

Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN FÍSICA

Curso 2023-24

---

# Emergencia, ruptura de simetría y dualidad

---

***Autor:***

Diego Larrea Rodríguez

---

***Tutor:***

Daniele Musso

---

Trabajo de Fin de Grado

Whenever I find myself growing grim about the mouth; whenever it is a damp, drizzly November in my soul; whenever I find myself involuntarily pausing before coffin warehouses, and bringing up the rear of every funeral I meet; and especially whenever my hypos get such an upper hand of me, that it requires a strong moral principle to prevent me from deliberately stepping into the street, and methodically knocking people's hats off – then, I account it high time to get to sea as soon as I can.

---

— HERMAN MELVILLE, *Moby Dick or, The Whale*

And it's about time  
And this is what it looks like

---

— MATTY HEALY (The 1975)

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Estableciendo el formalismo</b>	<b>9</b>
1.1. El principio de mínima acción . . . . .	10
1.1.1. Observaciones . . . . .	15
1.2. Extensión del principio de mínima acción a teorías de campos . . . . .	15
1.2.1. A qué nos referimos con <i>simetría</i> . . . . .	18
1.3. Fundamentos de electrodinámica clásica . . . . .	19
1.4. Ruptura espontánea de la simetría . . . . .	22
<b>2. Dualidades. Un ejemplo de emergencia</b>	<b>27</b>
2.1. <i>Particle - Vortex duality</i> en $2 + 1$ dimensiones . . . . .	28
2.1.1. Vórtices - Cargas . . . . .	38
<b>3. Emergencia. Reflexión sobre el reduccionismo y conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>

# Etimología (en el lenguaje común)

**emergencia.** (Del lat. *emergens*, *-entis*, emergente). f. Acción y efecto de emerger.  
2. Suceso, accidente que sobreviene.

**emerger.** (Del lat. *emergĕre*). intr. Brotar, salir a la superficie del agua u otro líquido.  
Usado también en sentido figurado.

**emergente.** (De *emerger*). adj. Que emerge.  
2. Que nace, sale y tiene principio de otra cosa.

**dualidad.** (Del lat. *dualitas*, *-ātis*). f. Existencia de dos caracteres o fenómenos distintos en una misma persona o en un mismo estado de cosas.

**simetría.** (Del lat. *symmetrĭa*). f. Correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo.

*Diccionario de la Real Academia Española*

## Convenios

Los índices griegos representan componentes espaciotemporales y los índices latinos minúsculos componentes puramente espaciales. Las coordenadas espaciotemporales se representan como  $x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ . El símbolo en negrita  $\mathbf{x}$  se refiere solo a componentes espaciales  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ .

El convenio usado para la métrica de Minkowski es

$$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) .$$

Se considera el convenio de suma de Einstein, i.e. se suma sobre índices repetidos. Se usan unidades naturales:  $c = 1$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz.

# Introducción

La primera reacción que casi siempre ha surgido cuando alguien, sea o no ajeno al ámbito científico, ha preguntado a este autor sobre el tema de su Trabajo de Fin de Grado es: “Pero, ¿emergencia... de *emergencia*? ¿O en qué sentido?”. En todos los casos, aquí la persona se refiere a la segunda acepción del sustantivo *emergencia* recogida en el diccionario de la RAE: “*Suceso, accidente que sobreviene*”. La confusión con este término se aclara en las primeras páginas de este texto, donde la etimología en el lenguaje común nos revela otra acepción igualmente común (que resulta ser la primera) pero que a menudo se ignora en una primera reacción: “*Acción y efecto de emerger*”. Tras esto, la persona puede hacerse una primera idea sobre este concepto, aunque en muchas ocasiones errónea.

Esto revela un primer problema: en general, no se entiende correctamente el concepto de *emergente* en física. Sin embargo, este está continuamente presente y es la base de muchas ramas de la física, como el estudio de la materia condensada, y además se utiliza en otras ciencias, como la biología, o en disciplinas tan distintas como la sociología. Podemos identificar un fenómeno emergente como aquel que surge a partir de otros fenómenos fundamentales (es decir, a una *escala* distinta) y que no es *aparente* desde estas bases o no se deja describir por esos fenómenos más fundamentales.

Asignaturas del Grado en Física, como la física del estado sólido (rama del estudio de la materia condensada centrada en, valga la redundancia, el estado sólido) están basadas completamente en fenómenos emergentes: desde la estructura de bandas que da lugar a la clasificación de los materiales en función de su conducción eléctrica hasta la dispersión de fonones en una red cristalina, todos estos fenómenos, que conforman una rama amplia e independiente de estudio, no son aparentes, respectivamente, desde la física de partículas elementales o la física atómica, dos asignaturas también de cuarto curso del grado. Ob-

servando un electrón o un átomo de forma aislada, es aparentemente imposible anticipar tales comportamientos que emergen cuando muchos de estos componentes interactúan en sistemas más grandes. Esto sugiere que la emergencia está relacionada en general con la *complejidad* del sistema, en lo que se refiere al número y la interacción de sus componentes elementales.

En este trabajo desarrollaremos un ejemplo explícito en el que se observa un fenómeno emergente. Para ello, comenzaremos realizando una introducción teórica que supone la recapitulación de las herramientas y formalismos necesarios para abordar al completo y de forma correcta las teorías que manejaremos a continuación. Empezaremos formulando el principio de mínima acción y terminaremos sintetizando las ideas fundamentales de las teorías de campos y de la electrodinámica clásica.

El capítulo siguiente supone el bloque central del trabajo: el análisis extenso de un ejemplo de emergencia. Para ello, tomaremos la teoría fenomenológica más sencilla que describe las transiciones de fase (la teoría de Landau), observaremos la fase de superfluido a baja energía y usaremos como contexto el concepto de *dualidad* para ver esto como un fenómeno emergente en este régimen específico. Entendemos por *dualidad* dos descripciones alternativas de la misma física. Cada punto de vista es igualmente válido, y uno puede elegir libremente entre uno u otro. El ejemplo que estudiaremos es la dualidad conocida como *particle-vortex duality*, ejemplo muy ilustrativo y sencillo en el que los vórtices, un fenómeno que ocurre en el superfluido, admiten una descripción dual en términos de partículas cargadas no dinámicas en presencia de un campo electromagnético. Observaremos directamente la estrecha relación entre la *ruptura de simetría* en los distintos regímenes de energía y la aparición de fenómenos emergentes en el sistema.

La emergencia revela características profundas del comportamiento de ciertos sistemas y de los principios que los rigen. Tras haberse familiarizado con todos los conceptos previamente mencionados, el último capítulo consistirá en una reflexión sobre la importancia de las consecuencias de la existencia de comportamientos emergentes, sus posibles orígenes, como la ruptura de simetría, y las consideraciones teóricas y filosóficas de estos. El concepto de emergencia es un tema controvertido tanto en los ámbitos científicos como en

los filosóficos. Está estrechamente relacionado con el reduccionismo, la filosofía científica principal que se toma en cualquier ciencia: la capacidad de reducir cualquier comportamiento a una serie de principios más fundamentales. La emergencia subraya la importancia de la investigación y la elaboración de teorías efectivas a distintas escalas, igual de importantes, que permitan describir tales comportamientos emergentes. Este capítulo tiene como objetivo ser una introducción a estos conceptos y destacar sus principales ideas, basándonos en los artículos de los físicos Philip Anderson y Steven Weinberg recogidos en [1], y el libro “*Dreams of a Final Theory*” escrito por el último [2]; dos textos que han servido de principal inspiración para este trabajo.

Al final del trabajo, podremos regresar al principio y volver sobre las acepciones de los términos que componen el título de este texto. Nos daremos cuenta de que algunas palabras, en el lenguaje común, difieren de su significado en el presente contexto y no son siempre las más adecuadas en física, aunque muchas de ellas coinciden y no dan lugar a equivocación. Habremos dado entonces una definición más apropiada para cada una. Ahora bien, este trabajo no solo pretende clarificar un fenómeno específico, sino también inspirar una apreciación más amplia y profunda de los principios que rigen los sistemas físicos. Al desentrañar las capas de complejidad observamos una belleza intrínseca en la naturaleza, que no solo desafía al conocimiento científico, sino que también nos enfrenta a cuestiones filosóficas fundamentales sobre la naturaleza del mundo que nos rodea y los límites del conocimiento humano.

# Capítulo 1

## Estableciendo el formalismo

I started the day with some nothin' tea. Nothin' tea is easy to make. First, get some hot water, then add nothin'.

---

— ANDY WEIR, *The Martian*

Antes de empezar a estudiar las dualidades y ejemplos que motiven la discusión de los comportamientos emergentes en física, necesitamos hacer una recapitulación de las herramientas con las que trabajaremos a lo largo del trabajo. Se tratará de que el trabajo sea en su mayor parte autocontenido, no siempre extendiéndose en las demostraciones teóricas de lo que se va a presentar, pues se asumen conocimientos básicos en mecánica clásica o cálculo vectorial, sino tratando de recordar los puntos más importantes de estos o aquellos que sean estrictamente necesarios para futuros capítulos.

Comenzaremos formulando el principio de mínima acción y derivando las ecuaciones de Euler-Lagrange [3, 4]. Este, además de ser el principio fundamental sobre el que se construye cualquier teoría física clásica, nos ofrece una visión conceptualmente interesante sobre las simetrías y la dinámica de un sistema, ya que proporciona una descripción sintética que simplifica considerablemente muchos problemas físicos; podremos también extrapolar este principio a una reformulación de la relatividad general o a las integrales de camino cuánticas.

A continuación, generalizaremos el principio de mínima acción a las teorías de campos, sobre lo que podremos introducir la electrodinámica clásica [4, 5]. Con esto, tendremos

las herramientas para derivar las ecuaciones de Maxwell, que serán una de las dos partes importantes en el ejemplo de dualidad que estudiaremos en el Capítulo (2). Fomentaremos el formalismo de las teorías de campos a partir de las consecuencias y criterios de las simetrías sobre los campos. Para ello, tendremos que introducir brevemente el concepto de *simetría* así como el teorema de Noether [6, 7], y terminaremos estudiando un modelo sencillo de teoría cuyo grupo de simetría es espontáneamente roto en un régimen de bajas energías [8], que nos servirá de base para analizar las transiciones de fase en un superfluido, que supone la otra parte de la dualidad que analizaremos en este trabajo.

