Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias
Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Productos asociativos de grafos

Autor: Miguel Ramírez Eirís

Supervisado por: Diego Aranda Orna
Curso 2023-2024

Índice general

1 Introducción y definiciones previas **1**

1.1 Automorfismos 5

2 Productos de grafos **9**

2.1 Tipos de productos 9

2.2 Productos para los cuales ambas proyecciones son homomorfismos débiles 11

2.3 Productos para los cuales solo una proyección es un homomorfismo débil 16

2.4 Todos los productos asociativos de grafos 18

3 Producto cartesiano **21**

3.1 Definición y estructura algebraica 21

3.2 Estrucutra métrica 23

3.3 Descomposición en factores primos 26

3.4 Automorfismos del producto cartesiano 35

4 Producto directo **39**

4.1 Definición y estructura algebraica 39

4.2 Estructura métrica 42

4.3 Factorización en primos en el producto directo 44

4.3.1 Grafos finos 45

4.3.2 Esqueleto cartesiano 51

4.3.3 Descomposición de grafos finos en factores primos 61

4.3.4 Descomposición de grafos en el producto directo 66

5 Producto fuerte **72**

5.1 Definición y resultados 72

6 Aplicaciones **76**

6.1 Algunas aplicaciones en Física 76

6.2 Algunas aplicaciones en Química 77

6.3 Algunas aplicaciones en Matemáticas 77

7 Cierre **78**

1. Introducción y definiciones previas

Este trabajo tiene un corte bibliográfico, no busco en ningún momento revolucionar las matemáticas. El texto principal que seguiremos es *Handbook of Product Graphs, Second Edition (Discrete Mathematics and Its Applications)*, referenciado en [1]. A pesar de seguir este texto, gran parte de las demostraciones de los resultados son originales míos. Estoy orgulloso de este trabajo que comienza.

En todo este texto la idea de *grafo* es central. Un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto de elementos $V(G)$ llamados *vértices* o *nodos* junto con un conjunto $E(G)$ de pares $e = \{u, v\}$ con $u, v \in V(G)$ llamados *arcos* o *aristas*.

Decimos que dos vértices u y v son *adyacentes* o *vecinos* si existe un arco que los une, es decir, si $\{u, v\} \in E(G)$. Al conjunto de vértices vecinos a $u \in V(G)$ le llamaremos *vecindario* y lo denotaremos por $N_G(u)$, formalmente

$$N_G(u) = \{v \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}.$$

Asimismo, dos arcos que comparten uno de los extremos se dice que son *incidentes*.

A los arcos de la forma $\{u, u\} \in E(G)$ que unen un vértice consigo mismo les llamaremos *ciclo* o *bucle*. A un grafo sin ciclos le diremos *simple*.

Hasta ahora, ninguna de las definiciones introduce ningún tipo de restricción sobre el conjunto de vértices $V(G)$, este puede ser un conjunto finito o infinito. Si $V(G)$ es un conjunto finito, diremos que G es un grafo *finito*. Al conjunto de grafos finitos lo denotaremos por Γ_0 y al de grafo finitos sin ciclos lo denotaremos por Γ. Como por lo general trabajaremos con grafos finitos sin ciclos, cuando digamos *grafo* nos estaremos refiriendo a grafos $G \in \Gamma$, en caso de no ser así, se explicitará.

Notar que $\Gamma \subset \Gamma_0$.

El grafo complementario de un grafo G, viene denotado como $\overline{G}$ y es aquel con mismos vértices pero que invierte la adyacencia. O sea que

$$\{u, v\} \in E(\overline{G}) \Longleftrightarrow \{u, v\} \notin E(G).$$

Se satisface que $\overline{\overline{G}} = G$.

En matemáticas muchas veces además de determinadas estructuras nos interesa estudiar como pasar de una a otra[1], para ello es imprescindible usar conceptos cómo el de *homomorfismo* que en este caso es análogo al de otras áreas. Diremos que una aplicación $\varphi : V(G) \to V(H)$ es un *homomorfismo de grafos* o simplemente *homomorfismo* de G en H si $\{u, v\} \in E(G)$ implica que $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(H)$.

De igual modo, diremos que una aplicación entre dos grafos G y H, $\varphi : V(G) \to V(H)$ es un *isomorfismo* (de grafos) si es biyectiva y tal que $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(H)$ si solo si $\{u, v\} \in E(G)$. Dos grafos sobre los que existe un isomorfismo se dicen *isomorfos* y lo denotaremos por $G \cong H$.

En el caso en que en un arco importe el orden de los pares, o sea $\{u, v\} \neq \{v, u\}$, diremos que el arco está *orientado*. Podemos visualizar un arco orientado como una flecha que va de un nodo inicial a un nodo final. En el caso en que no importe el orden de los pares, diremos que el arco está *no orientado* y lo denotaremos por $[u, v]$, o uv en caso de que no exista confusión. Trabajaremos mayoritariamente con grafos en los que los arcos están no orientados, por lo que, a no ser que se diga lo contrario, cuando nos refiramos a un grafo se entenderá que este no está orientado.

En muchas ocasiones nos restringiremos a ciertos vértices y arcos de un grafo. Un *subgrafo* H de G, denotado por $H \subseteq G$, es un grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq V(G)$.

Como hay varios grafos interesantes que aparecerán varias veces a lo largo del texto, es útil desde el punto de vista expositivo darles nombres propios. El *grafo completo* de n vértices, K_n, es aquel en el que existe $\{u, v\} \in V(K_n)$ para todo par de vértices u, v. El grafo complementario a este, en el que ningún par de vértices es adyacente, se llama *grafo vacío* y lo denotaremos por D_n. El *grafo camino* de n vértices, P_n, se caracteriza por tener como conjunto de vértices $V(P_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ y conjunto de arcos

$$E(P_n) = \{uv \mid u, v \in V(P_n) \text{ y } u - v = \pm 1\}.$$

Un *grafo cíclico* de n vértices, C_n, es un grafo P_n en el que existe un arco con la forma $[n, 1]$. El grafo completo de un solo vértice K_1 es, ya a simple vista, diferente del resto al tener un único

[1] De hecho, teorías como la de categorías giran en torno a este cambio, una suerte de dialéctica.

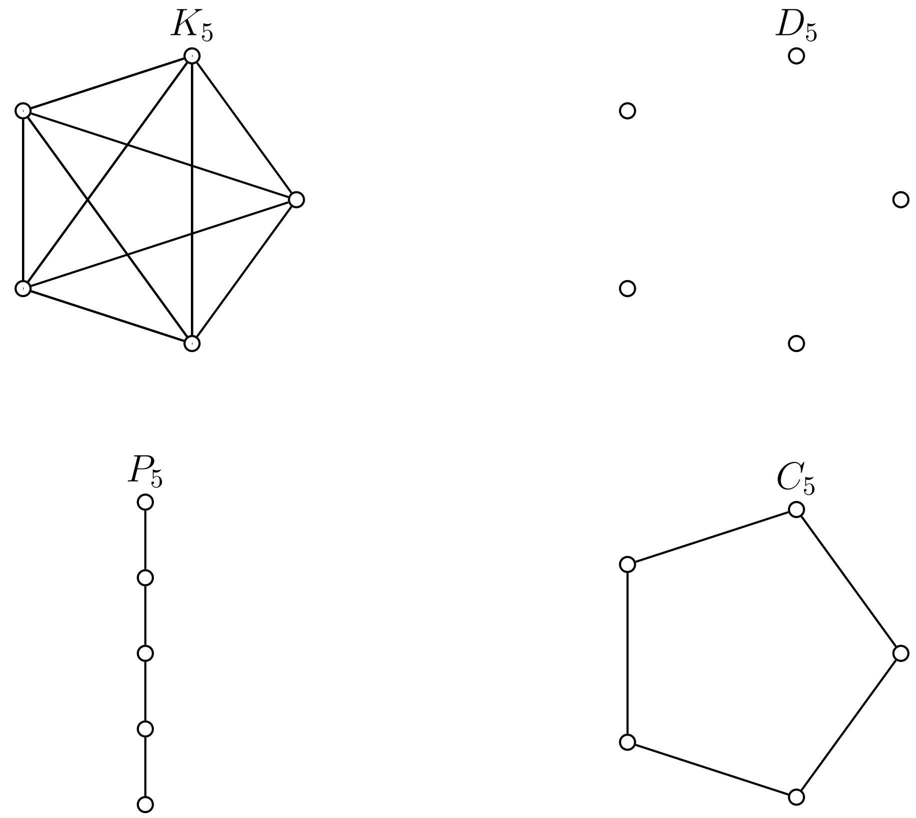

Figura 1.1: Grafos K_5, D_5, P_5 y C_5.

vértice y no tener ningún arco, por ello recibe un nombre especial, el de *grafo trivial*. Asimismo, al grafo sin vértices ni arcos le llamaremos *grafo nulo* y lo denotaremos por $\varnothing$. Es claro entonces que $V(\varnothing) = E(\varnothing) = \emptyset$. Realmente el grafo nulo puede considerarse como un grafo vacío de 0 vértices, $\varnothing = D_0$.

Dados dos vértices u y v de un grafo G, llamaremos *camino de u a v* de longitud n a un subgrafo $H \subseteq G$ isomorfo a P_n donde el isomorfismo $\varphi : H \to P_n$ es tal que $\varphi(u) = 1$ y $\varphi(v) = n$. Para denotar un camino pondremos $u_1 u_2 \cdots u_n$ donde cada u_i es un vértice de H y entendiendo que $u_i u_j \in E(H)\ \forall i, j$.

Si definimos la relación de equivalencia R (es hasta intuitivo ver que es de equivalencia) entre dos vértices u y v de un grafo G por

$$uRv \iff \exists \pi \text{ camino de } u \text{ a } v$$

podemos separar el conjunto de vértices $V(G)$ en clases de equivalencia. A estas clases las llamaremos *componentes conexas de G*. En el caso de que $|V(G)/R| = 1$ (ó 0, por el grafo nulo) diremos que G es *conexo*, en caso contrario, G se dice *inconexo*.

Diremos que un grafo es *bipartito* si existen dos conjuntos $V_1(G)$ y $V_2(G)$ tales que $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$, $V_1(G) \cap V_2(G) = \emptyset$ y si toda arista de G une vértices de $V_1(G)$ con vértices de $V_2(G)$. Esta definición será de gran utilidad a la hora de estudiar el producto directo de grafos.

