



FACULTAD DE CIENCIAS – TRABAJO FIN DE GRADO

Trabajo Fin de Grado Física: Aspectos Básicos de Supersimetría

Alberto Viejo Loredó

Tutor: Antón Fernández Faedo

13 de julio de 2024

“Happiness can be found even in the darkest of times if only remembers to turn on the light”

-Albus Dumbledore, Harry Potter and the Prisoner of Azkaban.

Índice

1. Introducción	4
2. Supersimetrización de la Mecánica Cuántica	7
2.1. El índice de Witten	17
2.2. La acción supersimétrica	19
3. Teorías de Campos Supersimétricas	22
3.1. El grupo de Lorentz	22
3.2. Espinores	26
3.3. El grupo de Poincaré	36
3.4. El teorema de Coleman-Mandula	38
3.5. El álgebra de la supersimetría	39
3.6. Actuación de la supercarga como operador y representaciones del grupo de Poincaré	43
3.7. Supermultipletes de partículas sin masa	46
3.8. Supermultipletes de partículas masivas	49
3.9. Algunas acciones supersimétricas	51
4. Conclusiones y futuros pasos	55

1. Introducción

A lo largo de toda la historia de la humanidad los diferentes individuos dedicados a la física han tratado de dar explicación a todos los fenómenos observables. Muchas de estas explicaciones supusieron grandes revoluciones en la concepción del universo y de sus leyes. A pesar de que todas estas leyes puedan parecer muy diferentes entre si y sin ninguna relación aparente, si se mira de forma mas exhaustiva uno puede darse cuenta de que todas persiguen un mismo objetivo (al menos en los últimos tiempos), la unificación.

¿Pero, qué es esto de la unificación? Como su propio nombre indica, una unificación es una unión de dos (o más) conceptos o fenómenos que, aunque a simple vista no tengan nada que ver, pueden explicarse de forma conjunta mediante ciertas leyes. Por ejemplo, la primera unificación conocida es la propuesta por Newton en su desarrollo de la teoría de la gravitación. La unificación que éste encontró no es más que la que existe entre los cuerpos celestes y los cuerpos terrestres, es decir, la gravedad que nos mantiene a todos pegados al suelo es la misma que permite que los planetas giren alrededor del Sol. Sin embargo, si preguntásemos a alguien que no tiene conocimientos previos de física más allá de los adquiridos en secundaria por alguna unificación, lo más probable es que nos respondiese con el concepto del electromagnetismo. Dicha teoría, culminada con las conocidas ecuaciones de Maxwell, ha sentado las bases de toda la física moderna que se desarrolla hoy en día. Esto se debe a que ha dado lugar a conceptos tan importantes como la relatividad (especial y general).

Pero, ¿qué posibilidades de unificación hay hoy en día?. Pues bien, de las 4 interacciones conocidas, 2 están unificadas en lo que se conoce como teoría electrodébil. Además, existen teorías de gran unificación que tratan de incluir también la fuerza nuclear fuerte. Sin embargo, hay una que sigue “actuando de forma solitaria”, ésta es la gravedad. Indudablemente la teoría más prometedora para lo que se conoce como teoría del todo son las distintas teorías de cuerdas. No vamos a entrar en este trabajo a desarrollar ni explicar nada sobre ellas, pues no es ese el objetivo, sin embargo si que hablaremos sobre algo que es esencial para la consistencia de dichas teorías: la supersimetría (SUSY del inglés Supersymmetry).

Antes de explicar que propone la supersimetría y porque es importante en el desarrollo de las teorías modernas creo que es importante dar un paseo por uno de los conceptos más importantes de toda teoría física, las simetrías. Cuando se toma un curso de mecánica clásica (allá por segundo de carrera) uno aprende la importancia de las cantidades conservadas. Lo más normal es que la primera vez que te enfrentas a ello te preguntes ¿por qué son tan importantes estas magnitudes?, pues bien, la respuesta fue dada por Emmy Noether en 1916. Existe un teorema con su nombre el cual nos dice que a cada cantidad conservada le corresponde una simetría. Por ejemplo, si en nuestra teoría encontramos que la cantidad conservada es el momento angular, entonces nuestro sistema presentará invariancia rotacional.

Las simetrías son algo vital en física ya que permite simplificar muchos problemas y cálculos. Por ejemplo, el Modelo Estándar del que hemos hablado antes, la simetría que nos encontramos es $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Cada uno de los “trozos” de la simetría final proviene de cada una de las interacciones unificadas, así $U(1)$ viene de la electromagnética, $SU(2)$ de la interacción débil y $SU(3)$ de la interacción fuerte. Las simetrías que hemos visto hasta ahora son comprensibles para cualquier persona (todo el mundo puede imaginarse una rotación), pero, ¿qué ocurre con la que nos atañe en este trabajo?. Vamos ahora a ver que es la supersimetría.

Es bien conocido el hecho de que las partículas presentan un número cuántico al que se le conoce como spin. Este lleva consigo una cantidad conocida como el momento angular de spin. Además, se sabe que en la naturaleza tenemos dos tipos de partículas: fermiones y bosones. Los fermiones se caracterizan por tener un número de spin semi-entero ($1/2$ por ejemplo), mientras que los bosones tienen un número de spin entero. La supersimetría propone que cada partícula tiene lo que se conoce como un supercompañero, el cual es “del otro tipo”, es decir, el supercompañero de un fermión será un bosón y viceversa. Esto nos trae como consecuencia la ampliación del Modelo Estándar para poder incluir estas nuevas partículas.

A pesar de que la supersimetría no ha sido comprobada experimentalmente (aún) hay grandes esperanzas puestas en ella ya que podría dar explicación a temas tan importantes como la materia oscura que hay en nuestro universo.

El objetivo de este trabajo no es más que discutir los aspectos básicos de esta teoría, para ello se comenzará tratando de supersimetrizar la mecánica cuántica en el capítulo 1. En el siguiente capítulo se pasará ya a teorías de campos, las cuales son ligeramente más complicadas. Durante el desarrollo del mismo se irá estudiando el álgebra y las relaciones matemáticas importantes de la teoría. Para concluir se verán los supermultipletes de partículas y algunas acciones supersimétricas relevantes.

En el desarrollo del trabajo me he basado en las notas de David Tong sobre supersimetría y sobre Mecánica Cuántica supersimétrica. Si bien esta es la fuente principal, he usado también otras. Todas ellas están citadas en la correspondiente bibliografía.

2. Supersimetrización de la Mecánica Cuántica

Las dos teorías físicas más exitosas del siglo XX han sido sin ninguna duda la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica. A pesar de ello, cuando uno trata de hacer una teoría cuántica de campos a partir de la gravedad, es decir, cuando uno trata de cuantizar la Relatividad General, aparecen los problemas. Estos se deben a que la teoría de la Relatividad es no renormalizable. Aún así, es indudable la potencia de estas teorías, pues gracias a ellas se han conseguido avances y descubrimientos de gran importancia. Por todo esto intentar de supersimetrizar la Mecánica Cuántica es una forma bastante pedagógica de empezar a introducirse en este nuevo mundo.

La primera pregunta que se hace cualquiera al leer el título de la sección es ¿qué es la Mecánica Cuántica supersimétrica?. Pues bien, cuando nos referimos a ella, no hacemos más que restringirnos a un tipo de Hamiltonianos en particular; a aquellos que se escriben del siguiente modo:

$$H = \frac{1}{2}\{Q, Q^\dagger\}. \quad (2.1)$$

La Q representa lo que se conoce como **supercarga** y cumple que $Q^2 = 0$ (se entenderá más adelante lo que es, en particular en el capítulo 3), mientras que $\{ \}$ no es nada más que el anticonmutador, definido como el conmutador pero con un signo $+$ en lugar del $-$. Es decir, dados dos elementos A y B , se define su anticonmutador como:

$$\{A, B\} = AB + BA. \quad (2.2)$$

Al estudiar estos Hamiltonianos a lo largo de todo el capítulo nos encontraremos con algunas propiedades peculiares, las cuales difieren de las que uno se encontraría en la Mecánica Cuántica usual. Por ejemplo, cuando estudiemos el oscilador cuántico, se verá que existen estados de energía 0; algo que no es posible en la teoría no supersimétrica.

Como primera observación importante vamos a analizar el espectro de energía. Para ello tomemos un estado arbitrario el cual denotamos como $|\psi\rangle$. Hacemos la siguiente operación:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|(QQ^\dagger + Q^\dagger Q)|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|Q|\psi|^2 + |Q^\dagger|\psi|^2). \quad (2.3)$$

En lo anterior hemos utilizado que $\langle \psi | Q = \overline{Q^\dagger | \psi \rangle}$ y que $\langle \psi | Q^\dagger = Q | \psi \rangle$. De este modo tenemos un número complejo por su conjugado, lo cual es el módulo; y por tanto obtenemos el resultado arriba expuesto.

La expresión que obtenemos es claramente mayor o igual que 0. El resultado que acabamos de obtener es sorprendente. El hecho de que el espectro de energía sea siempre positivo nos descarta potenciales que nos son familiares, como $V = -\frac{1}{r}$ del átomo de hidrógeno. Por tanto hemos encontrado un punto crucial de la Mecánica Cuántica en su versión supersimétrica: **el potencial siempre ha de ser definido positivo.**

De la ecuación anterior no solo deducimos que la energía es siempre mayor o igual que cero si no que, además, podemos observar que estados con energía nula solo se dan cuando el estado $|\psi\rangle$ es aniquilado tanto por la supercarga como por su adjunto.

Vamos ahora a continuar viendo que nos dice la energía de los estados. Para ello centrémonos en la degeneración. Antes de analizarla como es debido debemos hacer un par de cálculos. Veamos que resultado obtenemos de realizar los conmutadores $[H, Q]$ y $[H, Q^\dagger]$:

$$[H, Q] = \frac{1}{2}(QQ^\dagger + Q^\dagger Q)Q - \frac{Q}{2}(QQ^\dagger + Q^\dagger Q) = \frac{1}{2}(QQ^\dagger Q + Q^\dagger Q^2 - Q^2 Q^\dagger - QQ^\dagger Q) = 0. \quad (2.4)$$

El otro conmutador se opera de forma análoga y se obtiene el mismo resultado. Además hemos usado el hecho de que $Q^2 = 0$ y por tanto su adjunto al cuadrado también tiene valor nulo. El hecho de que el conmutador entre H y Q sea 0 nos indica que los autoestados de H lo son también de Q y viceversa. De este modo podemos usar autoestados de energía.

Consideremos entonces el conjunto de estados con energía fija $E \neq 0$. Tenemos:

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (2.5)$$

Sustituyendo la expresión de H dada por la ecuación (2.1) y despejando de ella el anticonmutador de la supercarga y su adjunto obtenemos:

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2E. \quad (2.6)$$

Definimos entonces un nuevo operador al cual denotamos por c :

$$c = \frac{Q}{\sqrt{E}}. \quad (2.7)$$

Es inmediato comprobar que el anticonmutador de c y c^\dagger es 1. Además, tanto c como su adjunto elevados al cuadrado son 0.

Llegado este punto uno se da cuenta de una analogía curiosa; el álgebra que generan los operadores c es la misma que generan los operadores de creación y destrucción fermiónicos (estos operadores, los cuales suelen definirse como a y a^\dagger , también cumplen que su anticonmutador es 1 y que sus cuadrados son 0). Por tanto nos encontramos ante la misma representación irreducible dos dimensional. En ella tenemos lo siguiente:

$$c |0\rangle = 0. \quad (2.8)$$

$$c |1\rangle = |0\rangle. \quad (2.9)$$

$$c^\dagger |0\rangle = |1\rangle. \quad (2.10)$$

$$c^\dagger |1\rangle = 0. \quad (2.11)$$

Estas relaciones se dan también en el caso de los operadores fermiónicos (puede verse, por ejemplo en [3])

Al igual que el principio de exclusión de Pauli nos dice que en un mismo estado solo puede haber dos electrones (uno con spin up y otro con spin down), estas relaciones que acabamos de obtener lo que nos están indicando es el hecho de que la degeneración para una energía E dada siempre va a ser un número par. La excepción se da en el caso de $E = 0$, como ya hemos visto, estados con energía nula se dan únicamente cuando estos son aniquilados tanto por la supercarga como por su adjunto.

Esto que acabamos de ver ahora parece un poco enrevesado y nos gustaría expresarlo todo de una forma un poco más formal. Para ello, lo que suele hacerse es definir un nuevo operador F . Siguiendo con nuestra analogía podemos notar que este operador F desempeñará el rol del

operador número fermiónico que se ve en las teorías cuánticas de campos. Lo definimos del siguiente modo:

$$F = c^\dagger c. \quad (2.12)$$

Lo primero que hay que notar es el hecho de que este operador está definido únicamente para estados con energía positiva. Esto se debe a la propia definición de F , ya que si la energía es 0 tanto c como su adjunto presentarán una divergencia hacia infinito. A partir de él podemos calcular también el siguiente conmutador:

$$\begin{aligned} [F, Q] &= [c^\dagger c, Q] = \frac{Q^\dagger}{\sqrt{2E}} \frac{Q}{\sqrt{2E}} Q - Q \frac{Q^\dagger}{\sqrt{2E}} \frac{Q}{\sqrt{2E}} \\ &= Q \frac{Q^\dagger}{\sqrt{2E}} Q - \frac{QQ^\dagger Q}{2E} = -Q. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Donde en el último paso antes del resultado se ha usado lo siguiente:

$$\begin{aligned} Q^\dagger Q + QQ^\dagger &= 2E \implies QQ^\dagger = 2E - Q^\dagger Q \implies \\ \implies \frac{QQ^\dagger Q}{2E} &= \frac{2EQ - Q^\dagger Q^2}{2E} = Q. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De manera análoga se concluye que $[F, Q^\dagger] = Q^\dagger$ y que $[F, H] = 0$. Nos falta por ver la forma de actuar de este operador. Dicha forma es la siguiente:

$$F |0\rangle = 0. \quad (2.15)$$

$$F |1\rangle = |1\rangle. \quad (2.16)$$

De esta forma lo que encontramos es que el Espacio de Hilbert sobre el que trabajamos en mecánica cuántica se descompone en forma de suma directa de dos Espacios de Hilbert diferentes, uno para los bosones ($F = 0$) y otro para los fermiones ($F = 1$). De manera más formal se dice que lo que se tiene es un \mathbb{Z}_2 graduando el espacio. Matemáticamente:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F. \quad (2.17)$$

Como ya vimos que la degeneración viene en pares lo que concluimos es que aquellos pares que tengan $E \neq 0$ estarán compuestos por un estado en la parte bosónica y un estado en la parte fermiónica del espacio total.

