



Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN FÍSICA - TRABAJO DE FIN DE GRADO

Introducción a la Teoría de Cuerdas

Autor: Pablo Gutiérrez Fernández

Tutor: Diego Rodríguez Gómez

13 de julio de 2024

Índice

Resumen	1
1. Introducción	2
2. Fundamentos	4
2.1. Relatividad especial	4
2.1.1. Transformaciones de Lorentz	6
2.1.2. Coordenadas de cono de luz	6
2.1.3. Partícula puntual relativista	8
2.2. Electromagnetismo y Gravitación	9
2.2.1. Electrodinámica relativista	9
2.2.2. Gravitación y longitud de Planck	11
2.3. Mecánica cuántica	12
2.3.1. Oscilador armónico cuántico	13
2.4. Teoría cuántica de campos	14
2.4.1. Campos de Maxwell	20
2.4.2. Campos gravitacionales	22
3. Cuerdas relativistas	24
3.1. Parametrización general	24
3.1.1. Superficies espaciales y espacio-temporales	24
3.1.2. Acción de Nambu-Goto	27
3.1.3. Ecuaciones del movimiento	27
3.2. Parametrización estática	30
3.2.1. Ecuaciones del movimiento	30
3.2.2. Movimiento general de una cuerda	33
3.3. Parametrización en cono de luz	38
3.3.1. Ecuaciones del movimiento	41
3.3.2. Soluciones a las ecuaciones del movimiento	43

4. Cuerdas cuánticas relativistas	49
4.1. Cuerdas abiertas	49
4.1.1. Cuantización de la cuerda abierta	50
4.1.2. Soluciones y relaciones de conmutación	51
4.1.3. Operadores de Virasoro	58
4.1.4. Invarianza Lorentz	67
4.1.5. Espacio de estados	70
4.2. Cuerdas cerradas	74
4.2.1. Soluciones y relaciones de conmutación	75
4.2.2. Operadores de Virasoro	78
4.2.3. Espacio de estados	82
5. Conclusiones	85
Referencias	87

Resumen

La teoría de cuerdas, una de las propuestas más ambiciosas de la física teórica contemporánea, busca unificar las fuerzas fundamentales de la naturaleza mediante la conceptualización de las partículas elementales como vibraciones de diminutas cuerdas unidimensionales. Este trabajo de fin de grado ofrece una introducción accesible a los principios fundamentales de la teoría de cuerdas partiendo desde los conceptos básicos necesarios para comprender esta teoría: relatividad especial, electromagnetismo, gravitación, mecánica cuántica y teoría cuántica de campos hasta los primeros desarrollos e implicaciones teóricas más significativas.

Introducimos la teoría de cuerdas a través del estudio de las superficies espacio-temporales que describen las trayectorias de las cuerdas, conocidas como hojas de mundo. Las ecuaciones del movimiento se derivan de la acción de Nambu-Goto, que se basa en la expresión del área de esta superficie. La parametrización de la hoja de mundo es fundamental para obtener versiones simplificadas de estas ecuaciones. Empezaremos por la parametrización estática que facilita el análisis de simetrías y la conservación de cantidades físicas, sin embargo, no captura adecuadamente la dinámica de la cuerda. Por eso, pasaremos a la parametrización de cono de luz que separa claramente las contribuciones espacio-temporales simplificando la interpretación de las ecuaciones del movimiento y ayudando con desarrollos posteriores.

De esta manera, exploramos la teoría de cuerdas en profundidad al introducir la teoría cuántica. Las variables clásicas se convierten en operadores con relaciones de conmutación no triviales lo que nos llevará a estudiar el álgebra de Virasoro, fundamental en la teoría de cuerdas, para obtener ecuaciones del movimiento explícitas. Al analizar las cantidades conservadas, descubriremos los resultados más significativos en los inicios de la teoría de cuerdas: la necesidad de un número específico de dimensiones ($D = 26$), y la corrección del espacio de estados de cuerdas abiertas y cerradas que incluirán estados equivalentes al fotón y al gravitón, respectivamente. Este logro representa un avance muy importante, ya que las fuerzas electromagnética y gravitatoria van a poder explicarse de manera unificada en una teoría que combina la cuántica y la relatividad, apareciendo de forma natural sin la necesidad de imponer condiciones adicionales propias de estas teorías.

1. Introducción

La teoría de cuerdas es uno de los desarrollos más intrigantes y complejos de la física teórica moderna. Surgió en la segunda mitad del siglo XX como un intento de unificar las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: la gravedad, el electromagnetismo, la interacción fuerte y la interacción débil. En lugar de tratar las partículas subatómicas como puntos sin dimensión, la teoría de cuerdas propone que estas partículas son en realidad cuerdas unidimensionales extremadamente pequeñas que vibran en diferentes modos. Estas vibraciones determinan las propiedades de las partículas, como su masa y carga.

El desarrollo de la teoría de cuerdas se puede rastrear hasta la década de 1960, en un contexto que inicialmente no parecía tener relación con la física de partículas. Gabriele Veneziano, un joven físico italiano, buscaba una fórmula que describiera las interacciones fuertes de las partículas subatómicas, que en ese momento eran un área de gran confusión y actividad en la física teórica. En 1968, Veneziano encontró que una antigua ecuación matemática, conocida como la función beta de Euler que parecía describir correctamente las amplitudes de dispersión observadas en las colisiones de partículas. Esta fue una revelación sorprendente, ya que la función beta de Euler no había sido utilizada anteriormente en física de partículas.

El trabajo de Veneziano, aunque inicialmente desconectado de la idea de cuerdas, resultó ser el primer indicio de que la teoría de cuerdas podría ser relevante para la física de partículas. La fórmula de Veneziano sugería que había una estructura subyacente en las interacciones fuertes que no se comprendía completamente. Esto llevó a otros físicos a investigar más profundamente y eventualmente a descubrir que esta estructura podía explicarse si se asumía que las partículas no eran puntos, sino cuerdas unidimensionales que vibraban.

En los años 70 y 80, la teoría de cuerdas empezó a desarrollarse plenamente gracias a contribuciones clave de físicos como Leonard Susskind, Holger Bech Nielsen, Michael Green y John Schwarz. Estos investigadores ampliaron la idea inicial de Veneziano y demostraron que las cuerdas podían explicar no solo las interacciones fuertes, sino potencialmente todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

Una de las características más sorprendentes de la teoría de cuerdas es su predicción de dimensiones adicionales del espacio. Mientras que nuestra experiencia cotidiana nos enseña que vivimos en un universo de tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal, la teoría de cuerdas requiere la existencia de dimensiones extra para ser matemáticamente consistente. Estas dimensiones adicionales, según la teoría, están compactificadas en escalas extremadamente pequeñas, mucho más allá de nuestra capacidad de observación directa.

Existen varias versiones de la teoría de cuerdas, entre las que se incluyen la teoría de cuerdas bosónica y las teorías de supercuerdas, como la Tipo I, Tipo IIA, Tipo IIB, Heterótica-O y Heterótica-E. Cada una de estas teorías presenta un enfoque diferente y tiene sus propias particularidades, pero todas comparten la idea fundamental de que las partículas son en realidad cuerdas vibrantes. La teoría de cuerdas bosónica, la más simple, se formuló inicialmente en 26 dimensiones, pero carece de fermiones, las partículas que constituyen la materia, y solo describe bosones, que son partículas mediadoras de fuerzas.

En la década de 1990, Edward Witten y otros físicos hicieron importantes avances al demostrar que las diferentes versiones de la teoría de cuerdas eran en realidad distintas manifestaciones de una teoría más fundamental, llamada Teoría M. Esta teoría unifica las cinco teorías de supercuerdas y sugiere la existencia de 11 dimensiones. La Teoría M ha abierto nuevas vías de investigación y ha proporcionado un marco teórico más robusto para comprender la física de partículas y la gravedad cuántica.

Aunque esta teoría enfrenta desafíos significativos, como la falta de evidencia experimental directa y su complejidad matemática, ha generado considerable entusiasmo en la comunidad científica y proporcionado ideas y técnicas valiosas para otros campos de la física y las matemáticas, manteniéndose como un área de investigación activa y vibrante.

En este trabajo, exploraremos en detalle los fundamentos de la teoría de cuerdas bosónicas y llegaremos a los primeros cálculos de la década de los 70 donde la teoría impuso la existencia de 26 dimensiones y también la primera asociación entre estados de vibración sus partículas equivalentes como el fotón y el gravitón.

2. Fundamentos

Lo primero que debemos hacer es sentar las bases de conocimiento necesarias para iniciar el estudio de la teoría de cuerdas. Vamos a hacer un repaso de relatividad especial estudiando las transformaciones de Lorentz y desarrollando el sistema de coordenadas de cono de luz, muy útil para la teoría de cuerdas. También estableceremos las relaciones básicas del electromagnetismo y gravitación clásicos para luego profundizar en sus versiones de teoría de campos ya expresadas en coordenadas de cono de luz. Acabaremos con la mecánica cuántica, detallando el proceso de cuantización de n sistema y en especial el oscilador armónico cuántico.

2.1. Relatividad especial

La Relatividad Especial se fundamenta en que la velocidad de la luz es constante para todos los observadores inerciales. Al comparar las coordenadas de eventos, dos observadores inerciales, también conocidos como observadores de Lorentz, descubren que las transformaciones de coordenadas pertinentes combinan el espacio y el tiempo.

En esta teoría, los eventos se describen mediante cuatro coordenadas: una temporal (t) y tres espaciales (x, y, z). La notación es en forma de 4-vector (ct, x, y, z) , donde la coordenada temporal está ajustada por la velocidad de la luz para mantener unidades de longitud coherentes. Además, se emplean índices para etiquetar de manera consistente las coordenadas temporales y espaciales:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (2.1)$$

Para que se cumpla la idea principal de que la velocidad de la luz c es la misma para todos los observadores las medidas de espacio y tiempo en distintos sistemas de referencia no tienen que ser las mismas.

Para dos sistemas moviéndose a una velocidad v relativa entre ellos las distancias y los intervalos temporales en cada sistema son proporcionales al factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \quad (2.2)$$

Las distancias se contraen y el tiempo se dilata:

$$\Delta x = \Delta x' / \gamma \leq \Delta x' \quad (2.3)$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \geq \Delta t' \quad (2.4)$$

Visto que los intervalos espacial y temporal por sí mismos no son buenas formas de medir definimos el intervalo de sucesos como:

$$- \Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \quad (2.5)$$

de tal forma que $\Delta s^2 = \Delta s'^2$. Un intervalo infinitesimal será:

$$- ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.6)$$

donde introducimos la métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Definimos un 4-vector en esta métrica como:

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu = (-a^0, a^1, a^2, a^3), \quad a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu \quad (2.8)$$

y el producto escalar de dos 4-vectores:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \quad (2.9)$$

2.1.1. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son la relación que hay entre las coordenadas de dos sistemas inerciales diferentes. Por ejemplo, supongo un sistema desplazándose en la dirección x a una velocidad v respecto a otro de tal forma que para $t = t' = 0$ el origen en ambos sistemas de coordenadas es el mismo y las direcciones de los ejes paralelas. La transformación de Lorentz sería de la forma:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

2.1.2. Coordenadas de cono de luz

Definimos un nuevo sistema de coordenadas que nos facilitará más adelante procesos como la cuantización de la cuerda relativista.

$$x^{+} = \frac{1}{2}(x^0 + x^1), \quad x^{-} = \frac{1}{2}(x^0 - x^1) \quad (2.11)$$

Solo alteramos la coordenadas x^0 y x^1 que son cambiadas por dos combinaciones de ellas x^{+} y x^{-} dejando x^2 y x^3 igual. Como apreciamos en la Figura 1, las direcciones x^{+} y x^{-} se corresponden con las trayectorias de la luz en el espacio de Minkowski de ahí la denominación del sistema de coordenadas. Al hacer esto perdemos la referencia que teníamos de x^0 como coordenada temporal y ahora tanto x^{+} como x^{-} tienen parte temporal, como convenio tomaremos x^{+} como coordenada temporal ya que un desplazamiento positivo en ella implica también un desplazamiento positivo en el tiempo lo que resulta lógico.

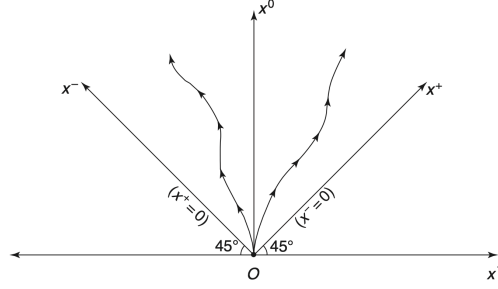


Figura 1: Diagrama de los ejes x^1 y x^0 y su combinación para dar x^+ y x^- . Zwiebach (2009).

El sistema de coordenadas de cono de luz lleva asociado consigo una métrica distinta aunque la forma de definir el intervalo de sucesos es igual.

$$-ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Podemos expresar el producto vectorial usando esta métrica como:

$$a \cdot b = a_+ b^+ + a_- b^- + a_2 b^2 + a_3 b^3, \quad a_+ = -a^-, \quad a_- = -a^+ \quad (2.13)$$

El momento expresado como un 4-vector se define introduciendo la energía en la componente p^0 de la forma:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad (2.14)$$

Si expresamos el momento en coordenadas de cono de luz en analogía con el 4-vector de posición tenemos:

$$p^+ = \frac{1}{2}(p^0 + p^1) = -p_-, \quad p^- = \frac{1}{2}(p^0 - p^1) = -p_+ \quad (2.15)$$

Similar al caso de las coordenadas espaciales hemos perdido la referencia de la coordenada de energía.

2.1.3. Partícula puntual relativista

Para una partícula moviéndose el tiempo medido por un observador que vaya con ella lo llamamos tiempo propio τ . Así el intervalo infinitesimal de sucesos para este será $ds^2 = cd\tau^2$. Para un observador externo el tiempo se dilata proporcionalmente al factor de Lorentz $d\tau = dt\gamma$. De esta forma postulamos una acción que contiene la energía en reposo de una partícula relativista y es proporcional al tiempo propio.

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.16)$$

A partir de esta acción tenemos que el Lagrangiano de la partícula puntual relativista es:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.17)$$

El momento canónico es la derivada del Lagrangiano con respecto a la velocidad:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.18)$$

Ya podemos construir el Hamiltoniano de la partícula puntual relativista:

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.19)$$

Una propiedad fundamental de la acción en la partícula puntual relativista y que será de relevancia en el estudio de las cuerdas es la invarianza bajo reparametrización. Esto implica que no depende de cómo parametricemos la línea que describe la trayectoria de la partícula que la acción se mantiene igual. Cada coordenada ahora pasa a depender de un parámetro que en general será el tiempo propio.

$$x^\mu = x^\mu(\tau) \quad (2.20)$$

Representamos como queda la acción expresada usando la parametrización:

$$S = -mc \int ds = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad (2.21)$$

2.2. Electromagnetismo y Gravitación

A continuación, repasaremos las relaciones fundamentales del electromagnetismo así como su extensión relativista y haremos una introducción a la teoría de la relatividad general.

2.2.1. Electrodinámica relativista

La electrodinámica es una teoría relativista que Einstein desarrolló para formular la teoría especial de la relatividad. Su formulación permite una extensión sencilla a más dimensiones.

Antes de abordar esta formulación, es necesario repasar las ecuaciones de Maxwell, que describen la dinámica de los campos eléctricos y magnéticos. Aunque la mayoría de los cursos utilizan el sistema internacional de unidades, el sistema de unidades de Heaviside-Lorentz es más conveniente para discusiones que involucren relatividad y dimensiones adicionales.

Ecuaciones de Maxwell en unidades Heaviside-Lorentz:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.25)$$

Las dos primeras relaciones se corresponden al caso del vacío y las dos segundas implican una o varias fuentes con densidad de carga ρ y densidad de corriente \mathbf{j} .

La fuerza de Lorentz describe el comportamiento de una partícula dentro de un campo electromagnético:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.26)$$

Sabemos de mecánica cuántica los potenciales son más fundamentales que los campos por eso expresamos el campo eléctrico y magnético en función del potencial vector \mathbf{A} y el potencial escalar Φ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (2.28)$$

En la formulación relativista ambos potenciales a partir de los cuales describimos la el campo eléctrico y magnético se juntan en 4-vector:

$$A^\mu = (\Phi, A^1, A^2, A^3), \quad A_\mu = (-\Phi, A^1, A^2, A^3) \quad (2.29)$$

Definimos lo que conocemos como fuerza de campo de tal forma que ambos campos estén representados ambos campos.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Ya que tenemos algo que combina el campo eléctrico y magnético podremos expresar las ecuaciones de Maxwell en función de $F_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío (2.22) y (2.23) se pueden expresar de forma conjunta como:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \quad (2.31)$$

Para trabajar con las ecuaciones en presencia de una fuente de campo introducimos el 4-vector corriente:

$$j^\mu = (c\rho, j^1, j^2, j^3) \quad (2.32)$$

Así podemos comprimir las segundas dos ecuaciones de Maxwell en:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu \quad (2.33)$$

2.2.2. Gravitación y longitud de Planck

Según la teoría de la relatividad general de Einstein la gravedad emerge como una curvatura del espacio-tiempo lo que implica que ya no vamos a poder trabajar con la métrica de Minkowski, la sustituiremos por una métrica dinámica que además de define como simétrica y es invertible.