Sean G y H dos grafos disjuntos. Entonces denotaremos la unión disjunta de ambos por $G+H$, es decir, $G+H$ es un grafo tal que $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G+H) = E(G) \cup E(H)$. El elemento neutro de esta operación es el grafo nulo Ø y es por ser elemento neutro de la unión disjunta que se considera esta, pues el resto de sus propiedades carecen de interés.

Definimos la distancia $d_G(u, v)$ ente cualquier par de vértices u y v de un grafo G como la menor longitud de un camino entre esos dos vértices. Si no existe ningún camino que los conecte, entonces se define $d_G(u, v) := \infty$.

Llegados a este punto estamos en condiciones de probar nuestro primer resultado.

Proposición 1.0.1 *La función distancia d_G es una métrica entera.*

Demostración: Supondremos un grafo G conexo, en caso de no serlo la distancia entre dos vértices u y v es, por definición, $d_G(u, v) = \infty$. Probemos las tres propiedades de la métrica:

i) $d_G(u, v) \geq 0$ y $d_G(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$:

   Por ser $d_G(u, v)$ por definición la menor longitud de un camino de u a v, que es por definición también el número de vértices de un grafo camino se tiene que $d_G(u, v) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Asimismo, si $d_G(u, v) = 0$ entonces existe un subgrafo de H de G isomorfo por φ a P_1, que tiene solo un vértice, luego $\varphi(u) = \varphi(v) = 1$ y por ser φ isomorfismo, es biyectiva y en particular inyectiva, luego $u = v$.

ii) $d_G(u, v) = d_G(v, u)$:

   Sea π un camino de menor distancia, n, entre u y v y sea $\varphi : \pi \to P_n$ isomorfismo. Basta con tomar la aplicación $\tilde{\varphi} : H \to P_n$ tal que $\tilde{\varphi}(u) = n - \varphi(u)$. Es claro que $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo y que $\tilde{\varphi}(u) = n$ y $\tilde{\varphi}(v) = 0$. Luego se sigue la tesis.

iii) $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$ $\forall u, v, w \in V(G)$:

   Es claro que si añado un vértice al camino de menor longitud el camino puede o hacerse más largo o permanecer igual dependiendo de si el vértice que se añade pertenecía ya al camino o no. Notando que un camino $ua_1a_2 \cdots a_i \cup a_ia_{i+1} \cdots = ua_1a_2 \cdots v$ se obtiene el resultado.

■

1.1. Automorfismos

Una vez introducidos los conceptos básicos y antes de comenzar con los productos de grafos veremos la razón por la cual estamos interesados en estos y que podremos obtener de su estudio. Para ello comenzaremos introduciendo el concepto que da nombre a esta sección, para después caracterizar algunas de sus propiedades básicas.

Definición 1.1.1 *Un isomorfismo de un grafo G sobre sí mismo se dice automorfismo.*

Hay multitud de ejemplos de automorfismos. En un ciclo C_n por ejemplo, la función que lleva cada vértice al anterior $\varphi : u_i \mapsto u_{i-1}$ con la resta tomada módulo n es claramente un automorfismo.

Evidentemente sobre cada grafo G existe *al menos* un automorfismo, el identidad, que lleva cada vertice $u \in V(G)$ a $\mathbb{1}(u) = u$. Aquellos grafos en los que sólo existe este automorfismo se dicen *asimétricos*, y son la mayoría de estos.

Llegados a este punto es natural para un matemático preguntarse cúal es el comportamiento de los automorfimos. La siguiente proposición caracteriza la estructura de estos bajo la composición.

Proposición 1.1.1 *Los automorfismos de un grafo forman un grupo con la operación composición.*

Demostración: Sea G grafo, $u, v \in V(G)$ y Ψ, φ, ϕ automorfismos. Vamos por partes:

i) Operación interna:
Por ser Ψ automorfismo de G, $[u, v]$ es una arista si y solo si $[\Psi(u), \Psi(v)]$ es una arista. Por ser φ automorfismo de G, $[\Psi(u), \Psi(v)]$ es una arista si y solo si $[\varphi(\Psi(u)), \varphi(\Psi(v))]$ es una arista. En conclusión, $[u, v]$ es una arista si y solo si $[\varphi(\Psi(u)), \varphi(\Psi(v))]$ es una arista, con lo que $\varphi\Psi$ es un atomorfismo.

ii) Asociatividad:
Claramente la composición de funciones es asociativa puesto que

$$[\Psi(\varphi\phi)](u) = \Psi(\varphi(\phi(u))) = [(\Psi\varphi)\phi](u).$$

iii) Elemento neutro:

Tenemos que el automorfismo identidad definido arriba es el elemento neutro que buscamos, pues

$$\mathbb{1}\Psi(u) = \Psi(u) = \Psi\mathbb{1}(u).$$

iv) Inverso:

Por ser cada automorfismo un mapeo de cada elemento a otro del grafo, se puede tomar el mapeo inverso sea cual sea el automorfismo. Por lo tanto, todo elemento tiene inverso.

■

Llamaremos a este grupo *grupo de automorfismos* de G y lo denotaremos por $Aut(G)$. De la propia definición de automorfismo es directo ver que estos son permutaciones de de vértices tales que las adyacencias se preservan. Las permutaciones arbitrarias de vértices también forman un grupo, que denotaremos por $Sim(V(G))$ y llamaremos *grupo simétrico* de G. Osea, se tiene que

$$Aut(G) \leqslant Sim(V(G)).$$

Introduciremos un concepto que nos facilitará la caracterización de estos dos grupos.

Definición 1.1.2 *Un grupo de permutación P de los vértices de G se dice doblemente transitivo si para cualesquiera dos parejas u, v y x, y de vértices de G existe una permutación $\varphi \in P$ tal que $x = \varphi(u)$ e $y = \varphi(v)$.*

Podemos ahora enunciar un lema que nos permitirá caracterizar al grupo de simetrías y de automorfismos. Este siguiente resultado nos interesa por un colorario suyo, no tiene mayor recorrido.

Lema 1.1.1 *Sea G un grafo con al menos un arco. Si $Aut(G)$ contiene un subgrupo doblemente transitivo, entonces, G es completo.*

Demostración: Sea G en las condiciones del enunciado, uv una arista de G y P subgrupo doblemente transitivo de $Aut(G)$. Sea $\varphi \in P$ un automorfismo que mapea $\{u, v\}$ a $\{x, y\}$ arbitrarios. Entonces, como es automorfismo, xy es una arista, y por la arbitrariedad de $\{x, y\}$ se sigue que G es completo. ■

Si consideramos ahora un grafo G completo, por definición se tiene que para cualquier par de vértices u y v, $uv \in E(G)$. Por lo tanto cualquier permutación que se haga de sus vértices es también un automorfismo. Es decir, que en un grafo completo (y tambien en uno completamente inconexo) G se tiene que

$$Aut(G) = Sim(V(G))$$

por lo que podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 1.1.1 *Aut(G) = Sim(V(G)) si y solo si G es completo o totalmente inconexo*

Demostración: Hagamos ambas implicaciones.

- G completo o totalmente inconexo $\Rightarrow Aut(G) = Sim(V(G))$: Obvio por lo anteriormente mencionado
- $Aut(G) = Sim(V(G)) \Rightarrow$ completo o totalmente inconexo:
  Si G no es totalmente inconexo, como $Aut(G) = Sim(V(G))$ se tiene que cualquier permutación de vértices es un automorfismo, por lo tanto, $Aut(G)$ contiene un subgrupo doblemente transitivo. Así, por la proposición anterior se tiene que G es completo.
  Si G es totalmente inconexo es evidente.

■

Por lo tanto, tenemos probado que $Aut(K_n) = Sim(V(K_n))$ y que $Aut(D_n) = Sim(V(D_n))$ y solo ocurre en este tipo de grafos.

El interés que tiene estudiar los automorfismos de grafos reside en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 (de Frucht) *Para todo grupo finito A existe un grafo G tal que $Aut(G) \cong A$.*

La demostración del resultado anterior la hemos obviado por exceder los límites de este trabajo. Aún así hemos de comentar que es un resultado con gran potencia pues dibuja un puente entre grafos y grupos finitos. En el resto de este texto buscaremos formas de descomponer los grafos en elementos más "sencillos", mediante los cuales estudiar sus simetrías será harto más fácil. Así, gracias a este teorema seremos capaces de descomponer grupos finitos, que pueden ser tan complicados como nosotros queramos, en simetrías de estos grafos completamente caracterizadas.

He aquí la gracia de todo el trabajo que nos queda por delante, el ser capaces de estudiar grupos sin tener que hacerlo. Huir del álgebra nunca fue tan gratificante.

2. Productos de grafos

Un producto de grafos es cualquier operación binaria interna en Γ o Γ_0, aunque nos centraremos en aquellos sin bucles. Esta definición es increíblemente amplia, por lo que a la hora de trabajar introduciremos restricciones naturales[1] a estos productos.
El objetivo de esta sección será el de encontrar todos los productos asociativos de grafos tales que satisfagan ciertas propiedades y hacer una breve descripción de los más interesantes. Estos mismos serán los protagonistas de los siguientes capítulos.

2.1. Tipos de productos

Partiremos en esta sección de resultados generales de los que surgirán los productos de grafos que nos interesan. De aquí en adelante denotaremos por $*$ a una operación arbitraria entre los grafos G y H. Llamaremos *grafo producto* a $G * H$, y le exigiremos a la operación $*$ que los vértices de este grafo sean el producto cartesiano de los vértices de los grafos que intervienen en el producto, es decir, que

$$V(G * H) = V(G) \times V(H) \ \forall G, H \text{ grafos},$$

que en una notación menos compacta significa que $V(G*H) = \{(g,h) |\ g \in V(G) \text{ y } h \in V(H)\}$. Esta es la primera de las condiciones que le impondremos a la operación $*$. La razón de las restricciones es únicamente hacer el problema de catalogar productos de grafos tratable, lo que no quita que puedan imponerse límites mas laxos para realizar un estudio más general sobre el tema.

Impongamos una segunda restricción, que la operación $*$ satisfaga la propiedad de asociati-

[1]Ya veremos lo que esto significa

vidad; esto es, que dados tres grafos G, H y K se cumpla que la aplicación

$$(G * H) * K \to G * (H * K)$$
$$((g, h), k) \mapsto (g, (h, k))$$

sea un isomorfismo. Notar que esta propiedad no solo impone que $(G * H) * K \cong G * (H * K)$ sino que son isomorfos a *a través de* la aplicación anterior, lo cual es mucho más restrictivo.