La pregunta lógica que surge ahora es: ¿qué ocurre con aquellos estados que tienen energía 0?. Vamos a tratar de dar respuesta a la misma a partir de ejemplos específicos, los cuales desarrollaré un poco más adelante. Además, en ellos también veremos algo que comente unas líneas más arriba; el hecho de que el oscilador armónico cuántico en la teoría supersimétrica sí presente un “ground state” de energía nula ($E = 0$).

Relacionado con esto último vamos a hacer un apunte final. Es bastante usual encontrarse terminología como “la simetría esta rota” cuando se miran textos relacionados con estos temas. En nuestro caso simplemente diremos que la simetría **no se ha roto** si el “ground state” tiene energía 0; y diremos que la simetría **se ha roto** si tiene $E > 0$.

Para poder llegar a los ejemplos que anteriormente he comentado es necesario introducir los potenciales. Para ello vamos a empezar fijándonos en el ejemplo más sencillo que podemos tomar: **una partícula interaccionando bajo la acción de un potencial**. Comencemos pensando en el ejemplo de una partícula moviéndose a lo largo de una línea. Su espacio de Hilbert constará de dos trozos: uno referido al propio de una partícula que se mueve en una línea, y otro referido a un grado de libertad interno de la misma (de la misma forma que pasa con el spin). Matemáticamente podemos expresarlo como:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2. \quad (2.18)$$

$L^2(\mathbb{R})$ no es más que el conjunto de las funciones normalizables sobre una línea real, que se corresponde con el primer trozo de los que he nombrado en el párrafo anterior. Por otro lado \mathbb{C}^2 es el factor correspondiente al grado de libertad interno de la partícula. Los estados de este último factor son generados por $|0\rangle$ y por $|1\rangle$. El espacio de Hilbert no es más entonces que la suma directa del espacio de Hilbert de los bosones y el de los fermiones, es decir, no es más que:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F. \quad (2.19)$$

Una analogía que puede hacerse es pensar en los kets que generan el factor de grado de libertad interno como spin up y spin down, pero esto tiene un problema debido a que puede resultar extraño decir que los bosones son spin down y los fermiones spin up (es decir \mathcal{H}_B es la parte correspondiente al spin down y \mathcal{H}_F al spin up).

Para poder analizar lo que ocurre en el caso que nos incumbe ahora necesitamos especificar qué es Q , de este modo podemos realizar el anticonmutador de Q y obtener el Hamiltoniano. Por el momento le daremos a Q la siguiente expresión:

$$Q = (p - ih'(x)) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

El conjugado de Q nos queda exactamente igual pero con un $+$ en lugar de un menos dentro del paréntesis y con el 1 y el 0 de las entradas no diagonales de la matriz intercambiados. En estas expresiones p no es más que el operador $-i\frac{d}{dx}$ (estamos considerando siempre que $\hbar = 1$). Además es inmediato comprobar la condición impuesta por el álgebra $Q^2 = 0$. En la expresión anterior h' está relacionado con el potencial.

Para poder ver que resultado nos da el Hamiltoniano hagamos unos pocos cálculos previos:

$$(p - ih')(p + ih') = p^2 + (h')^2 + iph' - ih'p = p^2 + (h')^2 + i(-i\frac{dh'}{dx}) = p^2 + (h')^2 + h''. \quad (2.21)$$

$$(p + ih')(p - ih') = p^2 + (h')^2 - h''. \quad (2.22)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Juntando todas las expresiones anteriores llegamos a:

$$\{Q^\dagger, Q\} = \begin{pmatrix} p^2 + (h')^2 + h'' & 0 \\ 0 & p^2 + (h')^2 - h'' \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Usando la identidad de dimensión dos y la tercera de las matrices de Pauli es posible expresar esto del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} p^2 + (h')^2 + h'' & 0 \\ 0 & p^2 + (h')^2 - h'' \end{pmatrix} = (p^2 + (h')^2)\mathbb{1}_2 - h''\sigma_3. \quad (2.26)$$

El Hamiltoniano de nuestro caso es simplemente la expresión anterior multiplicada por la constante $\frac{1}{2}$. Obtenemos por tanto:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + (h')^2)\mathbb{1}_2 - \frac{1}{2}h''\sigma_3. \quad (2.27)$$

Lo importante de todo esto es: ¿qué conclusiones podemos extraer de este Hamiltoniano?. Lo primero que a uno le choca al verlo es el término que va con la tercera matriz de Pauli. Este término no nos habría salido de no ser porque estamos en un espacio de Hilbert compuesto por dos trozos. Podemos interpretarlo como algo similar a un campo magnético cuya función es diferenciar los estados del término bosónico y los estados del término fermiónico. Lo que nos indica es que la parte bosónica del espacio de Hilbert se compone de estados del tipo $\psi(x)|0\rangle = \psi(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, La parte fermiónica se compone de estados del tipo $\psi(x)|1\rangle = \psi(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. El operador que distingue los estados fermiónicos de los bosónicos es simplemente:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Por otro lado, el término que va con la identidad de dimensión dos no distingue entre estados de un tipo u otro. De hecho, simplemente es el Hamiltoniano usual para una partícula moviéndose en una línea bajo la acción de un potencial del siguiente tipo:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dx}\right)^2. \quad (2.29)$$

A la hora de analizar Hamiltonianos en teorías cuánticas suele ser interesante la búsqueda de lo que se conocen como “ground states”. Estos estados no son más que aquellos que presentan la configuración de menor energía. Los sistemas son más estables cuando están a menor energía, de ahí la importancia y el empeño de los físicos por obtener estas configuraciones. Vamos por tanto a introducirlos viendo la curiosidad sobre el oscilador armónico que he comentado anteriormente.

Si echamos un ojo a la expresión del potencial que tenemos, la cual viene dada por (2.29), podemos ver que ésta siempre es mayor o igual que 0 (ya se ha comentado que en la Mecánica Cuántica supersimétrica todos los potenciales han de ser definidos positivos). Por tanto, tendrá un mínimo cuando se anula, esto es, cuando $h'(x) = 0$. Supongamos que esto se cumple en un cierto punto que denotamos como x_0 . Expandiendo en serie de Taylor alrededor de dicho punto obtenemos:

$$h(x) \approx h(x_0) + \overbrace{h'(x_0)(x - x_0)}^0 + \frac{1}{2} \overbrace{h''(x_0)(x - x_0)^2}^\omega + \dots \quad (2.30)$$

Observamos que, quedándonos a orden 2, obtenemos una energía potencial típica de un oscilador armónico. Sabemos que en Mecánica Cuántica el oscilador armónico tiene como energía mas baja el siguiente valor :

$$E_0 = \frac{1}{2}|\omega|. \quad (2.31)$$

Este resultado es fácil de comprobar sin más que expresando el Hamiltoniano en función de los operadores de creación y destrucción a y a^\dagger . Cuando uno hace eso llega a la siguiente expresión:

$$H |E_0\rangle = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) |E_0\rangle. \quad (2.32)$$

Como E_0 es el estado de mínima energía el operador a lo aniquila. De este modo se obtiene el resultado que he dicho antes.

Sin embargo en nuestro caso supersimétrico tenemos un término más en el Hamiltoniano, el término que va con la tercera matriz de Pauli. Este término lo único que hace es darnos una contribución extra. Esta contribución nos da una corrección a la energía la cual es:

$$\Delta E = \pm \frac{1}{2}|\omega|. \quad (2.33)$$

Esto es lo esperable ya que ω es proporcional a h'' y, al introducirlo en nuestro Hamiltoniano, el término extra que tenemos es el que va con la tercera matriz de Pauli.

¿Qué nos esta diciendo esta corrección?. Pues nos esta indicando algo sorprendente, si tomamos el signo menos obtendremos una energía total nula, es decir, el oscilador armónico cuántico supersimétrico **tiene “ground states” con energía nula**. Esto, como ya he dejado entrever antes, es algo sorprendente ya que no ocurre en la Mecánica Cuántica ordinaria.

Impulsados por este hallazgo sobre los estados de energía 0, vamos a estudiar más a fondo el problema y a plantearlo de una manera más general. Un estado arbitrario de nuestra teoría tiene la siguiente forma¹:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Al principio del capítulo ya hemos obtenido la condición de que, si $E = 0$, entonces el estado es aniquilado tanto por la supercarga como por su adjunto. Sustituyendo las expresiones que teníamos anteriormente para Q y Q^\dagger obtenemos el siguiente par de ecuaciones diferenciales desacopladas de primer orden²:

$$-i\left(\frac{d}{dx} + h'\right)\psi = 0, \quad -i\left(\frac{d}{dx} - h'\right)\chi = 0. \quad (2.35)$$

Podemos resolver estas ecuaciones. Si lo hacemos obtendremos lo siguiente:

$$\psi(x) = e^{-h}, \quad \chi(x) = e^h. \quad (2.36)$$

Vemos que la solución depende de la forma que tenga nuestra función h (en unas pocas líneas veremos un ejemplo concreto). Para ver si las soluciones son válidas o no necesitamos determinar si los estados son normalizables. Para ello debemos analizar todo en base a dicha función h . Tenemos 3 posibilidades diferentes:

1. Si tanto h como x tienden a infinito nos encontramos en la situación en la que $\psi(x)$ es normalizable y además debemos tener $\chi(x) = 0$ (o si no tendríamos una divergencia hacia infinito). Esto significa que solo tenemos un ground state, y además este se sitúa en la parte férmionica del Espacio de Hilbert, es decir, tenemos un ground state fermiónico.
2. El caso análogo al anterior pero con los papeles de los estados cambiados se da cuando h tiende a $-\infty$ y x sigue tendiendo a infinito. En esta situación lo que tenemos es un ground state bosónico.

¹Generalmente se usa Ψ para el nombre del estado y ψ y ϕ para sus componentes. No lo denoto así en este caso porque me parece confuso.

²Esto no deja de ser también sorprendente. Hemos pasado de la ecuación de Schrödinger (una ecuación diferencial que puede complicarse mucho) a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas (para el estado con $E=0$).

3. Por último, puede ocurrirnos que no se den ninguna de estas condiciones. En ese concluimos que los estados de menor energía no tienen $E = 0$ y, como ya hemos comentado, la supersimetría está rota, ya que el ground state tiene energía positiva y es necesariamente degenerado. Esto último se debe a que como ya hemos comentado, los estados de energía mayor que 0 siempre presentan una degeneración par.

Voy ahora a tratar de arrojar algo de luz sobre esto último mediante la realización de un caso concreto:

Ejemplo con h cuadrático

Para este ejemplo tomamos un $h(x)$ dado por la siguiente expresión:

$$h(x) = \frac{1}{2}\omega x^2, \quad (2.37)$$

donde $\omega > 0$. Aplicando a esta expresión la ecuación (2.29) obtenemos:

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2. \quad (2.38)$$

Sustituyendo ahora en el Hamiltoniano hallado con anterioridad podemos ver que la única variación que obtenemos respecto al resultado dado por la mecánica cuántica usual viene dada por el término de spin. Este nos genera un desplazamiento de $\frac{1}{2}\omega$ en el espectro. De este modo tomando el estado fermiónico (spin up) obtenemos:

$$E_F = \omega n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

Mientras que si tomamos el estado bosónico (spin down) obtenemos:

$$E_B = \omega n; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.40)$$

Si uno quiere ver esto de forma detallada no tiene más que notar que al término de energía usual que se obtiene al resolver el oscilador armónico cuántico ($E = (\frac{1}{2} + n)\omega$) se le añade lo siguiente:

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega n & 0 \\ 0 & -\omega n \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Este “extra” viene dado por el segundo término de la ecuación (2.27). Operando en los casos de spin up y spin down es fácil ver que se llega al resultado expuesto anteriormente.

Como podemos observar, es posible encontrar un estado con energía $E=0$. Este estado se encuentra dentro de la parte fermiónica y no presenta una pareja bosónica, es decir, esta desaparejado. Además también vemos que todos los demás estados vienen en parejas y con el mismo valor, positivo, de energía. Por tanto hemos encontrado algo que no teníamos en la mecánica cuántica no supersimétrica, un estado tierra con energía nula para el caso del oscilador armónico. Como apunte indicar que si se toma ω negativo las conclusiones a las que se llegan son exactamente las mismas con única variación de que el estado de energía nula viviría en la parte bosónica.

Podríamos seguir mirando ejemplos tomando h de distintos órdenes. Por ejemplo, cuando h es de orden cúbico lo que nos encontramos es un potencial $V(x)$ que se anula en dos puntos. En este caso la supersimetría está rota.³

En la sección que viene a continuación vamos a introducir una manera un poco más formal y útil de tratar estos procedimientos. Para ello cambiaremos el operador número fermiónico introducido anteriormente por $(-1)^F$. A partir de él definiremos lo que denominamos índice de Witten. Este último término nos dará el título de la sección.

2.1. El índice de Witten

Como ya se ha comentado en el párrafo anterior definimos un nuevo operador, el cual llamaremos paridad fermiónica, como $(-1)^F$. Este operador toma el autovalor 1 en estados pertenecientes a la parte bosónica del espacio de Hilbert y el autovalor -1 en aquellos estados correspondientes a la parte fermiónica. Si tomamos el ejemplo de la partícula en una línea nos encontramos con lo siguiente:

$$(-1)^F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sigma^3. \quad (2.42)$$

³El desarrollo de este caso y otros con h de mayor orden puede verse detallado en [11].

A partir de este operador definimos el índice de Witten como:

$$\mathcal{I} = \text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H}. \quad (2.43)$$

Donde Tr representa la traza del operador y la cantidad β toma un papel similar al que tiene en mecánica estadística $\frac{1}{k_B T}$. Si recordamos la función de partición que se tiene dicho campo, usualmente denotada como \mathcal{Z} , veremos que \mathcal{I} se diferencia de la misma únicamente por el signo de $(-1)^F$.

