \psi_L$ y $\psi_R = i\sigma^2 \psi_L^*$, es decir:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (40)$$

Un espinor de Majorana contiene un espinor de Weyl (ψ_L) pero escrito en la forma de un espinor de Dirac. Además, por definición, por como está construido, se sigue que los espinores de Majorana son invariantes bajo transformaciones de paridad:

$$\Psi_M^c = \begin{pmatrix} (i\sigma^2 \psi_L^*)^c \\ \psi_L^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 (i\sigma^2 \psi_L^*)^* \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} = \Psi_M \quad (41)$$

También podemos ver los espinores de Majorana de la siguiente manera. En un campo escalar

complejo $\phi(x)$ podemos imponer la condición de realidad $\phi^*(x) = \phi(x)$ y esta condición será invariante Lorentz, ya que los elementos de $SO(3,1)$ en esta representación son todos el 1, es decir $\phi(x') = \phi(x)$ para todo sistema de referencia. Entonces si en un S.R. el campo es real, lo será en todos. Igualmente ocurre con los cuadvectores, ya que las matrices Λ^μ_ν son reales y tras hacer una transformación de Lorentz a un cuadvector real, este permanecerá real en cualquier sistema de referencia. Sin embargo, en el caso de los espinores de Dirac esto no ocurre. Debido a que la matriz Λ_D definida anteriormente es compleja, aunque impongamos la condición de realidad a un espinor de Dirac en un S.R., al aplicarle esta matriz, nada asegura que este siga siendo real. Por lo tanto a estos espinores tendríamos que aplicar un "parente" de la condición de realidad. Este viene dado por la ecuación 41, ya que relaciona Ψ_M con Ψ_M^* a través de 38. Sabemos que esta relación es invariante Lorentz ya que una transformación de Lorentz no cambia la representación del espinor, como vimos en las ecuaciones 17 y 18.

2.4. El grupo de Poincaré

En la Naturaleza no solo requerimos invariancia de las leyes físicas bajo transformaciones de Lorentz, si no también bajo traslaciones. El grupo que contiene las transformaciones de Lorentz y las traslaciones espacio-temporales se llama Grupo de Poincaré, o $ISO(3,1)$, donde la I viene de "inhomogéneo".

Un elemento genérico del grupo de traslaciones se escribe como:

$$\Lambda_T = e^{-iP^\mu a_\mu}, \quad (42)$$

donde P^μ son los generadores de las traslaciones y a_μ los coeficientes o parámetros de la traslación $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$.

Esta vez, en vez de encontrar los explícitamente los generadores P^μ en la representación cuadvectorial, los encontraremos en la representación de los campos, y además encontraremos el álgebra de las traslaciones, para poder generalizar a cualquier representación, conociendo las constantes de estructura. Recordemos que hasta ahora hemos encontrado que los generadores del grupo de Lorentz en dimensión infinita son los $L^{\mu\nu}$, que eran independientes del campo, y los $S^{\mu\nu}$ que dependían del espín del campo, pero no de las coordenadas x^μ .

Para encontrar los generadores de las traslaciones en la representación de los campos, requeriremos que todos los campos, se comporten como escalares bajo traslaciones espacio-temporales, es decir:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (43)$$

Para cualquier sistema de referencia $x' = x + a$ en el que solo haya ocurrido una traslación. Vamos a utilizar ϕ para referirnos a cualquier campo (escalar, espinorial, vectorial, ...), ya que como hemos dicho previamente, todos actuaran como un campo escalar bajo traslaciones.

Entonces, bajo una traslación espacio-temporal infinitesimal $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$, utilizando el

mismo método que en el grupo de Lorentz, obtenemos:

$$\delta_0\phi \equiv \phi'(x' - \epsilon) - \phi(x) \simeq \phi'(x') - \epsilon^\mu \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} - \phi(x) = \phi(x) - \epsilon^\mu \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} - \phi(x) = -\epsilon^\mu \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} \quad (44)$$

Por otro lado, usando:

$$\phi'(x' + a) = \Lambda_T \phi'(x') = \Lambda_T \phi(x) \quad (45)$$

Sustituyendo $a = -\epsilon$ tenemos:

$$\phi'(x) = \phi'(x' - \epsilon) = e^{iP^\mu \epsilon_\mu} \phi(x) \Rightarrow \delta_0\phi \simeq i\epsilon_\mu P^\mu \phi(x) \quad (46)$$

Entonces, comparando 44 con 46 obtenemos que los generadores P^μ en esta representación infinitodimensional toman la forma:

$$P^\mu = i\partial^\mu \quad (47)$$

Este generador no es más que el cuádrivector momento, por lo que podemos separar sus componentes espacial (trimomento) y temporal (energía):

$$H = i\frac{\partial}{\partial x^0} = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P^i = i\partial^i = -i\partial_i = -i\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (48)$$

Por lo tanto, el álgebra del grupo de traslaciones sería:

$$[P^\mu, P^\nu] = -(\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) = 0 \quad (49)$$

Donde estamos asumiendo que se cumple que las derivadas conmutan, ya que el espacio de Minkowski es "suave" y las derivadas parciales son continuas en todo el espacio.

Ahora encontremos el conmutador entre los generadores de las traslaciones y los generadores del álgebra de Lorentz. Vimos anteriormente como los campos producen una representación infinitodimensional del grupo de Lorentz, con los generadores $J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$ (para el caso del campo escalar, teníamos que $S^{\mu\nu} = 0$). Como $S^{\mu\nu}$ no depende de las coordenadas este conmutará con ∂^μ y por tanto con P^μ . Entonces

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = [P^\mu, L^{\rho\sigma}] = [i\partial^\mu, i(x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho)] = i(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho). \quad (50)$$

Este conmutador junto a $[P^\mu, P^\nu] = 0$ y 8 forman el álgebra de Poincaré en función de los generadores P^μ y $J^{\mu\nu}$.

3. Teoría clásica de campos

3.1. El principio de mínima acción

Podemos extender el formalismo Lagrangiano de las funciones que dependen del tiempo $q_i(t)$ de la mecánica clásica, al caso de funciones que dependen del punto espaciotemporal $\phi_i(x)$. Estaremos interesados en teorías de campo *local*, en los que el Lagrangiano tiene la forma general:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (51)$$

donde \mathcal{L} se denomina la densidad Lagrangiana, pero a partir de ahora la denotaremos como Lagrangiano simplemente. \mathcal{L} depende de un número finito de derivadas. En la mayoría de los casos, el Lagrangiano depende solo de la primera derivada, aunque se puede generalizar a órdenes superiores. Por el momento no asumiremos nada de las propiedades de transformación de los campos, por lo que ϕ_i puede denotar un conjunto de escalares, las componentes de cuadvectores,... . Definimos la acción como:

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (52)$$

Para encontrar las ecuaciones del movimiento se procede de manera similar al caso de funciones del tiempo, salvo que en este caso se pedirá que las condiciones de frontera sean que todos los campos se vayan a cero lo suficientemente rápido en el infinito, de manera que los términos de frontera se puedan anular.

Encontramos las ecuaciones de movimiento, o ecuaciones de Euler-Lagrange con N campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0 \quad (53)$$

con $i=1, \dots, N$.

De manera similar a lo que ocurre en mecánica clásica, añadir una derivada total (en este caso una cuatridivergencia) a un Lagrangiano, mantiene las ecuaciones de movimiento iguales.

En el formalismo Hamiltoniano, definimos el momento conjugado como:

$$\Pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i(x))} \quad (54)$$

Y la *densidad Hamiltoniana* como:

$$\mathcal{H}(x) = \sum_i \Pi_i(x) \partial_0 \phi_i(x) - \mathcal{L} \quad (55)$$

Y el Hamiltoniano será:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (56)$$

Es evidente que la componente temporal juega un papel especial en el formalismo Hamiltoniano, por lo que no será explícita la invarianza Lorentz, a diferencia del formalismo Lagrangiano.

3.2. El Teorema de Noether

Es importante estudiar la relación entre simetrías y cantidades conservadas. Esta relación está dada a nivel clásico por el teorema de Noether.

En una teoría de campos con acción S y campos ϕ_i , una transformación de simetría deja la acción $S(\phi)$ invariante, independientemente si los campos cumplen las ecuaciones de movimiento o no. Una transformación infinitesimal de coordenadas y de los campos como:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^a A_a^\mu(x); \quad \phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \epsilon^a F_{i,a}(\phi, \partial\phi), \quad (57)$$

donde la transformación está parametrizada por los parámetros ϵ^a , $a = 1, \dots, N$ y los generadores de la transformación son $A_a^\mu(x)$ y $F_{i,a}(\phi, \partial\phi)$, define una transformación de simetría si mantiene la acción invariante para cualquier ϕ .

Antes de continuar hay que hacer una distinción entre simetrías globales y locales. Si en la transformación de simetría los parámetros ϵ^a son constantes, entonces se trata de una transformación de simetría global. En cambio, si los parámetros ϵ^a son funciones de x y aún mantiene invariante la acción, entonces se trata de una simetría local. Otra distinción importante es entre simetrías internas y espacio-temporales. Si las coordenadas no cambian bajo la transformación de simetría, es decir $A_a^\mu(x) = 0$, entonces es una simetría interna. En caso contrario, es una simetría espacio-temporal. Es importante destacar, que para simetrías internas, d^4x es invariante, y por tanto que la acción permanezca invariante, es equivalente a que \mathcal{L} lo haga.

Comencemos por el caso de una simetría global, es decir, ϵ^a constantes:

$$\delta S = S'(x') - S(x) = \int d^4x' \mathcal{L}' - \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x [\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu) + O(\delta x)^2] \quad (58)$$

Si la transformación de simetría no es una cualquiera, si no que además es la dada por las ecuaciones de movimiento, obtenemos que:

$$\delta_0 \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta_0 \phi_i \right) \quad (59)$$

Sustituyendo en 58:

$$\delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta_0 \phi_i \right) + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu \right] \quad (60)$$

Volvamos a la transformación de simetría, tenemos que:

$$\delta \phi_i = \phi'_i(x') - \phi_i(x) = \epsilon^a F_{i,a} \quad (61)$$

Por otro lado:

$$\delta_0 \phi = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'_i(x'^\mu - \epsilon^a A_a^\mu(x)) - \phi_i(x^\mu) = \delta \phi_i - \epsilon^a A_a^\mu(x) \partial_\mu \phi_i \quad (62)$$

Sustituyendo:

$$\delta_0 \phi_i = -\epsilon^a (A_a^\mu \partial_\mu \phi_i - F_{i,a}). \quad (63)$$

Finalmente encontramos que la variación de la acción es:

$$\delta S = \epsilon^a \int d^4 x \partial_\mu j_a^\mu, \quad (64)$$

donde hemos definido j_a^μ como:

$$j_a^\mu(\phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} [A_a^\nu(\phi) \partial_\nu \phi_i - F_{i,a}(\phi, \partial\phi)] - A_a^\mu \mathcal{L}(x). \quad (65)$$

Para simetrías internas $A_a^\mu = 0$ y entonces $j_a^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} F_{i,a}$.

Como debe ser una transformación de simetría global encontramos que:

$$\epsilon^a \int d^4 x \partial_\mu j_a^\mu(\phi_{E-L}) = 0 \Rightarrow \partial_\mu j_a^\mu(\phi_{E-L}) = 0. \quad (66)$$

donde ϕ_{E-L} son solución de las ecuaciones de movimiento. Es decir, por cada generador de una simetría hay una corriente conservada j_a^μ , y en particular nos interesan simetrías de campos que cumplan las ecuaciones de movimiento, de manera que los campos sean precisamente ϕ_{E-L} .

Definimos las cargas Q_a como:

$$Q_a \equiv \int d^3 x j_a^0(\mathbf{x}, t) \quad (67)$$

las cuales se conservan en el tiempo, ya que:

$$\partial_0 Q_a = \int d^3 x \partial_0 j_a^0(\mathbf{x}, t) = - \int d^3 x \partial_i j_a^i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (68)$$

donde el último término se anula ya que es un término de frontera, y sabemos que estos se anulan si los campos se van a cero lo suficientemente rápido en el infinito.

3.2.1. El tensor de energía-momento

Vamos a ver los ejemplos de simetrías espacio-temporales, es decir, cuando el término A_a^μ es distinto de cero. En estos casos el índice a se trata de un índice de Lorentz.

En el caso de las traslaciones espacio-temporales, donde los todos los campos transformaban como escalares, tenemos:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \epsilon^\mu = x^\mu + \delta_\nu^\mu \epsilon^\nu \Rightarrow A_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \\ \phi'_i(x') &= \phi_i(x) \Rightarrow F_{i,a} = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Tendremos entonces cuatro corrientes conservadas $j_\nu^\mu = \theta_\nu^\mu$ que forman un tensor de Lorentz, al que llamaremos tensor *energía-momento* o tensor *energía-impulso*. Subiendo los índices con la métrica

y usando 65 obtenemos:

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}(x), \quad \partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0. \quad (70)$$

Las cuatro cargas conservadas correspondiente son el cuadri-momento:

$$P^\nu \equiv \int d^3x \theta^{0\nu}, \quad \partial_0 P^\nu = 0, \quad (71)$$

y por tanto, la simetría en las traslaciones implica que el cuadrimento se conserve en el tiempo.

Notar que este tensor-energía momento no es necesariamente simétrico, pero se puede encontrar un tensor equivalente que sí lo sea.

3.3. Campos escalares

3.3.1. Campos escalares reales. La ecuación de Klein-Gordon.

Vamos a comenzar por una teoría con un único campo real y escalar ϕ . Como sabemos de la teoría clásica, el término cinético va como $T \sim v^2$. En teoría de campos, la "cuadrivelocidad" vendría dada por $\partial_\mu \phi$, y para que el Lagrangiano sea invariante Lorentz, la única manera será contraer $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$. Por otro lado, podemos considerar un término de potencial $V = m^2 \phi^2$. Entonces nuestra acción sería:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (72)$$

Y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa \phi)} = \partial^\kappa \phi \rightarrow \partial_\kappa \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\kappa \phi)} \right) = \partial_\kappa \partial^\kappa \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi. \quad (73)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \Rightarrow (\square + m^2) \phi = 0 \quad (74)$$

Esta última se trata de la ecuación libre de *Klein-Gordon* (KG). Sus soluciones son ondas planas que cumplen $p^2 = m^2$, es decir:

$$\phi \sim e^{\pm i p x}, \quad p x = p_\mu x^\mu, \quad p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2. \quad (75)$$

El parámetro m se trata entonces de la masa, y lo consideraremos, por definición, positivo.

La solución más general será una suma de todas las ondas planas posibles, es decir con todos los valores del momento. Por tanto, podemos ver que la solución más general será la integral en momentos siguiente:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} e^{-i p x} + a_{\vec{p}}^* e^{i p x}) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}} \quad (76)$$

(*Notación:* al vector tridimensional momento lo denominaremos tanto \vec{p} como \mathbf{p} según conveniencia) donde $E_{\vec{p}} \equiv +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ es la solución positiva al despejar la energía en 75 y es donde

evaluamos la solución de la ecuación KG. La normalización es una conveniencia, más tarde veremos la razón de esta elección.

Vamos ahora a obtener el Hamiltoniano. El momento conjugado de ϕ será:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi = \partial_0 \phi \quad (77)$$

Entonces la densidad Hamiltoniana será:

$$\mathcal{H} = \Pi_\phi(\partial_0 \phi) - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\Pi_\phi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2) \quad (78)$$

Usando 70, el tensor de energía-momento entonces será:

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (79)$$

Podemos ver que el elemento $\theta^{00} = \mathcal{H}$. Entonces $P^0 = H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \theta^{00}$ y el Hamiltoniano es una cantidad conservada asociada a la invariancia bajo traslaciones temporales. Para el caso de un campo escalar, veamos que más cantidades están conservadas. Ya sabemos que el cuadrivector se conserva debido a la simetría traslacional. Veamos en el caso de la simetría bajo rotaciones y boosts.

Recordemos que bajo una transformación infinitesimal de Lorentz, las coordenadas cambiaban como:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \simeq (1 - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu_\nu) x^\nu \Rightarrow \delta x^\mu = -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu_\nu x^\nu \quad (80)$$

donde los $J^{\mu\nu}$ están dados por 6 y son los generadores del grupo de Lorentz en la representación cuadrivectorial (en este caso). Haciendo algunos cálculos llegamos a que:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\gamma - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\gamma) x_\gamma \Rightarrow A^\mu_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\gamma - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\gamma) x_\gamma \\ \phi'_i(x') &= \phi_i(x) \Rightarrow F_{i,a} = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

Con esto podremos calcular las corrientes conservadas:

$$j^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{1}{2} [(\partial_\alpha \phi) x_\beta - (\partial_\beta \phi) x_\alpha] - \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu x_\beta - \delta_\beta^\mu x_\alpha) \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\theta^\mu_\alpha x_\beta - \theta^\mu_\beta x_\alpha), \quad \partial_\mu j^\mu_{\alpha\beta} = 0 \quad (82)$$

Si subimos los índices, y quitamos un factor $-\frac{1}{2}$ (ya que si la corriente se conserva, menos el doble de ella también):

$$j^{\mu(\alpha\beta)} = \theta^{\mu\beta} x^\alpha - \theta^{\mu\alpha} x^\beta \quad (83)$$

Entonces las cargas conservadas asociadas serán:

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x T^{0\alpha\beta} \int d^3x (\theta^{0\beta} x^\alpha - \theta^{0\alpha} x^\beta), \quad \partial_0 M^{\alpha\beta} = 0 \quad (84)$$

Donde obtenemos que M^{ij} corresponde a la conservación del momento angular debida a la invarianza

Lorentz de las rotaciones y M^{0i} a la invarianza bajo "boosts".

En particular y conociendo $\theta^{0i} = \partial^0 \phi \partial^i \phi$, las cargas conservadas asociadas a las rotaciones espaciales son:

$$M^{ij} = \int d^3x \partial^0 \phi (x^i \partial^j - x^j \partial^i) \phi = \int d^3x \partial^0 \phi (-iL^{ij}) \phi, \quad (85)$$

donde hemos reconocido el operador $L^{ij} = x^i \partial^j - x^j \partial^i$, generador de las rotaciones en la representación de los campos. Usando $M^{ij} = \frac{1}{2}(M^{ij} + M^{ij})$ e integrando por partes, podemos llegar a:

$$M^{ij} = \frac{i}{2} \int d^3x (-\partial_0 \phi) L^{ij} \phi + \phi L^{ij} (\partial_0 \phi) \quad (86)$$

Si ahora definimos un producto escalar para campos reales como:

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \frac{i}{2} \int d^3x \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_2 \quad (87)$$

donde $f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g \equiv f \partial_\mu g - (\partial_\mu f) g$. Se puede comprobar como si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de KG que se anulen suficientemente rápido en el infinito, este producto escalar es independiente del tiempo, es decir:

$$\partial_0 (\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle) = 0. \quad (88)$$

Observar que este producto escalar no es definido positivo. Usando este producto escalar, podemos escribir M^{ij} como:

$$M^{ij} = \langle \phi | L^{ij} | \phi \rangle \quad (89)$$

y el resultado anterior concuerda con que en KG estas cantidades (el momento angular) estén conservados. Este resultado es general y con él podemos ver la relación entre la representación de los generadores como operadores sobre los campos (L^{ij}) y el valor de las correspondientes cargas en una solución dada de las ecuaciones de movimiento (M^{ij}).

Análogamente con las traslaciones espacio-temporales:

$$P^\mu \equiv \int d^3x \theta^{0\mu} \quad (90)$$

obtenemos el siguiente resultado:

$$P^\mu = \langle \phi | i\partial^\mu | \phi \rangle. \quad (91)$$

Podemos comprobarlo para $\mu = 0$ y deberíamos obtener H :

$$\begin{aligned} \langle \phi | i\partial^0 | \phi \rangle &= \langle \phi | i\partial_0 | \phi \rangle = \frac{i}{2} \int d^3x [\phi (i\partial_0) \partial_0 \phi - (\partial_0 \phi) i\partial_0 \phi] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x [-\phi \partial_0^2 \phi + (\partial_0 \phi)^2] = \frac{1}{2} \int d^3x [-\phi (\nabla^2 - m^2) \phi + (\partial_0 \phi)^2] \end{aligned} \quad (92)$$

Donde si integramos por partes:

$$\langle \phi | i\partial^0 | \phi \rangle = \int d^3x [(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \theta^{00} = H \quad (93)$$

De manera similar se podría comprobar con P^i .

Notemos que los operadores $i\partial^\mu$ y $L^{\mu\nu}$ son operadores hermíticos. Por tanto, como los generadores de las rotaciones espaciales y las traslaciones son hermíticos, tendremos una representación unitaria de dimensión infinita del grupo de Poincaré. Por tanto los "autovalores" asociados a estos operadores serán reales, es decir $M^{\mu\nu}$ y P^μ serán reales.

Para finalizar, la acción libre de KG se puede generalizar para contener términos de autointeracción del campo con sí mismo añadiendo un potencial escalar $V(\phi)$:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (94)$$

La parte cuadrática del potencial produce el término de masa, mientras que términos de mayor potencia como ϕ^3, ϕ^4, \dots , dan términos no lineales a las ecuaciones de movimiento y se corresponden con términos de autointeracción. Si añadimos un término de orden uno, ϕ , podemos redefinir el campo de manera que lleguemos a las mismas ecuaciones de movimiento.