Para ser consecuentes debemos dar una justificación a esta imposición (aunque no justificarlo es totalmente válido, pues las matemáticas se hacen ateniéndose a ciertos axiomas, no es necesario justificar estas). Para obtener una tranquilidad eterna nos disponemos a justificar la necesidad de la asociatividad en un producto.

En nuestro día a día la experiencia nos dice que el orden de realizar una acción autónoma, en el sentido de ser independiente de algún suceso anterior no tiene dependencia en el resultado final de la misma. De forma que operar abstractamente de manera retroactiva sobre un sistema no va a cambiar el resultado a que todo ocurra de forma continua. De esta forma, si consideramos una operación arbitraria $\star$ actuando sobre tres estados a, b y c, que $\star$ sea asociativa quiere decir que considerar una sucesión lineal $(a \star b) \star c$ de eventos es lo mismo que considerar que sobre el estado $b \star c$ actúa de manera retroactiva el estado a. Matemáticamente

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

Volvemos a los productos de grafos. Hasta ahora hemos impuesto condiciones muy generales a los productos $*$ que vamos a estudiar. Veremos que los diferentes productos se diferenciarán por cómo fijan las adyacencias. Para ello trabajaremos con una función que refleje todas las posibles relaciones que existen entre dos vértices de un grafo. A esta función la llamaremos *función de incidencia* y vendrá dada por $\delta : V(G) \times V(G) \to \{\Delta, 0, 1\}$ con Δ un símbolo arbitrario representando al vértice incidiendo sobre sí mismo (un comodín). Esta función la definimos como:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \Delta & \text{si } u = v \\ 1 & \text{si } u \neq v \text{ y } uv \in E(G) \\ 0 & \text{si } u \neq v \text{ y } uv \notin E(G) \end{cases}$$

Es aquí donde impondremos la tercera y última propiedad que debe satisfacer $*$; y es la incidencia de un vértice en el grafo producto sea función de las incidencias de cada uno de los factores que intervienen en el producto. De esta manera nos aseguramos de que la función de incidencia del grafo producto tenga un buen comportamiento. Abusando de la notación esta condición se traduce en que

$$\delta((g,h),(g',h')) = \delta(g,g') *_I \delta(h,h'),$$

donde el subíndice I hace referencia a que estamos multiplicando funciones de incidencia. En caso de no haber confusión lo omitiremos.

Recapitulando, las tres condiciones que le exigimos a un producto de grafos $*$ son, la asociatividad a través del isomorfimo anterior y

i) $V(G * H) = V(G) \times V(H)$

ii) Buen comportamiento de la función de incidencia.

Nos referiremos a estas dos últimas como las condiciones $\boldsymbol{C_*}$. La imposición sobre $*$ de las condiciones $\boldsymbol{C_*}$ conduce a que los productos queden completamente determinados por las diferentes tablas de multiplicar del tipo

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	a	b
1	c	d	e
0	f	g	h

Cuadro 2.1: Tabla de multiplicar general

Podemos entonces caracterizar completamente a una operación $*$ estudiando los 9 valores $\{a, b, \cdots, h\}$, que dependerán de como sea la incidencia de cada nodo. Esto ya nos sugiere que existe un número finito de productos satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$. Si a estos productos les exigimos también la asociatividad es claro que habrá incluso menos.

La forma de proceder en esta búsqueda será la de introducir nuevas imposiciones más laxas sobre $*$, de forma que nos permita hacer un estudio ordenado pues no se trata de rellenar tablas al azar.

2.2. Productos para los cuales ambas proyecciones son homomorfismos débiles

Comencemos dando unas definiciones que nos permitan entender el título de esta sección.

Definición 2.2.1 *Sean G y H dos grafos, diremos que $\varphi : G \mapsto H$ es un homomorfismo débil si $\varphi : V(G) \mapsto V(H)$ es una aplicación tal que $uv \in E(G)$ implica que $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$ o $\varphi(u) = \varphi(v)$.*

Una *proyección* podemos considerarla simplemente como una restricción a uno de los dos grafos que intervienen en la operación $*$. Formalmente, una proyección es una aplicación $p_i : G_1 * G_2 * \cdots * G_k \to G_i$ tal que $p_i(g_1, g_2, \ldots, g_k) = g_i$. Impondremos ahora que las proyecciones sobre los dos grafos que intervienen en la operación $*$ sean homomorfismos débiles lo cual quiere decir que si tenemos una arista del grafo producto entonces esta satisface que

$$[(g,h),(g',h')] \in E(G * H) \Rightarrow \begin{cases} [g,g'] \in E(G) & \text{ó } g = g' \\ [h,h'] \in E(H) & \text{ó } h = h' \end{cases} \tag{2.1}$$

Y este es el criterio que seguiremos para fijar adyacencias en los productos $*$ de esta sección. Estamos en condiciones de comenzar a estudiar diferentes tablas de multiplicar, pero antes, notemos que ya tenemos varios valores impuestos por las condiciones impuestas hasta el momento.

Primero, un vértice incide sobre sí mismo en el grafo producto si

$$\delta((g,h),(g',h')) = \Delta \Leftrightarrow (g,h) = (g',h') \Leftrightarrow g = g' \text{ y } h = h' \Leftrightarrow \delta(g,g') = \Delta \text{ y } \delta(h,h') = \Delta$$

con lo que tenemos un primer valor fijo para *todo* producto $*$ satisfaciendo las propiedades $\boldsymbol{C_*}$.

Asimismo, de la imposición de que el producto sea un homomorfismo débil se deduce que

$$\begin{aligned} \delta(g,g') = 0 \Rightarrow g \neq g' \text{ y } gg' \notin E(G) \Rightarrow (g,h) \neq (g',h') \text{ y } [(g,h),(g',h')] \notin E(G * H) \\ \Rightarrow \delta((g,h),(g',h')) = 0 \end{aligned}$$

lo que nos va a fijar 5 valores en las tablas.

Una vez hechas estas consideraciones notamos que casi todos los resultados de $\delta(g,g') * \delta(h,h')$ ya están fijados. Solo nos queda determinar los valores que pueden tomar los productos $\{\Delta * 1, 1 * \Delta, 1 * 1\}$, pudiendo tomar cada uno 2 valores distintos (0 ó 1). Por lo tanto, hay 8 formas de completar las tablas, estas son:

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	1	0
1	1	0	0
0	0	0	0

Producto cartesiano

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

Producto directo

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

Producto fuerte

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

Producto trivial

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	0	0
1	1	1	0
0	0	0	0

Producto A

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	0	0
1	1	0	0
0	0	0	0

Producto B

Cuadro 2.2: Productos satisfaciendo la propiedad de que ambas proyecciones sean homomorfismos débiles

Los nombres puestos a los tres primeros productos no son casualidad, y esas son las tablas de multiplicar de los productos que nos interesarán más adelante. Dijimos que había 8 productos diferentes, pero en el Cuadro 2.2 solo vemos 6, los dos que faltan son los correspondientes a las tablas traspuestas de los productos A y B, que dan productos con las mismas propiedades.

Notamos que el producto trivial es sencillamente el resultado de hacer un grafo con $|V(G)|+|V(H)|$ vértices completamente desconectado. Este satisface todas las propiedades que hemos ido exigiendo, pero no es muy interesante, razón por la que lo obviaremos y no le dedicaremos más interés.

Antes de estudiar los productos surgidos de estas tablas vamos a ver una propiedad que nos permitirá obviar al producto A en adelante.

Proposición 2.2.1 *Un producto de grafos $*$ satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$ es asociativo si y solo si su operación $*_I$ correspondiente es asociativa.*

Demostración: Veamos la doble implicación.

- $*$ asociativo $\Rightarrow \delta$ asociativa:

  Sean G, H y K grafos, $*$ una operación asociativa. Esto quiere decir que $\exists \varphi : G*(H*K) \to (G*H)*K$ isomorfismo. Por ser φ un isomorfismo, se conserva la adyacencia, por lo tanto, los elementos $(g,(h,k)) \in G*(H*K)$ y $\varphi((g,(h,k))) = ((g,h),k) \in E((G*H)*K)$ tienen los mismos vecinos. O sea que la función de incidencia satisface que

$$\delta((g,(h,k),(g',(h',k'))) = \delta(((g,h),k),((g',h'),k'))$$

y la asociatividad se sigue de manera evidente.

- $*_I$ asociativa $\Rightarrow$ $*$ asociativo:
  Al ser $*_I$ asociativa, las adyacencias se conservan, por lo que hay un isomorfismo dado por

$$G*(H*K) \longrightarrow (G*H)*K$$
$$(g,(h,k)) \longrightarrow ((g,h),k)$$

  el cual define la asociatividad.

■

Este resultado nos permite comprobar que el producto A no es asociativo, en efecto

$$1 *_A (\Delta *_A 1) = 1 *_A 0 = 0$$

mientras que

$$(1 *_A \Delta) *_A 1 = 1 *_A 1 = 1.$$

Como el producto A no es asociativo no nos interesa pues es una de las condiciones que le hemos impuesto a los productos de grafos que estudiaremos.

De modo similar comprobamos que el producto B es asociativo, pero

$$[(g,h),(g',h')] \in E(G*H) \Longleftrightarrow gg' \in E(G) \text{ y } h = h'$$

de forma que estamos "copiando" G un total de $|V(H)|$ veces. Esto hace que podamos considerar al producto B como una especie de producto por escalares, pero no le daremos mayor relevancia.

Estamos listos para estudiar ciertas propiedades de los productos $*$ y de su función de incidencia que nos serán de gran utilidad para estudiar la estructura algebraica de las operaciones obtenidas hasta el momento a través de sus tablas de multiplicar.

Definición 2.2.2 *Un producto de grafos se dice conmutativo si la aplicación $\varphi : G*H \to H*G$ tal que $\varphi((g,h)) = (h,g)$ es un isomorfismo para todo par de grafos G y H.*

Introducido este concepto, estudiemos cúando un producto de los que consideramos satisface la propiedad de conmutatividad.

Proposición 2.2.2 *Un producto de grafos $*$ satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$ es conmutativo si y solo si su operación $*_I$ correspondiente es conmutativa.*

Demostración: Sea $*$ un producto de grafos conmutativo. Esto ocurre si y solo si, existe $\varphi : G * H \to H * G$ isomorfimo tal que $\varphi((g, h)) = \varphi((h, g))$. Por la propia definición de isomorfismo

$$[\varphi(g, h), \varphi(g', h')] = [(h, g), (h', g')] \in E(H * G) \Leftrightarrow [(g, h), (g', h')] \in E(G * H).$$

Esto ocurre si y solo si

$$\delta(\varphi(g, h), \varphi(g', h')) = \delta((h, g), (h', g')) = \delta((g, h), (g', h')),$$

de donde se sigue la tesis. ■

De la anterior proposición se sigue un resultado realmente interesante a la hora de estudiar los diferentes productos.