Visto esto apliquemos el índice de Witten a nuestro ejemplo anterior. En él teníamos un único "ground state" con energía 0, y además, éste estaba situado en la parte fermiónica del espacio de Hilbert (habíamos considerado $\omega > 0$). Por tanto lo que tendremos será:

$$\mathcal{I} = -1. \quad (2.44)$$

Tomando el caso $\omega < 0$ obtenemos $\mathcal{I} = 1$.

Un hecho importante y que por tanto debemos destacar es que, en las teorías supersimétricas, el índice de Witten es independiente de β y del resto de los parámetros del modelo, es decir, la derivada de \mathcal{I} respecto de los parámetros va a ser siempre 0. Esto es causado por la degeneración del espectro de energías para aquellos estados con $E > 0$ (Uno puede explicarlo de forma más formal mediante un isomorfismo entre los dos trozos del espacio de Hilbert). Por tanto para cada término positivo de la exponencial (proveniente de \mathcal{H}_B), existirá el mismo término pero con signo negativo (proveniente de \mathcal{H}_F). Por tanto los únicos estados que contribuyen al índice son aquellos que posean energía nula. Esto se debe a que estos no tienen porque ir emparejados (hemos visto un ejemplo de ello unas pocas líneas más arriba). Por tanto el índice de Witten lo que nos está dando es la diferencia entre los estados de energía 0 situados en la parte bosónica y los estados de energía 0 situados en la parte fermiónica.

Para comprender un poco mejor el índice de Witten y como este es un indicador de si la supersimetría puede romperse o no supongamos que nos encontramos en un modelo con múltiples "ground states" con $E = 0$. Parte de esos estados serán fermiónicos y la otra parte serán

bosónicos. En este caso, el índice de Witten nos da como resultado la diferencia entre los estados de un tipo y del otro, es decir, obtenemos lo siguiente:

$$\text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H} = n_B(E=0) - n_F(E=0). \quad (2.45)$$

Vemos que, como se ha comentado en el párrafo anterior, el índice de Witten es independiente de los parámetros. Sabemos que, a diferencia de los estados con energía nula, los estados con $E \neq 0$ vienen emparejados. Si variamos los parámetros alguno de los “ground states” dejará de tener $E=0$, pero, entonces necesariamente han de ir emparejados. La supersimetría solo puede estar rota si $\text{Tr}(-1)^F = 0$. En otro caso la supersimetría no puede romperse. Esto es debido al emparejamiento necesario para estados con $E > 0$. Si en un instante el valor del índice de Witten es por ejemplo 2, eso significa que hay dos “ground states” en la parte bosónica. Al no haber ninguno en la parte fermiónica estos no pueden emparejarse en estados con $E > 0$ al cambiar los parámetros y por tanto no se rompe la supersimetría. Sin embargo, si $\mathcal{I} = 0$ tenemos el mismo número de “ground states” en la parte bosónica y en la fermiónica; permitiendo así dicho emparejamiento. La siguiente figura da una descripción gráfica de esto.

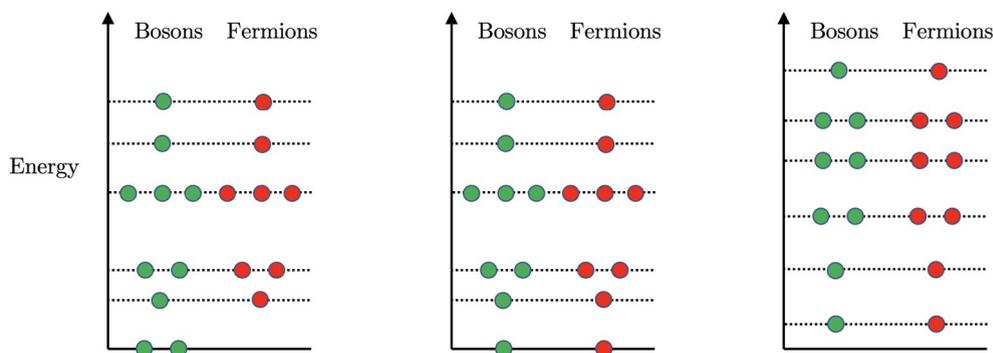


Figura 1: **A la izquierda:** situación en la que no es posible una ruptura espontánea de la supersimetría. **A la derecha:** situación en la que si puede romperse la supersimetría del sistema.

2.2. La acción supersimétrica

En esta sección del capítulo vamos a tratar un concepto central a la hora de estudiar cualquier teoría física, el concepto de la acción. Por tanto, vamos a tratar de construir una acción para

nuestra teoría supersimétrica. Además vamos a ver de que tipo de simetría estamos hablando cuando usamos el concepto supersimetría. Para ello vamos a recordar algunos conceptos básicos de mecánica cuántica. En la teoría cuántica usual, si una cantidad conmuta con el Hamiltoniano ésta se conserva. Si tomamos un Hamiltoniano para un átomo con un solo electrón (como puede ser el hidrógeno) nos encontraremos con que l_z , la proyección del momento angular orbital sobre z , y l^2 , el momento angular orbital al cuadrado, conmutan con el Hamiltoniano, es decir, se conservan. De las relaciones de conmutación que hemos obtenido en la ecuación (2.4) podemos extraer lo siguiente:

$$[H, Q + Q^\dagger] = 0. \quad (2.46)$$

Esto nos dice que $Q + Q^\dagger$ es una cantidad conservada asociada a alguna simetría. Lo que vamos a tratar de descubrir ahora es que simetría es esta.

Consideremos la siguiente acción:

$$S = \int dt L = \int dt \left[\underbrace{\frac{1}{2} \dot{x}^2 + i\psi^\dagger \dot{\psi}}_{\text{cinéticos}} - \underbrace{\frac{1}{2} h'^2}_{\text{Potencial}} + \underbrace{h'' \psi^\dagger \psi}_{\text{Términos de masa}} \right] \quad (2.47)$$

En esta acción las variables ψ y ψ^\dagger son variables de Grassman, es decir, anticonmutan.

Esta acción es invariante bajo las transformaciones que denotaremos como **transformaciones de supersimetría**. Estas son las siguientes:

$$\delta x = \epsilon^\dagger \psi - \epsilon \psi^\dagger \quad (2.48)$$

$$\delta \psi = \epsilon(-i\dot{x} + h') \quad (2.49)$$

$$\delta \psi^\dagger = \epsilon^\dagger(i\dot{x} + h') \quad (2.50)$$

Destacar que, en este caso, ϵ ha de ser una variable de Grassman constante.

Un simple vistazo a las transformaciones de supersimetría nos permite observar que estan transforman campos bosónicos en campos fermiónicos y campos fermiónicos en campos bosónicos (realmente llevan campos fermiónicos a la derivada de los campos bosónicos). Vamos a comprobar que, efectivamente, la acción es invariante bajo estas transformaciones:

Escribimos la variación de la acción como:

$$\delta S = \int dt [\dot{x}\delta\dot{x} + i\delta\psi^\dagger\dot{\psi} + i\psi^\dagger\delta\dot{\psi} - h'h''\delta x + h'''\delta x\psi^\dagger\psi + h''(\delta\psi^\dagger\psi + \psi^\dagger\delta\psi)]. \quad (2.51)$$

Sustituyendo las transformaciones de supersimetría, la variación de la acción se escribe como:

$$\begin{aligned} \delta S = \int dt \epsilon[-\dot{x}\dot{\psi}^\dagger - i\psi^\dagger\frac{d}{dt}(-i\dot{x} + h') + h'h''\psi^\dagger - h'''\psi^\dagger\psi^\dagger\psi - h''\psi^\dagger(-i\dot{x} + h')] + \\ + \epsilon^\dagger[\dot{x}\dot{\psi} + i(i\dot{x} + h')\dot{\psi} - h'h''\psi + h'''\psi\psi^\dagger\psi + h''(i\dot{x} + h')\psi]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para simplificar esto debemos notar que los términos $\dot{x}\dot{\psi}$ y $\dot{x}\dot{\psi}^\dagger$ se cancelan tras una integración por partes.⁴ El término h''' también se anula debido a que lleva o el producto de dos ψ^\dagger , o el producto de dos ψ ; como ambas cantidades anticonmutan llegamos a que $\psi\psi + \psi\psi = 0 \implies \psi\psi = 0$, y lo mismo con los dagueados. Esto nos deja, tras unas pocas simplificaciones, con la siguiente expresión:

$$\delta S = \int dt i\epsilon\frac{d}{dt}(h'\psi^\dagger) + i\epsilon^\dagger\frac{d}{dt}(h'\psi). \quad (2.53)$$

Lo que tenemos es una derivada total y, por tanto, tenemos que $\delta S = 0$. Así, hemos demostrado que la acción planteada es invariante bajo las transformaciones de supersimetría.

Para finalizar vamos a escribir el Hamiltoniano a partir del Lagrangiano anterior. Mediante la transformada de Legendre, y teniendo en cuenta algunas sutilezas respecto al orden de los operadores, ya que estamos trabajando con operadores cuánticos, se llega a lo siguiente:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + h'^2) - \frac{1}{2}h''(\psi^\dagger\psi - \psi\psi^\dagger). \quad (2.54)$$

A partir de este hamiltoniano se puede recuperar el que definimos en la ecuación (2.27). Para ello basta tomar lo siguiente:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Estas expresiones para ψ y ψ^\dagger verifican lo esperado, es decir, verifican que: $\{\psi, \psi^\dagger\} = 1$ y también que: $\psi^2 = (\psi^\dagger)^2 = 0$.

⁴Esto se debe a que podemos escribir $(\dot{x}\dot{\psi}^\dagger)$ como $\frac{d}{dt}(\dot{x}\psi^\dagger) - \dot{x}\dot{\psi}^\dagger$. De este modo los términos con \ddot{x} se cancelan y el que sobrevive lo tratamos como un término de frontera por ser una derivada total.

De este modo, recuperamos tanto el Hamiltoniano dado en la ecuación (2.27), como las suercargas definidas en la ecuación (2.20). Operando los conmutadores y anticonmutadores de la supercarga con los distintos campos se llega a que:

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2H, \quad (2.56)$$

donde H es el Hamiltoniano de la ecuación (2.54).

Ahora que ya hemos sentado las bases de las teorías supersimétricas de un modo pedagógico, supersimetrizando una teoría que nos era bien conocida, podemos pasar al siguiente nivel. En el siguiente capítulo veremos teorías de campos supersimétricas, es decir, supersimetrizaremos aquellas nociones que suelen aprenderse en un curso de teoría clásica de campos. El tratamiento será similar al visto hasta ahora, no obstante, todos los cálculos y razonamientos presentarán alguna dificultad extra.

3. Teorías de Campos Supersimétricas

En física las simetrías se estudian casi siempre en base a grupos y sus propiedades. La supersimetría no va a diferir en este aspecto. Más adelante introduciremos uno de los teoremas con los que se dio inicio a este tipo de teorías, el teorema de Coleman-Mandula. No obstante debemos empezar contruyendo todo desde la base; de este modo todo sera coherente y fácil de comprender.

3.1. El grupo de Lorentz

En física relativista en ausencia de gravedad se trabaja con el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Asociado a este espacio hay dos métricas posibles: la “mostly minus” (la que usaremos en este texto) y la “mostly plus”. La métrica elegida para nuestros desarrollos tiene la siguiente forma:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1). \quad (3.1)$$

Dentro del grupo de simetrías del espacio de Minkowski las más conocidas probablemente son las transformaciones de Lorentz, estas son transformaciones de la forma $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ en las que

se satisface la siguiente propiedad:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (3.2)$$

Estas transformaciones dejan invariante la siguiente cantidad :

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (3.3)$$

Además, consideraremos siempre que $c = 1$.

Dado que el grupo de transformaciones del espacio con coordenadas $(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ que dejan invariante la forma cuadrática $(y_1^2 + \dots + y_m^2) - (x_1^2 + \dots + x_n^2)$ se conoce como grupo ortogonal $O(n, m)$, el grupo de Lorentz se corresponde con $O(1, 3)$.

El grupo de Lorentz consta de dos componentes desconexas entre si, una donde $\Lambda_0^0 \geq 1$ y otra en la que $\Lambda_0^0 \leq -1$, llamadas componente ortócrona y no ortócrona respectivamente. En el desarrollo de este trabajo estaremos interesados en las transformaciones en las cuales $\det(\lambda) = 1$ y $\Lambda_0^0 \geq 1$. Por tanto estaremos interesados en el grupo $SO^+(1, 3)$ (por ahorro de notación escribiremos simplemente $SO(1, 3)$).

En este momento es posible que nos sintamos ante una encrucijada debido a que lo que buscamos son las propiedades de las representaciones spinoriales del grupo de Lorentz y, sin embargo, $SO(1, 3)$ no tiene representaciones de este tipo. Para ello tomaremos un grupo intimamente relacionado con él, el grupo $Spin(1, 3)$. La relación entre ambos se escribe:

$$SO(1, 3) \cong Spin(1, 3)/\mathbb{Z}_2. \quad (3.4)$$

En este caso el factor \mathbb{Z}_2 introduce el signo - que adquieren los spinores cuando se les somete a una rotación de 360 grados (o 2π radianes).

Vemos la forma explícita que tiene una transformación de Lorentz Λ actuando sobre un cuadrivector. La podemos escribir como:

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right). \quad (3.5)$$

En la expresión anterior $\omega_{\mu\nu}$ especifican que transformación de Lorentz se esta haciendo y las $M^{\mu\nu}$ son matrices 4×4 antisimétricas las cuales generan las diferentes transformaciones. Las transformaciones que tenemos son las siguientes: aquellas que dejan t invariante, es decir, las rotaciones en los planos (x, y) , (x, z) y (y, z) ; también tenemos aquellas realizadas en los planos (t, x) , (t, y) , (t, z) y que dejan invariante la cantidad $t^2 - x^2$, $t^2 - y^2$, $t^2 - z^2$, estas transformaciones se conocen como boosts. A las rotaciones las denotaremos como J_i y a los boosts como K_i . Ambas se expresan en funciones de las matrices anteriormente vistas como:

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}, \quad K_i = M_{0i}. \quad (3.6)$$

Las matrices de las rotaciones son hermíticas, es decir, $J_i^\dagger = J_i$, mientras que las matrices que representan los boosts son antihermíticas, es decir, $K_i^\dagger = -K_i$. Debido a esto tenemos que las rotaciones forman un grupo compacto y los boost no, es decir, si se hacen rotaciones de forma indefinida al final se acabará llegando de nuevo al punto de partida, sin embargo, si haces boosts de forma continua cada vez te irás alejando más del punto de partida.