## 1.1. El principio de mínima acción

[Fermat's] principle can not be the cause, for otherwise we would be attributing knowledge to nature: and here, by *nature*, we understand only that order and lawfulness in the world, such as it is, which acts without foreknowledge, without choice, but by a necessary determination. [...] The principle you take as a basis for your proof, to wit, that nature always acts by the shortest and simplest path, is only a moral principle, not a physical one. It is not and *can not be* the cause of any effect in nature.

---

— CLAUDE CLERSELIER a Pierre de Fermat (1662) [9]

En las teorías de campos se trabaja con funciones de los campos y de sus derivadas, a partir de un principio fundamental conocido como el *principio de mínima acción*. Para introducir estos conceptos es más natural comenzar por su formulación desde la mecánica clásica. A partir de aquí, entenderemos mejor estas herramientas, con las que estaremos trabajando continuamente.

La formulación más general de la ley de movimiento de los sistemas mecánicos es el principio de mínima acción (o principio de Hamilton). Según este principio, todo sistema mecánico está descrito por una función definida:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) , \quad (1.1)$$

o más brevemente,  $L(q, \dot{q})$ . Esta función se denomina Lagrangiano, que depende de  $N$  coordenadas generalizadas  $q_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $N$  velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ . Asumi-

mos que el Lagrangiano no depende (directamente) del tiempo.

Las coordenadas generalizadas son unas coordenadas paramétricas, un conjunto cualquiera de parámetros numéricos que sirven para determinar de manera unívoca la configuración de un sistema con un número finito de grados de libertad,  $N$ . Conociendo simultáneamente las coordenadas y las velocidades se determina completamente el estado del sistema y permite, en principio, predecir su movimiento futuro (por eso el Lagrangiano depende tan solo de  $q$  y  $\dot{q}$ ).

La evolución del sistema dinámico desde un tiempo inicial  $t_A$  a un tiempo final  $t_B$  es descrita por una curva  $\gamma$  parametrizada por el tiempo en el espacio  $2N$ -dimensional de coordenadas  $q_i$  y  $\dot{q}_i$ . Entonces,

$$\gamma = \{q_1(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_N(t)\} \quad \text{para } t \in [t_A, t_B], \quad (1.2)$$

donde estamos pensando las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas como variables independientes. La restricción del Lagrangiano (1.1) a una curva (1.2) define una función que depende del tiempo a través de  $q$  y  $\dot{q}$ .

Se define la *acción*  $S$  como un funcional de la curva  $\gamma$  y que se denota como  $S[\gamma]$ , pero que abreviaremos simplemente como  $S$ . El funcional es una aplicación que asocia un número real a una curva. El sistema se mueve a lo largo de la curva  $\gamma$  de manera que se define:

$$S \equiv \int_{\gamma} L(q, \dot{q}) dt. \quad (1.3)$$

El *principio de mínima acción* establece que, suponiendo que en los instantes  $t = t_A$  y  $t = t_B$  el sistema ocupa posiciones conocidas, caracterizadas por cada uno de los conjuntos de valores de las coordenadas  $q^{(A)}$  y  $q^{(B)}$ , el sistema se mueve entre estas posiciones a través de una curva  $\bar{\gamma}$  que conecte los puntos  $A$  y  $B$  de manera que la integral

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}) dt \quad (1.4)$$

tome el *menor valor posible*.

Por simplicidad, supongamos que el sistema solo tiene un grado de libertad, de manera que tenemos una sola función  $q(t)$ . Sea precisamente  $q = q(t)$  la función para la cual  $S$  es un mínimo, esto implica que  $S$  crece cuando se sustituye  $q(t)$  por una función cualquiera

$$q(t) + \delta q(t) , \quad (1.5)$$

donde  $\delta q(t)$  es una función que es pequeña en todo el intervalo de  $t_A$  a  $t_B$  (es decir, una *variación* de la función  $q(t)$ , o visto de otra manera, una variación de la curva  $\bar{\gamma}$  para la que la acción es mínima). Puesto que para  $t = t_A$  y  $t = t_B$  todas las funciones (1.5) deben tomar los mismos valores  $q^{(A)}$  y  $q^{(B)}$  (la curva variada conecta los mismos puntos), se tiene:

$$\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0 . \quad (1.6)$$

Lo que varía  $S$  cuando se reemplaza  $q$  por  $q + \delta q$  está dado por:

$$\int_{t_A}^{t_B} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) dt - \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}) dt . \quad (1.7)$$

El desarrollo en serie de esta diferencia en potencias de  $\delta q$  comienza por términos de primer orden. La condición necesaria de mínimo (en general, de extremal <sup>1</sup>) de  $S$  es que estos términos se anulen. Se le llama variación de la integral:

$$\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}) dt , \quad (1.8)$$

y así el principio de mínima acción puede escribirse como:

$$\delta S = 0 . \quad (1.9)$$

Efectuando la variación, a través de derivadas parciales del Lagrangiano:

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}) dt = \int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 , \quad (1.10)$$

y teniendo en cuenta que

$$\delta \dot{q} = \delta \frac{d}{dt} q , \quad (1.11)$$

---

<sup>1</sup>Es decir, minimizar o maximizar. Luego es más correcto hablar de un principio *variacional*.

y que la variación conmuta con la derivada:

$$\delta \frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} (\delta q) , \quad (1.12)$$

podemos integrar por partes el segundo sumando de la expresión (1.10) y se obtiene:

$$\delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 . \quad (1.13)$$

En virtud de las condiciones (1.6), el primer término de esta expresión desaparece. Queda una integral, la cual debe anularse para toda variación infinitesimal  $\delta q$ . Esto es solamente posible si el integrando es idénticamente nulo, y consecuentemente se obtiene la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 . \quad (1.14)$$

Si hay varios grados de libertad, las  $N$  funciones diferentes  $q_i(t)$  deben variar independientemente. Se obtienen entonces  $N$  ecuaciones de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, N . \quad (1.15)$$

Estas ecuaciones diferenciales para la curva  $\bar{\gamma}$  descrita por las funciones  $q_i(t)$  que minimizan la acción se llaman *ecuaciones de Euler-Lagrange*. Si se conoce el Lagrangiano de un sistema mecánico dado, a partir de las condiciones iniciales que caractericen el estado del sistema en un instante dado, entonces las ecuaciones (1.15) establecen la relación entre las aceleraciones (derivadas segundas), las velocidades (primeras derivadas) y las coordenadas, es decir, son las *ecuaciones del movimiento* del sistema.

Por ejemplo, en el caso de la partícula  $i$ -ésima de un sistema de partículas, las ecuaciones de Euler-Lagrange se corresponden a la ecuación de Newton:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i . \quad (1.16)$$

En mecánica clásica, el Lagrangiano de un sistema se define como la diferencia entre la energía cinética ( $T$ ) y la energía potencial ( $V$ ) como:

$$L = T - V , \quad (1.17)$$

Recordando los fundamentos de la mecánica clásica y las expresiones de estas energías para un sistema de partículas, podemos ver que, al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.15) a cada coordenada generalizada  $q_i$ , obtenemos ecuaciones que se corresponden a las ecuaciones de Newton (1.16) para cada partícula del sistema. Las diferentes formulaciones de la mecánica clásica (Lagrangiana y Newtoniana) proporcionan descripciones equivalentes de la dinámica de un sistema de partículas. Son distintas visiones para abordar un mismo problema.

El principio de mínima acción es un principio universal de la física clásica, válido en cualquier sistema mecánico considerado. Este se parece mucho, y tanto que básicamente es lo mismo, al principio de Fermat, que había sido introducido años antes [9]. Este es el principio de mínimo tiempo, un principio extremal que lleva a las leyes de Snell de la refracción [10]: la luz va por el camino que conlleva el mínimo tiempo en recorrer <sup>2</sup>.

La relatividad general se puede formular a partir de un principio de mínima acción: David Hilbert propuso en 1915 una acción para la relatividad general que llevaba consigo las ecuaciones de campo de Einstein [11]. En mecánica cuántica, Richard Feynman intentó formulaciones inspiradas en este principio durante sus años de doctorando en Princeton bajo la supervisión de John Wheeler [12]. La obsesión de Feynman por esto culminaría posteriormente en las integrales de camino [13], donde se consideran todas las posibles trayectorias entre dos puntos en el espacio-tiempo, es decir, todas las contribuciones de las infinitas historias del sistema ponderadas por su amplitud de probabilidad <sup>3</sup>. La suma (o integral) de todas estas contribuciones da lugar a una amplitud de probabilidad para el sistema que está en acuerdo con los principios de la mecánica cuántica. ¡Todas las trayectorias (las curvas  $\gamma$ ) contribuyen al resultado final!

---

<sup>2</sup>En general, un camino extremo.

<sup>3</sup>El principio de mínima acción clásico se puede ver como caso límite de la integral de camino.

### 1.1.1. Observaciones

Sean dos Lagrangianos  $L$  y  $L'$  que solo difieren en la derivada total (en este caso, con respecto al tiempo) de una función cualquiera de las coordenadas y del tiempo  $f(q, t)$ :

$$L' = L + \frac{d}{dt}f(q, t) . \quad (1.18)$$

Las integrales (1.4) calculadas para estos dos Lagrangianos están ligadas por la relación:

$$S' = \int_{t_A}^{t_B} L'(q, \dot{q}) dt = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}) dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{df}{dt} dt = S + f(q^{(B)}, t_B) - f(q^{(A)}, t_A) , \quad (1.19)$$

es decir, difieren en un término que desaparece al variar la acción, por (1.6). De modo que:

$$\delta S' = \delta S . \quad (1.20)$$

La condición extremal de  $S'$  coincide con la de  $S$ , y la forma de las ecuaciones de movimiento queda invariable. De esta manera, la función de Lagrange se define con la indeterminación aditiva de la derivada total de cualquier función de las coordenadas y del tiempo.

