



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

FACULTAD DE CIENCIAS  
TRABAJO DE FIN DE GRADO

---

# Teoría de Campos en Física de Partículas.

---

Aller Gutiérrez, ELENA

*Tutor:*

Guarino Almeida, ADOLFO

*Curso:*

2023/2024



## Resumen

Con el descubrimiento en 2012 del bosón de Higgs en los laboratorios del CERN, se comprobaba de manera indirecta todo el desarrollo teórico que lo precedió. ¡Se acababa de verificar una teoría que describía el **sector electrodébil**! No obstante, muchos siguen siendo los frentes abiertos relacionados con estas interacciones, por no hablar de los presentes en el modelo estándar. Cada vez, más teorías aparecen en el marco de la investigación: supersimetría, teoría de cuerdas, etc.

Durante las siguientes páginas se invita al lector a adentrarse en los aspectos más importantes que permiten describir la fuerza débil y el electromagnetismo. Se darán a conocer los procesos que dotan de masa a las partículas, se mostrarán cuales son los acoplamientos permitidos, ¡y mucho más!

Al fin y al cabo, la **unificación** de la interacción débil y la electrodinámica cuántica conforma los cimientos de las investigaciones acerca de una teoría más general que englobe las cuatro interacciones fundamentales: el electromagnetismo, la fuerza débil, la interacción fuerte y la gravitación. ¿Quién sabe? Es posible que la **teoría del todo** se alcance más pronto que tarde.

# Índice general

<b>1. Perspectiva Histórica.</b>	<b>3</b>
<b>2. Fundamentos Matemáticos de Teoría de Grupos.</b>	<b>5</b>
2.1. Espacios Vectoriales. . . . .	5
2.1.1. Subespacios Vectoriales. . . . .	6
2.2. Variedades Diferenciables. . . . .	7
2.2.1. Funciones y Curvas. . . . .	8
2.2.2. Espacio Tangente. Vectores y Campos Vectoriales. . . . .	11
2.3. Grupos. . . . .	12
2.3.1. Producto Directo de Grupos. . . . .	12
2.3.2. Homomorfismos e Isomorfismos. . . . .	13
2.3.3. Representaciones de los Grupos. . . . .	13
<b>3. Grupos de Lie.</b>	<b>15</b>
3.1. Definición y Ejemplos. . . . .	15
3.1.1. El Grupo Lineal. . . . .	16
3.1.2. El Grupo Ortogonal. . . . .	16
3.1.3. El Grupo Unitario. . . . .	17
3.2. Álgebras de Lie. . . . .	19
3.2.1. Corchete de Lie. Generadores y Constantes de Estructura. . . . .	20
3.2.2. El Álgebra del Grupo Lineal. . . . .	21
3.2.3. El Álgebra del Grupo Ortogonal. . . . .	21
3.2.4. El Álgebra del Grupo Unitario. . . . .	23
<b>4. Relatividad Especial.</b>	<b>25</b>
4.1. El Grupo de Lorentz. . . . .	28
4.1.1. Álgebra y Generadores del Grupo de Lorentz. . . . .	30
4.2. Fermiones. . . . .	34
4.3. Antipartículas. . . . .	35



---

<b>5. Conceptos Básicos de Teoría Clásica de Campos.</b>	<b>37</b>
5.1. Formalismo Lagrangiano y Ecuaciones del Movimiento. . . . .	37
5.1.1. Lagrangianos Locales. . . . .	38
5.2. Simetrías y Teorema de Noether. . . . .	39
5.2.1. Tensor Energía Momento. . . . .	41
5.3. Dinámica de los Fermiones. . . . .	43
<b>6. Teorías <i>Gauge</i>.</b>	<b>46</b>
6.1. De Simetrías Globales a Simetrías <i>Gauge</i> . . . . .	46
6.1.1. Electrodinámica. . . . .	48
6.2. Teorías <i>Gauge</i> Abelianas. . . . .	49
6.2.1. Acoplamiento de Fermiones. . . . .	52
6.3. Teorías <i>Gauge</i> No Abelianas. . . . .	53
6.3.1. Acoplamiento de Fermiones. . . . .	56
<b>7. Teoría Electrodébil.</b>	<b>58</b>
7.1. Números Cuánticos. Representaciones de los Fermiones. . . . .	59
7.2. Densidad Lagrangiana. . . . .	61
7.3. El Mecanismo de Higgs. . . . .	63
7.3.1. Rotura Espontánea de la Simetría. Una visión más intuitiva. . .	63
7.3.2. Aplicación del Mecanismo de Higgs a una Teoría No Abeliانا. .	65
7.4. Acoplamientos de Yukawa. . . . .	70
7.5. Neutrinos de Majorana, una Excepción Invariante <i>Gauge</i> . . . . .	72
<b>8. Comentarios Finales.</b>	<b>73</b>
<b>9. Bibliografía.</b>	<b>75</b>

# Capítulo 1

## Perspectiva Histórica.

La mejor manera de adentrarse en física de partículas es situarse históricamente. Recorrer las teorías más importantes que han ido surgiendo a lo largo de los años, hasta la actualidad, permite comprender más fácilmente algunos de los conceptos que se tratarán en las páginas venideras. Por tanto, comenzar por la teoría de Fermi para la desintegración débil  $\beta$  será lo más natural.

Hacia 1934, Enrico Fermi formularía esta teoría en un intento de explicar el decaimiento  $\beta$  del neutrón a un protón, un electrón y un neutrino<sup>1</sup>. En sus estudios aunaba todo tipo de descubrimientos precedentes como la radioactividad<sup>2</sup>, el electromagnetismo o la teoría cuántica de campos, fundada por Dirac en 1927.

Este sería el comienzo de la primera teoría de la interacción débil, la cual serviría de base para el actual modelo estándar de física de altas energías.

Con el descubrimiento, entre 1947 y 1955, de nuevas partículas como el muón o los piones, se fortaleció el estudio de esta interacción, consiguiendo en 1957 la generalización del análisis de Fermi, lograda por Feynman y Gell-Mann, la cual englobaba el decaimiento de las diferentes partículas. [1]

Durante esos años, concretamente en 1954, Yang y Mills publicaron el artículo [2] en relación con las teorías *gauge* no abelianas, fundamental para el estudio de las interacciones débil y fuerte.

Posteriormente, las teorías de interacción débil recibirían en 1959 un gran impulso con el desarrollo de Glashow y Salam, en sus respectivos estudios [3] y [4], sobre bosones mediadores vectoriales.

---

<sup>1</sup>El neutrino fue sugerido por Wolfgang Pauli en 1930 como una partícula neutra y sin masa, sin embargo, sería Fermi quien le otorgará el nombre que se conoce en la actualidad. La primera detección directa de esta partícula no llegaría hasta 1956, gracias a las investigaciones de Cowan y Reines sobre la producción de antineutrinos por parte de un reactor nuclear.

<sup>2</sup>La radioactividad fue descubierta en 1896 por Henri Becquerel. Posteriormente se clasificaría en tres categorías:  $\alpha$ ,  $\beta$  o  $\gamma$ .



Es preciso destacar el año 1964. En primer lugar, debido a que Gell-Mann y Zweig propondrían un modelo para *quarks* a lo largo de esos meses. Durante ese año, también se publicarían los estudios de Higgs, véase [5], y de Englert y Brout, referencia [6], sobre la rotura espontánea de la simetría *gauge*. Con el posterior descubrimiento del bosón de Higgs en 2012, lo cual supondría una confirmación experimental de su teoría, recibirían el Premio Nobel de Física en 2013.

Juntando los conocimientos anteriores, en 1967 Weinberg, en su artículo [7], aplicaría el concepto de rotura de simetría a la interacción débil para los leptones de la primera familia. Esto daría lugar al grupo *gauge*  $SU(2) \otimes U(1)$ , a los bosones masivos  $W^\pm$  y  $Z$ , al fotón *massless* y al bosón de Higgs.

El año 1972 se toma como punto de inflexión en el desarrollo del modelo estándar. Desde entonces, muchos experimentos han ido confirmando sus predicciones, es el caso del descubrimiento del gluón en 1979, cuatro años antes que los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ , o los test de la teoría electrodébil realizados por LEP<sup>3</sup>, SLC<sup>4</sup> o Tevatron<sup>5</sup>, y de cromodinámica cuántica ejecutados en LEP, HERA<sup>6</sup> o Tevatron.

Actualmente, existen muchas ramas de investigación en física más allá del modelo estándar, como es el caso de la supersimetría o la teoría de cuerdas. [8]

---

<sup>3</sup>Las siglas LEP hacen referencia al antiguo experimento Large Electron-Positron Collider del Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire, más conocido como CERN.

<sup>4</sup>El experimento Stanford Linear Collider, SLC, formó parte del SLAC o Stanford Linear Accelerator Center.

<sup>5</sup>El Tevatron fue el acelerador de partículas de Fermilab.

<sup>6</sup>Las siglas HERA hacen referencia al experimento alemán Hadron Electron Ring Anlage.

## Capítulo 2

# Fundamentos Matemáticos de Teoría de Grupos.

Antes de comenzar con los aspectos más físicos de este análisis, será fundamental asentar conocimientos **matemáticos** tanto de espacios vectoriales como de grupos, sin olvidar, para poder trabajar con grupos de Lie, las variedades.

### 2.1. Espacios Vectoriales.

Para comprender las complejidades de la teoría de campos es necesario partir de lo más básico. Manejar grupos y álgebras es más sencillo si se comprende el significado de **espacio vectorial**. [9, 10]

Si se desea definir un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $K$ , ya sea  $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ , por ejemplo, se necesita disponer de dos operaciones, una interna en  $V$  y otra externa. Los elementos del conjunto  $V$  recibirán el nombre de “vectores”, a diferencia de los “escalares” que conforman el cuerpo. Existe una serie de propiedades que se deben cumplir.

En primer lugar, la operación interna en  $V$ , “suma” (+), verifica cuatro axiomas que confieren al conjunto  $(V, +)$  la categoría de *Grupo Conmutativo*.

- Asociatividad:  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  entonces  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
- Conmutabilidad:  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$  entonces  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
- Elemento Neutro de la suma,  $\vec{0}$ : existe  $\vec{0} \in V$  tal que  $\forall \vec{u} \in V$  entonces  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ .



- Elemento Inverso respecto a la suma,  $-\vec{u}$ :  $\forall \vec{u} \in V$  existe  $-\vec{u} \in V$  tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ .

Por otra parte, la operación externa, “producto por escalares”  $(\cdot)$ , asocia un vector  $\lambda \cdot \vec{u}$  a cada pareja  $\lambda \in K$  y  $\vec{u} \in V$ .

- Distributividad respecto a la suma de vectores:  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$  y  $\forall \lambda \in K$  entonces  $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ .
- Distributividad respecto a la suma de escalares:  $\forall \vec{u} \in V$  y  $\forall \lambda, \mu \in K$  entonces  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ .
- Asociatividad:  $\forall \vec{u} \in V$  y  $\forall \lambda, \mu \in K$  entonces  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$ .
- Elemento Neutro del producto por escalares,  $\mathbb{I}$ : existe  $\mathbb{I} \in K$  tal que  $\forall \vec{u} \in V$  entonces  $\vec{u} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot \vec{u} = \vec{u}$ .

La existencia de estos axiomas deriva en seis propiedades diferentes muy útiles a la hora de trabajar con espacios vectoriales.

- $\forall \lambda \in K$  entonces  $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \lambda = \vec{0}$ .
- Sea  $0 \in K$  el elemento nulo del cuerpo, se cumple  $\forall \vec{u} \in V$  que  $0 \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot 0 = \vec{0}$ .
- $\forall \lambda \in K$  y  $\forall \vec{u} \in V$ , si se cumple que  $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}$ , entonces  $\lambda = 0$  y/o  $\vec{u} = \vec{0}$ .
- $\forall \lambda, \mu \in K$  y  $\forall \vec{u} \in V$ , si  $\lambda \cdot \vec{u} = \mu \cdot \vec{u}$  con  $\vec{u} \neq \vec{0}$  entonces  $\lambda = \mu$ .
- $\forall \lambda \in K$  y  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ , si se cumple que  $\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$  con  $\lambda \neq 0$ , entonces  $\vec{u} = \vec{v}$ .
- $\forall \lambda \in K$  y  $\forall \vec{u} \in V$ , entonces  $(-\lambda) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (-\vec{u}) = -\lambda \cdot \vec{u}$ .

### 2.1.1. Subespacios Vectoriales.

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $K$ , cualquier subconjunto,  $U$ , del mismo que sea a su vez espacio vectorial sobre  $K$  respecto de las operaciones interna y externa de  $V$ , se denomina *Subespacio Vectorial*.

Si  $U \neq \emptyset$  debe cumplir dos condiciones para ser considerado subespacio vectorial de  $V$ .

- Si  $\vec{u}, \vec{v} \in U$  entonces  $\vec{u} + \vec{v} \in U$ .
- Si  $\lambda \in K$  y  $\vec{u} \in U$  entonces  $\lambda \cdot \vec{u} \in U$ .



Es posible resumir estas propiedades en una sola

$$\vec{u}, \vec{v} \in U \text{ y } \lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in U. \quad (2.1.1.1)$$

## 2.2. Variedades Diferenciables.

Localmente, las variedades se “parecen” a  $\mathbb{R}^n$ . Se trata de una generalización de dimensión  $n$  de las curvas o superficies. Si se les dota de una topología, una estructura diferenciable que permita hablar de coordenadas, se conocen como **Variedades Diferenciables**,  $M$ .

Para poder asignar coordenadas, tal y como se muestra en [11], se toma un conjunto abierto  $O \subset M$ , en el que se define un homeomorfismo<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \phi: O \subset M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longrightarrow x_P^\mu \quad \text{con } \mu = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.2.0.1)$$

cuya imagen descansa en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $U = \phi(O \subset M)$ .

La carta, o mapa coordenado,  $(O, \phi)$  asigna coordenadas,  $x_P^\mu$ , en el espacio euclídeo tangente, al punto  $P$  y a su vecindad, contenida en  $O$ . Un enfoque más visual, expuesto en [12], se recoge en la Figura 2.1.

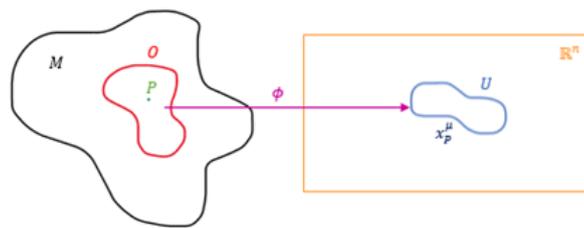


Figura 2.1: Representación de la asignación de coordenadas,  $x_P^\mu$  al abierto  $O$  de la variedad  $M$ .

El conjunto de todas las cartas  $(O_\alpha, \phi_\alpha)$  de la variedad se denomina Atlas  $C^\infty$  sobre  $M$ ,  $\{(O_\alpha, \phi_\alpha)\}$ . Por definición, todos los puntos de la variedad deben pertenecer al menos a un dominio de las cartas.

Puede darse, por tanto, la situación en la cual la intersección entre dos abiertos sea no nula,  $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$  [11]. En ese caso, deberá existir una función de transición

<sup>1</sup>Un homeomorfismo es una función biyectiva continua, cuya inversa también es continua.



$$\begin{aligned} \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha (O_\alpha \cap O_\beta) &\longrightarrow \phi_\beta (O_\alpha \cap O_\beta) \\ x_P^\mu \in U_\alpha &\longrightarrow y_P^\nu \in U_\beta \end{aligned} \quad (2.2.0.2)$$

de clase  $C^\infty$  entre los mapas coordenados  $(O_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(O_\beta, \phi_\beta)$ .  $M$  será una variedad real diferenciable de dimensión  $n$ .

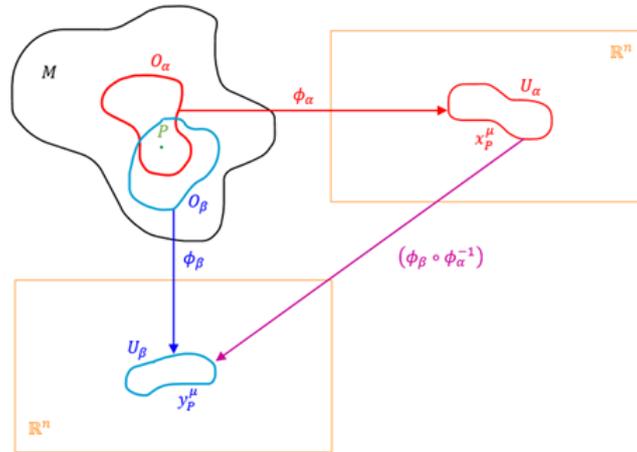


Figura 2.2: Función de transición  $C^\infty$  entre las cartas  $(O_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(O_\beta, \phi_\beta)$ .

Dos atlas  $\{(O_\alpha, \phi_\alpha)\}$  y  $\{(Q_\sigma, \zeta_\sigma)\}$ , definen estructuras equivalentes de variedad diferenciable en  $M$  si, para cualquier pareja de cartas,  $(O_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(Q_\sigma, \zeta_\sigma)$ , que involucre mapas de coordenadas de los dos atlas, cuyos dominios no sean disjuntos<sup>2</sup>, exista una aplicación *smooth*

$$\zeta_\sigma \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(O_\alpha \cap Q_\sigma) \longrightarrow \zeta_\sigma(O_\alpha \cap Q_\sigma). \quad (2.2.0.3)$$

### 2.2.1. Funciones y Curvas.

Una función

$$\begin{aligned} f : O \subset M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow f(P) \end{aligned} \quad (2.2.1.1)$$

se define como una aplicación real desde un abierto  $O$  de la variedad  $M$  hasta la recta real,  $\mathbb{R}$ .

<sup>2</sup>Dos dominions son disjuntos cuando tienen algún elemento en común.



Será considerada como una función *smooth* si  $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$  en  $\phi(P)$ .  $\mathcal{F}(M)$  es el conjunto de todas las funciones *smooth* de la variedad.

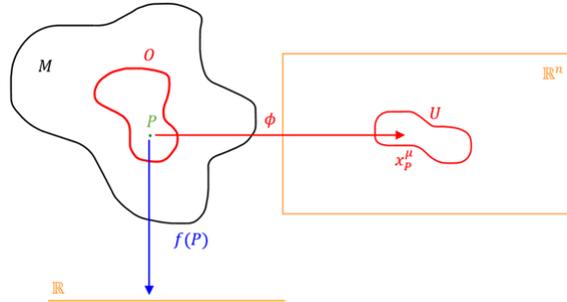


Figura 2.3: Definición de función en una variedad.

Por otra parte, será conveniente conocer qué se entiende por una curva en una variedad. La curva  $\gamma$  irá desde un intervalo, tal que  $\lambda \in (a, b)$ , hasta la variedad, donde pasará por el punto  $P$ . En algunas ocasiones, como en [12], se toma  $P = \gamma(\lambda = 0)$ , por convenio.

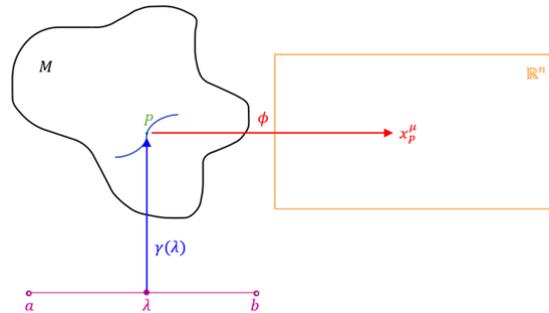


Figura 2.4: Curva  $\gamma$  que pasa por el punto  $P$  y va desde un intervalo hasta la variedad.

A lo largo de una curva  $\gamma$  de la variedad se define la derivada de una función  $f$  [11]. Se trata de un operador diferencial que conecta  $\lambda \in (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , por tanto, en primer lugar se le asignarán coordenadas a la función  $f$  mediante una carta arbitraria  $(O_\alpha, \phi_\alpha)$ .

$$f \circ \gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.2.1.2}$$

$$f \circ \gamma = f \circ \mathbb{I} \circ \gamma = f \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \gamma \equiv f[x^\mu(\lambda)]$$

La función  $f$  será derivable en el punto  $P$ , siempre y cuando  $f \circ \phi_\alpha^{-1}$  lo sea en  $\phi_\alpha(P)$ . El resultado no debe depender de la carta elegida, por esa razón, tomando  $(O_\beta, \phi_\beta)$  se obtiene



$$f \circ \phi_\alpha^{-1} = f \circ \mathbb{I} \circ \phi_\alpha^{-1} = f \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} = (f \circ \phi_\beta^{-1}) \circ (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) . \quad (2.2.1.3)$$

Por definición del atlas,  $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})$  es  $C^\infty$ .