Las matrices $M^{\mu\nu}$ generan el álgebra $so(1,3)$, dado por el siguiente conmutador:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}) \quad (3.7)$$

A partir de este álgebra tenemos las siguientes relaciones para J_i y K_i :

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \quad (3.8)$$

Es posible darse cuenta de que las rotaciones forman un sub-álgebra de $su(2)$. Si se piensa es bastante lógico ya que el grupo de Lorentz es isomorfo al cociente entre $SU(2)$ y \mathbb{Z}_2 . Sin embargo podemos ir más allá y encontrar dos álgebras $su(2)$ mutuamente conmutantes dentro de $so(1,3)$. Para ello debemos empezar tomando las siguientes combinaciones lineales de rotaciones y boosts:

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i). \quad (3.9)$$

Además de ser hermíticos ambos cumplen las siguientes relaciones:

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \quad [A_i, B_j] = 0 \quad (3.10)$$

Sabemos que las representaciones de $su(2)$ se denotan mediante un índice j (entero o semi-entero), además, la dimensión de la representación es $2j + 1$. Como en este caso tenemos dos copias de $su(2)$ nuestras representaciones vendrán identificadas por medio de dos índices (j_1, j_2) y la dimensión de la representación será: $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Las diferentes representaciones que tenemos según los valores de j_1 y j_2 son :

- $(0,0) =$ Escalar (dimensión 0).
- $(1/2,0) =$ Espinor de Weyl levógiro (dimensión 2).
- $(0,1/2) =$ Espinor de Weyl dextrógiro (dimensión 2).
- $(1/2,1/2) =$ Vector (dimensión 4).

De la clasificación anterior sacamos en claro que las representaciones de menor dimensión (obviando aquellas en las que ambos índices son 0) son los espinores de Weyl. Lo que físicamente llamamos spin no es más que el valor $j = j_1 + j_2$.

Si queremos ser formalmente correctos nuestro desarrollo anterior esta mínimamente equivocado ya que el grupo de Lorentz no es realmente isomorfo a dos copias de $SU(2)$. Esto se debe a que $SU(2)$ es un grupo compacto y el grupo de Lorentz no lo es (ya que el grupo de transformaciones que representa a los boosts no es compacto). Por tanto lo que tenemos realmente es una complejificación, es decir, el álgebra $so(1,3)$ es isomorfa a una cierta combinación lineal compleja de $su(2) \times su(2)$. Usualmente esto suele denotarse como:

$$so(1,3) \cong su(2) \times su(2)^*. \quad (3.11)$$

Debido a esto tenemos la siguiente propiedad en nuestros índices j_1 y j_2 :

$$(j_1, j_2)^* = (j_2, j_1). \quad (3.12)$$

¿Qué podemos sacar en claro de esto? Pues a simple vista dos cosas: la primera es que tanto los escalares como los vectores son representaciones reales (ya que su conjugado es el mismo); la segunda es que siempre que tenemos un espinor de Weyl levógiro tenemos también un espinor de Weyl dextrógiro conjugado, es decir, los espinores de Weyl se intercambian mediante conjugación compleja.

Durante los desarrollos anteriores han aparecido ante nosotros unos objetos de vital importancia, los espinores. Por ello, vamos a dedicar la siguiente sección del capítulo a hablar un poco más sobre ellos.

3.2. Espinores

Como ya se ha comentado anteriormente los espinores juegan un papel fundamental en el desarrollo de las teorías supersimétricas. Por ello usaremos esta sección del capítulo para adentrarnos más en ellos; para ello iremos desde su definición hasta la construcción de algunos lagrangianos importantes. Además, a lo largo de esta sección nos encontraremos con otros objetos que también tendrán un rol protagonista en la teoría.

La definición de los espinores la haremos a partir de matrices pertenecientes al grupo $SL(2, \mathbb{C})$, cuya representación fundamental será lo que hemos llamado en la sección anterior espinor de Weyl levógiro.

Antes de continuar, entendamos por qué esto funciona. Para ello veamos como podemos escribir las transformaciones de Lorentz en función de estas matrices. Lo primero que debemos notar es que existe un isomorfismo entre el grupo $Spin(1, 3)$ y el grupo $SL(2, \mathbb{C})$; matemáticamente esto se escribe:

$$Spin(1, 3) \cong SL(2, \mathbb{C}). \quad (3.13)$$

Formalmente lo que se tiene es que $SL(2, \mathbb{C})$ es el recubrimiento doble de $Spin(1, 3)$, es decir, es un mapa dos a uno de un espacio topológico al otro.⁵ En unas pocas líneas veremos que debido a esto ciertas transformaciones de $SL(2, \mathbb{C})$ no tendrán importancia en el estudio.

De este modo podemos escribir un elemento x^μ en forma de matriz de dimensión 2×2 . Para ello usaremos las matrices de Pauli, es decir, las siguientes matrices:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

⁵No se entrará en detalles de lo que es un recubrimiento ya que dicha definición pertenece a la topología. No obstante, es un concepto que puede encontrarse en cualquier libro introductorio de topología algebraica.

Y dado que σ^0 es la identidad, las escribiremos de forma acortada como: $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$ donde $i=1,2,3$. De este modo escribimos:

$$X = x_\mu \sigma^\mu. \quad (3.15)$$

Es claro que X es una matriz 2×2 compleja y hermítica, es decir, $X^\dagger = X$. Además el producto $x_\mu x^\mu$ no es más que el determinante de la matriz X .

Ya estamos en condiciones de definir nuestra transformación de Lorentz. Para ello tomemos $S \in SL(2, \mathbb{C})$ y hagamos la siguiente transformación:

$$X \mapsto X' = SX S^\dagger. \quad (3.16)$$

Para darnos cuenta de que la transformación anterior es, en efecto, una transformación de Lorentz debemos mirar su determinante y su hermiticidad. Si lo calculamos nos daremos cuenta de que la matriz X' es hermítica y además tiene determinante igual a X ya que:

$$\det(X') = \det(SXS^\dagger) = \det(S) \cdot \det(X) \cdot \det(S^\dagger) = \det(X), \quad (3.17)$$

donde la última igualdad surge del hecho de que $\det(S) = 1$. Además los parámetros que nos quedan libres en la matriz coinciden con las transformaciones de Lorentz ya que, en general, una matriz 2×2 compleja admite 4 parámetros complejos arbitrarios. Sin embargo, la condición de $\det(S) = 1$ nos reduce el número de parámetros a 3, es decir, 6 parámetros reales correspondientes a 3 rotaciones y 3 boosts. Como hemos dicho antes el hecho de que $SL(2, \mathbb{C})$ sea el recubrimiento doble de $Spin(1,3)$ juega un papel importante ya que hace que la transformación $S = -1$ no actúe sobre X .

Pasemos ahora a ver la representación fundamental de las matrices de $SL(2, \mathbb{C})$. Como ya se ha comentado anteriormente estas serán los espinores de Weyl levógiros, es decir, serán objetos complejos de dos componentes con el siguiente aspecto:

$$\psi_\alpha = (\psi_1, \psi_2). \quad (3.18)$$

Éstos se corresponden con objetos donde $j_1 = 1/2$ y $j_2 = 0$. Dichos espinores transforman del siguiente modo:

$$\psi_\alpha = S_\alpha^\beta \psi_\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (3.19)$$

Para obtener el espinor de Weyl dextrógiro lo único que debemos hacer es definir el conjugado de la representación. Si lo hacemos obtenemos:

$$(\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}. \quad (3.20)$$

Notar que ambas representaciones serían equivalentes si fuésemos capaces de encontrar una matriz P tal que $S^* = PSP^{-1}$. En nuestro caso no es posible y, por tanto, las representaciones no son equivalentes. Debido a esto último suele adoptarse la notación de colocar un punto encima de los índices para los objetos pertenecientes al conjugado de la representación. Un elemento de la representación conjugada transforma del siguiente modo:

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \longmapsto (S^*)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad (3.21)$$

Este objeto se corresponde con uno que tiene $j_1 = 0$ y $j_2 = 1/2$, es decir, se corresponde con un espinor de Weyl dextrógiro.

Un hecho importante debido a la no equivalencia de las representaciones es que no podemos contraer un elemento con su conjugado.

Al inicio de esta sección se comentó que, además de los espinores, se definirían otros objetos de vital importancia en las teorías supersimétricas. Pues bien, el momento de dicha definición ha llegado; por ello vamos a definir unos tensores invariantes del grupo $SL(2, \mathbb{C})$ los cuales nos servirán, entre otras cosas, para subir y bajar índices. Dichos tensores son los siguientes:

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Una propiedad interesante de estos tensores es que su producto es la identidad, es decir, uno es el inverso del otro. Veámoslo explícitamente:

$$\epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

A partir de estos símbolos podemos formar el producto de dos fermiones de Weyl levógiros. Para hacer esto se procede del siguiente modo:

$$\psi\phi = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\alpha\phi_\beta = \psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2. \quad (3.24)$$

Puesto que es la primera vez que nos encontramos ante una cuenta así en este documento vamos a escribirla explícitamente:

$$(\phi_1\phi_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\psi_1\psi_2) = \begin{pmatrix} -\phi_2 \\ \phi_1 \end{pmatrix} (\psi_1\psi_2) = \psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2. \quad (3.25)$$

Vemos que, efectivamente, obtenemos el resultado que esperábamos. El producto de estos dos espinores de Weyl es invariante. Para ver esto lo que debemos hacer es estudiar que ocurre cuando aplicamos una transformación de Lorentz. Dado que cada espinor transforma como hemos visto en la ecuación (3.19), la transformación del producto será lo siguiente:

$$\psi\phi \longmapsto S_\alpha{}^\gamma S_\beta{}^\delta \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\alpha \phi_\beta. \quad (3.26)$$

El producto de las dos matrices S y el símbolo ϵ no es mas que lo siguiente:

$$S_\alpha{}^\gamma S_\beta{}^\delta \epsilon^{\alpha\beta} = \det(S) \epsilon^{\gamma\delta}. \quad (3.27)$$

Veamos esto explícitamente. Tomemos por ejemplo $\gamma = 1$ y $\delta = 2$ (el resto de casos se hacen igual). Tenemos:

$$\begin{aligned} \det(S) \epsilon^{12} &= S_\alpha{}^1 S_\beta{}^2 \epsilon^{\alpha\beta} = S_1{}^1 S_2{}^2 \epsilon^{12} + S_1{}^1 S_1{}^2 \epsilon^{11} + S_2{}^1 S_1{}^2 \epsilon^{21} + S_2{}^1 S_2{}^2 \epsilon^{22} \implies \\ &\implies \det(S) = S_1{}^1 S_2{}^2 - S_2{}^1 S_1{}^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde hemos usado que $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ y $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$. Es inmediato ver que el término de la derecha es el determinante de una matriz 2×2 y que, por tanto, verifica la igualdad.

Introduciendo este cálculo en la transformación tenemos:

$$S_\alpha{}^\gamma S_\beta{}^\delta \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\alpha \phi_\beta = \det(S) \epsilon^{\gamma\delta} \psi_\delta \phi_\gamma = \psi\phi. \quad (3.29)$$

donde en la última igualdad hemos usado el hecho de que el determinante de S es igual a 1. De este modo hemos comprobado que la cantidad queda invariante bajo una transformación de Lorentz.

En las expresiones anteriores hemos estado considerando únicamente espinores de Weyl levógiros, no obstante para los espinores de Weyl dextrógiros todo se haría exactamente igual. La única diferencia es que usaríamos los índices con punto. De este modo la expresión quedaría:

$$\bar{\psi}\bar{\phi} := \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\phi}_{\dot{\beta}} = \bar{\psi}_1\bar{\phi}_2 - \bar{\psi}_2\bar{\phi}_1. \quad (3.30)$$

Como podemos observar el signo - ha cambiado de sitio. Esto es lógico ya que en la matriz del tensor invariante ϵ el símbolo menos se encuentra en la otra entrada no nula.

Como ya hemos comentado podemos usar estos tensores para subir y bajar índices. En este punto uno podría pensar que estos símbolos son análogos a la métrica pero, sin embargo, tienen una diferencia fundamental: los símbolos $\epsilon^{\alpha\beta}$ son antisimétricos. En el contexto de este trabajo y de nuestro estudio nos viene como anillo al dedo ya que los espinores son variables anticonmutantes. Aunque se haga igual que con la métrica es clarificador ver esta subida y bajada de índices de manera explícita:

$$\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}. \quad (3.31)$$

El procedimiento para subirlo es exactamente el mismo e ídem para las expresiones que incluyen índices con puntos, es decir, para aquellas que se refieran a espinores de Weyl dextrógiros. A partir de estas reglas podemos construir los escalares invariantes que hemos visto antes del siguiente modo:

$$\psi\phi = \psi^{\alpha}\phi_{\alpha}, \quad \bar{\psi}\bar{\phi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\phi}^{\dot{\alpha}}. \quad (3.32)$$

El símbolo - que nos encontramos de diferencia entre el escalar construido a partir de los espinores levógiros y el escalar construido a partir de los dextrógiros se manifiesta aquí en la forma de contraer los índices. Para los espinores de Weyl levógiros la forma de hacerlo es en diagonal hacia abajo mientras que, para los espinores de Weyl dextrógiros es en diagonal hacia arriba (y hacia la derecha en ambos casos).

Al igual que hemos visto como transforman los espinores con el índice abajo veamos ahora como transforman aquellos que tienen el índice arriba. Dicha transformación es sencilla y viene dada por la siguiente expresión:

$$\psi^\alpha \mapsto (S^{-1T})^\alpha{}_\beta \psi^\beta. \quad (3.33)$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \mapsto (S^{-1\dagger})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}. \quad (3.34)$$

Es posible comprobar que estas transformaciones son las correctas a partir de los siguientes cálculos:

$$S_\alpha{}^\gamma \epsilon^{\alpha\beta} S_\beta{}^\delta = (S^T)^\gamma{}_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} S_\beta{}^\delta = \epsilon^{\gamma\delta} \quad (3.35)$$

Multiplicando por el inverso de S^T a la izquierda de ambos miembros:

$$\epsilon^{\alpha\beta} S_\beta{}^\delta = (S^{-1T})^\alpha{}_\gamma \epsilon^{\gamma\delta}. \quad (3.36)$$

Utilizando esto en la transformación de Lorentz⁶:

$$\psi^\alpha \mapsto \epsilon^{\alpha\beta} S_\beta{}^\delta \psi_\beta = (S^{-1T})^\alpha{}_\gamma \epsilon^{\gamma\delta} \psi_\beta = (S^{-1T})^\alpha{}_\beta \psi^\beta. \quad (3.37)$$

El desarrollo de la transformación para un espinor de Weyl dextrógiro es totalmente análoga.