Corolario 2.2.1 *Un producto de grafos $*$ satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$ es conmutativo si y solo si su tabla de multiplicar es simétrica.*

Veamos ahora una última propiedad.

Proposición 2.2.3 *Un producto de grafos $*$ satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$ tiene unidad si y solo si su operación $*_I$ correspondiente la tiene.*

Demostración: Sea $\mathbb{1}$ el grafo unidad relativo a $*$. Así, $\mathbb{1} * G \cong G * \mathbb{1} \cong G$. Comencemos estudiando cómo son los vértices en cada caso:

$$V(\mathbb{1} * G) = \{(u, g) | u \in V(\mathbb{1}) \text{ y } g \in V(G)\} \cong \{(g, u) | u \in V(\mathbb{1}) \text{ y } g \in V(G)\} \cong \{g \in V(G)\}$$

De donde deducimos que $|V(\mathbb{1})| = 1$ y por lo tanto $\delta(u, u') = \Delta \ \forall u, u' \in V(\mathbb{1})$. Veamos como es la función de incidencia en cada caso:

- $G \cong G * \mathbb{1}$:

  Se tiene que

$$\delta((g,u),(g',u')) = \begin{cases} \Delta & \text{si } (g,u) = (g',u') \\ 1 & \text{si } (g,u) \neq (g',u') \text{ y } [(g,u),(g',u')] \in E(G * \mathbb{1}) \\ 0 & \text{si } (g,u) \neq (g',u') \text{ y } [(g,u),(g',u')] \notin E(G * \mathbb{1}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Delta & \text{si } g = g' \\ 1 & \text{si } g \neq g' \text{ y } \delta(g,g') * \Delta = 1 \\ 0 & \text{si } g \neq g' \text{ y } \delta(g,g') * \Delta = 0 \end{cases}$$

de donde deducimos que la igualdad $\delta((g,u),(g',u')) = \delta(g,g')$ se da si y solo si

$$1 * \Delta = 1 \text{ y } 0 * \Delta = 0.$$

- $G \cong \mathbb{1} * G$:

  De forma análoga llegamos a que

  $$\Delta * 1 = 1 \text{ y } \Delta * 0 = 0$$

Recapitulando, probamos la tesis y además llegamos a que Δ es la unidad de $*_I$ en caso de que $*$ tenga unidad. ■

2.3. Productos para los cuales solo una proyección es un homomorfismo débil

Nos centraremos ahora en hallar los productos asociativos cumpliendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$ para los cuales solo la proyección del primer grafo es un homomorfismo débil. Esta condición impone, razonando como arriba, que en las tablas de multiplicar que en la fila correspondiente al cero haya todo ceros. Además, la condición de que $\Delta * \Delta = \Delta$ sigue manteniéndose. Es decir, que partimos de una tabla como la siguiente:

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ		
1			
0	0	0	0

Cuadro 2.3: Tabla de multiplicar generalizada para productos con solo una proyección homomorfismo débil

Para rellenar los huecos que faltan en la tabla vamos a ver las posibilidades que tenemos. Si suponemos el valor que va en la esquina superior derecha es $\Delta * 0 = 1$, entonces imponiendo asociatividad obtenemos que para todo $x \in \{\Delta, 1, 0\}$ se tiene que

$$1 * x = (\Delta * 0) * x = \Delta * (0 * x) = \Delta * 0 = 1.$$

Con lo que la segunda fila son todo 1. Asimismo, el último valor que queda por deducir es

$$\Delta * 1 = \Delta * (\Delta * 0) = (\Delta * \Delta) * 0 = \Delta * 0 = 1.$$

Lo que nos completa la tabla de multiplicar (ver el Cuadro 2.4 producto D).

Si, por el otro lado, fijamos que $\Delta * 0 = 0$, para que solo una y no ambas proyecciones sea un homomorfismo débil tiene que haber al menos un 1 en la columna derecha. De esta forma deducimos que $1 * 0 = 1$. Asimismo, para todo $x \in \{\Delta, 1, 0\}$ se tiene debido a la propiedad asociativa

$$1 * x = (1 * 0) * x = 1 * (0 * x) = 1 * 0 = 1.$$

O sea, que la segunda fila es todo 1. Solo falta decidir qué valor toma $\Delta * 1$, para lo que no tenemos ningún mecanismo de elección, lo que nos da dos posibilidades.

Recapitulando, hemos deducido que tenemos 3 productos asociativos distintos para los cuales solo la primera proyección es un homomorfismo débil. Estos son los siguientes

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	1	0
1	1	1	1
0	0	0	0

Producto lexicográfico

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0

Producto C

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	1	1
1	1	1	1
0	0	0	0

Producto D

Cuadro 2.4: Productos satisfaciendo la propiedad de que solo la primera proyección sean un homomorfismo débil

Que solo un producto de la tabla anterior tenga un nombre distintivo es suficiente señal de que este es interesante. De la tabla de multiplicar del producto lexicográfico se deduce que

$$[(g,h),(g',h')] \in E(G*H) \Longleftrightarrow gg' \in E(G),\ \text{ó } g = g' \text{ y } hh' \in E(H)$$

lo cual quiere decir que las aristas de ambos grafos están de alguna manera codificadas dentro del grafo producto mientras los productos C y D desprecian la del segundo. Por este motivo no los consideramos interesantes y los ignoraremos.

Hasta ahora solo hemos considerado los productos para los que la primera proyección es un homomorfismo débil. Si repetimos los argumentos para aquellos en los que lo es la segunda llegaríamos a 3 productos nuevos, los relativos a las traspuestas de las tablas del Cuadro 2.4. Considerándolos, tenemos que hay 6 productos asociativos distintos con solo una proyección siendo un homomorfismo débil.

2.4. Todos los productos asociativos de grafos

Es claro que solo quedan por identificar los productos asociativos de grafos en los que ninguna proyección es un homomorfismo débil. Para proceder definiremos el *producto complementario* $\overline{*}$ como:

$$G\overline{*}H = \overline{\overline{G} * \overline{H}} \tag{2.2}$$

Veamos dos propiedades fundamentales de este producto complementario.

Proposición 2.4.1 *Dado un producto de grafos $*$ satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$. Entonces $*$ es asociativo si y solo si $\overline{*}$ es asociativo.*

Demostración: Sean G, H y K grafos. Comencemos notando que

$$(G\overline{*}H)\overline{*}K = (\overline{\overline{G}*\overline{H}})\overline{*}K = \overline{(\overline{\overline{\overline{G}*\overline{H}}})*\overline{K}} = \overline{(\overline{G}*\overline{H})*\overline{K}}.$$

De manera que

$$(G\overline{*}H)\overline{*}K = G\overline{*}(H\overline{*}K) \Longleftrightarrow (\overline{G}*\overline{H})*\overline{K} = \overline{G}*(\overline{H}*\overline{K}),$$

de donde se sigue la tesis. ■

Proposición 2.4.2 *Dado un producto de grafos $*$ satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$. Entonces, $\overline{\overline{*}} = *$*

Demostración: Sean G y H grafos, se tiene, aplicando la definición, que

$$G\overline{\overline{*}}H = \overline{\overline{G}\overline{*}\overline{H}} = \overline{\overline{\overline{\overline{G}}*\overline{\overline{H}}}} = G*H.$$

■

Proposición 2.4.3 *Sea $*$ un producto de grafos satisfaciendo las condiciones $\boldsymbol{C_*}$. Entonces para calcular la tabla de multiplicar de $\overline{*}$ se deben intercambiar la segunda y tercera fila, luego la segunda y tercera columna y finalmente cambiar los 1 por 0 y viceversa.*

Demostración: Vayamos poco a poco. Sean G y H grafos, buscamos aplicar la Definición 2.2. Es claro que si cambio las filas (columnas) de 1 y 0 consigo la tabla de multiplicar correspondiente a cambiar primer (segundo) grafo por su complementario. Gráficamente:

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	a	b
1	c	d	e
0	f	g	h

$G*H$

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	a	b
1	f	g	h
0	c	d	e

$\overline{G}*H$

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	b	a
1	f	h	g
0	c	e	d

$\overline{G}*\overline{H}$

Así, para hallar el complementario de la tabla más a la derecha solo debemos cambiar los 1 por 0 y viceversa. ■

Con estas tres propiedades estamos en condiciones de hallar el resto de productos asociativos de grafos.

Aplicando a los productos con solo una proyección siendo un homomorfismo débil la Proposición 2.4.3 obtenemos que las respectivas tablas de multiplicar son de la forma:

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	a	b
1	1	1	1
0	0	0	0

$\overline{*}$	Δ	1	0
Δ	Δ	b	a
1	1	1	1
0	0	0	0

con $a, b \in \{1, 0\}$. Osea que, el producto complementario de los productos del Cuadro 2.4 siguen siendo productos con solo una proyección homomorfismo débil.

Consideremos ahora los productos cuyas dos proyecciones son homomorfismos débiles y estudiemos sus productos complementarios. Si consideramos una arista $[(g,h),(g',h')] \in E(G * H)$ tal que $gg' \in E(G)$ y $hh' \notin E(H)$ entonces, como la proyección sobre G es un homomorfismo débil, $[(g,h),(g',h')] \notin E(\overline{G} * \overline{H})$, con lo que tenemos que es una arista de $\overline{\overline{G} * \overline{H}} = G \overline{*} H$. Ahora bien, si proyectamos $[(g,h),(g',h')]$ sobre H tenemos que $hh' \notin E(H)$, por lo que esta proyección no es un homomorfismo débil.

De manera análoga deducimos que la proyección sobre G tampoco es un homomorfismo débil, de modo que los productos complementarios de los 6 productos asociativos correspondientes a los del Cuadro 2.2 son productos asociativos que no hemos considerado previamente.

Llegados a este punto solo queda ver si existen otros productos asociativos de grafos cuyas proyecciones no sean homomorfismos débiles. Los casos que faltan se clasifican con técnicas similares, pero omitiremos los detalles para no extender más el texto.

Toda la discusión llevada hasta el momento puede condensarse en un único resultado.