Esta consecuencia se extenderá en teorías de campos, donde la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas se corresponde en ese caso a la divergencia de una función del campo.

## 1.2. Extensión del principio de mínima acción a teorías de campos

En el contexto de teoría de campos, un campo es una función matemática que asigna un valor a cada punto en el espacio-tiempo. Estos campos pueden representar diversas entidades físicas, como el campo electromagnético o, en teoría cuántica de campos, las partículas elementales como el electrón o el quark, entre otros.

En una teoría de campos, los campos son los objetos fundamentales sobre los cuales se construye la descripción de las interacciones y los procesos físicos. Es una extensión de la descripción que teníamos para una única partícula, en la que podemos estudiar el

comportamiento de todo el sistema como un medio continuo que se extiende en todas las direcciones espaciales. Mientras que los sistemas físicos formados por un conjunto de partículas interactuantes de la mecánica clásica son sistemas con un número finito de grados de libertad cuyas ecuaciones de movimiento vienen dadas por ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo, los campos presentan variación en el espacio, por lo que sus ecuaciones de movimiento vendrán dadas entonces por ecuaciones en derivadas parciales.

Representamos un campo genérico como una función  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . Si el campo tiene una única componente y se comporta como un escalar bajo transformaciones, entonces se llama campo *escalar*. Si las componentes del campo medidas por diferentes observadores se comportan como un vector, entonces se dice que se tiene un campo *vectorial*. Además, también existen campos tensoriales.

Una cantidad *escalar* tiene el mismo valor en todos los marcos inerciales. Por lo tanto, el atributo “escalar” no es más que la declaración geométrica correspondiente a la invarianza física: cada observador en su respectivo marco inercial observa la misma física. Aquí nos referimos al comportamiento escalar con respecto a las transformaciones de Lorentz. Al igual que se puede construir un cálculo tensorial en el espacio con respecto a rotaciones espaciales, también se puede construir un cálculo tensorial en el espacio-tiempo con respecto a las transformaciones de Lorentz.

Un campo escalar es una función espaciotemporal  $\phi(x)$  que se transforma de tal manera que la función transformada  $\phi'$ , evaluada en el punto transformado  $x'$ , coincide con la función original  $\phi$  evaluada en el punto original. Matemáticamente,

$$\phi'(x') = \phi(x) . \tag{1.21}$$

La acción en teoría de campos se define como un escalar de Lorentz. Por tanto, el respectivo Lagrangiano debe ser también escalar: todos sus términos se tienen que comportar como escalares (i.e. sus índices deben estar contraídos) para garantizar que la acción es un escalar y por tanto invariante Lorentz.

La invarianza Lorentz es un requisito básico para construir cualquier teoría física, pues es la formalización del principio de relatividad especial. En el siguiente capítulo veremos cómo la electrodinámica clásica es un perfecto ejemplo en el que se toma como fundamento esta invarianza.

La formulación Lagrangiana que teníamos anteriormente debe generalizarse a una más adecuada al medio continuo en todo el espacio-tiempo. La generalización más obvia es definir la acción como la integral de una función escalar  $\mathcal{L}$ , denominada *densidad Lagrangiana* (a la que en próximos capítulos nos referiremos simplemente como Lagrangiano, como se suele hacer, en un abuso de terminología) integrada sobre el volumen donde existe el campo o medio continuo:

$$S = \int L dt = \int dt \int_V d^3x \mathcal{L} , \quad (1.22)$$

donde, para un único campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$ ,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) , \quad (1.23)$$

de tal forma que la densidad Lagrangiana depende tanto del campo  $\phi(x)$  como de sus derivadas espaciotemporales. Además, podemos ver que  $\mathcal{L}$  tiene que ser escalar, ya que la cantidad  $d^4x$  en (1.22) se transforma como un escalar.

El Lagrangiano asociado a (1.23) es

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) . \quad (1.24)$$

Al igual que ocurre para una partícula, podemos preguntarnos cómo sería la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange para un campo. Para obtener estas ecuaciones, se procede de manera similar a lo visto en la Sección (1.1). Generalizando el principio de mínima acción para un campo:

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 , \quad (1.25)$$

se llega a una expresión análoga de la forma:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.26)$$

### 1.2.1. A qué nos referimos con *simetría*

A nivel clásico, en una teoría de campos, una *simetría* es una transformación que se puede aplicar a un sistema físico (sobre los campos o sobre las coordenadas) que deja las ecuaciones del movimiento invariantes. Equivalentemente, que bajo dicha transformación una solución a las ecuaciones de movimiento sigue siendo una solución.

En general, podemos ver una simetría como una transformación que deja la acción invariante:

$$S[\phi'] = S[\phi], \quad (1.27)$$

en el sentido en que la dinámica del sistema no cambia.

Las transformaciones más interesantes en física son invertibles (p.ej. rotaciones, traslaciones, shifts de fase), se pueden componer y cumplen los requisitos para los que las simetrías de una teoría formen un grupo. Más adelante, veremos que el teorema de Goldstone solo aplica cuando estos grupos son continuos.

Además, si una acción es simétrica bajo las transformaciones de un grupo continuo de simetría, existe una corriente  $j^\mu(\mathbf{x}, t)$  que es conservada, esto es, que satisface la ecuación de continuidad  $\partial_\mu j^\mu = 0$  y por tanto existe una cantidad que se conserva. Esto es lo que se conoce como el *teorema de Noether*, a través del cual podremos ver en futuros capítulos la existencia de corrientes conservadas en una teoría como la realización de este teorema.

### 1.3. Fundamentos de electrodinámica clásica

La *electrodinámica clásica* se refiere al estudio de la dinámica de los campos electromagnéticos y sus interacciones con objetos cargados <sup>4</sup>. El término “clásico” aquí se opone a lo cuántico. Además de su importancia directa y amplia en la física, el estudio de la electrodinámica clásica proporciona un claro ejemplo de cómo las simetrías e invariancias guían la definición y el estudio de una teoría. Las principales transformaciones involucradas en la electrodinámica clásica son las transformaciones de Lorentz y las transformaciones de gauge.

Para describir la dinámica de los campos electromagnéticos y la de objetos cargados definimos una densidad Lagrangiana adecuada, cuya integral espaciotemporal proporciona una acción. Esta última se trata dentro del marco variacional de un principio de mínima acción, como ya hemos visto en anteriores secciones. Para cumplir con la invariancia de Lorentz, la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  debe ser un escalar de Lorentz.

Podemos definir un campo vectorial 4-dimensional  $A^\mu$ , desde el que se pueden derivar los campos eléctrico y magnético de esta forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A},\end{aligned}\tag{1.28}$$

donde se descompone el 4-potencial como:

$$A^\mu(x) = (\varphi(x), \mathbf{A}(x)) .\tag{1.29}$$

Podemos ver que este campo vectorial contiene toda la información necesaria para describir ambos campos. Más concretamente, dada una configuración para  $A^\mu(x)$ , podemos usar (1.28) para derivar  $\mathbf{E}(x)$  y  $\mathbf{B}(x)$ . Sin embargo, nos podemos dar cuenta de que distintas configuraciones de  $A^\mu$  nos dan la misma configuración para los campos eléctrico

---

<sup>4</sup>También se describe la dinámica de dichos objetos cargados, pero en lo que concierne al trabajo no nos vamos a preocupar de esto.

y magnético. Específicamente, considerando una transformación de este tipo:

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \partial^{\mu}\alpha(x) , \quad (1.30)$$

donde  $\alpha(x)$  es una función escalar genérica y arbitraria. Comprobamos que para  $A'^{\mu}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Entonces, la información sobre los campos eléctricos y magnéticos está codificada en el potencial vector  $A^{\mu}(x)$  de manera redundante. Sin embargo, en realidad, son los campos eléctrico y magnético  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  los que medimos; son las cantidades físicas a las que tenemos acceso experimental y no el potencial vector  $A^{\mu}(x)$ . Por lo tanto, la redundancia de  $A^{\mu}(x)$  no es física, simplemente corresponde a una descripción sobrecargada de dicha física. Es físicamente irrelevante.

Dos configuraciones del campo vectorial del electromagnetismo relacionadas por (1.28) se dicen equivalentes *gauge*<sup>5</sup>, y describen la misma dinámica. Además, se requiere que la transformación (1.28) sea una simetría de la acción (al igual que la invarianza Lorentz) para excluir la información redundante de  $A^{\mu}(x)$  de la dinámica. Esto se conoce como *invarianza gauge*. La acción que describa el electromagnetismo debe ser a la vez invariante Lorentz e invariante gauge.

Se define el tensor antisimétrico electromagnético:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} , \quad (1.32)$$

de tal forma que

$$F_{0i} = (\mathbf{E})_i , \quad (1.33)$$

---

<sup>5</sup>Debido a esto, se suele referir al campo vectorial  $A^{\mu}$  como *campo de gauge*.

donde identificamos el campo eléctrico con las componentes “temporales” del tensor electromagnético. También podemos identificar el campo magnético,

$$F_{ij} = -\epsilon_{kij}(\mathbf{B})^k, \quad (1.34)$$

como las componentes puramente espaciales de  $F_{\mu\nu}$ .