Hasta ahora hemos visto los espinores de Weyl como representación fundamental del grupo $SL(2, \mathbb{C})$ y, además, hemos construido escalares a partir de ellos. Hemos comprobado que dichos escalares pueden construirse con los espinores levógiros y con los dextrógiros y estos no son equivalentes entre sí. La siguiente cuestión que surge de forma natural es: ¿qué ocurre si combinamos un espinor de Weyl levógiro con uno dextrógiro? La respuesta es sencilla; construimos la representación vectorial del grupo de Poincaré. Matemáticamente tenemos:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (3.38)$$

⁶En la expresión anterior S^{-1T} denota la inversa de la traspuesta.

Es decir, si juntamos un objeto con $j_1 = 1/2$ y $j_2 = 0$, es decir, un espinor de Weyl levógiro y un objeto con $j_1 = 0$ y $j_2 = 1/2$, es decir, un espinor de Weyl dextrógiro obtenemos un objeto con $j_1 = j_2 = 1/2$. Para poder construir explícitamente estos objetos, los cuales serán cuadvectores, necesitamos las matrices de Pauli. Dichas matrices estarán situadas entre los espinores y tendrán un índice de cada tipo (uno con punto y otro si el) ya que si no no sería posible realizar la contracción. La expresión es la siguiente:

$$\psi \sigma^\mu \bar{\phi} = \psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\phi}^{\dot{\alpha}}. \quad (3.39)$$

donde:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = (1, \sigma^i)_{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (3.40)$$

Comprobemos explícitamente que la ecuación (3.39) es un vector. Para ello hagamos el siguiente cálculo:

$$\psi X \bar{\phi} = \psi^\alpha X_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} \mapsto (\psi^\beta (S^{-1})_{\beta}{}^\alpha) (S_\alpha{}^\delta X_{\delta\dot{\delta}} (S^\dagger)_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\alpha}}) (\bar{\phi}^{\dot{\beta}} (S^\dagger)_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}}) = \psi X \bar{\phi}. \quad (3.41)$$

Vemos por tanto que, efectivamente, es un vector ya que transforma como tal.

Al igual que antes hemos subido los índices de los espinores mediante los tensores invariantes ϵ podemos usarlos ahora para subir (o bajar) los índices a las matrices de Pauli. Matemáticamente:

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = (1, -\sigma^i)^{\dot{\alpha}\alpha}. \quad (3.42)$$

En este caso la barra encima del símbolo que nos representa la matriz de Pauli no significa conjugación compleja. Estas matrices son un conjunto diferente de matrices 2×2 . La transformación puede escribirse como $\bar{\sigma} = \epsilon \sigma^T \epsilon^T$. Hagamos este cálculo explícitamente:

$$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\sigma^T)_{\dot{\beta}\beta} (\epsilon^T)^{\beta\alpha} = \epsilon \sigma^T \epsilon^T. \quad (3.43)$$

Para acabar de cerrar esta parte del capítulo vamos a presentar los generadores del grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Para ello definimos el producto antisimétrico de matrices σ como sigue:

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta := \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta. \quad (3.44)$$

Tomamos estos elementos $\sigma^{\mu\nu}$ como generadores del grupo de Lorentz. Además, debido a la antisimetría en los índices μ y ν , el número de generadores coincide con la dimensión del grupo, es decir, tenemos 6 generadores. Si se hace el conmutador entre dos de ellos se recupera el álgebra de Lorentz, es decir, se obtiene:

$$[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\rho\delta}] = i(\eta^{\nu\rho}\sigma^{\mu\delta} - \eta^{\nu\delta}\sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\delta}\sigma^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\sigma^{\nu\delta}). \quad (3.45)$$

Debido a que, como puede comprobarse, se reproduce el álgebra del grupo de Lorentz, tenemos la siguiente transformación:

$$\psi_\alpha \mapsto \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha^\beta \psi_\beta. \quad (3.46)$$

Del mismo modo se razona para el caso de los espinores dextrógiros. Los generadores de dicha representación serían:

$$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}. \quad (3.47)$$

La transformación en este caso tendría la siguiente expresión:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \mapsto \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}. \quad (3.48)$$

Hasta ahora todos los tipos de espinores que hemos visto son espinores de Weyl (levógiros o dextrógiros). Para ampliar un poco más esta categoría construyamos ahora otra clase importante de espinores, los espinores de Dirac. Dichos espinores no serán una representación irreducible del grupo de Lorentz en 4 dimensiones (o en 3+1 dimensiones). Matemáticamente la construcción del espinor de Dirac se hará a partir de espinores de Weyl juntados del siguiente modo:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.49)$$

Escribiremos un espinor de Dirac mediante un vector columna cuya primera entrada es un espinor de Weyl levógiro y su segunda entrada es un espinor de Weyl dextrógiro, es decir, escribimos un espinor de Dirac como sigue:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Junto con los espinores de Dirac se introducen unas matrices llamadas matrices γ . Estas se construyen a partir de las matrices σ vistas anteriormente. Podemos escribirlas como:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Las matrices γ cumplen la siguiente relacion de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.52)$$

Siendo $\eta^{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski (en muchos textos se usa $g^{\mu\nu}$). Que estas matrices cumplan dicha relación de anticonmutación significa que obedecen ese álgebra de Clifford. Además, tenemos lo siguiente:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu; \quad \text{para } \mu \neq \nu. \quad (3.53)$$

Para encontrar la relación entre el álgebra de Clifford y el grupo de Lorentz tomamos lo siguiente:

$$S^{\rho\sigma} = \frac{i}{4}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] = i\left(\frac{1}{2}\gamma^\rho \gamma^\sigma - \frac{1}{2}\gamma^\sigma \gamma^\rho\right). \quad (3.54)$$

Para ver que las matrices S generan el grupo de Lorentz debemos de ver que cumplen su relación de conmutación. Para ello tomamos como cierto el siguiente resultado:

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu \eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu \eta^{\rho\mu}). \quad (3.55)$$

Veamos ahora que se cumplen las relaciones de conmutación del grupo de Lorentz:

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = \frac{i}{2}[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] = \frac{i}{2}\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \eta^{\rho\mu} - \frac{i}{2}\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\sigma \eta^{\rho\nu} + \frac{i}{2}\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \eta^{\sigma\rho} - \frac{i}{2}\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \eta^{\sigma\nu}. \quad (3.56)$$

A partir de la definición de $S^{\mu\nu}$ podemos escribir:

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(S^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - S^{\nu\sigma} \eta^{\rho\mu} + S^{\rho\mu} \eta^{\nu\sigma} - S^{\rho\nu} \eta^{\sigma\mu}). \quad (3.57)$$

de donde vemos que recuperamos las relaciones de conmutación del grupo de Lorentz. Por tanto, $S^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo de Lorentz. Por último indicar que es posible expresar $S^{\mu\nu}$ del siguiente modo:

$$S^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

De este modo los espinores de Dirac tienen el siguiente comportamiento cuando se les aplica una transformación de Lorentz:

$$\Psi \mapsto \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\Psi, \quad (3.59)$$

a partir de la cual recupera el comportamiento que habíamos encontrado para los espinores de Weyl.

Para acabar esta sección centremos en uno de los objetos más importantes dentro de la física teórica: las acciones y los lagrangianos. Para ello vamos a definir un par de acciones importantes. La primera y mas sencilla es la que llamaremos acción de Weyl; su expresión es la siguiente:

$$S_{Weyl} = - \int d^4x \, i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi. \quad (3.60)$$

Tomando las ecuaciones del movimiento obtenemos la ecuación de Weyl (y su conjugada):

$$\partial\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0 \implies i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0. \quad (3.61)$$

La siguiente (y última) acción que veremos es la acción de Dirac. Ésta se escribe:

$$S_{Dirac} = - \int d^4x \, \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi. \quad (3.62)$$

Donde $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$ siendo $\gamma^0 = \text{diag}(1,1,-1,-1)$.

Si obtenemos las ecuaciones de movimiento recuperamos la ecuación de Dirac:

$$\partial\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = 0 \implies (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0. \quad (3.63)$$

La ecuación del movimiento para Ψ nos da la misma ecuación solo que en su forma hermítica conjugada. Además, es posible escribir la ecuación de Dirac en función de los espinores de Weyl; para ello uno debe escribir Ψ en forma de columna y todo lo que acompaña al espinor de Dirac de modo adecuado para recuperar la ecuación. Puede verse este desarrollo en [8].

Uno puede preguntarse por qué no aparecen términos de masa en alguno de los anteriores lagrangianos. Esto se debe a que, si se intenta introducir algún término del tipo $\psi^\dagger\psi$ este es idénticamente 0 por ser los espinores variables de Grassman.

Además de la invariancia Lorentz los anteriores lagrangianos tienen una simetría extra conocida como simetría $U(1)$, esta nos dice lo siguiente: si hacemos el cambio $\Psi \mapsto e^{i\alpha}\Psi$, entonces, el lagrangiano queda invariante. Comprobemoslo con la acción de Dirac:

$$-\int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \mapsto -\int d^4x e^{-i\alpha}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha}\Psi = -\int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi. \quad (3.64)$$

Es importante indicar que esto se da debido a que α es una constante. Si quisiéramos que esta transformación fuese local, es decir, que dependiese del punto, deberíamos tomar $\alpha(x)$. En este caso las derivadas que aparecen le afectarían y habría que añadir términos nuevos al Lagrangiano para compensar dichas derivadas. Este es el origen de las teorías gauge.

3.3. El grupo de Poincaré

Hasta ahora hemos trabajado con el grupo de Lorentz y hemos visto sus invariantes y representaciones. Sin embargo, en el mundo real tenemos también movimientos de traslación en el espacio-tiempo; estos movimientos vienen incluidos en el grupo de Poincaré. Básicamente podemos definir este grupo como el grupo de Lorentz más las traslaciones en el espacio-tiempo. Debido a su importancia en física dedicaremos esta sección a su estudio y descripción.

Podemos escribir un elemento genérico del grupo de las traslaciones del siguiente modo:

$$\exp(-iP^\mu a_\mu). \quad (3.65)$$

Donde a_μ representa el cambio de la traslación, es decir, pasamos de estar en el punto x_μ al punto $x_\mu + a_\mu$. Por su parte, P^μ son las componentes del operador 4-momento. Como ya se ha

dicho antes, juntando estas transformaciones junto con las de Lorentz obtenemos el grupo de Poincaré, también conocido a veces como el grupo inhomogeneo de Lorentz.

Es posible comprobar que las traslaciones conmutan, por tanto se tiene:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (3.66)$$

Veamos ahora otros conmutadores interesantes. Usando los J^i y K^i definidos anteriormente tenemos:

$$[J^i, P^j] = i\epsilon^{ijk} P^k. \quad (3.67)$$

$$[J^i, P^0] = 0. \quad (3.68)$$

La única generalización de estas ecuaciones que sea Lorentz-covariante es la siguiente:

$$[P^\mu, M^{\sigma\rho}] = i(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho). \quad (3.69)$$

Juntando esta última ecuación con el álgebra del grupo de Lorentz obtenemos el álgebra del grupo de Poincaré. Denotemos a P^0 como H y veamos algunos conmutadores interesantes de esta álgebra y su significado:

$$[J^i, J^k] = i\epsilon^{ijk} J^k, \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k, \quad [J^i, P^j] = i\epsilon^{ijk} P^k. \quad (3.70)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k, \quad [P^i, P^j] = 0, \quad [K^i, P^j] = iH\delta^{ij}. \quad (3.71)$$

$$[J^i, H] = 0, \quad [P^i, H] = 0, \quad [K^i, H] = iP^i. \quad (3.72)$$

Algunos de los conmutadores anteriores ya han sido vistos en el grupo de Lorentz. Los tres primeros nos indican que los J^i son los encargados de generar las rotaciones espaciales y que los K^i y los P^i transforman como vectores bajo dichas rotaciones. Por su parte, los últimos tres conmutadores nos muestran como los J^i y los P^i conmutan con las traslaciones temporales y, por tanto, son cantidades conservadas. Además, se observa que los K^i no se conservan y por ello sus autovalores no representan estados físicos.

A partir del grupo de Poincaré pueden estudiarse sus representaciones tomando como espacio base los espacios de Hilbert adecuados (esto puede verse por ejemplo en [5]). No obstante, haremos algo similar más adelante tras introducir el álgebra de la supersimetría.

Antes de pasar a dicho álgebra vamos a ver el que posiblemente sea el teorema clave de la supersimetría, el teorema de Coleman-Mandula.

3.4. El teorema de Coleman-Mandula

A pesar del título de la sección no vamos a enunciar el teorema entero, ni mucho menos a demostrarlo. Lo que haremos será dar una idea intuitiva de lo que nos dice y de como la supersimetría nos sirve de “escape” para él. Además, al final de la sección, introduciremos la idea de superálgebra de Lie.

El teorema de Coleman-Mandula nos dice que, dado un grupo de simetría \mathcal{G} de un sistema y suponiendo que se cumplen ciertas condiciones, como la invarianza Lorentz o que el número de partículas sea finito, entonces se tiene que el grupo de simetría es isomorfo al producto diecto del grupo de Poincaré y las simetrías internas.⁷

PHYSICAL REVIEW VOLUME 159, NUMBER 5 25 JULY 1967

All Possible Symmetries of the S Matrix*

SIDNEY COLEMAN AND JEFFREY MANDULA
Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts
(Received 16 March 1967)

We prove a new theorem on the impossibility of combining space-time and internal symmetries in any but a trivial way. The theorem is an improvement on known results in that it is applicable to infinite-parameter groups, instead of just to Lie groups. This improvement is gained by using information about the S matrix; previous investigations used only information about the single-particle spectrum. We define a symmetry group of the S matrix as a group of unitary operators which turn one-particle states into one-particle states, transform many-particle states as if they were tensor products, and commute with the S matrix. Let G be a connected symmetry group of the S matrix, and let the following five conditions hold: (1) G contains a subgroup locally isomorphic to the Poincaré group. (2) For any $M > 0$, there are only a finite number of one-particle states with mass less than M . (3) Elastic scattering amplitudes are analytic functions of s and t , in some neighborhood of the physical region. (4) The S matrix is nontrivial in the sense that any two one-particle momentum eigenstates scatter (into something), except perhaps at isolated values of s . (5) The generators of G , written as integral operators in momentum space, have distributions for their kernels. Then, we show that G is necessarily locally isomorphic to the direct product of an internal symmetry group and the Poincaré group.