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad g^{\mu\alpha}(x)g_{\alpha\nu}(x) = \delta^\mu_\nu \quad (2.34)$$

Para muchos casos la gravedad actúa de una forma muy débil por lo que resulta una buena aproximación tomar la métrica como la de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y añadir una pequeña fluctuación $h_{\mu\nu}(x)$:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad (2.35)$$

Para estudiar pequeñas alteraciones de la métrica de Minkowski podemos expandir la ecuaciones de Einstein en potencias de $h_{\mu\nu}$. Para el caso sin fuentes del campo la ecuación linealizada resulta:

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha(\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h = 0 \quad (2.36)$$

Si queremos hacer un cambio infinitesimal de coordenadas este se puede ver como un cambio infinitesimal en la métrica $g_{\mu\nu}$ y por tanto un cambio infinitesimal en la fluctuación de la métrica respecto a la de Minkowski.

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon^\mu, \quad h^{\mu\nu} \rightarrow h^{\mu'\nu'} = h^{\mu\nu} + \delta h^{\mu\nu}, \quad \delta h^{\mu\nu} = \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu \quad (2.37)$$

Esta variación de la métrica es unatransformaciones gauge en relatividad general por lo que $h^{\mu\nu'}$ también resuelve la ecuación (2.36).

Ya que el objetivo de la teoría de cuerdas es ser una teoría cuántica de la gravedad es conveniente recordar para que distancias, tiempos y masas los efectos de física cuántica tienen efectos en la gravedad, se conocen como la escala de Planck:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61 \times 10^{-33} \text{ cm} \quad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.17 \times 10^{-5} \text{ g} \quad (2.38)$$

2.3. Mecánica cuántica

La teoría de cuerdas busca ser una teoría cuántica y relativista, ya hemos repasado los fundamentos de la teoría de la relatividad y procedemos a repasar la bases de la mecánica cuántica que nos resultarán fundamentales para nuestro estudio de las cuerdas y en especial el proceso de cuantización de la cuerda.

Si tenemos ya desarrollada una teoría clásica la primera cuantización consiste en sustituir las variables canónicas clásicas \mathbf{x} y \mathbf{p} por sus operadores hermíticos correspondientes. Hay que tener en cuenta que ahora las relaciones de conmutación no son triviales:

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = 0, \quad [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = 0, \quad [\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (2.39)$$

En la conmutación entre \mathbf{x} y \mathbf{p} surge explícitamente el principio de incertidumbre de Heisenberg ya que la no conmutación entre operadores de distintas cantidades está relacionada con su capacidad para ser medidas simultáneamente.

La mecánica cuántica puede representarse a través de infinitas imágenes pero la representación de Schrödinger y la representación de Heisenberg son las que vamos a emplear en nuestro estudio. Todas son equivalentes y describen el mismo fenómeno físico, pero lo hacen desde diferentes perspectivas. En la representación de Schrödinger de los operadores no tienen una dependencia temporal de ningún tipo ya que esta se le atribuye al estado sobre el que actúa, sin embargo, en la representación de Heisenberg es el operador el que varía con el tiempo. Dado un operador de Heisenberg $\mathbf{A}(t)$ su relación con su versión de Schrödinger es:

$$\mathbf{A}(t) = e^{i\mathbf{H}t} \mathbf{A} e^{-i\mathbf{H}t} \quad (2.40)$$

Esta definición conserva sus propiedades de conmutación y vemos como la dependencia temporal viene dada por el Hamiltoniano \mathbf{H} . Si queremos estudiar cómo evoluciona este operador con el tiempo nos queda:

$$i \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + [\mathbf{A}(t), \mathbf{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t); t)] \quad (2.41)$$

La relación que hay entre los estados que varían en el tiempo y los estáticos es:

$$|\psi, t\rangle = e^{-i\mathbf{H}t} |\psi\rangle \quad (2.42)$$

2.3.1. Oscilador armónico cuántico

Vamos a poner en práctica estas ideas con el oscilador armónico cuántico que nos será de gran utilidad para la cuantización de la teoría de cuerdas. El Hamiltoniano de un oscilador armónico es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2 \quad (2.43)$$

Hacemos el cambio de las variables clásicas por los operadores cuánticos y además introducimos unos cambios de variable útiles:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \mathbf{x}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \mathbf{p}, \quad [\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i \quad (2.44)$$

Reescribimos el Hamiltoniano como:

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{\mathbf{p}}^2 + \hat{\mathbf{x}}^2) \quad (2.45)$$

Definimos los operadores:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{p}}), \quad \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{p}}), \quad [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1 \quad (2.46)$$

Nos queda el Hamiltoniano:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.47)$$

Definimos el operador número tal que $\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ así los autovalores del Hamiltoniano dependen de los de este operador. Tomo los autovalores de \mathbf{N} como los números naturales:

$$\mathbf{N} |n\rangle = n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.48)$$

Así queda explícita la cuantización de la energía:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{N} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.49)$$

Tenemos un estado base $|0\rangle$ con $n = 0$ y $E_0 = \hbar\omega/2$. El espectro de energías ha dejado de ser continuo, no todas las energías son posibles. También se puede comprobar que los operadores \mathbf{a}^\dagger y \mathbf{a} actúan subiendo y bajando de estado de ahí que los nombremos como operador creación y aniquilación respectivamente.

$$\mathbf{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \mathbf{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.50)$$

2.4. Teoría cuántica de campos

Vamos a hacer un repaso antes de aproximarnos campos escalares cuánticos de teoría clásica de campos. Teniendo un campo escalar clásico podemos construir un Lagrangiano invariante bajo transformaciones Lorentz de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.51)$$

La acción asociada a este Lagrangiano es:

$$S = \int d^D x \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.52)$$

Hemos llamado $d^D x = dx^0 dx^1 \dots dx^d$ tal que $D = d + 1$ es el número de dimensiones espaciales.

Consideremos la variación del Lagrangiano:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \quad (2.53)$$

Usamos la regla de Leibniz $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta \phi)$ sustituimos e integramos el segundo término:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) d^4 x = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right]_{\text{frontera}} - \int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi d^4 x \quad (2.54)$$

El término de frontera se anula porque tomamos que la variación del campo $\delta\phi$ en la frontera es nula. Sustituimos esta relación en (2.53) y como la variación de la acción es la integral de la variación del Lagrangiano y se tiene que anular $\delta S = \int \delta\mathcal{L} = 0$ el resultado es la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (2.55)$$

Ya tenemos las ecuaciones del movimiento pero también podemos estudiar las cantidades conservadas en un sistema. Reescribimos (2.53) cambiando el segundo término usando la regla del producto nos queda:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi \quad (2.56)$$

Aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange y sabemos que $\delta\mathcal{L} = 0$ por lo que hemos encontrado una cantidad que llamamos corriente conservada J^μ tal que:

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \quad (2.57)$$

Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el Lagrangiano que hemos definido en (2.51) nos quedan la ecuación del movimiento conocida como ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0 \quad (2.58)$$

Estudiemos las posibilidades soluciones a esta ecuación podemos encontrar la solución de una onda en el plano que sigue una expresión:

$$\phi(\mathbf{x}) = ae^{-E_p t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a^* e^{E_p t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.59)$$

Inicialmente no haría falta la parte conjugada pero al imponer que $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ y $E_p > 0$ la solución no sería real por lo que añadimos la parte conjugada para solucionarlo. Para deducir los posibles estados de de las partículas es conveniente aplicar una transformada de Fourier.

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot x} \phi(p) \quad (2.60)$$

Si imponemos la condición de encontrar una solución real en el espacio de momentos encontramos que $(\phi(p))^* = \phi(-p)$. Si introducimos en la ecuación de Klein-Gordon la expresión del campo escalar en función de la transformada de Fourier y actuamos con el operador ∂^2 nos queda que:

$$(p^2 + m^2)\phi(p) = 0 \quad (2.61)$$

Repetimos este proceso pero ahora trabajaremos en el sistema de coordenadas de cono de luz donde $\mathbf{x}_T = (x^2, x^3, \dots, x^d)$ es el vector de las componentes transversales. En esta notación la ecuación de Klein-Gordon pasa a ser:

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^I} - m^2\right)\phi(x^+, x^-, \mathbf{x}_T) = 0 \quad (2.62)$$

Antes hemos aplicado la transformada sobre las coordenadas espaciales que era obvias, en este caso queremos cambiar x^- por p^+ y x^I por p^I donde llamamos a las componentes transversales del momento $\mathbf{p}_T = (p^2, p^3, \dots, p^d)$.

$$\phi(x^+, x^-, \mathbf{x}_T) = \int \frac{dp^+}{2\pi} \int \frac{d^{D-2}\mathbf{p}_T}{(2\pi)^{D-2}} e^{-ix^-p^+ + i\mathbf{x}_T \cdot \mathbf{p}_T} \phi(x^+, p^+, \mathbf{p}_T) \quad (2.63)$$

Sustituyendo esta expresión igual que antes nos queda la ecuación del movimiento:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2)\right]\phi(x^+, p^+, \mathbf{p}_T) = 0 \quad (2.64)$$

Ya se puede apreciar una de las ventajas de este sistema de coordenadas, en las coordenadas originales la ecuación del movimiento tiene una derivada de segundo orden temporal mientras que en esta es de primero, misma estructura que la ecuación de Schrödinger lo que resultará útil cuando su versión cuántica. Usamos la relación de $x^+ = p^+ \tau / m^2$ para expresar la ecuación anterior en función de una derivada temporal explícitamente:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2)\right]\phi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) = 0 \quad (2.65)$$

En mecánica cuántica hemos visto como las variables clásicas se convierten en operadores pues en este caso los campos clásicos pasarán a ser operadores de campo.

Vamos a tomar una versión de la ecuación de onda en el plano expresada como una superposición de ondas complejas:

$$\phi_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(t)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a^*(t)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.66)$$

Evaluamos este campo escalar en nuestra expresión para la acción resultando en:

$$S = \int dt \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_0 \phi_p)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi_p)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_p^2 \right) \quad (2.67)$$

$$= \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) - \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \right) \quad (2.68)$$

También obtenemos la expresión para el Hamiltoniano:

$$H = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_0 \phi_p \partial_0 \phi + \frac{1}{2} (\nabla \phi_p)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_p^2 \right) \quad (2.69)$$

$$= \frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) + \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \quad (2.70)$$

Y para el momento del campo:

$$\mathbf{P} = - \int d^d x (\partial_0 \phi) \nabla \phi \quad (2.71)$$

$$= \mathbf{p} (a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p}) \quad (2.72)$$

La acción describe dos osciladores armónicos simples, hagámoslo explícito cambiando la variable compleja por:

$$a(t) = q_1(t) + iq_2(t) \quad (2.73)$$

donde $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son coordenadas reales. La acción en función de estas nuevas coordenadas es:

$$S = \sum_{i=1}^2 \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{q}_i^2(t) - \frac{1}{2} E_p q_i^2(t) \right) \quad (2.74)$$

También tenemos una expresión para el momento en que también se descompone en dos partes y depende como es de esperar de la derivada temporal de las coordenadas:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i(t)}{E_p} \Rightarrow p_1(t) + ip_2(t) = \frac{1}{E_p} \dot{a}(t) \quad (2.75)$$

Podemos encontrar las ecuaciones del movimiento de esta acción para las coordenadas reales y en función de las nuevas coordenadas:

$$\ddot{q}_i(t) = -E_p^2 q_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (2.76)$$

Es más conveniente expresar esta relación usando la variable $a(t)$:

$$\ddot{a}(t) = -E_p^2 a(t) \quad (2.77)$$

Como tenemos una ecuación de segundo orden la solución sale en términos de dos exponenciales:

$$a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t} \quad (2.78)$$

Hemos introducido unas nuevas constantes complejas para expresar dicha solución. Estas nuevas constantes son las candidatas perfectas para que a_p y a_{-p} sean los operadores aniquilación y a_p^* y a_{-p}^* sean los operadores creación a_p^\dagger y a_{-p}^\dagger en la teoría cuántica. Usando esto podemos reescribir el Hamiltoniano en función de estos nuevos operadores como:

$$H = E_p (a_p^\dagger a_p + a_{-p}^\dagger a_{-p}) \quad (2.79)$$

Podemos cambiar también la expresión del momento como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} (a_p^\dagger a_p - a_{-p}^\dagger a_{-p}) \quad (2.80)$$

Vamos a requerir que los operadores creación y aniquilación cumplan con las reglas de conmutación:

$$[a_p, a_p^\dagger] = 1, \quad [a_{-p}, a_{-p}^\dagger] = 1 \quad (2.81)$$

Comprobemos que esta petición esta motivada, primero vamos a calcular:

$$[a(t), \dot{a}^\dagger(t)] = [a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t}, iE_p (a_p^\dagger e^{iE_p t} - a_{-p} e^{-iE_p t})] \quad (2.82)$$

$$= iE_p ([a_p, a_p^\dagger] + [a_{-p}, a_{-p}^\dagger] + [a_{-p}^\dagger, a_p^\dagger] e^{2iE_p t} + [a_{-p}, a_p] e^{-2iE_p t}) \quad (2.83)$$

$$= 2iE_p \quad (2.84)$$

Este resultado también se cumple para $[a^\dagger(t), \dot{a}(t)] = 2iE_p$. Hemos usado para llegar a este resultado la reglas de conmutación que impusimos y también que los operadores creación y aniquilación conmutan con otros de su misma categoría. Podemos agrupar estas relaciones de conmutación como:

$$[a_p, a_k^\dagger] = \delta_{p,k}, \quad [a_p, a_k] = [a_p^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \quad (2.85)$$

Comprobemos que se cumple la conmutación canónica entre la posición y el momento $[q(t), p(t)] = i$. Trabajando con (2.73) y (2.75) obtenemos una versión explícita de la coordenadas y momentos canónicos:

$$q_1(t) = \frac{1}{2}(a(t) + a^\dagger(t)), \quad q_2(t) = \frac{1}{2i}(a(t) - a^\dagger(t)) \quad (2.86)$$

$$p_1(t) = \frac{1}{2E_p}(\dot{a}(t) + \dot{a}^\dagger(t)), \quad p_2(t) = \frac{1}{2iE_p}(\dot{a}(t) - \dot{a}^\dagger(t)) \quad (2.87)$$

Comprobemos que se cumple la conmutación canónica para el caso de q_1 y p_1 :

$$[q_1(t), p_1(t)] = \frac{1}{4E_p} [a(t) + a^\dagger(t), \dot{a}(t) + \dot{a}^\dagger(t)] \quad (2.88)$$

$$= \frac{1}{4E_p} ([a(t), \dot{a}^\dagger(t)] + [a^\dagger(t), \dot{a}(t)]) = i \quad (2.89)$$

Hemos usado el cálculo de (2.82) y el resultado cumple con lo esperado por lo que podemos confirmar que el requisito que impusimos sobre los operadores creación y aniquilación en (2.81) está justificado. Para expresar la solución de la ecuación de Klein-Gordon en función de los operadores de creación $a(t)$ y aniquilación $a^*(t)$ partimos de la versión de Schrödinger de la solución como superposición de ondas de (2.66):

$$\phi_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(t)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a^*(t)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (2.90)$$

Para expresar la solución en términos de estos operadores usamos que:

$$a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t} \quad (2.91)$$

$$a^*(t) = a_p^\dagger e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t} \quad (2.92)$$

Entonces, la solución en la imagen de Heisenberg es:

$$\phi_p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left((a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + (a_p^\dagger e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right) \quad (2.93)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - iE_p t} + a_{-p}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_p t} \right) \quad (2.94)$$

El desarrollo da cuatro términos pero dos de ellos se corresponden a los otros cambiando $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ por lo que se puede recoger todo en un sumatorio sobre todo \mathbf{p} sin afectar al valor de la energía que no depende del signo del momento. Esta expresión muestra cómo la solución en la imagen de Heisenberg depende explícitamente del tiempo a través de los operadores de creación y aniquilación.

2.4.1. Campos de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell describen cómo los campos eléctricos y magnéticos evolucionan y se relacionan con las fuentes de carga y corriente. En el formalismo relativista vimos que estas ecuaciones pueden ser expresadas en términos del tensor del campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ y el cuadripotencial A^μ :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.95)$$

Las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes (vacío) son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.96)$$

Sustituyendo $F^{\mu\nu}$, obtenemos:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial \cdot A) = 0 \quad (2.97)$$

Pasando esta ecuación al espacio de momentos se convierte en:

$$p^2 A^\mu - p^\mu (p \cdot A) = 0 \quad (2.98)$$

Para simplificar el análisis, adoptamos la condición de Lorentz:

$$\partial \cdot A = 0 \implies p \cdot A = 0 \quad (2.99)$$

Con esta condición, la ecuación se reduce a $p^2 A^\mu = 0$. La transformación de gauge para el potencial vectorial A^μ es $A^\mu(p) \rightarrow A^\mu + ip^\mu \epsilon(p)$. Esta transformación no afecta los campos físicos (eléctrico y magnético) porque $F^{\mu\nu}$ es invariante bajo estas transformaciones.

Consideramos ahora solo las coordenadas transversales $\mu = I$:

$$p^+ A^- = p^I A^I, \quad p^2 A^I = 0 \quad (2.100)$$

Estas condiciones implican que solo las componentes transversales (aquellas perpendiculares a la dirección de propagación) son relevantes para los grados de libertad físicos del fotón.

Para cuantizar el campo electromagnético, pasamos el potencial vectorial A^μ a un operador cuántico y expandimos A^μ en modos de Fourier:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a^\mu(p) e^{-ip \cdot x} + a^{\mu\dagger}(p) e^{ip \cdot x} \right) \quad (2.101)$$

Aquí $a^\mu(p)$ y $a^{\mu\dagger}(p)$ son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente. $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ es la energía de la partícula (en este caso, $m = 0$ para los fotones).