Teorema 2.4.1 (Teorema de clasificación de productos asociativos de grafos) *Hay exactamente veinte productos asociativos de grafos satisfaciendo las condiciones* $\mathbf{C}_*$. *Seis de ellos tienen la propiedad de que ambas proyecciones son homomorfismos débiles. En otros seis solo una de las proyecciones lo es y en los últimos ocho, ninguna.*

Una vez clasificados todos los productos de grafos satisfaciendo nuestras restricciones estamos en condiciones de hacer un estudio más exhaustivo de los más interesantes.

3. Producto cartesiano

En este y en los siguientes capítulos se estudiarán los principales productos de grafos que hemos ido introduciendo en la sección anterior. Nos centraremos en las propiedades algebraicas y métricas para luego continuar con las descomposiciones en factores primos (que ya veremos lo que son) y con los grupos de automorfismos de cada producto.

3.1. Definición y estructura algebraica

En el Cuadro 2.2 una de las tablas de multiplicar lleva el nombre de *producto cartesiano* y es a través de esta que lo definiremos.

$\square$	Δ	1	0
Δ	Δ	1	0
1	1	0	0
0	0	0	0

Cuadro 3.1: Tabla de multiplicar del producto cartesiano

Denotaremos a este producto por $\square$, de modo que, el producto cartesiano de dos grafos G y H es un grafo $G\square H$ tal que, de acuerdo a su tabla de multiplicar, tiene como aristas y vértices

$$V(G\square H) = \{(g,h) \mid g \in V(G) \text{ y } h \in V(H)\},$$
$$E(G\square H) = \{[(g,h),(g',h')] \mid g = g' \text{ y } hh' \in E(H), \text{ ó } gg' \in E(G) \text{ y } h = h'\}.$$

La elección del símbolo $\square$ para denotar a este producto no es azarosa. Si representamos el producto $K_2\square K_2$ se obtiene la Figura 3.1.

La asociatividad de este producto se verifica a partir de la Proposición 2.2.1 y de ella se

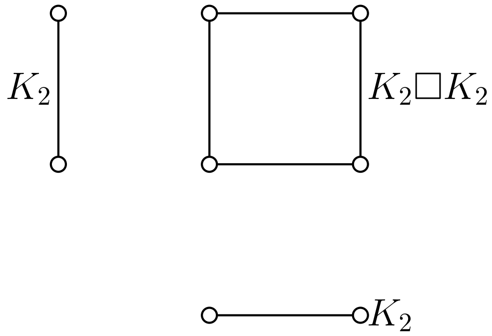

Figura 3.1: Justificación gráfica de la elección del símbolo $\square$ para representar el producto cartesiano.

deduce que si $G_1, G_2, \ldots, G_k$ son grafos en Γ entonces

$$G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_k = \mathop{\square}_{i=1}^{k} G_i$$

tiene como conjunto de vértices $V(\mathop{\square}_{i=1}^{k} G_i) = \{(g_1, g_2, \ldots, g_k) \mid g_i \in V(G_i)\}$ y dos de sus vértices $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ y $(h_1, h_, \ldots, h_k) \in V(\mathop{\square}_{i=1}^{k} G_i)$ son adyacentes si $g_i h_i \in E(G_i)$ para *un solo* índice $1 \leq i \leq k$ y $g_j = h_j$ para el resto de índices $j \neq i$.

Asimismo, aplicando el Corolario 2.2.1 a su tabla de multiplicar deducimos que el producto cartesiano es conmutativo.

De la noción de unión disjunta y de todo lo expuesto hasta ahora es evidente que el producto cartesiano disbribuye sobre esta, de modo que se tiene que

$$G \square (H + K) = G \square H + G \square K.$$

Observando las relaciones de adyacencia que satisface el grafo producto $G \square H$ es claro que el elemento neutro es el grafo trivial con un solo vértice, K_1,

$$K_1 \square G \cong G \square K_1 \cong G.$$

De la misma forma, considerando el elemento neutro de la unión disjunta, se tiene que

$$\emptyset \square G = G \square \emptyset = \emptyset.$$

Recordando que un semianillo $(S, +, \cdot)$ es un conjunto S equipado con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ tales que

i) $(S, +)$ es asociativa, posee elemento neutro y es conmutativa

ii) $(S, \cdot)$ es asociativa y posee elemento neutro

y tales que $\cdot$ distribuye con respecto a $+$, podemos resumir las consideraciones hechas hasta el momento en la siguiente proposición.

Teorema 3.1.1 (Estructura algebraica del producto cartesiano) $(\Gamma, +, \Box)$ *tiene estructura de semianillo conmutativo.*

A partir de ahora nos restringiremos al semianillo $(\Gamma, +, \Box)$ cuando hablemos de producto cartesiano, por lo que si ponemos $G\Box H$ se entenderá que los grafos $G, H \in \Gamma$.

3.2. Estrucutra métrica

Nos interesamos ahora por descubrir la forma de calcular distancias en el grafo producto cartesiano. La sencillez de este producto parece indicar que para calcularlas solo tendremos que sumar las distancias en cada una de las proyecciones sobre los factores que componen el grafo producto. Para formalizar esta idea inicial debemos recordar que en este producto las proyecciones sobre cada factor es un homomorfismo débil como se introdujo en el anterior capítulo.

Proposición 3.2.1 *Sean (g, h) y (g', h') vértices del grafo $G\Box H$. Entonces, la distancia entre estos es*

$$d_{G\Box H}((g, h), (g', h')) = d_G(g, g') + d_H(h, h').$$

Demostración: Consideraremos tres casos distintos:

i) Si $d_G(g, g') = \infty$ entonces G es unión disjunta de dos grafos G_1 y G_2 con $g \in V(G_1)$ y $g' \in V(G_2)$. Como el producto cartesiano distribuye sobre la unión disjunta se tiene que $G\Box H = (G_1 + G_2)\Box H = G_1\Box H + G_2\Box H$, por lo que se tiene que $G\Box H$ es también unión disjunta de dos grafos. Como $(g, h) \in V(G_1\Box H)$ y $(g', h') \in V(G_2\Box H)$ y estos dos grafos son disjuntos se sigue que $d_{G\Box H}((g, h), (g', h')) = \infty$.

ii) Si $d_H(h, h') = \infty$. Análogo al anterior.

iii) Si $d_G(g,g')$ y $d_H(h,h')$ finitos. Sea $\pi = a_0 a_1 \cdots a_{d_G(g,g')}$ un camino en G de $g = a_0$ a $g = a_{d_G(g,g')}$ y sea $\tau = b_0 b_1 \cdots b_{d_H(h,h')}$ un camino en H de $h = b_0$ a $h' = b_{d_H(h,h')}$. Así, en el grafo $G\Box H$ la concatenación de los caminos

$$\pi \times \{h\} = [(g,h),(a_1,h),\cdots,(g',h)]$$
$$\{g'\} \times \tau = [(g',h),(g',b_1),\cdots,(g',h')]$$

es un camino de (g,h) a (g',h'), por lo que la distancia entre ambos:

$$d_{G\Box H}((g,h),(g',h')) \leq |E((\pi \times \{h\}) \cup (\{g'\} \times \tau))| = d_G(g,g') + d_H(h,h')$$

Sea ξ un camino más corto entre (g,h) y (g',h') y sean p_G y p_H las proyecciones de $G\Box H$ sobre cada uno de sus factores. Entonces, cada arista de ξ se proyecta sobre una arista en un factor y a la vez sobre un vértice en el otro. Este hecho se entiende mejor con la Figura 3.1.

$$d_G(g,g') + d_H(h,h') \leq |E(p_G(\xi))| + |E(p_H(\xi))| = |E(\xi)| = d_{G\Box H}((g,h),(g',h'))$$

Con lo que se concluye la prueba.

■

La proposición anterior puede generalizarse mediante la asociatividad del producto en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1 (Distancia en el producto cartesiano) *Sea* $G = \mathop{\Box}\limits_{i=1}^{k} G_i$ *y sean* $x, y \in V(G)$. *Entonces se tiene que la distancia entre los vértices* x *e* y *es*

$$d_G(x,y) = \sum_{i=1}^{k} d_{G_i}(p_{G_i}(x), p_{G_i}(y))$$

donde p_{G_i} *es la proyección sobre el grafo* G_i.

Asimismo, en el primer caso de la demostración de la Proposición 3.2.1 vimos que si un grafo es unión disjunta de dos grafos, $G = G_1 + G_2$, entonces el grafo producto cartesiano $G\Box H = G_1\Box H + G_2\Box H$ es también unión disjunta de dos grafos. Este razonamiento conduce al siguiente corolario.

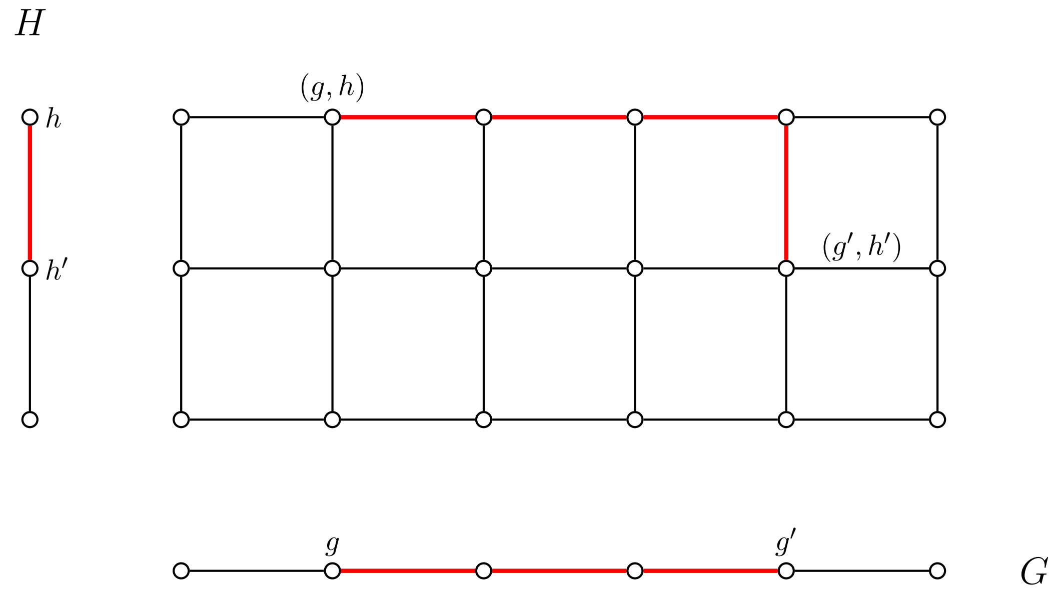

Figura 3.1: $G\Box H$. Un camino de mínima distancia entre los vértices (g,h) y (g',h') está coloreado en rojo con las proyecciones sobre cada factor en el mismo color.