Llegó el momento de definir el operador derivada  $\dot{\gamma}(0)$  sobre las funciones  $f$ , las cuales actúan en un entorno del punto  $P$ ,

$$\dot{\gamma}(0)(f) := \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_P = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial(f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} . \quad (2.2.1.4)$$

Sean  $x^\mu$  las coordenadas asignadas mediante la carta  $(O_\alpha, \phi_\alpha)$ , tal que  $P \in O_\alpha$ . Se define un nuevo operador sobre las funciones  $f$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P (f) := \left( \frac{\partial(f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^\mu} \right)_{\phi_\alpha(P)} . \quad (2.2.1.5)$$

Introduciendo la Aclaración de Notación 2.2.1.5 de [12] en la Ecuación 2.2.1.4 se obtiene

$$\dot{\gamma}(0)(f) \equiv \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_P := \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} . \quad (2.2.1.6)$$

Generalizando la expresión a la derivada de una función  $f$  a lo largo de una curva  $\gamma$  y teniendo en cuenta que  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$  se deriva

$$\frac{df}{d\lambda} = \left[ \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu \right] f \rightarrow \frac{d}{d\lambda} \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu . \quad (2.2.1.7)$$

El operador diferencial  $\frac{d}{d\lambda}$  es un campo vectorial y  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$  representa un vector tangente a la curva  $\gamma$ .

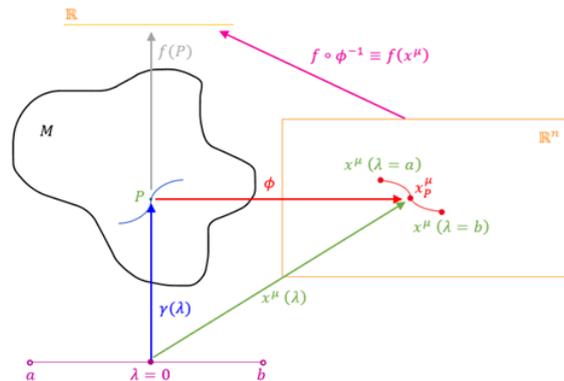


Figura 2.5: Resumen con todas las aplicaciones y operadores definidos sobre una variedad.



De forma análoga, se puede realizar este proceso con la carta  $(O_\beta, \phi_\beta)$  y las coordenadas asociadas  $y^\nu$ . Sea  $P \in O_\beta$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_P (f) := \left( \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial y^\nu} \right)_{\phi_\beta(P)}. \quad (2.2.1.8)$$

En la Ecuación 2.2.0.2 se presentó la relación de las coordenadas  $y_P^\nu$  en término de  $x_P^\mu$ , mediante la función  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ . La Relación 2.2.1.9 surge de aplicar la regla de la cadena. [11]

$$\frac{\partial (f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (f \circ \mathbb{I} \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.2.1.9)$$

## 2.2.2. Espacio Tangente. Vectores y Campos Vectoriales.

En cada punto  $P$  de la variedad  $M$  se puede definir un espacio vectorial real, en el cual estarán contenidas todas las curvas que atraviensan  $P$ . Conocido como el **espacio tangente**,  $T_P M$  según la notación de [11], está generado, según la carta  $(O_\alpha, \phi_\alpha)$ , sobre los números reales por la base de operadores  $\mathcal{B} \equiv \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P \right\}$  con  $\mu = 1, 2, \dots, \dim(M)$ .

Por otra parte, al elegir el mapa coordenado  $(O_\beta, \phi_\beta)$ , se asigna una nueva base al espacio vectorial, sobre las coordenadas  $y_P^\nu$ ,  $\mathcal{B}' \equiv \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_P \right\}$  con  $\nu = 1, 2, \dots, \dim(M)$ . La relación entre los vectores de las diferentes bases,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P = \left( \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_{\phi_\beta(P)} \left( \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)_P, \quad (2.2.2.1)$$

ya ha sido mostrada sutilmente en la Ecuación 2.2.1.9.

Indirectamente, ha aparecido el concepto de matriz de cambio de base,  $A$ , tal que  $\mathcal{B} := \mathcal{B}' \cdot A$ . Los elementos de dicha matriz vienen dados por  $A^\nu_\mu := \left( \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_{\phi_\beta(P)}$ .

Actuando sobre una función  $f$ , el vector

$$v(f) := \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (2.2.2.2)$$

está definido, sobre la variedad  $M$ , por la curva  $\gamma$  que pasa por el punto  $P = \gamma(\lambda = 0)$ .

Dicho vector  $v$  tangente a la curva  $\gamma$ , se puede expresar en términos de la base  $\mathcal{B}$ . Sean  $v^\mu = \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)_{\lambda=0}$  las coordenadas de

$$v_P := \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P = v^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P. \quad (2.2.2.3)$$



Cuando se deja correr el vector  $v_P$  para todos los  $\lambda \in (a, b)$ , se obtiene un campo vectorial,

$$v \equiv \frac{d}{d\lambda} := \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.2.2.4)$$

En la base  $\mathcal{B}'$ , el vector  $v_P$  tendrá asociadas unas coordenadas  $v'^\nu$ , relacionadas con  $v^\mu$  mediante

$$v'^\nu = \left( \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_{\phi_\beta(P)} v^\mu. \quad (2.2.2.5)$$

## 2.3. Grupos.

Se conoce con el nombre de grupo,  $G$ , a un conjunto, finito o infinito, de elementos, junto con una ley de composición interna, “ $\cdot$ ”. Todo grupo, y sus constituyentes, deben satisfacer una serie de condiciones, expuestas en [13].

- Cerrado.  $\forall f, g \in G$  existe  $h = f \cdot g \in G$ .
- Asociatividad.  $\forall f, g, h \in G$ ,  $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ .
- Elemento neutro. Existe  $e$ , elemento neutro, tal que  $\forall f \in G$ ,  $e \cdot f = f \cdot e = f$ .
- Inverso.  $\forall f \in G$ , existe  $f^{-1}$ , elemento inverso, tal que  $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e$ .

Para una correcta comprensión de las teorías *gauge*, es necesario conocer que se entiende por **grupo abeliano** o **conmutativo**. Sean  $f$  y  $g$  elementos del grupo  $G$ , se trata de un grupo abeliano, siempre y cuando, la ley de composición interna “ $\cdot$ ” cumpla la propiedad conmutativa,  $f \cdot g = g \cdot f$ .

### 2.3.1. Producto Directo de Grupos.

Sean dos grupos  $F$  y  $G$ , y un elemento de sendos conjuntos  $f$  y  $g$ , respectivamente, se define un nuevo grupo  $H$ , como el producto directo de  $F$  y  $G$ , compuesto por  $(f, g)$ . [14]

$$H \equiv F \otimes G \quad (2.3.1.1)$$

El conjunto  $H$ , tiene, en efecto, estructura de grupo.

- Dados dos elementos de  $H$ ,  $(f_1, g_1)$  y  $(f_2, g_2)$ , su producto será  $(f_1, g_1)(f_2, g_2) = (f_1 f_2, g_1 g_2)$ .



- Elemento neutro,  $\mathbb{I}_H = (\mathbb{I}_F, \mathbb{I}_G)$ . Por tanto,  $(\mathbb{I}_F, \mathbb{I}_G)(f, g) = (\mathbb{I}_F f, \mathbb{I}_G g) = (f, g)$  y  $(f, g)(\mathbb{I}_F, \mathbb{I}_G) = (f \mathbb{I}_F, g \mathbb{I}_G) = (f, g)$ .
- Inversa,  $(f^{-1}, g^{-1})$ . Como resultado  $(f^{-1}, g^{-1})(f, g) = (f, g)(f^{-1}, g^{-1}) = \mathbb{I}_H = (\mathbb{I}_F, \mathbb{I}_G)$ .

### 2.3.2. Homomorfismos e Isomorfismos.

Un **homomorfismo**

$$f : G \rightarrow G' \quad \text{tal que} \quad f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2) \quad (2.3.2.1)$$

mapea un grupo  $G$  en otro  $G'$ , preservando la estructura multiplicativa de  $G$ . También denominado morfismo, se trata de una aplicación lineal que mantiene las operaciones definidas sobre los objetos que relaciona. [11, 14]

Consecuentemente la identidad de  $G$  se mapea al elemento neutro de  $G'$ ,  $f(\mathbb{I}_G) = \mathbb{I}_{G'}$ .

Recibirá el nombre de **isomorfismo**, aquel homomorfismo que admita inverso. Los grupos  $SO(2)$  y  $U(1)$ <sup>3</sup> son isomorfos mediante la aplicación

$$f : SO(2) \rightarrow U(1) \quad \text{para} \quad f(R(\phi)) = e^{i\phi} . \quad (2.3.2.2)$$

### 2.3.3. Representaciones de los Grupos.

El estudio de física de partículas requiere un manejo excelente del concepto de **representaciones** de un grupo. [11, 13]

Sea  $G$  un grupo, y  $V$  un espacio vectorial, se define como representación  $\rho$  de  $G$  en  $V$  a un homomorfismo de los grupos, es decir, a

$$\rho : g \in G \rightarrow \rho_g \in Aut(V) . \quad (2.3.3.1)$$

El conjunto de los automorfismos<sup>4</sup> de  $V$ ,  $Aut(V)$ , tiene estructura de grupo.

La dimensión de la representación viene dada por la dimensión del espacio vectorial  $V$ .

Por el hecho de ser un homomorfismo se cumplen dos propiedades.

---

<sup>3</sup>Tanto los grupo ortogonales especiales, como los unitarios, se introducirán durante las próximas secciones.

<sup>4</sup>Un automorfismo, es un isomorfismo, es decir un homomorfismo que admite inverso, de un objeto sobre sí mismo.



- $\rho_g \cdot (\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot \rho_g(v_1) + \lambda_2 \cdot \rho_g(v_2)$ , sea  $g \in G$ ,  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  y  $\forall v_1, v_2 \in V$ .
- $\rho_{g_1} \circ \rho_{g_2} = \rho_{g_1 \cdot g_2}$

Se denomina *morfismo* entre dos representaciones de  $G$ ,  $\rho$  en  $V$  y  $\rho'$  en  $W$ , a una aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$ , tal que

$$f \circ \rho_g(v) = \rho'_g \circ f(v) \quad \forall v \in V, \forall g \in G. \quad (2.3.3.2)$$

Esas dos representaciones de  $G$  serán *equivalentes* si  $f \in \text{Hom}_G(V, W)$  y es biyectivo<sup>5</sup>. El morfismo  $f$  se conoce como isomorfismo de representaciones.

---

<sup>5</sup>Las aplicaciones que son inyectivas y sobreyectivas, es decir, a cada elemento del conjunto de salida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada y viceversa, reciben el nombre de biyectivas.

# Capítulo 3

## Grupos de Lie.

El SM viene descrito por una **teoría gauge** regida por el grupo  $G = SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ , compuesto por el producto directo de tres grupos de Lie. Por esta razón, es esencial manejar, de manera ágil este término.

El **sector electro-débil** está representado por el producto directo  $SU(2) \otimes U(1)$ , concretamente, la electrodinámica cuántica, *Quantum Electrodynamics* o QED, se rige mediante  $U(1)$ , siendo  $SU(2)$  el conjunto asociado a la interacción débil, cuyos bosones  $W^\pm$  y  $Z$  describen la interacción entre corrientes cargadas y neutras, respectivamente. Análogamente,  $SU(3)$  es el grupo que plasma la **interacción fuerte**, en otras palabras, la cromodinámica cuántica, también conocida como QCD por sus siglas en inglés *Quantum Chromodynamics*. Los dos pilares más importantes son el confinamiento y la libertad asintótica, véase, los *quarks* y gluones se suponen partículas libres a distancias pequeñas, apareciendo confinadas en mesones y bariones para longitudes mayores. [8]

### 3.1. Definición y Ejemplos.

Se conocen como **grupos de Lie**,  $G$ , aquellos grupos continuos, compuestos por infinitos elementos, los cuales admiten una descripción en términos geométricos, al estar dotados de una estructura de variedad diferenciable. [12, 11]

La multiplicación de dos elementos del grupo,  $g$  y  $g'$ ,

$$(g, g') \in G \times G \rightarrow g \cdot g' \in G \tag{3.1.0.1}$$

es de clase  $C^\infty$ . Como consecuencia<sup>1</sup>, es posible definir otra aplicación de clase  $C^\infty$

---

<sup>1</sup>En realidad, es consecuencia de que la multiplicación sea  $C^\infty$  y del Teorema de la Función Implícita en un entorno del elemento neutro de  $G$ .



$$g \in G \rightarrow g^{-1} \in G \quad (3.1.0.2)$$

Se denomina un homomorfismo de grupos de Lie sobre  $G$  y  $H$  a una aplicación lineal  $f : G \rightarrow H$  que sea un homomorfismo y  $C^\infty$ .

### 3.1.1. El Grupo Lineal.

En el análisis del modelo estándar destacan los grupos unitarios generales,  $U(n)$ , y especiales,  $SU(n)$ , subgrupos de los **grupos lineales generales**,

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{M \in \text{Matr}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}. \quad (3.1.1.1)$$

Los elementos de  $GL(n, \mathbb{R})$  son matrices cuadradas,  $M_{n \times n}$ , con determinante no nulo. Sea  $M = (m_{ij})$ , sus entradas son reales,  $m_{ij} \in \mathbb{R}$ .

Tomando el conjunto de matrices  $A$  cuyo determinante es positivo,

$$GL^+(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\} \subset GL(n, \mathbb{R}), \quad (3.1.1.2)$$

es fácil comprobar que  $GL^+(n, \mathbb{R})$  se trata de un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

- Sean dos matrices  $A$  y  $B$  con determinante positivo, es decir, dos elementos de  $GL^+(n, \mathbb{R})$ , su producto  $AB$  también posee el determinante mayor que 0,  $\det(AB) = \det(A)\det(B) > 0$ .
- Sea una matriz  $A$  perteneciente a  $GL^+(n, \mathbb{R})$ , su inversa tiene determinante positivo,  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) > 0$ .

Desde un punto de vista geométrico, los elementos de  $GL^+(n, \mathbb{R})$  conservan la orientación de la base **orientada** de vectores. [11]

Las matrices cuyo determinante es la unidad conforman el **grupo lineal especial**,

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{N \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(N) = 1\}. \quad (3.1.1.3)$$

Análogamente al caso real, se pueden definir los grupos lineales generales y especiales sobre el cuerpo de los complejos,  $\mathbb{C}$ .

### 3.1.2. El Grupo Ortogonal.

Una buena comprensión de los **grupos ortogonales**,  $O(n)$ , permite entender mejor la estructura de los conjuntos  $U(n)$  y  $SU(n)$ .



Un grupo ortogonal,  $O(n)$ , está formado por las matrices singulares reales cuadradas,  $M_{n \times n}$ , cuya inversa coincide con su transpuesta, es decir,

$$O(n) := \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M^t M = M M^t = \mathbb{I}\}. \quad (3.1.2.1)$$

En otras palabras, los elementos que componen  $O(n)$  son lo que se conoce como matrices **ortogonales**.

Por otra parte, es posible definir un producto escalar  $\langle u, v \rangle = u^t \mathbb{I} v = u_i v^i$ , siguiendo la notación de [11], de dos vectores arbitrarios  $u$  y  $v$ , en  $\mathbb{R}^n$ .

No será complicado comprobar que las matrices de  $O(n)$  son los automorfismo de  $\mathbb{R}^n$  que conservan el producto escalar de vectores  $u$  y  $v$ . Se trata de una implicación directa de la invarianza de la longitud de un vector  $v$ ,  $v^t v$ .

$$\langle Mu, Mv \rangle = (Mu)^t \mathbb{I} (Mv) = u^t M^t M v = u^t \mathbb{I} v = \langle u, v \rangle \quad (3.1.2.2)$$

Este subgrupo compacto<sup>2</sup> de  $GL(n, \mathbb{R})$ , está formado por dos componentes conexas<sup>3</sup>, asociadas a matrices cuyo determinante toma valores 1 o  $-1$ . Por este hecho, se define el **grupo ortogonal especial** como

$$SO(n) := \{N \in O(n) \mid \det(N) = 1\}. \quad (3.1.2.3)$$

Las matrices  $N$  que conforman este grupo representan las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  que preservan el producto escalar de vectores y la orientación. Un claro ejemplo son las rotaciones alrededor de un eje del espacio euclídeo, las cuales se corresponden con los elementos de  $SO(3)$ . Generalizando, los elementos de  $SO(n)$  son las rotaciones en un espacio  $n$ -dimensional. [14]

### 3.1.3. El Grupo Unitario.

Mientras la física clásica utiliza los números reales en su análisis del mundo, la mecánica cuántica opta por elementos complejos.

En esta sección se extenderán los conceptos de los grupos ortogonales a los números complejos, dando lugar a los **grupos unitarios**. Se desea generalizar el concepto de transformaciones lineales a vectores complejos  $\psi$  de  $n$ -componentes. [14]

Se define el grupo unitario  $U(n)$  de matrices cuadradas  $W_{n \times n}$  como

---

<sup>2</sup>El término compacto es la generalización de un subconjunto cerrado y acotado en un espacio Euclídeo.

<sup>3</sup>En una topología, se entiende como conjunto conexo a un subconjunto que no se puede expresar como la unión disjunta de otros dos conjuntos abiertos, del espacio topológico, no vacíos.



$$U(n) := \{W \in GL(n, \mathbb{C}) \mid W^\dagger W = WW^\dagger = \mathbb{I}\} \quad (3.1.3.1)$$

donde  $W^\dagger = \overline{W^t} = \overline{W}^t$ . La inversa de un elemento  $W$  de estos grupos, coincide con su matriz adjunta, es decir, transpuesta conjugada. Las matrices  $W$  son unitarias.

Rápidamente, se puede comprobar que, en efecto,  $U(n)$  es un grupo, del modo que se recoge en [11, 14].

- Cerrado. Sean  $W_1, W_2 \in U(n)$  entonces<sup>4</sup>  $(W_1 W_2)^\dagger W_1 W_2 = W_2^\dagger W_1^\dagger W_1 W_2 = W_2^\dagger W_2 = \mathbb{I}$ .
- Elemento neutro. La matriz identidad  $\mathbb{I}$  pertenece a  $U(n)$  porque  $\mathbb{I}^\dagger \mathbb{I} = \mathbb{I} \mathbb{I}^\dagger = \mathbb{I}$ .
- Inversa. Tal y como se ha comentado con anterioridad, la inversa de una matriz  $W \in U(n)$  es su adjunta.

Se impondrá que las transformaciones lineales dejen el producto de vectores invariante. Previamente, será necesario definir un nuevo producto para los vectores complejos.

La generalización compleja del producto escalar de los vectores reales es el **producto hermitiano**

$$\langle \psi, \zeta \rangle = \psi^\dagger \zeta = \overline{\psi^t} \mathbb{I} \zeta = \overline{\psi^t} \zeta_i \quad (3.1.3.2)$$

de  $\psi, \zeta \in \mathbb{C}$ , manteniendo la notación de [11] fusionada con [14].

Sean dos vectores arbitrarios  $\psi$  y  $\zeta$ , y una matriz  $W \in U(n)$ , que transformen bajo  $\psi \rightarrow \psi' = W\psi$  y  $\zeta \rightarrow \zeta' = W\zeta$ , se requiere que  $\zeta'^\dagger \psi'$  y  $\psi'^\dagger \zeta'$  permanezcan invariantes.

$$\begin{aligned} \zeta'^\dagger \psi' &= (W\zeta)^\dagger W\psi = \zeta^\dagger W^\dagger W\psi = \zeta^\dagger \mathbb{I} \psi = \zeta^\dagger \psi \\ \psi'^\dagger \zeta' &= (W\psi)^\dagger W\zeta = \psi^\dagger W^\dagger W\zeta = \psi^\dagger \mathbb{I} \zeta = \psi^\dagger \zeta \end{aligned} \quad (3.1.3.3)$$

Merece la pena fijarse en los determinantes de las matrices  $W \in U(n)$ .

$$\begin{aligned} \det(W^\dagger W) &= \det(\mathbb{I}) = 1 \\ \det(W^\dagger W) &= \det(\overline{W^t}) \det(W) = \overline{\det(W)} \det(W) = |\det(W)|^2 \\ |\det(W)|^2 &= 1 \rightarrow \det(W) = 1 \cdot e^{i\theta} \quad \text{con } 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned} \quad (3.1.3.4)$$

<sup>4</sup>Se supone conocida la propiedad  $(W_1 W_2)^\dagger = W_2^\dagger W_1^\dagger$ .



El  $\det(W)$  es un número complejo de módulo 1 y fase  $\theta$ . Basándose en esto, de manera análoga a cuando se introdujo  $SO(n)$ , es posible definir un subgrupo, no abeliano, de  $U(n)$  que contenga la matriz identidad, el cual se conoce como **grupo unitario especial**,

$$SU(n) := \{U \in U(n) \mid \det(U) = 1\}. \quad (3.1.3.5)$$

En un grupo  $SU(n)$ , existen  $n^2 - 1$  grados de libertad reales. Por cada matriz  $U \in SU(n)$ , de dimensiones  $n \times n$ , se tienen  $n^2$  entradas complejas, equivalentemente,  $2n^2$  reales. Por otra parte, es necesario tener en cuenta la ligadura,  $U^\dagger U = 1$ , de unitariedad<sup>5</sup>. Por un lado,  $(U^\dagger U)^\dagger = U^\dagger U$ , en otras palabras,  $U^\dagger U$  es hermitico, como consecuencia, existen  $n + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n - 1)$  ligaduras reales. Por el otro lado, la imposición  $\det(U) = 1$  elimina otro grado de libertad real más. En definitiva,  $2n^2 - (n + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n - 1)) - 1 = n^2 - 1$  es el número de grados de libertad reales en  $SU(n)$ . [8]

## 3.2. Álgebras de Lie.

En la vecindad de cada punto del grupo, se puede definir un espacio tangente  $\mathbb{R}^n$ , siendo  $n$  la dimensión de la variedad, entre los que merece la pena destacar el álgebra,  $T_e G = \mathcal{A}$ .