Las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo se pueden derivar de una acción cuyo Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -A_\mu J^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.35)$$

donde el segundo término involucra únicamente a los campos electromagnéticos y que es no trivial en la ausencia de objetos cargados. Este término se puede comprobar que es por tanto invariante Lorentz e invariante gauge. El primer término describe las interacciones entre los campos y cargas externas, que vienen descritas a través de una corriente  $\mathbf{J}$  y densidad de corriente  $\rho$  (que puede ser observada en el laboratorio) en la 4-corriente

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J}). \quad (1.36)$$

Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $A_\mu$  resultan:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (1.37)$$

Esta no es más que la expresión covariante de las ecuaciones de Maxwell, donde la componente  $\nu = 0$  nos da la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (1.38)$$

Las componentes espaciales nos dan

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{J}. \quad (1.39)$$

Las dos ecuaciones de Maxwell restantes, que no dependen de las fuentes de carga externas,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (1.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.41)$$

se obtienen directamente desde (1.28) a partir de la identidad de Bianchi, que es la siguiente identidad matemática:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.42)$$

Si saturamos (1.37) con  $\partial_\nu$ :

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu, \quad (1.43)$$

dado que  $F^{\mu\nu}$  es antisimétrico y  $\partial_\nu \partial_\mu$  es simétrico, el término

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad (1.44)$$

es nulo, y por tanto tenemos la conservación de la 4-corriente  $J^\nu$ ,

$$\partial_\nu J^\nu = 0. \quad (1.45)$$

## 1.4. Ruptura espontánea de la simetría

El objetivo de este capítulo es estudiar distintas formas de teorías de campos, además de un caso sencillo de *ruptura espontánea de simetría*, en el que el sistema posee una simetría que no se manifiesta en el estado de mínima energía. Este es un fenómeno fundamental en la física de partículas, aunque a pesar de ser formalizado en este contexto por Nambu y Jona-Lasinio [14], sus raíces se encuentran en estudios previos de la física de la materia condensada, como la teoría del ferromagnetismo de Heisenberg [15] o la teoría fenomenológica de la superconductividad de Landau y Ginzburg [16], que inspiraría el mecanismo de Higgs [17, 18], piedra angular del modelo estándar de la física de partículas en el que la ruptura espontánea de la simetría explica cómo las partículas elementales adquieren masa.

Consideremos la siguiente teoría para un campo escalar real, con normalización canónica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - V(\varphi) . \quad (1.46)$$

Esta es la densidad Lagrangiana, y el Lagrangiano viene dado por:

$$L = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - V(\varphi) \right) , \quad (1.47)$$

y el Hamiltoniano, que esencialmente representa la energía del sistema, es

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi)}\partial_t\varphi - \mathcal{L} \right) \\ &= \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)(\partial_t\varphi) + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)(\nabla\varphi) + V(\varphi) \right) , \end{aligned} \quad (1.48)$$

donde recordamos el gradiente 3-dimensional:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . \quad (1.49)$$

Como los dos primeros términos de (1.48) son positivos, el estado de mínima energía será uno para el que  $\varphi$  sea constante. La densidad de energía en este caso, en un estado constante en todo el espacio-tiempo, es por tanto:

$$V(\varphi) , \quad (1.50)$$

y el estado de mínima energía será el estado para el que el potencial  $V(\varphi)$  sea un mínimo estable. Es decir, para un estado  $\varphi_0$  tal que:

$$V'(\varphi_0) = 0 \quad (1.51)$$

$$V''(\varphi_0) > 0 \text{ (en general)} . \quad (1.52)$$

Consideremos el caso en el que el campo no esté sujeto a ninguna fuerza, es decir, que no esté bajo la acción de un potencial:

$$V(\varphi) = 0 . \quad (1.53)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.26) para la teoría (1.46) vienen dadas simplemente por

$$\square\varphi = 0 , \quad (1.54)$$

donde se define  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ . En este caso estamos hablando de un campo libre *sin masa*.

Consideremos ahora el caso en el que

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 . \quad (1.55)$$

Entonces vemos que el vacío (el estado de mínima energía) viene dado por:

$$\varphi_0 = 0 . \quad (1.56)$$

Cuando  $\varphi \neq \varphi_0$ , es decir,  $\varphi \neq 0$ , representará un estado excitado respecto del de mínima energía. Podemos obtener las ecuaciones del movimiento del campo a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y obtenemos para nuestro campo la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\varphi = 0 . \quad (1.57)$$

En teoría cuántica de campos, a partir de las transformadas de Fourier podemos encontrar una solución como una onda plana de la forma  $e^{-ip \cdot x}$ , que implica, estudiando en (1.57),

$$(m^2 - p^2)\varphi = 0 . \quad (1.58)$$

Entonces,

$$p^2 = m^2 , \quad (1.59)$$

que es precisamente la relación de dispersión entre el momento y la masa de una partícula libre de masa  $m$ . Por tanto, concluimos que la teoría

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 , \quad \text{con } m^2 > 0 , \quad (1.60)$$

describe una partícula libre de masa  $m$  (es decir, el campo  $\varphi$  es *masivo*), que viene identificada en los términos cuadráticos del campo.

El campo representa la excitación respecto del estado fundamental de la teoría (el de menor energía). Si no hay fluctuación respecto del estado fundamental (el campo es cero) no hay partículas. Por eso, al estado fundamental se lo conoce como *vacío*. Si el campo es distinto de cero, este representa una fluctuación del vacío y sí hay partículas. Las partículas se describen mediante teorías de campos cuánticos, aunque el tratamiento se puede realizar de forma aproximada desde la teoría clásica.

Consideremos ahora la siguiente teoría de campos con densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4, \quad \text{con } m^2 > 0. \quad (1.61)$$

Entonces, tenemos:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4, \quad (1.62)$$

que tiene un único estado de equilibrio, correspondiente con un mínimo en  $\varphi = 0$ . Esta teoría representará una partícula relativista de masa  $m$  con un término de interacción  $\lambda\varphi^4$  (o sea, una partícula masiva no libre).

Ahora, consideremos una teoría de apariencia similar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4, \quad \text{con } \mu^2 > 0. \quad (1.63)$$

Nótese que respecto de (1.61) solo cambia el signo del segundo término. En este caso, el potencial es

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4, \quad (1.64)$$

que no tiene el mínimo en  $\varphi = 0$  sino que tiene dos mínimos en  $\varphi = \pm v$  donde  $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$  (de hecho  $\varphi = 0$  es un máximo local). Esto quiere decir que  $\varphi$  ahora no es por sí solo una fluctuación del estado de mínima energía. Para encontrar el campo que representa las excitaciones (y por tanto, las partículas) tenemos que escribir el lagrangiano “alrededor” del vacío. Tomando arbitrariamente el mínimo que está en  $\varphi = v$  (pues el sistema procedería de la misma forma, arbitraria), escribimos:

$$\varphi(x) = v + \rho(x), \quad (1.65)$$

y el Lagrangiano adoptará la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) - \mu^2 \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 + \text{const.} . \quad (1.66)$$

Ignorando los términos constantes (pues son irrelevantes por lo que respecta a la dinámica del sistema), vemos que  $\rho$  representa una partícula de masa  $m_\rho = \sqrt{2\mu^2}$ . Esta forma de obtener una teoría de campos que realmente representa partículas (fluctuaciones del vacío) recibe el nombre de *ruptura espontánea de la simetría*. La razón de este nombre se puede observar en el hecho de que la teoría de partida (1.63) es simétrica respecto del intercambio

$$\varphi \rightarrow -\varphi , \quad (1.67)$$

mientras que dicha simetría no es aparente en (1.66), en el estado de mínima energía. Sin embargo, la simetría sí que está presente, ya que es la responsable de que las constantes que aparecen en los términos  $\rho^2$ ,  $\rho^3$  y  $\rho^4$  no sean independientes.

Como veremos en un ejemplo en el siguiente capítulo, la ruptura espontánea de simetría también puede estar asociada con transiciones de fase en sistemas físicos. Estas transiciones pueden ocurrir a temperaturas o energías específicas y pueden tener importantes implicaciones para el comportamiento macroscópico del sistema.

## Capítulo 2

# Dualidades. Un ejemplo de emergencia

‘But what am I going to see?’

‘I don’t know. In a certain sense, it depends on you’

---

— STANISLAW LEM, *Solaris*

Entendemos por *dualidad* dos descripciones alternativas de la misma física. Cada punto de vista es igualmente válido, y uno puede elegir libremente entre uno u otro. En la práctica, a menudo hay ventajas al preferir un enfoque sobre el otro, por lo tanto es útil desarrollar tanto los métodos canónicos como los duales para entender mejor la física del sistema y tener una mayor cantidad de herramientas con las que tratarlo.

La dualidad puede ser exacta o aproximada. En el caso exacto, tener una dualidad significa tener dos descripciones alternativas pero del todo equivalentes de la dinámica del mismo sistema. En el caso aproximado, la equivalencia entre las dos descripciones solo vale en un régimen concreto (normalmente el régimen de baja energía) <sup>1</sup>.

Hay muchos ejemplos de dualidad. Estas juegan un papel muy importante en materia condensada, proporcionando descripciones alternativas y más sencillas de sistemas de muchos cuerpos interactuando. Nosotros consideraremos el *superfluido*, una fase de la materia que se caracteriza por la ausencia de viscosidad, permitiendo que el líquido fluya sin disipación de energía; concretamente a bajas energías, es decir, a bajas temperaturas, donde esta fase se observa. La caracterización y clasificación de las fases de la materia y de las transiciones de fase entre ellas es un propósito central de la física de la materia

---

<sup>1</sup>Normalmente, esto se conoce como “dualidad infrarroja” o *IR duality*, en inglés.

condensada. La organización más simple de esto es según la teoría de ruptura de simetría de Landau [19]. Tales fases, como la de superfluido, se distinguen por patrones de *ruptura espontánea de simetría*, caracterizados por un parámetro de orden. Las fases de la materia describen fenómenos *emergentes* del comportamiento colectivo de un gran número de partículas fuertemente interactivas, que no son evidentes a nivel microscópico. En el superfluido, esto es poder describir la dinámica de baja energía en términos de un modo de Goldstone. Veremos que estos se dejan describir en una descripción alternativa o *dual* como fotones en la teoría gauge del electromagnetismo de Maxwell, que ya vimos en la Sección (1.3).

Además, los vórtices en un superfluido se pueden describir como vórtices en la teoría del superfluido [20], o bien, en una descripción dual, como partículas cargadas con respecto a un campo de gauge tipo el campo electromagnético estándar. Esta dualidad, llamada *particle-vortex duality*, se refiere a una descripción aproximada de baja energía de un superfluido. Como la descripción dual en términos de un campo de gauge y partículas cargadas es aproximada y vale solo a bajas energías, se dice que este campo de gauge es emergente, en el sentido que emerge en este régimen específico.

Estudiaremos este ejemplo sencillo de dualidad siguiendo [21, 22].

## 2.1. *Particle - Vortex duality* en $2 + 1$ dimensiones

En sistemas bidimensionales de física de la materia condensada, los superfluidos admiten descripciones en términos de campos de gauge dinámicos emergentes, a través de la dualidad conocida como *particle-vortex duality*.