Los estados físicos del fotón se construyen usando los operadores de creación aplicados al estado de vacío $|\Omega\rangle$. En dimensiones D , los fotones tienen $D - 2$ grados de libertad transversales:

$$\sum_{I=2}^{D-2} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle \quad (2.102)$$

Aquí ξ_I son los coeficientes de polarización transversales, $a_{p^+, p_T}^{I\dagger}$ es el operador de creación para el modo transversal I con momento p y $|\Omega\rangle$ es el estado de vacío.

2.4.2. Campos gravitacionales

La teoría cuántica del campo gravitatorio busca conciliar la gravedad, descrita por la relatividad general, con los principios de la mecánica cuántica. En la relatividad general, el campo gravitatorio es representado por la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}(x)$. En el régimen de campos gravitatorios débiles, la métrica puede aproximarse como una perturbación sobre el espacio plano de Minkowski:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad (2.103)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu}(x)$ es una pequeña perturbación. Tanto $\eta_{\mu\nu}$ como $h_{\mu\nu}$ son simétricos. Las ecuaciones de Einstein linealizadas para las fluctuaciones $h_{\mu\nu}$ pueden escribirse en el espacio de momentos como:

$$S^{\mu\nu}(p) \equiv p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu h = 0 \quad (2.104)$$

donde $h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$. Esta ecuación implica que las fluctuaciones $h_{\mu\nu}$ están asociadas con excitaciones sin masa.

La teoría también es invariante bajo transformaciones de gauge del tipo:

$$\delta h^{\mu\nu}(p) = ip^\mu \epsilon^\nu(p) + ip^\nu \epsilon^\mu(p) \quad (2.105)$$

donde $\delta h = 2ip \cdot \epsilon$. Para verificar la invariancia gauge, consideramos la variación:

$$\delta S^{\mu\nu} = ip^2 (p^\mu \epsilon^\nu + p^\nu \epsilon^\mu) - ip_\alpha p^\mu (p^\nu \epsilon^\alpha + p^\alpha \epsilon^\nu) - ip_\alpha p^\nu (p^\mu \epsilon^\alpha + p^\alpha \epsilon^\mu) + 2ip^\mu p^\nu p \cdot \epsilon \quad (2.106)$$

Al simplificar, todos los términos se cancelan, demostrando que $\delta S^{\mu\nu} = 0$.

En el gauge de cono de luz, podemos fijar ciertas componentes del tensor $h_{\mu\nu}$ a cero:

$$h^{++} = h^{+-} = h^{+I} = 0 \quad (2.107)$$

Los componentes restantes son h^{IJ}, h^{-I}, h^{--} . Aplicando las condiciones de gauge y las ecuaciones de movimiento, encontramos:

$$p^2 h^{IJ} = 0, \quad h = h^{+-} + h^{II} = 0, \quad h^{II} = 0 \quad (2.108)$$

De esto se sigue que h^{IJ} es un tensor simétrico y sin traza en las $(D - 2)$ dimensiones transversales. Para componentes con $-$ índices, usando:

$$h^{I-} = \frac{1}{p^+} p_J h^{IJ}, \quad h^{--} = \frac{1}{p^+} p_I h^{-I} \quad (2.109)$$

podemos determinar h^{I-} y h^{--} en términos de h^{IJ} .

La ecuación $p^2 h^{IJ}(p) = 0$ indica que para $p^2 \neq 0$, $h^{IJ}(p) = 0$, y para $p^2 = 0$, h^{IJ} está restringido sólo por $h^{II} = 0$.

Los grados de libertad del campo gravitacional en D dimensiones son los componentes del tensor simétrico y sin traza h^{IJ} . El número de componentes $n(D)$ es:

$$n(D) = \frac{1}{2}(D-2)(D-1) - 1 = \frac{1}{2}D(D-3) \quad (2.110)$$

En cuatro dimensiones, $n(4) = 2$; en diez dimensiones, $n(10) = 35$; en veintiséis dimensiones, $n(26) = 299$.

Para los estados de gravitón, expandimos los campos clásicos h^{IJ} en términos de operadores de creación y aniquilación:

$$a^{IJ\dagger} |\Omega\rangle_{p^+, \vec{p}_T} \quad (2.111)$$

Un estado de un gravitón con momento (p^+, \vec{p}_T) es una superposición lineal:

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (2.112)$$

Aquí, ξ_{IJ} es el tensor de polarización del gravitón. La condición sin traza en la teoría cuántica se convierte en $\xi_{II} = 0$. ξ_{IJ} es un tensor simétrico sin traza.

3. Cuerdas relativistas

El estudio de las cuerdas relativistas se puede entender en cierta medida como una extensión a dos dimensiones de la partícula puntual relativista ya vista. En el caso de la partícula era fundamental la parametrización de la curva que forma la partícula puntual si superponemos todas sus posiciones a lo largo del tiempo, lo denominamos línea de universo. En el caso de una cuerda, esta genera una superficie de dos dimensiones que requerirá parametrizarla de forma adecuada para poder estudiar la acción y ecuaciones del movimiento de la cuerda. Veremos como una correcta elección de esta parametrización va a simplificar las ecuaciones pudiendo extraer más información de su comportamiento.

3.1. Parametrización general

Inicialmente vamos a hacer un estudio de cómo parametrizar una superficie de forma general y estudiaremos las ecuaciones resultantes.

3.1.1. Superficies espaciales y espacio-temporales

El caso más sencillo por el que empezaremos es una superficie espacial, es decir, una superficie de dos dimensiones en un entorno de tres dimensiones espaciales. La superficie ha de ser descrita por una colección de funciones que cada una dependerá de dos parámetros propios de la superficie:

$$\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) = (x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), x^3(\xi^1, \xi^2)) \quad (3.1)$$

Los parámetros ξ^1 y ξ^2 los podemos ver como coordenadas locales sobre la superficie, así tenemos una relación entre los puntos de la superficie y sus coordenadas espaciales. Nuestro objetivo es obtener una expresión del área de la superficie para poder trabajar análogamente al caso de la partícula y la longitud de la línea. Partimos de cómo se expresaría un área infinitesimal que vendrá dada por el producto escalar de dos vectores infinitesimales.

Estos vectores los podemos definir en las dos direcciones ξ^1 y ξ^2 y suponiendo que la superficie a escala infinitesimal es plana, cada vector vendrá dado por la variación de la posición en ese punto con respecto a su dirección (pendiente) multiplicado por un desplazamiento pequeño en dicha dirección.

$$d\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad d\mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 \quad (3.2)$$

El diferencial de área que sale producto escalar de los vectores es:

$$dA = |d\mathbf{v}_1||d\mathbf{v}_2|\sin\theta = |d\mathbf{v}_1||d\mathbf{v}_2|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad (3.3)$$

$$= \sqrt{|d\mathbf{v}_1|^2|d\mathbf{v}_2|^2 - |d\mathbf{v}_1|^2|d\mathbf{v}_2|^2\cos^2\theta} \quad (3.4)$$

$$= \sqrt{(d\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_1)(d\mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{v}_2) - (d\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_2)^2} \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.2) aquí e integrando sobre ξ^1 y ξ^2 obtenemos el funcional de área de la superficie:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (3.6)$$

Tenemos el área de la superficie pero también nos interesa poder hacer medidas sobre esta. Supongamos que tenemos un vector $d\mathbf{x}$ definido en términos de $d\xi^1$ y $d\xi^2$ similar a (3.2):

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \quad (3.7)$$

El índice repetido i indica la suma sobre los posibles valores 1 y 2. Para medir la longitud de este vector definimos: $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ lo que resulta en:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^j} d\xi^j\right) \quad (3.8)$$

$$= g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (3.9)$$

Hemos llamado $g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^j}$ lo que llamamos métrica inducida. Hasta ahora solo habíamos mencionado la idea de métrica cuando estábamos en el espacio de Minkowski o en el cono de luz que nos determinaba el comportamiento de las coordenadas.

En este caso tenemos unas coordenadas espaciales usuales pero esta métrica surge para trasladarnos a las coordenadas sobre la superficie que ya no tiene porque ser un plano. Su representación en forma de matriz es de dimensión 2×2 y su determinante es igual a lo que encontramos dentro de la raíz en (3.6) por lo que si llamamos $g = \det(g_{ij})$ nos queda:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} \quad (3.10)$$

Pasamos ahora a las superficies espacio-temporales que aunque conceptualmente difieren de las espaciales su formalismo es análogo. Esta superficie se forma al componer todas las posiciones de la cuerda a lo largo del tiempo, esto implica que las coordenadas sobre esta superficie ya no van a ser ξ^1 y ξ^2 , una de ellas va a tener una connotación temporal τ y otra espacial σ . Podemos definir los vectores infinitesimales similar al caso anterior solo que usando la notación relativista:

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \quad (3.11)$$

De esta forma podemos construir equivalentemente la expresión para el área propia:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (3.12)$$

Notar que hemos cambiado el signo de la relación bajo la raíz respecto al caso de la superficie espacial para que el radicando sea positivo. Podemos comprobarlo si analizamos la situación de un vector tangente a la hoja de mundo en un punto. Todos los vectores tangentes a la hoja de mundo en un punto forman un espacio vectorial, este espacio puede ser descrito por una base de dos vectores, uno tipo espacio (dirección σ) y otro tipo tiempo (dirección τ). Un tipo de vector tangente puede ser:

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty) \quad (3.13)$$

Este vector tiene que poder ser tanto tipo espacio como tipo tiempo por lo que $v^2(\lambda) = 0$ tiene que tener dos raíces con distinto signo. La ecuación $v^2(\lambda)$ nos queda de cuadrática en λ por lo que para que se cumpla el radicando debe ser positivo:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 > 0 \quad (3.14)$$

3.1.2. Acción de Nambu-Goto

Ahora que tenemos bien definida el área propia podemos introducir la acción de la cuerda relativista:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (3.15)$$

Hay varias modificaciones a la ecuación (3.12), primero hemos ajustado la unidades introduciendo T_0/c donde llamamos a T_0 la tensión de la cuerda y tiene por lo tanto unidades de fuerza, así nos quedan las unidades:

$$[S] = \frac{[T_0]}{[c]} \cdot [A] = \frac{M \cdot D/T^2}{D/T} \cdot L^2 = \frac{M \cdot L^2}{T} \quad (3.16)$$

Tomamos $\sigma_1 > 0$ como una constante y también simplificamos la notación de las derivadas:

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X}{\partial \tau}, \quad X^{\mu'} \equiv \frac{\partial X}{\partial \sigma} \quad (3.17)$$

Las propiedades de las superficies espacio-temporales se extienden a la acción por lo que definimos métrica inducida como:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\nu\mu} \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X_\nu}{\partial \xi^\beta} \quad (3.18)$$

Los índices α y β toman los valores 1 y 2 con $\xi^1 = \tau$ y $\xi^2 = \sigma$. También podemos expresar la acción en función del determinante de la métrica $\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta})$:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \quad (3.19)$$

3.1.3. Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones del movimiento de la cuerda relativista van a surgir de estudiar la variación de la acción de Nambu-Goto, vamos a expresarla en función de la densidad Lagrangiana:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) \quad (3.20)$$

Tal que:

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (3.21)$$

Al variar la acción esta nos va a quedar en función de las derivadas de la densidad lagrangiana con respecto a τ y a σ por lo que vamos designarlas como:

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (X')^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (3.23)$$

Así la variación de la acción nos queda:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right] \quad (3.24)$$

Los términos de las derivadas con respecto a τ y a σ nos dan términos que dependen de la condiciones iniciales y finales en τ y condiciones de contorno en σ . Es razonable asumir que en estos casos las variaciones se anulan, así nos queda que para anular la variación de la acción se tiene que cumplir:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.25)$$

Esta es la ecuación del movimiento de una cuerda relativista abierta o cerrada. Aunque parece compacta es fácil notar que si sustituimos las definiciones (3.22) y (3.23) la ecuación es muy complicada. Por eso veremos más adelante cómo escogiendo una mejor parametrización la simplificaremos para poder trabajar con ella. De momento solo podemos analizar los extremos de la cuerda donde tomaremos $\sigma = \sigma_* = 0$ o σ_1 , sobre estos puntos podemos imponer dos tipos de condiciones de contorno:

Condiciones de contorno Dirichlet:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu \neq 0 \quad (3.26)$$

Hemos fijado una dirección μ a una coordenada espacial e imponemos que no varíe su posición en el tiempo, esto implica que el extremo de la cuerda queda restringido a un valor fijo en una dirección espacial lo que garantiza que el término de la integral en (3.24) de τ se anule. La otra posible condición de contorno es:

Condiciones de contorno en extremos libres:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu \neq 0 \quad (3.27)$$

Aunque esta condición no restringe el movimiento del extremo de la cuerda también anula el otro término de (3.24).

Las condiciones de contorno Dirichlet dan pie a la aparición de las Dp -branas, unos objetos de p dimensiones espaciales y que juegan un papel muy importante en la teoría de cuerdas. Vamos a ilustrar su razón con un ejemplo:

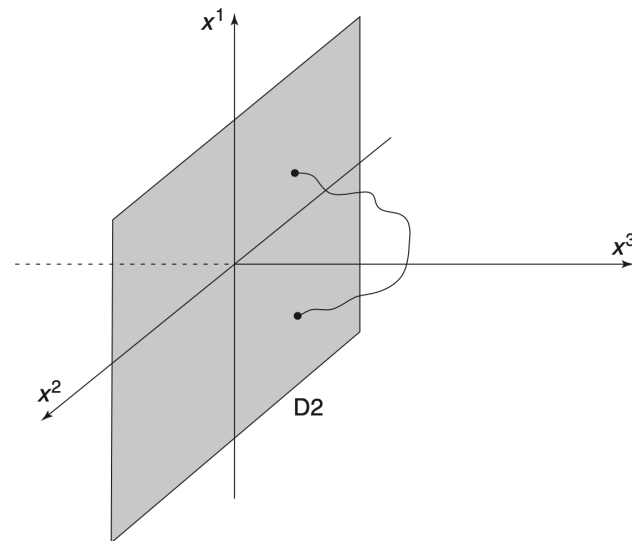


Figura 2: Una D2-brana está extendida sobre el plano (x^1, x^2) . Los extremos de la cuerda abierta pueden moverse libremente en este plano, pero deben permanecer unidos a la brana. La coordenada x^3 de los extremos debe ser siempre cero. Esta es una condición de contorno de Dirichlet para la coordenada x^3 de la cuerda. Zwiebach (2009).

3.2. Parametrización estática

Para mejorar nuestro entendimiento sobre la acción de una cuerda relativista y sus ecuaciones del movimiento como ya anticipamos es interesante escoger una parametrización que nos facilite el trabajo. La parametrización estática debe su nombre a que formamos la líneas del mallado fijando un τ constante de tal forma que para cada tiempo tenemos una fotografía estática de la cuerda en es instante. Asociamos τ a la coordenada $X^0 = ct = c\tau$ de tal forma que la coordenada t en cada punto es también su tiempo propio $t = \tau$.

La elección de σ es sencilla pero va a depender de si consideramos cuerdas abiertas o cerradas. Para cuerdas abiertas tomamos $\sigma = 0$ en un extremo y $\sigma = \sigma_1$ en el otro tal que $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Y para cuerdas cerradas llamamos a σ_c a la circunferencia de la cuerda y se tiene que cumplir que $(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + \sigma_c)$ lo que nos queda en forma de intervalo $\sigma \in [0, \sigma_c]$.

Las coordenadas en esta parametrización son:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (ct, \mathbf{X}(t, \sigma)) \quad (3.28)$$

Hemos llamado \mathbf{X} a las coordenadas espaciales de la cuerda. Vamos a calcular las derivadas de las coordenadas que como hemos visto van a aparecer cuando construyamos la acción:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(0, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left(c, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right) \quad (3.30)$$

3.2.1. Ecuaciones del movimiento

Para obtener unas ecuaciones del movimiento un poco más sencillas va a ser conveniente definir una cantidad que vamos a llamar velocidad transversal. La definición de la velocidad de una cuerda o un punto en ella no es posible porque el mismo punto no es identificable dos instantes de tiempo diferentes. Además, tal cual tenemos parametrizadas posiciones en la cuerda a través de σ que es algo arbitrario afectaría a nuestra velocidad.

Primero vamos a introducir un parámetro $s(\sigma)$ que mide el largo de la cuerda tal que $s(0) = 0$ y $s(\sigma_1)$ es la longitud completa de la cuerda. Si vemos cómo varía la coordenada de posición con respecto a la longitud de la cuerda nos tiene que dar un vector tangente a la cuerda en la dirección de σ :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} \quad (3.31)$$

También es de esperar que la velocidad transversal dependa la variación de la coordenada posición con el tiempo. Definimos la velocidad transversal v_{\perp} como la componente perpendicular de $\partial \mathbf{X} / \partial t$ y conociendo también que $\partial \mathbf{X} / \partial s$ es un vector unitario en la dirección de la cuerda. Para obtener la componente perpendicular de $\partial \mathbf{X} / \partial t$ hay que restarle a $\partial \mathbf{X} / \partial t$ la parte paralela a $\partial \mathbf{X} / \partial s$ que es la proyección del primero sobre el segundo, nos queda:

$$v_{\perp} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \quad (3.32)$$

Podemos calcular ya v_{\perp}^2 :

$$v_{\perp}^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right)^2 \quad (3.33)$$

Vamos e expresar la ecuación (3.15) en función de v_{\perp} :

$$(\dot{X}^2 \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \quad (3.34)$$

$$= \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + c^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (3.35)$$

$$= \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 (c^2 - v_{\perp}^2) \quad (3.36)$$

Sustituimos y nos queda la acción expresada en función de la velocidad transversal como:

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \quad (3.37)$$

El Lagrangiano asociado a la acción es:

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \quad (3.38)$$

Usando las relaciones de la parametrización estática podemos simplificar las ecuaciones (3.23) y (3.22):

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c^2} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right) \dot{X}^{\mu} + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right)^2 \right] \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s} \right\} \quad (3.39)$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \dot{X}^{\mu} + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right) \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s} \right\} \quad (3.40)$$

Podemos simplificar más aún (3.39) si tomamos $\mu = 0$ aprovechamos que esta parametrización $\dot{X}^0 = c$ y $\partial X^0/\partial s = 0$ lo que nos deja:

$$\mathcal{P}^{\sigma 0} = -\frac{T_0}{c^2} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right) \quad (3.41)$$

Ya con estas versiones más simples podemos extraer información sobre el movimiento de los extremos de las cuerdas porque nos añaden más condiciones. Hemos visto en las condiciones de extremos libres que $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$, imponiendo esto sobre el caso de $\mathcal{P}^{\sigma 0}$ nos queda que:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0 \quad (3.42)$$

Además en el caso de los extremos de la cuerda se da que $v_{\perp} = \partial \mathbf{X}/\partial t$. Conociendo estas condiciones la ecuación de $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ en los extremos es:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s} = 0 \quad (3.43)$$

Dado que el $\partial X^{\mu}/\partial s$ es un vector unitario no nulo la solución es que $v^2 = c^2$ lo que implica que los extremos de la cuerda se mueven a la velocidad de la luz.