Bajo el nombre de mapa exponencial, se define la aplicación lineal que conecta los elementos  $X$  del álgebra,  $\mathcal{A}$ , espacio vectorial isomorfo a  $\mathbb{R}^{\dim(\mathcal{G})}$  descrito sobre el elemento neutro, con los del grupo  $G$ ,  $g$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow G \\ X &\longrightarrow g = e^X \end{aligned} \quad (3.2.0.1)$$

Las coordenadas en el álgebra se expresan por medio de los coeficientes  $\theta^A$ , los cuales van multiplicados por los elementos de la base, también conocidos como generadores,  $T_A$ , de manera que un elemento del álgebra,

$$X = \sum_{A=1}^{\dim(\mathcal{G})} \theta^A T_A, \quad (3.2.0.2)$$

se podría expresar como combinación lineal de los generadores. [15, 11]

---

<sup>5</sup>No todas las ecuaciones del sistema matricial son independientes.



### 3.2.1. Corchete de Lie. Generadores y Constantes de Estructura.

Con el fin de definir los generadores y las constantes de estructura, es necesario mencionar la ley de composición interna del álgebra de Lie, el **corchete de Lie de  $X$  e  $Y$** ,  $[X, Y]$ .

$$(X, Y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow [X, Y] \in \mathcal{A} \quad (3.2.1.1)$$

Sean  $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ , se cumplen tres propiedades para cualquiera que sea el grupo de Lie.

- Antisimetría.  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
- Bilinealidad.  $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha [X, Z] + \beta [Y, Z]$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- Identidad de Jacobi.  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

En el caso concreto de trabajar con matrices, el bracket de Lie es el conmutador.

Los generadores  $T_A$  están regidos por las relaciones de conmutación del bracket de Lie,

$$[T_A, T_B] = f_{AB}^C T_C \quad \text{con } A, B, C \in \{1, \dim(\mathcal{G})\} . \quad (3.2.1.2)$$

Los coeficientes  $f_{AB}^C$  reciben el nombre de constantes de estructura.

El álgebra de Lie estará bien definida, siempre y cuando se satisfaga la identidad de Jacobi en términos del brackets de Lie o

$$f_{BC}^D f_{AD}^E + f_{CA}^D f_{BD}^E + f_{AB}^D f_{CD}^E = 0 \quad \text{con } A, B, C, D, E \in \{1, \dim(\mathcal{G})\} \quad (3.2.1.3)$$

para las constantes de estructura. [15]

Sea  $\mathcal{I}$  un subálgebra tal que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ , se denomina ideal siempre que se cumpla

$$[X, I] \subset \mathcal{I} \quad \forall X \in \mathcal{A}, \forall I \in \mathcal{I} . \quad (3.2.1.4)$$

Un álgebra de Lie simple destaca por no albergar ideales no triviales. La suma directa de este tipo de espacios se conoce como semisimple y el álgebra de Lie del modelo estándar es un ejemplo. [11]



### 3.2.2. El Álgebra del Grupo Lineal.

El espacio vectorial de las matrices cuadradas  $A_{n \times n}$  con entradas reales, junto con el conmutador de matrices, el corchete de Lie, constituye el álgebra

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \text{Matr}_{n \times n}(\mathbb{R})\} \quad (3.2.2.1)$$

del grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Tomando una matriz cuadrada  $A$ , perteneciente al álgebra de  $GL(n, \mathbb{R})$ , y empleando el concepto de **mapa exponencial**,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad (3.2.2.2)$$

es posible definir una operación que conecte el espacio tangente  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = T_{\mathbb{I}}(GL(n, \mathbb{R}))$  con el grupo de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$ .

$$A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow e^A \in GL(n, \mathbb{R}) \quad (3.2.2.3)$$

El elemento neutro  $\mathbb{I}$  del grupo lineal se recupera<sup>6</sup> dada una matriz  $A_{n \times n}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

$$e^{tA}e^{-tA} = e^0 = \mathbb{I} \quad (3.2.2.4)$$

Por otra parte, para determinar el álgebra

$$\mathfrak{sl} = \{B \in \text{Matr}_{n \times n}(\mathbb{R}) | \text{tr}(B) = 0\} \quad (3.2.2.5)$$

del grupo lineal especial, la condición de  $\det(N) = 1$ , para  $N \in SL(n, \mathbb{R})$ , se traduce en la nulidad de la traza de  $B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , tal y como se recoge en [11].

### 3.2.3. El Álgebra del Grupo Ortogonal.

El álgebra

$$\mathfrak{o}(n) := \{A \in \text{Matr}_{n \times n} | A + A^t = 0\} \quad (3.2.3.1)$$

del grupo ortogonal  $O(n)$  está formada por el espacio tangente  $T_{\mathbb{I}}(O(n))$  compuesto por las matrices cuadradas de entradas reales antisimétricas y por el conmutador de

---

<sup>6</sup>Este resultado se deriva de la propiedad  $e^A e^B = e^{A+B}$  para dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  que conmutan.



matrices.

Análogamente a  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , se define una aplicación exponencial que conecte

$$A \in \mathfrak{o}(n) \rightarrow e^A \in O(n) . \quad (3.2.3.2)$$

Reparando en el hecho de que las matrices antisimétricas conmutan con su transpuesta, es decir,

$$A + A^t = 0 \rightarrow A^t = -A \quad (3.2.3.3)$$

$$A^t A = -A^2 = A A^t ,$$

se recupera el elemento identidad de  $O(n)$  mediante

$$e^A (e^A)^t = e^A e^{A^t} = e^{A+A^t} = e^0 = \mathbb{I} . \quad (3.2.3.4)$$

A la hora de definir el álgebra  $\mathfrak{so}(n)$ , asociada al grupo de Lie ortogonal especial, la propiedad sobre el determinante de las matrices  $N \in SO(n)$ ,  $\det(N) = 1$ , se traduciría en una imposición sobre la traza de los elementos  $B \in \mathfrak{so}(n)$ ,  $\text{tr}(B) = 0$ . No obstante, esta condición es superflua, debido a que los elementos que conforman la diagonal de las matrices antisimétricas son nulos por definición [11]. Por tanto,

$$\mathfrak{so}(n) := \{B \in \text{Matr}_{n \times n}(\mathbb{R}) | B + B^t = 0\} . \quad (3.2.3.5)$$

Este caso es un claro ejemplo de grupos distintos que disfrutan del mismo álgebra.<sup>7</sup>

Al igual que se explicará en secciones venideras, el **álgebra de Lorentz** se describe en términos de dos copias del álgebra de  $SO(3) \approx SU(2)$ , por tanto, resulta conveniente introducirla.

De las leyes de conmutación de los generadores  $T_i$  de  $\mathfrak{so}(3)$ ,

$$[T_i, T_j] = \varepsilon_{ij}^k T_k \quad \text{con } i, j, k = 1, 2, 3 , \quad (3.2.3.6)$$

se extrae que las constantes de estructura son el símbolo de Levi-Civita en tres dimensiones. [16]

Si se necesitara una representación en dos dimensiones de  $\mathfrak{so}(3)$ , en términos de matrices, los generadores dependerían de las **matrices de Pauli**,  $\sigma_j$  con  $j = 1, 2, 3$ ,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (3.2.3.7)$$

---

<sup>7</sup>En general, el álgebra del subgrupo que contiene la identidad, coincide con la del grupo.



como  $T_j = \frac{1}{2i}\sigma_j$ . [15, 14]

Si por el contrario, se dependiera de operadores lineales al trabajar con las coordenadas  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  y  $x^3 = z$ , se recurriría a los generadores  $T_1 = -T_x$ ,  $T_2 = -T_y$  y  $T_3 = -T_z$ , donde

$$\begin{aligned}T_x &= y\partial_z - z\partial_y, \\T_y &= z\partial_x - x\partial_z, \\T_z &= x\partial_y - y\partial_x.\end{aligned}\tag{3.2.3.8}$$

En la representación tridimensional, la base del álgebra  $\mathfrak{so}(3)$  representa las rotaciones espaciales en torno a un eje,  $T_1 = R_x$ ,  $T_2 = R_y$  y  $T_3 = R_z$ . Las matrices

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{3.2.3.9}$$

son los generadores infinitesimales. [15, 17]

### 3.2.4. El Álgebra del Grupo Unitario.

La generalización en el cuerpo de los complejos es prácticamente inmediata. El conjunto de matrices cuadradas antihermíticas con entradas complejas, junto con el conmutador, definen el álgebra

$$\mathfrak{u}(n) := \{A \in \text{Matr}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A + A^\dagger = 0\}\tag{3.2.4.1}$$

del grupo unitario  $U(n)$ .

En esta ocasión, al definir el álgebra

$$\mathfrak{su}(n) := \{B \in \text{Matr}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid B + B^\dagger = 0 \ \& \ \text{tr} B = 0\}\tag{3.2.4.2}$$

asociada a  $SU(n)$ , la imposición de la traza nula, como consecuencia de la condición  $\det(U) = 1$  para todo  $U \in SU(n)$ , no es prescindible. [11]

La dimensión del álgebra como espacio vectorial coincide con la del grupo como variedad. Por tanto, la dimensión del espacio vectorial real  $\mathfrak{su}(n)$  es  $n^2 - 1$ , en otras palabras, cualquier matriz  $U \in SU(n)$  puede ser descrita mediante  $n^2 - 1$  parámetros reales,  $\alpha^i$ . Es de gran utilidad expandir los elementos  $U$  del grupo  $SU(n)$ , en términos



de los generadores  $T_i$ , especialmente para valores infinitesimales de los parámetros,

$$U = e^{i\alpha^i T_i} \simeq \mathbb{I} + i\alpha^i T_i + \mathcal{O}(\alpha^2) . \quad (3.2.4.3)$$

Si bien es cierto, que se ha determinado que los elementos que conforman el álgebra  $\mathfrak{su}(n)$  deben ser matrices antihermíticas, muchas veces en física se utiliza el convenio de que son hermíticas. Esto se consigue mediante un simple cambio de variables.

Partiendo de  $[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_K$  para los generadores de  $SU(n)$ , se definen unos nuevos elementos  $t_j = iT_j$ , o lo que es lo mismo,  $T_j = -it_j$ , los cuales satisfacen

$$\begin{aligned} [t_i, t_j] &= [iT_i, iT_j] \\ &= (-1) \cdot [T_i, T_j] \\ &= (-1) \cdot f_{ij}^k T_K \\ &= if_{ij}^k t_K . \end{aligned} \quad (3.2.4.4)$$

Las constantes de estructura  $f_{ij}^k$  son antisimétricas y dependerán de la elección de los generadores.

Particularizando a la teoría del SM, uno de los grupos clave en la teoría electrodébil es  $SU(2)$ , con tres parámetros reales. Una base, o representación, del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  de dimensión 3, utilizada al trabajar con fermiones, viene dada por  $\{t_i\}_{i=1,2,3} = \{\frac{1}{2}\sigma_i\}_{i=1,2,3}$ , donde  $\sigma_i$  son las **matrices de Pauli**. [8]

El análogo para el álgebra  $\mathfrak{su}(3)$  de dimensión 8, son las matrices hermíticas **Gell-Mann** de traza nula:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.4.5)$$

Estas dos representaciones de los álgebras de los grupos  $SU(2)$  y  $SU(3)$  desempeñan un papel muy importante a la hora de modelizar las diferentes interacciones, breve recordatorio de que el SM es una teoría *gauge* descrita por  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . [14]

# Capítulo 4

## Relatividad Especial.

Bajo la **teoría de la relatividad especial** se aunaron las dimensiones espaciales con la temporal en el espacio-tiempo isótropo y homogéneo de *Minkowski*<sup>1</sup>. Este hito supuso un cambio en la concepción, estableciéndose como uno de los pilares de la física moderna.

Esta teoría se apoya en el principio de que la velocidad de la luz, es constante en todos los sistemas de coordenadas, independientemente del observador, una manifestación de la existencia de una simetría fundamental entre la dimensión temporal y las tres espaciales.

En el espacio-tiempo de Minkowski, cuyo tensor métrico es

$$\eta := \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.0.0.1)$$

un evento se definirá mediante las coordenadas<sup>2</sup>  $x^\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , donde

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}) . \quad (4.0.0.2)$$

Sea  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. [18]

Dos observadores,  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ , describirán las mismas leyes de la física cuando sus coordenadas,  $x^\mu$  y  $(x')^\mu$ , respectivamente, están relacionadas mediante una **transformación de Lorentz**,  $\Lambda^\mu{}_\nu$ .

---

<sup>1</sup>El espacio-tiempo de Minkowski se considera homogéneo e isótropo porque las leyes por las que se rige son invariantes respecto a traslaciones en cualquiera de las coordenadas y a transformaciones que dejen invariante la distancia, respectivamente.

<sup>2</sup>Las letras griegas que se utilicen como índices representarán elementos de la relatividad especial. Por el contrario, el alfabeto latino se relacionará con las coordenadas espaciales.



$$x^\mu \rightarrow (x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (4.0.0.3)$$

En mecánica cuántica, resulta de gran utilidad trabajar con teorías y objetos invariantes bajo estas transformaciones.

Desgraciadamente, sólo serán válidas aquellas  $\Lambda^\mu{}_\nu$  que cumplan

$$\Lambda^\mu{}_\sigma \eta^{\sigma\tau} \Lambda^\nu{}_\tau = \eta^{\mu\nu} , \quad (4.0.0.4)$$

las cuales conforman el grupo de Lorentz<sup>3</sup>  $O(1, 3)$ .

En [15] se define uno de los objetos invariantes más importantes en relatividad especial, la distancia

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (d\vec{x})^2 = -c^2(dt)^2 + (d\vec{x})^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.0.0.5)$$

entre dos eventos  $x^\mu$  y  $(x + dx)^\mu = (c(t + dt), \vec{x} + d\vec{x})$ .

Por otra parte, conviene mencionar que existen unas transformaciones

$$x^\mu \rightarrow (x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu \quad (4.0.0.6)$$

más generales que mantienen invariante  $ds^2$ , las cuales conforman el **grupo de Poincaré**. A las rotaciones espaciales y los *boosts* que componen el grupo de Lorentz, se les añaden las traslaciones  $c^\mu$ .

Por tanto, el grupo de simetrías del espacio-tiempo de Minkowski es el de Poincaré, el cual alberga a las transformaciones de Lorentz. [16]

Se diferencian dos tipos de transformaciones de Lorentz, las rotaciones y los *boosts*. Esta distinción está presente en los propios elementos de la matriz de transformación  $\Lambda^\mu{}_\nu$ .

En primer lugar, se desea caracterizar las **rotaciones**, ejemplo de transformación homogénea de Lorentz, pertenecientes al grupo propio de Lorentz.

De la Ecuación 4.0.0.4, tomando determinantes, se obtiene que  $(\det \Lambda)^2 = 1$ , es decir  $\det \Lambda = \pm 1$ . Seleccionando aquellas transformaciones conectadas mediante continuidad con la identidad<sup>4</sup> se determina que  $\det \Lambda = 1$ .

Partiendo de la definición de determinante,

<sup>3</sup>Los grupos de Lorentz entran dentro del conjunto de grupos de Lie.

<sup>4</sup>Resulta interesante buscar transformaciones continuamente conectadas con la identidad, si se desea definir un grupo conformado por las mismas.



$$\det \Lambda = \Lambda^0_{\mu} \Lambda^1_{\nu} \Lambda^2_{\tau} \Lambda^3_{\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\tau\sigma} = 1 \rightarrow \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Lambda^{\gamma}_{\tau} \Lambda^{\delta}_{\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\tau\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (4.0.0.7)$$

se ha demostrado la invarianza del tensor antisimétrico  $\varepsilon^{\mu\nu\tau\sigma}$  bajo transformaciones propias de Lorentz.

Por otra parte, tomando  $\mu = \nu = 0$  en la Ecuación 4.0.0.4 aparece una nueva condición para los elementos de  $\Lambda$ , recogida en [18],

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^0_i)^2 = 1. \quad (4.0.0.8)$$

La Expresión 4.0.0.8 se cumplirá cuando  $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$ , en otras palabras,  $\Lambda^0_0 \geq 1$  o  $\Lambda^0_0 \leq -1$ . Recuperando la identidad,  $\Lambda^0_0 = 1$ , de manera continua, los elementos del grupo propio de Lorentz se caracterizan por  $\Lambda^0_0 \geq 1$ . Las transformaciones con  $\Lambda^0_0 \leq -1$  están relacionadas con la inversión temporal.

Para la generalización de las rotaciones espaciales,

$$R_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & (R_k)^i_j & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (4.0.0.9)$$

se recurre, de la misma manera que se introdujo anteriormente, a los generadores de  $SO(3)$ ,  $R_k$  con  $k = x, y, z$ .

Dentro del conjunto de transformaciones **especiales** de Lorentz se encuentran los *boost*,  $L_{\alpha}$ , según la dirección espacial que mezclen con la coordenada temporal. Por ejemplo,

$$L_x = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi & 0 & 0 \\ \sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.0.0.10)$$

define la transformación entre dos sistemas de referencia que se mueven, uno respecto del otro, con velocidad  $v = c \tanh\xi$  a lo largo de la dirección  $x$ . [15, 11]



## 4.1. El Grupo de Lorentz.

Si uno desea adentrarse en el campo de los grupos de Lorentz, es recomendable manejar el concepto de **grupo pseudoortogonal**.

Sea

$$G := \left( \begin{array}{cccc} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \\ \\ q \end{array} \quad (4.1.0.1)$$

una matriz diagonal de dimensión  $p + q = n$ . Dado dos vectores  $x$  e  $y$ , se define un nuevo producto sobre  $\mathbb{R}^n$ ,

$$(x, y) = x^t \cdot G \cdot y = x_i G^i_j y^j . \quad (4.1.0.2)$$

Los automorfismos de  $\mathbb{R}^n$  que conservan dicha operación, el producto lorentziano, para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , conforman el grupo pseudoescalar  $O(p, q)$ . Sea  $A$  una matriz cuadrada con entradas reales y determinante no nulo,

$$(Ax, Ay) = (Ax)^t \cdot G \cdot (Ay) = x^t A^t \cdot G \cdot Ay = (x, y) \Leftrightarrow A^t \cdot G \cdot A = G . \quad (4.1.0.3)$$

Recopilando toda esta información,

$$O(p, q) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t \cdot G \cdot A = G\} . \quad (4.1.0.4)$$

Las matrices  $A \in O(p, q)$  pueden tomar como determinante 1 o  $-1$ . De manera semejante a apartados anteriores, basándose en [11], se define el subgrupo

$$SO(p, q) := \{B \in O(p, q) \mid \det(B) = 1\} . \quad (4.1.0.5)$$

Cuando se toman los valores  $p = 1$  y  $q = 3$ , se habla del **grupo de Lorentz**,  $O(1, 3)$ , y el subgrupo propio de Lorentz,  $SO(1, 3)$ . En estos grupos la matriz  $G$  es  $G \equiv \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  y a los elementos  $\Lambda \in O(1, 3)$  se les conoce como transformadas de Lorentz. Es decir,



$$O(1, 3) := \{ \Lambda \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \Lambda^t \eta \Lambda = \eta \} . \quad (4.1.0.6)$$

Por comodidad, en relatividad especial, cuando se hable sobre el espacio-tiempo de Minkowski,  $\mathbb{R}^4$ , se utilizará una ligera variación de la notación, haciéndose corresponder  $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{R}^{(1,3)}$ .

En este espacio 4–dimensional se puede particularizar el producto escalar definido en la ecuación 4.1.0.2 como

$$(x, y) = x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = -x^0 y^0 + \vec{x} \cdot \vec{y} . \quad (4.1.0.7)$$

Un vector  $x$  perteneciente a este espacio se clasifica, dentro de tres categorías, según el resultado del producto lorentziano consigo mismo.

- Género Tiempo:  $(x, x) = |x|^2 < 0$ .
- Género Espacio:  $(x, x) = |x|^2 > 0$ .
- Género Null/Luz:  $(x, x) = |x|^2 = 0$ .

De esta forma, el espacio-tiempo queda dividido, con respecto a un origen arbitrario de coordenadas, en dos regiones, temporal y espacial, según el tipo de puntos que las constituyan, separadas mediante el **cono de luz**, conformado por el género luz. [18, 17]

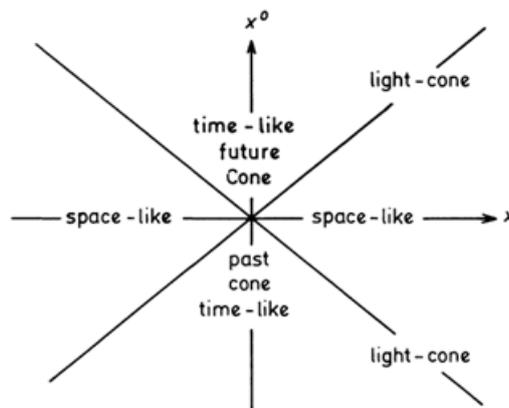


Figura 4.1: Representación bidimensional de la división del espacio-tiempo mediante el cono de luz. [17]

La región espacial está subdividida en dos conjuntos. Los eventos del **cono futuro**, aquellos vectores de género tiempo cuya componente  $x^0 > 0$ , y los sucesos que



conforman el **cono pasado** y tienen  $x^0 < 0$ . Los eventos de tipo tiempo disfrutan, a diferencia de los de tipo espacio, de causalidad.