En 1937, Lev Landau propuso un modelo de campos teórico capaz de capturar las características esenciales de las transiciones de fase continuas o de segundo orden que involucran los superfluidos [19]. Se centraba en el concepto de un parámetro de orden  $\varphi(x)$ , que es una función en cada punto del espacio  $x$ , es decir, un campo. Es capaz de distinguir entre fases ordenadas y desordenadas: en la fase desordenada o fase normal, su valor medio o valor esperado en el estado de mínima energía es cero  $\langle \varphi \rangle = 0$ , mientras que en la fase

ordenada o de *superfluido* no es cero  $\langle \varphi \rangle = \varphi_0 \neq 0$ . Landau estableció la forma más simple de describir estas transiciones de fase relativas a un superfluido, en términos del campo escalar complejo  $\varphi(x)$ , a la que nos referiremos como Teoría A:

$$\mathcal{L}_A = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) + \mu(\varphi^* \varphi) - \lambda(\varphi^* \varphi)^2 . \quad (2.1)$$

El primer término, que contiene las derivadas temporales, representa las variaciones en el parámetro de orden  $y$ , por lo tanto, se trata del término cinético. El segundo término actúa como una masa para el parámetro de orden, y el tercero es un término de acoplamiento con el campo mismo. El parámetro  $\mu$  es el *potencial químico*, generalmente expresado como una función de la temperatura  $\mu = \mu(T)$ , donde las transiciones de fase ocurren a una temperatura crítica  $T_c$  tal que  $\mu(T_c) = 0$ . Cuando  $\mu$  cambia de signo, cambia el mínimo del potencial, y por tanto describe una fase diferente del sistema. Cuando  $\mu < 0$ , la energía potencial se minimiza cuando  $|\varphi| = 0$  y estamos en la fase desordenada. Pero cuando  $\mu > 0$ , la energía potencial tiene mínimos en  $|\varphi| = \pm v$ . Esto es lo que se conoce como “potencial de sombrero mexicano”

Ya hemos estudiado una teoría similar en la Sección (1.4), solo que aquí los campos reales se promueven a campos complejos <sup>2</sup>. Para lo que nos concierne en adelante, tomaremos  $\mu > 0$  y  $\lambda > 0$  y observaremos la dinámica de un superfluido. Podemos ver que la teoría es invariante bajo las transformaciones de fase global  $U(1)$ :

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x) . \quad (2.2)$$

Empezaremos encontrando los valores de expectación del vacío, para los que la simetría  $U(1)$  es espontáneamente rota, como veremos más adelante. Como  $\varphi$  es un campo complejo, se puede escribir en términos de dos campos reales  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , con normalización canónica, en la forma:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) . \quad (2.3)$$

---

<sup>2</sup>La consecuencia de esto se traduce en que la teoría posee una simetría sobre un grupo continuo, que tendrá efectos sobre los modos Goldstone, introducidos más adelante.

El Lagrangiano (2.1) se expresa entonces como

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2) + \frac{\mu}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2, \quad (2.4)$$

donde se identifica el potencial:

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{\mu}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (2.5)$$

Para  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  constantes, los puntos críticos (máximos y/o mínimos) del potencial son tales que:

$$\frac{\partial V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (2.6)$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi_1} &= \varphi_1 [\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \mu] = 0 \\ \partial_{\varphi_2} &= \varphi_2 [\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \mu] = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde hemos expresado por comodidad  $\partial_{\varphi_1} \equiv \frac{\partial V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1}$ , y viceversa.

Encontramos que  $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$  y los puntos en la circunferencia  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2$  con  $v = \sqrt{\mu/\lambda}$  son puntos críticos. Para saber si se tratan de mínimos o máximos, recordamos el cálculo en varias variables, y acudimos a la matriz Hessiana:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1^2} & \frac{\partial^2 V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \frac{\partial^2 V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} & \frac{\partial^2 V(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2^2} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

cuyas entradas son:

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi_1^2} &= -\mu + 3\lambda\varphi_1^2 + \lambda\varphi_2^2 \\ \partial_{\varphi_2^2} &= -\mu + 3\lambda\varphi_2^2 + \lambda\varphi_1^2 \\ \partial_{\varphi_1\varphi_2} &= \partial_{\varphi_2\varphi_1} = 2\lambda\varphi_1\varphi_2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

y estudiamos la ecuación secular (buscamos los autovalores  $\alpha$  que diagonalizan la matriz Hessiana):

$$|H - \alpha \mathbb{1}| = 0. \quad (2.10)$$

Desarrollando explícitamente:

$$\alpha^2 - \alpha [-2\mu + 4\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)] + \mu^2 - 4\mu\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 3\lambda^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 = 0. \quad (2.11)$$

Recordamos que habíamos tomado  $\mu > 0$  y  $\lambda > 0$ . Por tanto, vemos que  $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$  es un *máximo local*, ya que a nivel de las segundas derivadas (2.9) vemos que la matriz Hessiana es diagonal con elementos negativos  $-\mu$ ; y el potencial tiene *mínimos* en la circunferencia  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2$  con  $v = \sqrt{\mu/\lambda}$ , pues los autovalores de la matriz Hessiana son no negativos ( $\alpha_1 = 0$ , correspondiente con la dirección plana tangencial de la circunferencia, y  $\alpha_2 = 2\mu$  con la dirección radial).

El potencial de la teoría tiene la siguiente forma:

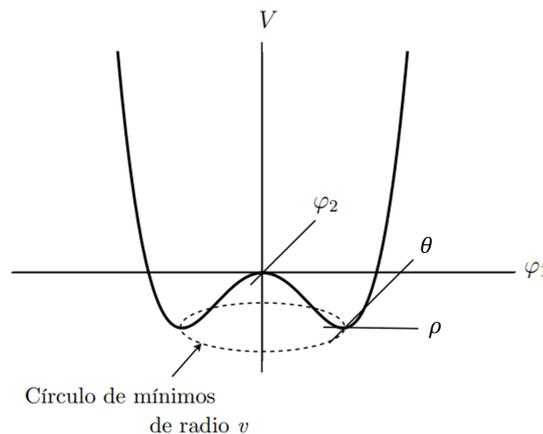


Figura 2.1: Potencial del sombrero mexicano  $V(\varphi_1, \varphi_2)$ . Se muestra el círculo de mínimos. [8]

Podemos comprobar también que, en el caso de que  $\mu$  fuese tal que  $\mu < 0$ , el *único* punto crítico sería  $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$ , pues los otros puntos no tomarían valores reales, y dicho punto se trataría de un mínimo. El potencial tendría forma de paraboloides (corregido por el término cuártico).

Una parametrización distinta y más adecuada a nuestros propósitos puede ser una en función del módulo y la fase del campo complejo  $\varphi(x)$ , tal que:

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)}, \quad (2.12)$$

donde  $\rho$  modula el campo a lo largo de la dirección radial, y la fase  $\theta$  parametriza la revolución en el plano, como se puede ver en la Figura (2.1). El factor numérico se introduce por normalización canónica de  $\rho(x)$ .

Los estados de mínima energía vienen dados por

$$\varphi_0 = v e^{i\theta} , \quad (2.13)$$

donde  $\theta$  es un ángulo de fase arbitrario, que viene de la simetría de la teoría bajo transformaciones de fase

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x) . \quad (2.14)$$

Es interesante estudiar las pequeñas fluctuaciones a lo largo del anillo de mínimos  $\varphi_0$  (alrededor de  $|\varphi| = 0$  las fluctuaciones se desestabilizan, por su condición de máximo en el potencial). El punto importante de la fase de superfluido es que el sistema tiene que escoger un valor fijo para  $\theta(x)$  cuando se minimiza la energía. El sistema elige arbitrariamente uno de esos estados degenerados. Por tanto, el estado de mínima energía no es invariante bajo las transformaciones de simetría (2.14). La transición de fase a superfluido ha destruido la simetría en el estado de mínima energía: estamos hablando de una *ruptura espontánea de simetría*. Como punto de partida vamos a tomar arbitrariamente el mínimo con  $\theta(x) = 0$ , es decir,  $\varphi_0 = v$ , y parametrizamos las perturbaciones radiales y de fase de esta manera:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho(x) + \delta\rho(x)) e^{i(\theta(x) + \delta\theta(x))} , \quad (2.15)$$

teniendo, en nuestro caso:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \delta\rho(x)) e^{i\delta\theta(x)} . \quad (2.16)$$

El Lagrangiano (2.1) de nuestra teoría queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \partial_\mu ((v + \delta\rho) e^{i\delta\theta})^* \partial^\mu ((v + \delta\rho) e^{i\delta\theta}) + \frac{\mu}{2} (v + \delta\rho)^2 - \frac{\lambda}{4} (v + \delta\rho)^4 , \quad (2.17)$$

donde vamos a desarrollar explícitamente por términos:

$$\begin{aligned} \bullet \partial_\mu((v + \delta\rho)e^{i\delta\theta})^* &= (v + \delta\rho)\partial_\mu e^{-i\delta\theta} + e^{-i\delta\theta}\partial_\mu(v + \delta\rho) \\ &= -i(v + \delta\rho)e^{-i\delta\theta}\partial_\mu\delta\theta + e^{-i\delta\theta}\partial_\mu\delta\rho. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\bullet \partial^\mu((v + \delta\rho)e^{i\delta\theta}) = i(v + \delta\rho)e^{i\delta\theta}\partial^\mu\delta\theta + e^{i\delta\theta}\partial^\mu\delta\rho. \quad (2.19)$$