Corolario 3.2.2 (Conexión en el producto cartesiano) *El grafo producto cartesiano es conexo si y solo si cada uno de sus factores es conexo.*

Demostración: Veamos la doble implicación para un grafo $G\Box H$ con dos factores.

- $G\Box H$ conexo $\implies$ G y H conexos:
  Demostraremos la contraposición. Sin pérdida de generalidad consideramos que G no es conexo, entonces $G = G_1 + G_2$ con G_1 y G_2 disjuntos. Por la distributividad del producto cartesiano sobre la suma disjunta se tiene que

$$G\Box H = G_1\Box H + G_2\Box H$$

  de donde se sigue que $G\Box H$ no es conexo.

- G y H conexos $\implies$ $G\Box H$ conexo:
  Sean (g,h) y (g',h') dos vértices arbitrarios de $G\Box H$. Por el Corolario 3.2.1 sabemos que

$$d_{G\Box H}((g,h),(g',h')) = d_G(g,g') + d_H(h,h')$$

  y como G y H son conexos por hipótesis se tiene que $d_G(g,g')$ y $d_H(h,h')$ son finitos. Así, $d_{G\Box H}((g,h),(g',h'))$ es finito, por lo que existe un camino finito que une los vértices (g,h) y (g',h'), con lo que $G\Box H$ es conexo.

Estos mismos razonamientos se extienden a grafos producto cartesiano con más de dos factores.■

El siguiente resultado es de demostración directa por lo visto hasta ahora así que la obviaremos.

Corolario 3.2.3 *El número de componentes conexas del grafo producto cartesiano es el producto de los números de componentes conexas de sus factores.*

Notemos que tenemos completamente caracterizada la forma de medir distancias y la conexión en el grafo producto cartesiano. Esto nos permite definir una topología a partir de la métrica, por lo que podemos hacer un estudio con las herramientas de esta rama de las matemáticas si fuera necesario.

3.3. Descomposición en factores primos

Comencemos introduciendo un concepto de vital importancia en esta y en futuras secciones.

Definición 3.3.1 *Diremos que un grafo es primo con respecto a un producto de grafos arbitrario si no es el grafo unidad de ese producto (en caso de que exista) y no se puede representar como el producto de dos grafos no triviales.*

En el contexto del producto cartesiano, esta definición significa que un grafo no trivial G es primo si $G = G_1 \Box G_2$ implica que $G_1 = K_1$ ó $G_2 = K_1$. En este punto nos surge ya una sospecha matemática de que cualquier grafo va a ser primo o tendrá una representación como producto de estos. Probaremos este hecho y veremos bajo que condiciones la representación es única.

Proposición 3.3.1 (Descomposición en factores primos) *Todo grafo no trivial G puede factorizarse en grafos primos con respecto al producto cartesiano, además, el número de factores es a lo sumo* $\log_2 |V(G)|$.

Demostración: El producto de k grafos no triviales (con más de un vértice) tiene *al menos* $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{k \text{ veces}} = 2^k$ vertices, luego, como la factorización con mayor número de factores primos es aquella en la que todo factor tiene 2 vértices, G tendrá *a lo sumo* $\log_2 |V(G)|$ factores. Entonces, hay una factorización $G = \mathop{*}\limits_{i=1}^{\ell} G_i$ con $\ell \leq \log_2 |V(G)|$ con un número máximo de factores.

Todos estos factores son primos o de lo contrario existiría una factorización con mayor número de factores. ■

Que en el nombre de la anterior proposición no se mencione al producto cartesiano debe darnos a entender que es un resultado que se puede extender a otro tipo de productos de grafos. De hecho el resultado es cierto para todos los que estamos considerando (asociativos y satisfaciendo las propiedades $\boldsymbol{C_*}$).

Nuestro objetivo en esta sección es probar bajo qué condiciones un grafo tiene descomposición única en factores primos. Para ello adelantamos que deberemos introducir nuevos conceptos, pero antes de eso podemos tener una idea feliz y descartar la factorización única para los grafos no conexos.

Teorema 3.3.1 *La factorización en factores primos con respecto al producto cartesiano no es única en grafos no conexos.*

Demostración: Por idea feliz[1] se ve que

$$(K_1 + K_2 + K_2^{\Box,2})\Box(K_1 + K_2^{\Box,3}) = (K_1 + K_2^{\Box,2} + K_2^{\Box,4})\Box(K_1 + K_2)$$

donde hemos introducido la notación $G^{\Box,k} = \mathop{\Box}\limits_{1}^{k} G$. Probemos que efectivamente la igualdad anterior se cumple. En lugar de hacer una prueba gráfica y ver que los grafos generados por el lado izquierdo y el derecho son iguales vamos a hacerlo algebraicamente. Así,

$$\begin{aligned}(K_1 + K_2 + K_2^{\Box,2})\Box(K_1 + K_2^{\Box,3}) &= K_1^{\Box,2} + K_1\Box K_2^{\Box,3} + K_2\Box K_1 + K_2^{\Box,4} + K_2^{\Box,2}\Box K_1 + K_2^{\Box,5}\\ &= K_1 + K_2 + K_2^{\Box,2} + K_2^{\Box,3} + K_2^{\Box,4} + K_2^{\Box,5},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(K_1 + K_2^{\Box,2} + K_2^{\Box,4})\Box(K_1 + K_2) &= K_1^{\Box,2} + K_1\Box K_2 + K_2^{\Box,2}\Box K_1 + K_2^{\Box,3} + K_2^{\Box,4} + K_2^{\Box,5}\\ &= K_1 + K_2 + K_2^{\Box,2} + K_2^{\Box,3} + K_2^{\Box,4} + K_2^{\Box,5}.\end{aligned}$$

Vemos que ambos miembros son iguales. Hasta ahora hemos probado que la factorización en grafos no conexos no es única, falta ver que estas dos factorizaciones son en grafos primos. Por el Corolario 3.2.3 sabemos que si un grafo G con dos componentes conexas es producto cartesiano

[1] Realmente se está considerando un polinomio en el semianillo $\mathbb{Z}^+[x]$ que no tiene factorización en primos única.

de dos grafos G_1 y G_2, entonces uno de estos grafos tiene una componente conexa y el otro dos. En nuestro caso, el grafo con dos componentes conexas es de la forma $K_1 + A$ con A no trivial. La representación como el producto de dos factores es de la forma

$$K_1 + A \cong B\Box(C_1 + C_2) = B\Box C_1 + B\Box C_2.$$

Por lo que $K_1 \cong B\Box C_i$ para algún i. Como el número de vértices $V(B\Box C_i) = V(B) \times V(C_i) = V(K_1) = 1$ se tiene que $V(B) = 1$ y entonces B es trivial de donde se sigue que $K_1 + A$ es primo. Este mismo argumento puede hacerse para un grafo con tres componentes conexas de la forma $K_1 + \hat{A} + \hat{B}$. Por lo tanto ambos, factores en los dos lados de la expresión del inicio de la demostración son primos.

Recapitulando, hemos encontrado dos descomposiciones en factores primos diferentes para un grafo producto cartesiano no conexo, por lo que se concluye la prueba. ■

El siguiente resultado caracteriza aún más las factorizaciones en primos de grafos no conexos.

Proposición 3.3.2 *Un grafo con p primo componentes conexas es primo con respecto al producto cartesiano si y solo si las componentes conexas de G no tienen ningun factor no trivial común.*

Demostración: Sea $G = \sum\limits_{i=1}^{p} G_i$ con p primo. Por la Proposición 3.3.1 sabemos que cada uno de los G_i puede descomponerse como producto de primos respecto al producto cartesiano, $G_i = \mathop{\Box}\limits_{j=1}^{k_i} H_j^i$ con H_j^i primos, con lo que, se tiene:

$$G = \sum_{i=1}^{p} \mathop{\Box}_{j=1}^{k_i} H_j^i = H_1^1\Box H_2^1\Box\cdots\Box H_{k_1}^1 + H_1^2\Box H_2^2\Box\cdots\Box H_{k_2}^2 + \cdots + H_1^p\Box H_2^p\Box\cdots\Box H_{k_p}^p$$

Llegados a este punto hay dos posibilidades:

i) Los distintos factores de las componentes conexas tienen un factor común no trivial: Entonces $\forall i\ \exists j_i$ tal que $H_{j_i}^i = \hat{H}$ con $\hat{H} \neq K_1$. Así, como el producto cartesiano es conmutativo respecto a la unión disjunta se puede poner

$$\begin{aligned} G = \hat{H}\Box(&H_1^1\Box H_2^1\Box\cdots\Box H_{j_1-1}^1\Box H_{j_1+1}^1\Box\cdots\Box H_{k_1}^1 + \cdots \\ &+ H_1^p\Box H_2^p\Box\cdots\Box H_{j_p-1}^p\Box H_{j_p+1}^p\Box\cdots\Box H_{k_p}^p) \equiv \hat{H}\Box K \end{aligned}$$

donde $\hat{H}, K \neq K_1$, lo que implica que G no es primo.

ii) Los distintos factores de las componentes conexas no tienen un factor común no trivial: Sean H y K grafos tales que $G = H \Box K$. Denotando por $\#(G)$ el número de componentes conexas de G, se tiene por el Corolario 3.2.3 que

$$\#(H) \Big| \#(G) = p \text{ primo} \Longleftrightarrow \#(H) = 1 \text{ ó } p$$

De donde se sigue que si $\#(H) = 1$ entonces H es un grafo conexo factor común de las distintas componentes conexas de G. Por hipótesis este grafo es el trivial $H = K_1$ y se sigue que G es primo. Si, por el otro lado $\#(H) = p$, entonces $\#(K) = 1$ y el razonamiento es análogo.

■

De esta anterior proposición se sigue un resultado potente que se deja sin demostración por ser esta directa.

Corolario 3.3.1 *Un grafo con p primo componentes conexas tiene una factorización única respecto del producto cartesiano.*

Hasta ahora tenemos que bajo ciertas condiciones los grafos no conexos no tienen factorización única en factores primos. El objetivo del resto de la sección es probar el siguiente teorema.