Llegados a este punto, es conveniente abrir un breve paréntesis. Durante los apartados previos, se ha utilizado como métrica  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , este convenio es bastante habitual al hablar de relatividad especial o de relatividad general. No obstante, en física de partículas, y por tanto, en secciones venideras de este trabajo, lo común será emplear la otra convención estándar,  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

#### 4.1.1. Álgebra y Generadores del Grupo de Lorentz.

Al ser el grupo de Lorentz un ejemplo de grupo pseudoortogonal su dimensión viene dada por

$$\dim(O(p, q)) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{con} \quad n = p + q, \quad (4.1.1.1)$$

siendo  $\dim(O(1, 3)) = 6$ .

Por comodidad, se utilizará una notación sutilmente diferente para referirse a los generadores, pasando de  $t_i$  con  $i = 1, \dots, 6$  a  $M_{\mu\nu}$ . Los nuevos índices  $\mu$  y  $\nu$ , tomarán valores entre 0 y 3, cumpliendo siempre la propiedad de antisimetría. Por tanto, el conjunto de generadores será  $\{M_{01}, M_{02}, M_{03}, M_{12}, M_{13}, M_{23}\}$ .

Un elemento genérico

$$X = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu=0}^3 \theta^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad (4.1.1.2)$$

del álgebra dependerá de los seis coeficientes independientes  $\theta^{ab}$ .

Los elementos del grupo<sup>5</sup> vendrán definidos por

$$\lambda = e^{\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}. \quad (4.1.1.3)$$

Es el momento de centrarse en la relación de conmutación de los generadores de Lorentz,

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\tau\sigma}] &= f_{\mu\nu\tau\sigma}{}^{\lambda\rho} M_{\lambda\rho} \\ [M_{\mu\nu}, M_{\tau\sigma}] &= \eta_{\nu\tau}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\tau}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\tau} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\tau}. \end{aligned} \quad (4.1.1.4)$$

Siguiendo el planteamiento de [15], de la Ecuación 4.1.1.4, se extrae

<sup>5</sup>Con el fin de agilizar la notación, se utilizará el convenio de Einstein para índices contraídos.



$$f_{\mu\nu\tau\sigma}{}^{\lambda\rho} = \eta_{\nu\tau}\delta_{\mu}^{\lambda}\delta_{\sigma}^{\rho} - \eta_{\mu\tau}\delta_{\nu}^{\lambda}\delta_{\sigma}^{\rho} - \eta_{\nu\sigma}\delta_{\mu}^{\lambda}\delta_{\tau}^{\rho} + \eta_{\mu\sigma}\delta_{\nu}^{\lambda}\delta_{\tau}^{\rho}. \quad (4.1.1.5)$$

Entre los seis generadores se puede hacer una distinción, según involucren, o no, el índice temporal  $\mu = 0$  o  $\nu = 0$ . Mientras que las **rotaciones espaciales** están representadas por  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  y  $M_{23}$ , los **boosts** se asociarán con los generadores  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  y  $M_{03}$  para cada una de las direcciones espaciales.

La expresión tensorial de  $M_{\mu\nu}$  proviene de tomar una transformación infinitesimal,

$$\Lambda(\delta\omega) = \mathbb{I} - \frac{i}{2} \delta\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad (4.1.1.6)$$

de parámetro antisimétrico  $\delta\omega^{\mu\nu}$ , en el espacio de Minkowski. [17]

Sea

$$R(\delta\theta) = \mathbb{I} - i \delta\theta^i J_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (4.1.1.7)$$

una rotación infinitesimal de ángulo  $\delta\theta$ .

Comparando las dos expresiones anteriores se concluye que  $\delta\theta^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} \delta\omega^{jk}$  y  $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} M_{jk}$ . El índice  $i$  denota la dirección espacial que no percibe la transformación.

En el caso de los *boosts*,

$$\Lambda(\delta\xi) = \mathbb{I} - i \delta\xi^i K_i, \quad (4.1.1.8)$$

la notación es muy similar. Los tensores antisimétricos  $K_i = M_{i0} = -M_{0i}$  tendrán asociados el parámetro  $\delta\xi^i = \delta\omega^{i0}$ .

Extendiendo estos conceptos, la parametrización general de las rotaciones y de los *boosts* finitos vendrá dada por

$$\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2} \theta^i J_i} \quad \text{y} \quad \Lambda(\xi) = e^{-i \xi^i K_i}, \quad (4.1.1.9)$$

respectivamente.

Los seis generadores  $J_i$  y  $K_i$ , definidos siguiendo las indicaciones de [16, 17], satisfacen el Álgebra 4.1.1.4.

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon^{ijk} J_k \\ [K_i, J_j] &= i\varepsilon^{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon^{ijk} J_k \end{aligned} \quad (4.1.1.10)$$

El signo negativo que aparece en el último conmutador pone de manifiesto que se



trata de un grupo no compacto. Como consecuencia, las representaciones irreducibles **finitas** no serán unitarias<sup>6</sup>.

Con el fin de poder representar distintos tipos de campos se va a buscar reducir este álgebra al producto directo de dos subálgebras. En primer lugar, se redefine una nueva base formada por

$$M_i = \frac{1}{2}(J_i + i K_i) \quad y \quad N_i = \frac{1}{2}(J_i - i K_i). \quad (4.1.1.11)$$

No supondrá ningún problema calcular el álgebra de estos nuevos generadores,  $M_i$  y  $N_i$ . [17]

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= i\varepsilon^{ijk} M_k \\ [N_i, N_j] &= i\varepsilon^{ijk} N_k \\ [M_i, N_j] &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.1.12)$$

Este álgebra es equivalente a dos copias del de  $SU(2) \approx SO(3)$ , esto es,  $SU(2)_M \otimes SU(2)_N$ . Por tanto, las representaciones finitas irreducibles del grupo de Lorentz serán fácilmente derivables de las de  $SU(2)$ . [16]

Las representaciones vendrán dadas por dos números  $u$  y  $v$ , los cuales toman valores  $2u, 2v = 0, 1, 2, \dots$ . Los autovalores asociados a los operadores  $\vec{M}^2$  y  $\vec{N}^2$  serán  $u(u+1)$  y  $v(v+1)$ , respectivamente, cuya base de estados vendrá dada por el producto directo de los vectores de las bases canónicas de los dos subálgebras de  $SU(2)$ ,  $\{|u, k\rangle\}$  y  $\{|v, l\rangle\}$  con  $k = -u, \dots, u$  y  $l = -v, \dots, v$ , esto es,  $\{|u, k; v, l\rangle\} = \{|k, l\rangle\}$ .

$$\begin{aligned} M_3|u, k\rangle &= k|u, k\rangle \\ N_3|v, l\rangle &= l|v, l\rangle \\ M_{\pm}|u, k\rangle &= [u(u+1) - k(k \pm 1)]^{1/2} |k \pm 1, l\rangle \\ N_{\pm}|v, l\rangle &= [v(v+1) - l(l \pm 1)]^{1/2} |k, l \pm 1\rangle \end{aligned} \quad (4.1.1.13)$$

En las Expresiones 4.1.1.14 y 4.1.1.15 se muestra cómo actúan los generadores<sup>7</sup> del grupo sobre los estados de la base.

$$(M_3 + N_3)|k, l\rangle = (k + l)|k, l\rangle \quad (4.1.1.14)$$

<sup>6</sup>Se conoce como representación unitaria de un grupo  $G$  al homomorfismo de  $G$  al espacio de transformaciones unitarias de un espacio de Hilbert.

<sup>7</sup>La notación  $M_{\pm}$  y  $N_{\pm}$  hace referencia a los operadores escalera.



$$(M_{\pm} + N_{\pm})|k, l\rangle = [u(u+1) - k(k \pm 1)]^{1/2} |k \pm 1, l\rangle + [v(v+1) - l(l \pm 1)]^{1/2} |k, l \pm 1\rangle$$

$$i(M_3 - N_3)|k, l\rangle = i(k - l)|k, l\rangle \quad (4.1.1.15)$$

$$i(M_{\pm} - N_{\pm})|k, l\rangle = i[u(u+1) - k(k \pm 1)]^{1/2} |k \pm 1, l\rangle - i[v(v+1) - l(l \pm 1)]^{1/2} |k, l \pm 1\rangle$$

Los generadores  $K_i$  no son hermíticos, en concreto si utilizamos la notación anterior y definimos  $K_3$ , es antihermítico. [17]

$$J_3|k, l\rangle = (M_3 + N_3)|k, l\rangle$$

$$J_{\pm}|k, l\rangle = (M_{\pm} + N_{\pm})|k, l\rangle$$

$$K_3|k, l\rangle = -i(M_3 - N_3)|k, l\rangle$$

$$K_{\pm}|k, l\rangle = -i(M_{\pm} - N_{\pm})|k, l\rangle \quad (4.1.1.16)$$

Todas las variables físicas, como la posición o el momento, entre otras; y las funciones de onda y campos, relacionados con los estados físicos de las partículas, transforman como representaciones finitas del grupo de Lorentz.

Se puede denotar las representaciones irreducibles mediante el conjunto  $(j_0, j_1)$  donde<sup>8</sup>  $j_0 = |u - v|$  y  $j_1 = u + v$ . [16, 17]

El ejemplo más sencillo es el caso de los **escalares**,  $(j_0, j_1) = (0, 0)$ , un singlete bajo rotaciones y *boosts*. En el SM el campo de Higgs es el campo escalar por excelencia.

Entre las representaciones no triviales, las más simples son  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$ , los **espinores** tanto dextrógiros y levógiros, respectivamente. Aunque estas representaciones son equivalentes bajo rotaciones, no lo serán para el grupo propio de Lorentz. Estos campos de materia ,están asociados a fermiones, ya sean *quarks* o leptones.

Existen diferentes categorías de espinores según la dimensión de su representación o la naturaleza de los elementos, complejos o reales. Merece la pena destacar los espinores de Weyl, asociados a electrones o neutrinos, los de Dirac y los de Majorana, una representación utilizada en física más allá del Modelo Estándar.

Por otra parte, los **vectores** transformarán como  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , conocida como la representación fundamental. Son campos bosónicos, diferentes del escalar de Higgs, conocidos como campos *gauge*, es el caso de los fotones, los gluones o de los bosones  $W^{\pm}$  y  $Z$ . [16]

<sup>8</sup>Por ejemplo, en el caso de tomar rotaciones 3-dimensionales, esta representación equivaldría al producto directo de los momentos angulares  $u$  y  $v$ . Por tanto,  $(j_0, j_1)$  recogería el menor y el mayor valor del momento angular de grupo total.



Cuadro 4.1: Representaciones del Grupo de Lorentz y tipo de campo al que están asociadas.

Representación.	Clase de Campo.
(0, 0)	Escalar
(0, 1/2)	Espinorial <i>right-handed</i>
(1/2, 0)	Espinorial <i>left-handed</i>
(1/2, 1/2)	Vectorial

## 4.2. Fermiones.

Si bien las partículas mediadoras de las interacciones, los bosones, se explicarán al indagar en las teorías *gauge*, este es, sin embargo, el momento perfecto para tratar el tema de los fermiones.

Hablar de leptones o *quarks*, implica conocer los campos espinoriales. El caso más simple, son los campos de **Weyl**<sup>9</sup>,  $\psi_L$  y  $\psi_R$ , los cuales transforman bajo lo que se conoce como **representaciones fundamentales**,  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(0, \frac{1}{2})$ . Aunque actualmente no se conoce ninguna partícula elemental perteneciente a la categoría de los fermiones de Weyl, estudiar esta representación será esencial a la hora de trabajar con campos de Dirac en física de partículas.

Para construir los generadores del álgebra, es preciso definir los vectores de Weyl

$$\begin{aligned}\sigma^\mu &= \left( \mathbb{I}, \sigma^i \right) , \\ \bar{\sigma}^\mu &= \left( \mathbb{I}, -\sigma^i \right) ,\end{aligned}\tag{4.2.0.1}$$

denotados por un índice griego que los diferencia de las matrices de Pauli,  $\sigma^i$ , cuyo índice es latino. Los generadores del álgebra serán

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu) , \\ \bar{\sigma}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu) ,\end{aligned}\tag{4.2.0.2}$$

Conocidos los generadores, es posible estudiar la transformación de los campos levógiro,

$$\psi_L(x) \rightarrow \psi'_L(x) = e^{\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} \psi_L(\Lambda^{-1}x) ,\tag{4.2.0.3}$$

<sup>9</sup>Más adelante se tratará el tema de la quiralidad de estos campos.



y dextrógiro,

$$\psi_R(x) \rightarrow \psi'_R(x) = e^{\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}}\psi_R(\Lambda^{-1}x) , \quad (4.2.0.4)$$

bajo el grupo de Lorentz.

Como se había mencionado con anterioridad, la importancia recae sobre la representación, de dimensión 4, de **Dirac**. Los generadores se definen mediante un conjunto de matrices, conocidas como matrices  $-\gamma$ , que conforman el **álgebra de Dirac o de Clifford**<sup>10</sup>,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I} . \quad (4.2.0.5)$$

Dependiendo del objeto de estudio, se usará una definición de las matrices  $-\gamma$  determinada. En el caso de física de partículas, se utilizará la representación quiral o de Weyl,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.2.0.6)$$

Como se recoge en [8], es conveniente definir una quinta matriz  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , hermitica y que cumple  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ .

En secciones venideras, estas matrices serán indispensables a la hora de escribir la densidad lagrangiana. De esta forma, los términos cinéticos serán quirales, a diferencia de los términos de masa, los cuales mezclarán fermiones dextrógiros y levógiros.

Se retoma la construcción de los generadores,

$$\Sigma^{[\mu\nu]} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] , \quad (4.2.0.7)$$

y por consiguiente, de los elementos del grupo,

$$\lambda = e^{\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\Sigma_{[\mu\nu]}} . \quad (4.2.0.8)$$

### 4.3. Antipartículas.

A modo de mención, antes de comenzar con teoría de campos, se abre un breve paréntesis para hablar del papel de las antipartículas en relatividad especial, siguiendo el ejemplo expuesto en [8, 19].

---

<sup>10</sup>Nótese que ya se ha empezado a implementar la métrica  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .



Al juntar la mecánica cuántica con la relatividad especial, recurrir a antipartículas se vuelve casi una imposición. Véase con un ejemplo.

Se tienen dos átomos, dos sistemas  $A_1$  y  $A_2$ , situados en  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$ , respectivamente. Si uno de los átomos, elíjase  $A_1$  por comodidad, emite un electrón en un tiempo  $t_1$ , dará lugar a  $B_1$ , es decir,  $A_1 \rightarrow B_1 + e^-$ .

Más tarde, en  $t_2$ , el átomo  $A_2$  absorberá el  $e^-$ . Se define  $B_2$ , como  $A_2 + e^- \rightarrow B_2$ .

Un observador,  $\mathcal{O}'$ , advierte este fenómeno desde un sistema de referencia moviéndose con velocidad  $\vec{v}$  constante. Sea  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$  el factor de Lorentz<sup>11</sup>, las coordenadas de los dos sistemas de referencia se relacionarán mediante

$$t'_2 - t'_1 = \gamma [(t_2 - t_1) + \vec{v}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)] . \quad (4.3.0.1)$$

Se desea determinar si el proceso mantiene la propiedad de causalidad, en otras palabras,  $t'_2 - t'_1 > 0$ . Debido a que  $|\vec{v}| < 1$ ,  $t'_2 - t'_1$  será negativo sólo cuando  $(t_2 - t_1, \vec{x}_2 - \vec{x}_1)$  sea de tipo espacio, es decir, su norma sea menor que 0. Sin embargo, si

$$(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 < 0 \rightarrow |\vec{v}_{e^-}| > 1 = c . \quad (4.3.0.2)$$

De acuerdo con la relatividad especial, el electrón no puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. Por tanto, en física clásica se cumple la propiedad de causalidad.

Al introducir mecánica cuántica, el principio de incertidumbre emborrona el concepto de cono de luz. Si se define la posición de una partícula  $\vec{x}_1$ , en un tiempo  $t_1$ , es imposible precisar su velocidad. Por tanto, existe cierta posibilidad, para nada despreciable, de propagación del electrón incluso para  $ds^2$  de tipo espacio, siempre y cuando se cumpla

$$(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 \gtrsim -\frac{\hbar^2}{m^2} . \quad (4.3.0.3)$$

Esto puede dar lugar a la observación de la partícula en  $(t_2, \vec{x}_2)$  **antes** de haber sido emitida en  $(t_1, \vec{x}_1)$ .

Con el fin de no violar la propiedad de causalidad, es necesario imponer la existencia de **antipartículas**, cuya masa será igual a la de la partícula asociada. Véase de esta forma, en  $t'_2$  el átomo  $A_2$ , situado en  $\vec{x}'_2$  según  $\mathcal{O}'$ , emite un positrón,  $A_2 \rightarrow B_2 + e^+$ . El sistema  $A_1$  lo absorbe en  $t'_1$  cuando se encuentra en  $\vec{x}'_1$ ,  $A_1 + e^+ \rightarrow B_1$ .

---

<sup>11</sup>Se toma por convenio  $c = 1$ .

# Capítulo 5

## Conceptos Básicos de Teoría Clásica de Campos.

### 5.1. Formalismo Lagrangiano y Ecuaciones del Movimiento.

Toda la dinámica de un campo  $\varphi_a(\vec{x}, t)$ , cuyas derivadas temporal  $\dot{\varphi}_a(\vec{x}, t)$  y espaciales  $\nabla\varphi_a(\vec{x}, t)$  están recogidas en la cuatridivergencia  $\partial_\mu\varphi_a(\vec{x}, t)$ , estará regida por un **lagrangiano**

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a) . \quad (5.1.0.1)$$

De manera general, esta función depende directamente de la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$ , denominada habitualmente como lagrangiano.

La **acción** del sistema,

$$S[\varphi_a] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a) = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a) , \quad (5.1.0.2)$$

depende directamente de esta densidad lagrangiana. [20]

Las ecuaciones del movimiento son una consecuencia directa de aplicar el principio de mínima acción, de manera análoga al estudio clásico del potencial y sus mínimos. Para una variación arbitraria  $\delta\varphi_a$  la cual mantiene fijo el campo en los extremos,  $\delta\varphi_a|_{Frontera} = 0$  se impone  $\delta S = 0$ . La expresión de la variación de la acción se obtiene al realizar un desarrollo de Taylor de primer orden sobre las dos variables de las que depende el lagrangiano.



$$\begin{aligned} S[\varphi_a + \delta\varphi_a] &= \int d^4x \mathcal{L}[\varphi_a + \delta\varphi_a, \partial_\mu(\varphi_a + \delta\varphi_a)] \\ &= \int d^4x \left[ \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a)}{\partial\varphi_a} \delta\varphi_a + \frac{\partial\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a)}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} \delta(\partial_\mu\varphi_a) \right] \\ &= S[\varphi_a] + \delta S[\varphi_a] \end{aligned} \quad (5.1.0.3)$$

Aplicando la regla de Leibniz es posible simplificar la expresión de la variación de la acción a

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} \right) \right] \delta\varphi_a + \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} \delta\varphi_a \right). \quad (5.1.0.4)$$

El último término se trata de la integral de una derivada total y se anulará como consecuencia de imponer una variación nula del campo en los extremos. Las ecuaciones del movimiento se obtienen para  $\delta S = 0$ .

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} \right) \right] \delta\varphi_a = 0 \rightarrow \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} = 0 \quad (5.1.0.5)$$

Dos lagrangianos estarán regidos por las mismas ecuaciones del movimiento, siempre y cuando, difieran en una derivada total. [15, 18]

### 5.1.1. Lagrangianos Locales.

Un lagrangiano será **local** si no acopla, de manera directa, términos del campo relacionados con un conjunto  $\vec{x}$  de coordenadas espaciales y otros vinculados a  $\vec{y}$ , para  $\vec{x} \neq \vec{y}$ . Un ejemplo, con el que se trabajará más adelante, podría ser

$$L(t) = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi(\vec{x}, t) \partial_\nu\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\vec{x}, t) \right], \quad (5.1.1.1)$$

el cual describe la dinámica de un sistema regido por la Ecuación de Klein-Gordon. Por el contrario, el Lagrangiano

$$L = \int d^3x d^3y \varphi(\vec{x}, t) \varphi(\vec{y}, t), \quad (5.1.1.2)$$

extraído de [20], no cumple las condiciones de localidad.



## 5.2. Simetrías y Teorema de Noether.

El estudio de los diferentes tipos de **simetrías**, y por tanto, el de las cantidades conservadas asociadas, juega un papel muy importante dentro de la teoría de campos y de la física teórica moderna.

Partiendo de un lagrangiano con simetría continua, el teorema de Noether nos asegura la existencia de una corriente  $\mathcal{J}^\mu(x)$  conservada. Más adelante, se explicarán las consecuencias de dicha afirmación. Por el momento, se demostrará este resultado.