Tenemos por tanto:

$$\begin{aligned} \bullet \partial_\mu((v + \delta\rho)e^{i\delta\theta})^* \partial^\mu((v + \delta\rho)e^{i\delta\theta}) &= \\ &= [-i(v + \delta\rho)e^{-i\delta\theta}\partial_\mu\delta\theta + e^{-i\delta\theta}\partial_\mu\delta\rho] [i(v + \delta\rho)e^{i\delta\theta}\partial^\mu\delta\theta + e^{i\delta\theta}\partial^\mu\delta\rho] = \\ &= (v + \delta\rho)^2 \partial_\mu\delta\theta \partial^\mu\delta\theta - \cancel{i(v + \delta\rho)\partial_\mu\delta\theta \partial^\mu\delta\rho} + \cancel{i(v + \delta\rho)\partial_\mu\delta\rho \partial^\mu\delta\theta} + \partial_\mu\delta\rho \partial^\mu\delta\rho, \end{aligned} \quad (2.20)$$

y nuestro Lagrangiano queda finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= \frac{1}{2} [v^2 \partial_\mu\delta\theta \partial^\mu\delta\theta + (\delta\rho)^2 \partial_\mu\delta\theta \partial^\mu\delta\theta + 2v\delta\rho \partial_\mu\delta\theta \partial^\mu\delta\theta + \partial_\mu\delta\rho \partial^\mu\delta\rho] + \\ &+ \frac{\mu}{2} [v^2 + (\delta\rho)^2 + 2v\delta\rho] - \frac{\lambda}{4} [v^4 + (\delta\rho)^4 + 4v(\delta\rho)^3 + 4v^3\delta\rho + 6v^2(\delta\rho)^2]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A simple vista, podemos ver que  $\delta\theta$  (la parametrización asociada a la fase) es un modo sin masa (un modo Goldstone) y que  $\delta\rho$  es masivo. Para verlo de forma explícita, al igual que hicimos en la Sección (1.4) nos fijamos en los términos cuadráticos puros de  $\delta\rho$  del Lagrangiano, pues no los hay de  $\delta\theta$ :

$$\left(\frac{\mu}{2} - \frac{3\lambda}{2}v^2\right)(\delta\rho)^2, \quad (2.22)$$

donde, si sustituimos la constante  $v^2 = \mu/\lambda$  tenemos:

$$-\mu(\delta\rho)^2, \quad (2.23)$$

e identificamos que  $\delta\rho$  es un modo de masa  $m_{\delta\rho} = \sqrt{2\mu}$ . No nos vamos a preocupar de estas fluctuaciones masivas.

La emergencia de un modo sin masa cuando la simetría de la teoría se rompe viene descrita por el teorema de Goldstone. Este asegura que hay al menos un modo sin masa, llamado modo Nambu-Goldstone (un bosón), por cada grupo de simetría roto cuando

ocurre una ruptura espontánea de simetría [23]. Más precisamente, el teorema de Goldstone representa la ruptura de grupos de simetría continuos globales, de tal forma que se pueda hacer una correcta parametrización de las fluctuaciones alrededor del estado de mínima energía. Estos son conjuntos continuos de simetrías que están parametrizados por números continuos <sup>3</sup>.

Para las fluctuaciones de fase (los modos Goldstone), si son suficientemente pequeñas, en este régimen de bajas energías podemos despreciar  $\delta\rho$ , ya que al ser un modo masivo aquí no llega al umbral de energía mínima para ser excitado. Por lo tanto podemos hablar de un Lagrangiano efectivo:

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} v^2 \partial_\mu \delta\theta \partial^\mu \delta\theta + \text{const.} . \quad (2.24)$$

Es conveniente absorber la constante  $v$  en una redefinición del campo. Por tanto, consideramos:

$$\phi \equiv v \delta\theta , \quad (2.25)$$

y escribimos el Lagrangiano (2.24) olvidándonos de los términos constantes, pues no son relevantes para el desarrollo con el que queremos proceder:

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi . \quad (2.26)$$

Este modelo tan simple describe la dinámica de un superfluido. La fase  $\phi(x)$  es el modo *massless* (el bosón de Goldstone) correspondiente con un modo acústico (fonón) del superfluido, que surge de la ruptura espontánea de  $U(1)$ .

Consideremos ahora una segunda teoría, a la que llamaremos Teoría B:

$$\mathcal{L}_B = A \mathcal{J}^\mu \partial_\mu \phi + B \mathcal{J}^\mu \mathcal{J}_\mu , \quad (2.27)$$

---

<sup>3</sup>En la teoría de la Sección (1.4) no se observaban modos Goldstone ya que la simetría de dicha teoría era la simetría discreta (1.67).

donde  $\phi$  es un campo dinámico, pues el Lagrangiano contiene términos cinéticos (derivadas temporales del campo), y  $\mathcal{J}^\mu$  un campo auxiliar <sup>4</sup>, es decir, el Lagrangiano contiene términos cuadráticos y lineales pero no cinéticos.  $A$  y  $B$  son constantes, que fijaremos en un momento.

Podemos obtener las ecuaciones del movimiento (1.26) del campo  $\mathcal{J}^\mu$ :

$$0 = A \partial_\mu \phi + 2B \mathcal{J}_\mu, \quad (2.28)$$

de tal manera que

$$\mathcal{J}_\mu = -\frac{A}{2B} \partial_\mu \phi. \quad (2.29)$$

Esto es esencialmente una ligadura y no una ecuación del movimiento *per se*, pues no se trata de una ecuación diferencial del campo  $\mathcal{J}_\mu$ .

Podemos sustituir esta solución en el Lagrangiano (2.27), es decir, observar la teoría parcialmente *on shell*:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{A^2}{2B} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{A^2}{4B} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -\frac{A^2}{4B} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (2.30)$$

Ahora, si damos un paso atrás y nos fijamos en la teoría de nuestro superfluido a bajas energías (2.26):

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (2.31)$$

podemos fijar las constantes  $A$  y  $B$  de una forma conveniente para el futuro por normalización canónica como  $A = 1$  y  $B = -1/2$  y recuperamos nuestra Teoría A para un superfluido:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (2.32)$$

Con esto, observamos que la teoría

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{J}^\mu \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \mathcal{J}^\mu \mathcal{J}_\mu \quad (2.33)$$

---

<sup>4</sup>En inglés, *auxiliary field*. En muchas circunstancias, los contenidos de una teoría pueden mantenerse intactos añadiendo estos campos a mano.

y (2.26) son equivalentes.

Busquemos ahora las ecuaciones del movimiento para  $\phi$ . Según (1.26), se tiene:

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0, \quad (2.34)$$

que no es más que la ecuación de continuidad para la corriente conservada; en este caso podemos identificar  $\mathcal{J}^\mu$  con una 4-corriente.

A partir de ahora, para dar una solución conveniente y sencilla a la ecuación del movimiento (2.34), tenemos que comprometernos a trabajar en un espacio de  $2 + 1$  dimensiones, es decir, 2 dimensiones espaciales y 1 dimensión temporal. Esta dimensionalidad tiene además un interés físico real, pues recoge todos los sistemas planares. Tomemos esto como un *ansatz*, y podemos escribir la corriente como:

$$\mathcal{J}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho, \quad (2.35)$$

donde  $A_\mu$  es un campo vectorial genérico y  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$  el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional. Podemos comprobar que esta es efectivamente una solución a la ecuación de movimiento sustituyendo en (2.34):

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu A_\rho = 0, \quad (2.36)$$

que, recordando las reglas del cálculo tensorial, es nulo porque (por el lema de Schwarz) las derivadas dobles  $\partial_\mu \partial_\nu$  son simétricas, pero aquí están contraídas con un tensor totalmente antisimétrico (el pseudo-tensor de Levi-Civita).

Si tomamos esta solución de  $\mathcal{J}^\mu$  y estudiamos la teoría (2.33) parcialmente *on shell*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \epsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\nu A_\rho) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} (\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho) (\epsilon_{\mu\alpha\beta} \partial^\alpha A^\beta) \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\nu A_\rho) \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\alpha\beta} (\partial_\nu A_\rho) (\partial^\alpha A^\beta). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Es un ejercicio fácil de comprobar que:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\alpha\beta} = \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\rho - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\rho. \quad (2.38)$$

Por tanto se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B &= \epsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\nu A_\rho)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\rho - \delta_\beta^\nu\delta_\alpha^\rho)(\partial_\nu A_\rho)(\partial^\alpha A^\beta) \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\nu A_\rho)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta),\end{aligned}\quad (2.39)$$

donde podemos recordar la definición del tensor electromagnético,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.40)$$

e identificar el campo vectorial  $A_\mu$  de la teoría con el potencial vector del electromagnetismo.

Y obtenemos:

$$\mathcal{L}_B = \epsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\nu A_\rho)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}(\partial^\alpha A^\beta). \quad (2.41)$$

Recordando de nuevo las reglas del cálculo tensorial y que el tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  es antisimétrico, el segundo elemento de la expresión se reduce a

$$\mathcal{L}_B = \epsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\nu A_\rho)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}(\partial^{[\alpha} A^{\beta]}), \quad (2.42)$$

ya que al contraer un tensor antisimétrico con otro tensor genérico, la contribución total solo dependerá de la parte antisimétrica de este último; en nuestro caso  $\partial^{[\alpha} A^{\beta]}$ , que podemos expresar como

$$\partial^{[\alpha} A^{\beta]} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha), \quad (2.43)$$

y volviendo a recordar la definición de  $F_{\mu\nu}$  y desarrollando en nuestro Lagrangiano, tenemos finalmente:

$$\mathcal{L}_B = \epsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\nu A_\rho)\partial_\mu\phi - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (2.44)$$

Trabajando ahora sobre el primer término, que habíamos dejado en barbecho, podemos desarrollarlo a partir de la regla de Leibniz “a la inversa”. Si recordamos la regla de Leibniz, que se trata esencialmente de la regla de la derivada del producto, podemos ver fácilmente que el primer término se deja expresar como

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\nu A_\rho)\partial_\mu\phi = \partial_\nu(\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho\partial_\mu\phi) - \epsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho\partial_\nu\partial_\mu\phi, \quad (2.45)$$

e introduciéndolo en nuestro Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_B = \partial_\nu(\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\rho \partial_\mu \phi) - \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\rho \partial_\nu \partial_\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} . \quad (2.46)$$

Si recordamos lo visto en la Sección (1.1.1), donde dos Lagrangianos que difieren de una derivada total (aquí divergencia) de una función del campo  $\phi$  describen la misma dinámica, podemos ver que este término es irrelevante. Por tanto,

$$\mathcal{L}_B = -\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\rho \partial_\nu \partial_\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} . \quad (2.47)$$

A partir de aquí, vamos a tomar una configuración trivial de  $\phi(x)$  a la que luego volveremos para observar una consecuencia interesante de la dualidad. Consideremos entonces que el primer término de la expresión es nulo por el lema de Schwarz en  $\partial_\nu \partial_\mu \phi$  (es decir,  $\phi(x)$  es *no-singular*). Con esto podemos escribir;

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} , \quad (2.48)$$

que es el Lagrangiano de Maxwell (el electromagnetismo), que describe un fotón y donde no hay presencia de cargas externas.