Finalmente, la ecuación de movimiento para esta acción sería:

$$\square\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (95)$$

3.3.2. Campos escalares complejos. Carga $\mathcal{U}(1)$

Un campo escalar complejo ϕ se puede describir como dos campos escalares reales ϕ_1 y ϕ_2 relacionados mediante $\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$, y la acción será la suma de las dos acciones de los campos reales:

$$S = S_r^1 + S_r^2 = \frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)]. \quad (96)$$

A partir de la definición de ϕ :

$$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2); \quad \phi^* \phi = \phi_1^2 + \phi_2^2. \quad (97)$$

Finalmente, sustituyendo:

$$S = \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad (98)$$

Por ser ϕ_1 y ϕ_2 solución de la ecuación KG por cómo hemos definido la acción, también lo serán ϕ y ϕ^* . Por tanto la ecuación de movimiento será la ecuación KG, pero con campos complejos.

De manera similar al caso real, la solución más general posible será una suma de ondas planas, pero permitiendo esta vez que el campo sea complejo.

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ipx} + b_p^* e^{ipx})|_{p^0=E_p} \quad (99)$$

con a_p y b_p esta vez independientes, para no imponer la condición de realidad.

Encontramos un aspecto nuevo interesante al considerar campos complejos, que en el caso de campos reales no ocurría. Es la existencia de una *simetría global* $U(1)$ de la acción, es decir:

$$\phi(x) \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi'^* = e^{-i\theta} \phi^*(x) \quad (100)$$

Debido al teorema de Noether, esta simetría implica que existe una cantidad conservada. Tomando los campos $\phi_i = (\phi, \phi^*)$ y haciendo una transformación infinitesimal se obtiene:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu \Rightarrow A_a^\mu(x) = 0 \\ \phi'(x) &\simeq \phi(x) + i\theta\phi(x), \quad \phi'^*(x) \simeq \phi(x) - i\theta\phi^*(x) \\ \Rightarrow F_{\phi,a} &= i, \quad F_{\phi^*,a} = -i, \quad \epsilon^a = \theta \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 65 obtenemos:

$$j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} F_{i,a} = -(\partial^\mu \phi^*) i \phi + \partial^\mu \phi i \phi^*. \quad (101)$$

Bajando el índice y reorganizando:

$$j_\mu = -i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi \quad (102)$$

Y la correspondiente carga conservada debido a la simetría $U(1)$ es:

$$Q_{U(1)} = \int d^3x j^0 = i \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \quad (103)$$

Si definimos el producto escalar para los campos escalares complejos como:

$$\langle \phi_A | \phi_B \rangle = i \int d^3x \phi_A^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_B \quad (104)$$

entonces podemos escribir la carga conservada como:

$$Q_{U(1)} = \langle \phi | \phi \rangle \quad (105)$$

Si ahora tenemos en cuenta que los generadores de $U(1)$ son la identidad, podemos comprobar que esta expresión es equivalente a las ecuaciones 89 y 91 con sus respectivos generadores (omitimos el operador unidad por simplicidad en esta última ecuación).

3.4. Campos espinoriales

3.4.1. Ecuación de Weyl. Helicidad

Recordemos del primer capítulo que la expresión $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L$ es un cuadvectores, donde $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$. Como tratamos de encontrar un Lagrangiano que sea invariante Lorentz, podemos construir el siguiente Lagrangiano contrayendo el índice μ con una derivada:

$$\mathcal{L}_L = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \quad (106)$$

donde el factor i se ha incluido para que la acción de este Lagrangiano sea real.

Introduciendo este Lagrangiano en las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos dos ecuaciones de movimiento, una para cada campo ψ_L y ψ_L^\dagger . Sin embargo estas dos ecuaciones son realmente la misma, la ecuación de Weyl:

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \Rightarrow (\partial_0 - \sigma^i \partial_i) \psi_L = 0 \quad (107)$$

O lo que es lo mismo, aplicando dos veces la igualdad, teniendo en cuenta que $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k$

$$\partial_0^2 \psi_L = \partial_i^2 \psi_L \Rightarrow \partial_0^2 \psi_L = \nabla^2 \psi_L \Rightarrow \square \psi_L = 0 \quad (108)$$

Por lo que la ecuación de Weyl es equivalente a la ecuación KG sin masa. Pero además, la ecuación de Weyl nos aporta aún más información. Para ver esto, consideremos una solución onda plana de energía positiva:

$$\psi_L(x) = u_L e^{-ipx} \quad (109)$$

donde u_L es un espinor constante, $p^\mu = (E, \vec{p})$ y $px = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$. Como vimos antes, esta ecuación describe partículas sin masa, por lo que $E = |\vec{p}|$.

Sustituyendo esta solución en la ecuación de Weyl encontramos que:

$$iu_L(-E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = 0 \rightarrow \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E} u_L = -u_L \quad (110)$$

donde $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$.

Como vimos anteriormente, para campos de espín $\frac{1}{2}$, el momento angular es $\vec{J} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$. Por tanto:

$$(\vec{p} \cdot \vec{J}) u_L = -\frac{1}{2} u_L \quad (111)$$

donde $\vec{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. Recordar que $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$, donde J_1, J_2, J_3 son los generadores de las rotaciones en la representación espinorial.

Observando este resultado, vemos que esta ecuación describe que un *espinor levógiro de Weyl*, tiene *helicidad* $h = -\frac{1}{2}$. Es decir este campo es un autoestado de la helicidad.

Debido a la simetría traslacional del grupo de Poincaré, podemos calcular el tensor energía-

momento de este campo usando la ecuación 70. Debemos fijarnos en que los campos que cumplen las ecuaciones de movimiento $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0$, anulan el lagrangiano ($\mathcal{L} = 0$). De esta manera, el tensor energía momento es:

$$\theta^{\mu\nu} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \psi_L \quad (112)$$

y en concreto, el Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = \theta^{00} = i\psi_L^\dagger \partial_0 \psi_L \quad (113)$$

De nuevo en este caso, existe una simetría global $U(1)$: $\psi_L \rightarrow e^{i\theta} \psi_L$, ya que esta transformación deja invariante el Lagrangiano de Weyl. Podemos calcular entonces, de manera similar al caso del campo escalar complejo, las corrientes conservadas:

$$j_{U(1)}^\mu = \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \quad (114)$$

y por tanto las cargas conservadas:

$$Q_{U(1)} = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi_L^\dagger \psi_L. \quad (115)$$

El Lagrangiano de Weyl no es invariante bajo paridad, ya que bajo un cambio de paridad, los espinores levógiros se convierten en espinores dextrógiros, los cuales no vienen descritos por este Lagrangiano.

De manera análoga, definimos el Lagrangiano de Weyl para espinores dextrógiros como:

$$\mathcal{L}_R = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \quad (116)$$

con $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$. Y las ecuaciones de movimiento serán:

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = (\partial_0 + \sigma^i \partial_i) \psi_R = 0. \quad (117)$$

En este caso las soluciones con energía positiva dan lugar a estados con helicidad $\frac{1}{2}$.

Finalmente, para el tensor energía momento de un espinor dextrógiro, las corrientes conservadas bajo transformaciones del grupo $U(1)$ y su correspondiente carga serán:

$$\theta^{\mu\nu} = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial^\nu \psi_R, \quad j^\mu = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R, \quad Q = \int d^3x \psi_R^\dagger \psi_R. \quad (118)$$

3.4.2. La ecuación de Dirac

Vamos a construir un Lagrangiano que sí tenga en cuenta tanto espinores de Weyl levógiros como dextrógiros. Si observamos las ecuaciones 17 y 18, podemos observar como $\Lambda_R^\dagger \Lambda_L = \Lambda_L^\dagger \Lambda_R = 1$:

$$\Lambda_R^\dagger \Lambda_L = e^{(i\theta+\eta)\sigma/2} \cdot e^{(-i\theta-\eta)\sigma/2} = 1, \quad \Lambda_L^\dagger \Lambda_R = e^{(i\theta-\eta)\sigma/2} \cdot e^{(-i\theta+\eta)\sigma/2} = 1 \quad (119)$$

Por tanto, los elementos $\psi_L^\dagger \psi_R$ y $\psi_R^\dagger \psi_L$ son escalares de Lorentz, ya que $\psi_L^\dagger \psi_R \rightarrow \psi_L^\dagger \Lambda_L^\dagger \Lambda_R \psi_R =$

$\psi_L^\dagger \psi_R$ y similarmente con la otra combinación, que da lugar a otro escalar de Lorentz. Con estos dos escalares podemos formar dos combinaciones hermíticas: $\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L$ y $i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L)$. Al hacer una transformación de paridad $\psi_L \longleftrightarrow \psi_R$, el segundo cambia de signo por lo que es un pseudoescalar, mientras que el primero permanece constante, por lo que elegiremos el primer escalar real para formar nuestro Lagrangiano. Este consistirá en el término cinético, que será la suma del Lagrangiano de Weyl para espinores levógiros y el Lagrangiano de Weyl para espinores dextrógiros, y en un término potencial formado a partir del escalar que definimos anteriormente. En concreto, el Lagrangiano de Dirac lo definiremos como:

$$\mathcal{L}_D = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L). \quad (120)$$

Se puede comprobar fácilmente que este Lagrangiano sí que es invariante bajo cambios de paridad, ya que bajo cambios de paridad: $\psi_L \longleftrightarrow \psi_R$ y $\partial_i \rightarrow -\partial_i$ por lo que $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \longleftrightarrow \sigma^\mu \partial_\mu$.

Si introducimos este Lagrangiano en las ecuaciones de Euler-Lagrange encontramos cuatro ecuaciones, una por campo, pero que realmente son iguales a pares, por lo que nos quedamos con las dos siguientes:

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L \quad (121)$$

que es la ecuación de Dirac escrita en términos de los espinores de Weyl. Sin embargo, como queremos tener en cuenta ambas representaciones, es conveniente encontrar la ecuación de Dirac en términos de los espinores de Dirac. Notemos también que, debido al término de masa, estos espinores no son autoestados de la helicidad.

Antes de nada, reescribamos estas ecuaciones. Si aplicamos $i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu$ a la segunda ecuación, y tenemos en cuenta que $\partial_\mu \partial_\nu$ es un tensor simétrico, por lo que $\partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\nu \partial_\mu)$, y $\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$, encontramos que:

$$-\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi_R = mi\bar{\sigma}_\mu \partial_\mu \psi_L \quad (122)$$

donde en el segundo término reconocemos la primera ecuación del movimiento. Sustituyendo

$$\begin{aligned} -\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\nu \partial_\mu) \psi_R &= m^2 \psi_R \Rightarrow -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu \psi_R = m^2 \psi_R \Rightarrow \\ &-\frac{1}{2} 2\partial^\mu \partial_\mu \psi_R = m^2 \psi_R \Rightarrow (\square + m^2) \psi_R = 0 \end{aligned} \quad (123)$$

y similarmente para el espinor levógiro obtendríamos $(\square + m^2) \psi_L = 0$. Observamos entonces que la ecuación de Dirac implica una ecuación de KG con masa para cada espinor de Weyl.

Ahora reescribiremos todo usando espinores de Dirac como dijimos anteriormente. Recordemos que un espinor de Dirac se definía "uniendo" un espinor de Weyl levógiro y uno dextrógiro:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (124)$$

Sin embargo, podemos definir cualquier espinor de Dirac realizando combinaciones lineales (independientes) de los espinores de Weyl ψ_L y ψ_R .

Para esta elección de los espinores de Dirac, a la que llamaremos representación quirral, podemos definir unas matrices γ , que llamaremos matrices gamma o matrices de Dirac, en la representación quirral como:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (125)$$

o equivalentemente:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (126)$$

Estas matrices satisfacen lo que se conoce como *álgebra de Clifford*:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (127)$$

Usando estas matrices γ se obtiene fácilmente que la ecuación de Dirac se puede escribir en función de los espinores de Dirac como:

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0 \iff (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (128)$$

donde se ha introducido la notación "slash" de Feynman, que indica $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$. El cálculo es como sigue:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu \psi_L \\ \partial_\mu \psi_R \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = m\Psi \Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = m\Psi. \quad (129)$$

También vamos a escribir de manera más compacta el Lagrangiano de Dirac. Podemos fijarnos en que este se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}_D = (\psi_R^\dagger, \psi_L)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Definimos entonces el adjunto de Dirac como $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$. En la representación quirral entonces $\bar{\Psi} = (\psi_R^\dagger, \psi_L)$ y podemos escribir el Lagrangiano de Dirac como:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi. \quad (131)$$

También definimos $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, que en la representación quirral es:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (132)$$

Si en vez de elegir la representación quirral elegimos cualquier otra representación que se relacione

con la quiral como $\Psi' = U\Psi$, donde U es una matriz unitaria ($UU^\dagger = U^\dagger U = 1$) para que el producto $\Psi^\dagger\Psi$ se conserve en cualquier representación, podemos encontrar que el Lagrangiano de Dirac se transforma en:

$$\mathcal{L}_D = (\Psi')^\dagger U \gamma^0 (i\not{\partial} - m) U^\dagger \Psi' = \overline{\Psi}' (i\gamma'^\mu \partial_\mu - m) \Psi' \quad (133)$$

donde se ha definido $\overline{\Psi}' = (\Psi')^\dagger \gamma'^0$ y $\gamma'^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger$.

Eligiendo la matriz unitaria

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (134)$$

obtenemos los espinores de Dirac en la conocida como representación estándar o de Dirac:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R + \psi_L \\ \psi_R - \psi_L \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (135)$$

y las matrices de Dirac entonces cambiarán a:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (136)$$

La representación quiral es más útil en el límite ultrarelativista, ya que la masa puede ser despreciada y ψ_L y ψ_R son autoestados de la helicidad. Además de que sobre ψ_L y ψ_R actúan las transformaciones de Lorentz en las representaciones irreducibles $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$, respectivamente.

3.4.3. Masa de Majorana

Vamos a ver si es posible construir un campo masivo que sea igual a su conjugado de carga. Podemos probar usando un espinor de Weyl, pero la ecuación de Weyl describe únicamente partículas sin masa. Para obtener un espinor igual a su conjugado de carga necesitamos que tenga dos componentes espinoriales. Otra posible solución sería un espinor de Dirac, sin embargo este no es igual a su conjugado de carga. Por tanto, vamos a probar con un espinor de Majorana.

Como describimos en el capítulo 2, podemos escribir un espinor de Majorana como:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \quad (137)$$

y de nuevo siguiendo pasos similares a los de la deducción de la ecuación de Dirac, encontramos:

$$(i\not{\partial} - m)\Psi_M = 0. \quad (138)$$

Hemos obtenido así un espinor que sea igual a su conjugado de carga, pero que a su vez sea masivo. Esta masa es la masa de Majorana. La diferencia más importante con la masa de Dirac, es que, si bien el término de masa de Dirac es invariante bajo las transformaciones de $U(1)$, $\Psi \rightarrow e^{i\alpha}\Psi$, como en el espinor de Majorana la componente dextrógira y levógira están relacionadas mediante

conjugación, no es posible hacer una transformación $U(1)$ que implique $\psi_L \rightarrow e^{i\alpha}$ a la vez que $\psi_R \rightarrow e^{i\alpha}$, ya que sería, en ese caso $\psi_R \rightarrow e^{-i\alpha}\psi_R$. Esto significa que un campo de Majorana no puede describir partículas que tenga cargas $U(1)$, como la carga eléctrica, el número bariónico o el número leptónico. Una partícula que podría ser descrita con un campo de Majorana es el neutrino, pero para ello se tiene que observar si viola alguna de estas simetrías. También podría ser descrito por un campo de Dirac, pero para ello tendría que observarse un neutrino dextrógiro, y hasta ahora solo se han observado neutrinos levógiros.

3.5. El campo electromagnético

3.5.1. Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell en el vacío

El campo electromagnético viene definido por el cuadvivector A_μ . Definimos el tensor de campo electromagnético o tensor de Faraday como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (139)$$

Este está relacionado con el campo eléctrico E^i y magnético B^i mediante:

$$F^{0i} = \partial_0 A^i - \nabla^i A^0 = E^i, \quad (140)$$

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad \text{o} \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F^{jk} = (\nabla \times \vec{A})^i \quad (141)$$

El Lagrangiano del campo electromagnético, o Lagrangiano de Maxwell es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (142)$$

Introduciendo este Lagrangiano en las ecuaciones de Euler-Lagrange, encontramos las ecuaciones de movimiento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \partial_0 \mathbf{E}. \quad (143)$$

Definiendo el tensor dual de $F^{\mu\nu}$ como su dual de Hodge:

$$\star F^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (144)$$

vemos que si el cuadvivector A^μ satisface el teorema de Schwarz, el término $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0$ ya que el tensor de Levi-Civita es completamente simétrico y las derivadas parciales conmutan en este caso. Por lo tanto se obtendría:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{B}. \quad (145)$$

De esta manera habremos obtenido las cuatro ecuaciones de Maxwell en el vacío.

3.5.2. Invarianza gauge. Gauges de Lorentz y de radiación.

El Lagrangiano de Maxwell se mantiene invariante bajo las transformaciones locales siguientes:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad (146)$$

Bajo esta transformación es inmediato ver que $F^{\mu\nu}$ permanece invariante (siempre y cuando $\theta(x)$ sea una función regular), y por tanto el Lagrangiano de Maxwell.

Es importante ver que, debido a esta simetría, el campo $A_\mu(x)$ no es único para describir un campo electromagnético. Podemos usar cualquier función $\theta(x)$ regular para describir el mismo campo electromagnético.

Podemos usar la libertad gauge para fijar una cierta elección de A^μ . En concreto, si queremos que $A^0 = 0$, podemos hacer:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \int^t dt' A_0(\mathbf{x}, t') \quad (147)$$

Esto es así por que, por el teorema fundamental del cálculo, la derivada y la integral se "cancelan", y obtenemos $A'_0 = A_0 - A_0 = 0$.

Ahora podemos hacer otra transformación con θ independiente de t, de manera que la condición anterior se siga cumpliendo:

$$A'_\mu(x) \rightarrow A''_\mu(x) = A'_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad \text{con} \quad \theta(\mathbf{x}) = - \int \frac{d^3 y}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial A'^i(\mathbf{y}, t)}{\partial y^i}. \quad (148)$$

Se puede comprobar que esta función θ no depende, de hecho, de t. Utilizando la ecuación de Maxwell en el vacío y $E^i = -F^{0i} = -\partial_0 A^i$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_i E^i = -\partial_0 \partial_i A^i = 0 \Rightarrow \partial_0 \partial_i A^i = 0$. Observando la definición de θ vemos que $\partial_0 \theta = 0$. Debido a esto se sigue manteniendo la propiedad anteriormente deseada, $A''_0(x) = 0$.

Ahora usando la propiedad:

$$\nabla_x^2 \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (149)$$

podemos ver que (teniendo en cuenta que $A'_\mu = 0$):

$$\partial^\mu A''_\mu(x) = \partial^\mu A'_\mu(x) - \partial^\mu \partial_\mu \theta(x) \Rightarrow \nabla \cdot A'' = \nabla \cdot A' - \nabla^2 \theta = 0 \quad (150)$$

ya que:

$$\nabla^2 \theta = \frac{\partial A'^i}{\partial x^i} = \nabla \cdot A' \quad (151)$$

Por lo que concluimos que $\nabla \cdot A'' = 0$. Renombrando A'' como A , hemos encontrado que existe una

manera de escribir A^μ como:

$$A_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (152)$$

Este es el *gauge de radiación*, y solamente es posible si se cumplen las ecuaciones de Maxwell en el vacío, es decir, si no hay fuentes. Este gauge implica el *gauge de Lorenz*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (153)$$

A partir de la ecuación de movimiento 143, podemos ver que en el gauge de Lorenz:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu = 0, \quad (154)$$

donde podemos distinguir la ecuación de KG sin masa (una por cada componente de A^μ).

Buscamos soluciones de tipo onda plana:

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(k)e^{-ikx} + \epsilon_\mu^*(k)e^{ikx} \quad (155)$$

donde ϵ_μ es el vector de polarización y la solución tiene esta forma por ser A^μ un campo real. Sustituyendo en la ecuación de KG que encontramos antes podemos ver que $k^2 = 0$. A su vez, debido a nuestra elección del gauge, encontramos que $\epsilon_0 = 0$ y $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$. Si por ejemplo elegimos que la dirección de propagación sea $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, entonces $\epsilon^3 = 0$. Por tanto una onda electromagnética que viaja en cierta dirección, tiene dos grados de libertad, representados por $\boldsymbol{\epsilon}$, perpendicular a la dirección de propagación.

Vamos a ver un ejemplo conocido de campo electromagnético, con dos A^μ equivalentes. Sea un observador de una carga e en reposo (respecto a la carga), y a distancia r . El campo de A^μ podría ser $A^\mu = (\frac{e}{4\pi r}, 0)$, que produce el campo magnético de una carga en reposo, precisamente:

$$\vec{E} = -\partial_0 \vec{A} - \nabla A^0 = \frac{e}{4\pi r^2} \hat{u}_r, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0. \quad (156)$$

Por otro lado, como hemos visto en este apartado, podemos elegir un gauge en el que:

$$A'^\mu = (0, -\frac{et}{4\pi r^2} \hat{u}_r) \quad (157)$$

que nos llevarían al mismo campo magnético que antes. La relación entre estos dos campos A^μ es la transformación gauge con $\theta = \frac{et}{4\pi r}$.