Sea una transformación infinitesimal actuando sobre los campos y/o las coordenadas,

$$\begin{aligned}x'^\mu &= x^\mu + \Delta x^\mu \\ \varphi'_a(x') &= \varphi_a(x) + \Delta\varphi_a(x) .\end{aligned}\tag{5.2.0.1}$$

Para generar una simetría se debe cumplir  $\Delta S = 0$ , donde

$$\Delta S = S' - S = \int d^4x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu .\tag{5.2.0.2}$$

Por definición, de la Ecuación 5.2.0.2 se concluye que  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$ , dando lugar a una corriente conservada. La invarianza se exige sobre la acción. Requerirla sobre el lagrangiano podría acarrear problemas, debido a que, dos densidades lagrangianas son equivalentes, se rigen por las mismas ecuaciones del movimiento, si difieren en una derivada total. Como consecuencia, la variación no se anularía en la frontera, tal y como se exigirá. [20]

Volviendo sobre la transformación infinitesimal, se puede expandir

$$\varphi'_a(x') = \varphi'_a(x + \Delta x) \simeq \varphi'_a(x) + (\partial_\mu \varphi'_a(x)) \Delta x^\mu .\tag{5.2.0.3}$$

La variación del campo “solo”,

$$\delta\varphi_a(x) = \varphi'_a(x) - \varphi_a(x) ,\tag{5.2.0.4}$$

hace referencia a la transformación, que sufre el campo, que no es inducida por un cambio de su posición asociada.

Se introduce la Definición 5.2.0.4 en la Ecuación 5.2.0.3 y omitiendo términos superiores del desarrollo, como los que diferencian  $(\partial_\mu \varphi'_a(x)) \Delta x^\mu$  de  $(\partial_\mu \varphi_a(x)) \Delta x^\mu$  se obtiene



$$\varphi'_a(x') \simeq (\varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x)) + (\partial_\mu\varphi'_a(x)) \Delta x^\mu \simeq \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) + (\partial_\mu\varphi_a(x)) \Delta x^\mu . \quad (5.2.0.5)$$

Es posible determinar la transformación total del campo,

$$\Delta\varphi_a(x) = \delta\varphi_a(x) + (\partial_\mu\varphi_a(x)) \Delta x^\mu \quad (5.2.0.6)$$

mediante la observación de la Ecuación 5.2.0.1. Existen dos partes diferenciadas, la primera se corresponde con la variación del campo “solo”, a diferencia del segundo término, el cual es consecuencia de la modificación que experimenta el campo inducida por la transformación en las coordenadas. [18]

Llegó el momento de retomar la expresión de  $\Delta S$  con el fin de obtener una expresión para la corriente de Noether, siguiendo el desarrollo expuesto en [15, 18]. Sea

$$\Delta S = S' - S = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) . \quad (5.2.0.7)$$

Si se desea estudiar como se modifica la medida de integración,  $d^4x$ , será necesario recurrir a la transformación de las coordenadas expuesta por la Ecuación 5.2.0.1. Como resultado, se llega a

$$d^4x' = \left| \det \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \right| d^4x = \left| \det (\delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \Delta x^\alpha) \right| d^4x \simeq (1 + \partial_\alpha \Delta x^\alpha) d^4x . \quad (5.2.0.8)$$

Solo quedaría por estudiar la variación de la densidad lagrangiana. Al ser una transformación infinitesimal, se puede realizar un desarrollo análogo al caso del campo  $\varphi_\alpha$ ,

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) + (\partial_\mu\mathcal{L}(x)) \Delta x^\mu . \quad (5.2.0.9)$$

Simplificando la relación obtenida de introducir las Transformaciones 5.2.0.8 y 5.2.0.9 en la Ecuación 5.2.0.7 y omitiendo términos superiores del desarrollo, se llega a una la expresión

$$\Delta S \simeq \int d^4x [\delta\mathcal{L}(x) + \partial_\mu(\mathcal{L}(x)\Delta x^\mu)] . \quad (5.2.0.10)$$

Por otra parte, es conocido que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a)$ , siendo posible definir la variación del lagrangiano “solo” como



$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_a}\delta\varphi_a + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a}\delta\partial_\mu\varphi_a = \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_a} - \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \right) \right] \delta\varphi_a + \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \delta\varphi_a \right). \quad (5.2.0.11)$$

En el primer término aparecen las ecuaciones del movimiento, de modo que al juntar todos los resultados se obtiene la ecuación

$$\Delta S = \int d^4x \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \simeq \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \delta\varphi_a + \mathcal{L}(x) \Delta x^\mu \right). \quad (5.2.0.12)$$

Por tanto, se puede deducir la expresión de la corriente de Noether

$$\mathcal{J}^\mu := \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \delta\varphi_a + \mathcal{L}(x) \Delta x^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \Delta\varphi_a + \left( \delta_\mu^\nu \mathcal{L}(x) - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \partial_\nu\varphi_a \right) \Delta x^\nu. \quad (5.2.0.13)$$

Existirá una carga conservada  $Q$  asociada a la corriente conservada  $\mathcal{J}^\mu$ , en particular, a la densidad de carga  $\mathcal{J}^0$ , la cual se define como

$$Q := \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{J}^0. \quad (5.2.0.14)$$

Para demostrar dicha afirmación será necesario utilizar la corriente conservada.

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \frac{\partial \mathcal{J}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathcal{J}^i}{\partial x^i} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{J}^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0 \quad (5.2.0.15)$$

Suponiendo que el flujo de 3-corriente  $\vec{\mathcal{J}}$  se anula en el infinito,  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , es fácil comprobar la conservación de la carga.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\partial \mathcal{J}^0}{\partial t} = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0 \quad (5.2.0.16)$$

En las teorías de campos locales existe una conservación **local** de la carga en un volumen  $V$  de frontera  $A$ . Este fenómeno es fácil de visualizar con ayuda del teorema de la divergencia. [18]

$$\frac{dQ_V}{dt} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{J}} = - \int_{\partial V \equiv A} \vec{\mathcal{J}} \cdot d\vec{S} \quad (5.2.0.17)$$

### 5.2.1. Tensor Energía Momento.

Antes de trabajar con el **Tensor Energía Momento** es necesario conocer las transformaciones espacio-temporales,



$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = f^\mu(x), \quad (5.2.1.1)$$

las cuales actúan sobre las coordenadas espacio-temporales.

Será de gran utilidad enumerar, siguiendo [15], algunas de las transformaciones más importantes que se pueden distinguir en relatividad especial.

- Internas:  $\Delta\varphi_a = \delta\varphi_a \neq 0$  &  $\Delta x^\mu = 0$ .
- Traslaciones:  $\Delta\varphi_a = 0$  &  $\Delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ .
- Lorentz:  $\Delta\varphi_a \neq 0$  &  $\Delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ .
- Poincaré  $\Delta\varphi_a \neq 0$  &  $\Delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu$ .

La conservación de la energía es una consecuencia de la simetría de la acción asociada a traslaciones temporales. Análogamente, el momento se conservará siempre que la dinámica sea invariante con respecto a las traslaciones espaciales.

Tómese una transformación **rígida** de coordenadas, sin dependencia con el punto espaciotemporal, perteneciente a un subgrupo del grupo de Poincaré para transformaciones triviales de Lorentz,  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ .

Por definición, al tratarse de una traslación,

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \varepsilon^\mu \\ \varphi'_a(x') &= \varphi_a(x), \end{aligned} \quad (5.2.1.2)$$

la transformación total del campo es nula.

Al ser una simetría lleva asociada una corriente de Noether, por tanto, particularizando la Ecuación 5.2.0.13 para esta situación, y siguiendo la explicación de [18], es posible definir el tensor energía momento mediante

$$\mathcal{J}^\mu = - \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_a} \partial_\nu\varphi_a - \delta^\nu{}_\mu\mathcal{L}(x) \right) \varepsilon^\nu =: -T^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu. \quad (5.2.1.3)$$

La invarianza de la acción implica la conservación del tensor energía momento por definición para un 4-vector genérico,  $\varepsilon^\nu$ .

$$\Delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\mathcal{J}^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad (5.2.1.4)$$

La componente  $T^{00}$  hace referencia a la densidad energética. Del mismo modo,  $T^{0i}$  se corresponde con la densidad de momento.



Las cargas totales, de energía y momento, recogidas en el 4–momento

$$P^\mu := \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\mu} \quad (5.2.1.5)$$

las cuales están asociadas a  $T^{0\mu}$  se conservan como consecuencia de la Ecuación 5.2.1.4. [15]

### 5.3. Dinámica de los Fermiones.

Antes de estudiar el formalismo hamiltoniano, conviene detenerse a estudiar el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{free} = i\bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi, \quad (5.3.0.1)$$

el cual rige el comportamiento de un fermión libre,  $\psi$ , de masa  $m$ . Esta densidad lagrangiana está compuesta por un término cinético, con derivadas slash  $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$  de primer orden; y uno potencial, asociado a la masa de la partícula. Por otra parte, se define el operador adjunto  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ , como respuesta a la ausencia de invarianza bajo transformaciones de Lorentz de  $\psi^\dagger \psi$ .

Al derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ , procedimiento recogido en [8], se obtiene la conocida como ecuación de Dirac<sup>1</sup>,

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0. \quad (5.3.0.2)$$

Desglosando el operador diferencial  $\not{\partial}$ , se llega a una expresión equivalente de la ecuación de Dirac,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi + m\gamma^0\psi. \quad (5.3.0.3)$$

El operador  $\vec{\gamma}$  denota el vector de componentes  $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ . Asimismo, siendo conscientes de que  $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ , se define  $\vec{\alpha} = \gamma^0 \cdot \gamma^1 + \gamma^0 \cdot \gamma^2 + \gamma^0 \cdot \gamma^3$ .

Para el caso de un fermión libre, de 4–momento  $p^\mu$ , se van a buscar soluciones a partir de  $\psi = \omega e^{-ip^\mu x_\mu}$ , una onda plana, de amplitud igual a un espinor  $\omega$  independiente de  $x^\mu$ .

Los autovalores vienen dados por las componentes del 4–momento,  $p^\mu = (E, \vec{p})$ . A la hora de buscar los autoestados, sustituyendo en la ecuación de Dirac, conviene subdividir el espinor  $\omega$  en dos componentes espinoriales,

<sup>1</sup>De manera análoga, se puede derivar la ecuación de Dirac al determinar las ecuaciones de Euler-Lagrange con respecto a  $\psi$ .



$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (5.3.0.4)$$

Usando la representación de Dirac, el sistema de ecuaciones

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbb{I} & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (5.3.0.5)$$

permite determinar los estados propios.

Como resultado se obtienen dos ecuaciones acopladas para  $\phi$  y  $\chi$ .

$$\begin{aligned} (E - m)\phi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi \\ (E + m)\chi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\phi \end{aligned} \quad (5.3.0.6)$$

Despejando  $\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m}\phi$  en la segunda ecuación de las Relaciones 5.3.0.6, se extrae la expresión<sup>2</sup>

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m}\phi \end{pmatrix}. \quad (5.3.0.7)$$

Por otra parte, sustituyendo<sup>3</sup>  $\chi$  en la primera de las Ecuaciones 5.3.0.6,

$$(E - m)(E + m)\phi = \vec{p}^2\phi \rightarrow E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (5.3.0.8)$$

se determinan dos soluciones para la energía, una positiva y otra negativa. [21]

Estos campos se conocen como espinores de **Dirac**. Restringidos únicamente por la ecuación de Dirac, poseen cuatro grados de libertad, ya sea una partícula o su antipartícula, o tenga spin *up* o *down*.

Existen dos categorías de espinores restringidas a dos grados de libertad, **Weyl** y **Majorana**. El primer tipo, también conocido como espinor *chiral* se corresponde con fermiones puros,

$$P_i\psi_i = \psi_i \quad \text{con} \quad i = L, R. \quad (5.3.0.9)$$

El subíndice  $i = L, R$  indica si son *left* o *right-handed*, respectivamente. Por su parte,

<sup>2</sup>Esta expresión no ha sido normalizada.

<sup>3</sup>Se ha utilizado la propiedad  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2\mathbb{I}$



$$P_{L/R} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \quad (5.3.0.10)$$

son los proyectores quirales.

Aunque tienen asociado un término cinético, los espinores de Weyl no presentan un término de masa<sup>4</sup>, tal y como se recoge en [22, 8], debido a que

$$\bar{\psi}_L = P_L \bar{\psi}_L = (P_L \psi_L)^\dagger \gamma^0 = \psi_L^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}_L P_R \rightarrow \bar{\psi}_L \psi_L = \bar{\psi}_L P_R P_L \psi_L = 0 . \quad (5.3.0.11)$$

Por el contrario, es posible que los espinores de Majorana,

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^C \end{pmatrix} , \quad (5.3.0.12)$$

tengan asociado un término de masa. Por este motivo es necesario definir el espinor de carga conjugada,

$$\psi^C = C \bar{\psi}^t . \quad (5.3.0.13)$$

Sea  $C = i\gamma^0\gamma^2$ , la matriz de conjugación de carga. El espinor  $\psi^C$ , tiene quiralidad opuesta a  $\psi$ , por tanto, se puede construir un término bilineal  $\bar{\psi}^C\psi$  de masa<sup>5</sup>.

Para finalizar la sección, se va a determinar la corriente conservada asociada a la simetría  $U(1)$ , resultado de multiplicar los campos  $\psi$  por una fase  $\alpha$  global, una fase constante, es decir,

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi , \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha} \bar{\psi} . \end{aligned} \quad (5.3.0.14)$$

Por el teorema de Noether se obtiene una corriente conservada,  $\mathcal{J}^\mu$ , junto con la correspondiente carga conservada,  $Q$ . [8]

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow Q = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad (5.3.0.15)$$

<sup>4</sup>En la Demostración 5.3.0.11, análoga al caso  $\bar{\psi}_R$ , se han utilizado tres propiedades fundamentales,  $P_{L/R}^\dagger = P_{R/L}$ ,  $P_L P_R = P_R P_L = 0$  y  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .

<sup>5</sup>Introducir el término  $\bar{\psi}^C\psi$  supone la violación de todas las simetrías asociadas a la carga de  $\psi$ , por tanto, será sólo válido con singletes completos, como, por ejemplo, los neutrinos dextrógiros.

# Capítulo 6

## Teorías *Gauge*.

Ya sean abelianas o no abelianas, las **teorías *gauge***, basadas en una simetría local, también conocida como simetría *gauge*, de ahí su nombre, permiten describir las interacciones electromagnética, débil, fuerte e, incluso, gravitacional.

### 6.1. De Simetrías Globales a Simetrías *Gauge*.

Tómese un campo escalar complejo<sup>1</sup>  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)]$ , bajo el efecto de una transformación global de la fase,  $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\alpha}\varphi$ , para un parámetro  $\alpha$  constante y constrúyase el correspondiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi) . \quad (6.1.0.1)$$

Es posible afirmar que existirá una simetría  $U(1)$  **global** asociada a dicha transformación. [8]

Si se hubiera elegido una fase dependiente del espacio-tiempo,  $\alpha(x)$ , asociada a una transformación **local**, se hablaría de transformación ***gauge***. Con el fin de mantener la invarianza del lagrangiano, será necesario definir, según [23], una derivada covariante  $D_\mu \varphi$ , que transforme según

$$D_\mu \varphi \rightarrow (D_\mu \varphi)' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \varphi . \quad (6.1.0.2)$$

Como la mejor forma de obtener una simetría *gauge* es partir de una global e imponer invarianza del lagrangiano bajo transformaciones locales, así es cómo se trabajará en lo sucesivo.

---

<sup>1</sup>Sean  $\varphi_1(x)$  y  $\varphi_2(x)$  dos campos reales.



En primer lugar, se aplicará una transformación infinitesimal de fase  $\alpha$  rígida,  $\partial_\mu \alpha = 0$ .

$$\begin{aligned}\varphi' &= e^{i\alpha} \varphi \simeq \varphi + i\alpha\varphi + \mathcal{O}(\alpha^2) \longrightarrow \delta\varphi = \varphi' - \varphi = i\alpha\varphi \\ (\varphi^\dagger)' &= e^{-i\alpha} \varphi^\dagger \simeq \varphi^\dagger - i\alpha\varphi^\dagger + \mathcal{O}(\alpha^2) \longrightarrow \delta\varphi^\dagger = (\varphi^\dagger)' - \varphi^\dagger = -i\alpha\varphi^\dagger\end{aligned}\quad (6.1.0.3)$$

Utilizando la Ecuación 5.2.0.11, obtenida durante la demostración del teorema de Noether, para este ejemplo, existencia de un campo complejo y su conjugado, se deriva<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi^\dagger}\delta\varphi^\dagger + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi}\delta\partial_\mu\varphi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi^\dagger}\delta\partial_\mu\varphi^\dagger \\ &= e.o.m. + \partial_\mu \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi}\delta\varphi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi^\dagger}\delta\varphi^\dagger \right] \\ &= \alpha\partial_\mu [i(\partial^\mu\varphi^\dagger)\varphi - i\varphi^\dagger(\partial^\mu\varphi)] \\ &= -\alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu.\end{aligned}\quad (6.1.0.4)$$

La variación del lagrangiano se determinará partizularizando para las Ecuaciones 6.1.0.1 y 6.1.0.3.

Como consecuencia de la invarianza del lagrangiano, se obtiene una corriente conservada,  $\partial_\mu\mathcal{J}^\mu = 0$ , según se recoge en [8, 18].

Resulta de gran interés estudiar el caso específico del famoso potencial del sombrero mexicano<sup>3</sup>,

$$V(\varphi^\dagger\varphi) = \mu^2\varphi^\dagger\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2. \quad (6.1.0.5)$$

Este potencial presenta un mínimo a lo largo de la circunferencia de radio  $|\varphi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$ . Por tanto, cualquier campo  $\varphi$ , cuyo módulo cumpla dicha condición, será una solución de las ecuaciones del movimiento<sup>4</sup>,

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi = \mu^2\varphi - 2\lambda(\varphi^\dagger\varphi)\varphi \rightarrow \square\varphi - \varphi(\mu^2 - 2\lambda\varphi^\dagger\varphi) = 0. \quad (6.1.0.6)$$

Si bien es cierto que se puede relacionar una solución de las ecuaciones del movi-

<sup>2</sup>Las siglas *e.o.m.* hacen referencia a las ecuaciones del movimiento, *equations of motion*, tanto para el campo  $\varphi$ , como para su conjugado,  $\varphi^\dagger$ .

<sup>3</sup>Esta denominación hace referencia a su forma al representarlo tridimensionalmente, ver Figura 6.1. Conocido también como potencial *gauge* invariante, se utiliza en la descripción de teorías renormalizables.

<sup>4</sup>Por cuestiones de notación, se calculará la variación respecto de  $\varphi^\dagger$ , sería indiferente determinar las ecuaciones de Euler-Lagrange respecto a  $\varphi$ .



miento con otra mediante transformaciones de fase  $U(1)$ , dichas soluciones no serán invariantes. [22]

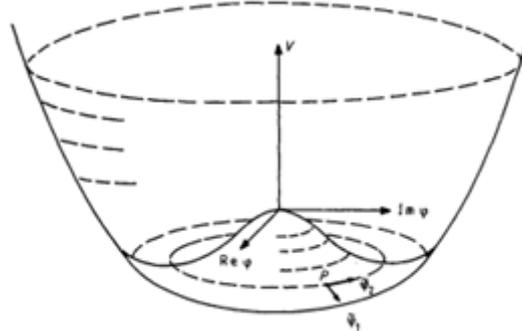


Figura 6.1: Representación del potencial descrito por la ecuación 6.1.0.5. [22]

Ahí reside una de las más importantes diferencias entre las transformaciones globales y las de *gauge*, si bien ambas mantienen el lagrangiano invariante, las fases locales relacionan estados idénticos, los cuales describen la misma física<sup>5</sup>. Este hecho puede sonar familiar por el electromagnetismo.

### 6.1.1. Electrodinámica.

Se partirá de las ecuaciones de Maxwell en el vacío para un campo eléctrico y magnético,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} \end{aligned} \quad (6.1.1.1)$$

cuyas densidades de carga y corriente vienen representadas por  $\rho$  y  $\vec{J}$ , respectivamente<sup>6</sup>.

Para resolver estas ecuaciones hace falta introducir un potencial escalar,  $\phi$ , y otro vector,  $\vec{A}$ , de manera que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad y \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (6.1.1.2)$$

El número de componentes independientes se reducirá de seis, tres asociadas a  $\vec{E}$  y las otras a  $\vec{B}$ ; a cuatro,  $\phi$  y los tres constituyentes de  $\vec{A}$ . No obstante, si se toma

<sup>5</sup>Se exigirá a los observables y a los estados físicos ser invariantes bajo transformaciones *gauge*.

<sup>6</sup>Se está utilizando  $\mu_0 = 1$  y  $\varepsilon_0 = 1$ .



un campo escalar  $\Lambda$  para aplicar una transformación sobre  $\phi$  y  $\vec{A}$ , los potenciales resultantes,

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad y \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda, \quad (6.1.1.3)$$

dan lugar a los mismos campos eléctrico y magnético.