Aquí estamos observando la *dualidad*: un campo escalar, real y libre en 2+1 dimensiones (Teoría A) es equivalente a un fotón en la misma dimensionalidad (Teoría B) descrito por un campo de gauge *emergente*. Es decir, la teoría de Maxwell en 2+1 dimensiones y la teoría de un escalar libre representan dos maneras alternativas para describir la misma física. Podemos entonces mapear el modo Goldstone del superfluido, la fase  $\phi(x)$  que se correspondía con una configuración fonónica, con un fotón en la teoría gauge de Maxwell.

### 2.1.1. Vórtices - Cargas

En la Teoría A (2.26) la fase  $\phi(x)$  puede tomar configuraciones no triviales en las que gira alrededor de un punto localizado. Estas soluciones se corresponden con defectos topológicos llamados *vórtices*, que se pueden observar en el laboratorio como flujos circulares en el superfluido. Estas estructuras son análogas a los vórtices en fluidos clásicos, como los remolinos en el agua, pero presentan diferencias importantes debido a la naturaleza

cuántica del superfluido. En el centro del vórtice hay una singularidad: el campo no está bien definido (ya que la densidad del superfluido es cero, cosa que no ocurre en un fluido clásico, donde esta permanece constante). Podemos entonces separar la fase  $\phi(x)$  en su parte singular y no-singular:

$$\phi = \phi^{n-s} + \phi^{sing} . \quad (2.49)$$

Alrededor de la singularidad las derivadas no conmutan, es decir, no se cumple el lema de Schwarz:

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \phi^{sing} \neq 0 . \quad (2.50)$$

En un superfluido, la circulación del flujo alrededor del vórtice está cuantizada. Si consideramos una circunferencia  $\partial\mathcal{S}$  alrededor del centro del vórtice, podemos calcular la singularidad. Para un vórtice de número de revolución  $N$ <sup>5</sup>, en unidades de  $2\pi$ , tenemos:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} d\phi = \oint_{\partial\mathcal{S}} dx^\mu \partial_\mu \phi = \int_{\mathcal{S}} dS^\lambda \epsilon_{\lambda\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi^{sing} = 2\pi N , \quad (2.51)$$

donde hemos usado el teorema de Stokes, y  $\mathcal{S}$  es una superficie encerrada por el contorno  $\partial\mathcal{S}$ . Entonces, podemos identificar la corriente del vórtice como

$$j^\rho \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu \phi = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu \phi^{sing} . \quad (2.52)$$

Si volvemos atrás y recordamos el paso (2.47) de la Teoría B, podemos entonces escribir para configuraciones singulares de  $\phi(x)$ :

$$\mathcal{L}_B = -A_\rho j^\rho - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} , \quad (2.53)$$

que es la teoría de Maxwell con presencia de cargas (no dinámicas); un fotón acoplado a una 4-corriente externa. Las ecuaciones del movimiento para esta teoría son las ecuaciones de Maxwell vistas en la Sección (1.3):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu , \quad (2.54)$$

---

<sup>5</sup>Por su nombre en inglés, *winding number*.

que implica, debido a la antisimetría del tensor  $F^{\mu\nu}$ , la siguiente ecuación de continuidad:

$$\partial_\nu j^\nu = 0 . \quad (2.55)$$

Esto se puede escribir explícitamente separando las componentes temporales de las espaciales:

$$\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0 , \quad (2.56)$$

donde podemos identificar la componente temporal  $j^0(x)$  con la densidad del vórtice  $\rho_V$ :

$$\rho_V \equiv j^0 = \epsilon^{0ij} \partial_i \partial_j \phi^{sing} . \quad (2.57)$$

Por otra parte, hemos visto en (1.33) que se define el campo eléctrico a partir del tensor de Maxwell como

$$E^i = F^{i0} , \quad (2.58)$$

de manera que, en la componente  $\mu = 0$  de las ecuaciones de movimiento (2.54) obtenemos la ley de Gauss:

$$\partial_i E^i = \rho_V , \quad (2.59)$$

con la densidad del vórtice  $\rho_V$  actuando como una densidad de carga.

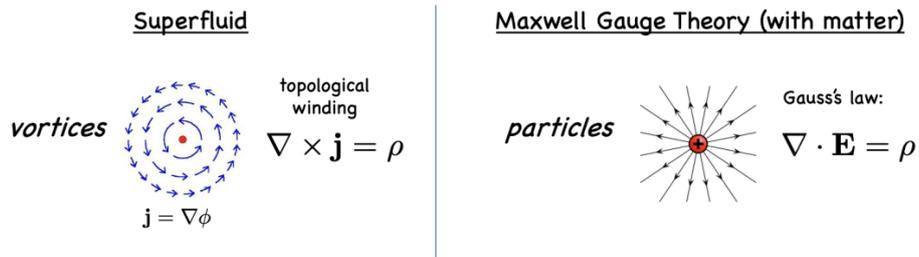


Figura 2.2: Mapeo de la *particle-vortex duality*. Vórtices en el superfluido equivalen a cargas en la teoría de Maxwell. La ley de Gauss es la contraparte dual de la revolución de la fase  $\phi(x)$ . [24]

Por tanto, ahora con la dualidad podemos identificar también los vórtices en el superfluido, descritos por las singularidades del campo  $\phi(x)$  en la Teoría A, con cargas (partículas) no dinámicas en la Teoría B del electromagnetismo. El poder de la dualidad radica en que proporciona una descripción alternativa de las transiciones de fase mapeando la aparición de vórtices en la transición de fase con cargas en presencia de un campo de gauge, *emergente* en el régimen de bajas energías.

## Capítulo 3

# Emergencia. Reflexión sobre el reduccionismo y conclusiones

‘Nature doesn’t consult you; it doesn’t give a damn for your wishes or whether its laws please or do not please you. You must accept it as it is, and hence accept all consequences [...]’ Good Lord! What do I care about the laws of nature and arithmetic if, for one reason or another, I don’t like these laws...

---

— FYODOR DOSTOEVSKY, *Notes from Underground*

En el anterior capítulo hemos observado un ejemplo directo y cualitativo de una descripción o comportamiento emergente: a bajas energías, una ruptura de simetría del sistema conlleva la aparición de dos fenómenos emergentes: la descripción del superfluido en términos de un modo de Goldstone y una descripción dual en términos de la teoría electromagnética de Maxwell en presencia de materia cargada. Esto no era *aparente* desde la teoría de partida, que describía las transiciones de fase de la materia. Es la ruptura de simetría que conlleva la transición de fase lo que hace emerger estas características de la teoría que no pueden ser anticipadas simplemente observando la teoría original. Aunque nosotros hemos estudiado la superfluidez desde un punto de vista de teorías de campos duales, de esto se encarga principalmente la física de la materia condensada: estudiar sistemas macroscópicos y fenómenos que emergen a partir de la organización colectiva de muchas partículas <sup>1</sup>, como la superconductividad, la superfluidez y la magnetización, todos ellos relacionados directamente con la escala macroscópica del sistema y con una ruptura de simetría en este régimen.

---

<sup>1</sup>Esto es, el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ , donde  $N$  representa el número de partículas o componentes en un sistema.

El concepto de *emergencia* es un tema recurrente y controvertido en todos los ámbitos científicos, animado estrechamente por la filosofía y la filosofía de la ciencia. En general, la emergencia se puede ver como la aparición de fenómenos que surgen de fenómenos más básicos o fundamentales y a la vez estos son “independientes” uno del otro, no siendo además aparentes en el régimen fundamental. Es decir, existen distintas escalas de *complejidad* en la naturaleza, cada una relacionada con teorías efectivas tan solo en cada régimen, que no tienen por qué ser aparentes en los niveles básicos o admitir descripciones en términos de ellos. Como el físico Philip Anderson propone, cada una de estos regímenes implicaría una ruptura de simetría de sus componentes fundamentales inmediatas, emergiendo propiedades totalmente nuevas.

A medida que examinamos la naturaleza a niveles de complejidad cada vez mayor, vemos fenómenos emergentes que no tienen correspondencia en los niveles más simples, y menos aún en el nivel de las partículas elementales. Por ejemplo, no hay nada similar a la inteligencia en el nivel de las células individuales y nada similar a la vida en el nivel de los átomos y las moléculas. En cierto sentido, un organismo *es* simplemente esas moléculas, pero esas mismas moléculas no constituirían un organismo si estuvieran reorganizadas de cualquiera de una de las amplias posibilidades de formas, por lo que el organismo vivo parece emerger de las moléculas. La idea de emergencia fue muy bien captada por Anderson en el título de un artículo de 1972: “Más es diferente”. Desde el desconocimiento, la emergencia de nuevos fenómenos en altos niveles de complejidad puede ser más obvia en la biología y las ciencias sociales, aunque tal emergencia no representa algo especial de la vida o de los asuntos humanos. Está también presente en muchas ramas dentro de la propia física, como hemos visto, y pueden no estar únicamente relacionados con la complejidad de un sistema.

El comportamiento de grandes y complejos conjuntos de partículas elementales, resulta, no se puede entender en términos de una simple extrapolación de las propiedades de unas pocas partículas. En su lugar, en cada nivel de la escala, la comprensión de los nuevos comportamientos requiere de investigaciones tan fundamentales y creativas como las demás. Anderson propone ordenar las ciencias aproximadamente en una jerarquía, de

acuerdo con la siguiente idea: las entidades elementales de la ciencia X obedecen a las leyes de la ciencia Y.