3.2.2. Movimiento general de una cuerda

Ya conocemos el movimiento de los extremos de la cuerda pero para poder indagar más en el movimiento de toda la cuerda tendremos que especificar más la parametrización de σ que habíamos dejado de alguna forma indeterminada. Para esto vamos a parametrizar una cuerda de la forma usual con $\sigma \in [0, \sigma_1]$ pero ahora vamos a extender esta sobre toda la superficie de la hoja de mundo.

Recordamos que tenemos parametrizado el tiempo de forma que cada línea muestra la posición de todos los puntos de la cuerda para un mismo t , ahora supongamos que tenemos dos tiempo diferentes pero muy próximos de tal forma podemos extender la parametrización en σ de una cuerda a la siguiente perpendicularmente a la línea de tiempo. Así obtenemos un mallado de líneas donde t es constante y otro donde σ también y en cada punto son perpendiculares entre sí.

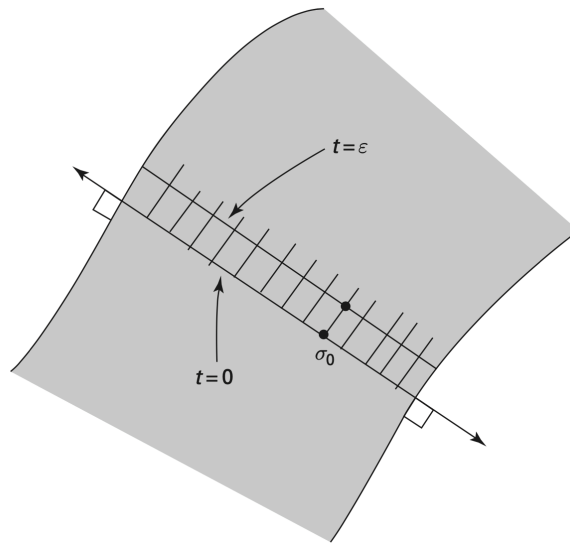


Figura 3: Usamos la parametrización de la cuerda en $t = 0$ para la de $t = \epsilon$ trazando líneas perpendiculares. Zwiebach (2009).

Esto se puede resumir en la expresión:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0 \quad (3.44)$$

Ya podemos usar esta relación para simplificar la ecuación de la velocidad transversal (3.32) que teniendo en cuenta que s es el parámetro de longitud también se da que $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0$ y nos queda:

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \quad (3.45)$$

Antes solo se cumplía para los extremos de la cuerda pero ahora lo hemos extendido a todos. Así también podemos dejar las ecuaciones (3.39) y (3.40) como:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s} \quad (3.46)$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \quad (3.47)$$

Veamos las ecuaciones del movimiento (3.25) como quedan para $\mu = 0$, $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$ y $\mathcal{P}^{\tau 0}$ es:

$$\mathcal{P}^{\tau 0} = \frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

La ecuación del movimiento nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (3.49)$$

Esta ecuación nos da información sobre la energía de una cuerda. $T_0 ds$ que está multiplicado por el factor relativista se puede entender como la energía en reposo de la cuerda y aparece dividida por $d\sigma$ que es un pequeño trozo de la cuerda, por lo tanto, la relación de arriba nos muestra que la energía de cada trozo de cuerda se conserva en el tiempo. Si multiplicamos esta ecuación por $d\sigma$, que es constante, e integramos el interior que hemos visto que era la energía total obtenemos el Hamiltoniano:

$$H = \int T_0 ds \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

Ahora estudiaremos las componentes espaciales de la ecuación (3.25):

$$\frac{T_0}{c^2} \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left[T_0 \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right] \quad (3.51)$$

Recordar que $\partial \mathbf{X} / \partial t = v_{\perp}$ y es la única variable que depende de t nos queda en ese lado y el término $ds/d\sigma$ en $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ hace que la derivada en σ de la derecha pase a ser en s , nos queda:

Es natural introducir el concepto de tensión efectiva que incluye el factor relativista como:

$$T_{eff} = T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \quad (3.52)$$

Hemos visto que los extremos de la cuerda se mueven con $v_{\perp} = c$ así la tensión efectiva se anula en los extremos lo cual es coherente con lo que esperaríamos. Esta condición sobre la velocidad de los extremos es necesaria para poder entender que una cuerda relativista abierta con extremos libres tenga tensión.

Aunque hemos avanzado la ecuación (3.51) todavía es compleja. La razón de esto es que a pesar de tener parametrizado σ de forma que generamos líneas con σ constante a partir de una cuerda primera pero no hemos definido como parametrizamos esta. Lo haremos utilizando la idea de energía que hemos visto antes de tal forma que cada segmento de cuerda porte la misma cantidad de energía. Tomemos una versión de (3.51) donde mantenemos las derivadas en s , movemos los factores relativistas y cambiamos la derivada de la velocidad con respecto al tiempo como segunda derivada de la posición:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}_{\perp}}{\partial t^2} = \frac{\left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right] \quad (3.53)$$

Si asignamos a cada trozo de cuerda una fracción proporcional de la energía nos queda una condición que simplifica la relación.

$$d\sigma = ds \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{T_0} dE \quad (3.54)$$

Asignamos el dominio de σ a partir de esto:

$$\sigma \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 = \frac{E}{T_0} \quad (3.55)$$

Simplificamos también (3.46) y (3.47):

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \quad (3.56)$$

Sustituyendo en (3.25) obtenemos la ecuación de ondas en las componentes espaciales:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.57)$$

Examinemos las condiciones de contorno en los extremos libres en (3.56), es recordemos $\mathcal{P}^\sigma = 0$, lo que implica que:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \quad (3.58)$$

Además de las ecuaciones del movimiento, en un sistema también es fundamental estudiar las cantidades conservadas. Sabemos que las cantidades conservadas surgen de la simetrías de un sistema y en este caso hemos construido la acción imponiendo que sea invariante bajo transformaciones Lorentz. Lo comprobamos y vemos que forma toma la corriente conservada.

Una transformada de Lorentz es una transformación infinitesimal lineal en las coordenadas X^μ de la forma $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ donde llamamos a $\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu$ y $\epsilon^{\mu\nu}$ es una matriz anti-simétrica de constantes infinitesimales. Comprobemos explícitamente que esta transformación deja invariante los términos que aparecen en la densidad lagrangiana:

$$\delta \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\delta \partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\delta \partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) \quad (3.59)$$

$$= \eta_{\mu\nu} \left(\epsilon^{\mu\rho} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \epsilon^{\nu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\beta} \right) \quad (3.60)$$

$$= \epsilon_{\nu\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \epsilon_{\mu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\beta} \quad (3.61)$$

$$= (\epsilon_{\nu\rho} + \epsilon_{\mu\rho}) \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = 0 \quad (3.62)$$

Ya comprobado podemos usar la ecuación (2.57) que vimos en la sección de teoría de campos para la corriente conservada de un sistema.

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu} X_\nu \quad (3.63)$$

Como $\epsilon^{\mu\nu}$ es antisimétrico su producto con la corriente $j_{\mu\nu}^\alpha$ se anulará con la parte simétrica de este y solo quedará su parte antisimétrica que llamaremos:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha \quad (3.64)$$

Hemos ajustado las constantes ya que la normalización de las corrientes es de nuestra elección. La carga asociada a la corriente se define usando la parametrización de τ constante como la integral espacial de su componente temporal:

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = \int (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma \quad (3.65)$$

Hasta ahora solo habíamos introducido un parámetro con unidades, en la acción tenemos T_0 como la tensión de la cuerda pero vamos a cambiarlo por otro que llamaremos parámetro de pendiente α' . Este parámetro se usa desde los inicios de la Teoría de Cuerdas, su motivación surge de considerar una cuerda rígida rotando pues es la constante de proporcionalidad entre el momento angular de la cuerda y su energía.

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2 \quad (3.66)$$

Como el término de la izquierda no tiene unidades, α' tiene unidades de inversa de energía al cuadrado. Se puede ver que su relación con la tensión es:

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}, \quad T_0 = \frac{1}{2\pi \alpha' \hbar c} \quad (3.67)$$

Además, igual que definimos la distancia de Planck l_P usando la constante de Newton G , \hbar y c podemos calcular la longitud característica de una cuerda l_s usando α' :

$$l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'} \quad (3.68)$$

Obviando los factores de \hbar y c la longitud de la cuerda es proporcional a la raíz cuadrada del parámetro de pendiente α' igual que lo era la distancia de Planck de la constante de Newton lo que da una interpretación alternativa de este parámetro.

3.3. Parametrización en cono de luz

Aunque ya hemos extraído bastante información sobre el comportamiento de las cuerdas todavía no hemos obtenido unas ecuaciones del movimiento explícitas que es lo que haremos en esta sección. Para ello tenemos que ver como parametrizar mejor la hoja de mundo, la parametrización estática se basaba en tomar:

$$X^0(\tau, \sigma) = c\tau \quad (3.69)$$

Vamos a ver cómo parametrizar la cuerda en coordenadas de cono de luz pero estas son un caso particular de un forma de parametrizar más general:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau \quad (3.70)$$

Si tomamos $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ y $\lambda = c$ recuperamos la versión estática. Los puntos que satisfacen esta condición más general van a formar un hiperplano, también queremos que cualquier intervalo ΔX^μ , dentro del plano, sea tipo espacio o como en algún caso nulo pero nunca tipo tiempo lo que implica que η^μ tiene que ser tipo tiempo o nulo. Con estas condiciones se cumple que $n \cdot \Delta X^\mu = 0$, el hiperplano corta la hoja de mundo de tal forma que los vectores tipo espacio son perpendiculares a n que es normal al plano.

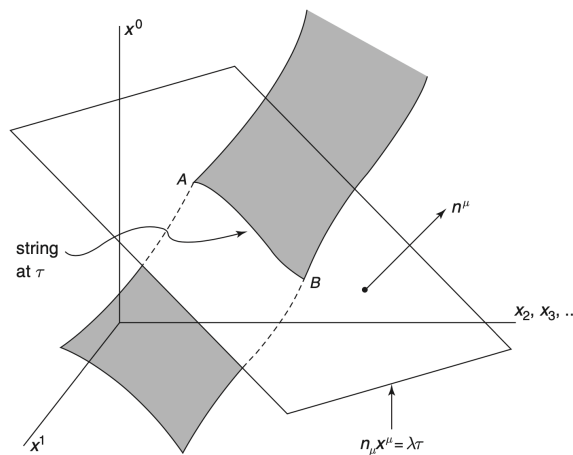


Figura 4: La condición de $n_\mu x^\mu = \lambda\tau$ fija los puntos que forman el hiperplano cuyo vector perpendicular es n^μ . Zwiebach (2009).

Para simplificar las ecuaciones futuras vamos a cambiar el sistema de unidades al sistema *naturales* que consiste en igualar la constantes fundamentales a uno:

$$\hbar = c = 1 \quad (3.71)$$

Esto no supone un problema porque si conocemos las unidades de la cantidad con la que estamos operando siempre podemos recuperar las \hbar o c que necesitemos. Es interesante ver cómo esto cambia las relaciones entre las unidades:

$$L = T, \quad M = L^{-1} \quad (3.72)$$

Si usamos las unidades naturales para (3.68) podemos ver qué unidades tiene α' en este sistema.

$$l_s = \sqrt{\alpha'} \Rightarrow [\alpha'] = [L^2] \quad (3.73)$$

Veamos como nos queda la acción de Nambu-Goto expresada en función de α' y en unidades naturales:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (3.74)$$

También podemos reescribir la condición (3.70) como:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p)\tau \quad (3.75)$$

Hemos tomado $\lambda = \tilde{\lambda}(n \cdot p)$ donde n lo escogemos de forma que $n \cdot p$ sea una cantidad conservada, al aparecer en ambos lados el modulo de n es irrelevante solo aporta la dirección. Además, podemos ver la dependencia de $\tilde{\lambda}$ dividiendo a ambos lados entre el tiempo queda que $\tilde{\lambda}$ es proporcional a velocidad entre fuerza:

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha'\hbar c^2 \propto \alpha' \quad (3.76)$$

Para cuerdas abiertas tomamos que $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$ así nos queda la condición:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau \quad (\text{Cuerdas abiertas}) \quad (3.77)$$

La parametrización de σ que hemos hecho en el caso de la parametrización estática buscaba que cada trozo de cuerda tuviera una parte proporcional de energía, densidad de energía constante $\mathcal{P}^{\tau 0}$. En este caso más general vamos a imponer que:

$$n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \sigma) = a \quad (3.78)$$

Esta condición es invariante bajo transformaciones de parametrización en σ porque siempre es posible escoger una parametrización en $\tilde{\sigma}$ tal que $n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \tilde{\sigma})$ no dependa de $\tilde{\sigma}$. Integrando sobre la cuerda abierta con $\sigma \in [0, \pi]$ podemos sacar el valor de a :

$$\int_0^{\pi} d\sigma n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \sigma) = n \cdot p = \pi a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{n \cdot p}{\pi} \quad (3.79)$$

La condición queda:

$$n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \sigma) = \frac{n \cdot p}{\pi} \quad (\text{Cuerdas abiertas}) \quad (3.80)$$

Para el caso de una cuerda cerrada el intervalo de integración es $\sigma \in [0, 2\pi]$ por lo que la condición de parametrización en σ queda:

$$n \cdot \mathcal{P}^{\tau}(\tau, \sigma) = \frac{n \cdot p}{2\pi} \quad (\text{Cuerdas cerradas}) \quad (3.81)$$

Atendiendo a esto la parametrización en τ más conveniente es $\tilde{\lambda} = \alpha'$ dejando:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \alpha'(n \cdot p)\tau \quad (\text{Cuerdas cerradas}) \quad (3.82)$$

Estas relaciones se pueden resumir en:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha'(n \cdot p)\tau \quad (3.83)$$

$$n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^{\tau} \quad (3.84)$$

Donde β es:

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{Cuerdas abiertas} \\ 1 & \text{Cuerdas cerradas} \end{cases} \quad (3.85)$$

Aplicamos la ecuación del movimiento introduciendo n :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0 \quad (3.86)$$

El primer término se anula por (3.80) así que el resultado es:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0 \quad (3.87)$$

Esta relación implica que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ se anula en algún punto de la cuerda. En el caso de las cuerdas abiertas se anula en los extremos lo que garantiza la conservación de $n \cdot p$. Sin embargo, para las cuerdas cerradas no existe ningún punto especial donde sepamos que se anula. Para arreglar esto vamos a tomar la hoja de mundo de una cuerda cerrada como una colección de cuerdas de tal forma que cada una tiene τ constante, tomamos en una un punto cualquiera como $\sigma = 0$ y a partir de este imponiendo la condición de que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ se anule deducimos el punto en las siguientes cuerdas. Con este método podemos asegurar que:

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0 \quad (\text{Cuerdas abiertas y cerradas}) \quad (3.88)$$

3.3.1. Ecuaciones del movimiento

Una vez establecida la parametrización podemos ver las condiciones que impone a las ecuaciones del movimiento. Que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ se anule implica que:

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (3.89)$$

Así la expresión para \mathcal{P}^τ (3.22) se reduce a:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \quad (3.90)$$

Si derivamos con respecto a τ en (3.83) nos queda $n \cdot \dot{X} = \beta\alpha'(n \cdot p)$ y si despejamos $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ de (3.84) nos queda que los factores de β , α' y $n \cdot p$ se cancelan dejando la condición:

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (3.91)$$

Las condiciones (3.89) y (3.91) se pueden recoger en:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (3.92)$$

Con estas relaciones podemos simplificar mucho las ecuaciones para las densidades de momento $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ y $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$. Usando (3.91) tenemos que $\dot{X}^2 = -X'^2$ y si sustituimos en (3.90) tenemos $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ es:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad (3.93)$$

Operando de forma similar para $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu'} \quad (3.94)$$

Con estas expresiones más sencillas ya podemos sacar unas ecuaciones del movimiento que podemos resolver. Utilizamos $\partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ el resultado es:

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0 \quad (3.95)$$

Las ecuaciones del movimiento de la una cuerda relativista son ecuaciones de ondas. Previamente usando la parametrización estática llegamos a la ecuación de ondas en (3.57) pero solo para las coordenadas espaciales, ahora la hemos extendido a todas las coordenadas.