La Expresión 6.1.1.2, cuyas soluciones son invariantes, recoge una transformación *gauge* al ser local, el campo  $\Lambda$  depende del espacio y del tiempo. Debido a que se pueden generar potenciales no triviales a partir del vacío, como consecuencia de que la variación no es multiplicativa, se trata de una transformación **inhomogénea**. Todos aquellos potenciales procedentes de  $\phi = 0$  y  $\vec{A} = 0$  y relacionados mediante una transformación *gauge*, se denominan ***gauge puros***. [8]

## 6.2. Teorías *Gauge* Abelianas.

El ejemplo más sencillo de interacción mediada por un campo vectorial es la **electromagnética**, descrita por la teoría abeliana de la electrodinámica cuántica. [22]

Para obtener una transformación *gauge*, se partirá desde la simetría global empleada en la sección anterior, es decir, se utilizará la densidad lagrangiana de la Ecuación 6.1.0.1, en esta ocasión asociada a un campo  $\phi$ , y una simetría global  $U(1)$ , en otras palabras,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi), \\ \phi' &= e^{i\alpha} \phi \rightarrow \delta \phi = \phi' - \phi = i\alpha \phi. \end{aligned} \quad (6.2.0.1)$$

Sin embargo, a la hora de calcular la variación del lagrangiano, existe una ligera diferencia con respecto a la Ecuación 6.1.0.4, el parámetro  $\alpha$  será dependiente del espacio-tiempo para la transformación local. Por tanto, a la hora de modificar la primera derivada aparecerán nuevos términos, es decir,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi(x) &\rightarrow (\partial_\mu \phi(x))' = \partial_\mu [e^{i\alpha(x)} \phi(x)] = e^{i\alpha(x)} [i(\partial_\mu \alpha(x)) \phi(x) + \partial_\mu \phi(x)] \\ \partial_\mu \phi^\dagger(x) &\rightarrow (\partial_\mu \phi^\dagger(x))' = e^{-i\alpha(x)} [-i(\partial_\mu \alpha(x)) \phi^\dagger(x) + \partial_\mu \phi^\dagger(x)]. \end{aligned} \quad (6.2.0.2)$$

Es importante ser conscientes de que la derivada no transforma, bajo rotaciones locales de fase, del mismo modo que el campo<sup>7</sup>,

<sup>7</sup>Existe un término extra  $ie^{i\alpha}(\partial_\mu \alpha)\phi$ .



$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi \\ \partial_\mu\phi &\rightarrow \partial_\mu\phi' = e^{i\alpha}(\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha)\phi.\end{aligned}\tag{6.2.0.3}$$

Este hecho acarreará una serie de problemas a la hora de aplicar la transformación en el lagrangiano. Por tanto, será de interés estudiar la evolución del término  $\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi$  de la densidad lagrangiana, para ser conscientes de que se pierde la propiedad de invarianza.

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi &\rightarrow (\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi)' = e^{-i\alpha}[-i(\partial_\mu\alpha)\phi^\dagger + \partial_\mu\phi^\dagger] \cdot e^{i\alpha}[i(\partial^\mu\alpha)\phi + \partial^\mu\phi] \\ &= \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + i[(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger(\partial_\mu\phi)]\partial^\mu\alpha \\ &\quad + \phi^\dagger\phi(\partial_\mu\alpha)(\partial^\mu\alpha)\end{aligned}\tag{6.2.0.4}$$

No sucederá lo mismo con el potencial, al ser una función de  $\phi^\dagger\phi$  [18]. Esto se debe a que

$$\phi^\dagger\phi \rightarrow (\phi^\dagger\phi)' = e^{-i\alpha}\phi^\dagger e^{i\alpha}\phi = \phi^\dagger\phi.\tag{6.2.0.5}$$

Consecuentemente, la densidad lagrangiana no será invariante, aún cuando la parte asociada al potencial lo seguiría siendo. Observar la expresión de la densidad lagrangiana en función de una corriente  $\mathcal{J}^\mu$ ,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu[\alpha(i(\partial^\mu\phi^\dagger)\phi - i\phi^\dagger(\partial^\mu\phi))] = -\partial_\mu(\alpha\mathcal{J}^\mu),\tag{6.2.0.6}$$

también pone de manifiesto este hecho.

La manera de recuperar la invarianza del lagrangiano es definir un nuevo operador diferencial, la **derivada covariante**,  $D_\mu\phi$ , para contrarrestar el término extra que aparecía en la derivada parcial, imponiendo que esta nueva aplicación transforme del mismo modo que el campo original.

Para ello, será necesario definir el campo *gauge*, también conocido como 4-vector electromagnético,  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , inspirado en los potenciales electromagnéticos de la sección anterior, según

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x).\tag{6.2.0.7}$$

De esta forma, se puede contrarrestar la transformación inhomogénea de la derivada parcial con la del 4-vector  $A_\mu$  en la derivada covariante, si esta última se define como



$$D_\mu \phi := (\partial_\mu + iqA_\mu) \phi . \quad (6.2.0.8)$$

Desarrollándose la variación de este operador bajo una transformación de fase local

$$\begin{aligned} D_\mu \phi \rightarrow (D_\mu \phi)' &= (\partial_\mu + iqA'_\mu) \phi' \\ &= [\partial_\mu + iqA_\mu - i\partial_\mu \alpha] (e^{i\alpha} \phi) \\ &= e^{i\alpha} (\partial_\mu + iqA_\mu) \phi \\ &= e^{i\alpha} D_\mu \phi , \end{aligned} \quad (6.2.0.9)$$

se observa que se ha cumplido el objetivo. De manera análoga con el campo conjugado,

$$(D_\mu \phi)^\dagger \rightarrow [(D_\mu \phi)^\dagger]' = e^{-i\alpha} (D_\mu \phi)^\dagger . \quad (6.2.0.10)$$

Por tanto, se puede construir, utilizando las derivadas covariantes de igual modo que en [8, 18], una nueva densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) , \quad (6.2.0.11)$$

la cual describe la teoría de un escalar complejo con invarianza  $U(1)$  *gauge*.

El campo *gauge*  $A_\mu$  no tiene asociado un término cinético, en otras palabras, no es un campo **dinámico**. Con el fin de obtener dicho término cinético invariante de *gauge* y que las ecuaciones del movimiento de  $A_\mu$  no presenten derivadas de más de segundo orden, se define el tensor de intensidad de campo como

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{q} [D_\mu, D_\nu] = -\frac{i}{q} [(\partial_\mu + iqA_\mu), (\partial_\nu + iqA_\nu)] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (6.2.0.12)$$

También conocido como tensor electromagnético, los elementos de este tensor anti-simétrico están relacionados con el campo eléctrico y el magnético según<sup>8</sup>  $F^{0i} = E^i$  y  $F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k$ . [15]

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu} \quad (6.2.0.13)$$

<sup>8</sup>Una vez más, se toma  $c = 1$ .



Por construcción, es fácil ver que el tensor de intensidad de campo es invariante *gauge*. No obstante, no resulta complicado demostrarlo recordando que  $\delta A_\mu = -\frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)$  y utilizando el teorema de Schwarz.

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta\partial_\mu A_\nu - \delta\partial_\nu A_\mu = \partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu = -\frac{1}{q}(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\alpha(x) = 0 \quad (6.2.0.14)$$

En una densidad lagrangiana, el término más simple invariante de *gauge*, será

$$\mathcal{L}_{cinético} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (6.2.0.15)$$

donde  $-\frac{1}{4}$  es un factor de normalización.

Es posible expresarlo también en términos del campo magnético y del eléctrico,

$$\mathcal{L}_{cinético} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad (6.2.0.16)$$

tal y como se recoge en [8, 24].

### 6.2.1. Acoplamiento de Fermiones.

El acoplamiento de un fermión,  $\psi$ , a la derivada covariante se lleva a cabo mediante la imposición de una transformación *gauge* de la forma

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi. \quad (6.2.1.1)$$

La electrodinámica cuántica, regida por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad (6.2.1.2)$$

describe la interacción electromagnética de un electrón, mediada por un fotón. [8] Este acoplamiento está contenido en la derivada covariante, por su propia definición. Comúnmente, esto se conoce como acoplo minimal.

Debido a que el fotón no tiene masa ni carga, no existe ningún autoacoplamiento del campo *gauge* en el lagrangiano. Se trata de una teoría de campos **libres**. No sucederá lo mismo con las partículas mediadores de interacciones descritas por teorías no abelianas, tal y como se explicará en apartados posteriores. [24]

Por otra parte, a la hora de trabajar con partículas con diferente carga al electrón, como pueden ser los *quarks*, hace falta modificar ligeramente la notación.

Tómese la constante de acoplo  $q = e$ , entonces



$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \\ D_\mu \phi &= (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi.\end{aligned}\tag{6.2.1.3}$$

Estas relaciones, Ecuaciones 6.2.1.3 para un campo  $\varphi$  escalar, se convertirán en las expresiones

$$\begin{aligned}\psi_q &\rightarrow \psi'_q = e^{iq\alpha} \psi_q \\ A_\mu^{(q)}(x) &\rightarrow [A_\mu^{(q)}]'(x) = A_\mu^{(q)}(x) - \frac{1}{qe} \partial_\mu \alpha(x) \\ D_\mu^{(q)} \psi_q &= (\partial_\mu + iqeA_\mu^{(q)}) \psi_q\end{aligned}\tag{6.2.1.4}$$

para el caso de campos  $\psi_q$ , leptónicos o asociados a *quarks*, de carga  $q$ , bajo el mismo grupo *gauge*  $U(1)$ . [8]

### 6.3. Teorías *Gauge* No Abelianas.

Tanto si se desea estudiar la teoría electrodébil, como si el objetivo es QCD, será necesario recurrir a teorías *gauge* no abelianas.

Previamente al análisis de estas teorías, es necesario conocer los grupos no abelianos. Por su importancia física en el modelo estándar, el foco se centrará en los grupos  $SU(n)$ , introducidos con antelación.

De manera similar a la sección anterior, se tomará una simetría **global** de  $SU(n)$ . Sin embargo, en esta ocasión no se aplicará sobre un único campo, sino que se utilizará un vector,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \quad \Phi^\dagger = \left( \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_n \right), \tag{6.3.0.1}$$

conocido como multiplete, de  $n$ -componentes  $\Phi_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ .

Las matrices  $U \in SU(n)$ , actuarán multiplicando dichos vectores, manteniendo invariante el producto  $\Phi^\dagger \Phi$ . En otras palabras, aplicando la transformación  $U$ ,



$$\left. \begin{array}{l} \Phi \rightarrow \Phi' = U\Phi \\ \Phi^\dagger \rightarrow (\Phi^\dagger)' = \Phi^\dagger U^\dagger \end{array} \right\} (\Phi^\dagger \Phi)' = \Phi^\dagger U^\dagger U \Phi = \Phi^\dagger \mathbb{I} \Phi = \Phi^\dagger \Phi . \quad (6.3.0.2)$$

Gracias a esto, será posible extender la densidad lagrangiana de la Ecuación 6.2.0.1 para el caso de una simetría global no abeliana [8]. Como resultado, se obtendrá

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) . \quad (6.3.0.3)$$

Continuando con la búsqueda de una transformación local, el siguiente paso es imponer la dependencia con el espacio-tiempo a  $U = U(x)$ . De nuevo, es fácil observar que aparece el mismo problema, los términos diferenciales no mantienen la invarianza, dando como resultado

$$\partial_\mu \Phi \rightarrow \partial_\mu \Phi' = \partial_\mu (U(x)\Phi) = (\partial_\mu U) \Phi + U \partial_\mu \Phi . \quad (6.3.0.4)$$

Salvando diferencias, el procedimiento será el mismo, a partir de la existencia de un campo *gauge*,  $A_\mu$ , se definirá una derivada covariante,  $D_\mu \Phi$ , que transforme de manera análoga al campo  $\Phi$ . Posteriormente, será necesario determinar el tensor de intensidad de campo,  $F_{\mu\nu}$ , para poder escribir los términos cinéticos de  $A_\mu$ .

La derivada covariante mantendrá la misma estructura,

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + igA_\mu) \phi = (\partial_\mu + igt^a A_\mu^a) \phi . \quad (6.3.0.5)$$

No obstante, en esta ocasión, el campo vectorial pasará a ser una matriz,  $A_\mu = A_\mu^a t^a$ , siendo  $t^a$  los generadores del grupo. Cada uno de estos generadores representa una transformación independiente en el grupo, como consecuencia, será necesario un campo vectorial por cada uno de los mismos. [22, 8]

En algunas ocasiones, será conveniente escribir la derivada covariante en componentes,

$$(D_\mu \Phi)_i = \left[ \partial_\mu \delta_i^j + ig(t^a)_i^j A_\mu^a \right] \phi_j . \quad (6.3.0.6)$$

A manera de comprobación, se vuelve a derivar, para el proceso actual,

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)' &= [(\partial_\mu + igA_\mu) \phi]' \\ &= (\partial_\mu + igA'_\mu) \phi' \\ &= U \partial_\mu \Phi + (\partial_\mu U) \Phi + igA'_\mu U \Phi \\ &= U [\partial_\mu + U^{-1} (\partial_\mu U) + igU^{-1} A'_\mu U] \Phi . \end{aligned} \quad (6.3.0.7)$$



La transformación  $(D_\mu \Phi)'$  fijará la expresión<sup>9</sup> de  $A'_\mu$  al imponer, una vez más que la derivada covariante transforme como  $\Phi$ , es decir,  $(D_\mu \Phi)' = U D_\mu \Phi$  [8]. Como resultado,  $A'_\mu$  transformará según

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} . \quad (6.3.0.8)$$

Como la matriz  $U$  pertenece al grupo  $SU(n)$ , puede resultar interesante estudiar el límite infinitesimal de la transformación. Definiendo  $\alpha = \alpha^a t^a$ , se puede expresar  $U$  como  $U = e^{i\alpha} \simeq \mathbb{I} + i\alpha$ . Por tanto, esto permitirá expandir las Expresiones 6.3.0.2 y 6.3.0.4, de manera que

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = (\mathbb{I} + i\alpha) \Phi = (\mathbb{I} + i\alpha^a t^a) \Phi , \\ \partial_\mu \Phi &\rightarrow \partial_\mu \Phi' = i(t^a \partial_\mu \alpha^a) \Phi + (\mathbb{I} + i\alpha^a t^a) \partial_\mu \Phi . \end{aligned} \quad (6.3.0.9)$$

Si este resultado se aplica a la Ecuación 6.3.0.8, se deriva la versión expandida del campo *gauge*,

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha + i[\alpha, A_\mu] = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a t^a + i\alpha^b [t^b, t^c] A_\mu^c . \quad (6.3.0.10)$$

En caso de necesidad, dicha relación se puede escribir en componentes fácilmente,

$$(A_\mu^a)' = A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - f^a_{bc} \alpha^b A_\mu^c , \quad (6.3.0.11)$$

véase [22].

Retomando el curso del apartado, se proseguirá con la obtención del término cinético de  $A_\mu$ . Inspirado en el apartado anterior, el tensor de intensidad de campo, se definirá mediante el conmutador de las derivadas covariantes como

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] , \quad (6.3.0.12)$$

Análogamente a  $A_\mu$  o  $\alpha_\mu$ , se toma  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t^a$ . En algunas ocasiones, resultará conveniente expresarlo en componentes,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^a_{bc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (6.3.0.13)$$

Breve paréntesis para mencionar la aparición de un término cuadrático en los po-

<sup>9</sup>Es la generalización de la Ecuación 6.2.0.7.



tenciales, el cual dará lugar a la interacción de los campos *gauge* consigo mismos, como es el caso de los gluones en QCD. En QED, al ser una teoría abeliana, el tensor intensidad de campo no presentaba dicho término cuadrático en  $A_\mu$ , ni, por tanto, en el lagrangiano no aparecía un término de orden cuatro en el campo *gauge*. Por este motivo, los fotones no interaccionan entre sí. [22, 8]

Bajo la Transformación 6.3.0.2,  $F_{\mu\nu}$  se comporta como un tensor covariante,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}, \quad (6.3.0.14)$$

en otras palabras, no será invariante. Por tanto, con el fin de imponer la invariancia de la densidad lagrangiana permanezca invariante, de manera análoga a lo que sucedía en el electromagnetismo, se construye una cantidad que cumplirá dicha propiedad.

No resultará muy complicado observar que la traza<sup>10</sup>  $tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$  será invariante *gauge*. [8]

$$[tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})]' = tr(UF_{\mu\nu}U^{-1}UF^{\mu\nu}U^{-1}) = tr(U^{-1}UF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (6.3.0.15)$$

Juntando todos los resultados obtenidos, se puede construir el término cinético de la densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (6.3.0.16)$$

El lagrangiano resultante describe una teoría de interacción de campos no trivial, también conocida como teoría Yang-Mills. [25]

### 6.3.1. Acomplamiento de Fermiones.

Particularizando el lagrangiano de Dirac, Ecuación 5.3.0.1, para la interacción de fermiones bajo una teoría Yang-Mills, en otras palabras, incluyendo el término cinético no abeliano, así como sustituyendo las derivadas ordinarias por operadores covariantes, se obtiene la densidad lagrangiana, conocida por el mismo nombre,

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi. \quad (6.3.1.1)$$

Obsérvese la similitud con el lagrangiano de QED, Ecuación 6.2.1.2. Igual que esa

<sup>10</sup>Es necesario conocer dos propiedades importantes de la traza:  $trAB = trBA$  y un criterio, a elección, de normalización  $tr(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ . Breve recordatorio de que los generadores tienen traza nula.



densidad lagrangiana,  $\mathcal{L}_{YM}$  depende de dos parámetros: el factor de escala  $g$ , análogo a la constante  $e$ ; y la masa  $m$  del fermión.

Si se desea analizar el acoplamiento de los fermiones, en especial, los *quarks*, con el campo *gauge* del grupo  $SU(3)$ , en el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \bar{q} (i\not{D} - m) q, \quad (6.3.1.2)$$

el cual rige la cronodinámica cuántica, aparecerán los tensores de intensidad de campo  $G_{\mu\nu}^a$  asociados a los gluones, con  $a = 1, \dots, 8$ . [25]

Los quarks están representados mediante  $q$ , cuyas componentes, tres en total, representan cada una un color<sup>11</sup>, véase [8].

---

<sup>11</sup>Esto hace referencia a la carga de color presente en la interacción fuerte.

# Capítulo 7

## Teoría Electrodébil.

Aún cuando parecería posible construir una teoría renormalizable de la interacción débil, las correcciones radiativas serían mínimas, al menos para bajas energías, comparadas con las relativas al electromagnetismo. Como consecuencia, dichas correcciones deberían ser calculadas mediante QED. Sin embargo, la existencia de bosones  $W^\pm$  cargados, implica la interacción de los mismos con el campo electromagnético, dando lugar, al ser campos masivos, a teorías no renormalizables. La única alternativa será construir una teoría **unificada y renormalizable** que junte la fuerza débil y el electromagnetismo. [22]

En los apartados anteriores, ya se introdujo la teoría electrodébil como el grupo *gauge*  $G_{EW} = SU(2) \otimes U(1)$ , producto de la interacción débil,  $SU(2)$ , y el electromagnetismo,  $U(1)$ .

Dos de sus propiedades características la diferencian del otro gran ejemplo de teoría no abeliana, QCD: la ruptura espontánea de la simetría *gauge*, debido a que los bosones mediadores de la interacción tienen masa<sup>1</sup>; y el hecho de ser una teoría *chiral*, diferenciando entre partículas levóginas y dextróginas.

Dentro de las interacciones débiles entre corrientes, se distinguen dos clases bien diferenciadas, neutras y cargadas. Por un lado, en las primeras se acoplan, mediante bosones  $Z$  y fotones, fermiones *left-handed* o *right-handed*, de manera indiscriminada, sin variaciones del sabor de las corrientes, véase, sin cambios entre generaciones. Por el otro lado, los campos vectoriales  $W^\pm$  se encargan de interacciones que involucren fermiones levógiros y modificaciones del *flavour*<sup>2</sup>. [26, 8]

---

<sup>1</sup>Que los bosones  $W^\pm$  y  $Z$  sean masivos, viene impuesto por el corto alcance de la interacción. El rango de actuación de la fuerza es inversamente proporcional a la masa de la partícula mediadora. [26]

<sup>2</sup>En resumidas cuentas, la interacción débil cargada involucra exclusivamente campos levógiros, a diferencia del electromagnetismo, que actúa sobre ambos. Esto se debe a que los estados de *spin* de una partícula tienen la misma carga. [22]



## 7.1. Números Cuánticos. Representaciones de los Fermiones.

En una teoría *gauge chiral* los fermiones se dividen en dos tipos de campos no masivos, levógiros y dextrógiros, asociados a los operadores de proyección, definidos en la Ecuación 5.3.0.10,  $P_L$  y  $P_R$ , respectivamente.

Continuando con la notación de [22], se recuerda la definición de un fermión levógiro,  $\psi_L$ , y otro dextrógiro,  $\psi_R$ , mediante los proyectores,

$$\psi_L = P_L \psi_L \quad , \quad \psi_R = P_R \psi_R . \quad (7.1.0.1)$$

En cada una de las generaciones que conforman el SM, se diferencian siete espinores quirales: dos de ellos por cada *quark* de tipo *up*, de tipo *down* y el leptón cargado; y uno, en exclusiva, para el neutrino, ignorando su campo dextrógiro. Estos difieren en sus números *gauge* cuánticos, correspondientes al agrupamiento en representaciones del grupo *gauge*  $G_{EW}$ : el *isospin* débil,  $W$ , del grupo  $SU(2)$  y la hipercarga  $Y$ , procedente del factor  $U(1)$ .