Teorema *Todo grafo conexo tiene una única (salvo isomorfismos y permutaciones) factorización como producto cartesiano de grafos primos.*

Para dicha prueba nos adentraremos en cierto tipo de subgrafos de los grafos producto cartesiano. Como parece evidente, dado un grafo producto hay muchos subgrafos radicalmente distintos. Debemos hallar una forma de discriminar cuáles son interesantes y cuáles no. Introduciremos un concepto que nos ayudará.

Definición 3.3.2 *Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ un vértice de un grafo producto arbitrario $G = G_1 * G_2 * \cdots * G_k$. Entonces llamamos $G_i^a -$ capa al subgrafo generado por*

$$G_i^a := \langle \{(a_1, a_2, \cdots, x_i, \cdots, a_k) \mid x_i \in V(G_i)\} \rangle \,.$$

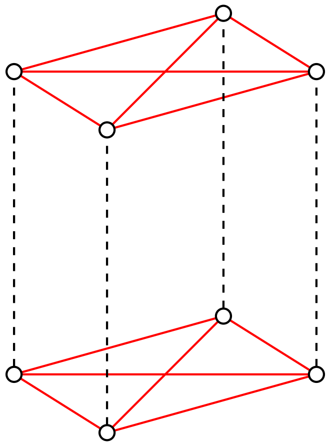

Figura 3.1: $K_4 \square K_2$. Las K_4-capa están sombreadas en rojo y las K_2-capa en línea discontinua.

En el ejemplo de la Figura 3.1 podemos observar entre con dos arcos incidentes cualesquiera de distintas capas se puede dibujar un paralelogramo. Veremos que esta propiedad no es trivial, y que tiene consecuencias interesantes para afrontar el problema que nos concierne.

Lema 3.3.1 (Del cuadrado único) *Sean e y f dos arcos incidentes de $G \square H$ tales que e está en una $G-capa$ y f en una $H-capa$. Entonces existe un único cuadrado sin diagonales en $G \square H$ conteniendo e y f.*

Demostración: Sean $e = uv = (u_1, u_2)(v_1, u_2)$ y $f = vw = (v_1, u_2)(v_1, v_2)$ dos arcos incidentes en dos capas diferentes. Sea $z = (z_1, z_2)$ un vértice adyacente a ambos u y v.
Por ser z adyacente a u se tiene que $z_1 = u_1$ ó $z_2 = u_2$. A la vez, por ser z adyacente a v se tiene que $z_1 = v_1$ ó $z_2 = v_2$. Como e y f están en capas diferentes se tiene que $u_1 \neq v_1$ y $u_2 \neq v_2$.
Todas estas restricciones hacen que $z = w$ ó $z = (u_1, v_2)$ con lo cual el camino

$$[(u_1, u_2), (v_1, u_2), (v_1, v_2), (u_1, v_2)]$$

es un cuadrado sin diagonales. ■

Si W es un subgrafo de un grafo producto cartesiano G tal que para cualquier par de arcos de W adyacentes en capas distintas el cuadrado único de G que los contiene está en W, entonces diremos que W satisface la *propiedad del cuadrado*. Un subgrafo que satisface esta propiedad tiene un "buen comportamiento", pues se comporta como un grafo producto cartesiano.

¿A qué nos referimos con "buen comportamiento"? Pues a que el subgrafo W sea también producto cartesiano de otros subgrafos. Demos una definición formal de este hecho.

Definición 3.3.3 *Sea* $G = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} G_i$ *un grafo producto cartesiano. Llamaremos caja a un* W *subgrafo de* G *de la forma* $W = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} U_i$ *con* $U_i \subseteq G_i$ *para todo* i*.*

Podemos considerar estas cajas como el resultado de hacer el producto de subgrafos de cada uno de los factores que intervienen en el grafo producto G. Arriba comentamos que un grafo producto cartesiano tiene cuadrados, pero este hecho no quedó demostrado en ningún momento, hasta ahora no sabemos si es cierto o no.

Lema 3.3.2 *Un subgrafo conexo* W *de un grafo producto cartesiano es una caja si y solo si satisface la propiedad del cuadrado.*

Demostración: Es claro que las cajas tienen la propiedad del cuadrado (de hecho nos basamos en ellas para introducir el concepto). Hay que ver el recíproco, que si un subgrafo tiene la propiedad del cuadrado entonces es una caja. La demostración puede formalizarse, pero para aligerar la sección se presenta la idea a modo de esquema. Sea W un subgrafo de un grafo producto $G = H \square K$ satisfaciendo la propiedad del cuadrado. Queremos ver que si (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son dos vértices de W entonces (a_1, b_2) y (b_1, a_2) también lo son.
Vemos en la Figura 3.2 por ser conexo el subgrafo W existe un camino de (a_1, a_2) a (b_1, b_2) y en ese camino hay arcos adyacentes en distintas capas, por lo que como satisface la propiedad del cuadrado hacen que el cuadrado único que forman está en W y entonces W es una caja.
En la Figura 3.2 el grafo $W = H \square K_2$ con $H \subseteq C_7$ formado por 3 de sus vértices. ■

Directamente de la definición de caja vemos que todo grafo producto cartesiano es una, así que sabemos que este tipo de grafos cumple la propiedad del cuadrado. Con esto tenemos que las cajas tendrán un comportamiento de grafo producto cartesiano, con lo que hemos afinado los tipos de subgrafos nos interesan.

Introducimos ahora el último concepto necesario para probar el teorema principal.

Definición 3.3.4 *Un subgrafo* W *de* G *se dice convexo si todo camino en* G *de mínima distancia entre dos vértices de* W *está contenido en* W*.*

De la definición anterior se sigue que todo subgrafo convexo W de un producto cartesiano G conexo, es conexo y que satisface la propiedad del cuadrado. Esta segunda propiedad es

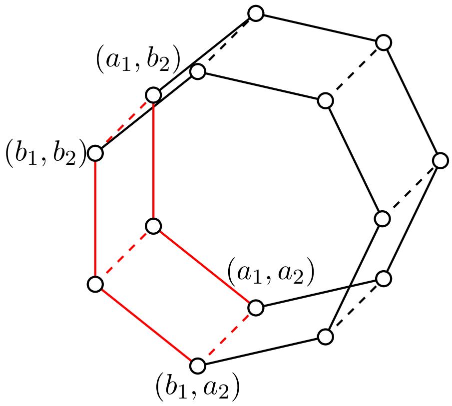

Figura 3.2: $C_7 \square K_2$. El subgrafo W sombreado en rojo, las $C_7 - capa$ en línea negra continua y las $K_2 - capa$ en línea sombreada.

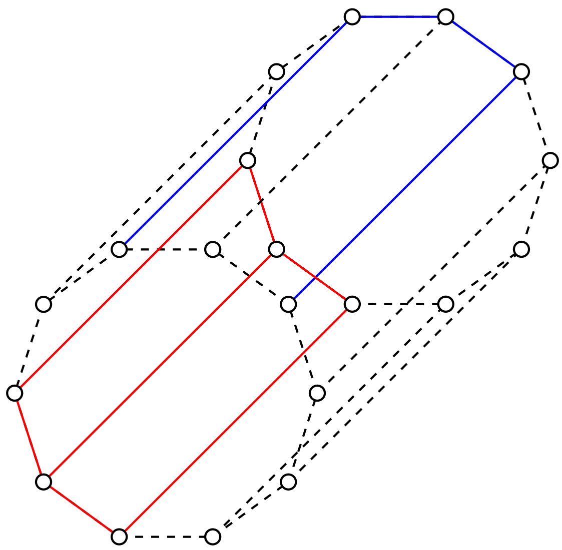

Figura 3.3: $C_{10} \square K_2$. En azul un subrafo no convexo y en rojo un subgrafo convexo. Notar que el subgrafo rojo es, de acuerdo con la definición, una caja.

consecuencia de la fórmula de la distancia entre dos vértices dada en el Corolario 3.2.1 y la conmutatividad del producto cartesiano.

Lema 3.3.3 *Sea W un subgrafo convexo de un producto cartesiano. Entonces W es una caja.*

Demostración: De lo comentado arriba y el Lema 3.3.2. ■

Ahora caracterizaremos la convexidad, y con esto ya estaremos en condiciones de probar que la factorización es única para grafos conexos.

Lema 3.3.4 *Un subgrafo W de $G = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} G_i$ es convexo si y solo si $W = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} U_i$ con U_i convexo en G_i para todo i.*

Demostración: Lo vemos por doble contenido.

- W convexo en $G \implies W = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} U_i$ con U_i convexo en G_i para todo i:
  Sea W convexo en G . Entonces, sabemos que es conexo y que satisface la propiedad del cuadrado. Por el Lema 3.3.2 deducimos que W es una caja y entonces podemos expresar W como el producto cartesiano de las proyecciones sobre cada uno de los factores de G, es decir, $W = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} p_{G_i}(W)$. Queremos ver que cada una de estas proyecciones es convexa en su respectivo factor G_i.
  Sean $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ y $b = (b_1, b_2, \cdots, b_k)$ dos vértices arbitrarios de W, y sea $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ cualquiera pero fijo. Para todo $j \neq i$ tomamos x_j un vértice cualquiera de G_j tal que pertenezca al camino más corto entre a_j y b_j. De esta manera tenemos que

  $$d_{G_j}(a_j, b_j) = d_{G_j}(a_j, x_j) + d_{G_j}(x_j, b_j) \ \forall j \in \{1, \cdots, k\}.$$

  Definiendo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ y de la fórmula de la distancia en el producto cartesiano (Corolario 3.2.1) se tiene que

  $$d_G(a, b) = d_G(a, x) + d_G(x, b).$$

  De donde se sigue que x es un vértice perteneciente al camino de mínima distancia entre a y b en G y por ser W convexo, x está en W y entonces $x_i = p_{G_i}(x) \in V(p_{G_i}(W))$.
  De la arbitrariedad de x se sigue el resultado.

- $W = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} U_i$ con U_i convexo en G_i para todo $i \implies W$ convexo en G:
  Puesto que para calcular distancias en el producto cartesiano debemos calcular distancias en las proyecciones es claro que si cada proyección es convexa, su producto lo será también.

■

De este lema anterior se deduce directamente el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2 *Una capa* $G_i^a = \{a_1\}\square\{a_2\}\square\cdots\square G_i\square\cdots\square\{a_k\}$ *en* $G = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} G_i$ *es una caja convexa.*

Estamos en condiciones de enunciar el último lema necesario, este siguiente nos da la unicidad de la factorización en elementos primos.