3.3.2. Soluciones a las ecuaciones del movimiento

Resolveremos con toda generalidad las ecuaciones del movimiento para el caso de una cuerda abierta con las condición de ambos extremos libres. La forma más general de una solución para (3.95) es:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)) \quad (3.96)$$

Impongamos la condición de extremos libres $\partial X^\mu / \partial \sigma = 0$ en $\sigma = 0$:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \sigma) - g^{\mu'}(\tau - \sigma)) = 0 \quad (3.97)$$

Esto implica que f^μ y g^μ tienen la misma derivada, o lo que es lo mismo, difieren en una constante que puede ser absorbida dejando:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)) \quad (3.98)$$

Impongamos la condición en $\sigma = \pi$:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \sigma) - f^{\mu'}(\tau - \sigma)) = 0 \quad (3.99)$$

De esta condición podemos sacar que $f^{\mu'}$ tiene que ser periódica en 2π lo que nos permite hacer un desarrollo de Fourier de esta. Apreciar que esto es gracias a la parametrización en un principio arbitraria de $\sigma \in [0, \pi]$.

$$f^{\mu'} = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu) \quad (3.100)$$

Integramos esta expresión y agrupamos las constantes de integración de unas nuevas constantes para el desarrollo de Fourier. Sustituimos en (3.98) y el resultado es:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma \quad (3.101)$$

Cambiamos los coeficientes por otros a los que podremos extraer más adelante un sentido físico, llamamos a $a_n^\mu = B_n^\mu - iA_n^\mu$ e introducimos un factor para dejar las constantes adimensionales:

$$A_m^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau \equiv -i\sqrt{2\alpha'/n}(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \quad (3.102)$$

También podemos ver sentido físico a f_1^μ que está relacionado con el momento total p^μ :

$$p^\mu = \int \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \int \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu \pi \quad (3.103)$$

Así nos queda que $f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu$ y también llamamos a $f_0^\mu = x_0^\mu$. Aplicando todos los cambios en la ecuación (3.101) tenemos:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.104)$$

Hagamos un cambio de notación definiendo:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (3.105)$$

Escribimos de nuevo (3.104) usando esta nueva notación:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (3.106)$$

Notar que hemos cambiado la definición del sumatorio a todo n entero excluyendo el $n = 0$ que está fuera. Tomemos las derivadas de (3.106):

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (3.107)$$

$$X^{\mu'} = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \sin n\sigma \quad (3.108)$$

Al derivar el término con $n = 0$ podemos incluirlo en el sumatorio que recorrerá todos los números enteros. Las dos posibles combinaciones de estas ecuaciones dan:

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (3.109)$$

Tenemos soluciones a la ecuación de ondas y que satisfacen las ecuaciones de contorno de extremos libres pero con α_n^μ arbitrarios no podemos asegurar que cumplen con (3.89) y (3.91). Para esto va a ser conveniente estudiar la forma de las condiciones y soluciones en coordenadas de cono de luz.

Hemos visto que pasar a coordenadas de cono de luz implicaba cambiar x^0 y x^1 por x^+ y x^- usando las relaciones en (2.11) pero en este caso esa elección de coordenadas va a representar también un cambio en la parametrización. Como se introdujo en esta sección la parametrización en cono de luz es un caso particular en el que tomaremos:

$$n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right) \quad (3.110)$$

Usando esto tenemos que:

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+ \quad (3.111)$$

Sustituyendo en las condiciones generales de (3.83) y (3.84) llegamos a:

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}, \quad \beta = 2, 1 \quad (3.112)$$

El objetivo de usar esta parametrización es aprovechar la forma sencilla de X^+ y en X^- no hay dinámica ya que sus derivadas van a depender de las coordenadas transversales $X^I = (X^2, X^3, \dots, X^d)$. Veamos la condición (3.92) usando el producto definido en las coordenadas de cono de luz:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = -2(\dot{X}^+ \pm X^{+'})(\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0 \quad (3.113)$$

Sabemos que $\dot{X}^+ = \beta \alpha' p^+$ y $X^{+'} = 0$ por lo que la condición se puede reducir a:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\beta \alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 \quad (3.114)$$

Esta condición muestra que efectivamente la coordenada X^- no juega ningún papel fundamental porque al estar definidas sus derivadas, integrando podríamos determinar X^- salvo una constante que saldría de tomar su valor en un punto de la cuerda a la que llamaremos x_0^- .

En cuanto a X^+ si usamos (3.112) nos queda $X^+(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^+\tau$ lo que es equivalente a tomar la expansión para cualquier coordenada μ de (3.106) con:

$$x_0^+ = 0, \quad \alpha_n^+ = \alpha_{-n}^+ = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.115)$$

La condición de (3.114) podemos expresarla usando la definición de (3.109) para las coordenadas $\mu = -$ y $\mu = I$:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (3.116)$$

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (3.117)$$

Sustituimos en (3.114) y tomaremos a partir de ahora $\beta = 2$ porque trabajemos con la cuerda abierta:

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2\beta\alpha'p^+} (\sqrt{2\alpha'})^2 \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \quad (3.118)$$

$$= \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (3.119)$$

El único paso en esta deducción uno trivial es el cambio de variable $p + q = n$ para dejar la exponencial con la misma forma que en el término de la derecha y que como consecuencia de este cambio $q \rightarrow n - p$. Tenemos en ambos lados el sumatorio en n y la exponencial por lo cual igualamos el resto:

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (3.120)$$

Hemos llegado a las solución final. Tenemos una versión explícita para las oscilaciones de α_n^- en función de los osciladores transversales. La solución general queda definida por las constantes arbitrarias p^+ , x_0^- , x_0^I y todas las α_n^I . Podemos determinar usando x_0^I y α_n^I en (3.106) $X^I(\tau, \sigma)$, $X^+(\tau, \sigma)$ usando p^+ en (3.112) y con α_n^I calculamos α_n^- que junto con x_0^- en la ecuación (3.106) obtenemos $X^-(\tau, \sigma)$. Tenemos la solución completa.

El sumatorio del término de la derecha sobre los osciladores α_n^I es de gran utilidad por lo que ha nombrado como el modo transversal de Virasoro L_n^\perp :

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \Rightarrow \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad (3.121)$$

En el caso particular con $n = 0$ podemos usar la relación de (3.105) para expresar $\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^-$ y dejarlo en función de el modo transversal de Virasoro:

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp \quad (3.122)$$

También podemos relacionar las ecuaciones (3.116) y (3.117) usando la relación para α_n^- en (3.121) a través de los modos de Virasoro.

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 \quad (3.123)$$

Es interesante calcular la masa de la cuerda, especialmente porque cuando introduzcamos la teoría cuántica veremos cómo esta cambia este cálculo solucionando ciertos problemas que ahora detallaremos. Para calcular la masa usamos la ecuación relativista $M^2 = -p^2$ que podemos desarrollar usando la relaciones $2p^+ p^- = L_0^\perp / \alpha'$ y que $\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I = 2\alpha' p^I \rightarrow p^I p^I = \alpha_0^I \alpha_0^I / (2\alpha')$:

Deshago el cambio de notación de (3.105) con $\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n}$ para expresar la ecuación de la masa como:

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I \quad (3.124)$$

$$= \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I \quad (3.125)$$

$$= \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I \right) - \frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^I \alpha_0^I \quad (3.126)$$

$$= \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I \quad (3.127)$$

$$= \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I \quad (3.128)$$

Hemos llegado a este resultado de manera sencilla gracias a la parametrización en cono de luz. Esta ecuación resulta en un valor para la masa real y positivo porque $a^*a = |a|^2 \geq 0$ vemos que podemos ajustar los coeficientes a_n^I para obtener cualquier valor de masa que queramos, incluso estados sin masa esto resulta en dos problemas con las observaciones experimentales. Primero, en la naturaleza las partículas tienen masas discretas, no continuas, sin embargo, la ecuación (3.128) permite cualquier valor continuo para la masa. Segundo, en la teoría de cuerdas los modos de vibración de la cuerda corresponden a diferentes partículas y la ecuación permite más modos que partículas se observan.

En la práctica, esto resulta en una discrepancia entre las predicciones teóricas y las observaciones experimentales, donde solo se detectan un número finito y discreto de partículas. A continuación, la teoría cuántica modificará esta ecuación añadiendo una constante extra que solucionará estos problemas.

4. Cuerdas cuánticas relativistas

4.1. Cuerdas abiertas

Después del estudio detallado de la cuerdas relativistas estamos preparados para introducir la teoría cuántica y ver cómo afecta a las ecuaciones vistas hasta ahora. La parametrización en cono de luz se ha mostrado al final como la más efectiva por lo que continuaremos con ella para profundizar primero en el caso de cuerdas abiertas con extremos libres. Repasemos las ecuaciones fundamentales en una cuerda abierta:

$$\text{Ecuación de ondas: } \ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{Condiciones: } (\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (4.2)$$

Esto da lugar a una versión de las densidades de momento que solo dependen de las derivadas simples de las coordenadas:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad (4.3)$$

Las ecuaciones para la coordenadas de una cuerda abierta ($\beta = 2$) en la parametrización de cono de luz más útiles van a ser $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ y también una versión explícita de $\mathcal{P}^{\tau-}$ que la obtenemos deduciendo \dot{X}^- de (3.123) como:

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'}) \quad (4.4)$$

Sustituyendo $\dot{X}^I = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}$ nos queda la ecuación para $\mathcal{P}^{\tau-}$:

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^3} \right) \quad (4.5)$$

4.1.1. Cuantización de la cuerda abierta

El proceso de cuantización va a consistir en cambiar las variables dinámicas en operadores, la selección de estas variables atendiendo a las ecuaciones del movimiento anteriores pasarán a ser los siguientes operadores:

$$\text{Operadores de Schrödinger: } (X^I(\sigma), x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+) \quad (4.6)$$

$$\text{Operadores de Heisenberg: } (X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau)) \quad (4.7)$$

Aunque como se definió al principio los operadores Heisenberg tienen dependencia temporal como las variables x_0^- y p^+ son constantes fijadas serán operadores independientes del tiempo. Otra característica fundamental de la introducción de la teoría cuántica es la no trivialidad en la conmutación de los operadores. El hecho de que el conmutador de dos operadores no sea nulo tiene relación con la imposibilidad de medir las cantidades que representan en un punto simultáneamente. En una cuerda es de esperar que esto solo ocurra cuando estamos en el mismo punto σ por lo que definimos en analogía al caso de una partícula puntual:

$$[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (4.8)$$

$$[x_0^-, p^+] = -i \quad (4.9)$$

Estos conmutadores en la imagen de Schrödinger se pueden extender a la imagen de Heisenberg y ara ambas representaciones de los operadores todos los conmutadores posibles al margen de estos dos son nulos.

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (4.10)$$

$$[x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i \quad (4.11)$$

Para analizar la evolución temporal vamos a construir el Hamiltoniano. El tiempo en coordenadas de cono de luz lo tomamos como una translación en $X^+ = 2\alpha'p^+\tau$ generada por p^- que se corresponde a la energía en coordenadas de cono de luz:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha'p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha'p^+p^- \quad (4.12)$$

Asociando el Hamiltoniano como generador de la translaci3n temporal nos queda que $H = 2\alpha' p^+ p^-$ que podemos expresarlo todav3a de una forma m3s compacta usando los modos de Virasoro porque de (3.122), $L_0^\perp = 2\alpha' p^+ p^-$:

$$H = L_0^\perp \quad (4.13)$$

Podemos dar tambi3n una versi3n m3s expl3cita del Hamiltoniano como un operador de Heisenberg:

$$H(\tau) = 2\alpha' p^+ p^- = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-} \quad (4.14)$$

$$= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma) X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (4.15)$$

4.1.2. Soluciones y relaciones de conmutaci3n

Una vez definido el Hamiltoniano podemos obtener las ecuaciones del movimiento usando la ecuaci3n del movimiento de Heisenberg que establece que para un operador $\xi(\tau, \sigma)$ se cumple que:

$$i\dot{\xi}(\tau, \sigma) = [\xi(\tau, \sigma), H(\tau)] \quad (4.16)$$

Aplicando esto puedo deducir las ecuaciones cl3sicas relativistas del movimiento (4.3) operando con $\dot{X}^I(\tau, \sigma)$:

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), H(\tau)] \quad (4.17)$$

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = \left[X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right] \quad (4.18)$$

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.19)$$

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \quad (4.20)$$

y (4.1) a partir de $\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)$:

$$i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), H(\tau)] \quad (4.21)$$

$$i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = \left[\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \frac{X^{J'}(\tau, \sigma')X^{J'}(\tau, \sigma')}{(2\pi\alpha')^2} \right] \quad (4.22)$$

$$i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] X^{J'}(\tau, \sigma') \quad (4.23)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' X^{J'}(\tau, \sigma') [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')]$$

$$i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' \frac{\partial}{\partial\sigma'} [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] X^{J'}(\tau, \sigma') \quad (4.24)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' X^{J'}(\tau, \sigma') \frac{\partial}{\partial\sigma'} [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')]$$

$$i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' (-i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')) \frac{\partial}{\partial\sigma'} X^{J'}(\tau, \sigma') \quad (4.25)$$

$$\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' X^{I''}(\tau, \sigma') \delta(\sigma' - \sigma) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^I \right) (\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} X^{I''}(\tau, \sigma) \quad (4.27)$$

$$\ddot{X}^I - X^{I''} = 0 \quad (4.28)$$

La condición de extremos libres se convierte directamente en la condición sobre el operador:

$$\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = 0, \quad \sigma = 0, \pi \quad (4.29)$$

También tenemos la condición (4.2) que depende de $(\dot{X}^I \pm X^{I'})$ por lo que es interesante estudiar sus conmutaciones. Para ello vamos a fijarnos en que podemos reescribir (4.10) como:

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.30)$$

Si ahora tomo la derivada con respecto a σ de este conmutador obtengo:

$$[X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.31)$$

Operando con esta relación ya puedo evaluar el conmutador entre la combinación lineal de la derivadas resultando en:

$$[(\dot{X}^I \pm X^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'})(\tau, \sigma')] = \pm [\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] \pm [X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] \quad (4.32)$$

$$= \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.33)$$

Al ver el desarrollo se puede ver que solo aportan los términos cruzados así que:

$$[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma')] = 0 \quad (4.34)$$

Estas relaciones de conmutación no son fáciles de manejar y dependen del parámetro σ que es continuo. Usando la ecuación del movimiento de $X^I(\tau, \sigma)$ en forma de una expansión de modos α_n^I , que ahora pasarán a ser operadores, vamos a poder reducir los conmutadores anteriores en forma de conmutadores entre modos α . Recuperamos la expresión (3.117):

$$(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi] \quad (4.35)$$

Defino una cantidad para poder recoger ambas condiciones en un único conmutador:

$$A^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau + \sigma)} = \begin{cases} (\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma) & \sigma \in [0, \pi] \\ (\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma) & \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad (4.36)$$

Esta cantidad $A^I(\tau, \sigma)$ tiene un rango $\sigma \in [-\pi, \pi]$ y es periódica en con un periodo de 2π . Como vimos en (4.33) y (4.34) el conmutador es nulo si la combinación tiene distinto signo y si tiene el mismo el valor es igual sea positivo o negativo. Todas la opciones se pueden recoger haciendo el conmutador de $A^I(\tau, \sigma)$:

$$e^{-im(\tau + \sigma)} e^{-in(\tau + \sigma)} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.37)$$

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') e^{im\sigma} e^{in\sigma} \quad (4.38)$$

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.39)$$

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = i \eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{in\sigma} \quad (4.40)$$

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = -n \eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \quad (4.41)$$

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = -n \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (4.42)$$

$$(4.43)$$

Repasemos algunos pasos en esta deducción, hemos introducido las integrales usando las propiedades de la delta de Dirac sobre funciones periódicas, operando con ellas llegamos a una integral en un intervalo en el que la exponencial es periódica lo que condiciona a que $m + n = 0$ para que no se anule y esta condición se puede expresar con la delta de Kronecker. Aplicando esta condición $-n = m$ la exponencial en el lado izquierdo se hace uno y nos queda como resultado:

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0} \quad (4.44)$$

Esta es la relación fundamental, notar que habíamos obtenido $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'}p^I$ y este conmuta con todos los osciladores. Sin embargo, por su dependencia con el momento de la cuerda es de esperar que no conmute con x_0^I . Comprobémoslo para acabar de pasar el conmutador (4.11) a expresión en forma de osciladores.

Tomamos la expresión de $X^I(\tau, \sigma)$ en (3.106) y su derivada temporal:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (4.45)$$

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (4.46)$$

Con estas definiciones calculo el siguiente conmutador:

$$\int_0^\pi d\sigma [X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^I(\tau, \sigma')] = \int_0^\pi d\sigma \left[2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \right] \quad (4.47)$$

$$[x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau, \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^J + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \alpha_n^J e^{-in\tau} \cos n\sigma] = 2\alpha' i\eta^{IJ} \quad (4.48)$$

Esta expresión depende de los conmutadores $[x_0^I, \alpha_0^J]$, que es el que queremos calcular, hemos visto que $[\alpha_0^I, \alpha_n^J] = 0$ incluido $n = 0$ y nos falta por saber el valor de $[x_0^I, \alpha_n^J]$. Conociendo que se anulan los conmutadores que contienen α_0^I y moviendo las constantes nos queda:

$$[x_0^I, \alpha_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} [x_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] \cos n\sigma = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ} \quad (4.49)$$

Si aplico la integral $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \cos n\sigma$ se anulan todos los términos menos el segundo de la izquierda lo que implica que $[x_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] = 0$ y por lo tanto $[x_0^I, \alpha_n^J] = 0$.