I. INTRODUCTION

UNTIL a few years ago, most physicists believed that the exact or approximate symmetry groups of the world were (locally) isomorphic to direct products of the Poincaré group and compact Lie groups. This world-view changed drastically with the publication of the first papers on $SU(6)$; these raised the dazzling possibility of a relativistic symmetry group which was not simply such a direct product. Unfortunately, all attempts to find such a group came to disastrous ends, and the situation was finally settled by the discovery of a set of theorems¹ which showed that, for a wide class of Lie groups, any group which contained the Poincaré group and admitted supermultiplets containing finite numbers of particles was necessarily a direct product.

However, although these theorems served their polemic purposes, they are in many ways displeasing: Their statements involve many unnatural and artificial assumptions, typically concerning the normality of the translation subgroup. Even worse, they are restricted to Lie groups—this despite the fact that infinite-parameter groups have been proposed in the literature. The theories based on these groups were destroyed not by general theorems but by particular arguments. Typically, these arguments showed that these groups do not allow scattering except in the forward and backward directions.² Thus, if one accepts the usual dogma on the analyticity of scattering amplitudes, they allow no scattering at all.

The purpose of this paper is to tie up these loose ends. We prove the following theorem: Let G be a connected

symmetry group of the S matrix, which contains the Poincaré group and which puts a finite number of particles in a supermultiplet. Let the S matrix be nontrivial and let elastic scattering amplitudes be analytic functions of s and t in some neighborhood of the physical region. Finally, let the generators of G be representable as integral operators in momentum space, with kernels that are distributions. Then G is locally isomorphic to the direct product of the Poincaré group and an internal symmetry group. (This is a loose statement of the theorem; a more precise one follows below.)

We believe that all of the assumptions in this theorem are physical, except for the last one, which, although weak, is ugly. We hope that it can be eliminated with sufficiently careful analysis; to date we have been unable to do so.

We emphasize that our theorem has application only to groups which are symmetries of the S matrix. Therefore it has nothing to say about symmetry groups arising from the saturation of current commutators; these groups generate symmetries of form factors only.

The remainder of this section contains a precise statement of the theorem and some remarks about its implications. Section II contains the proof. Although at times this attains mathematical levels of obscurity, we make no claim for corresponding standards of rigor.

A. Statement of the Theorem

We begin by briefly reviewing some of the fundamental definitions of scattering theory. The Hilbert space of scattering theory, \mathfrak{H} , is an infinite direct sum of subspaces,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(0)} \oplus \mathfrak{H}^{(1)} \oplus \mathfrak{H}^{(2)} \oplus \dots \quad (1)$$

$\mathfrak{H}^{(n)}$ is called the n -particle subspace. It is a subspace (determined by the generalized exclusion principle) of the direct product of n Hilbert spaces, each isomorphic to $\mathfrak{H}^{(1)}$. The S matrix S is a unitary operator on \mathfrak{H} . A unitary operator U on \mathfrak{H} is said to be a *symmetry*

* Work supported in part by the U. S. Air Force Office of Scientific Research under Contract AF49(687)-1380.

† Alfred P. Sloan Research Fellow.

‡ National Science Foundation Postdoctoral Fellow.

§ B. Sakita, Phys. Rev. 136, B1726 (1964); F. Giesey and L. Radicati, Phys. Rev. Letters 13, 299 (1964).

|| S. Coleman, Phys. Rev. 138, B1252 (1965); S. Weinberg, *ibid.* 139, B397 (1965); L. Michel and B. Sakita, Ann. Inst. Henri Poincaré 2, 197 (1965).

** T. F. Jordan, Phys. Rev. 140, B766 (1965).

Figura 2: Paper original del teorema de Coleman-Mandula publicado en 1967

⁷El teorema completo y su demostración se pueden encontrar en [4].

La forma de escapar de este teorema, o de evitar que se cumpla, es relajar alguna de las condiciones que se imponen. Dos de los escapes son la invarianza conforme y la supersimetría. En este trabajo no hablaré del primero (puede encontrarse brevemente en [10]), sin embargo, veamos ahora alguna pincelada del segundo.

Lo que ocurre en la supersimetría es que ya no tenemos álgebras de Lie sino superálgebras de Lie, es decir, sus generalizaciones. Una superálgebra de Lie es un álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada generada sobre un cuerpo de característica 0. La graduación lo que nos hace es separar los bosones de los fermiones (hablando en términos de partículas) identificando unos con los elementos pares y los otros con los impares. El producto de una superálgebra de Lie se conoce como supercorchete de Lie y cumple lo siguiente:

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]. \quad (3.73)$$

$$(-1)^{|z||x|}[x[y, z]] + (-1)^{|x||y|}[y[z, x]] + (-1)^{|y||z|}[z[x, y]] = 0. \quad (3.74)$$

Donde $|x|$ denota el grado del elemento (0 o 1). Otra forma sencilla de entender lo que es una superálgebra es la que se usa en [10]. En dicho documento se define como un álgebra que incluye tanto conmutación como anticonmutación.

Lo natural ahora es preguntarse si existe algún teorema similar al de Coleman-Mandula que incluya también a la supersimetría y demás escapatorias. La respuesta es sí, éste se conoce como el teorema de Haag–Łopuszański–Sohnius. A pesar de que no vamos a entrar en detalles sobre este teorema es importante comentar que el mismo permite la interacción de la simetría espacio-temporal con la simetría interna (algo prohibido según Coleman-Mandula).

Hasta ahora hemos visto la estructura algebraica del grupo de Lorentz y del grupo de Poincaré. En la siguiente sección haremos esto mismo pero para el caso que de verdad nos ocupa, es decir, veremos el álgebra de la supersimetría.

3.5. El álgebra de la supersimetría

Ya hemos visto que para la supersimetría tenemos un escenario algo distinto al de otras teorías ya que no se cumple el teorema de Coleman-Mandula. Como ya hemos comentado lo más

importante es que, debido a la graduación del álgebra, tenemos tanto relaciones de conmutación como de anticonmutación. En esta sección veremos el caso de supersimetría $\mathcal{N} = 1$, la más sencilla, no obstante al final de la misma se expondrá la forma que tomarían las relaciones si se considera un $\mathcal{N} > 1$.⁸

Lo primero que debemos comentar es que, en las teorías supersimétricas, nos encontramos con una carga conservada más. Dicha carga se denomina supercarga (como en el capítulo 1) y en nuestro caso es un espinor de Weyl levógiro; la denotamos como Q_α y su conjugada como $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$.

Veamos ahora las relaciones de conmutación, y de anticonmutación, que nos definen el álgebra. La primera que se expondrá es la existente entre la supercarga Q_α y su conjugada $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Esta viene descrita por el siguiente anticonmutador:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu. \quad (3.75)$$

Recordando la relación de anticonmutación para Q y Q^\dagger que habíamos visto en el capítulo 1 podemos observar que es posible recuperar la ecuación (2.1). Para ello nos restringimos a una dimensión, es decir, nos quedamos con $P_0 = H$; de este modo vemos que H es igual a la mitad del anticonmutador, es decir, recuperamos la ecuación (2.1).

Además tenemos los conmutadores que nos indican que las supercargas transforman de manera adecuada bajo transformaciones de Lorentz, es decir, transforman como fermiones de Weyl. Dichos conmutadores vienen descritos en la siguiente expresión:

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad [M^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}. \quad (3.76)$$

Por último tenemos dos relaciones que se anulan. Estas son las siguientes:

$$[Q_\alpha, P^\mu] = \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0. \quad (3.77)$$

Para ver que el primer término es 0 necesitamos usar la identidad de Jacobi. Supongamos que $[Q_\alpha, P^\mu] = c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ y veamos que, necesariamente, $c=0$.⁹ La identidad de Jacobi nos dice lo

⁸La \mathcal{N} simplemente representa el número de supercargas que tenemos en nuestra teoría.

⁹El hecho de escoger esta forma para c es porque los índices se conservan, es decir, en una igualdad los dos términos han de tener los mismos índices libres.

siguiente:

$$[P^\mu, [P^\nu, Q_\alpha]] + [P^\nu, [Q_\alpha, P^\mu]] + [Q_\alpha, [P^\mu, P^\nu]] = 0. \quad (3.78)$$

En la sección dedicada al grupo de Poincaré ya hemos visto que $[P^\mu, P^\nu] = 0$ y, por tanto, el último término se anula. Tomando ahora $[Q_\alpha, P^\mu] = c(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ y su término correspondiente para el conmutador $[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P^\mu]$ obtenemos lo siguiente:

$$|c|^2 (\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_{\alpha}{}^{\beta} Q_\beta = 0 \implies c = 0. \quad (3.79)$$

Para ver que el anticonmutador de las supercargas es 0 vamos a tratar de explicar como sería el álgebra cuando tenemos más de supercarga, es decir, en los casos en los que $\mathcal{N} > 1$. Las relaciones son las mismas con la salvedad de que se añade un índice extra para indicar que carga tratamos. Nos queda por tanto:

$$[P^\mu, Q_\alpha^I] = 0, \quad [P^\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I] = 0. \quad (3.80)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha^I] = (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} Q_\beta^I, \quad [M^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}I}. \quad (3.81)$$

$$\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta^{IJ}; \quad I, J = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (3.82)$$

Como vemos, se mantienen todas igual salvo por los índices I, J . Sin embargo, ahora tenemos la siguiente relación de anticonmutación:

$$\{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (Z^\dagger)^{IJ}. \quad (3.83)$$

Donde $Z^{IJ} = -Z^{JI}$ se conoce como la carga central y conmuta con todos los generadores del álgebra. En el caso más simple de supersimetría extendida, es decir, $\mathcal{N} = 2$ tenemos una sola carga central $Z = Z^{12}$.

Destacar que desde el punto de vista algebraico no hay límite para \mathcal{N} . Sin embargo incrementar \mathcal{N} se traduce en un incremento del spin de las partículas de la teoría. En teorías de campos sin gravedad el spin máximo es 1, lo que se corresponde con $\mathcal{N} = 4$. En teorías de campos con la gravedad incluida el spin máximo es 2; esto se corresponde con $\mathcal{N} = 8$. Por tanto tenemos que $\mathcal{N} \leq 4$ cuando no se incluye la gravedad y $\mathcal{N} \leq 8$ cuando sí se hace.

Las simetrías internas conmutan con la supercarga Q_α . No obstante es posible encontrar una excepción, la simetría R . Esta simetría no es más que una simetría interna $U(1)$ la cual admiten ciertas teorías. Matematicamente actúa según:

$$Q_\alpha \mapsto e^{-i\lambda} Q_\alpha, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \mapsto e^{i\lambda} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}. \quad (3.84)$$

Usualmente esta simetría se denota como $U(1)_R$ y sus generadores se denotan como R . Dado que la simetría R no conmuta con la supercarga veamos ahora cuales son sus relaciones de conmutación:

$$[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha, \quad [R, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}. \quad (3.85)$$

La simetría R descrita anteriormente es válida para $\mathcal{N} = 1$. En el caso $\mathcal{N} = 2$ el grupo de simetría R es: $U(2)_R \cong U(1)_R \times SU(2)_R$. Para \mathcal{N} mayores aparecen otros grupos de simetría más complejos.

Por tanto el álgebra de la supersimetría se compone de las relaciones del álgebra de Poincaré junto con el álgebra de las supercargas y la simetría R . Como propiedad básica de todo esto podemos comprobar que la energía es positiva. Para ello hagamos lo siguiente:

$$\langle \phi | \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} | \phi \rangle = \langle \phi | (Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha) | \phi \rangle = \left| (Q_\alpha)^\dagger | \phi \rangle \right|^2 + |Q_\alpha | \phi \rangle|^2 \geq 0. \quad (3.86)$$

Usando que $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu$ tenemos lo siguiente:

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \langle \phi | P_\mu | \phi \rangle \geq 0. \quad (3.87)$$

Tomando $\dot{\alpha} = \alpha$, sumando sobre ella y aplicando las propiedades de las matrices σ se llega a la conclusión de que la energía en supersimetría es definida positiva: $\langle \phi | P_0 | \phi \rangle \geq 0$. Esta curiosidad recuerda bastante a lo que ocurre cuando se estudia cosmología.¹⁰ En ese caso, la energía del vacío tiene contribución en forma de constante cosmológica. Sin embargo, en otro tipo de teorías físicas no nos preocupamos por estas cosas ya que si tenemos una energía E y le añadimos una constante arbitraria, entonces, la física de nuestro problema quedará intacta. En las teorías de supersimetría tiene gran importancia la energía del “ground state”. Si esta es 0

¹⁰De hecho hay un teorema de Witten que prueba la positividad de la energía mediante argumentos de supersimetría.

significa que la supersimetría es exacta mientras que, si la energía de dicho estado es distinta de 0 la supersimetría está rota.

Como colofón de esta sección vamos a tratar de comentar que ocurre si intentamos hacer la supersimetría una simetría local. En la sección en la que se vieron los lagrangianos se comentó que si uno trataba de hacer que la transformación dada por la exponencial actuase de manera local entonces aparecerían derivadas extra que debían compensarse. De este modo partiendo del lagrangiano de Dirac, uno podía llegar al lagrangiano de la electrodinámica cuántica. Con la supersimetría realmente ocurre lo mismo. Uno puede tratar de estudiar que pasa si las transformaciones de supersimetría (como las que vimos en el capítulo 1) actúan de forma local, es decir, si dependen del punto x^μ . Si se hace esto, se encontrará que el grupo de simetría deja de ser el grupo de Poincaré y pasa ser el grupo de las transformaciones generales de coordenadas, es decir, el mismo que se obtiene en la relatividad general. Por tanto uno intuye que se encuentra ante una teoría de gravedad. Este tipo de teorías se conocen como teorías de supergravedad. Una introducción a las mismas puede verse en [12].¹¹

Lo siguiente que veremos es cómo actúa la supercarga sobre los distintos estados (bosónicos o fermiónicos) y las representaciones del álgebra.