3.5.3. El tensor de energía-momento

Usando la ecuación 70 podemos calcular el tensor de energía-momento del Lagrangiano de Maxwell:

$$\theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^2, \quad F^2 \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (158)$$

Como depende de A^μ y no solo de $F^{\mu\nu}$, no es invariante gauge, y además tampoco es simétrico. Aún así, se puede comprobar que para una transformación gauge, las cargas sí que son invariantes gauge.

Si queremos obtener un tensor energía-momento equivalente pero simétrico e invariante, podemos añadir el término $\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)$, ya que cumple que $\partial_\mu\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu) = 0$ (ya que las derivadas parciales son simétricas y el tensor electromagnético es antisimétrico), por lo que también es una cantidad conservada. Es decir:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2 + \partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu) = F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2, \quad (159)$$

Este tensor energía-momento sí es invariante gauge y también simétrico.

Podemos calcular algunas de las cargas conservadas. La energía y el momento espacial, por ejemplo, vendrían dados por:

$$E = \int d^3x T^{00} = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i. \quad (160)$$

Este último es el conocido como vector de Poynting.

3.5.4. Acoplamiento mínimo y no mínimo a la materia

Si queremos añadir una corriente externa $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ las ecuaciones de Maxwell serán entonces:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \iff \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \partial_0 \mathbf{E} + \mathbf{j} \quad (161)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{B} \quad (162)$$

La segunda ecuación no cambia respecto a la anterior ya que $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ siempre debido a la antisimetría de $F^{\mu\nu}$. También por la antisimetría de $F^{\mu\nu}$ y la simetría de las derivadas parciales, podemos ver que $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\nu j^\nu = 0$, es decir, la corriente se conserva.

Podemos escribir estas ecuaciones a partir de la extremización de la acción:

$$S = - \int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right). \quad (163)$$

El término que depende explícitamente de $F^{\mu\nu}$ es invariante gauge. El término $j^\mu A_\mu$ bajo una transformación gauge cambia a $j^\mu A^\mu \rightarrow j^\mu A_\mu - j^\mu \partial_\mu \theta$. Introduciendolo en la acción encontramos que $S \rightarrow S + \int d^4x j^\mu \partial_\mu \theta$. Integrando por partes el segundo término obtenemos que: $\int d^4x \partial_\mu (j^\mu \theta) = \int d^4x \theta \partial_\mu j^\mu + \int d^4x j^\mu \partial_\mu \theta = 0$ por ser un término de frontera, y asumiendo que θ y la corriente son funciones que se van a cero lo suficientemente rápido en el infinito. Sustituyendo este resultado encontramos que $S \rightarrow S - \int d^4x \theta \partial_\mu j^\mu$. De esta manera vemos que si queremos que esta acción sea invariante gauge, se debe cumplir que $\partial_\mu j^\mu = 0$, es decir, que la corriente se conserve.

La invarianza gauge es el principio guía para construir la teoría de las interacciones fundamentales. Estas teorías se conocen como las *teorías gauge*.

Vamos a ver un método general para escribir una acción invariante gauge. Veamos un ejemplo del Lagrangiano de Dirac con un campo electromagnético. Comenzemos por la simetría global $U(1)$. El Lagrangiano de Dirac no es invariante gauge. Considerando la transformación:

$$\Psi \rightarrow e^{iq\theta}\Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow e^{-iq\theta}\bar{\Psi}. \quad (164)$$

Es fácil ver que si la transformación es global, es decir θ constante, el Lagrangiano de Dirac es invariante. Sin embargo, cuando la transformación es local, $\theta = \theta(x)$, el término exponencial no puede salir de la derivada para cancelarse con su inverso proveniente de $\bar{\Psi}$ y entonces el Lagrangiano de Dirac no es invariante bajo estas transformaciones.

Al mismo tiempo, el Lagrangiano de Maxwell sí es invariante bajo transformaciones gauge, como vimos anteriormente. Teniendo esto en cuenta, podemos definir una *derivada covariante* de Ψ de manera que al sustituirla por la derivada parcial, el Lagrangiano de Dirac sea invariante gauge, para esta simetría local. La derivada covariante tendrá la forma:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (165)$$

Entonces es fácil comprobar como bajo una transformación gauge del campo A_μ y una transformación local $U(1)$ del campo Ψ , la derivada covariante de Ψ transforma como:

$$D_\mu \Psi \rightarrow e^{iq\theta} D_\mu \Psi. \quad (166)$$

De esta manera la exponencial se puede cancelar con la exponencial negativa y obtendremos un Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (167)$$

invariante bajo transformaciones $U(1)$ *locales*. El procedimiento general es cambiar las derivadas ∂_μ por derivadas covariantes D_μ . Se dice que hemos promovido la simetría global $U(1)$ a una simetría local, "calibrándola" mediante transformaciones gauge. La teoría se llama entonces una *teoría gauge* y el campo A^μ un *campo gauge*. O más precisamente, el campo A^μ es un campo gauge abeliano o $U(1)$, ya que hemos "gaugeado" (calibrado en español) una simetría $U(1)$.

El lagrangiano de Dirac entonces transformará como

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi - qA_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi. \quad (168)$$

Ahora podemos ver que la electrodinámica de un campo espinorial se obtiene acoplando A^μ a la corriente $\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi$. Así, nuestra teoría ahora es por construcción invariante bajo simetría $U(1)$ local, con θ una función arbitraria y suave de x . Igualmente, si θ es una constante, también sigue simetría global bajo la transformación $\Psi \rightarrow e^{iq\theta}\Psi$ y $A^\mu \rightarrow A^\mu$. Bajo esta transformación global de los campos,

podemos calcular su corriente conservada y su correspondiente carga conservada:

$$j_V^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad Q = \int d^3x \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \int d^3x \Psi^\dagger\Psi. \quad (169)$$

Después de la cuantización de la teoría, se podrá ver que esta carga es la carga eléctrica, en unidades de e , la carga del electrón.

A partir de la acción anterior, o simplemente sustituyendo la derivada por la derivada covariante en la ecuación de Dirac, encontraremos las ecuaciones de movimiento:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0. \quad (170)$$

Esta es la ecuación de Dirac, que describe una partícula de espín $\frac{1}{2}$ cargada interactuando con un campo electromagnético.

Si queremos repetir el método anterior para el Lagrangiano de Klein-Gordon bajo la transformación $U(1)$: $\phi \rightarrow e^{iq\theta}\phi$, de nuevo definimos la derivada covariante como antes $D_\mu = \partial_\mu + iqA^\mu$ y el Lagrangiano de Klein-Gordon para campos complejos será:

$$\mathcal{L}_{KG} = (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi^* + iqA^\mu(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + q^2|\phi|^2 A_\mu A^\mu - m^2\phi^*\phi. \quad (171)$$

Este es el Lagrangiano de la electrodinámica escalar. Encontramos que el campo A^μ se acopla a la corriente conservada calculada en 102.

Notar que no es posible acoplar de esta manera el campo electromagnético A^μ a un campo escalar *real*, ya que bajo la transformación $\phi \rightarrow e^{iq\theta}\phi$ el campo se vuelve complejo a menos que $q = 0$. Tras la cuantización, un campo escalar real describirá partículas sin carga electromagnética.

El acoplamiento al campo electromagnético que se obtiene sustituyendo en el Lagrangiano sin interacción ∂_μ por D_μ se denomina *acoplamiento mínimo*. De otro modo, el acoplamiento se denomina no mínimo.

3.5.5. Primera cuantización de la ecuación de ondas relativista

En el límite no relativista, la ecuación de Dirac en un campo electromagnético externo se reduce a la ecuación de Schrödinger, es decir, $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$, donde H es el Hamiltoniano que contiene la expansión en potencias de la velocidad de la partícula. A posteriori veremos que el tratamiento cuántico de los campos nos dará que el término a primer orden producido por la ecuación de ondas relativista, en primera cuantización, es correcta.

De esta manera podremos examinar el límite no relativista de la ecuación de Dirac, tratándola en la primera cuantización. Así los campos clásicos serán tratados como la función de onda. Aun así, las correcciones a mayor orden no están correctamente predichas por la ecuación de ondas relativista y se necesitará un tratamiento utilizando la Teoría Cuántica de Campos.

La ecuación de Dirac para un electrón de carga $q = e$, con $e < 0$, en un campo electromagnético

externo A_μ es:

$$[i\gamma^\mu D_\mu - m]\Psi = [\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\Psi = 0. \quad (172)$$

Usamos la representación estándar 135, y definimos además:

$$\xi'(\mathbf{x}, t) = e^{imt}\xi(\mathbf{x}, t), \quad \phi'(\mathbf{x}, t) = e^{imt}\phi(\mathbf{x}, t). \quad (173)$$

De esta manera, si las componentes ϕ , ξ tienen una dependencia del tiempo e^{-iEt} , con E la energía relativista, entonces ϕ' y ξ' oscilan como $e^{-iE_{NR}t}$ con $E_{NR} = E - m$ la energía cinética. Entonces la ecuación de Dirac es:

$$(i\partial_0 - eA_0)\phi' = -\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + e\mathbf{A})\xi', \quad (i\partial_0 - eA_0 + 2m)\xi' = -\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + e\mathbf{A})\phi' \quad (174)$$

Aquí nos acercamos al límite no relativista, de manera que $i\partial_0\xi' \ll m\xi'$, $eA_0 \ll m$. Así entonces la segunda ecuación de ecuación 174 podemos aproximarla a primer orden por:

$$\xi' \simeq -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\nabla + e\mathbf{A})\phi'. \quad (175)$$

Introduciendo esta expresión en la primera ecuación de 174, y usando:

$$\sigma^i\sigma^j(i\nabla^i + eA^i)(i\nabla^j + eA^j)\phi' = [(i\nabla + e\mathbf{A})^2 + i\epsilon^{ijk}\sigma^k ie(\nabla^i A^j)]\phi' \quad (176)$$

sabiendo que $\epsilon^{ijk}\nabla^i A^j = (\nabla \times \mathbf{A})^k = B^k$ es el campo magnético y $\mathbf{p} = i\nabla$, encontramos que:

$$i\partial_0\phi' \simeq \left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA_0 \right]\phi'. \quad (177)$$

Vemos entonces que, en el límite no relativista, la ecuación de Dirac se reduce a la ecuación de Schrödinger para las dos componentes del espinor de Weyl ϕ' , con un acoplamiento mínimo al campo gauge A_μ y un término de interacción con el campo magnético \mathbf{B} . El término de la energía debido al campo magnético podemos escribirlo como $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ donde $\boldsymbol{\mu}$ es un momento magnético:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} = \frac{e}{m}\mathbf{S} \quad (178)$$

donde \mathbf{S} es el espín del electrón.

El momento magnético de una partícula cargada con carga e y momento angular \mathbf{L} se escribe como $\boldsymbol{\mu}_L = \frac{e}{2m}\mathbf{L}$. Por esta razón se suele escribir el momento magnético del espín como:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2m}\mathbf{S}, \quad (179)$$

donde g se conoce como la constante giromagnética, o radio giromagnético. Podemos ver como la ecuación de Dirac predice que $g = 2$, mientras que la física no relativista predice $g = 1$.

4. Cuantización de campos escalares libres

4.1. Campos escalares reales (espín 0). Espacio de Fock

Para cuantizar una teoría de campos escalares, las coordenadas $q_i(t)$ son reemplazadas por los campos $\phi(t, \mathbf{x})$, y sus momentos conjugados $p_i(t)$ por los momentos conjugados $\Pi(t, \mathbf{x})$. Interpretamos \mathbf{x} como una etiqueta para distinguir las "coordenadas" (ahora los campos) $\phi(t, \mathbf{x})$ de la teoría.

En mecánica cuántica, en la imagen de Heisenberg, imponíamos que las coordenadas y momentos fuesen operadores que satisficieran $[q^i, p^j] = i\delta^{ij}$, y a la vez $[q^i, q^j] = 0$ y $[p^i, p^j] = 0$ a tiempos iguales. En el caso de los campos, el principio básico para la cuantización canónica es hacer que los campos y sus momentos conjugados, de nuevo en la imagen de Heisenberg, sean operadores satisfaciendo a tiempos iguales:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (180)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (181)$$

$$[\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (182)$$

donde, por ser \mathbf{x} e \mathbf{y} variables continuas, la delta de Kronecker se sustituye por la delta de Dirac.

Ahora consideremos un campo escalar real libre (sin interacción), como el dado en 76. Esta vez, los coeficientes $a_{\mathbf{p}}$ serán promovidos a operadores, y por tanto sus complejo conjugados serán promovidos a los hermítico conjugados de esos operadores, es decir:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) \quad (183)$$

donde $p^0 = E_{\mathbf{p}}$. El momento conjugado será entonces el dado por 77. En este caso:

$$\Pi(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (-i\sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{2}}) (a_{\mathbf{q}} e^{-iqx} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iqx}). \quad (184)$$

Conociendo esto, podemos calcular a partir de 180 que:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad (185)$$

Estas relaciones de conmutación nos recuerdan a las de los operadores creación y destrucción del oscilador armónico, esta vez en la imagen de Schrödinger:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a - a^\dagger) \quad (186)$$

que cumplen las mismas reglas de conmutación (pero en mecánica cuántica "ordinaria"):

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (187)$$

Vemos entonces que las relaciones de conmutación del campo escalar real son equivalentes a las de un conjunto infinito de osciladores armónicos. La única diferencia es un factor de normalización, el volumen del sistema:

$$\lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} = V \quad (188)$$

Construimos ahora el *espacio de Fock* de manera similar a como se hace con el oscilador armónico. $a_{\mathbf{p}}$ será interpretado como el operador creación y su hermítico conjugado el operador destrucción. Entonces definimos el estado $|0\rangle$ como el estado que es aniquilado por todos los operadores destrucción, y normalizamos el estado del vacío con $\langle 0|0\rangle = 1$:

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0. \quad (189)$$

Construimos el estado multipartícula genérico del espacio de Fock aplicando los operadores creación para cada valor del momento de cada partícula al estado del vacío, encontramos entonces que:

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \equiv \sqrt{E_{\mathbf{p}_1}} \dots \sqrt{E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle. \quad (190)$$

Se ha elegido el factor de normalización $\sqrt{E_{\mathbf{p}}}$ debido a que es una normalización invariante. Para comprobar esto, escojamos por simplicidad el estado de una partícula:

$$|\mathbf{p}\rangle = (2E_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (191)$$

Entonces podemos calcular el producto escalar. Usando $[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^\dagger - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}$:

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \langle 0 | a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (192)$$

Podemos comprobar entonces que es invariante Lorentz realizando por ejemplo un boost, y usando:

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} \quad (193)$$

Entonces, bajo un boost en la dirección z:

$$E' = \gamma(E + \beta p_z), \quad p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = \gamma(\beta E + p_z) \quad (194)$$

encontramos que:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') = \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{\gamma(\beta \frac{\partial E}{\partial p_z} + 1)} = \frac{E \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{\gamma(\beta p_z + E)} = \frac{E}{E'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \Rightarrow E' \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') = E \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (195)$$

donde se ha usado $f(x) = p'_z(p_z) = \gamma(\beta E + p_z)$ y $\frac{\partial E}{\partial p_z} = \frac{p_z}{E}$, $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, y por tanto $E \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ es un invariante Lorentz. De esta manera el producto escalar es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Vamos a calcular la energía de un estado multipartícula. Para ello usaremos la ecuación 78 pero en términos de operadores creación y destrucción:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \frac{1}{2} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]) \quad (196)$$

Utilizando la relación de conmutación podemos ver que el segundo término se convierte en la suma de energía de todos los osciladores en el punto 0 en un volumen, ya que $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$. Entonces obtenemos que:

$$E_{vac} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = \frac{V}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \quad (197)$$

y entonces la densidad de energía del vacío:

$$\rho_{vac} = \frac{E_{vac}}{V} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \quad (198)$$

Vemos que para altos valores del momento, $E_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \simeq |\mathbf{p}|$, la integral diverge, y por tanto lo hace densidad de energía. Debido a que estamos interesados en diferencias de energías y no energías en sí, por el momento podemos "eliminar" la energía del punto cero y por tanto:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : \Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \quad (199)$$

donde se ha introducido el *orden normal* que se define como: dado un operador \mathcal{O} , su forma normal ordenada $:\mathcal{O}:$ es escribir todos los operadores de creación a la izquierda de los de destrucción, es decir:

$$: a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger := a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \quad (200)$$

De esta manera el Hamiltoniano se ha obtenido a partir del Hamiltoniano clásico, promoviendo los campos a operadores y aplicando el orden normal.

Según como hemos definido los estados del espacio de Fock hasta ahora, tenemos que la energía

del estado $|0\rangle$ es cero, mientras que la energía del estado multipartícula será:

$$H |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \sqrt{E_{\mathbf{p}_1}} \dots \sqrt{E_{\mathbf{p}_n}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \quad (201)$$

donde se ha usado 190. Aplicando la relación de conmutación $a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}_i}^\dagger = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) + a_{\mathbf{p}_i}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ y la definición del estado vacío encontramos que:

$$H |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = (E_{\mathbf{p}_1} + \dots + E_{\mathbf{p}_n}) |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \quad (202)$$

De igual manera podemos calcular el momento aplicando el orden normal a la definición clásica de 79:

$$P^i = \int d^3x : \theta^{0i} := \int d^3x : \partial_0 \phi \partial^i \phi := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^i a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (203)$$

donde se ha usado que los operadores $a_{\mathbf{p}}$ y $a_{-\mathbf{p}}$ tienen distinta paridad y la definición de la Delta de Dirac:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (204)$$

además de sus propiedades de definición.

Al igual que con el caso del Hamiltoniano, podemos aplicarlo al estado multipartícula:

$$P^i |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = (p_1 + \dots + p_2) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle. \quad (205)$$

De esto podemos deducir que el estado $a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ tiene momento \mathbf{p} , energía $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2}$ y masa m .

Es importante destacar que debido a la conmutatividad de los operadores creación, el estado multipartícula es simétrico bajo intercambio de dos partículas, y por tanto este campo puede describir partículas bosónicas, que siguen la estadística Bose-Einstein.

Además, usando de nuevo el teorema de Noether encontramos la expresión para el momento angular. Si recordamos, los campos escalares no tienen momento de espín, solo momento angular orbital. Por tanto, los cuantos producidos por este campo tendrán espín 0.

De esta manera hemos encontrado una relación predicha por el teorema de espín-estadística, ya que las partículas de espín entero son bosones, y por tanto obedecen la estadística de Bose-Einstein, y sus estados son simétricos bajo intercambio de partículas.

4.2. Campos escalares complejos. Antipartículas

Para un campo escalar complejo, de nuevo convertimos a operadores los coeficientes de la solución de la ecuación de Weyl para campos complejos:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) \quad (206)$$

$$\phi(x)^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} + b_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (207)$$

Imponiendo las mismas relaciones de conmutación que en el caso real llegamos a:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (208)$$

mientras que todos los demás conmutadores ($[a, a]$, $[b, b]$, $[a^\dagger, a^\dagger]$ y $[b^\dagger, b^\dagger]$) son 0.

De manera análoga al campo real, definimos el estado de vacío como aquel que se anula al aplicar cualquier operador destrucción, $a_{\mathbf{p}} |0\rangle = b_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0$. Para construir el estado de Fock, aplicamos los operadores creación $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ a este estado.

Podemos calcular el valor del Hamiltoniano y el momento espacial como:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}), \quad P^i = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^i (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}), \quad (209)$$

donde se ha usado el orden normal. Vemos como los cuantos de este campo escalar están dados por dos especies de partículas con la misma masa, las creadas por los operadores $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $b_{\mathbf{p}}^\dagger$.

Finalmente, recordemos como encontrábamos la carga conservada debido a simetrías bajo transformaciones del grupo $U(1)$ como vimos en el capítulo anterior, solo que esta vez los campos son operadores como ya sabemos:

$$Q_{U(1)} = i \int d^3x \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}) \quad (210)$$

Pero recordemos que a esta expresión hay que añadirle el orden normal, por lo que:

$$Q_{U(1)} = i \int d^3x : \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}). \quad (211)$$

Es muy importante notar ahora que el operador $a^\dagger a$ es el operador número del oscilador armónico. Por tanto, vemos que la carga $U(1)$ es la resta de número de cuantos creados por $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ menos los creados por $b_{\mathbf{p}}^\dagger$, integrado a todos los momentos. Podemos decir que el estado $a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q_{U(1)} = 1$ y el estado $b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ tiene carga $Q_{U(1)} = -1$. Interpretamos así las soluciones de KG:

1. Al cuantizar la teoría los coeficientes que acompañan la solución de "energía positiva" se convierten en operadores destrucción de su cuanto, la partícula de la teoría. Mientras que el coeficiente de la solución de "energía negativa" se convierte en el operador creación de su antipartícula.
2. De esta manera, los cuantos de la teoría serán partículas de momento p , masa m , espín nulo y cargas opuestas.
3. En el caso de un campo real escalar se cumple $a_{\mathbf{p}} = b_{\mathbf{p}}$, y por tanto la partícula es su propia antipartícula. Esta es neutra bajo cualquier transformación de simetría del grupo $U(1)$.