Esto nos deja con lo que buscábamos:

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \quad (4.50)$$

Usando que $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$ recuperamos el conmutador original $[x_0^I, p^J] = i \eta^{IJ}$.

Ya tenemos el funcionamiento de los conmutadores de los modos α_n^I pero vamos a ver como se convierten de una forma muy similar a los conmutadores entre los operadores creación y aniquilación. Definimos primero igual que en caso clásico los modos α_n^μ como osciladores:

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (4.51)$$

Tanto α como a son variables clásicas las convertimos a operadores y hay que sustituir el conjugado complejo por el conjugado transpuesto o Hermitiano:

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (4.52)$$

Usando esta definición se cumple que $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$ para $n \in \mathbb{Z}$. Esto era de esperar porque los operadores x_0^I y p_0^I son Hermíticos. Además usando estas propiedades se puede ver que $X^I(\tau, \sigma)$ también es Hermítico. Teniendo definidos los operadores a_n^I y $a_n^{I\dagger}$ podemos reescribir (4.44) como:

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (4.53)$$

$$[a_m^I \sqrt{m}, a_n^{J\dagger} \sqrt{n}] = m \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (4.54)$$

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \frac{m}{\sqrt{mn}} \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (4.55)$$

La delta de Kronecker impone que $m = n$ así que el resultado final es:

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ} \quad (4.56)$$

Notar que si tomamos el conmutador $[a_m^I, a_n^J] = [a_m^I, (a_{-n}^J)^\dagger] = \delta_{m,-n} \eta^{IJ}$ no es nulo solo cuando $m = -n$ si no es así:

$$[a_m^I, a_n^J] = [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0 \quad (4.57)$$

Finalmente podemos reescribir (4.45) usando los operadores creación y aniquilación. Primero tenemos que modificar el sumatorio de es expresión por que lo operadores a_n^I y $a_n^{I\dagger}$ los hemos definido para $n \geq 1$:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) \cos n\sigma \quad (4.58)$$

Ahora ya sí la expresión final la obtenemos solo sustituyendo las definiciones:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_n^I e^{-in\tau} - a_{-n}^{I\dagger} e^{in\tau}) \cos n\sigma \quad (4.59)$$

Vamos a volver a llegar esta expresión pero veremos como hacerlo desde una perspectiva más física. Aprovecharemos los cálculos hechos sobre el oscilador armónico cuántico, algo que no debería extrañarnos porque las relaciones de conmutación que hemos visto antes podemos ver que son similares.

Empezamos tomando la acción:

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I'} X^{I'}) \quad (4.60)$$

Tomamos igual que antes que $\mathcal{P}^{\tau I} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^I} = \dot{X}^I / (2\pi\alpha')$ y escribimos el Hamiltoniano correspondiente como:

$$H = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{H} = \int_0^\pi d\sigma (\mathcal{P}^{\tau I} \dot{X}^I - \mathcal{L}) \quad (4.61)$$

$$= \int_0^\pi d\sigma (\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + X^{I'} X^{I'}) \quad (4.62)$$

Ya podemos cuantizar la teoría, vamos a usar como variable dinámica una expansión que sustituye a $X^I(\tau, \sigma)$ como:

$$X^I(\tau, \sigma) = q^I(\tau) + 2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^I(\tau) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.63)$$

Evaluemos la acción con esta expansión:

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = q^I(\tau) + 2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^I(\tau) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.64)$$

$$X^{I'}(\tau, \sigma) = -2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^I(\tau) \sqrt{n} \sin n\sigma \quad (4.65)$$

Sustituimos en la acción, las integrales de la forma $(\sin n\sigma \sin m\sigma)$ y $(\cos n\sigma \cos m\sigma)$ se anulan a menos que $n = m$ lo que deja la acción como:

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{4\alpha'} \dot{q}^I(\tau) \dot{q}^I(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} \dot{q}_n^I(\tau) \dot{q}_n^I(\tau) - \frac{n}{2} q_n^I(\tau) \frac{n}{2} q_n^I(\tau) \right) \right] \quad (4.66)$$

Esta acción tiene la forma de (2.74) por lo que extrapolamos que q_n^I con $n \geq 1$ son las coordenadas de osciladores armónicos por lo que podemos usar los desarrollos previos para ver que:

$$p^I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} = \frac{1}{2\alpha'} \dot{q}^I, \quad [q^I, p^J] = i\eta^{IJ} \quad (4.67)$$

y el Hamiltoniano queda:

$$H = \alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} (p_n^I p_n^I + q_n^I q_n^I) \quad (4.68)$$

Los operadores creación y aniquilación en el oscilador armónico cuántico y su relación de conmutación eran:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_n - iq_n), \quad a_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_n + iq_n) \quad [a_n, a_n^\dagger] = 1 \quad (4.69)$$

de ahí podemos deducir que:

$$q_n = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_n - a_n^\dagger), \quad p_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_n + a_n^\dagger) \quad (4.70)$$

Vamos a pasar a trabajar en la imagen de Heisenberg para ver la dependencia con el tiempo. Dada su forma de conmutación se puede ver que $a_n(t) = a_n e^{-int}$ y $a_n^\dagger(t) = a_n^\dagger e^{int}$ por lo que:

$$q_n(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_n^I e^{-in\tau} - a_n^{\dagger I} e^{in\tau}) \quad (4.71)$$

Veamos evolucionar en el tiempo este operador usando la ecuación de Heisenberg:

$$\dot{q}^I(\tau) = i[H, q^I(\tau)] = i\alpha'[p^J p^J(\tau), q^I] = 2\alpha' p^I(\tau) \quad (4.72)$$

Integrando esto en el tiempo y añadiendo como constante de integración x_0^I obtenemos una versión explícita de $q^I(\tau)$:

$$q^I(\tau) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau \quad (4.73)$$

Sustituyendo en (4.63) recuperamos la expresión final a la que habíamos llegado mediante el otro proceso:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^I e^{-in\tau} - a_n^{I\dagger} e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.74)$$

Esta última deducción ha servido para poder asociar que las variables clásicas se pueden identificar como osciladores lo agilizará el proceso de cuantización para otras configuraciones de la cuerda a mayores de la abierta.

4.1.3. Operadores de Virasoro

Ya tenemos una versión de las coordenadas transversales en su forma de expansión y su relación con los osciladores armónicos. Estudiemos ahora $X^+(\tau, \sigma)$ y $X^-(\tau, \sigma)$, para X^+ tomamos $x_0^+ = 0$ y $\alpha_n^+ = 0$ para $n \neq 0$ lo que deja:

$$X^+(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau \quad (4.75)$$

Y la expansión de X^- era:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (4.76)$$

Aplicando las condiciones sobre estas ecuaciones llegamos a los modos de Virasoro:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (4.77)$$

Hemos llamado a L_n^\perp los modos transversales de Virasoro porque se expresan en función de los modos α . En esta sección hemos visto que los modos α han pasado a ser operadores con relaciones de conmutación no triviales por lo que tenemos que hacer una revisión de cómo ordenarlos. El *orden normal* de los operadores es que todos los operadores de aniquilación estén a la derecha de los operadores de creación esto garantiza un comportamiento esperado sobre el estado vacío $|\Omega\rangle$ de tal forma que $a_p |\Omega\rangle = 0$, el estado vacío representa un estado de cero energía. Dada esta condición sobre el orden de los operadores y su relación con la energía del estado vacío recordemos que el Hamiltoniano expresado en términos de operadores de Virasoro era $H = L_0^\perp$ por lo que nos interesa estudiar el operador L_0^\perp en detalle:

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (4.78)$$

Recordemos lque α_p^I se asocia al operador aniquilación y α_{-p}^I al operador creación con $p \geq 0$. De los dos sumatorios el primero sí esta ordenado *normal* pero el segundo no por lo que vamos a cambiarlo usando la relación de conmutación: $[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m,n}$

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) \quad (4.79)$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{II} \quad (4.80)$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \quad (4.81)$$

En el tercer término encontramos primero que ha aparecido al sumar sobre η^{II} una constante $(D-2)$ que se corresponde a la dimensión de las coordenadas transversales y luego un sumatorio sobre todos los números enteros positivos que en un principio parece una suma divergente. Esto último implica varios problemas porque como hemos visto L_0^\perp esta directamente relacionado con la energía y con el cálculo de la masa de las cuerdas por lo que esperamos que de un valor finito. Este tercer término problemático vamos a excluirlo de nuestra definición de L_0^\perp y sumarlo como una constante a y veremos su valor e influencia:

$$L_0^\perp \rightarrow L_0^\perp + a, \quad a = \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \quad (4.82)$$

Vamos a hacer un avance de porqué hemos tomado el sumatorio que parece divergente como una constante a finita. Usaremos un resultado matemático conocido de la función zeta de Riemann en un principio definida para números complejos pero que podemos extender y usar en este caso.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12} \quad (4.83)$$

Sustituyendo en la definición de a en (4.82) tenemos que es una constante que depende del número de dimensiones D como:

$$a = -\frac{1}{24}(D - 2) \quad (4.84)$$

Con esta definición podemos escribir el operador transversal de Virasoro ordenado *normal* expresado en términos de los operadores creación $a^{I\dagger}$ y aniquilación a^I que se relacionan con los modos α^I en (4.52) y $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'}p^I$, sustituimos en (4.81) sin en el tercer término a que se tratará a parte:

$$L_0^\perp = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I\alpha_p^I \quad (4.85)$$

$$= \alpha'p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^I a_p^{I\dagger} \quad (4.86)$$

Introduzcamos la nueva definición del operador transversal de Virasoro con la constante extra en cálculos anteriores, aplicada sobre (3.122) tenemos que:

$$2\alpha'p^- \equiv \frac{1}{p^+}(L_0^\perp + a) \quad (4.87)$$

Repitamos también el cálculo de la masa de la cuerda. La aparición de esta constante recuerda el comentario que hicimos sobre cómo la introducción de la teoría cuántica iba a solucionar los problemas que vimos.

$$M^2 = 2p^+p^- - p^I p^I \quad (4.88)$$

$$= \frac{1}{\alpha'}(L_0^\perp + a) - p^I p^I \quad (4.89)$$

$$= \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right) \quad (4.90)$$

Antes de continuar con es razonable explorar el álgebra de Virasoro en más profundidad para un $n \neq 0$. Primero comprobemos la Hermeticidad de L_n^\perp :

$$(L_n^\perp)^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{n-p}^I \alpha_p^I)^\dagger \quad (4.91)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_p^I)^\dagger (\alpha_{n-p}^I)^\dagger \quad (4.92)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_{-(n-p)}^I \quad (4.93)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{-n-p}^I \quad (4.94)$$

$$= L_{-n}^\perp \quad (4.95)$$

En el paso entre (4.93) y (4.94) hemos cambiado $p \rightarrow -p$ sin perder generalidad. Uno de los aspectos más relevantes del álgebra de Virasoro es que dos operadores de Virasoro L_n^\perp y L_m^\perp no conmutan si $n \neq m$, para comprobar esto primero tenemos que conocer como conmutan con α_n^I :

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] \quad (4.96)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^I [\alpha_p^I, \alpha_n^J] + [\alpha_{m-p}^I, \alpha_n^J] \alpha_p^I) \quad (4.97)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^I p \delta_{p+n,0} + (m-p) \delta_{m-p+n,0} \alpha_p^I) \quad (4.98)$$

$$= -n \alpha_{m+n}^I \quad (4.99)$$

En el último paso las deltas de Konecker imponen que el sumatorio en p es siempre nulo salvo para $p = -n$ y $p = m+n$ por lo que solo sacamos eso términos que sumados nos dan el resultado final. Notar que se conserva el número de modo del conmutador en la suma $m+n$ y también el índice espacial J que aporta α_n^J .

También vamos a calcular el conmutador del operador de Virasoro con x_0^I que nos será útil cuando estudiemos cómo actúa este operador sobre las coordenadas:

$$[L_m^\perp, x_0^I] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, x_0^I] \quad (4.100)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^I [\alpha_p^I, x_0^I] + [\alpha_{m-p}^I, x_0^I] \alpha_p^I) \quad (4.101)$$

$$= \frac{1}{2} [\alpha_m^J (-\sqrt{2\alpha'} i \eta^{JI}) + (-\sqrt{2\alpha'} i \eta^{JI}) \alpha_m^J] \quad (4.102)$$

$$= -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I \quad (4.103)$$

Hemos usado en la deducción que $[x_0^I, \alpha_n^J] = 0$ si $n \neq 0$ y $[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}$ lo que implica que el primer término del sumatorio solo es distinto de 0 si $p = 0$ y el segundo cuando $m = p$.

Ya podemos hacer los cálculos del conmutador entre dos operadores de Virasoro L_n^\perp y L_m^\perp . Como queremos siempre trabajar con el operador de Virasoro ordenado *normal* vamos a escribirlo descomponiendo el sumatorio para que se cumpla:

$$L_m^\perp = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \alpha_{m-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_k^I \alpha_{m-k}^I \quad (4.104)$$

Así para cualquier m tenemos un operador aniquilación a la derecha, en el primer sumatorio $k \geq 0$ y en el segundo $m - k > 0$ porque $k < 0$. Usando esto ya podemos empezar con el conmutador:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} [\alpha_{m-k}^I \alpha_k^I, L_n^\perp] + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} [\alpha_k^I \alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] \quad (4.105)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} ([\alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] \alpha_k^I + \alpha_{m-k}^I [\alpha_k^I, L_n^\perp]) \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \sum_{k < 0} ([\alpha_k^I, L_n^\perp] \alpha_{m-k}^I + \alpha_k^I [\alpha_{m-k}^I, L_n^\perp]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} ((m-k) \alpha_{m-k+n}^I \alpha_k^I + \alpha_{m-k}^I k \alpha_{k+n}^I) \quad (4.107) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (k \alpha_{k+n}^I \alpha_{m-k}^I + \alpha_k^I (m-k) \alpha_{m-k+n}^I) \end{aligned}$$

Puede que algunos términos no estén ordenados *normal* por lo que vamos a dividir el cálculo para dos casos $m + n \neq 0$ y $m + n = 0$.

$m + n \neq 0$: Todos los operadores conmutan por lo que podemos agrupar los términos

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (m - k) \alpha_{m-k+n}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k+n}^I \quad (4.108)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (m - k) \alpha_{m-k+n}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (k - n) \alpha_{m-k+n}^I \alpha_k^I \quad (4.109)$$

$$= (m - n) L_{m+n}^\perp \quad (4.110)$$

Para poder expresar los dos sumatorios como los que se corresponden con L_{m+n}^\perp hemos hecho un cambio de variable en el segundo sumatorio $k \rightarrow k - n$

$m + n = 0$: Esto implica que $m = -n$ así que

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m - k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{m-k}^I k \alpha_{k-m}^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} k \alpha_{k-m}^I \alpha_{m-k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_k^I (m - k) \alpha_{m-k+n}^I \end{aligned} \quad (4.111)$$

Hacemos los cambios de variables sobre k y m necesarios de tal forma que en cada término quede proporcional a $\alpha_{-k}^I \alpha_k^I$: el primer término queda igual, en el segundo $k \rightarrow -k$, en el tercero $k \rightarrow m - k$ y en el cuarto $k \rightarrow m - k$. Esto también cambia los límites del sumatorio.

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m - k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m + k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m + k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} (m - k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \end{aligned} \quad (4.112)$$

Todos los términos están ordenados *normal* excepto el tercero con el que tenemos que trabajar un poco más:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_k^I \alpha_{-k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \quad (4.113)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) [\alpha_k^I, \alpha_{-k}^I] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \quad (4.114)$$

Sustituyendo esto podemos agrupar los términos proporcionales a $(m+k)$ en un sumatorio que empieza en $k=1$ y con los términos de $(m-k)$ es un poco menos obvio pero tenemos un sumatorio que empieza en $k=0$ finaliza en $k=m$ y otro que empieza en $k=m+1$ y va hasta el infinito por lo que podemos juntarlos en uno desde $k=0$ y sumarlo al primero. Además tenemos un término proporcional a un conmutador con el que tendremos que operar de forma similar al caso de L_0^\perp . La expresión a la que llegamos es:

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + A(m) \quad (4.115)$$

Donde llamamos a $A(m)$:

$$A(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) [\alpha_k^I, \alpha_{-k}^I] \quad (4.116)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m k(m-k) \eta^{II} \quad (4.117)$$

$$= (D-2) \left(\frac{1}{2} m \sum_{k=1}^m k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k^2 \right) \quad (4.118)$$

$$= (D-2) \frac{1}{12} (m^3 - m) \quad (4.119)$$

En el último paso he operado utilizando los resultados matemáticos: $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$ y $\sum_{k=1}^m k^2 = (2m^3 + 3m^2 + m)/6$.