3.6. Actuación de la supercarga como operador y representaciones del grupo de Poincaré

Cuando se explica la supersimetría a nivel divulgativo lo primero que se suele decir es que su actuación multiplica el número de partículas ya que añade a cada una su correspondiente supercompañero. Dicho supercompañero es del tipo contrario al de la partícula original, es decir, si la partícula inicial es un bosón el supercompañero será un fermión y viceversa. Esto en términos de la supercarga lo expresamos del siguiente modo¹²:

$$Q|F\rangle = |B\rangle, \quad Q|B\rangle = |F\rangle. \quad (3.88)$$

¹¹Entrar en este tipo de descripciones se escapa totalmente del nivel pretendido en este trabajo. Por ello solo se comenta de forma superficial y se indica un libro de referencia.

¹²Esto es necesario ya que Q es un espinor.

Donde $|F\rangle$ y $|B\rangle$ representan estados fermiónicos y bosónicos respectivamente. Una característica importante de las representaciones del álgebra de supersimetría es la igualdad en el número de bosones y fermiones o, dicho de otro modo, en todas las representaciones del álgebra de supersimetría tenemos igual número de estados bosónicos que fermiónicos. En base a esto definimos el operador **número fermiónico** al cual denotamos como $(-1)^F$. Su actuación viene descrita por las siguientes expresiones:

$$(-1)^F |B\rangle = |B\rangle \quad (-1)^F |F\rangle = -|F\rangle. \quad (3.89)$$

Usando como actúa Q_α sobre los estados llegamos a lo siguiente:

$$(-1)^F Q_\alpha = -Q_\alpha (-1)^F \implies \{(-1)^F, Q_\alpha\} = 0. \quad (3.90)$$

Podemos calcular lo siguiente:

$$\text{Tr}[(-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}] = \text{Tr}[(-1)^F Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}} + (-1)^F \bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha]. \quad (3.91)$$

Aplicando la ecuación (3.90) tenemos:

$$\text{Tr}[(-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}] = \text{Tr}[-Q_\alpha (-1)^F \bar{Q}_{\dot{\alpha}} + (-1)^F \bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha]. \quad (3.92)$$

Aplicamos ahora la ciclicidad de la traza junto con: $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ y llegamos a:

$$\text{Tr}[(-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}] = 0. \quad (3.93)$$

Teniendo en cuenta la relación del álgebra de la supersimetría que nos dice que: $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu$ obtenemos:

$$2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \text{Tr}[(-1)^F P_\mu] = 0 \implies \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \text{Tr}[(-1)^F P_\mu] = 0. \quad (3.94)$$

La traza del operador número fermiónico solo nos da la diferencia entre el número de estados bosónicos y el número de estados fermiónicos de la representación. Si elegimos los estados de modo que sean autoestados del momento la expresión anterior se reduce a lo siguiente:

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu p_\mu \text{Tr}(-1)^F = 0 \implies \text{Tr}(-1)^F = n_B - n_F = 0. \quad (3.95)$$

siendo p_μ el autoestado del estado sobre el que actúa el operador momento. A la traza del operador $(-1)^F$ se le denomina **índice de Witten**.

Hasta ahora hemos dicho que el número de estados bosónicos y de estados fermiónicos de nuestra teoría era (o debía ser) siempre el mismo. No obstante ya hemos visto en el capítulo 1 un caso donde todos los estados estaban emparejados (había uno fermiónico y uno bosónico con la misma energía) menos uno, el “ground state”. Esto es debido a que, para estados con energía 0, Q_α o $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ pueden aniquilar dichos estados dando lugar al desapareamiento.¹³

El estudio de las representaciones de las diferentes partículas lo dividiremos en dos partes: una dedicada a aquellas partículas que no tienen masa (como el fotón) y otra parte dedicada a partículas masivas. Antes de ponernos totalmente con ello vamos a hacer un pequeño prefacio de matemáticas.

Trabajaremos con el álgebra $so(3) \cong su(2)$, la cual viene definida por la siguiente relación de conmutación ya vista:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (3.96)$$

Las representaciones irreducibles viene etiquetadas por los autovalores de sus operadores de Casimir, es decir, de los autovalores de aquellos operadores que conmutan con todos los generadores del álgebra. En el caso que estamos estudiando el Casimir que nos interesa es el siguiente:

$$C = \sum_{i=1}^3 J_i^2 \quad (3.97)$$

El autovalor en este caso es $2j + 1$. Un hecho importante es que **las partículas transforman como representaciones irreducibles del grupo de Poincaré** y, como acabamos de explicar, estas se encuentran caracterizadas por operadores de Casimir. Para el grupo de Poincaré los operadores de Casimir son los siguientes:

$$C_1 = P_\mu P^\mu = m^2, \quad C_2 = W_\mu W^\mu. \quad (3.98)$$

No vamos a comprobar que, efectivamente, C_1 y C_2 conmutan con los generadores del álgebra. No obstante, puede encontrarse el cálculo en [7]. El vector W^μ se denomina **vector de Pauli-Lubanski** y tiene la siguiente expresión:

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\sigma\rho}. \quad (3.99)$$

¹³Esto último puede consultarse, además de en las notas de Tong [11], en [2].

Dicho vector se define a partir del momento angular y se usa para describir esta cantidad en teorías cuánticas de campos relativistas. Como apunte indicar que en algunos textos esta cantidad se conoce como pseudovector de Pauli-Lubanski.

Pasemos ahora a ver las representaciones de las partículas. En primer lugar estudiaremos las partículas sin masa.

3.7. Supermultipletes de partículas sin masa

Un detalle importante es que las partículas sin masa poseen grados de libertad internos, como la polarización del fotón. Lo que está ocurriendo es que la transformación CPT (carga, paridad e inversión temporal) nos modifica la helicidad de la partícula.¹⁴ Por ejemplo, si nuestra partícula tiene $h = \frac{1}{2}$, bajo la transformación de CPT tendrá $h = -\frac{1}{2}$. De aquí podemos concluir que los estados para partículas sin masa vienen en parejas uno con momento p_μ y helicidad h y otro con el mismo momento pero helicidad contraria. Destacar que esto en escalares $h = 0$ no se cumple ya que $-h = 0$.

El estudio de los multipletes podría hacerse a través de los operadores de Casimir, no obstante en este documento vamos a optar por un desarrollo más sencillo siguiendo lo expuesto en [10]. Para ello consideramos un estado $|p_\mu, h\rangle$ correspondiente a una partícula sin masa de helicidad h . Podemos elegir un sistema donde $p_\mu = E(1, 0, 0, 1)$. De este modo la relación de anticonmutación de las cargas toma la siguiente expresión:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

Si consideramos el caso general en el que podemos estar en una teoría de supersimetría extendida la expresión anterior se convierte en:

$$\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} = 4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\beta}} \delta^{IJ}. \quad (3.101)$$

¹⁴En el caso de partículas sin masa los dos operadores de Casimir se hacen 0. Si nos restringimos al caso en el que $P^\mu = E(1,0,0,1)$ tenemos que $W^\mu = M_{12}P^\mu$ y la constante de proporcionalidad entre W y P viene dada por el autovalor de la rotación $U(1)$ en el (x^1, x^2) -plano. Dicho autovalor es lo que conocemos como helicidad.

De lo anterior tenemos que, en particular, $\{Q_2, \bar{Q}_2\} = 0$. Aplicando la condición de la positividad de la energía, y denotando $|p_\mu, h\rangle$ como $|\phi\rangle$, deducimos:

$$0 = \langle \phi | \{Q_2, \bar{Q}_2\} | \phi \rangle = |Q_2 |\phi\rangle|^2 + |\bar{Q}_2 |\phi\rangle|^2 \implies Q_2 |\phi\rangle = \bar{Q}_2 |\phi\rangle = 0. \quad (3.102)$$

Por tanto hemos encontrado que tanto Q_2 como \bar{Q}_2 aniquilan el estado. Esto nos reduce el número de generadores fermiónicos de $2\mathcal{N}$ a \mathcal{N} . Al igual que hemos hecho en el capítulo 1 podemos reescalar estos operadores para crear operadores de creación y destrucción. Su expresión es la siguiente:

$$a = \frac{Q_1}{\sqrt{4E}}, \quad a^\dagger = \frac{\bar{Q}_1}{\sqrt{4E}}. \quad (3.103)$$

Cuyas relaciones de anticonmutación son las siguientes:

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0. \quad (3.104)$$

La representación de este álgebra consiste en dos estados, $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de modo que $a|0\rangle = 0$ y $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$.

En el caso de encontrar en supersimetría extendida estos operadores tendrían un subíndice extra y la primera relación de anticonmutación sería igual a δ^{IJ} .

Lo siguiente que hacemos es escoger un “estado del vacío”, es decir, un estado que sea aniquilado por a . Tal estado lleva asociado alguna representación irreducible del álgebra de Poincaré. Denotemos este estado como $|\lambda_0\rangle$. A partir de los conmutadores de la supercarga con el operador de helicidad $J_3 = M^{12}$ es posible comprobar que Q_1 aumenta la helicidad en $1/2$ mientras que \bar{Q}_1 la disminuye en la misma cantidad. Para comprobar esto solo hay que ver dichos conmutadores¹⁵:

$$[M^{12}, Q_1] = \frac{1}{2}Q_1, \quad [M^{12}, \bar{Q}_1] = \frac{1}{2}\bar{Q}_1 \implies [M^{12}, \bar{Q}_1] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_1. \quad (3.105)$$

¹⁵La forma de comprobar esto detalladamente es tomar el conmutador de $M^{\mu\nu}$ y Q_α y restringir los índices a los valores que tenemos. De este modo obtenemos que el conmutador nos da $\frac{1}{2} \text{diag}(1-1)$ y, de aquí, obtenemos el hecho de que el Q_1 aumente la helicidad $1/2$ y el \bar{Q}_1 la disminuya la misma cantidad.

Al igual que antes, si consideramos supersimetría extendida, habría que añadir los índices extra que identifican a la supercarga. Comentar también que no podemos actuar con a^\dagger más de una vez sobre un mismo estado porque, debido al álgebra, $(a^\dagger)^2 = 0$. En el caso de supersimetría extendida podemos actuar varias veces con a_J^\dagger siempre que el subíndice I no se repita.

Debido a la antisimetría de los índices indicadores de la supercarga I y J tenemos $\binom{N}{k}$ estados con helicidad $h = \lambda_0 + \frac{k}{2}$ para $k = 0, 1, \dots, N$. Esto nos da un total de 2^N estados bosónicos (helicidad entera) y 2^N estados fermiónicos (helicidad semientera)¹⁶. Como curiosidad destacar que, salvo en el caso $\lambda_0 = \frac{-N}{4}$, las helicidades no se distribuyen simétricamente respecto del 0. Los multipletes no son invariantes bajo las transformaciones de CPT debido a que estas cambian el signo de la helicidad. Para satisfacer la CPT se deben doblar dichos multipletes añadiendo sus conjugados CPT con helicidades opuestas.

Por ejemplo para $N = 1$, es decir, para supersimetría sin extender, cada supermultiplete de partículas sin masa uno se encuentra ante los siguientes casos en función del valor de λ_0 :

- $\lambda_0 = 0$: Tenemos el **multiplete quiral**, el cual contiene a: $\{0, \frac{1}{2}\}$ y su CPT conjugado, es decir, $\{\frac{-1}{2}, 0\}$. Por tanto tenemos un espinor de Weyl junto con un escalar complejo.
- $\lambda_0 = \frac{1}{2}$: Tenemos el **multiplete vector**, el cual contiene a: $\{\frac{1}{2}, 1\}$ y su conjugado CPT $\{-1, \frac{-1}{2}\}$, es decir, esta compuesto por un bosón gauge (vector sin masa) y un espinor de Weyl.
- $\lambda_0 = 1$: Tenemos el **multiplete del gravitino**, el cual contiene a: $\{1, \frac{3}{2}\}$ y su conjugado CPT $\{\frac{-3}{2}, -1\}$, es decir, tenemos el gravitino y un bosón gauge.
- $\lambda_0 = \frac{3}{2}$: Tenemos el **multiplete del gravitón**, consistente en $\{\frac{3}{2}, 2\}$ y su conjugado CPT $\{-2, \frac{-3}{2}\}$, es decir, tenemos el gravitino y el gravitón.

El gravitino solo puede aparecer en teorías con gravedad por lo que, si nuestra teoría no la incluye, no tendríamos los dos últimos casos. Además, como no queremos helicidades mayores

¹⁶Ya hemos visto que el número de estados fermiónicos y bosónicos debía ser el mismo.

que dos paramos aquí el desarrollo. El desarrollo que acabamos de ver está hecho para el caso $\mathcal{N} = 1$. Veamos ahora que ocurre en $\mathcal{N} = 2, 4$.

Para $\mathcal{N} = 2$ el supermultiplete contiene $\{\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{2}, \lambda_0 + \frac{1}{2}, \lambda_0 + 1\}$ y sus conjugados CPT. Además, debemos recordar que la helicidad no puede ser mayor que 1. Los distintos supermultipletes que nos encontramos son:

- $\lambda_0 = 0$: Tenemos el **multiplete vector para $\mathcal{N} = 2$** , el cual contiene a: $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$, y su conjugado CPT: $\{-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\}$; es decir, contiene dos fermiones de Weyl, un escalar complejo y un vector gauge. Notar que este supermultiplete está compuesto por un multiplete quirral de $\mathcal{N} = 1$ y un multiplete vector de $\mathcal{N} = 1$.
- $\lambda_0 = \frac{1}{2}$: Tenemos el siguiente **hipermultiplete** el cual contiene a: $2 \times \{\frac{-1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\}$. Está formado por dos multipletes quirales, es decir, dos escalares complejos y un fermión de Dirac.

Por último, para $\mathcal{N} = 4$ obtenemos un solo multiplete (teniendo en cuenta de nuevo que la helicidad no puede ser mayor que 1). Este multiplete y su CPT conjugado lo escribimos como: $\{-1, 4 \times \frac{-1}{2}, 6 \times 0, 4 \times \frac{1}{2}\}$. Es decir, contiene 4 fermiones de Weyl y 3 escalares complejos. Notar que podemos escribir este multiplete como la unión del multiplete vector para $\mathcal{N} = 2$ y el hipermultiplete para $\mathcal{N} = 2$.