5. Teoría de perturbaciones y diagramas de Feynman. Campos de espín 0 con interacción y cálculo de scatterings

Hemos estudiado la cuantización de campos libres de espín 0. Ahora vamos a ver que ocurre cuando introducimos un término de interacción. Para ello, vamos a estudiar los campos a partir de teoría de perturbaciones, por lo que usaremos el formalismo Hamiltoniano, al igual que en mecánica cuántica "normal" (primera cuantización). Tengamos el Hamiltoniano genérico:

$$H = H_0 + H_{int} \quad (212)$$

donde H_0 es el Hamiltoniano sin interacción y $H_{int} = \int d^3x \mathcal{H}_{int} = - \int d^3x \mathcal{L}_{int}$ (solo si el Lagrangiano no depende de las derivadas de los campos, por la definición de la transformada de Legendre ya que los momentos conjugados serían 0).

A modo de ejemplo vamos a realizar el estudio con el siguiente Hamiltoniano perturbativo:

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (213)$$

con λ una constante de acoplamiento adimensional, la cuál para hacer teoría de perturbaciones la supondremos muy pequeña, es decir, $\lambda \ll 1$. Nuestro objetivo con esta teoría será calcular la probabilidad de transición en un proceso de scattering, y para ello introduciremos la *matriz S*.

5.1. Matriz S

En la imagen de Schrödinger se considera que un estado $|a\rangle(t)$ depende del tiempo, el cuál para un tiempo inicial t_i es autoestado de un CCOC cuyos autovalores etiquetamos conjuntamente como $|a\rangle \equiv |a\rangle(t_i)$. Similarmente tendremos un estado $|b\rangle \equiv |b\rangle(t_f)$ que en el estado final t_f tendrá autovalores etiquetados por b.

Como sabemos de Mecánica Cuántica, el estado evolucionará en el tiempo en la imagen de Schrödinger como $|a\rangle(t) = e^{-iH(t-t_i)} |a\rangle$ y por tanto la amplitud de probabilidad de que el estado inicial $|a\rangle$ haya evolucionado en el tiempo final a $|b\rangle$ será:

$$\langle b | e^{-iH(t_f-t_i)} | a \rangle. \quad (214)$$

Si ahora aplicamos el límite $t_f - t_i \rightarrow \infty$ al operador evolución $e^{-iH(t_f-t_i)}$ donde H es el Hamiltoniano de la teoría, obtenemos la matriz S. La matriz S es un operador que mapea el estado inicial al final: $|a\rangle \rightarrow S |a\rangle$. Entonces la amplitud de scattering será:

$$\langle b | S | a \rangle = \lim_{(t_f-t_i) \rightarrow \infty} \langle b | e^{-iH(t_f-t_i)} | a \rangle. \quad (215)$$

Es importante notar que S es puramente imaginario, por lo que es unitario: $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$.

Vamos a definir la matriz T en términos de la matriz S, teniendo en cuenta que $SS^\dagger = 1$:

$$\begin{aligned} S &= 1 + iT; \quad SS^\dagger = 1 \Rightarrow \\ TT^\dagger &= i(T^\dagger - T). \end{aligned} \quad (216)$$

La imagen de Heisenberg es especialmente útil en Teoría Cuántica de Campos, donde los operadores son los campos. Entonces, según esta imagen, como son los operadores y no los estados los que evolucionan en el tiempo, los campos cuánticos dependerán tanto del tiempo como de las coordenadas espaciales, y no solo de estas últimas. Por tanto, la imagen de Heisenberg parece más natural desde el punto de vista de la covariancia Lorentz.

Como en la imagen de Heisenberg los estados no deben depender del tiempo, podremos aplicar el inverso del operador temporal, e^{iHt} de manera que no tengan esta dependencia. Entonces, si tenemos un estado en la imagen de Schrödinger $|a\rangle(t)$, en la imagen de Heisenberg será $|a\rangle_H = e^{iHt}|a\rangle(t)$. Similarmente, si queremos un operador A (independiente del tiempo en la imagen de Schrödinger), en la imagen de Heisenberg, hay que aplicarle el operador evolución temporal, para que dependa del tiempo. Como A es un operador, bajo la evolución temporal transformará como $A_H(t) = e^{iHt}Ae^{-iHt}$.

Entonces, para un estado en la imagen de Schrödinger en el tiempo inicial t_i , $|a\rangle(t_i) = |a\rangle$, y similarmente con el estado $|b\rangle$ en el tiempo final, escribiremos:

$$|a, t_i\rangle_H = e^{iHt_i}|a\rangle, \quad |b, t_f\rangle_H = e^{iHt_f}|b\rangle. \quad (217)$$

Entonces, en términos de estados en la imagen de Heisenberg, el elemento de 214 se escribirá como:

$$\lim_{(t_f - t_i) \rightarrow \infty} \langle b, t_f | a, t_i \rangle \quad (218)$$

5.2. La fórmula de reducción LSZ

Vamos a considerar una única especie de partículas neutras escalares, de manera que sus estados solo están etiquetados por su momento. Se puede generalizar a partículas con espín. Consideremos el elemento genérico de la matriz S (obviando ya los límites de los tiempos a ∞ y $-\infty$):

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; t_f | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m; t_i \rangle. \quad (219)$$

Vamos a tratar de relacionar este elemento de matriz con el valor esperado de algún operador en el estado de vacío.

Comenzamos "invirtiendo" la ecuación del campo escalar real libre 183. De esta manera encontramos:

$$i \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{libre} = a_k \sqrt{2E_{\vec{k}}}, \quad -i \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{libre} = a_k^\dagger \sqrt{2E_{\vec{k}}}. \quad (220)$$

Estas igualdades se pueden comprobar fácilmente integrando sobre d^3x , aplicando la ecuación 204 e integrando sobre d^3p . Es importante notar que estas igualdades solo se cumplen si el campo es libre, pues provienen de la solución de la ecuación de Klein-Gordon para una partícula escalar libre.

En un proceso de scattering, esperamos que en el tiempo $t \rightarrow -\infty$ y en el tiempo $t \rightarrow \infty$, las partículas sean libres, suponiendo que las partículas se han alejado lo suficiente y que el término de interacción decae lo suficientemente rápido con la distancia. Esto se puede escribir como:

$$\phi(x) \rightarrow Z^{1/2} \phi_{in}(x), \quad \phi(x) \rightarrow Z^{1/2} \phi_{out}(x) \quad (221)$$

donde ϕ_{in} y ϕ_{out} son los campos libres antes y después de la interacción, y Z es un número complejo constante, que se denominará factor de renormalización de la función de onda.

Debido a que las ecuaciones 220 son independientes del tiempo (aunque el integrando no lo sea), sirven para $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$. Introduciendo, por tanto, los campos libres ϕ_{in} y ϕ_{out} en la segunda ecuación de 220, definimos así los operadores creación actuando en los estados iniciales y finales:

$$a_k^{\dagger, in} \sqrt{2E_{\vec{k}}} = -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi, \quad (222)$$

$$a_k^{\dagger, out} \sqrt{2E_{\vec{k}}} = -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi \quad (223)$$

Entonces, podemos escribir, teniendo en cuenta cómo actúa el operador creación en los estados:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; t_f | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m; t_i \rangle = \\ & \sqrt{2E_{\vec{k}_1}} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; t_f | a_{k_1}^{\dagger, in} | \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m; t_i \rangle = \\ & -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x e^{-ik_1x} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n; t_f | \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi | \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m; t_i \rangle. \end{aligned} \quad (224)$$

Se tratará de eliminar todas las partículas desde el estado inicial al final.

Antes de continuar, se debe definir el producto de orden temporal, o T-producto, como:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \begin{cases} \phi(y)\phi(x), & y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y), & y^0 < x^0 \end{cases} \quad (225)$$

o equivalentemente usando la función escalón, o de Heaviside:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) + \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y). \quad (226)$$

Realizando un proceso iterativo para eliminar todas las partículas iniciales y finales, quedándonos únicamente con el valor esperado del vacío de alguna combinación de campos, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; t_f | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m; t_i \rangle = \\ & = (iZ^{-1/2})^{n+m} \int \prod_{i=1}^m d^4x_i \prod_{j=1}^n d^4y_j e^{(i \sum_{j=1}^n p_j y_j - i \sum_{i=1}^m k_i x_i)}. \\ & \cdot (\square_{x_1} + m^2) \cdot \dots \cdot (\square_{y_n} + m^2) \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(y_n)\} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (227)$$

El T-producto ordena los $n + m$ campos de manera que los de tiempos mayores se sitúan más a la izquierda. Nótese que para crear todos los estados iniciales y todos los finales aplicamos $a_k^{\dagger,(\text{in})}$ y $a_k^{\dagger,(\text{out})}$ al mismo estado $|0\rangle$ de vacío, respectivamente. Este vacío se denomina vacío perturbativo.

Como explicamos en el capítulo anterior, $\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; t_f | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t_i \rangle$ es el elemento de la matriz S en la representación de Heisenberg. Sin embargo, en la representación de Schrödinger, este elemento se escribiría $\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m \rangle$.

Teniendo en cuenta que imponemos que ningún estado inicial coincida con ningún estado final para llegar al resultado anterior, el término de la identidad de $S = 1 + iT$ se anula. Por tanto, en la imagen de Schrödinger:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n \rangle = \\ & = (iZ^{-1/2})^{n+m} \int \prod_{i=1}^m d^4 x_i \prod_{j=1}^n d^4 y_j \exp\left\{i \sum_{j=1}^n p_j y_j - i \sum_{i=1}^m k_i x_i\right\} \cdot \\ & \cdot (\square_{x_1} + m^2) \cdot \dots \cdot (\square_{y_n} + m^2) \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(y_n)\} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (228)$$

Ahora introducimos la función de Green de N puntos:

$$G(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_N)\} | 0 \rangle. \quad (229)$$

La definimos en función de su transformada de Fourier \tilde{G} :

$$G(x_1, \dots, x_N) = \int \prod_{i=1}^N \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} e^{-i \sum_{i=1}^N x_i k_i} \tilde{G}(k_1, \dots, k_N) \quad (230)$$

También usaremos:

$$(\square_{x_j} + m^2)G(x_1, \dots, x_N) = - \int \prod_{i=1}^N \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} (k_j^2 - m^2) e^{-i \sum_{i=1}^N x_i k_i} \tilde{G}(k_1, \dots, k_N). \quad (231)$$

Usando las propiedades anteriores, se puede encontrar que 228 es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^m \int d^4 x_i e^{-ik_i x_i} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j e^{ip_j y_j} \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_m) \phi(y_1) \dots \phi(y_n)\} | 0 \rangle = \\ & = \left(\prod_{i=1}^m \frac{i\sqrt{Z}}{k_i^2 - m^2} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^n \frac{i\sqrt{Z}}{p_j^2 - m^2} \right) \cdot \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m \rangle. \end{aligned} \quad (232)$$

Esta ecuación 232, es la fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ).

Hemos encontrado entonces una relación entre la amplitud de scattering y el valor esperado del vacío de un producto de campos ordenados por el tiempo. Ahora veremos como podemos trabajar esta ecuación orden por orden en teoría de perturbaciones.

5.3. Expansión en teoría de perturbaciones

En la teoría clásica, el sistema vendría descrito por un Lagrangiano $L = L_0 + L_{int}$, que correspondería con el Hamiltoniano $H = H_0 + H_{int}$. Al introducir el término de interacción, la solución a las ecuaciones ya no va a ser una combinación lineal de ondas planas (como lo sería si únicamente estuviesen L_0 y H_0), y sus coeficientes ya no pueden ser interpretados en la teoría cuántica como operadores de creación y destrucción. Por tanto, vamos a intentar describir los campos en función de unos campos libres, que llamaremos ϕ_I y se dirá que están en la *imagen de interacción*. Estos campos ϕ_I evolucionarán en el tiempo únicamente como dicta H_0 . Por tanto, teniendo el campo para un valor t_0 , $\phi_I(t_0, \mathbf{x})$, su evolución en el tiempo vendrá dada por:

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi_I(t_0, \mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (233)$$

Este campo que evoluciona con H_0 se le conoce como campo de la imagen de interacción.

Como es un campo libre, podemos escribirlo como combinación lineal de ondas planas con los operadores creación y destrucción usuales como:

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}(a_{\mathbf{p}}e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}). \quad (234)$$

Vamos a determinar los campos de Heisenberg ϕ en términos de ϕ_I . Recordemos que los campos en la imagen de Heisenberg evolucionan como:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \quad (235)$$

Si introducimos ahora la definición de $\phi_I(t, \mathbf{x})$ en términos de $\phi_I(t_0, \mathbf{x})$, estableciendo que a tiempo t_0 el campo en la imagen de interacción ϕ_I sea el mismo que el campo ϕ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}[e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)}]e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t, \mathbf{x})e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (236)$$

Entonces ahora sabemos como evoluciona el campo en la imagen de Heisenberg en función del campo en la imagen de interacción. Si definimos un operador temporal $U(t, t_0)$, podemos escribir la evolución temporal del campo como:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^\dagger(t, t_0)\phi_I(t, \mathbf{x})U(t, t_0), \quad U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \quad (237)$$

Hagamos ahora la derivada respecto del tiempo del operador temporal. Hay que tener en cuenta que el Hamiltoniano conmuta con la exponencial de él mismo, y que $H - H_0 = H_{int}$.

$$i\frac{\partial U}{\partial t} = e^{iH_0(t-t_0)}H_{int}e^{-iH(t-t_0)} = e^{iH_0(t-t_0)}H_{int}e^{-iH_0(t-t_0)}U(t, t_0). \quad (238)$$

Si ahora definimos el Hamiltoniano en la imagen de interacción, H_I , como:

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (239)$$

Podemos resolver la ecuación diferencial (con condición de contorno $U(t_0, t_0) = 1$) para obtener:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \\ & + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3). \end{aligned} \quad (240)$$

Vamos a comprobar que este resultado es solución de la ecuación anterior. Si derivamos con respecto a t , el resultado de cada término del sumatorio es el término anterior multiplicado por $-iH_I(t)$. Es decir $\frac{\partial U}{\partial t} = -iH_I(t)U$ y por tanto cumple la ecuación. Si nos fijamos, todos los factores de H_I están ordenados en el tiempo. Teniendo en cuenta que $t_0 > t_1 > t_2 \dots$ y usando el producto ordenado en el tiempo T , podemos escribir el resultado de la ecuación diferencial como

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_2)\} + \dots = T\{e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'}\}. \quad (241)$$

Vamos a tratar de calcular la función de Green de n-puntos:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle \quad (242)$$

donde en el último paso se ha impuesto que los x_i estén ordenados en el tiempo, es decir, $t_1 > t_2 > \dots > t_n$.

Usando la ecuación 237 podemos escribir esta función como:

$$\langle 0 | U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_0) U^\dagger(t_2, t_0) \phi_I(x_2) U(t_2, t_0) \dots U^\dagger(t_n, t_0) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0) | 0 \rangle. \quad (243)$$

Ahora usaremos que $U^\dagger(t_0, t_1) = U(t_1, t_0)$ pues 241 conjugado cambia el signo y por tanto invierte los límites de la integral. Además, se cumple que $U(t, t_0) U(t_0, t_2) = U(t, t_2)$, ya que:

$$i \frac{\partial}{\partial t} [U(t, t_0) U(t_0, t_2)] = H_I(t) U(t, t_0) U(t_0, t_2). \quad (244)$$

Resolviendo esta ecuación para $U(t_0, t_0) = 1 \Rightarrow [U(t, t_0) U(t_0, t_2)]|_{t=t_0} = U(t_0, t_2)$, obtenemos

$$U(t, t_0) U(t_0, t_2) = T\{e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'}\} \quad (245)$$

que no es más que $U(t, t_2)$ por la ecuación 241.

Entonces, utilizando estas propiedades tenemos que la función es:

$$\langle 0 | U^\dagger(t_1, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) U(t_2, t_3) \dots U(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, t_0) | 0 \rangle. \quad (246)$$

Añadimos ahora un término $t \gg t_0 > t_1 > \dots > t_n \gg -t$. Usaremos que $U(t_n, -t)U(-t, t_0) = U(t_n, t_0)$ y que $U^\dagger(t_1, t_0) = U(t_0, t_1) = U(t_0, t)U(t, t_1) = U^\dagger(t, t_0)U(t, t_1)$ y llegaremos a:

$$\langle 0 | U^\dagger(t, t_0) [U(t, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) U(t_2, t_3) \dots U(t_{n-1}, t_n) \phi_I(x_n) U(t_n, -t)] U(-t, t_0) | 0 \rangle \quad (247)$$

donde el término entre corchetes está ordenado en el tiempo, por lo que podemos introducir un T-producto:

$$\langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \{ [\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) U(t, t_1) U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) \dots U(t_{n-1}, t_n) U(t_n, -t)] \} U(-t, t_0) | 0 \rangle. \quad (248)$$

Ahora podemos usar que $U(t, t_1)U(t_1, t_2)U(t_2, t_3)\dots U(t_{n-1}, t_n)U(t_n, -t) = U(-t, t) = T\{e^{-i\int_{-t}^t H_I(t')dt'}\}$, y por tanto:

$$\langle 0 | U^\dagger(t, t_0) T \{ [\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) e^{-i\int_{-t}^t H_I(t')dt'}] \} U(-t, t_0) | 0 \rangle \quad (249)$$

donde el T-producto puede salirse ya que está dentro de otro T-producto y al final siempre va a quedar ordenado temporalmente.

Si ahora elegimos que $t_0 = -t$ y que $t \rightarrow \infty$, entonces $U(-t, t_0) = 1$ y $U^\dagger(t, t_0) \rightarrow U^\dagger(\infty, -\infty)$. Debemos darnos cuenta de que $\langle 0 | U^\dagger(\infty, -\infty)$ es el complejo conjugado de $U(\infty, -\infty) | 0 \rangle$. Si el estado de vacío es estable, tras aplicar el operador evolución temporal desde $-\infty$ a ∞ , el resultado debería seguir siendo el vacío. Es importante tener en cuenta que, aunque el estado físico sea el mismo, el estado cuántico puede haber cambiado una fase, como sabemos de mecánica cuántica:

$$U(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{i\alpha} | 0 \rangle. \quad (250)$$

Despejando la fase de la ecuación anterior y utilizando 241:

$$e^{i\alpha} = \langle 0 | U(\infty, -\infty) | 0 \rangle = \langle 0 | T \{ e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_I(t')dt'} \} | 0 \rangle. \quad (251)$$

Por tanto su conjugado será su inverso y finalmente encontramos que la función de Green que aparece en la fórmula de reducción LSZ es:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ [\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_I(t')dt'}] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_I(t')dt'} \} | 0 \rangle}. \quad (252)$$

Usando la definición de densidad Hamiltoniana podemos escribir:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ [\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) e^{-i\int \mathcal{H}_I d^4x}] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-i\int \mathcal{H}_I d^4x} \} | 0 \rangle}. \quad (253)$$

Entonces ya podemos calcular la parte izquierda de la fórmula LSZ en función de los campos libres ϕ_I .

También es importante notar que la dependencia funcional de $\mathcal{H}_I(\phi_I)$ es la misma que la de

$\mathcal{H}_{int}(\phi)$. Lo podemos comprobar para el potencial cuártico de la introducción:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_I(t) &= e^{iH_0(t-t_0)} \left(\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) e^{-iH_0(t-t_0)} = \\
&= \frac{\lambda}{4!} [e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)}] \cdot [e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)}] \cdot \\
&\quad [e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)}] \cdot [e^{iH_0(t-t_0)} \phi e^{-iH_0(t-t_0)}] = \\
&= \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4.
\end{aligned} \tag{254}$$

Ahora, para computar la función de Green en potencias de $\mathcal{H}_I(\phi_I)$, usaremos una técnica basada en el teorema de Wick y los diagramas de Feynman, que harán este cálculo más sencillo.

5.4. El propagador de Feynman

Podemos comenzar el cálculo usando dos únicos campos que interactúan entre sí, a orden cero, es decir, la exponencial es aproximadamente 1. Calcularemos el término $\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} | 0 \rangle$.

En teoría de perturbaciones siempre se usa el campo en la imagen de interacción ϕ_I , por tanto, a partir de ahora *se omitirá el subíndice I*, y nos referiremos a ϕ_I como ϕ . El campo que evoluciona con el tiempo con el Hamiltoniano completo no se usará en teoría de perturbaciones.

Vamos a separar el campo ϕ en sus componentes de creación y aniquilación, usando 234:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad \text{donde} \tag{255}$$

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_p e^{-ipx}, \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_p^\dagger e^{ipx} \tag{256}$$

donde ϕ^- es la parte de creación y ϕ^+ la de destrucción.