Sustituimos en (4.115) y llegamos al resultado:

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (4.120)$$

$$= m \alpha_0^I \alpha_0^I + 2m \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (4.121)$$

$$= 2m \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \right) + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (4.122)$$

$$= 2m L_0^\perp + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (4.123)$$

Ya tenemos los resultados para los dos casos de $m+n \neq 0$ y $m+n = 0$ que se pueden expresar en uno solo como:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad (4.124)$$

Finalizamos el estudio de los operadores de Virasoro, ya definida su álgebra, cómo actúa este sobre las coordenadas. Tomamos la expansión de las coordenadas transversales en modos:

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = [L_m^\perp, x_0^I] + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \cos n\sigma e^{-in\tau} [L_m^\perp, \alpha_n^I] \quad (4.125)$$

$$= -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \cos n\sigma e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I \quad (4.126)$$

$$(4.127)$$

Si expandimos el coseno en forma de exponenciales podemos meter el primer término dentro del sumatorio:

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -i\sqrt{2\alpha'} \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{in(\tau-\sigma)} + e^{in(\tau+\sigma)}) \alpha_{m+n}^I \quad (4.128)$$

Para poder interpretar esto vamos a hacer un cambio de variable $n \rightarrow n - m$ y nos queda:

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'} e^{im(\tau-\sigma)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau-\sigma)} \alpha_n^I \quad (4.129)$$

$$- \frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'} e^{im(\tau+\sigma)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} \alpha_n^I$$

En esta forma vamos a poder introducir las derivadas de las coordenadas usando (4.35):

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2}e^{im(\tau-\sigma)}(\dot{X}^I - X^{I'}) \quad (4.130)$$

Ahora el conmutador entre el operador de Virasoro y las coordenadas tiene la forma:

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'} \quad (4.131)$$

donde hemos definido $\xi_m^\tau(\tau, \sigma)$ y $\xi_m^\sigma(\tau, \sigma)$ como:

$$\xi_m^\tau(\tau, \sigma) = -ie^{im\tau} \cos m\sigma, \quad \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) = e^{im\tau} \sin m\sigma \quad (4.132)$$

Esto se puede interpretar como una reparametrización en las coordenadas:

$$\tau \rightarrow \tau + \epsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma) \quad (4.133)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) \quad (4.134)$$

ϵ es un parámetro infinitesimal. Es cambio de parametrización es hace visible en forma del conmutador si tomamos el desarrollo de Taylor sobre las nuevas coordenadas:

$$X^I(\tau + \epsilon \xi_m^\tau, \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma) = X^I(\tau, \sigma) + \epsilon(\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}) \quad (4.135)$$

$$= X^I(\tau, \sigma) + \epsilon[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] \quad (4.136)$$

Veamos el caso de la reparametrización que generará L_0^\perp . Tenemos que $m = 0$ lo que implica que $\xi_0^\tau = -i$ y $\xi_0^\sigma = 0$ así que el conmutador con las coordenadas usando (4.131) es:

$$[L_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -i\partial_\tau X^I \quad (4.137)$$

El operador L_0^\perp genera una translación en el tiempo lo que resulta en la ecuación del movimiento de Heisenberg. Esto era de esperar ya que sabemos $H = L_0^\perp$.

4.1.4. Invarianza Lorentz

En la sección de cuerdas relativistas estudiamos cómo a partir de la invarianza de la acción bajo transformaciones Lorentz daba lugar a corrientes $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$ y resultaban en cargas conservadas cuya expresión era:

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = \int (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma \quad (4.138)$$

Usando que $\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$ nos queda:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma \quad (4.139)$$

Vamos a expresar la carga en función de los modos α_n^μ usando la expansión de (3.106) y su derivada temporal. Necesitamos calcular $X^\mu \dot{X}^\nu$:

$$X^\mu \dot{X}^\nu = x_0^\mu (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu) + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu \cos^2 n\sigma + \dots \quad (4.140)$$

Solo nos hemos quedado con los términos que no conmutan con $m = -n$ porque al entrar en (4.139) si conmutan se van a cancelar. Llegamos a la forma final sustituyendo y usamos que $p^\mu = \alpha_0^\mu / \sqrt{2\alpha'}$ e integramos el $\cos^2 n\sigma$:

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (4.141)$$

Ya tenemos una expansión en modos de la carga conservada pero no es obvio que podamos directamente pasar los modos α_n^μ a sus operadores cuánticos correspondientes para obtener los generadores de Lorentz cuánticos. Para comprobar esto vamos a exigirle consistencia con la teoría, el generador M^{-I} puede representar el caso más delicado ya que depende de X^- que es a su vez función de X^I . Sabemos que tiene que cumplirse que:

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0 \quad (4.142)$$

La ecuación de M^{-I} a partir de (4.141) es:

$$M^{-I} = x_0^- p^I - x_0^I p^- - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \quad (4.143)$$

Antes de hacer el conmutador tenemos que comprobar que es Hermítico y que está ordenado *normal*, esto último es obvio porque los operadores aniquilación α_n^μ están a la derecha siempre. El término de $x_0^- p^I$ sí es Hermítico porque x_0^- conmuta siempre y los modos del sumatorio también son Hermíticos, sin embargo, $x_0^I p^-$ no conmutan por lo que no es Hermítico, para hacerlo lo hacemos simétrico. Podemos reescribirlo usando que $2\alpha' p^- \equiv (L_0^\perp + a)/p^+$ y $\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = L_n^\perp/p^+$:

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \quad (4.144)$$

$$= x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \quad (4.145)$$

Para realizar el cálculo explícito del conmutador $[M^{-I}, M^{-J}]$ de manera detallada analizaremos cada término que da el conmutador por separado:

$$\begin{aligned} [M^{-I}, M^{-J}] = & \left[x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp), \right. \\ & \left. x_0^- p^J - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^J (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^J) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^J - \alpha_{-n}^J L_n^\perp) \right] \end{aligned} \quad (4.146)$$

Conmutador del término $x_0^- p^I$ con $x_0^- p^J$:

$$[x_0^- p^I, x_0^- p^J] = x_0^- [p^I, x_0^-] p^J + [x_0^-, x_0^-] p^I p^J = 0 \quad (4.147)$$

ya que $[x_0^-, x_0^-] = 0$ y $[p^I, x_0^-] = 0$.

Conmutador del término $x_0^- p^I$ con $-\frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^J (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^J)$:

$$\left[x_0^- p^I, -\frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^J (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^J) \right] = 0 \quad (4.148)$$

ya que $[p^I, x_0^J] = 0$ y $[x_0^-, x_0^J] = 0$.

Conmutador del término $x_0^- p^I$ con $-\frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^J - \alpha_{-n}^J L_n^\perp)$:

$$\left[x_0^- p^I, -\frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^J - \alpha_{-n}^J L_n^\perp) \right] = 0 \quad (4.149)$$

ya que $[p^I, L_{-n}^\perp] = 0$ y $[x_0^-, L_{-n}^\perp] = 0$.

Conmutador de los términos con $x_0^- p^J$ similares a los anteriores: Todos estos conmutadores también serán cero por las mismas razones mencionadas anteriormente.

Conmutadores entre los términos de la forma $-\frac{1}{4\alpha'p^\mp}(x_0^I(L_0^\perp+a)+(L_0^\perp+a)x_0^I)$ y $-\frac{1}{4\alpha'p^\mp}(x_0^J(L_0^\perp+a)+(L_0^\perp+a)x_0^J)$: Estos términos también se harán cero ya que no hay dependencia cruzada directa entre I y J .

Conmutadores entre los términos con sumatorios:

$$\left[-\frac{i}{\sqrt{2\alpha'p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp), -\frac{i}{\sqrt{2\alpha'p^+}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (L_{-m}^\perp \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J L_m^\perp) \right] \quad (4.150)$$

Usamos las relaciones de conmutación nos queda que el conmutador relevante es:

$$-\frac{1}{2\alpha'p^{+2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^I L_n^\perp, \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^J L_m^\perp \right] \quad (4.151)$$

Veamos como es conmutador de (4.124) entre L_{-m}^\perp y L_m^\perp y como podemos expresarlo:

$$[L_{-m}^\perp, L_m^\perp] = (-m - m)L_{-m+m}^\perp + \frac{(D-2)}{12}((-m)^3 - m)\delta_{-m+m,0} \quad (4.152)$$

$$= -2m(L_0^\perp + a) + \frac{1}{12}(D-2)(-m^3 - m) \quad (4.153)$$

$$= -2m^2 \left[\frac{1}{m}L_0^\perp + m \left(\frac{1}{24}(D-2) \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24}(D-2) + a \right) \right] \quad (4.154)$$

Operando con esta relación podemos llegar el resultado final:

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha'p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[m \left(1 - \frac{1}{24}(D-2) \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24}(D-2) + a \right) \right] \quad (4.155)$$

Dado que se tiene que anular el conmutador implica que lo que se encuentra entre corchetes se hace cero, es más, se puede ver que la condición se traslada a los paréntesis imponiendo que:

$$\left(1 - \frac{1}{24}(D-2) \right) = 0 \quad \rightarrow \quad D = 26 \quad (4.156)$$

$$\left(\frac{1}{24}(D-2) + a \right) = 0 \quad \rightarrow \quad a = -1 \quad (4.157)$$

Ya hemos fijado el valor de a que teníamos pendiente en (4.87):

$$2\alpha' p^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0^\perp - 1) \quad (4.158)$$

Y también el Hamiltoniano de (4.13) de la cuerda cambia a:

$$H = L_0^\perp - 1 \quad (4.159)$$

En resumen, el exigir la invarianza Lorentz ha impuesto un número de dimensiones $D = 26$ y ha cambiado la constante que altera el cálculo de las masas en la teoría por que podemos escribir el operador de masa al cuadrado en (4.90) como:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right) \quad (4.160)$$

4.1.5. Espacio de estados

Repasemos los dos principales problemas que encontramos en las cuerdas relativistas, había un espectro continuo de masas y solo el estado base no tenía masa, ambos aspectos se contradicen con lo observado en la naturaleza. En esta sección mostraremos cómo la introducción de la cuántica soluciona ambos a la vez, la cuantización de los estados va a discretizar el espectro de masas y la constante negativa a va a modificar el cálculo de la masa de forma que aparearán varios estados sin masa con polarizaciones diferentes.

Para estudiar esto hay que formar un espacio de estados usando los operadores que introdujimos en (4.6) y (4.7). De estos operadores tenemos que quedarnos con la menor cantidad de ellos que nos permitan describir el sistema y cuyas relaciones de conmutación sean no nulas. Tenemos que elegir un elemento de (x^-, p^+) y otro de (x^I, p^I) , es habitual trabajar en el espacio de momentos porque simplifica ciertas operaciones por lo que tomaremos como estado base $|p^+, \mathbf{p}_T\rangle$. También se define este como el estado vacío de forma que aplicando el operador aniquilación se anula:

$$a_n^I |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad I = 2, \dots, 25 \quad (4.161)$$

Para generar estados simplemente aplicaremos el operador creación sobre el estado base. Esto podemos hacerlo con una cantidad infinita de operadores creación cuyo orden no es relevante ya que vimos que conmutaban entre sí.

Tendremos $I = 2, \dots, 25$ operadores posibles por cada $n \geq 1$ y además cada uno puede ser aplicado varias veces lo que recogeremos en el parámetro $\lambda_{n,I}$, una forma general de expresar un estado es:

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.162)$$

Veamos como actúa sobre algunos de estos estados el operador de masa al cuadrado en su versión cuántica de (4.160).

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N^\perp), \quad N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \quad (4.163)$$

También hemos definido N^\perp como el sumatorio que aparece dentro de la expresión de la masa porque es algo que se repite en distintas expresiones como el operador transversal de Virasoro de (4.86) :

$$L_0^\perp = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I \quad (4.164)$$

$$= \alpha' p^I p^I + N^\perp \quad (4.165)$$

Nos interesa estudiar en detenimiento como actúa sobre los estados. Para ello veamos como conmuta con los operadores creación y aniquilación:

$$[N^\perp, a_m^{J\dagger}] = \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^{I\dagger} [a_n^I, a_m^{J\dagger}] + [a_n^{I\dagger}, a_m^{J\dagger}] a_n^I) \quad (4.166)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} \delta_{n,m} \eta^{IJ} \quad (4.167)$$

$$= m a_m^{J\dagger} \quad (4.168)$$

Hemos usado las relaciones de conmutación entre a_n^I y $a_n^{I\dagger}$ obtenidas en (4.56) y (4.57). Análogamente se puede ver que $[N^\perp, a_m^J] = -m a_m^J$. Como el operador número está ordenado *normal* es de esperar que sobre el estado base lo anule $N^\perp |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = 0$.

El comportamiento de este operador N^\perp nos recuerda al del operador número definido para el oscilador armónico cuántico hagámoslo explícito aplicándolo sobre un estado cualquiera:

$$N^\perp a_2^{I\dagger} a_5^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = [N^\perp, a_2^{I\dagger}] a_5^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle + a_2^{I\dagger} N^\perp a_5^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.169)$$

$$= 2a_2^{I\dagger} a_5^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle + a_2^{I\dagger} [N^\perp, a_5^{I\dagger}] |p^+, \mathbf{p}_T\rangle + a_2^{I\dagger} a_5^{I\dagger} N^\perp |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.170)$$

$$= 2a_2^{I\dagger} a_5^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle + a_2^{I\dagger} 5a_5^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.171)$$

$$= 7a_2^{I\dagger} a_5^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.172)$$

De forma general si llamamos a N_λ^\perp el autovalor resultado de actuar con N^\perp sobre un estado $|\lambda\rangle$ la expresión general es:

$$N^\perp |\lambda\rangle = N_\lambda^\perp |\lambda\rangle, \quad N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad (4.173)$$

Ya podemos calcular la masa de algunos estados que pueden ser interesantes. Empezamos por el caso del estado base $|p^+, \mathbf{p}_T\rangle$:

$$M^2 |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = \frac{-1}{\alpha'} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.174)$$

Este estado el que obtenemos un valor de la masa al cuadrado negativo se corresponde con el taquión, es una mejora que se debe a la aparición de la constante de ordenamiento a ya que sin ella el estado base (vacío) tendría masa nula lo que no ayuda a estudios posteriores sobre la estabilidad del vacío porque se puede ver que el potencial correspondiente al taquión $V = \frac{1}{2} M^2 \phi^2$ es inestable para $\phi = 0$. Han sido fundamentales para entender cómo estabilizar estas teorías y desarrollar versiones más sofisticadas de la teoría de cuerdas, como la teoría de supercuerdas, donde los vacíos pueden ser estables y libres de taquiones.

El siguiente estado no nulo es $a_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle$:

$$M^2 a_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) a_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + 1) a_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = 0 \quad (4.175)$$

Hemos encontrado un estado sin masa, aunque para ser precisos tenemos $I = D - 2 = 24$ estados sin masa. La forma general será una combinación lineal de todos ellos:

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{P}_T\rangle \quad (4.176)$$

Este resultado es equivalente al obtenido en el desarrollo de la teoría cuántica de campos de Maxwell. ¡En la teoría cuántica de cuerdas abiertas los estados incluyen el fotón! Es un resultado muy importante ya que lo hemos llegado a él sin haber impuesto la invariancia gauge electromagnética en la acción de Nambu-Goto desde el principio.

Estos son los estados que forman el espacio de estados de las cuerdas abiertas para $N^\perp \leq 2$:

N^\perp	$ \lambda\rangle$	$\alpha' M^2$
0	$ p^+, \mathbf{P}_T\rangle$	-1
1	$a_1^{I\dagger} p^+, \mathbf{P}_T\rangle$	0

Tabla 1: Tabla de los primeros estados de las cuerdas abiertas

4.2. Cuerdas cerradas

El procedimiento para estudiar las cuerdas cerradas va a ser muy similar al de las cuerdas abiertas por lo que algunos cálculos no harán falta repetirlos al mismo detalle. Sin embargo, veremos como existen ciertas sutilezas que hay que tener en cuenta y cambian la interpretación física de este tipo de cuerdas.

Primero recordar las condiciones definidas en (3.83) y (3.84) tomando $\beta = 1$:

$$n \cdot X = \alpha' (n \cdot p) \tau \quad (4.177)$$

$$n \cdot p = 2\pi n \cdot \mathcal{P}^\tau \quad (4.178)$$

El intervalo en el que definimos el parámetro σ en cuerdas cerradas es $\sigma \in [0, 2\pi]$ que es el doble del rango para cuerdas abiertas. Además vimos que existe un problema al fijar la parametrización en cuerdas cerradas ya que no podemos tomar ningún punto concreto como $\sigma = 0$ y $\sigma = 2\pi$ que en este caso son el mismo punto igual que hicimos el caso abierto con los extremos. La solución a esto vimos que era escoger un punto cualquiera como $\sigma = 0$ e imponiendo la condición $X' \cdot \dot{X} = 0$ obtener ese punto a lo largo de la hoja de mundo. Aún así, la acción de la cuerda cerrada es siempre invariante bajo la reparametrización de $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ donde σ_0 es una constante.