Una vez hemos visto como son los multipletes de las partículas sin masa nos encontramos ya en disposición de estudiar los de las partículas masivas. La razón subyacente a este orden de exposición es que los multipletes de partículas masivas son algo más complicados de entender.

3.8. Supermultipletes de partículas masivas

Para el caso de las partículas masivas tomamos el sistema de referencia de la partícula en el que $p_\mu = (m, 0, 0, 0)$. Sobre él, el álgebra de la supersimetría toma la siguiente forma:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu = 2m\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^0 = 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

Procediendo del mismo modo que en la sección anterior reescalamos los operadores Q_1 y Q_2 para obtener operadores de creación y destrucción definidos del siguiente modo:

$$a_\alpha = \frac{Q_\alpha}{\sqrt{2m}}, \quad a_\alpha^\dagger = \frac{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}}{\sqrt{2m}}. \quad (3.107)$$

Los operadores a_α y a_α^\dagger siguen el siguiente álgebra:

$$\{a_\alpha, a_\alpha^\dagger\} = \delta_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \{a_\alpha, a_\beta\} = 0, \quad \{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = 0. \quad (3.108)$$

Si empezamos con un estado $|\lambda\rangle$ con spin j , entonces nuestro supermultiplete contendrá dos partículas de spin j , una de spin $j - \frac{1}{2}$ y una de spin $j + \frac{1}{2}$ (en el caso de $\mathcal{N} = 1$). Notar que se cumple el hecho de que el número de estados bosónicos es igual al de estados fermiónicos o, dicho de otra manera, la degeneración de la partícula de spin j es igual a la de las otras dos partículas juntas.

Vamos a ver ahora algunos de estos supermultipletes.

- $j = 0$: Nos encontramos con el siguiente supermultiplete: $\{ \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2} \}$, es decir, tenemos un escalar complejo y un espinor de Weyl. El contenido es el mismo que el del supermultiplete quiral estudiado en la sección anterior con la diferencia de que aquí las partículas son masivas.
- $j = \frac{1}{2}$: Nos encontramos con el siguiente supermultiplete: $\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \}$, es decir, tenemos un escalar masivo, una partícula masiva de spin 1 y dos espinores de Weyl masivos. El contenido obtenido es el equivalente al de un supermultiplete gauge y un supermultiplete quiral, ambos de partículas sin masa. La explicación a este hecho es que, en teoría cuántica de campos, para que un bosón obtenga masa es necesario que “coma” un escalar (la partícula de spin 0 que nos aparece en el supermultiplete).

En este caso no se entrará en la forma de los supermutipletes cuando estamos en $\mathcal{N} > 1$; simplemente comentar que para $\mathcal{N} = 2$ tenemos 16 estados cuyos spines van de -1 a 1 y para $\mathcal{N} = 4$ tenemos ya 256 estados con spin desde -2 hasta +2.

Ya que este capítulo se titula teorías de campos supersimétricas, y lo único que hemos hecho hasta ahora ha sido ir a través del álgebra y las representaciones, vamos a terminar el trabajo con una sección dedicada a ver alguna acción supersimétrica.

3.9. Algunas acciones supersimétricas

La primera acción que vamos a estudiar es **la acción del multiplete quirral**, también llamada **acción de Wess-Zumino**. Ésta tiene la siguiente expresión:

$$S = \int d^4x \left[\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - i\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \left| \frac{\partial W}{\partial \phi} \right|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \psi \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial \phi^{\dagger 2}} \bar{\psi} \bar{\psi} \right]. \quad (3.109)$$

En ella nos encontramos con un escalar complejo ϕ y un fermión de Weyl ψ . Vemos que la acción tiene dos términos cinéticos (uno para cada campo) y que, en lugar de tener un potencial, tiene una función W . Esta función se conoce como superpotencial. Su relación con el potencial escalar es la siguiente:

$$V(\phi) = |W'(\phi)|^2. \quad (3.110)$$

El potencial escalar que tenemos en este caso es el siguiente: $V(\phi) = |m\phi + \lambda\phi^2|^2$. Este procede de un superpotencial adecuado para que la teoría sea renormalizable.¹⁷

En la acción descrita por la ecuación (3.109) ϕ y ψ tienen la misma masa $|m|$.¹⁸

Por último comentar que es posible ver que esta acción es invariante bajo las siguientes transformaciones de supersimetría (al igual que hicimos explícitamente en el capítulo 1):

$$\delta\phi = \sqrt{2}\epsilon\psi, \quad \delta\psi_\alpha = \sqrt{2}i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi - \sqrt{2}\epsilon_\alpha \frac{\partial W^\dagger}{\partial \phi^\dagger}. \quad (3.111)$$

¹⁷La renormalización consiste en un conjunto de técnicas usadas para obtener términos finitos dentro de un desarrollo perturbativo. Su importancia en teoría cuántica de campos se debe a que ciertas magnitudes se calculan mediante desarrollos en serie de potencias que pueden tener términos divergentes a altas energías. Mediante la renormalización uno intenta “eliminar” dichos infinitos. En este caso el superpotencial no puede ser de mayor grado que cúbico o la teoría no sería renormalizable.

¹⁸La masa del campo escalar la obtenemos del término cuadrático del potencial escalar y la masa del fermión la obtenemos del término cuadrático en los fermiones que nos aparece en la acción.

Una de las teorías mas exitosas de los últimos tiempos es la electrodinámica cuántica. Esta no es más que la teoría cuántica de campos que explica los fenómenos de interacción entre partículas cargadas debido a la fuerza electromagnética. En unas pocas líneas veremos su acción supersimetrizada. Para ello es necesario introducir una acción a la cual llamaremos **la acción supersimétrica de Maxwell**, la cual se corresponde con el multiplete vectorial, y la denotaremos como $S_{Maxwell}$. Su expresión es la siguiente:

$$S_{Maxwell} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu} - \frac{i}{e^2} \lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} + \frac{1}{2e^2} D^2 \right]. \quad (3.112)$$

El término $F_{\mu\nu}$ se define del siguiente modo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.113)$$

Además, λ es un fermión denominado gaugino o fotino, D es un campo real auxiliar¹⁹, e^2 es la constante de acoplo y ${}^*F^{\mu\nu}$ es lo siguiente:

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (3.114)$$

Además, en la acción tenemos también un campo gauge $U(1)$. El parámetro θ que aparece en la acción se conoce como ángulo theta y clasicamente no tiene ninguna función. Sin embargo, en la teoría cuántica, estos términos pueden modificar la dinámica del sistema.

Las variaciones de supersimetría para esta acción son las siguientes:

$$\delta A_\mu = \epsilon \sigma^\mu \bar{\lambda} + \lambda \sigma^\mu \bar{\epsilon}. \quad (3.115)$$

$$\delta \lambda = \epsilon D + (\sigma^{\mu\nu} \epsilon) F_{\mu\nu}. \quad (3.116)$$

$$\delta D = i\epsilon \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} - i\partial_\mu \lambda \bar{\sigma}^\mu \bar{\epsilon}. \quad (3.117)$$

Si tratamos de combinar el campo gauge $U(1)$ interaccionando con $2N$ ²⁰ multipletes quirales llegamos a **la acción de la electrodinámica cuántica supersimétrica**; la cual denotamos

¹⁹Con campo auxiliar nos referimos a que es un campo sin dinámica.

²⁰El hecho de que sean $2N$ se debe a que el campo gauge interactua con N sabores donde por sabor entendemos al par ϕ y $\tilde{\phi}$. Por tanto esa N pasa a ser $2N$ cuando hablamos de multipletes quirales. La necesidad de tener campos con carga positiva y negativa viene del hecho de que sin ellos no podemos cancelar las anomalías que surgen al considerar una teoría cuántica. Dichas cancelaciones se dan si imponemos los siguientes requerimientos sobre las cargas: $\sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^N q_i^3 = 0$.

como S_{SQED} . Tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
S_{SQED} = \int d^4x & \left[-\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} F_{\mu\nu} {}^* F^{\mu\nu} - \frac{i}{e^2} \lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} \right] \\
& + \sum_{i=1}^N \left(|\mathcal{D}_\mu \phi_i|^2 + |\mathcal{D}_\mu \tilde{\phi}_i|^2 - i \bar{\psi} \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_\mu \psi_i - i \tilde{\psi}_i \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{\psi} \right) \\
& - \sqrt{2} \sum_{i=1}^N \left(\phi_i^\dagger \lambda \psi_i - \tilde{\phi}_i^\dagger \lambda \tilde{\psi}_i \right) - \frac{e^2}{2} \left(\sum_{i=1}^N |\phi_i|^2 - |\tilde{\phi}_i|^2 \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

El campo ϕ lleva asociada la carga positiva $+1$ y el campo $\tilde{\phi}$ una carga -1 . Aunque ésta es una configuración que cancela las anomalías no es la única.

En la acción anterior \mathcal{D}_μ es la derivada covariante por la que se sustituye la derivada parcial al hacer una teoría gauge y ψ y $\tilde{\psi}$ son dos espinores que rotan con carga opuesta debido a la simetría $U(1)$. Lo demás tiene el mismo significado que en la acción supersimétrica de Maxwell. La derivada covariante tiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iq A_\mu \phi, \quad \mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi. \tag{3.119}$$

La última acción que veremos es **la acción de super Yang-Mills**. Esta se obtiene tomando el tensor intensidad de campo y la derivada covariante del siguiente modo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu], \quad \mathcal{D}_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - i[A_\mu, \lambda]. \tag{3.120}$$

Lo que se está haciendo para esta acción es considerar un campo gauge no abeliano. Es decir, se están tomando los generadores del álgebra de Lie del grupo gauge G del siguiente modo:

$$[T^A, T^B] = i f^{ABC} T^C, \tag{3.121}$$

siendo f^{ABC} las constantes de estructura. La acción de super Yang-Mills se denota como S_{SYM} y tiene la siguiente expresión:

$$S_{SYM} = \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{16\pi^2} F_{\mu\nu} {}^* F^{\mu\nu} - \frac{2i}{g^2} \lambda \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} + \frac{1}{g^2} D^2 \right]. \tag{3.122}$$

En ésta D es de nuevo un campo auxiliar, g^2 es la constante de acoplamiento y λ sigue siendo un fermión, usualmente conocido como gaugino o gluino.

En relación a los modelos supersimétricos podemos comentar los avances que se están tratando de llevar a cabo hoy en día en el ámbito de la física teórica. Hay un modelo propuesto llamado “Minimal Supersymmetric Standard Model” el cual da la ampliación mas sencilla que supersimetriza el Modelo Estándar actual. El principal inconveniente es que, aunque se ha intentando verificar este modelo en múltiples ocasiones en el LHC, aún no ha sido posible y hay quienes empiezan a dudar de él. Dicho modelo fue propuesto por primera vez en 1981 como una solución a un problema de jerarquía.²¹

²¹Un problema de jerarquía se da cuando el valor de algún parámetro fundamental de un Lagrangiano es muy diferente del medido experimentalmente. Usualmente esto ocurre debido a que la relación entre los parámetros medidos y los calculados viene dada por la renormalización y, durante ésta, pueden darse ciertas cancelaciones que afecten a su valor final.

4. Conclusiones y futuros pasos

En este trabajo se ha tratado de mostrar la importancia de la supersimetría y los cambios que se obtienen cuando se aplica a teorías conocidas. Para ello se ha empezado con la Mecánica Cuántica y se ha observado como salen a la luz resultados sorprendentes; hemos visto por ejemplo que el “ground state” del oscilador armónico tiene energía nula. Además se ha dado una pincelada de como funcionan las transformaciones de supersimetría y se ha comprobado como la acción que se propuso era, efectivamente, invariante bajo dichas transformaciones.

En el segundo capítulo del trabajo se ha hecho énfasis en el álgebra de la supersimetría, no sin antes pasar por toda la descripción necesaria de los grupos de Lorentz y Poincaré; a continuación se han estudiado los supermultipletes de partículas y se ha comprobado que el número de estados fermiónicos y bosónicos coincide. Por último se ha presentado la acción supersimétrica más sencilla posible, se han descrito sus términos y se han indicado las transformaciones de supersimetría que la dejan invariante.

Desgraciadamente no puedo entrar en el siguiente tema que me gustaría, el superespacio. A partir de él se podrían empezar a estudiar más acciones y llegar a conexiones entre esta teoría y ciertos entes geométricos. Además, de manera natural, uno podría tratar de volver la supersimetría una teoría local para llegar a la teoría de la supergravedad. Todo esto se llevaría a cabo en un hipotético futuro trabajo de fin de máster

Referencias

- [1] Andrés Viña Escalar. *Notas sobre geometría*.
- [2] Arthur Jaffe, Andrzej Lesniewski y Maciej Lewenstein. «Ground state structure in supersymmetric quantum mechanics». En: *Annals of Physics* 178.2 (1987), págs. 313-329.
- [3] Dr. Vadim Kaplunovsky. *Fermionic Algebra and Fock Space*. University of Texas.
- [4] Sascha Leonhardt. *Supersymmetry in Geometry and Quantum Physics. The Coleman-Mandula Theorem*. [Web; accedido el 24-06-2024]. URL: https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~walcher/teaching/sose16/geo_phys/ColemanMandula.pdf.
- [5] Michele Maggiore. *A modern introduction to quantum field theory*. Vol. 12. Oxford university press, 2005.
- [6] Kien Nguyen. *The Higgs Mechanism*. [Web; accedido el 10-07-2024]. URL: https://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey/teaching/archiv/sose_09/rng/higgs_mechanism.pdf.
- [7] Axel Pelster. *Poincaré Group*. [Web; accedido el 25-06-2024]. URL: <https://www-user.rhrk.uni-kl.de/~apelster/Vorlesungen/WS2021/v6.pdf>.
- [8] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [9] Vincent R. Siggia. «An Introduction to Supersymmetric Quantum Mechanics». Virginia Commonwealth University, 2019.
- [10] David Tong. *Supersymmetric Field Theory*.
- [11] David Tong. *Supersymmetric Quantum Mechanics*.
- [12] Julius Wess y Jonathan Bagger. *Supersymmetry and Supergravity: Revised Edition*. Vol. 25. Princeton university press, 2020.