Por tanto, se cumple que $\phi^+(x) | 0 \rangle = 0$ y $\langle 0 | \phi^-(x) = 0$. Teniendo en cuenta esto y considerando que $x^0 > y^0$:

$$\begin{aligned}
T\{\phi(x)\phi(y)\} &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) = \\
&= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \\
&=: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(x), \phi^-(y)].
\end{aligned} \tag{257}$$

donde hemos reintroducido el orden normal, (donde todos los operadores creación se sitúan a la izquierda y los destrucción a la derecha). De manera similar, cuando $y^0 > x^0$ obtenemos $T\{\phi(x)\phi(y)\} =: \phi(x)\phi(y) : + [\phi^+(y), \phi^-(x)]$. En conjunto podemos escribir:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} =: \phi(x)\phi(y) : + D(x-y), \tag{258}$$

donde

$$D(x-y) = \theta(x^0 - y^0) [\phi^+(x), \phi^-(y)] + \theta(y^0 - x^0) [\phi^+(y), \phi^-(x)]. \tag{259}$$

Debemos darnos cuenta de que el valor esperado de $: \phi(x)\phi(y) :$ se anula, ya que siempre

actúa algún operador destrucción sobre un ket o un bra sobre un operador creación. Además, como sabemos, el conmutador de a_p y a_p^\dagger es un número complejo, por tanto $D(x - y)$ es también un número complejo y se cumple que:

$$\langle 0 | D(x - y) | 0 \rangle = D(x - y) \langle 0 | 0 \rangle = D(x - y). \quad (260)$$

Por tanto obtenemos el término conocido como *propagador de Feynman*:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = D(x - y) \quad (261)$$

Si desarrollamos el propagador de Feynman obtenemos:

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\theta(x^0 - y^0) e^{-i(x-y)p} + \theta(y^0 - x^0) e^{i(x-y)p}). \quad (262)$$

A partir de él, podemos escribir este resultado como:

$$D(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i(x-y)p}, \quad (263)$$

donde $\epsilon \rightarrow 0^+$. Esto es debido a que podemos reescribir esta ecuación como:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-i(x^0 - y^0)p^0} \quad (264)$$

donde $E_{\vec{p}} = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Podemos resolver la integral en p^0 en el plano complejo. Se añade el factor $i\epsilon$ para desviar ligeramente los polos de la recta real. De esta manera los polos son $\pm p^0 \simeq E_{\vec{p}}(1 - i\epsilon/(2E_{\vec{p}}^2))$, realizando el desarrollo de la raíz. Es decir, los polos que estarían en $p^0 = \pm E_{\vec{p}}$ serían desplazados de la recta real como en la figura 1a

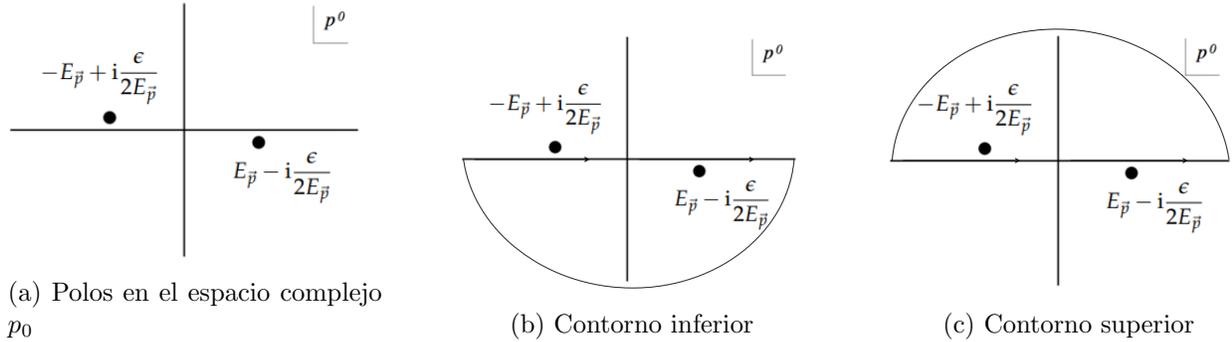


Figura 1: Distintas maneras de rodear los polos en el plano p_0 . Ref. [4]

Podemos calcular esta integral de dos maneras en el plano complejo. Si realizamos el contorno

en la parte inferior (figura 1b), el resultado de la integral de contorno es:

$$\oint \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \simeq \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}}. \quad (265)$$

Si ahora escribimos que esta integral es igual a la integral en la parte inferior del contorno, más la integral de R a -R, y hacemos tender a infinito:

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_C \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} + \int_{-R}^R \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \right] \end{aligned} \quad (266)$$

donde C es el semicírculo inferior y en la segunda integral p_0 vuelve a ser una variable real. Escribimos $p^0 = Re^{i\theta}$ para resolver la integral sobre C:

$$\int_0^{-\pi} \frac{d\theta}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-iR(\cos\theta + i\sin\theta)(x^0 - y^0)}. \quad (267)$$

Por tanto, para que esta integral tienda a 0 cuando hagamos R a infinito, se debe cumplir que $x^0 - y^0 > 0$. En ese caso tenemos como resultado que:

$$\oint \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}}. \quad (268)$$

Si realizamos la misma operación sobre el punto superior, obtendremos que si $y^0 - x^0 > 0$:

$$\oint \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \frac{e^{iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}}. \quad (269)$$

Por tanto tendremos dos resultados según $x^0 - y^0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \frac{e^{-iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad \text{si } x^0 - y^0 > 0, \quad (270)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{(2\pi)} \frac{i}{(p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \frac{e^{iE_{\vec{p}}(x^0 - y^0)}}{2E_{\vec{p}}}, \quad \text{si } x^0 - y^0 < 0, \quad (271)$$

que sustituyendo en 264, obtendríamos:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \quad \text{si } x^0 - y^0 > 0, \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{ip(x-y)} \quad \text{si } y^0 - x^0 > 0, \quad (272)$$

donde se ha realizado el cambio $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ en la segunda integral. Si nos fijamos, estas dos integrales no son más que 262. Por tanto se ha demostrado la equivalencia.

En la ecuación 263, podemos extraer el propagador en el espacio de momentos:

$$\tilde{D}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (273)$$

5.5. Teorema de Wick y diagramas de Feynman

El teorema de Wick nos permite reducir el valor esperado $\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)\}|0\rangle$ a una combinación de propagadores de Feynman. Queremos encontrar ahora el producto ordenado temporal de n campos $\phi(x_i) = \phi_i$.

El teorema de Wick establece que $T\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ es igual al producto ordenado $:\phi_1\dots\phi_n:$ más todas las posibles combinaciones de orden normal y *contracciones* de los campos, donde se define la contracción de dos campos ϕ_1 y ϕ_2 como el propagador de Feynman $D(x_1 - x_2) \equiv D_{12}$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = & :\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: + D_{12} : \phi_3\phi_4 : + D_{13} : \phi_2\phi_4 : + \\ & + D_{14} : \phi_2\phi_3 : + D_{23} : \phi_1\phi_4 : + D_{24} : \phi_1\phi_3 : + D_{34} : \phi_1\phi_2 : + \\ & + D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23} \end{aligned} \quad (274)$$

La demostración procede por inducción. Sabemos que se cumple para $n=2$ (propagador de Feynman). Entonces suponemos que es cierto para $n - 1$ campos, y se realiza el proceso de inducción.

Si tomamos el valor esperado del estado de vacío, de nuevo solo los términos con contracciones sobrevivirán, ya que los términos con un orden normal darán 0. Siguiendo el ejemplo:

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23} \quad (275)$$

A orden 0, cuando no hay interacciones, solo necesitamos el término anterior (en este ejemplo concreto de 4 campos). La interpretación física es la siguiente. Si vemos $D(x_1 - x_2)$ como la amplitud de la propagación de una partícula en el espacio-tiempo del punto x_1 al x_2 , entonces $D(x_1 - x_2)D(x_3 - x_4)$ es la amplitud del proceso en el que una partícula va de x_1 a x_2 y otra de x_3 a x_4 , sin interactuar porque estamos a orden cero, es decir, la exponencial de 253 se aproxima a 1. Podemos relacionar este término con el diagrama de Feynman en el espacio de posiciones 2.



Figura 2: Diagrama de Feynman representando $D(x_1 - x_2)D(x_3 - x_4)$. Ref. [2]

Si en vez de quedarnos a primer orden en la expansión de la exponencial mencionada anterior-

mente, continuamos a órdenes mayores, esto dará lugar a diagramas de Feynman menos sencillos y que contengan términos de interacción. A continuación realizaremos una serie de cálculos para sumarizar todas las reglas para calcular estos términos en las conocidas como reglas de Feynman.

5.5.1. Scattering 2→2

Consideremos el proceso de scattering de 2 partículas en el estado inicial a otras 2 partículas en el final bajo $\mathcal{H}_I = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$. La fórmula LSZ en este caso será, en la imagen de interacción:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2}\right) \left(\prod_{j=1}^2 \frac{i\sqrt{Z}}{k_j^2 - m^2}\right) \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = \\ & = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \cdot \frac{\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\phi^4}\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T\{e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\phi^4}\} | 0 \rangle}. \end{aligned} \quad (276)$$

Vamos a comenzar con el orden 0 en teoría de perturbaciones e iremos aumentando el orden.

Orden cero: En ausencia de interacción, el denominador es 1, mientras que el numerador es:

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle = \\ & = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} (D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}). \end{aligned} \quad (277)$$

Podemos realizar el cambio de variable:

$$x = x_1 - x_2, \quad y = x_3 - x_4 \quad (278)$$

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad Y = \frac{x_3 + x_4}{2} \quad (279)$$

donde se cumple que $dx_1 dx_2 = dx DX$ y $dx_3 dx_4 = dy dY$. Entonces:

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} D_{12}D_{34} = \\ & = \int d^4x d^4X d^4y d^4Y e^{i[(p_1 + p_2)X + (p_1 - p_2)\frac{x}{2} - (k_1 + k_2)Y - (k_1 - k_2)\frac{y}{2}]} D(x)D(y) = \\ & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{k_1^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (280)$$

donde se ha tenido en cuenta que el propagador de Feynman en el espacio de momentos es la transformada de Fourier del propagador en el espacio de posiciones:

$$\tilde{D}(p_1 - p_2) = \int d^4x D(x) e^{i(p_1 - p_2)x} = \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon}; \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (281)$$

y también se ha tenido en cuenta la paridad de $\tilde{D}(p)$ y las propiedades de la delta de Dirac.

Las otras dos integrales son iguales solo que cambiando $x_2 \longleftrightarrow x_3$ y por tanto $p_2 \longleftrightarrow -k_1$ para

la segunda integral, y $x_2 \longleftrightarrow x_4$ y por tanto $p_2 \longleftrightarrow -k_2$. Por lo que en conjunto tendremos:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1+p_2x_2-k_1x_3-k_2x_4)} \langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle = \\
& (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{k_1^2 - m^2} + \\
& + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - k_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 - k_2) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \\
& (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - k_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 - k_1) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{k_1^2 - m^2}.
\end{aligned} \tag{282}$$

Entonces hemos encontrado dos polos por cada sumando en este último resultado. Sin embargo, estos no son suficientes para cancelar los cuatro polos que surgen en el lado izquierdo de 276, cuando establecemos que $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda^4)$. Por tanto el resultado final es:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = -(2\pi)^8 (p_2^2 - m^2) (k_2^2 - m^2) \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \delta^{(4)}(k_1 + k_2) \tag{283}$$

que es igual a 0 cuando las masas están "on-shell" ($p^2 = m^2$), es decir, finalmente:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = 0 \quad (\text{a orden } 0). \tag{284}$$

Por tanto, a orden cero (sin interacción), la amplitud de scattering es 0, como se podía esperar ya que las partículas no interactúan. Este resultado es general todos los casos de scattering $n \rightarrow m$. Es decir, los diagramas de Feynman desconexos no contribuyen a la amplitud de scattering, debido a que no proveen suficientes polos como para cancelarse entre sí con la fórmula LSZ.

Primer orden: Si expandimos la exponencial de 276 a primer orden, e ignorando por el momento el denominador, la ecuación LSZ a primer orden será:

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{i=1}^2 \frac{i}{p_i^2 - m^2} \right) \left(\prod_{j=1}^2 \frac{i}{k_j^2 - m^2} \right) \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = \\
& = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1+p_2x_2-k_1x_3-k_2x_4)} \cdot \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right) \int d^4x \langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi^4(x)\} | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{285}$$

Donde el orden cero se anula, ya que como hemos visto antes los diagramas desconexos se anulan. Los únicos diagramas conexos se obtienen contrayendo cada uno de los 4 $\phi(x_i)$ con uno de los cuatro ϕ . Como hay 4! posibles contracciones de este tipo (el ϕ_1 con uno de los cuatro ϕ , el ϕ_2 con uno de los tres ϕ restantes, el ϕ_3 con uno de los dos ϕ y el ϕ_4 con el ϕ restante):

$$\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi^4(x)\} | 0 \rangle = 4! D(x_1 - x) D(x_2 - x) D(x_3 - x) D(x_4 - x). \tag{286}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 d^4x e^{i(p_1x_1+p_2x_2-k_1x_3-k_2x_4)}(-i\lambda)D(x_1-x)D(x_2-x)D(x_3-x)D(x_4-x).$$

Realizando el cambio de variable $y_i = x_i - x$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 d^4x e^{i(p_1(y_1+x)+p_2(y_2+x)-k_1(y_3+x)-k_2(y_4+x))}(-i\lambda)D(y_1)D(y_2)D(y_3)D(y_4) = \\ & (-i\lambda) \int d^4y_1 e^{ip_1y_1} D(y_1) \int d^4y_2 e^{ip_2y_2} D(y_2) \int d^4y_3 e^{-ik_1y_3} D(y_3) \int d^4y_4 e^{-ik_2y_4} D(y_4) \cdot \\ & \cdot \int d^4x e^{i(p_1+p_2-k_1-k_2)x} = \\ & -i\lambda \tilde{D}(p_1)\tilde{D}(p_2)\tilde{D}(-k_1)\tilde{D}(-k_2)\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2) \cdot (2\pi)^4 = \\ & -i\lambda \prod_{i=1}^2 \frac{i}{p_i^2 - m^2} \prod_{j=1}^2 \frac{i}{k_j^2 - m^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2). \end{aligned}$$

Por tanto, introduciendolo en la ecuación LSZ, y teniendo en cuenta que es a orden $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \quad (287)$$

Podemos representar el diagrama de Feynman de este caso como en la figura 3.

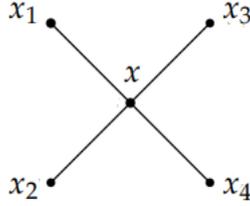


Figura 3: Diagrama de Feynman en el espacio de posiciones representando la amplitud de scattering $2 \rightarrow 2$ a primer orden. Ref. [1].

En cuanto al denominador que antes ignoramos, este aporta únicamente diagramas vacío-vacío, es decir, diagramas sin líneas externas. Además, en el numerador también aparecerán todos los posibles diagramas vacío-vacío, como se ve en la figura 4. La contribución debida al efecto del diagrama conexo con cuatro líneas externas viene acompañada de la suma de todos los diagramas vacío-vacío. Esta se cancela con el denominador, ya que no es más que la expansión perturbativa de este. Por tanto, el valor esperado que queremos calcular se calcula haciendo que el denominador sea 1 y en el numerador no tener en cuenta los diagramas disconexos en los que una componente disconexa es un diagrama de vacío-vacío. En general para un scattering $n \rightarrow m$, solo habrá que tener en cuenta la suma de diagramas conexos con $n + m$ puntos externos.

Antes de escribir las reglas de Feynman, debemos tener en cuenta también diagramas con líneas internas y loops. Una interacción que da términos con líneas internas puede ser por ejemplo $\mathcal{H}_{int} = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$. En este caso en cada vértice se encontrarán tres líneas en vez de cuatro.

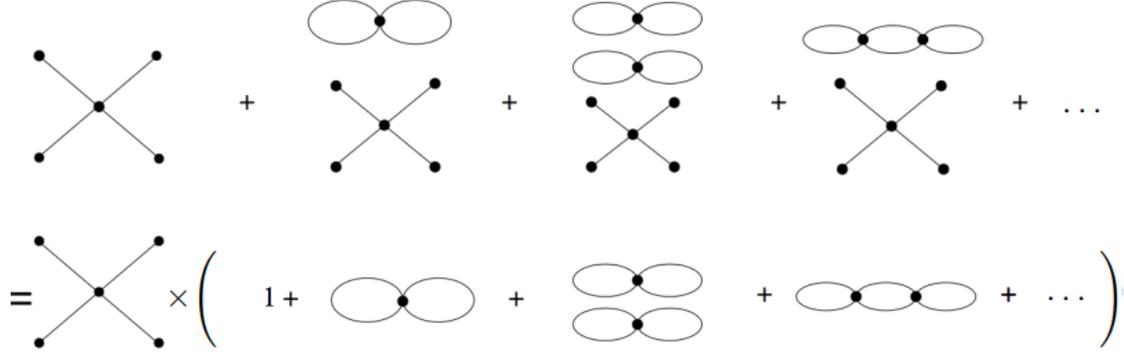


Figura 4: Representación de los efectos de los diagramas vacío-vacío en el numerador. Ref [1]

De nuevo calcularemos la amplitud de scattering $2 \rightarrow 2$ pero para este nuevo Hamiltoniano de interacción. El término de la derecha de la ecuación LSZ será:

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 e^{-i \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \phi^3(x)} \} | 0 \rangle_c \quad (288)$$

donde se ha añadido el subíndice "c" para indicar que, como vimos en el apartado anterior, solo consideramos diagramas conexos. Comenzamos expandiendo hasta encontrar el menor orden que contribuye. A orden cero ya vimos que da 0, a primer orden, encontramos $\langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^3(x) \} | 0 \rangle$, que al tener un número impar de campos, no podemos contraerlos totalmente, y por tanto el valor esperado en el vacío es cero. Por tanto el primer término que aporta será el de $\mathcal{O}(\lambda^2)$, es decir:

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\lambda}{3!}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^3(x) \phi^3(y) \} | 0 \rangle_c. \quad (289)$$

Entonces, si queremos contraer todos los campos, tendremos que contraer también los campos $\phi(x)$ con los campos $\phi(y)$, donde en este caso x e y son los puntos de los vértices, que se deben conectar entre ellos mediante una línea interna. Este caso es diferente a los anteriores ya que en estos solamente había líneas externas. Ahora podemos hacer diferentes diagramas de Feynman. Uno de ellos sería contraer ϕ_1 y ϕ_2 cada uno con uno de los $\phi(x)$, contraeremos un $\phi(x)$ con un $\phi(y)$, y finalmente contraeremos los dos $\phi(y)$ restantes con ϕ_3 y ϕ_4 . Esto se corresponde con el diagrama 5a.

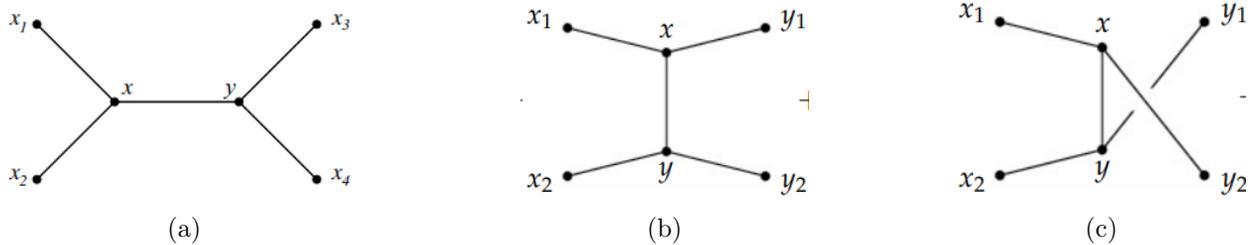


Figura 5: Diagramas de Feynman. Ref. [1], [2]

Otras dos maneras de contraer los campos son como en la figura 5b, donde $y_1 = x_3$ y $y_2 = x_4$, y otra sería intercambiando los papeles de x_3 y x_4 (y_1 e y_2) como en la figura 5c. A todos estos, podríamos agregarles los mismos diagramas pero intercambiando x con y .

Si calculamos la contribución del diagrama 5a, obtendremos que la integral anterior se calcula como:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)}. \\
& \cdot \frac{1}{2!} (-i\frac{\lambda}{3!})^2 \int d^4x \int d^4y D(x_1 - x) D(x_2 - x) D(x - y) D(y - x_3) D(y - x_4) = \\
& = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2!(3!)^2} \tilde{D}(p_1) \tilde{D}(p_2) \tilde{D}(k_1) \tilde{D}(k_2) \int d^4x \int d^4y e^{i(p_1 + p_2)x - i(k_1 + k_2)y} D(x - y) = \quad (290) \\
& = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2!(3!)^2} \tilde{D}(p_1) \tilde{D}(p_2) \tilde{D}(k_1) \tilde{D}(k_2) \int d^4y e^{i(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)y} \int d^4x' e^{i(p_1 + p_2)x'} D(x') = \\
& = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2!(3!)^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}(p_1) \tilde{D}(p_2) \tilde{D}(p_1 + p_2) \tilde{D}(-k_1) \tilde{D}(-k_2)
\end{aligned}$$

donde se han realizado los mismos cambios que en el cálculo de la sección anterior, y para realizar la última integral, se ha realizado el cambio $x' = x - y$. Si a este término le añadimos los demás, que son idénticos, habrá que multiplicar por $(3!)^2$ por todas las contracciones equivalentes a la dada y habrá que multiplicar por 2 por el intercambio de $x \longleftrightarrow y$. Por tanto el resultado será:

$$(-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tilde{D}(p_1) \tilde{D}(p_2) \tilde{D}(p_1 + p_2) \tilde{D}(k_1) \tilde{D}(k_2). \quad (291)$$

Encontramos entonces que, de nuevo, los propagadores en el espacio de momentos asociados a las patas externas se cancelan por los polos de la fórmula LSZ y por la conservación de energía-momento, quedando únicamente el propagador $\tilde{D}(p_1 + p_2)$ asociado a la línea interna.