Las demás condiciones se mantienen con la forma vista para las cuerdas abiertas:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (4.179)$$

las expresiones para las densidades de momento son:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu} \quad (4.180)$$

y las coordenadas también satisfacen la ecuación de ondas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^{\mu} = 0 \quad (4.181)$$

4.2.1. Soluciones y relaciones de conmutación

La forma general de la solución a la ecuación de ondas la podemos expresar:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma) \quad (4.182)$$

donde X_L^μ es una onda que avanza hacia la izquierda, σ negativos, y X_R^μ avanza hacia la derecha, σ positivos. En el cálculo análogo de las cuerdas abiertas deducimos las ecuaciones del movimiento imponiendo las condiciones de contorno sobre los extremos algo que en este caso no podemos hacer. En lugar de eso, vamos a utilizar la periodicidad que hay en la coordenada σ para imponer que:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (4.183)$$

Definimos dos variables: $u = \tau + \sigma$ y $v = \tau - \sigma$ e imponemos la condición que se puede expresar como:

$$X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) = X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v + 2\pi) \quad (4.184)$$

Esto se puede ver como una condición de periodicidad sobre las derivada respecto a u en el lado izquierdo y v en lado derecho por lo que $X_L^{\mu'}$ y $X_R^{\mu'}$ han de ser periódicas en 2π . Las podemos expresar en forma de una expansión de modos:

$$X_L^{\mu'}(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \quad X_R^{\mu'}(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv} \quad (4.185)$$

Hemos usado para la expansión dos tipos de modos α con barra para la onda que se mueve a la izquierda y sin ella para la de la derecha. Integrando estas expresiones llegamos a:

$$X_L^\mu(u) = \frac{1}{2} x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \quad (4.186)$$

$$X_R^\mu(v) = \frac{1}{2} x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-inv} \quad (4.187)$$

Repasando las condiciones de periodicidad vemos que los términos lineales se tienen que igualar de forma que $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$. Además, las constantes de integración $x_0^{L\mu}$ y $x_0^{R\mu}$ no pueden ser variables independientes sino que su suma dará el modo cero, tomamos $x_0^{L\mu} = x_0^{R\mu} = x_0^\mu$. Por último, deshacemos el cambio de variable u y v para llegar a la expresión final:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}e^{-in\tau}(\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (4.188)$$

Ya sabemos que la combinación lineal de las derivadas de las coordenadas es útil en nuestros cálculos, para obtenerlas de manera sencilla podemos aprovechar (4.182) ya que X^μ depende de la combinación de τ y σ por lo que derivar con respecto a una de ellas es igual que derivar con respecto a la otra salvo un cambio de signo cuando haga falta:

$$\dot{X}^\mu = X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) + X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) \quad (4.189)$$

$$X^{\mu'} = X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) - X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) \quad (4.190)$$

Usando esto deducimos la combinación de las derivadas es inmediato:

$$\dot{X}^\mu + X^{\mu'} = 2X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)} \quad (4.191)$$

$$\dot{X}^\mu - X^{\mu'} = 2X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \quad (4.192)$$

Apreciar que no se mezclan los modos α con barra con los que no la llevan y hemos ajustado las constantes de normalización para que estas expresiones sean análogas a las de la cuerda abierta por lo que podemos inferir los resultados de los conmutadores:

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (4.193)$$

$$[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma')] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.194)$$

Notar que ahora estas relaciones están definidas para $\sigma, \sigma' \in [0, 2\pi]$ y que en (4.194) el signo superior se corresponde a los osciladores con barra y el inferior a los que no tienen.

Esto nos lleva a la misma relación de conmutación entre osciladores que en el caso de las cuerdas abiertas pero para dos grupos:

$$[\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_{-n}^J] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ}, \quad [\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ} \quad (4.195)$$

Esto muestra que el conjunto de operadores $\bar{\alpha}$ se corresponde con el de una cuerda abierta moviéndose a la izquierda y el de α con el de una cuerda abierta moviéndose a la derecha. Así que el conjunto de operadores que de las cuerdas cerradas se componen de dos grupos de operadores de cuerdas abiertas desplazándose uno a la izquierda y otro a la derecha salvo por los modos cero $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0$ y las coordenadas $x_0^I, x_0^{\bar{I}}$ que son iguales. Es natural que osciladores que pertenecen a conjuntos diferentes conmuten entre sí:

$$[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad (4.196)$$

Definimos los operadores creación y aniquilación igual que para las cuerdas abierta pero diferenciando el grupo de osciladores con barra y sin ella:

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (4.197)$$

$$\bar{\alpha}_n^I = \bar{a}_n^I \sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}_{-n}^I = \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (4.198)$$

Los conmutadores asociados son equivalentes:

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^J] = \delta_{m,n}\eta^{IJ} \quad (4.199)$$

También podemos obtener la relación de conmutación entre los modos α y la constante x_0^I usando la relación de conmutación canónica. Antes veremos como se relaciona el modo cero con el momento:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + \dots) \quad (4.200)$$

dado que $p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma$ llegamos a:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \quad (4.201)$$

Ya podemos obtener:

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} [x_0^I, p^J] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \quad (4.202)$$

Análogamente vamos a construir el Hamiltoniano como una translación en el tiempo que los asociamos a X^+ y sabemos que p^- genera las translaciones en $X^+ = \alpha' p^+ \tau$, lo que nos queda:

$$H = \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = \alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} = \alpha' p^+ p^- \quad (4.203)$$

4.2.2. Operadores de Virasoro

Ya que tenemos dos conjuntos de modos α es de esperar que necesitemos dos conjuntos de operadores de Virasoro. La deducción es equivalente al caso de las cuerdas abiertas, tomamos $\beta = 1$ en (3.114):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 \quad (4.204)$$

y usando las expresiones (4.191) y (4.192) llegamos a:

$$(\dot{X}^I + X^{I'})^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (4.205)$$

$$(\dot{X}^I - X^{I'})^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau-\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (4.206)$$

Los operadores de Virasoro son:

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (4.207)$$

Igual que en los modos α vimos que realmente no son dos conjuntos totalmente independientes ya que para $n = 0$ ocurre que $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$ y esta condición se traslada a los operadores de Virasoro.

Si sustituimos (4.205) y (4.206) en (4.204) e igualamos cada una a las expresiones (4.191) y (4.192) tenemos:

$$\dot{X}^- + X^{-'} = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (4.208)$$

$$\dot{X}^- - X^{-'} = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (4.209)$$

Esto implica que:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp \quad (4.210)$$

Usando la condición que iguala el modo cero tenemos que:

$$\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp \quad (4.211)$$

Esto no implica que los operadores \bar{L}_0^\perp y L_0^\perp sean necesariamente iguales ya que sus definiciones son claramente diferentes sino que su forma de actuar sobre un estado tiene que ser igual, $\bar{L}_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = L_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle$, así que esta condición se aplica realmente sobre los estados permitidos en el espacio de estados de la cuerda cerrada.

Extendiendo el análisis de los operadores de Virasoro en cuerdas abiertas podemos inferir que se expresan en función de lo que llamamos operador número como:

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp, \quad \bar{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I \quad (4.212)$$

$$L_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp, \quad N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \quad (4.213)$$

Dado que $\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp$ deducimos $\bar{N}^\perp = N^\perp$. Ya tenemos los operadores de Virasoro ordenados *normal* y continuando con la extrapolación de los resultados en cuerdas abiertas podemos ver cómo introducir la constante $a = -1$. Las relaciones (4.210) son similares a la ecuación (3.121) que luego cuando introducimos $L_0^\perp \rightarrow L_0^\perp + a$ se convierte en (4.87) por lo que haremos lo mismo:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} (\bar{L}_n^\perp - 1), \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} (L_n^\perp - 1) \quad (4.214)$$

Para $n = 0$ recordamos que $\bar{\alpha}_0^- = \alpha_0^-$ por lo que para calcular su expresión hacemos el promedio de las dos y además podemos usar (4.201) para relacionarlo con p^- :

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = \frac{1}{p^+}(L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) = \alpha'p^- \quad (4.215)$$

Así podemos llegar al operador masa y ponerlo en función de los operadores de Virasoro y de los operadores número:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I \quad (4.216)$$

$$= \frac{2}{\alpha'}(L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) - p^I p^I \quad (4.217)$$

$$= \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) \quad (4.218)$$

También podemos construir el Hamiltoniano desde (4.203):

$$H = \alpha'p^+p^- \quad (4.219)$$

$$= L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2 \quad (4.220)$$

$$= \frac{\alpha'}{2}p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \quad (4.221)$$

Los conmutadores de los operadores de Virasoro con los demás operadores en las cuerdas abiertas van a servirnos para los siguientes cálculos como referencia de lo que esperaríamos pero veremos que hay algunas diferencias en los resultados de los factores que acompañan a los operadores. Los conmutadores que se van a mantener idénticos son entre los operadores de Virasoro y los modos α dentro de cada conjunto y se anularán si pertenecen a uno distinto:

$$[\bar{L}_m^\perp, \bar{\alpha}_n^J] = -n\bar{\alpha}_{m+n}^J, \quad [L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n\alpha_{m+n}^J, \quad [L_m^\perp, \bar{\alpha}_n^J] = [\bar{L}_m^\perp, \alpha_n^J] = 0 \quad (4.222)$$

Nos interesa ver como conmuta L_0^\perp con las coordenadas $X^I(\tau, \sigma)$ ya que es este el que está dentro del Hamiltoniano y nos permite obtener las ecuaciones del movimiento.

Antes estudiaremos la conmutación con x_0^I :

$$[\bar{L}_m^\perp, x_0^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [(\bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{m-p}^I, x_0^J)] \quad (4.223)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\bar{\alpha}_p^I [\bar{\alpha}_{m-p}^I, x_0^J] + [\bar{\alpha}_p^I, x_0^J] \bar{\alpha}_{m-p}^I) \quad (4.224)$$

Sambemos que $[\bar{\alpha}_p^I, x_0^J] = 0$ para $p \neq 0$ y que $[\bar{\alpha}_0^I, x_0^J] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\eta^{IJ}$ por lo tanto del sumatorio solo nos van a aportar dos términos $p = 0$ y $p = m$ que son iguales. El resultado es el mismo para los dos grupos de operadores:

$$[\bar{L}_m^\perp, x_0^J] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_m^J, \quad [L_m^\perp, x_0^J] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_m^J \quad (4.225)$$

Ya tenemos los resultados de los conmutadores que necesitamos para calcular el conmutador L_0^\perp con la expansión en modos de las coordenadas $X^I(\tau, \sigma)$ de (4.188):

$$\begin{aligned} [\bar{L}_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] &= [\bar{L}_0^\perp, x_0^I] + \sqrt{2\alpha'}\tau [\bar{L}_0^\perp, \alpha_0^I] \\ &\quad + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\tau}}{n} \left(e^{in\sigma} [\bar{L}_0^\perp, \alpha_n^I] + e^{-in\sigma} [\bar{L}_0^\perp, \bar{\alpha}_n^I] \right) \end{aligned} \quad (4.226)$$

$$= -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0^I + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\tau}}{n} e^{-in\sigma} (-n\bar{\alpha}_n^I) \quad (4.227)$$

$$= -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} \bar{\alpha}_n^I \quad (4.228)$$

Esta última expresión es muy parecida a (4.191) tomando $\mu = I$, es resultado lo podemos expresar en función de la combinación lineal de las derivadas para ambos grupos de operadores ya que el caso sin barra tomará el signo $-$:

$$[\bar{L}_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2}(\dot{X}^I + X^{I'}), \quad [L_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2}(\dot{X}^I - X^{I'}) \quad (4.229)$$

Con esto podemos ver cómo actúa el Hamiltoniano que depende de $\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp$:

$$[\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -i\frac{\partial X^I}{\partial \tau} \quad (4.230)$$

El Hamiltoniano genera, igual que para las cuerdas abiertas, las traslaciones temporales.

4.2.3. Espacio de estados

Hemos observado variaciones en la forma de los operadores de las cuerdas cerradas respecto a las abiertas y esto se reflejará en el espacio de estados. El estado base tendrá la misma forma $|p^+, \mathbf{p}_T\rangle$ y también se anulará si actúa un operador aniquilación de cualquiera de los dos grupos. Para construir una base de estados general usaremos una composición de la que vimos en (4.162):

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.231)$$

Los números $\lambda_{n,I}$ y $\bar{\lambda}_{m,J}$ cumplen la misma función, denotar cuantas veces aparece cada operador. También los operadores número N^\perp y \bar{N}^\perp al actuar sobre un estado darán lo autovalores:

$$N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}, \quad \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} m \bar{\lambda}_{m,J} \quad (4.232)$$

En un principio cualquier estado que pertenezca a uno de los subconjuntos de dos cuerdas abiertas que forma el conjunto total de cuerdas cerradas o una combinación cualquiera de uno en cada subconjunto sería posible. Sin embargo, no todos los estados son estados que estén en el espacio de estados de la cuerda cerrada porque la condición que vimos sobre el modo cero se extendió a los operadores y ahora se refleja en que un estado solo pertenece al espacio de estados si y solo si cumple que:

$$N_\lambda^\perp = \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp \quad (4.233)$$

Estudiemos algunos estados posibles y calcularemos sus masas. Empezamos por el estado vacío donde $(N_\lambda^\perp, \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp) = (0, 0)$:

$$M^2 |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = -\frac{4}{\alpha'} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.234)$$

Hemos encontrado los tanquiones de cuerdas cerradas ya que también tenemos una masa al cuadrado negativa. Esta partícula se entiende poco ya que no se ha podido calcular su potencial asociado.

El siguiente estado posible es $(N_\lambda^\perp, \bar{N}_\lambda^\perp) = (1, 1)$:

$$M^2 a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = 0 \quad (4.235)$$

Este estado se corresponde a una partícula sin masa y su forma general es:

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.236)$$

donde R_{IJ} es una matriz arbitraria de dimensión $(D - 2)$, para poder asociar esto a algo conocido vamos a descomponer la matriz primero en su parte simétrica y antisimétrica:

$$R_{IJ} = S_{IJ} + A_{IJ} \quad (4.237)$$

Buscamos una matriz simétrica de traza nula por lo que descomponemos la parte simétrica en la una matriz de traza nula más una proporcional a la unidad:

$$S_{IJ} = \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \right) + \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \quad (4.238)$$

Llamamos a la matriz simétrica de traza nula \hat{S}_{IJ} que es el primer término y S' al segundo así la descomposición de R_{IJ} queda:

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ} \quad (4.239)$$

Al separar R_{IJ} en tres matrices también obtenemos tres grupos de estados linealmente independientes. Uno de ellos particularmente especial:

$$\text{Campo del gravitón: } \sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.240)$$

$$\text{Campo de Kalb-Ramond: } \sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.241)$$

$$\text{Campo del dilatón: } S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \quad (4.242)$$

El grupo asociado a \hat{S}_{IJ} que es una matriz simétrica de traza nula cumple precisamente las condiciones de los estados gravitón obtenidos en el análisis de la gravedad en teoría cuántica de campos. Análogamente al caso del fotón y la teoría electromagnética hemos llegado a este resultado sin imponer condiciones propias de la teoría gravitatoria como una métrica dinámica o el principio de covariancia.

El campo de Kalb-Ramond se puede ver como una generalización del campo de Maxwell y el campo del dilatón es un campo escalar que podría asociarse a que la constante de Newton G varíe y pueda ser tratada como un campo, el estudio de ambos campos pertenece a un área más avanzada de lo que es una introducción a la teoría de cuerdas.

Así queda el espacio de estados de las cuerdas cerradas para $N^\perp + \bar{N}^\perp \leq 2$:

N^\perp, \bar{N}^\perp	$ \lambda, \bar{\lambda}\rangle$	$\frac{1}{2}\alpha' M^2$
0, 0	$ p^+, \mathbf{P}_T\rangle$	-2
1, 1	$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} p^+, \mathbf{P}_T\rangle$	0

Tabla 2: Tabla de los primeros estados de las cuerdas cerradas

5. Conclusiones

En este trabajo hemos explorado los primeros resultados fundamentales de la teoría de cuerdas, que busca unificar todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza bajo principios coherentes. Desde su origen en la función beta de Euler descubierta por Gabriele Veneziano en la década de 1960, hasta las formulaciones contemporáneas como la Teoría M, la teoría de cuerdas ha sentado las bases para una teoría de gravedad cuántica consistente.

Los resultados que hemos obtenido se corresponden con los primeros cálculos hechos en la teoría pero son una muestra significativa de sus ventajas y defectos. Hemos visto que hay que fijar un número de dimensiones igual a 26 lo cual es extraordinario en dos sentidos, la teoría requiere de un número de dimensiones concretas para ser consistente y plantea un desafío que es la compresión de esas dimensión extra. Sin embargo, se ha mostrado cómo la teoría incluye de forma intrínseca el electromagnetismo y la gravedad, es remarcable la aparición de la segunda ya que hace que la teoría de cuerdas contenga una forma cuántica de la gravedad. La aparición de taquiones en los estados vacío da lugar el estudio sobre la inestabilidad del vacío y sus múltiples posibles configuraciones, cada uno correspondiente a diferentes compactificaciones de las dimensiones extra y topologías del espacio-tiempo.

Este marco teórico, en estudios más avanzados, permite calcular amplitudes de dispersión de gravitones de manera finita, lo que abre nuevas perspectivas para comprender fenómenos gravitacionales tanto a escalas cosmológicas como microscópicas. Además, proporciona una herramienta para contar la entropía de algunos agujeros negros de manera microscópica, alineándose con la fórmula de Bekenstein-Hawking y ofreciendo una comprensión más profunda de la termodinámica de los agujeros negros. Las D-branas, objetos fundamentales en la teoría de cuerdas, han revolucionado nuestra comprensión de las interacciones de cuerdas abiertas y cerradas y han dado lugar a nuevas ideas en la física de partículas y la cosmología. Asimismo, la correspondencia AdS/CFT (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory) ha proporcionado una dualidad poderosa que conecta teorías de gravedad en espacios AdS con teorías de campo en el borde, ofreciendo nuevas perspectivas para abordar problemas difíciles en la teoría cuántica de campos y la teoría de cuerdas.

A pesar de estos avances, la teoría de cuerdas enfrenta desafíos importantes, como la integración con el Modelo Estándar de la física de partículas. Resolver este problema es esencial para hacer predicciones verificables experimentalmente y avanzar en nuestro entendimiento del universo.

En resumen, la teoría de cuerdas continúa siendo una de las empresas intelectuales más ambiciosas de la física teórica moderna. Su capacidad para abordar problemas fundamentales como la gravedad cuántica y la naturaleza de los agujeros negros la convierte en un campo crucial para el futuro de la física.

Referencias

1. Zwiebach, B. (2009). *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press.
2. Maggiore, M. (2005). *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press.
3. Fradkin, E. (2013). *Quantum Field Theory: An Integrated Approach*. Princeton University Press.
4. Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press.
5. Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Academic Press.
6. Kaku, M. (1994). *Hyperspace: A Scientific Odyssey Through Parallel Universes, Time Warps, and the Tenth Dimension*. Oxford University Press.