Este concepto de **hipercarga** puede parecer novedoso, sin embargo ya ha estado presente en otros apartados. La razón de no haber recibido la importancia que merece reside en la utilización de una notación ligeramente inexacta.

Cuando se habla del SM como una teoría *gauge*, se descompone en el producto directo de tres grupos,  $G = SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ , donde  $SU(3)$  se relaciona con QCD,  $SU(2)$  se asigna a la interacción débil y el electromagnetismo queda recogido por  $U(1)$ . No obstante, esta afirmación no es del todo correcta.

A altas energías, el grupo  $U(1)$  representa la hipercarga,  $U(1)_Y$ , recuperándose, mediante el **mecanismo de Higgs**, la interacción electromagnética a bajas energías,  $U(1)_Q$ , con la carga  $Q$  correspondiente de cada partícula.

Retomando el curso del apartado y empezando con el caso más simple, las representaciones de un grupo abeliano, como es  $U(1)$ , son unidimensionales. Por otra parte, para el grupo no abeliano  $SU(2)$  será necesario diferenciar entre los singletes unidimensionales sin carga, y las representaciones multidimensionales cargadas, cuya versión irreducible son los dobletes bidimensionales.

Conservar la simetría de Lorentz, será fundamental, por tanto, la interacción débil no intercambiará campos levógiros con dextrógiros. Del mismo modo, no se modificará su color, carga asociada a la fuerza fuerte, evitando la mezcla de *quarks* y leptones. Es conocido que los bosones  $W^\pm$  se acoplan a fermiones *left-handed* exclusivamente, conectando *quarks* de tipo *up* con los de tipo *down*, y leptones cargados con sus



correspondientes neutrinos.

$$u_R, \quad d_R, \quad q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad e_R, \quad l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (7.1.0.2)$$

Cumpliendo todas estas imposiciones se obtienen los Multipletes<sup>3</sup> 7.1.0.2, a los cuales se les asignarán diferentes hipercargas de  $U(1)_Y$ , recogidas en el Cuadro 7.1. [8]

Cuadro 7.1: Hipercargas asociadas a cada uno de los diferentes campos de la primera generación.

Campo	Hipercarga
$u_R$	$2/3$
$d_R$	$-1/3$
$q_L$	$1/6$
$e_R$	$-1$
$l_L$	$-1/2$

Si bien es cierto que en algunas ocasiones  $Y$  coincide con la carga  $Q$ , no se puede afirmar que  $U(1)_Y$  sea  $U(1)_Q$ . Existe una contribución  $q_{SU(2)}$  a la carga  $Q$ , proveniente de un subgrupo  $U(1)$  de  $SU(2)$ , la cual conforma esa distinción, de manera que

$$Q = q_{SU(2)} + Y . \quad (7.1.0.3)$$

De esta forma se recuperan los valores convencionales de las cargas de las diferentes partículas, recogidos en el Cuadro 7.2

Cuadro 7.2: Cargas de cada una de las partículas de la primera generación. Los valores son idénticos para las otras dos familias.

Fermión	Carga
$u$	$2/3$
$d$	$-1/3$
$e$	$-1$
$\nu$	$0$

<sup>3</sup>Los multipletes recogidos en la Ecuación 7.1.0.2 se corresponden con la primera generación. Para las dos familias restantes, la construcción de los singletes y dobletes de  $SU(2)$  se realiza de manera análoga.



## 7.2. Densidad Lagrangiana.

Antes de determinar la definición de las derivadas covariantes para, posteriormente, expresar la densidad lagrangiana, conviene aclarar de dónde surge la **necesidad de unificar** la interacción débil y el electromagnetismo.

El hecho de que los grados de libertad dinámicos fundamentales de las interacciones débiles cargadas sean los dobletes levógiros, es una clara interpretación de que la violación de la paridad es máxima. Sin embargo, este no es el único problema. [24]

La fama de la teoría QED reside en la determinación de la separación producida por el efecto Lamb, en la estructura hiperfina del átomo de hidrógeno; y en el cálculo del momento magnético anómalo del electrón y el muón; entre otros muchos éxitos.

A la hora de realizar una teoría de perturbaciones a baja energía, el parámetro de expansión de QED es la constante de estructura fina de Sommerfeld,  $\alpha = \frac{1}{137}$ . Sea la masa del protón  $m_p = 938.2720882 \pm 0.0000003$  MeV, valor experimental extraído de [27], sería de esperar unos resultados igual de razonables para la interacción débil, dependiente de la constante de acoplo de Fermi  $G_F \simeq \frac{10^{-5}}{m_p^2}$ , una teoría que presenta bastantes similitudes con el electromagnetismo. [22]

Sin embargo, la construcción de una teoría cuántica de campos autoconsistente de la interacción débil es inviable. El primero de los impedimentos es la falta de renormalizabilidad. Para órdenes altos las contribuciones divergen, debido a la dependencia de  $G_F$  con  $(masa)^{-2}$ , siendo necesario un conjunto de infinitas cantidades para deshacerse de estos términos. Aunque medibles, dichas variables, dotan a la teoría de falta de predictibilidad. La violación de la unitariedad constituye otro de los grandes problemas.

En resumidas cuentas, el análisis de la teoría conjunta entre la interacción débil y QED, resulta imprescindible. [24]

Tres serán los campos *gauge*  $W_\mu^a$ , con  $a = 1, 2, 3$ , y tres los generadores<sup>4</sup> del grupo  $SU(2)$ ,  $t^a$ , siendo  $g$  la constante de acoplo. Del mismo modo, se nombrará  $B_\mu$  al campo *gauge* asociado a  $U(1)_Y$ , donde  $g'$  será la constante de acoplo.

Mediante la observación de los Multipletes 7.1.0.2, parece razonable deducir que la derivada covariante actuará de manera distinta según se trate de un campo levógiro o dextrógiro.

En el último caso, los campos *right-handed*,  $\psi_R$ , se comportan como singletes para  $SU(2)$ , por tanto, no sufrirán ningún acoplamiento con  $W_\mu^a$ . Esto permite definir

$$D_\mu \psi_R = (\partial_\mu + ig' Y B_\mu) \psi_R. \quad (7.2.0.1)$$

<sup>4</sup>En esta ocasión, tal y como se ha ido mostrando en apartados anteriores, se escogerán las matrices de Pauli como generadores del grupo  $SU(2)$ .



Por otra parte, para trabajar con un campo *left-handed*,  $\psi_L$ , resulta conveniente utilizar la notación  $W_\mu = t^a W_\mu^a$ , donde los generadores  $t^a = \frac{1}{2}\sigma^a$  [8]. Introduciendo todas las contribuciones, la derivada covariante se define como

$$D_\mu \psi_L = (\partial_\mu + igW_\mu + ig'YB_\mu) \psi_L . \quad (7.2.0.2)$$

Un breve paréntesis acerca de la carga  $Q$  en el electromagnetismo. En el apartado anterior se determinó la Expresión 7.1.0.3 para  $Q$ , en función de la hipercarga  $Y$  y de una contribución de  $SU(2)$ ,  $q_{SU(2)}$ . En ocasiones se habla de que el subgrupo  $U(1)$  contenido en la interacción débil está relacionado con el tercer generador  $t^3 = \frac{1}{2}\sigma^3$ , y por tanto, con su campo *gauge* asociado,  $W_\mu^3$ . Esta conclusión se deriva de la expresión de las matrices de Pauli, recogidas en la Ecuación 3.2.3.7. Tanto  $W_\mu^1$  como  $W_\mu^2$ , relacionados con  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , respectivamente, mezclan *quarks* de tipo *up* y *down*, a diferencia de  $W_\mu^3$ , y el bosón  $B_\mu$ , que no lo hacen. Por este motivo, en ocasiones se habla del grupo  $U(1)_{\sigma_3} \subset SU(2)$  y de la carga  $q_{\sigma_3}$ .

La contribución  $q_{\sigma_3}$  de la tercera componente del isospin débil a la carga será  $\pm\frac{1}{2}$  en el caso de los dobletes, o tomará un valor nulo para los singletes.

Retomando el objetivo principal de esta sección, las derivadas covariantes son esenciales a la hora de construir los términos cinéticos del lagrangiano<sup>5</sup>. Estos a su vez, se dividen en dos partes, la densidad lagrangiana cinética libre, relacionada con derivadas parciales y un segundo término asociado a la interacción.

Los términos que conforman el lagrangiano de interacción,

$$\mathcal{L}_{int} = -g\mathcal{J}_{W,\mu}^a W^{a,\mu} - g'\mathcal{J}_{Y,\mu} B^\mu , \quad (7.2.0.3)$$

tienen una estructura común, son el resultado del producto entre una corriente y un campo vectorial, o campo *gauge*.

Las corrientes

$$\mathcal{J}_{W,\mu}^a = \bar{q}_L \gamma_\mu \left( \frac{1}{2}\sigma^a \right) q_L + \bar{l}_L \gamma_\mu \left( \frac{1}{2}\sigma^a \right) l_L , \quad (7.2.0.4)$$

$$\mathcal{J}_{Y,\mu} = \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{1}{6} q_L + \bar{l}_L \gamma_\mu \left( -\frac{1}{2} \right) l_L + \bar{u}_R \gamma_\mu \frac{2}{3} u_R + \bar{d}_R \gamma_\mu \left( -\frac{1}{3} \right) d_R + \bar{e}_R \gamma_\mu (-1) e_R ,$$

según correspondan a la interacción débil o a la hipercarga, respectivamente, presentan un mismo esquema. Son el producto del campo  $\bar{\psi}$ , en caso de trabajar con fermiones; la matriz  $-\gamma$  asociada; el generador  $t^a$  o la hipercarga; y el campo  $\psi$ . No

<sup>5</sup>Nótese, que la construcción de dichos términos es análoga a la realizada en otros apartados para campos escalares y espinoriales.



obstante, en la Ecuación 7.2.0.4 se observa la versión expandida.

Resulta interesante mencionar la similitud de las Expresiones 7.2.0.4 con la corriente conservada recogida en la Ecuación 5.3.0.15 para una simetría  $U(1)$ . La estructura es análoga, salvo por los generadores de los diferentes grupos.

Con el fin de trabajar con un acoplamiento consistente de los bosones *gauge*, las corrientes  $\mathcal{J}_{W,\mu}^a$  y  $\mathcal{J}_{Y,\mu}$  se conservan. [8, 24]

### 7.3. El Mecanismo de Higgs.

Hasta ahora, se ha estudiado un modelo que rige la dinámica de la teoría electrodébil aparentemente. Sin embargo, los bosones *gauge*,  $B_\mu$  y  $W_\mu^i$ , así como los fermiones,  $\psi$ , no son masivos, con el fin de conservar la invarianza *gauge*<sup>6</sup>. Como consecuencia, las interacciones descritas por este modelo serían de largo alcance<sup>7</sup>.

La rotura espontánea de la simetría permite solucionar este problema, concediendo masas a los diferentes campos sin destruir la propiedad de renormalizabilidad de la teoría. Esta tarea se realiza mediante el **mecanismo de Higgs**. [8]

#### 7.3.1. Rotura Espontánea de la Simetría. Una visión más intuitiva.

Este método, que permite dotar de masa a los distintos campos sin romper la invarianza *gauge*, aparece en el comportamiento colectivo de los conocidos como sistemas de muchos cuerpos.

Estúdiese un material ferromagnético, en un campo externo nulo, siguiendo como esquema la referencia [22]. Su dinámica se rige por el hamiltoniano de Heisenberg para el modelo de interacciones *spin-spin* a primeros vecinos,

$$H_H = -\frac{1}{2}J \sum_{(i,j)} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j . \quad (7.3.1.1)$$

La constante de acoplo  $J$ , multiplica al producto de los *spines*,  $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ .

Este hamiltoniano,  $H_H$ , será invariante bajo rotaciones,  $R$ , o en otras palabras, conmutará con el operador unitario que describa la rotación,  $U(R)$ . Por consiguiente, si los autoestados fueran también invariantes, dos estados  $|\vec{M}\rangle$  y  $|\vec{M}'\rangle$  serían degenerados

<sup>6</sup>En el caso de los fermiones, es fácil observar que se viola la invarianza *gauge* al introducir términos  $m\bar{\psi}\psi$  que mezclan fermiones levógiros y dextrógiros con diferentes números *gauge* cuánticos.

<sup>7</sup>Es conocido que la fuerza débil tiene un rango de interacción pequeño.



en energía, puesto que las componentes de sus magnetizaciones se relacionarían según  $M'_i = R_i^j M_j$ . No obstante, los autoestados no siempre serán invariantes bajo rotaciones.

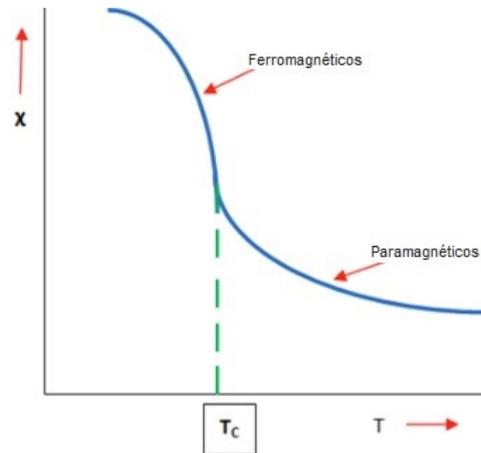


Figura 7.1: Representación gráfica de la susceptibilidad de los materiales en función de su temperatura. A la temperatura de Curie,  $T_C$ , el material sufre una transición de fase entre el ferromagnetismo y el paramagnetismo. [28]

En el estado fundamental, por debajo de la temperatura de Curie,  $T_C$ , el sistema tendrá una magnetización  $\vec{M}$  no nula<sup>8</sup>, ni invariante rotacionalmente. Sin campo externo, el sistema se calentará por encima de  $T_C$ , adquiriendo un carácter paramagnético, y por consiguiente una magnetización nula, para posteriormente enfriarlo hasta la temperatura original, obteniendo, en general,  $\vec{M}' \neq \vec{M}$ .

Como cada magnetización apunta en una dirección determinada, un estado fundamental particular no será simétrico, debido a que la simetría residirá en la degeneración del estado fundamental. Se habla de una **rotura espontánea de la simetría**.

Otro ejemplo más intuitivo que permita entender mejor este concepto está ligado a los superconductores.

En estos sistemas, el condensado de pares de Cooper dota de una masa efectiva al fotón, convirtiendo a la interacción electromagnética en una fuerza de corto alcance. Este hecho conduce al efecto Meissner-Ochsenfeld donde los campos magnéticos son expulsados del material, haciendo levitar al superconductor. [8]

<sup>8</sup>Por definición, un sistema ferromagnético es aquel que tiene sus *spines* orientados en la misma dirección, dando, como resultado, una cierta magnetización.



### 7.3.2. Aplicación del Mecanismo de Higgs a una Teoría No Abelianas.

Retomando el objetivo principal del apartado, la aplicación del **mecanismo de Higgs** a la teoría electrodébil, se recurre a un campo escalar,  $\Phi$ , caracterizado por ser un doblete, bajo la interacción débil, de hipercarga  $-\frac{1}{2}$ , con cuatro grados de libertad reales. Sea

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (7.3.2.1)$$

la parte escalar de la densidad lagrangiana.

Recuérdese la expresión

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - gf_{bc}^a W_\mu^b W_\nu^c \quad (7.3.2.2)$$

del tensor intensidad de campo para la teoría no abeliana de la interacción débil<sup>9</sup>. En algunas referencias, como [22], se introduce en el lagrangiano el término dinámico de los campos *gauge*,  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ , sin embargo, en esta ocasión, no se tendrá en cuenta a la hora de desarrollar el procedimiento del mecanismo de Higgs, procediendo exclusivamente con la Expresión 7.3.2.1.

Al tratarse de la teoría electrodébil, se ha introducido en secciones precedentes cómo construir la derivada covariante, particularizándolo para el campo escalar  $\Phi$  se determina

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu + igW_\mu - \frac{i}{2}g'B_\mu \right) \Phi. \quad (7.3.2.3)$$

La importancia del campo de Higgs reside en su potencial,

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{1}{2} \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (7.3.2.4)$$

introducido anteriormente<sup>10</sup> y conocido por tener una forma similar a un sombrero mexicano<sup>11</sup>. Los parámetros  $\mu^2$  y  $\lambda$  están definidos positivamente.

Para  $\Phi^\dagger \Phi = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$ ,  $V(\Phi^\dagger \Phi)$  presenta un mínimo, el cual será la posición de equilibrio del campo de Higgs en el vacío. El factor  $v$  se conoce como el valor esperado en el vacío, también denominado por sus siglas *vev*, cuya medida experimental está

<sup>9</sup>Para *QED*, las constantes de estructura,  $f_{bc}^a$ , son nulas y el campo vectorial  $W_\mu^a$  se sustituye por  $B_\mu$ .

<sup>10</sup>La Ecuación 6.1.0.5 recoge la expresión de este potencial. No obstante, renombrando las constantes  $\mu^2$  y  $\lambda$ , para el mecanismo de Higgs se utilizará la Expresión 7.3.2.4, donde  $\mu^2 > 0$ .

<sup>11</sup>Véase la Figura 6.1.



recogida en [29],  $v \sim 246$  GeV. Este parámetro denota la escala de ruptura de simetría de la teoría electrodébil.

De esta manera, fijando el módulo  $v$  de  $\Phi$  en el vacío, se restringe uno de los cuatro grados de libertad. Los tres restantes se determinan mediante una transformación *gauge*. Como resultado, es común elegir la conocida como forma unitaria *gauge* de  $\Phi$ ,

$$\Phi = \begin{pmatrix} v + \frac{1}{\sqrt{2}}H(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3.2.5)$$

Esta elección se puede entender como el resultado de aplicar una perturbación  $H(x)$ , también llamada campo dinámico, sobre el módulo en el vacío de  $\Phi$ .

La elección del campo dinámico, se toma de tal manera que se desvanezca en el vacío y que cumpla  $H = H^*$ .

Introduciendo<sup>12</sup> el *gauge* unitario en el lagrangiano de Higgs, Ecuación 7.3.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\lambda}{2}v^4 \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial^\mu H - \lambda v^2 H^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}vH^3 + \frac{\lambda}{8}H^4 \\ & + \frac{1}{4} \left( v + \frac{1}{\sqrt{2}}H \right)^2 \begin{pmatrix} W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & gg' \\ 0 & 0 & gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{1\mu} \\ W^{2\mu} \\ W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.3.2.6)$$

La separación en diferentes líneas, facilita el análisis del lagrangiano. En primer lugar, es habitual referirse como constante cosmológica al primer término,  $\frac{\lambda}{2}v^4$ , una densidad de energía en el vacío. Comúnmente, se suele ignorar, escribiendo en el potencial de Higgs  $(\Phi^\dagger\Phi - v^2)$ .

La segunda línea, describiría un campo escalar real  $H$ , con una masa<sup>13</sup> de  $m_H^2 = 2\lambda v^2$ , que sufre interacciones de tercer y cuarto orden.

No obstante, la importancia recae sobre la última línea. En ella se recogen los términos de masa de los bosones vectoriales. Al diagonalizar la matriz de masa se obtiene un autovalor nulo; uno doble, que toma el valor de  $g^2$ ; y el último igual a  $(g^2 + g'^2)$ . Véase, una partícula *massless*, dos con la misma masa no nula y un cuarto

<sup>12</sup>Esta operación se realizará en un entorno del mínimo, para un valor no nulo de  $H$ , de manera que se pueda aproximar el módulo de  $\Phi$  por  $v$ , haciendo posible sustituir  $\mu^2 = v^2\lambda$ .

<sup>13</sup>Para obtener la masa, se equipara el coeficiente que acompaña al término cuadrático en  $H$  a  $\frac{1}{2}m_H^2$ .



bosón más pesado, en otras palabras, el fotón, con  $M_\gamma = 0$ ; los bosones cargados  $W^\pm$ , cuya masa es  $m_W^2 = \frac{1}{2}g^2v^2$ ; y el bosón  $Z$  y  $m_Z^2 = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v^2$ .

Es el momento perfecto para mencionar los valores experimentales, extraídos de [27], de las masas de los diferentes bosones mencionados anteriormente, tal y como se recogen en el Cuadro 7.3.

Cuadro 7.3: Valores experimentales de las masas de cada uno de los bosones masivos. [27]

Bosones	Masa
Bosón $H$	$125.20 \pm 0.11$ GeV
Bosones $W^\pm$	$80.3692 \pm 0.0133$ GeV
Bosón $Z$	$91.1880 \pm 0.0020$ GeV

Introduciendo el ángulo de Weinberg,  $\theta_W$ , definido mediante sus relaciones trigonométricas,

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (7.3.2.7)$$

es posible expresar el fotón y el bosón  $Z$  como los autoestados correspondientes<sup>14</sup> [8]

$$\begin{aligned} A_\mu &= -\sin(\theta_W) W_\mu^3 + \cos(\theta_W) B_\mu, \\ Z_\mu &= \cos(\theta_W) W_\mu^3 + \sin(\theta_W) B_\mu. \end{aligned} \quad (7.3.2.8)$$

De las medidas experimentales recogidas en el Cuadro 7.3, por el mismo procedimiento que [29], se determina el valor del ángulo de mezcla electrodébil,

$$\sin^2 \theta_W = \left( \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right)^2 = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} = 0.223 \rightarrow \theta_W = 0.492 \text{ rad}. \quad (7.3.2.9)$$

El mecanismo de Higgs permite recuperar el electromagnetismo como parte del SM, partiendo de una teoría para altas energías que incluía la hipercarga. Por otra parte, define un nuevo campo vectorial neutro, correspondiente al bosón  $Z$ .