Podemos ver entonces que es más cómodo trabajar en el espacio de momentos. Para cada línea, asociamos el propagador en el espacio de momentos \tilde{D} y los factores debidos a las líneas externas se cancelan con los de la fórmula LSZ. Los diagramas de Feynman también se pueden dibujar en el espacio de momentos. Por ejemplo, el diagrama 3 en el espacio de momentos sería 6a, mientras que el diagrama 5a se correspondería con 6b.

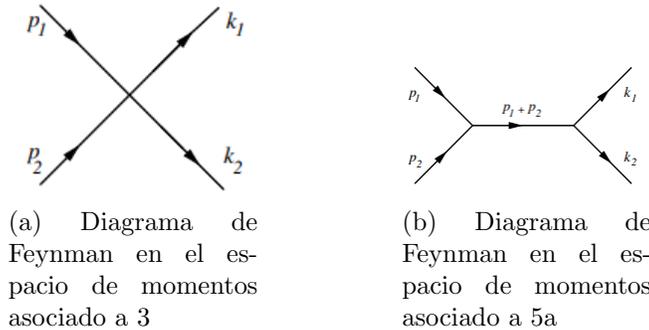


Figura 6: Diagramas de Feynman. Ref. [1], [2]

En los diagramas, hay un factor delta de Dirac que expresa la conservación del cuadrimomento. Para no escribirla continuamente, es conveniente definir un elemento de matriz \mathcal{M}_{fi} a partir de:

$$\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i^n p_i - \sum_j^m k_j \right) i \mathcal{M}_{fi} \quad (292)$$

donde i, f se refieren a los estados iniciales y finales. En la teoría escalar $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_2; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)$.

Para obtener todas las reglas de los diagramas de Feynman, solo falta tener en cuenta los loops internos en los diagramas.

5.5.2. Loops

Consideraremos ahora las correcciones $\mathcal{O}(\lambda^2)$ al scattering $2 \rightarrow 2$ en la teoría $\lambda\phi^4$. En este caso deberemos estudiar los diagramas con cuatro patas externas (porque es scattering $2 \rightarrow 2$), en el que por cada vértice hay cuatro líneas (porque la teoría es ϕ^4) y tendrá 2 vértices (ya que queremos estudiar los términos $\mathcal{O}(\lambda^2)$). Estos son los dados en la figura 7 en el espacio de momentos.

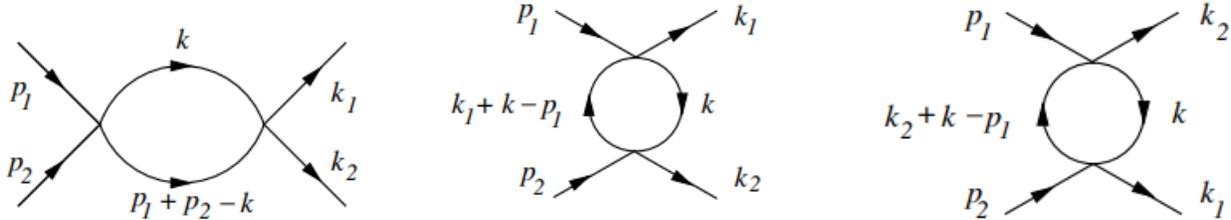


Figura 7: Las tres contribuciones a la amplitud de un único loop en $2 \rightarrow 2$ en el espacio de momentos. Ref. [1]

La diferencia fundamental a los casos anteriores es que el momento de las líneas internas no está completamente fijado por la conservación del cuadrimomento en cada vértice. Podemos asignar un cuadrimomento k aleatorio a una de las líneas, y el de la otra línea estará fijado por la imposición del cuadrimomento en cada vértice. Cuando tengamos este tipo de diagramas hay que tener en cuenta este grado de libertad. Vamos a estudiar algunos ejemplos. El término que hay que calcular a este orden será (el primer término ya vimos que era 0, y el segundo ya lo calculamos en el apartado anterior):

$$\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 - k_1x_3 - k_2x_4)} \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | T \{ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi^4(x) \phi^4(y) | 0 \rangle_c. \quad (293)$$

Si seguimos el primer diagrama de la figura 7, tendremos que contraer ϕ_1 con un $\phi(x)$ y ϕ_2 con otro $\phi(x)$, se puede hacer de $4 \cdot 3$ maneras distintas. También deberemos contraer un $\phi(y)$ con un ϕ_3 y otro con ϕ_4 , también se puede hacer de $4 \cdot 3$ maneras distintas. Finalmente se unirán los dos $\phi(x)$ a los dos $\phi(y)$ que quedan, y esto se podrá realizar de dos maneras distintas. Una misma contribución

se encontraría bajo el intercambio de $x \longleftrightarrow y$, dando un factor 2 adicional. Por tanto la integral anterior resultaría en:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 e^{i(p_1x_1+p_2x_2-k_1x_3-k_2x_4)}. \\
& \int d^4x d^4y D(x_1-x)D(x_2-x)D^2(x-y)D(y-x_3)D(y-x_4) = \\
& = \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \tilde{D}(p_1)\tilde{D}(p_2)\tilde{D}(k_1)\tilde{D}(k_2) \cdot \\
& \quad \cdot \int d^4x \int d^4y e^{ix(p_1+p_2)-iy(k_1+k_2)} D^2(x-y) = \\
& \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \tilde{D}(p_1)\tilde{D}(p_2)\tilde{D}(k_1)\tilde{D}(k_2)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k)\tilde{D}(p_1+p_2-k)
\end{aligned} \tag{294}$$

donde se han realizado los mismos cambios de variable que en el apartado anterior y se ha usado:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x' e^{i(p_1+p_2)x'} D^2(x') = \int d^4x' e^{i(p_1+p_2)x'} D(x') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) e^{-ikx'} = \\
& = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^4x' e^{i(p_1+p_2-k)x'} D(x') \tilde{D}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(p_1+p_2-k) \tilde{D}(k),
\end{aligned} \tag{295}$$

donde a su vez se ha usado 263 y 281.

Podemos ver los factores de los polos debidos a las patas externas, y la delta de Dirac que mantiene la conservación de la energía de todo el proceso. Además vemos el nuevo factor de integración sobre k de la línea interna cuyo cuadrimomento no fue fijado por la conservación de la energía-momento en los vértices. De manera similar podemos calcular los diagramas que contraen ϕ_1 y ϕ_3 con $\phi(x)$ y ϕ_2 y ϕ_4 con $\phi(y)$, y para finalizar, podemos contraer ϕ_1 y ϕ_4 con $\phi(x)$ y ϕ_2 y ϕ_3 con $\phi(y)$, además de las mismas combinaciones pero intercambiando x con y . Estos se corresponden con los dos diagramas restantes de 7. Entonces, podemos decir que la amplitud de scattering $2 \rightarrow 2$ en la teoría $\lambda\phi^4$ hasta orden $\mathcal{O}(\lambda^2)$ será:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2) \cdot \\
& \cdot (-i\lambda + \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\tilde{D}(k)\tilde{D}(p_1+p_2-k) + \\
& + \tilde{D}(k)\tilde{D}(k_1+k-p_1) + \tilde{D}(k)\tilde{D}(k_2+k-p_1)]) + \mathcal{O}(\lambda^3).
\end{aligned} \tag{296}$$

Podemos definir:

$$\mathcal{A}(p) \equiv \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{297}$$

Y entonces, nuestra amplitud de scattering será:

$$i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2} = -i\lambda + \mathcal{A}(p_1+p_2) + \mathcal{A}(p_1-k_1) + \mathcal{A}(p_1-k_2). \tag{298}$$

5.5.3. Reglas de Feynman (campos escalares)

Ahora ya sí podemos dar todas las reglas de Feynman para campos escalares en el espacio de momentos.

Consideraremos que la interacción es de la forma:

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (299)$$

y las reglas de Feynman surgen al dibujar todos los diagramas conexos correspondientes a los estados finales e iniciales con n líneas en cada vértice. Para cada diagrama las reglas son las siguientes:

1. Ignorar los propagadores provenientes de las patas externas.
2. Imponer la conservación del cuadrimento en cada vértice.
3. A cada vértice asociar un factor $(-i\lambda)$, y el número de vértices dependerá del orden en teoría de perturbaciones en el que realicemos el cálculo.
4. A cada línea interna con momento p asociar un factor

$$\tilde{D}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (300)$$

5. Integrar sobre los cuadrimentos k_i no fijados por la conservación del cuadrimento (uno por cada loop) con medida $\frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4}$
6. Multiplicar por el factor de simetría correspondiente. Combina un factor $1/N!$ de la expansión de la exponencial a orden N , el número de contracciones equivalentes y el factor $1/n!$ de la normalización del acoplamiento en esta teoría $(\frac{\lambda}{n!} \phi^n)$.
7. La suma de las contribuciones de todos los diagramas de Feynman conduce a $i\mathcal{M}_{fi}$. Esta se relaciona con el elemento de matrix T por

$$\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i p_i - \sum_j k_j \right) i\mathcal{M}_{fi}. \quad (301)$$

A su vez, T está relacionada con la matriz S mediante $S = 1 + iT$.

5.5.4. Divergencias

Algunos de los loops, al resolver la integral, pueden diverger para valores de k muy altos. A esto se le llama *divergencia ultravioleta (UV)*. Para estudiar estas divergencias en el scattering $2 \rightarrow 2$ del apartado anterior, calcularemos $\mathcal{A}(0)$, ya que para este diagrama es suficiente para extraer la parte divergente. Como la divergencia proviene de la región $k \rightarrow \infty$, entonces $(p - k)^2 \rightarrow k^2$, que es equivalente a hacer $p = 0$. Recordemos que por como hemos definido $i\epsilon$, el polo en $k^0 > 0$ está

debajo del eje real, mientras que el polo en $k^0 < 0$, está encima del eje real, como en la figura 1a. Podemos cambiar el camino de integración en el plano complejo k^0 , rotando en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, llevando el eje real al eje imaginario. Es decir a cada punto en el eje real, le llevamos al punto en el eje complejo multiplicandolo por $e^{i\pi/2} = i$, de igual manera, a cada punto en el eje imaginario, lo rotamos $\pi/2$ multiplicandolo por i para llevarlo al eje real. A esto se le llama *rotación de Wick*.

Entonces, bajo la rotación de Wick, en el eje real escribiremos $dk^0 = dk_M^0$ y en el eje imaginario escribiremos $dk^0 = idk_E^0$, donde k_E^0 y k_M^0 son variables reales refiriéndose "E" a espacio euclídeo y "M" a espacio de Minkowski. El proceso es el siguiente, partimos de la igualdad:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2}. \quad (302)$$

Haciendo $A = (p-k)^2 - m^2$ y $B = k^2 - m^2$, recuperamos la expresión del integrando de 297 haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ (salvo por los factores i). Entonces:

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{D^2} \quad (303)$$

donde

$$D = x((p-k)^2 - m^2) + (1-x)(k^2 - m^2) = (k-px)^2 - \Delta \quad (304)$$

con $\Delta = (px)^2 - p^2x + m^2$. Entonces:

$$\mathcal{A}(p) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[(k-px)^2 - \Delta]^2} \quad (305)$$

Haciendo $p = 0$:

$$\mathcal{A}(0) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \Rightarrow \mathcal{A}(0) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \quad (306)$$

Finalmente, realizando la rotación de Wick, obtenemos:

$$\mathcal{A}(0) = i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2}. \quad (307)$$

donde ahora k es el momento Euclidianio y $k^2 = (k_E^0)^2 + (\vec{k})^2 \equiv k_E^2$. El cambio de signo en la masa al cuadrado proviene de: $k_M^0 \rightarrow ik_E^0 \Rightarrow k_M^2 = (k_M^0)^2 - (\vec{k})^2 = -(k_E^0)^2 - (\vec{k})^2 = -k_E^2 \equiv -k^2$.

El factor i proviene de la rotación. Esta integral diverge en el UV. Deberemos introducir un "cutoff" Λ de manera que solo integramos sobre el momento Euclídeo con $k^2 < \Lambda^2$. Extrayendo

explícitamente la parte divergente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(0) &= i\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} + \text{parte no divergente} = \\ &= i\frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} (2\pi^2) \int^\Lambda \frac{dk}{k} + \text{parte no divergente} = i\lambda^2 \frac{1}{16\pi^2} \log \Lambda + \text{parte no divergente} \end{aligned} \quad (308)$$

donde el factor $(2\pi^2)$ proviene del ángulo sólido en cuatro dimensiones. En este caso, la divergencia no depende de p y la dependencia de p está solo en la parte no divergente. En casos más complejos se utilizan otras técnicas de renormalización. Las contribuciones a la divergencia de los tres diagramas de 7 son iguales. Por tanto, la amplitud a un loop en el scattering $2 \rightarrow 2$ en la teoría $\lambda\phi^4$ es:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2} &= -i\lambda + \mathcal{A}(p_1 + p_2) + \mathcal{A}(p_1 - k_1) + \mathcal{A}(p_1 - k_2) = \\ &= -i\lambda + 3i\lambda^2 \frac{1}{16\pi^2} \log \Lambda + \text{partes no divergentes} \Rightarrow \\ i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2} &= -i\lambda + i\lambda^2(\beta_0 \log \Lambda + \text{partes no divergentes}), \quad \beta_0 = \frac{3}{16\pi^2}. \end{aligned} \quad (309)$$

El rol de β_0 será discutido más adelante.

Vamos a considerar otro ejemplo de un diagrama que produce divergencias. Vamos a estudiar el scattering $1 \rightarrow 1$ en la teoría $\lambda\phi^4$. A orden 0, como sabemos es simplemente el propagador de Feynman $\tilde{D}(p)$. A orden λ , es el diagrama mostrado en la figura 8a.

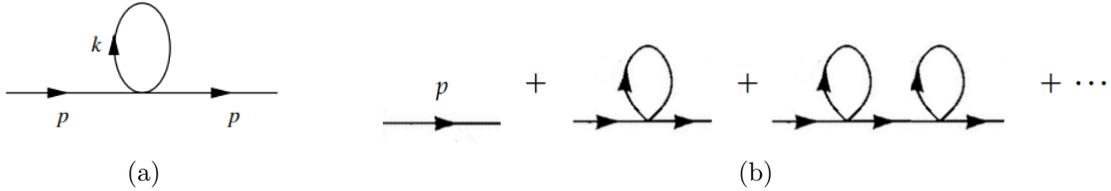


Figura 8: Diagramas de Feynman de scattering $1 \rightarrow 1$ en la teoría $\lambda\phi^4$ a orden λ . Ref. [1]

Usando las reglas de Feynman en el espacio de momentos, como en el caso anterior encontramos que este diagrama produce factores:

$$\frac{(-i\lambda)}{2} \tilde{D}^2(p) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (310)$$

pero hay que tener en cuenta que el primer factor ($\tilde{D}^2(p)$) proviene de las patas externas, por lo que lo podemos ignorar.

Realizando una rotación de Wick $k^0 \rightarrow ik^0$ encontramos (en este caso como no depende de p no hace falta realizar el cálculo del caso anterior):

$$-iB \equiv \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{-i\lambda}{2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int^\Lambda dk \frac{k^3}{k^2 + m^2} = -i \frac{\lambda}{32\pi^2} (\Lambda^2 - m^2 \log \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2}). \quad (311)$$

Vemos que este término también diverge no solo de manera logarítmica sino que también cuadrática, a diferencia del caso anterior. Diverge para grandes k por lo que también es una divergencia UV.

Podemos sumar todas las correcciones de este tipo (este tipo de diagramas se conocen como "tadpole") como en la figura 8b, incluyendo también los factores de las patas externas:

$$\begin{aligned} & \tilde{D}(p) + \tilde{D}(p)(-iB)\tilde{D}(p) + \tilde{D}(p)(-iB)\tilde{D}(p)(-iB)\tilde{D}(p) + \dots = \\ & = \tilde{D}(p) \frac{1}{1 + iB\tilde{D}(p)} = \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{1}{1 - \frac{B}{p^2 - m^2}} = \frac{i}{p^2 - m^2 - B}. \end{aligned} \quad (312)$$

Observamos que el efecto final es añadir un desplazamiento a la masa $m^2 \rightarrow m^2 + B$.

Podemos seguir aumentando el orden, y en $\mathcal{O}(\lambda^2)$ encontramos nuevas contribuciones. Una de ellas podría ser el diagrama de la figura 9a. Para este caso encontramos, usando las reglas de Feynman en el espacio de momentos y eliminando los propagadores proveniente de las patas externas:

$$\begin{aligned} & i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k_1) \tilde{D}(k_2) \tilde{D}(k_1 + k_2 - p) = \\ & = i \frac{\lambda^2}{6} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k_1 + k_2 - p)^2 - m^2](k_1^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (313)$$

Resolver esta integral es más complicado, pero el resultado es proporcional a:

$$\lambda^2 p^2 (\log \frac{\Lambda^2}{p^2} + C) \quad (314)$$

por lo que en este caso, la divergencia sí que depende de p , no como anteriormente.

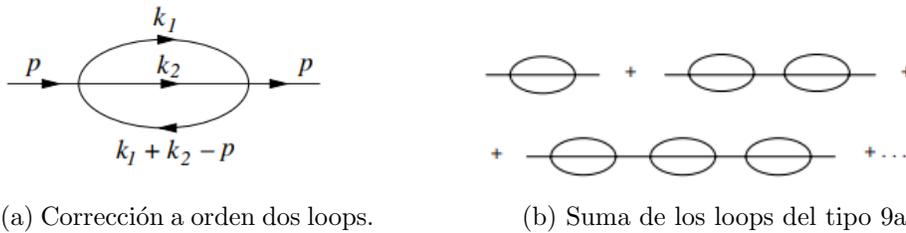


Figura 9

Si sumamos estos diagramas de la misma manera que en el caso anterior, es decir como en la figura 9b, encontramos de nuevo una serie geométrica. El resultado para la función de dos puntos en el espacio de momentos a este orden será, con $A(\Lambda, p^2) = 1 + \lambda^2(c_1 \log \frac{\Lambda^2}{p^2} + c_2)$, y c_1 y c_2 son constantes:

$$\frac{i}{A(\Lambda, p^2)p^2 - m^2 - B(\Lambda)} \quad (315)$$

5.6. Renormalización

Como hemos visto, algunos diagramas dan contribuciones divergentes. Para solucionar este problema se utilizan diferentes técnicas de regularización de la teoría. Como en los ejemplos anteriores, nosotros utilizaremos el "cutoff", pero existen otros métodos más usados en las teorías gauge.

Queremos mandar Λ a infinito para recuperar las integrales originales, pero hasta entonces, los acoplamientos, las masas y los campos dependen de alguna manera de Λ . En la teoría $\lambda\phi^4$ el Lagrangiano a $\Lambda < \infty$ es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4. \quad (316)$$

donde $\phi_0 = \phi_0(x, \Lambda)$, $m_0 = m_0(\Lambda)$ y $\lambda_0 = \lambda_0(\Lambda)$. Se denomina a ϕ_0 el *campo desnudo*, a m_0 la masa desnuda y λ_0 el acoplamiento desnudo.

La suma de las contribuciones a la función de dos puntos a Λ finito da el factor de la ecuación 315. Entonces el elemento de matriz será:

$$\langle 0 | T \{ \phi_0(x, \Lambda) \phi_0(y, \Lambda) \} | 0 \rangle_c = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{A(\Lambda, p^2)p^2 - m_0^2 - B(\Lambda)} e^{-i(x-y)p}. \quad (317)$$

Con:

$$B(\Lambda) = \frac{\lambda_0(\Lambda)}{32\pi^2} (\Lambda^2 + \mathcal{O}(\log \Lambda) + \text{partes no divergentes}), \quad A(\Lambda, p^2) = 1 + \lambda_0^2 (c_1 \log \frac{\Lambda^2}{p^2} + c_2). \quad (318)$$

Comencemos estudiando 317 a nivel de un único loop, es decir 312

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2(\Lambda) - B(\Lambda)}. \quad (319)$$

Ni m_0 ni B son observables físicos, en realidad el valor físico es *la masa renormalizada* m_R definida como

$$m_R^2 = m_0(\Lambda)^2 + B(\Lambda). \quad (320)$$

Se fija la masa física en el polo de manera que el propagador tenga un polo en $p^2 = m_R^2$. Además, como $m_0(\Lambda)$ es un parámetro completamente libre, lo podemos fijar de manera que cancele la divergencia de $B(\Lambda)$. De esta manera obtenemos un valor físico finito m_R que igualamos a la masa física medida.