X	Y
física de muchos cuerpos	física de partículas elementales
química	física de muchos cuerpos
biología molecular	química
biología celular	biología molecular
⋮	⋮
psicología	fisiología
ciencias sociales	psicología

Pero esta jerarquía no implica que la ciencia X sea simplemente “Y aplicada”. La psicología no es biología aplicada, ni la biología es química aplicada. Ni, como dijo el descubridor del positrón, “el resto es química”.

Entonces, resulta el tema del *reduccionismo*. Este es todavía un tema controvertido entre filósofos de la ciencia, pero la comunidad científica en su mayoría lo tiene aceptado. Desde la gran revolución científica que supuso el paso de la filosofía natural a la física, el paso de la descripción cualitativa de la naturaleza a una descripción cuantitativa (principalmente por Newton), el reduccionismo ha sido parte del camino de todas las ciencias puras; principalmente en la mecánica, cuya filosofía es puramente reduccionista.

El reduccionismo supone que la naturaleza se deja explicar por fenómenos más simples o de escalas más fundamentales. Estaría gobernada por un mismo grupo de leyes físicas a las que popularmente se llama una *teoría del todo*. Como se suele definir, de forma hipotética: un conjunto de ecuaciones capaces de describir todos los fenómenos que se han observado, o que alguna vez se observarán. Parafraseando a Weinberg, el sueño moderno de una teoría final comenzó realmente con Newton. Este expresó sus esperanzas en el prefacio a la primera edición de los *Principia Mathematica*, publicados en 1687: “Espero que podamos derivar el resto de los fenómenos de la naturaleza mediante el mismo tipo de razonamiento aplicado a los principios mecánicos. Pues estoy inducido por muchas razones a sospechar que todos ellos pueden depender de ciertas fuerzas”.

Por tanto, se podría pensar que los científicos que estudian lo realmente fundamental son aquellos que trabajan en esas leyes (en la práctica, esto involucraría a los físicos

de partículas, algunos astrofísicos, algunos matemáticos y pocos más). Pero esto no es así. La principal falacia en este tipo de pensamiento es que la hipótesis reduccionista de ninguna manera implica una hipótesis “constructivista”: la capacidad de reducir todo a leyes fundamentales simples no implica la capacidad de partir de esas leyes y reconstruir el universo en la práctica. Laughlin y Pines comentan, sobre una hipotética teoría del todo: “Hemos logrado reducir todo el comportamiento físico ordinario a una Teoría del Todo [la mecánica cuántica no relativista] simple y correcta, solo para descubrir que no ha revelado absolutamente nada sobre muchas cosas de gran importancia”, en particular, no es útil para explicar la mayor parte del comportamiento de los objetos cotidianos u otros campos de la ciencia. Es decir, aunque en principio la estructura y la dinámica de la mayoría de los sistemas físicos se pueden reducir a esta teoría del todo, reconstruir los detalles de esa estructura y desarrollo a partir de primeros principios es imposible en la práctica. Sin embargo, es innegable que, con un ordenador con capacidad infinita de programación, se podrían simular los sistemas complejos de muchos cuerpos a partir de las leyes más fundamentales y observar la aparición de los fenómenos emergentes. O bien, si nos preguntásemos si el demonio de Laplace, el personaje imaginario hipotético que conociese las posiciones y momentos de cada partícula en el universo, pudiese predecir todas las emergencias en todas las ciencias, desde la biología a la psicología, la respuesta sería sí. Pero los humanos no podrían hacer tal cosa, como dice el filósofo de la ciencia Barry Loewer [25].

Sin embargo, Weinberg habla de lo que él llama “reduccionismo objetivo”: el reduccionismo no es solo una intuición científica usada para elaborar teorías fundamentales, sino que la naturaleza tiene unas “flechas de explicación” que parecen converger hacia un origen común. Empezando por cualquier lugar de la ciencia y preguntando, al igual que un niño insatisfecho, “¿Por qué?”, se terminará llegando al nivel de lo muy pequeño, actualmente el modelo estándar de la física de partículas, gravedad aparte. En cierta manera, hay un fundamentalismo intrínseco a la naturaleza.

Una teoría final no supondría el final de la ciencia. Además de que aún no conocemos el punto final de convergencia de las flechas de la naturaleza antes mencionadas, el reduccionismo no supone la extinción de, por ejemplo, la termodinámica o la física de la

materia condensada como ciencias independientes; nadie se imagina que se reduzcan a física molecular o de partículas elementales. Hace poco más de un siglo, en el año 1900, Lord Kelvin señalaba en una ponencia en la *British Association for the Advancement of Science*: “No hay nada nuevo que descubrir en la física ahora. Todo lo que queda es hacer mediciones cada vez más precisas”. Sin embargo, los temas como la emergencia suponen argumentos que destierran este pensamiento. Y a propósito de la emergencia, hay muchas preguntas aún por responder: ¿Cómo se debe definir la emergencia? ¿Qué tipo de entidades o fenómenos pueden emerger? ¿Cómo se relaciona la ruptura de simetría con la emergencia? ¿De qué manera los fenómenos emergentes son autónomos respecto de sus bases emergentes? ¿La emergencia caracteriza solo modelos, descripciones o teorías de la naturaleza, o también se aplica a la naturaleza misma? ¿Es la emergencia solo dependiente de cómo algo está descrito, visto o explicado? ¿Es la emergencia una característica objetiva del universo, o es simplemente una cuestión de percepción?

# Bibliografía

- [1] Mark A. Bedau y Paul Humphreys. *Emergence. Contemporary Readings in Philosophy and Science*. The MIT Press, 2008. ISBN: 9780262026215. DOI: 10.7551/mitpress/9780262026215.001.0001.
- [2] S. Weinberg. *Dreams of a Final Theory. The Scientist's Search for the Ultimate Laws of Nature*. Knopf Doubleday Publishing Group, 1994. ISBN: 9780679744085. URL: <https://books.google.es/books?id=Qd0MEtsBr7oC>.
- [3] L.D. Landau y E.M. Lifshitz. *Mechanics: Volume 1*. Elsevier Science, 1982. ISBN: 9780080503479. URL: <https://books.google.es/books?id=bE-9tUH2J2wC>.
- [4] Daniele Musso. *Teaching notes on Classical Field Theory*. 2023.
- [5] D. Bailin y A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. Taylor & Francis, 1993. ISBN: 9780750302814. URL: <https://books.google.es/books?id=A9MU9pvcEGQC>.
- [6] Daniel Naegels. “Perturbative and holographic study of symmetry breaking in non-relativistic theories”. En: *Université Libre de Bruxelles* (2022).
- [7] A. J. Beekman, L. Rademaker y J. van Wezel. *An Introduction to Spontaneous Symmetry Breaking*. 2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1909.01820>.
- [8] Agustín Nieto. *Rotura espontánea de la simetría y el mecanismo de Higgs*. 2022.
- [9] M.S. Mahoney. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665*. Princeton University Press, 1994. ISBN: 9780691036663. URL: <https://books.google.es/books?id=My19IcewAnoC>.
- [10] V. Guillemin y S. Sternberg. *Symplectic Techniques in Physics*. Cambridge University Press, 1990. ISBN: 9780521389907. URL: <https://books.google.es/books?id=07Rbx4ptxqsC>.

- [11] D. Hilbert. “Die Grundlagen der Physik . (Erste Mitteilung.)” En: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1915), págs. 395-408. URL: <http://eudml.org/doc/58946>.
- [12] R.P. Feynman y L.M. Brown. *Feynman's Thesis: A New Approach to Quantum Theory*. World Scientific, 2005. ISBN: 9789812563668. URL: <https://books.google.es/books?id=5kowI7YgFbEC>.
- [13] R. P. Feynman. “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics”. En: *Rev. Mod. Phys.* 20 (2 abr. de 1948), págs. 367-387. DOI: 10.1103/RevModPhys.20.367. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.367>.
- [14] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio. “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I”. En: *Phys. Rev.* 122 (1 abr. de 1961), págs. 345-358. DOI: 10.1103/PhysRev.122.345. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>.
- [15] W. Heisenberg. “Zur Theorie des Ferromagnetismus”. En: *Z. Phys.* 49.9-10 (1928), págs. 619-636. DOI: 10.1007/BF01328601.
- [16] V. L. Ginzburg y L. D. Landau. “On the Theory of superconductivity”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20 (1950). Ed. por D. ter Haar, págs. 1064-1082. DOI: 10.1016/b978-0-08-010586-4.50078-x.
- [17] F. Englert y R. Brout. “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons”. En: *Phys. Rev. Lett.* 13 (9 ago. de 1964), págs. 321-323. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.321. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.321>.
- [18] Peter W. Higgs. “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”. En: *Phys. Rev. Lett.* 13 (16 oct. de 1964), págs. 508-509. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.508. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.
- [19] L. D. Landau. “On the theory of phase transitions”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 7 (1937). Ed. por D. ter Haar, págs. 19-32. DOI: 10.1016/B978-0-08-010586-4.50034-1.
- [20] H. Kleinert. *Gauge Fields in Condensed Matter*. World Scientific, 1989. ISBN: 9789971502102. URL: <https://books.google.es/books?id=1E1QtgEACAAJ>.

- [21] Silvia Fasce. “Covariant theory of fractons in 3 spacetime dimensions”. En: *TFM Università degli Studi di Genova* (2023).
- [22] Aron Jonathan Beekman. “Vortex duality in higher dimensions”. En: *Casimir PhD series. urn: isbn: 9789085931133* (2011).
- [23] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam y Steven Weinberg. “Broken Symmetries”. En: *Phys. Rev.* 127 (3 ago. de 1962), págs. 965-970. DOI: 10.1103/PhysRev.127.965. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.965>.
- [24] Andrey Gromov y Leo Radzihovsky. *Fracton Matter*. 2022. arXiv: 2211.05130 [cond-mat.str-el].
- [25] Barry Loewer. *What’s Strong Emergence? - Episode 1905 - Closer To Truth*. Youtube. 2020. URL: [https://youtu.be/zkffv2nVF64?si=azqxwaFzHSYlK\\_Zg&t=1124](https://youtu.be/zkffv2nVF64?si=azqxwaFzHSYlK_Zg&t=1124).