Resulta de interés escribir la densidad lagrangiana para un fermión  $\psi_i = \psi_{L i} + \psi_{R i}$ , recogida en la Ecuación 7.2.0.3, en esta nueva notación, sustituyendo los campos  $W_\mu^a$

<sup>14</sup>Nótese que cada uno es la combinación ortogonal del otro.



y  $B_\mu$  por los bosones  $W^\pm$ , el bosón  $Z$  y el  $\gamma$ . Como resultado, el lagrangiano se puede dividir en dos partes, una primera relacionada con las corrientes cargadas,

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1,2,3} (\bar{u}_L i \gamma^\mu d_{L i} + \bar{\nu}_L i \gamma^\mu e_{L i}) W_\mu^+ + h.c. , \quad (7.3.2.10)$$

sobre las que actúan  $W_\mu^\pm$ ; y un segundo término de corrientes neutras,

$$\mathcal{L}_{CN} = -e \mathcal{J}_{EM,\mu} A^\mu - \frac{e}{\sin(2\theta_W)} \mathcal{J}_{Z,\mu} Z^\mu , \quad (7.3.2.11)$$

para  $Z_\mu$  y  $A_\mu$ . [8, 24]

Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{EM,\mu} &= \sum_{\substack{i = u, d, c, \\ s, t, b, e, \mu, \tau}} \bar{\psi}_i \gamma_\mu Q_i \psi_i \\ \mathcal{J}_{Z,\mu} &= \sum_{\substack{i = u, d, c, s, t, b, \\ e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}} \bar{\psi}_i \gamma_\mu (v_i - a_i \gamma^5) \psi_i \end{aligned} \quad (7.3.2.12)$$

las corrientes electromagnética y asociada al bosón  $Z$ , respectivamente. Los parámetros  $v_i$  y  $a_i$  son factores numéricos que representan las diferentes intensidades del acoplamiento entre el bosón  $Z$  y los distintos fermiones.

Una vez más, la estructura de las corrientes  $\mathcal{J}_{EM,\mu}$  y  $\mathcal{J}_{Z,\mu}$  es análoga a las recogidas en las Ecuaciones 5.3.0.15 y 7.2.0.4.

A estas alturas, debido a que se conocen los lagrangianos que rigen el acoplamiento entre los bosones mediadores de la teoría electrodébil y los fermiones, es momento de mencionar una visión más intuitiva y conocida de los mismos, los **diagramas de Feynman**.

De manera visual, estos gráficos representan la trayectoria y evolución temporal de las partículas<sup>15</sup>, ya sea mediante líneas rectas para los fermiones, o sinusoidales en el caso de los bosones<sup>16</sup>. No obstante, su éxito reside en plasmar las interacciones entre partículas de una manera sutil mediante los **vértices**.

Véase por ejemplo la Expresión 7.3.2.10 para la densidad lagrangiana de las corrientes cargadas, en ella aparecen dos términos de interacción del bosón  $W^+$  con *quarks* o con leptones, cada uno de los cuales se representa mediante el vértice correspondiente de la Figura 7.2.

<sup>15</sup>En el caso de las antipartículas se invertirá el sentido temporal.

<sup>16</sup>Habitualmente, la representación de los gluones es ligeramente distinta, mediante líneas que asemejan un muelle.

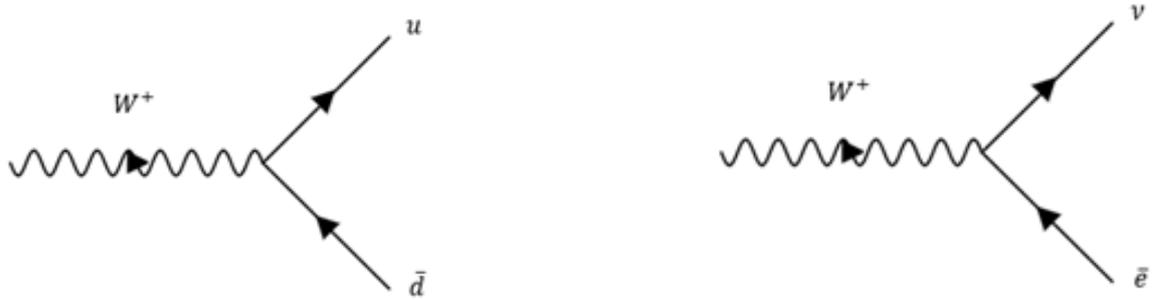


Figura 7.2: Vértices de los diagramas de Feynman, creados con [30], para los acoplamientos de un bosón  $W^+$  con dos quarks o con dos leptones, respectivamente.

Análogamente para el caso del bosón  $W^-$ , cuyos diagramas de Feynmann se recogen en la Figura 7.3.



Figura 7.3: Diagramas de Feynman, realizados con [30], de los procesos de acoplamientos de un bosón  $W^-$  con dos quarks o con dos leptones, respectivamente.

Algo similar ocurre con el fotón y el bosón  $Z$ . En la Figura 7.4 se recoge un ejemplo de interacción del fotón y otro del bosón  $Z$ . Dichos acoplamientos plasman la misma información que muestran las Ecuaciones 7.3.2.11 y 7.3.2.12.

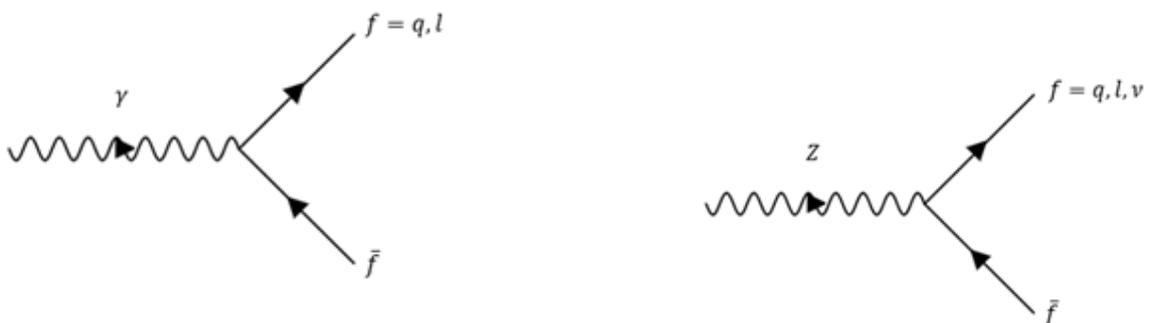


Figura 7.4: Ejemplos simulados con [30] de vértices de interacción para acoplamientos de un fotón y un bosón  $Z$ , respectivamente.



Retomando, una vez más, el curso del apartado. En el momento inicial, la teoría estaba dotada de doce grados de libertad bosónicos divididos entre el doblete complejo del Higgs, que albergaba cuatro grados de libertad reales; y los cuatro campos vectoriales *massless*, cada uno de los cuales aportaba dos grados de libertad transversales, hasta un total de ocho. Una vez aplicado el mecanismo de Higgs, esos doce grados de libertad siguen disponibles, sin embargo han sufrido una reorganización, el campo de Higgs proporciona únicamente un grado de libertad; junto con los dos transversales del fotón; los nueve restantes los aportan los tres bosones vectoriales masivos, cada uno dispone de un modo longitudinal, a sumar con los dos transversos. [8]

## 7.4. Acoplamientos de Yukawa.

El éxito del mecanismo de Higgs no reside exclusivamente en generar masas para los bosones *gauge*, sino también en lograrlo para los fermiones.

Se conoce bajo el nombre de **Yukawa** a los acoplamientos entre el doblete del Higgs y dos fermiones. Existen diferentes categorías según se estudie un doblete leptónico y singletes leptónicos cargados; o se acople un doblete de *quarks* con un singlete de *quark* tipo *up* o de tipo *down*. En la densidad lagrangiana que describe los acoplamientos de Yukawa,

$$\mathcal{L}_Y = (f_e)_{ij} \bar{l}_{L i} \tilde{\Phi} e_{R j} + (f_u)_{ij} \bar{q}_{L i} \Phi u_{R j} + (f_d)_{ij} \bar{q}_{L i} \tilde{\Phi} d_{R j} + h.c. , \quad (7.4.0.1)$$

cada una de estas contribuciones está parametrizada por una matriz. Se ha introducido una nueva notación  $\tilde{\Phi}_a = \varepsilon_{ab} \Phi_b^*$ . [24]

Una vez “rota” espontáneamente la simetría de la teoría electrodébil, estos términos de Yukawa otorgan masa a las diferentes partículas según se muestra en el lagrangiano resultante<sup>17</sup>,

$$\mathcal{L}_m = (m_e)_{ij} \bar{e}_{L i} e_{R j} + (m_u)_{ij} \bar{u}_{L i} u_{R j} + (m_d)_{ij} \bar{d}_{L i} d_{R j} + h.c. . \quad (7.4.0.2)$$

La matriz de masa, es una combinación de la parametrización anterior y el valor esperado en el vacío de  $v$ , por ejemplo  $m_u = f_u v$ .

Resulta conveniente diagonalizar estas matrices de masa utilizando transformaciones biunitarias mediante las matrices unitarias<sup>18</sup>  $V$ , de la forma

<sup>17</sup>La notación  $u_L$ ,  $d_L$  y  $e_L$ , indica la componente correspondiente del doblete  $q_L$  o  $l_L$ .

<sup>18</sup>Recuérdese que una matriz unitaria es aquella que cumple  $U^\dagger U = \mathbb{I}$



$$\begin{aligned}
 V^{(u)\dagger} m_u \tilde{V}^{(u)} &= \text{diag}(m_u, m_c, m_t) , \\
 V^{(d)\dagger} m_d \tilde{V}^{(d)} &= \text{diag}(m_d, m_s, m_b) , \\
 V^{(e)\dagger} m_e \tilde{V}^{(e)} &= \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) ,
 \end{aligned}
 \tag{7.4.0.3}$$

debido a que en la base que diagonaliza las corrientes cargadas, no sucede lo mismo con estas matrices.

La notación de las Expresiones 7.4.0.3 puede originar confusiones, por tanto, merece la pena destacar que en la parte izquierda de las ecuaciones,  $m_i$  hace referencia a las matrices no diagonales de masa. Por el contrario, en el lado derecho de las relaciones, los parámetros  $m_i$  representan las masas de los correspondientes *quarks*. Los valores experimentales, extraídos de [27], de dichas masas se recogen en el Cuadro 7.4.

Cuadro 7.4: Valores experimentales de las masas de los diferentes *quarks*. [27]

<i>Quark</i>	Masa	<i>Quark</i>	Masa
<i>u</i>	$2.16 \pm 0.07$ MeV	<i>d</i>	$4.70 \pm 0.07$ MeV
<i>c</i>	$1.2730 \pm 0.0046$ GeV	<i>s</i>	$93.5 \pm 0.8$ MeV
<i>t</i>	$172.57 \pm 0.29$ GeV	<i>b</i>	$4.183 \pm 0.007$ GeV

Retomando el proceso de diagonalización, como resultado se modifican los autovalores<sup>19</sup>, dando lugar a

$$\begin{aligned}
 u_{L i} &= (V^{(u)})_i^\alpha u_{L \alpha} \quad , \quad u_{R i} = (\tilde{V}^{(u)})_i^\alpha u_{R \alpha} , \\
 d_{L i} &= (V^{(d)})_i^\alpha d_{L \alpha} \quad , \quad d_{R i} = (\tilde{V}^{(d)})_i^\alpha d_{R \alpha} .
 \end{aligned}
 \tag{7.4.0.4}$$

Es de gran interés definir la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, también conocida por sus siglas *CKM*,

$$V_\alpha^\beta = (V^{(u)})_\alpha^\dagger{}^i (V^{(d)})_i^\beta ,
 \tag{7.4.0.5}$$

la cual incluye la información de las mezclas de sabores en las interacciones entre corrientes cargadas.

Debido a que existe cierta diferencia entre  $V^{(u)}$  y  $V^{(d)}$ , los acoplamientos entre las corrientes cargadas dejarán de ser diagonales, tal y como se recoge en [8], siendo necesario redefinir el lagrangiano como

<sup>19</sup>Hasta ahora, se han indicado los autovalores débiles con el alfabeto latino. De aquí en adelante, los autovalores de masa se denotaran con índices griegos



$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} V^{\alpha\beta} \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu d_{L\beta} W_\mu^+ + h.c. . \quad (7.4.0.6)$$

## 7.5. Neutrinos de Majorana, una Excepción Invariante *Gauge*.

A diferencia del mecanismo de Higgs, existe un procedimiento que permite obtener directamente términos de masa sin comprometer la invarianza *gauge*. Para ello, será necesario trabajar con un neutrino singlete dextrógiro, obteniéndose una masa de **Majorana**.

Con anterioridad, se había definido el fermión de carga conjugada, Ecuación 5.3.0.13, un espinor de carga, y quiralidad, opuesta al original,

$$P_L \psi_R^C = \psi_R . \quad (7.5.0.1)$$

Consecuentemente, se puede construir un término de masa que involucre las dos quiralidades de la forma  $\bar{\psi}^C \psi$ , el cual será invariante *gauge* siempre que  $\psi$  sea un singlete.

Se puede escribir el lagrangiano

$$\mathcal{L}_\nu = f_\nu^{ij} \bar{l}_{L i} \Phi \nu_{R j} + \frac{1}{2} M_{ij} \bar{\nu}_{R i} \nu_{R j} + h.c. \quad (7.5.0.2)$$

que describa el comportamiento de un neutrino *right-handed* masivo, en el cual se incluya también el acoplamiento de Higgs.

Los índices  $i$  y  $j$  recorren las tres generaciones de fermiones y la matriz de masa de Majorana viene representada por  $M$ . [8]

# Capítulo 8

## Comentarios Finales.

Desde 1934, cuando Fermi formuló su teoría para la desintegración  $\beta$ , el estudio del sector **electrodébil** ha sufrido diversidad de modificaciones hasta llegar a su expresión actual.

Para estudiar este constituyente del **modelo estándar**, se introdujeron algunos conceptos matemáticos básicos. Por este motivo, en el Capítulo 2 se definieron aspectos fundamentales de variedades y grupos.

El siguiente paso sería encontrarle un sentido y aplicación física a dichos términos, al fin y al cabo, el modelo estándar es una teoría *gauge* descrita por  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . Durante el Capítulo 3, se comentaron los **grupos de Lie**, junto con alguno de sus ejemplos fundamentales para el análisis del modelo estándar, y se definió el concepto de álgebra y sus representaciones.

Particularizándolo para la teoría de relatividad especial, se mencionó, a lo largo del Capítulo 4, el grupo de Lorentz, y por consiguiente, los campos. Este sería el primer acercamiento con las **¡partículas!** En especial, se trataría el tema de los fermiones, los campos espinoriales que sufren la interacción electrodébil.

Una vez se marcó el camino, sería necesario continuar hacia la formulación de los lagrangianos. Estas herramientas de **teoría de Campos**, introducidas en el Capítulo 5, sentaron las bases del posterior análisis de las teorías *gauge*, abelianas y no abelianas. Al finalizar el Capítulo 6, el lector era capaz de describir los diferentes acoplamientos de los fermiones con los bosones vectoriales, ya fuera según la electrodinámica cuántica o la cromodinámica cuántica, descrita por la teoría Yang-Mills.

Sin embargo, descubrir los secretos de la teoría electrodébil requeriría de un poco más de trabajo. Era el momento de adentrarse en el Capítulo 7. Mediante el **mecanismo de Higgs**, con la consecuente rotura de la simetría local, se obtuvo una teoría para bajas energías. Aparecería el ¡electromagnetismo!, junto con el fotón, del mismo modo



que se definieron los bosones masivos  $W^\pm$  y  $Z$ , mediadores de la interacción débil.

Antes de finalizar, sólo quedaba estudiar como adquieren masa los fermiones, mediante los conocidos como **acoplamientos de Yukawa** o utilizando el método alternativo de los neutrinos de **Majorana**.

Así concluyó este análisis sobre la **teoría electrodébil**. El desarrollo teórico en este sector es inmenso. Aun así, aunque son muchas las comprobaciones experimentales que lo respaldan, en la actualidad existen numerosos frentes abiertos en la investigación sobre la teoría electrodébil, muchos más sobre el modelo estándar. Por esta razón, los científicos aunan esfuerzos en desarrollar nuevas teorías como la supersimetría o la teoría de cuerdas.

# Capítulo 9

## Bibliografía.

- [1] G. Rajasekaran. «Fermi and the Theory of Weak Interactions». En: *Resonance J. Sci. Educ.* 19.1 (2014), págs. 18-44. DOI: 10.1007/s12045-014-0005-2. arXiv: 1403.3309 [physics.hist-ph].
- [2] Chen-Ning Yang y Robert L. Mills. «Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance». En: *Phys. Rev.* 96 (1954). Ed. por Jong-Ping Hsu y D. Fine, págs. 191-195. DOI: 10.1103/PhysRev.96.191.
- [3] Sheldon L. Glashow. «The renormalizability of vector meson interactions». En: *Nucl. Phys.* 10 (1959), págs. 107-117. DOI: 10.1016/0029-5582(59)90196-8.
- [4] Abdus Salam. «Weak and Electromagnetic Interactions». En: *Conf. Proc. C* 680519 (1968), págs. 367-377. DOI: 10.1142/9789812795915\_0034.
- [5] Peter W. Higgs. «Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons». En: *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964). Ed. por J. C. Taylor, págs. 508-509. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.508.
- [6] F. Englert y R. Brout. «Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons». En: *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964). Ed. por J. C. Taylor, págs. 321-323. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.321.
- [7] Steven Weinberg. «A Model of Leptons». En: *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967), págs. 1264-1266. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1264.
- [8] W. Buchmuller y C. Ludeling. «Field Theory and Standard Model». En: *2005 European School of High-Energy Physics*. Sep. de 2006. arXiv: hep-ph/0609174.
- [9] Juan de Burgos. *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. Third. McGraw Hill.
- [10] Manuel Castellet et Irene Llerena. *Álgebra Lineal y Geometría*. Reverté, 2000.
- [11] Andrés Viña Escalar. *Notas sobre Geometría*. 28 Jun 2023.



- [12] José Adolfo Guarino Almeida. *General Relativity*. URL: <https://www.adolfoguarino.com/notes.html>.
- [13] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics. From Isospin to Unified Theories*. Second. CRC Press, 2021. Cap. 1.
- [14] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.
- [15] José Adolfo Guarino Almeida. *Special Relativity*. URL: <https://www.adolfoguarino.com/notes.html>.
- [16] David Tong. *Quantum Field Theory*. University of Cambridge, 2006.
- [17] Wu-ki Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1985. Cap. 10.
- [18] Daniele Musso. *Classical Field Theory*. 3 May 2023.
- [19] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley y Sons, 1972. ISBN: 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.
- [20] Miguel A. Vazquez-Mozo Luis Alvarez-Gaume. «Introductory Lectures on Quantum Field Theory». En: *CERN Yellow Reports* (5 Oct 2005). URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0510040>.
- [21] Ian J. R. Aitchison y Anthony J. G. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction, Volume 1 : From Relativistic Quantum Mechanics to QED, Fourth Edition*. Taylor & Francis, 2013. ISBN: 978-1-4665-1302-0, 978-0-429-18538-0, 978-1-4665-1299-3. DOI: 10.1201/b13717.
- [22] D. Bailin y Alexander Love. *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. Taylor & Francis, 1993. ISBN: 978-1-351-43700-4, 978-0-203-75010-0, 978-1-138-40639-1, 978-0-7503-0281-4. DOI: 10.1201/9780203750100.
- [23] J. F. Donoghue, E. Golowich y Barry R. Holstein. *Dynamics of the standard model*. Vol. 2. CUP, 2014. DOI: 10.1017/CB09780511524370.
- [24] Ta-Pei [0000-0002-1137-0969] Cheng y Ling-Fong [0000-0002-8035-3329] Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 1984. ISBN: 978-0-19-851961-4, 978-0-19-851961-4.
- [25] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5.



- [26] et al. B. Povh. *Particles and Nuclei*. Springer-Verlag, 2008. ISBN: 978-3-540-79368-7.
- [27] *Particle Data Group*. Accessed on June 24, 2024. URL: <https://pdg.lbl.gov/index.html>.
- [28] *IMA Magnets*. Accessed on June 12, 2024. URL: <https://imamagnets.com/blog/que-es-la-temperatura-de-curie-de-los-imanes/>.
- [29] José Ignacio Illana. *El Modelo Estándar y su Fenomenología. Parte 1: La teoría Electrodébil y Herramientas de Cálculo*. 28 Aug 2018.
- [30] *Feynman Diagram Maker*. Accessed on June 26, 2024. URL: <https://www.aidansean.com/feynman/>.