Si regresamos al nivel de dos loops, el procedimiento es similar pero algo más complejo debido a que ahora también hay que lidiar con la divergencia de A . Definimos de nuevo la masa física renormalizada m_R como el punto donde el propagador tiene un polo, es decir

$$[A(\Lambda, p^2)p^2 - m_0^2(\Lambda) - B(\Lambda)]_{p^2=m_R^2} = 0. \quad (321)$$

Como tenemos dos divergencias pero una sola condición, no es suficiente para cancelar las divergencias. La otra condición vendrá de expandir la función $A(p^2)p^2 - m_0^2 - B$ cerca de $p^2 = m_R^2$.

Encontramos entonces que cerca del polo, la integral del elemento de matriz vale

$$\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \{ \phi_0(x, \Lambda) \phi_0(0, \Lambda) \} | 0 \rangle_c = \frac{iZ}{p^2 - m_R^2} + \dots \text{(términos no divergentes en } m_R^2), \quad (322)$$

que no es más que el valor en el espacio de momentos en torno a $p^2 = m_R^2$, donde

$$Z = Z(\lambda_0(\Lambda), \frac{\Lambda}{m_R}) \equiv [(\frac{d}{d(p^2)} A(\Lambda, p^2) p^2)|_{p^2=m_R^2}]^{-1}. \quad (323)$$

La deducción es la siguiente, realizando el desarrollo a primer orden del resultado en el espacio de momentos:

$$A(p^2)p^2 - m_0^2 - B \simeq (A(p^2)p^2 - m_0^2 - B)_{m_R^2} + \frac{d}{d(p^2)} (A(p^2)p^2)_{m_R^2} (p^2 - m_R^2), \quad (324)$$

donde el primer término se anula por la definición de m_R . Entonces definiendo Z como se ha definido anteriormente tenemos que:

$$\frac{i}{A(p^2)p^2 - m_0^2 - B} \simeq \frac{iZ}{p^2 - m_R^2}. \quad (325)$$

Ahora definimos el *campo renormalizado* ϕ_R como

$$\phi_0(x, \Lambda) = Z^{1/2}(\lambda_0(\Lambda), \frac{\Lambda}{m_R}) \phi_R(x) \quad (326)$$

El campo renormalizado no depende, por definición, de Λ , por tanto toda la dependencia del campo ϕ_0 proviene de Z . A Z se le conoce como renormalización de la función de onda, o renormalización del campo. Vemos que, si sustituimos el campo desnudo en función del campo renormalizado, el resultado de 322 no es más que el propagador de un campo libre de masa m_R . Por tanto, el factor Z es el mismo que nos aparece en la fórmula de reducción de LSZ. Esto hace que, si usamos el campo ϕ_R , es decir, tras renormalizar el campo, la dependencia de Z desaparece y por tanto la función "on-shell" a dos puntos es finita.

Realicemos un proceso similar con la función a 4 puntos. A orden de un loop existen dos tipos de divergencias. Los primeros son los del tipo 7. Los otros son del tipo 10a. Estas últimas divergencias son las mismas que acabamos de solucionar con la renormalización de la función a dos puntos. Por tanto, estas son automáticamente solucionadas usando la renormalización anterior.

Las divergencias del tipo 7 son las calculadas en 309. Vamos a considerar la amplitud de scattering en el límite de cero momento espacial, es decir $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{k}_1 = \vec{k}_2 = 0$ y por tanto $p_1 = p_2 = k_1 = k_2 = (m_R, 0)$. Para dar un argumento adimensional en el logaritmo, el único cambio de escala posible es Λ/m_R , entonces reescribimos la ecuación y definimos λ_R como

$$i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}(\vec{p}_i = \vec{k}_i = 0) \equiv -i\lambda_R = -i\lambda_0(\Lambda) [1 - \lambda_0(\Lambda) (\beta_0 \log \frac{\Lambda}{m_R} + \text{partes no divergentes})] + \mathcal{O}(\lambda_0^3). \quad (327)$$

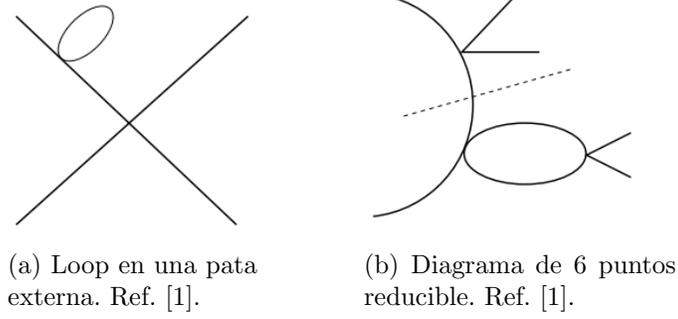


Figura 10

Esta nueva constante renormalizada λ_R es la medida físicamente en los experimentos de scattering. Lo denominaremos *acoplamiento físico* o *renormalizado*. En este caso es el parámetro $\lambda_0(\Lambda)$ el que depende totalmente de nuestra elección, y esta será la que haga λ_R finita e igual al valor físico.

En el caso más general en el que consideramos $(p_1 + p_2)^2 \equiv q^2 \gg m_R^2$, encontramos la amplitud de scattering:

$$i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}(q^2) = -i\lambda_0(\Lambda)[1 - \lambda_0(\Lambda)(\frac{\beta_0}{2} \log \frac{\Lambda^2}{q^2} + (\text{partes no divergentes}))] + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \quad (328)$$

Se puede comprobar que si $q^2 \gg m_R^2$ la escala dimensional relevante la provee q^2 en vez de m_R^2 . Por tanto, el factor escala para adimensionalizar el argumento del logaritmo será q^2 . Si hacemos $\log(\frac{\Lambda^2}{q^2}) = \log(\frac{\Lambda^2}{m_R^2}) + \log(\frac{m_R^2}{q^2})$ obtenemos:

$$i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}(q^2) = -i\lambda_R[1 + \lambda_R \frac{\beta_0}{2} \log \frac{q^2}{m_R^2}] + \mathcal{O}(\lambda_R^3). \quad (329)$$

Se han reemplazado los términos λ_0^3 por λ_R^3 ya que son términos de $\mathcal{O}(\lambda_0^3)$. Vemos que una vez se haya renormalizado la amplitud a cuatro puntos para un valor del momento externo, está renormalizada para cualquier otra configuración cinemática.

A partir de aquí, de manera similar a como se solucionaba la divergencia de dos puntos presentes en diagramas de cuatro puntos (las divergencias de los loops que aparecían en las patas externas), podemos solucionar divergencias de dos y cuatro puntos presentes en diagramas de seis puntos automáticamente ya que ya tenemos la renormalización de 2 y 4 puntos. Por ejemplo en el diagrama de la figura 10b, podemos separarlo en dos subdiagramas disconexos de 4 puntos donde el de abajo da una divergencia que se soluciona mediante la renormalización de las funciones de 4 puntos que acabamos de ver. Estos gráficos se denominan reducibles a una partícula y no traen divergencias nuevas. También existen diagramas que no se pueden recortar de esta manera. Estos sí pueden traer divergencias nuevas (distintas de las de 2 o 4 puntos) y se denominan diagramas irreducibles a 1 partícula (1PI). Hemos visto como solucionar una divergencia de 2 puntos en un diagrama de 4 usando la renormalización de la masa. De igual manera, para solucionar nuevas divergencias en diagramas de 4 puntos se ha introducido la renormalización del campo y de λ_R . Si estamos

interesados en estudiar mayor cantidad de puntos, para diagramas de 6 puntos pueden existir nuevas contribuciones que no se hagan finitas renormalizando la masa, el campo y λ_R , y por tanto habría que añadir nuevas renormalizaciones siempre que sea posible. Estas nuevas soluciones provendrían de añadir al lagrangiano de la teoría $\lambda\phi^4$ un término proporcional a ϕ^6 y una nueva constante de acoplamiento $\lambda_{(6),0}(\Lambda)$. Así surgiría una $\lambda_{(6),R}$ renormalizada.

Si este proceso nunca termina y para considerar amplitudes con mayor número de puntos externos debemos añadir nuevas constantes de acoplamiento, tendríamos que añadir infinitos términos nuevos, cuyos parámetros son fijados por los experimentos y por tanto no son capaces de predecir nuevos resultados. A estas teorías se las llama no renormalizables. En cambio, si este proceso termina en algún punto, solo tendremos que fijar un número finito de parámetros y todas las amplitudes son automáticamente finitas. En este caso la teoría es renormalizable. Para comprender si una teoría es renormalizable o no, podemos usar un método que funciona tanto para la teoría escalar como para casos más generales.

Consideremos una teoría $\lambda\phi^n$ donde $n \geq 3$. La reglas de Feynman nos dicen que por cada loop, es decir, por cada momento no definido por la conservación del cuadrimomento, tendremos una integral con medida d^4k . También, por cada línea interna tendremos un propagador del tipo $\frac{1}{((k-p)^2-m^2)}$, donde k es la variable de integración que hemos añadido, y p una combinación de momentos externos. Por tanto, cada loop tiene 4 potencias del momento interno en el numerador y por cada línea interna, 2 potencias del momento en el denominador. En esta teoría definimos el *grado de divergencia superficial* D como

$$D = 4L - 2N_i \quad (330)$$

donde L es el número de loops y N_i el número de líneas internas. Así mismo, el número de loops se puede expresar como

$$L = N_i - V + 1 \quad (331)$$

donde V es el número de vértices del diagrama.

También podemos ver que en esta teoría hay n líneas en cada vértice, de manera que se cumple

$$2N_i + N_e = nV \quad (332)$$

donde N_e es el número de líneas externas y el factor 2 refleja el hecho de que por cada línea interna hay dos vértices a donde se conecta. A partir de estas ecuaciones encontramos

$$D = (n - 4)V - N_e + 4 \quad (333)$$

Entonces esperamos que si $D \geq 0$ el diagrama diverja a menos que obtengamos alguna cancelación numérica. Por ejemplo $D = 0$ provee una divergencia logarítmica ya que corresponde con $\int d^4k 1/k^4 \sim \int^\Lambda d^4k/k \sim \log \Lambda$. Si $D < 0$ no necesariamente es convergente, pero las divergencias que pudiesen aparecer en los subdiagramas se pueden solucionar renormalizando la función de Green de

un número menor de puntos. De esta manera no aparecen divergencias que no se puedan solucionar renormalizando subdiagramas de esta, y por tanto no son divergencias realmente nuevas. Entonces, la condición para que una teoría sea renormalizable es que solo un número finito de diagramas (funciones de Green) tengan $D \geq 0$ y por tanto solo hay que introducir un número finito de constantes de acoplo para renormalizar la teoría.

Por ejemplo, en $\lambda\phi^4$, $n = 4$ y por tanto $D = 4 - N_e$. Entonces los únicos diagramas que divergen realmente son los que no tienen patas externas que son los que producen la amplitud vacío-vacío (divergen como Λ^4), los que tienen 2 patas externas que divergen como Λ^2 como ya vimos, y la función a 4 puntos, que diverge como $\log \Lambda$. Una vez renormalizadas estas divergencias, no surgirán nuevos diagramas con un número mayor de patas externas que tengan divergencias genuinamente nuevas y por tanto todas se pueden solucionar renormalizando los diagramas anteriormente comentados. De esta manera, la teoría $\lambda\phi^4$ es una teoría renormalizable. La teoría $\lambda\phi^3$ da un término $(n - 4)V = -V$ que es negativo y por tanto ayuda a la convergencia. Esta teoría también es renormalizable. En cambio, en las teorías con $n > 4$, por cada N_e dado existen diagramas con un número de vértices suficientemente grande que tienen $D \geq 0$ y por tanto divergen. Es decir, existen funciones de Green que en un alto orden en teoría de perturbaciones tienen divergencias genuinamente nuevas y la teoría no es renormalizable.

Este criterio de $n \leq 4$ para la renormalizabilidad de las teorías $\lambda\phi^n$ se puede generalizar. Como la acción es adimensional ($S \sim \hbar = 1$), el campo tendrá dimensiones de masa. El término cinético es $\sim \int d^4x (\partial\phi)^2$ y por tanto $\partial \sim 1/(\text{longitud}) = \text{masa}$ para que el término cinético sea adimensional. Finalmente teniendo en cuenta que el término $\int d^4x \lambda_n \phi^n$ también debe ser adimensional, la constante de acoplamiento debe tener dimensiones de $\lambda_n \sim (\text{masa})^{4-n}$ ya que $(\text{masa})^{-4}[\lambda_n](\text{masa})^n = 1$. El criterio $n \leq 4$, en el fondo, significa que

Los términos en el Lagrangiano cuyos coeficientes tengan una dimensión positiva de masa o sean adimensionales son renormalizables. Términos con dimensión negativa de masa son no renormalizables.

De esta manera, en la teoría $\lambda\phi^n$ las posibles n para que sea renormalizable son las que hagan que la constante de acoplamiento tenga dimensión positiva de masa, es decir, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Entonces el criterio para la renormalizabilidad de las teorías es que las constantes de acoplo tengan dimensión positiva de masa. Aunque el criterio sea general, la demostración depende de cada teoría.

5.7. El punto de vista moderno de la renormalizabilidad

Las teorías renormalizables se consideran teorías capaces de predecir, ya que únicamente hay que redefinir un número finito de parámetros. Con esto, podemos pensar que las teorías no renormalizables no pueden predecir y no ser "honestas". Como hemos visto en la sección anterior, aunque podamos reabsorber las divergencias, en las teorías no renormalizables va a aparecer una amplitud de N puntos, $A_N(p_1, \dots, p_N)$, con un número suficientemente grande de vértices n , cuya divergencia no pueda ser reabsorbida por la renormalización de las amplitudes con un número menor de patas

externas ($< N$). En esos casos se debe introducir un nuevo término y un nuevo acoplamiento en el Lagrangiano y dar el valor experimental al valor renormalizado.

En estas teorías no renormalizables, la constante de acoplamiento no es adimensional, sino que tiene dimensiones de masa inversa ($(\text{masa})^{-n}$, $n > 0$). Supongamos que el acoplamiento λ tiene dimensiones de masa inversa al cuadrado (como en la teoría $\lambda\phi^6$). Entonces podemos escribir $\lambda \sim 1/M^2$ para alguna escala de masa M . Asumamos también por simplicidad que tenemos una única escala de energía E . La expansión perturbativa renormalizada de una amplitud de N puntos, A_N , hasta orden n es:

$$A_N(E) = A_N^0(E) \left(1 + c_1 \frac{E^2}{M^2} + c_2 \frac{E^4}{M^4} + \dots + c_n \frac{E^{2n}}{M^{2n}} \right). \quad (334)$$

Las cantidades c_1, \dots, c_{n-1} se encuentran renormalizando las amplitudes con menos de N puntos. El coeficiente c_n proviene de la divergencia genuinamente nueva que aparece a un orden n lo suficientemente alto. Este se debe fijar por comparación con el experimento, y debido a esto la teoría pierde la predictividad. Sin embargo, esto no significa que la teoría no renormalizable no pueda ser útil. Esta teoría lo es siempre y cuando estemos en el rango adecuado de energías. Para escalas bajas de energías, es decir, $E \ll M$, el último término c_n se puede ignorar. Por tanto, esta teoría es útil siempre y cuando querramos hacer cálculos hasta cierta precisión, renormalizando las amplitudes de un número menor de puntos, y siempre y cuando se cumpla $E \ll M$. En resumen:

Las teorías no renormalizables son teorías perfectamente aceptables a escalas de baja energía.

Si en cambio $E \sim M$, la expansión diverge y por tanto la teoría no es útil. Tendríamos que buscar una teoría más completa. Vemos que una teoría no renormalizable es válida según una escala M . En cambio, las teorías renormalizables no tienen este parámetro M y por tanto son válidas a cualquier escala de energías. Esto tampoco significa que las teorías renormalizables sean completamente útiles. La electrodinámica cuántica es una teoría renormalizable, pero cuando disminuimos la distancia, o equivalentemente, aumentamos la escala de energía hasta los $M \sim 100$ GeV, surge una nueva interacción, la interacción débil, que la electrodinámica cuántica no puede explicar por sí sola. Hay que aumentar esta teoría a una teoría más general, el Modelo Estándar. De esta manera vemos que la electrodinámica cuántica es una aproximación a bajas energías del Modelo Estándar. Si seguimos aumentando la energía lo suficiente, debería aparecer la gravedad cuántica. Esta tiene que aparecer como mucho a la escala de Planck, $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV, o equivalentemente distancias de $l_{Pl} \sim 10^{-33}$ cm. En este caso, el Modelo Estándar también es una aproximación a "bajas energías", ya que no incluye los efectos de la gravedad cuántica.

En resumen, podemos reemplazar el concepto de renormalizabilidad o no renormalizabilidad por el concepto de *teorías de campos efectivas*. Esto quiere decir que una teoría es efectiva o no en función de los cálculos que querramos realizar y de la precisión con la que querramos obtener los resultados. Si por ejemplo queremos estudiar el átomo a $l \sim 10^{-8}$ cm, no es necesario conocer una teoría que describa correctamente hasta $l \sim 10^{-17}$ cm, que es la escala típica de las interacciones débiles, a menos que querramos una cantidad de precisión que describa los detalles más finos. Entonces, si queremos entender los efectos a una escala l y tener hasta cierta precisión en los resultados,

deberemos tener una teoría efectiva a una escala l_* unos órdenes de magnitud menores que l . Cuántos órdenes de magnitud menos depende de la precisión con la que querramos realizar los cálculos.

Una teoría no renormalizable muy importante es la que surge al cuantizar la Relatividad General. La constante de acoplo de esta teoría es la constante de gravedad de Newton, $G_N = 1/M_{Pl}^2$ en unidades naturales. Como vemos, tiene unidades negativas de masa y por tanto es no renormalizable. Sin embargo, esta teoría comienza a tener pérdidas de predictividad a escalas del espacio tiempo muy pequeñas como $l_{Pl} = 1/M_{Pl} \simeq 10^{-33}$ cm (del orden de $E \sim M_{Pl}$). Es decir, en "condiciones normales" la relatividad general clásica da una descripción adecuada y el hecho de que la teoría cuántica no sea renormalizable pierde importancia a estas escalas de "baja" energía.

5.8. La dependencia de las constantes de acoplamiento de la energía

Tras la renormalización, las constantes de acoplamiento dejan de ser estrictamente constantes y pasan a depender de la energía. Un ejemplo de esto es la ecuación 329, donde vimos la amplitud de scattering $2 \rightarrow 2$ en el caso en el que la energía de centro de masas al cuadrado valía q^2 .

Si $E \gg m_R$ podemos hacer:

$$\log \frac{q^2}{m_R^2} \simeq \log \frac{E^2}{m_R^2} = 2 \log \frac{E}{m_R} \quad (335)$$

y sustituyendo encontramos:

$$i\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}(q^2) = -i\lambda_{\text{eff}}(E), \quad \lambda_{\text{eff}}(E) = \lambda_R(1 + \lambda_R\beta_0 \log \frac{E}{m_R}) \quad (336)$$

Este resultado es el mismo que si hiciésemos $m_R \gg E$. Observamos que el signo de β_0 es muy importante. Si es positivo, el acoplamiento aumenta con la energía y por tanto en el UV la energía aumenta lo suficiente y la expansión perturbativa no será correcta. Sin embargo, si el signo es negativo ocurre lo contrario, a mayores energías el acoplamiento es menor y podremos realizar una expansión perturbativa a altas energías. A estas teorías se las conoce como *asintóticamente libres*. La libertad asintótica significa que a grandes energías (distancias cortas) los campos pueden tratarse perturbativamente. Por otro lado, a bajas energías (distancias largas) el acoplamiento es demasiado grande como para realizar un tratamiento perturbativo.

Un ejemplo de una teoría asintóticamente libre es la cromodinámica cuántica. Las interacciones fuertes, que son sufridas por los quarks y portadas por los gluones, pueden ser tratadas perturbativamente a distancias $l \ll 1$ fm. Sin embargo, a $l \sim 1$ fm, la interacción se vuelve muy fuerte y los quarks y gluones no aparecen como partículas libres, sino que son confinadas en hadrones.

Vamos a estudiar en esta sección la dependencia de los acoplamientos con la energía. Comencemos considerando una función genérica de n puntos. Nombremos a la función genérica de n puntos *renormalizada* Γ_R . Esta dependerá del momento externo p_i (podemos elegir una situación cinemáti-

ca más sencilla con un momento invariante q^2), del acoplamiento renormalizado g_R (lo que antes llamábamos λ_R ; además asumiremos un único acoplamiento, pero se puede generalizar), y en una escala μ (anteriormente usamos m_R) para definir el proceso de renormalización, es decir:

$$\Gamma_R = \Gamma_R(p_i; g_R, \mu). \quad (337)$$

Recordemos que anteriormente habíamos definido $\mu = m_R$ como la posición del polo en el propagador. Definimos los campos renormalizados requiriendo que su función a dos puntos tuviese un residuo $+i$ en el polo $p^2 = m_R^2$ (ecuación 322) y finalmente calculamos la amplitud de scattering de la función a 4 puntos en la situación cinemática en la que el cuadrado de la energía en el centro de masas s vale $4m_R^2$. De esta manera m_R era nuestra escala de masa para fijar los valores finitos de las variables renormalizadas. Por el momento, mantendremos un μ genérico y veremos las consecuencias de variar esta cantidad.

La relación entre Γ_R y la función de n puntos desnuda Γ_0 (es decir, que depende del "cutoff") es:

$$\Gamma_R(p_i; g_R, \mu) = Z^{-n/2} (g_0(\Lambda), \frac{\Lambda}{\mu}) \Gamma_0(p_i; g_0(\Lambda), \Lambda), \quad (338)$$

suponiendo que en la teoría solo hay un tipo de campo. Si no fuese así, la renormalización de la función de onda dependería del campo y aparecería un factor $Z^{-1/2}$ por cada campo.

Notar que la función desnuda Γ_0 no depende de μ ya que este aparece tras fijar el valor de la función de Green renormalizada. El factor $Z^{-n/2}$ proviene de la renormalización de la función de onda de los n campos, que como hemos visto anteriormente, se obtiene calculando la amplitud a dos puntos de la teoría desnuda. Para el caso de $\lambda\phi^4$, esta apareció al calcular la contribución al nivel de 2 loops, sin embargo esto es característico de esta teoría, ya que en general $Z \neq 1$ a primer orden de loops. Por tanto, hasta este punto, el resultado es una función desnuda que depende de Λ , de $g_0(\Lambda)$ y de p^2 ; y el valor de Z se define tras fijar el valor del numerador de la función de dos puntos en torno a $p^2 = \mu^2$ como hicimos en 322. Similarmente a como hicimos anteriormente, Z es una cantidad que no depende de p^2 , y como es adimensional, solo puede depender de Λ (ya que es la parte que contiene a Λ en el campo desnudo al definir el campo renormalizado) y de μ (porque este aparece tras el proceso de renormalización, y no antes con las variables desnudas) a través de la cantidad $\frac{\Lambda}{\mu}$ en el límite de altas energías donde las masas pueden ser ignoradas, y de $g_0(\Lambda)$.

Partiendo de que Γ_R no depende de Λ entonces tenemos que:

$$\Lambda \frac{d\Gamma_R}{d\Lambda} = 0. \quad (339)$$

Por tanto, derivando la relación 338, encontramos:

$$\frac{d\Gamma_R}{d\Lambda} = \frac{\partial\Gamma_R}{\partial g_0} \frac{dg_0}{d\Lambda} + \frac{\partial\Gamma_R}{\partial\Lambda} = 0, \quad (340)$$

donde de debe entender que se deriva el lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{n}{2}Z^{-n/2-1}\frac{\partial Z}{\partial g_0}\Gamma_0 + Z^{-n/2}\frac{\partial \Gamma_0}{\partial g_0}\right)\frac{dg_0}{d\Lambda} - \frac{n}{2}Z^{-n/2-1}\frac{\partial Z}{\partial \Lambda}\Gamma_0 + Z^{-n/2}\frac{\partial \Gamma_0}{\partial \Lambda} = 0 \Rightarrow \\
-\frac{n}{2}Z^{-1}\Gamma_0\left(\frac{\partial Z}{\partial g_0}\frac{dg_0}{d\Lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \Lambda}\right) + \frac{\partial \Gamma_0}{\partial g_0}\frac{dg_0}{d\Lambda} + \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \Lambda} = 0
\end{aligned} \tag{341}$$

Usando ahora que $\frac{dZ}{d\Lambda} = \frac{\partial Z}{\partial g_0}\frac{dg_0}{d\Lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \Lambda}$, obtenemos

$$-\frac{n}{2}Z^{-1}\Gamma_0\left(\frac{dZ}{d\Lambda}\right) + \frac{\partial \Gamma_0}{\partial g_0}\frac{dg_0}{d\Lambda} + \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \Lambda} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \Lambda} + \frac{dg_0}{d\Lambda}\frac{\partial}{\partial g_0} - \frac{n}{2}\frac{d}{d\Lambda}\log Z\right)\Gamma_0 = 0 \tag{342}$$

Multiplicando por Λ y renombrando, finalmente encontramos

$$\left[\Lambda\frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g_0)\frac{\partial}{\partial g_0} - n\eta(g_0)\right]\Gamma_0(p_i; g_0(\Lambda), \Lambda) = 0, \tag{343}$$

donde se ha definido:

$$g_0 = g_0(\Lambda) \tag{344}$$

$$\beta(g_0) = \Lambda\frac{dg_0}{d\Lambda} \tag{345}$$

$$\eta(g_0) = \frac{1}{2}\Lambda\frac{d}{d\Lambda}\log Z \tag{346}$$

La ecuación 343 se conoce como ecuación del grupo de renormalización. Las ecuaciones 345 y 346 se las conoce como función beta y función eta de la teoría, respectivamente.

Podemos realizar un proceso similar a la ecuación 338. Esta vez invertiremos la ecuación, de manera que obtengamos $\Gamma_0 = Z^{n/2}\Gamma_R$, y utilizaremos el hecho de que Γ_0 no depende de μ . De nuevo, derivando la relación anterior respecto a μ y multiplicando por μ , encontramos

$$0 = \mu\frac{d\Gamma_0}{d\mu} = \left[\mu\frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R} + \gamma(g_R)n\right]\Gamma_R(p_i; g_R, \mu) \tag{347}$$

donde ahora hemos definido las funciones beta y gama como

$$\beta(g_R) = \mu\frac{dg_R}{d\mu}, \quad \gamma(g_R) = \frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}\log Z. \tag{348}$$

Podemos observar que, la ecuación 347, conocida como ecuación de *Callan-Symanzik*, matemáticamente, es similar a la ecuación del grupo de renormalización, pero ahora usamos el campo renormalizado g_R en vez del campo desnudo g_0 .

Vamos a realizar el cálculo para la teoría $\lambda\phi^4$. Lo estudiaremos para el nivel de un loop para que sea más sencillo. El resultado es el de la ecuación 309 y 328, encontramos

$$\lambda_R = \lambda_0 + \lambda_0^2\frac{3}{16\pi^2}\log \Lambda. \tag{349}$$

Utilizando la función β :

$$\beta(\lambda_0) = \beta_0 \lambda_0^2 + \mathcal{O}(\lambda_0^3), \quad \beta_0 = \frac{3}{16\pi^2}. \quad (350)$$

Ahora tenemos en cuenta que podemos interpretar la escala de renormalización como la escala típica del proceso en cuestión, E . Entonces tenemos que el acoplamiento efectivo cumple

$$E \frac{d}{dE} \lambda_{\text{eff}}(E) = \beta_0 \lambda_{\text{eff}}^2, \quad (351)$$

con la condición inicial $\lambda_{\text{eff}}(E = \mu) = \lambda_*$. Resolviendo la ecuación diferencial encontramos

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\lambda_*}{1 - \beta_0 \lambda_* \log E/\mu}. \quad (352)$$

Si comparamos este resultado con 336, observamos que el cálculo como lo hemos realizado ahora (mediante el análisis del grupo de renormalización, RG) da como resultado la suma de una clase completa de términos logarítmicos. Si expandimos λ_{eff} en serie de potencias de λ_* se obtiene

$$\lambda_{\text{eff}}(E) = \lambda_* \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(E) \lambda_*^n \right]; \quad c_n(E) = \left(\beta_0 \log \frac{E}{\mu} \right)^n. \quad (353)$$

Este resultado es válido solo cuando estamos al orden de un loop. Si se tienen en cuenta términos a mayor orden, aparece un cambio en los coeficientes c_n que comienzan a ser importantes si $\log \frac{E}{\mu} \sim 1$. Esto quiere decir que el resultado 352 solo es útil cuando $\log E/\mu \gg 1$. Esto implica que este resultado a un loop solamente es útil cuando $\beta_0 < 0$, ya que así se cumple que si $\log E/\mu \gg 1$ implica que $\lambda_{\text{eff}} \ll 1$, y entonces podemos decir que la teoría de perturbaciones es consistente. La ecuación 352 se conoce como aproximación de *logaritmos principales*.

En QED, $\beta_0 > 0$. Entonces, la constante de estructura fina crece con la energía, y teóricamente existe una escala de energías en la que se vuelva "fuerte", lo suficientemente grande. A esta energía se la conoce como polo de Landau. Para QED, este aumento en la constante de acoplamiento es muy lento, y antes de entrar en el régimen fuerte, la teoría QED por si sola ya no es válida (porque entramos en el régimen electrodébil), sino que hay que tener en cuenta el Modelo Estándar.

Para ver el aumento de la constante de acoplamiento con la energía podemos poner el caso de QED. Por ejemplo, el valor de la constante de estructura fina a bajas energías es el conocido $\alpha = 1/137,0359111(46)$. Sin embargo, a escalas de energía de la masa del bosón Z^0 , es decir, $M_Z = 91,1876 \pm 0,0021$ GeV, el valor de la constante de estructura fina aumenta a

$$\alpha(M_Z) = \frac{1}{127,918 \pm 0,018}. \quad (354)$$

El caso opuesto, $\beta_0 < 0$ ocurre para QCD. En este caso al aumentar la energía, la constante de acoplamiento efectiva se vuelve cada vez más pequeña, y la aproximación perturbativa cada vez es más exacta. Como vimos anteriormente esta propiedad es la *libertad asintótica*.

6. Grupo de renormalización: Defecto de superficie en el modelo $O(N)$ en la teoría escalar libre

Vamos a considerar N campos escalares libres, nombrados por ϕ_a donde $a = 1, \dots, N$. Estos campos estarán en un espacio de dimensión d .

A la teoría libre le añadiremos un defecto de superficie invariante bajo transformaciones del grupo ortogonal $O(N)$, en el plano x_1, x_2 . La acción vendrá dada por

$$S = \int d^d x \frac{1}{2} (\partial \phi_a)^2 + h_0 \int dx_1 dx_2 \phi_a^2. \quad (355)$$

La constante de acoplamiento h_0 debe ser adimensional de manera que la acción sea adimensional. Por tanto, esta teoría será renormalizable, y solo hará falta un número finito de parámetros para renormalizarla completamente. Más adelante introduciremos la constante de acoplamiento renormalizada h_R y con ella podremos renormalizar la teoría en su totalidad.

Como sabemos, el propagador en 4 dimensiones está dado por 263. Podemos generalizar esto a d dimensiones, y el propagador estaría dado por

$$D(x-y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2} = \frac{C_\phi}{|x-y|^{d-2}}, \quad C_\phi = \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{4\pi^{\frac{d}{2}}}. \quad (356)$$

donde se ha impuesto que la masa del campo sea cero, porque vamos a estudiar una teoría con simetría conforme y por tanto debe ser invariante bajo cambios de escala.

El operador ϕ_a^2 del defecto en dos dimensiones es una deformación en dimensión $d < 4$, y se espera que produzca un flujo en el grupo de renormalización del defecto, así que vamos a encontrar la función β del defecto de la teoría. Se realizará la renormalización con teoría de perturbaciones en dimensión $d = 4 - \epsilon$ y después se hará tender ϵ a cero.

Como vimos anteriormente, podemos renormalizar, en este caso, el acoplamiento desnudo del defecto, h_0 . Para ello la función a 1 punto $\langle 0 | T \{ \phi_a(x) \phi_a(y) \} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_a(x) \phi_a(0) | 0 \rangle$, donde se ha hecho $y = 0$ usando la invariancia bajo traslaciones, debe ser finita a una distancia $|x|$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Los diagramas que contribuyen a $\langle 0 | \phi_a(x) \phi_a(0) | 0 \rangle$ son la serie de diagramas de la figura 11.

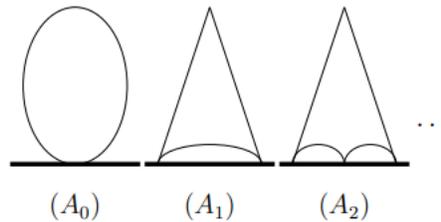


Figura 11: Serie de diagramas que contribuyen al valor esperado. Las líneas gruesas representan el defecto. Ref. [3]

Podemos ver como los vértices en el defecto van formando una cadena. En A_0 hay 1 vértice, en A_1 hay 2 y así sucesivamente. El momento en el defecto se tiene que conservar.

Vamos a calcular la función a un punto en el espacio de momentos, y entonces implementaremos la renormalización. Como se trata de un defecto de superficie, la transformada de Fourier de la función a 1 punto será

$$\langle 0 | \phi_a(x) \phi_a(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^{d-2}m}{(2\pi)^{d-2}} \int \frac{d^{d-2}n}{(2\pi)^{d-2}} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-i(m+n)x} \langle \phi_a(k, m) \phi_a(-k, n) \rangle. \quad (357)$$

Los campos en el espacio de momentos son $\phi_a(k, m)$, donde k es el momento 2-dimensional a lo largo del defecto, y este está conservado, por eso debe aparecer con signo cambiado. m es un momento $(d-2)$ -dimensional. Vamos a renormalizar la función a un punto $\langle 0 | \phi_a(x) \phi_a(0) | 0 \rangle$, que es equivalente a hacer que $\langle 0 | \phi_a(k, m) \phi_a(-k, n) | 0 \rangle$ se haga finito cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

La contribución principal a $\langle 0 | \phi_a(k, m) \phi_a(-k, n) | 0 \rangle$ será la proveniente del diagrama de A_0

$$A_0 = -2h_0 \frac{N}{(k^2 + m^2)(k^2 + n^2)} \quad (358)$$

donde el factor N viene de tener en cuenta que los N campos dan una contribución igual, y el propagador tiene esta forma ya que los momentos antes y después del defecto serán (k, m) y $(-k, n)$, respectivamente. Entonces el propagador será de la forma $1/(k, m)^2 = 1/(k^2 + m^2)$.

A partir de la contribución A_1 comienzan a aparecer loops en el defecto, por lo que habrá que tener en cuenta la integración con peso $d^{d-2}k/(2\pi)^{d-2}$. Este factor será:

$$t(k) = -2h_0 \int \frac{d^{d-2}p}{(2\pi)^{d-2}} \frac{1}{k^2 + p^2} = -h_0 2^{3-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} k^{d-4} \Gamma(2 - \frac{d}{2}), \quad (359)$$

donde p es el momento que no está fijado por la conservación de energía-momento.

Por cada vértice que añadamos, aparecerá un nuevo loop y por tanto tendremos que añadir un término $t(k)$. De esta manera tenemos que cada término A_n será

$$A_n = t^n(k) A_0. \quad (360)$$

Sumando a los infinitos términos, podremos calcular la función a 1 punto

$$\langle 0 | \phi_a(k, m) \phi_a(-k, n) | 0 \rangle = \sum_n A_n = \frac{A_0}{1 - t(k)} = \frac{-2h_0 \frac{N}{(k^2+m^2)(k^2+n^2)}}{1 + h_0 2^{3-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} k^{d-4} \Gamma(2 - \frac{d}{2})}. \quad (361)$$

Tenemos que en $d = 4 - \epsilon$, la función $t(k) = -\frac{h_0}{\pi\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)$ al hacer un desarrollo en torno a ϵ pequeño. Por tanto al tender $\epsilon \rightarrow 0$, esta función diverge, y entonces la función a 1 punto también lo hace. Ahora deberemos definir nuestra escala μ para definir el proceso de renormalización. Lo definiremos de la siguiente manera

$$\frac{\mu^\epsilon}{h_0} = \frac{1}{h_R} - \frac{1}{\pi\epsilon} \Rightarrow h_0 = \mu^\epsilon \frac{h_R}{1 - \frac{h_R}{\pi\epsilon}}. \quad (362)$$

Entonces, la función a 1 punto renormalizada quedará

$$\langle 0 | \phi_a(k, m) \phi_a(-k, n) | 0 \rangle = \frac{-2h_R \mu^\epsilon}{(k^2 + m^2)(k^2 + n^2)} \cdot \frac{N}{1 - \frac{h_R}{\pi\epsilon} + \mu^\epsilon h_R 2^{3-d} \pi^{1-\frac{d}{2}} k^{d-4} \Gamma(2 - \frac{d}{2})}. \quad (363)$$

Sustituyendo $d = 4 - \epsilon$ en el denominador tenemos

$$1 + \frac{h_R}{2\pi} \left[-\frac{2}{\epsilon} + \left(\frac{\mu 2\pi^{\frac{1}{2}}}{k} \right)^\epsilon \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right] \quad (364)$$

Vamos a hacer un desarrollo en torno a ϵ pequeño en el denominador. Utilizando el desarrollo en serie de la función $\Gamma(x)$ de Euler en torno a cero

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^1) \quad (365)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni; y el desarrollo en serie de Taylor de

$$\left(\frac{\mu 2\sqrt{\pi}}{k} \right)^\epsilon = 1 + \log \frac{2\mu\sqrt{\pi}}{k} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (366)$$

llegamos al resultado final:

$$\langle 0 | \phi_a(k, m) \phi_a(-k, n) | 0 \rangle = \frac{-2h_R \mu^\epsilon}{(k^2 + m^2)(k^2 + n^2)} \frac{N}{1 + \frac{h_R}{2\pi} [\log \frac{4\mu^2\pi}{k^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^1)]}. \quad (367)$$

Vemos como al hacer $\epsilon \rightarrow 0$ este no diverge, por tanto lo hemos renormalizado.

Vamos a calcular ahora la función β de la ecuación 348. Para ello vamos a despejar el acoplamiento renormalizado en función del acoplamiento desnudo

$$h_R = \frac{h_0}{\mu^\epsilon + \frac{h_0}{\pi\epsilon}}. \quad (368)$$

Haciendo entonces

$$\beta(h_R) = \mu \frac{dh_R}{d\mu} = \frac{\mu^\epsilon \epsilon}{h_0} (-h_R^2) = -\epsilon h_R \left(1 - \frac{h_R}{\pi\epsilon}\right) \Rightarrow \beta(h_R) = -\epsilon h_R + \frac{h_R^2}{\pi}. \quad (369)$$

Esta función β es *exacta*, ya que h_R por cómo se ha definido, cancela todas las divergencias a órdenes superiores. Podemos preguntarnos en que punto h_R^* la función $\beta = 0$, ya que de esta manera la constante de acoplo no depende de la escala de energía. Haciendo $\beta = 0$, encontramos un punto fijo inarroyo exacto:

$$h_R^* = \pi\epsilon = \pi(4 - d). \quad (370)$$

Cuando la función β se anula a este valor h_R^* , se dice entonces que la teoría es invariante de escala. Cuando se disminuye la energía, el sistema fluye a este punto fijo. Por definición, cualquier punto fijado del grupo de renormalización es invariante de escala. En este punto, la constante de acoplamiento no cambia aunque se disminuya más la energía.

7. Conclusiones

En este trabajo se han establecido las bases matemáticas para las transformaciones de Lorentz y Poincaré, y se han derivado las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del principio de mínima acción. Se ha demostrado cómo las simetrías en estas transformaciones inducen cantidades conservadas, según el teorema de Noether, proporcionando una estructura matemática coherente para describir las leyes de la naturaleza en la física.

Se ha encontrado el papel fundamental de los espinores en la Teoría Cuántica de Campos, estudiando sus representaciones y transformaciones. Los espinores, que son soluciones a las ecuaciones de Dirac y Weyl, permiten describir partículas con espín $1/2$. En particular, se han encontrado los espinores de Weyl, Dirac y Majorana.

Además, se han construido acciones para distintos tipos de partículas clásicas a partir de cantidades invariantes bajo transformaciones específicas, derivando sus ecuaciones de movimiento. Esto ha permitido clasificar los espinores de Weyl, Dirac y Majorana según sus propiedades de espín y masa, con los fermiones de Dirac y Majorana siendo los únicos que pueden tener masa.

Se ha definido el concepto de teorías gauge y cómo las derivadas covariantes se utilizan para calibrar una teoría y hacerla invariante gauge, aplicándolo al campo electromagnético. Se ha introducido el acoplamiento mínimo a la materia, esencial para describir las interacciones electromagnéticas en el marco de la electrodinámica cuántica (QED).

La cuantización de campos escalares ha llevado a la identificación de estados multipartícula y a la existencia de antimateria, mostrando que la carga eléctrica conservada es la resta de partículas menos antipartículas. Se han introducido las interacciones entre campos escalares mediante la matriz S y la fórmula de reducción LSZ, desarrollando la teoría de perturbaciones y los propagadores de Feynman, simplificando los cálculos de los valores esperados de vacío en cualquier proceso usando el Teorema de Wick.

Finalmente, se ha estudiado el proceso de renormalización, esencial para resolver las divergencias en las teorías cuánticas de campos. Se han clasificado las teorías en renormalizables y no renormalizables, destacando la libertad asintótica en teorías como la Cromodinámica Cuántica (QCD) y la vital importancia de la función β .

En el estudio de defectos dos-dimensionales en campos escalares, se ha encontrado un punto fijo de la función β , estableciendo una teoría con simetría conforme en bajas energías.

Referencias

- [1] Michele Maggiore. (2005). *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, Oxford.
- [2] M.E. Peskin and S.V. Schroeder. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Book Publishing, Reading, Massachusetts.
- [3] S. Giombi and B. Liu. (2023). *Notes on a Surface Defect in the $O(N)$ Model*. Princeton University, Princeton.
- [4] J. I. Illana. Teoría de Campos y Partículas. [Diapositivas] <https://www.ugr.es/~jillana/Docencia/TCP/t1.pdf>. Link
Universidad de Granada, Granada.