Lema 3.3.5 (De la unicidad de la factorización) *Sean* $G = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} G_i$ *y* $H = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{\ell} H_i$ *dos grafos productos cartesiano conexos con* G_i *y* H_i *grafos primos y sea* $\varphi : G \to H$ *un isomorfismo de grafos. Entonces,* $k = \ell$ *y para todo* a *vértice de* G *existe una permutación* σ *de* $\{1, 2, \cdots, k\}$ *tal que*

$$\varphi(G_i^a) = H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)} \ \forall 1 \leq i \leq k.$$

Demostración: Sea a cualquiera pero fijo y sea $b = \varphi(a)$. El Corolario 3.3.2 afirma que cualquier capa $G_i^a = \{a_1\}\square\{a_2\}\square\cdots\square G_i\square\cdots\square\{a_k\}$ es convexa en G, así que, por ser φ un isomorfismo, se tiene que $\varphi(G_i^a)$ es convexa en H. Por el Lema 3.3.4 se tiene que $\varphi(G_i^a) = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{\ell} U_i$ con U_i convexo. Como $a \in V(G_i^a)\ \forall i$ se tiene que $\varphi(a) = b \in V(\varphi(G_i^a))$. De la definición de capa 3.3.2 y de la hipótesis de que φ es un isomorfismo de grafos se sigue que $G_i \cong G_i^a \cong \varphi(G_i^a)$ y todos son primos pues G_i lo es por hipótesis. Así, $U_i = \{b_i\}$ para todo índice excepto para uno, al que llamaremos $\sigma(i)$. Todo esto se resume en que:

$$\varphi(G_i^a) \subseteq H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)}$$

Pero entonces, $G_i^a \subseteq \varphi^{-1}(H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)})$ que existe por ser φ un isomorfismo. Por la misma razón $\varphi^{-1}(H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)})$ es convexo, por lo que satisface la propiedad del cuadrado y por el Lema 3.3.2 sabemos que es una caja. Asimismo, como H_j es primo $\forall j$ por hipótesis tenemos que $\varphi^{-1}(H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)})$ es primo y entonces

$$\varphi^{-1}(H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)}) \subseteq G_i^a$$

con lo que $\varphi(G_i^a) = H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)}$.

Definimos una aplicación cualquiera de $\sigma : \{1, 2, \cdots, k\} \to \{1, 2, \cdots, \ell\}$. Vamos a ver que esta aplicación es inyectiva. Sean $1 \leq i, j \leq k$ tales que $\sigma(i) = \sigma(j)$ entonces $\varphi(G_i^a) = H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)} = \varphi(G_j^a)$. Entonces, como $H_{\sigma(i)}^{\varphi(a)}$ es primo, es no trivial y se tiene que la interseccion de G_i^a y de G_j^a es no trivial, pero esto solo ocurre si $i = j$ por lo que σ es inyectiva, de donde se sigue que

$$k \leq \ell$$

Análogamente, pero con φ^{-1}, se concluye que $\ell \leq k$, por lo que $k = \ell$ y entonces σ es una permutación. ■

Después de todo este sudor y lágrimas ya estamos en condiciones de terminar esta sección con el teorema maestro del producto cartesiano.

Teorema 3.3.2 (de factorización en el producto cartesiano) *Todo grafo conexo tiene una única (salvo isomorfismos y permutaciones) factorización como producto cartesiano de grafos primos.*

Demostración: La existencia se debe a la Proposición 3.3.1 y la unicidad al Lema 3.3.5. ■

3.4. Automorfismos del producto cartesiano

Centrémonos ahora en estudiar la estructura algebraica de los grafos productos cartesiano. Para ellos estudiaremos qué propiedades tiene $Aut(G)$.

Por el Teorema 3.3.2 sabemos que la factorización en grafos primos de un grafo producto cartesiano conexo es única salvo isomorfimos. Parece intuitivo pensar que un automorfismo de un grafo producto cartesiano conexo tendrá algo que ver con estos isomorfismos. Estudiémoslos a ver si se llega a algo.

Comencemos viendo la forma que tienen los automorfimos del Teorema 3.3.2.

Lema 3.4.1 *Sean G y H dos grafos conexos isomorfos con factorizaciones en grafos primos $G = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} G_i$ y $H = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} H_i$. Entonces, para todo isomorfismo $\varphi : G \to H$ existe una permutación σ de $\{1, 2, \cdots, k\}$ y existen isomorfimos $\varphi_i : G_{\sigma(i)} \to H_i$ tales que*

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (\varphi_1(x_{\sigma(1)}), \varphi_2(x_{\sigma(2)}), \cdots, \varphi_k(x_{\sigma(k)})).$$

Demostración: Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ un vértice cualquiera pero fijo de G. Sabemos por el Lema 3.3.5 que para todo ismorfismo $\varphi : G \to H$ existe una permutación π de $\{1, 2, \cdots, k\}$ tal que $\varphi(G_i^a) = H_{\pi(i)}^{\varphi(a)}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Definiendo $\sigma = \pi^{-1}$, que existe por ser π una permutación, se tiene que

$$\varphi(G_{\sigma(i)}^a) = H_i^{\varphi(a)}.$$

Estudiemos como actúa φ sobre cada uno de los factores $G_{\sigma(i)}$. Sea $x_{\sigma(i)}$ un vértice cualquiera de $G_{\sigma(i)}$. Sea la caja

$$B(x_{\sigma(i)}) = G_1 \Box G_2 \Box \cdots \Box \{x_{\sigma(i)}\} \Box \cdots \Box G_k.$$

Como todo grafo G_i es convexo sobre si mismo y el subgrafo trivial $\{x_{\sigma(i)}\} \subseteq G_{\sigma(i)}$ también es convexo sobre $G_{\sigma(i)}$ se tiene por el Lema 3.3.4 que $B(x_{\sigma(i)})$ es convexo, por lo que su imagen por el isomorfimo φ será convexo, y por el Lema 3.3.3 es una caja. Recapitulando, tenemos que $\varphi(B(x_{\sigma(i)}))$ es una caja en H.

Considerando la intersección de la caja $B(x_{\sigma(i)})$ con la capa $G_{\sigma(i)}^a$ se tiene que

$$B(x_{\sigma(i)}) \cap G_{\sigma(i)}^a = \{(a_1, a_2, \cdots, x_{\sigma(i)}, \cdots, a_k)\}$$

con lo que

$$\varphi(B(x_{\sigma(i)})) \cap \varphi(G_{\sigma(i)}^a) = \varphi(B(x_{\sigma(i)})) \cap H_i^{\varphi(a)} = \{\varphi(a_1, a_2, \cdots, x_{\sigma(i)}, \cdots, a_k)\},$$

lo cual implica que todos los vértices de $\varphi(B(x_{\sigma(i)}))$ tienen la misma coordenada i. Osea que, la proyección sobre la coordenada i es

$$p_i(\varphi(B(x_{\sigma(i)}))) = p_i\varphi(a_1, a_2, \cdots, x_{\sigma(i)}, \cdots, a_k).$$

Así, cualquier vértice $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{\sigma(i)}, \cdots, x_k)$ de G que pertenezca a la caja $B(x_{\sigma(i)})$ tiene proyección de su imagen por φ sobre la coordenada i. De este modo

$$p_i\varphi(x) = p_i\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{\sigma(i)}, \cdots, x_k) = p_i\varphi(a_1, a_2, \cdots, x_{\sigma(i)}, \cdots, a_k) \equiv p_i\varphi_i(x_{\sigma(i)})$$

Donde definimos el isomorfismo φ_i tal que $\varphi_i(x_{\sigma(i)}) = x_i$ y $\varphi_i(x_j) = a_j\ \forall j \neq i$. Así, el isomorfismo φ actuando sobre un x de G arbitrario se puede poner

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (\varphi_1(x_{\sigma(1)}), \varphi_2(x_{\sigma(2)}), \cdots, \varphi_k(x_{\sigma(k)})).$$

■

De este lema surge a modo de forma trivial un teorema que nos permite caracterizar los automorfismos de un grafo G producto cartesiano conexo.

Teorema 3.4.1 *Sea G un grafo conexo con descomposición en factores primos respecto del producto cartesiano $G = \mathop{\square}\limits_{i=1}^{k} G_i$ y sea $\varphi \in Aut(G)$. Entonces existen una permutación σ de $\{1, 2, \cdots, k\}$ e isomorfismos $\varphi_i : G_{\sigma(i)} \to G_i$ para los cuales*

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (\varphi_1(x_{\sigma(1)}), \varphi_2(x_{\sigma(2)}), \cdots, \varphi_k(x_{\sigma(k)})).$$

Sobre este teorema hay dos casos interesantes que requieren que les prestemos atención:

i) La permutación σ es la identidad:

Entonces se tiene que cada uno de los φ_i es un automorfismo de G_i. Diremos que φ está *generado por los automorfismos de los factores.*

ii) Hay al menos dos factores primos isomorfos: Sean G_r y G_s dos de estos factores isomorfos a través de φ_r y de φ_s y sea σ la transposición de r y s. Entonces se tiene que la aplicación dada por

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_r, \cdots, x_s, \cdots, x_k) = (x_1, x_2, \cdots, \varphi_r(x_{\sigma(r)}), \cdots, \varphi_s(x_{\sigma(s)}) \cdots, x_k)$$

es un automorfismo. Le llamaremos *transposición de dos factores primos isomorfos.*

Hechas estas consideraciones podemos enunciar un corolario que nos determinará la estructura de los grupos de automorfismos en grafos producto cartesiano.

Corolario 3.4.1 *Sea G un grafo producto cartesiano conexo. Entonces $Aut(G)$ está generado por los automorfimos y las transposiciones de sus factores primos.*

Es claro que si G es un grafo en las condiciones del corolario anterior pero que no tiene ningún par de factores primos isomorfos entre si $Aut(G)$ estará generado unicamente por automorfismos de sus factores.

Podemos ahora enunciar el teorema de estructura del producto cartesiano con el que cerraremos la sección.

Teorema 3.4.2 (de estructura del producto cartesiano) *Sea G un grafo producto cartesiano con factores primos y conexos. Entonces, su grupo de automorfismos es isomorfo al grupo de automorfismos de la unión disjunta de sus factores, es decir, $Aut(G) \cong Aut(G_1 + G_2 + \cdots + G_k)$, donde cada G_i es un factor de G.*

Demostración: Sea G un grafo en las condiciones del teorema y $G_1, G_2, \cdots, G_k$ cada uno de sus factores primos conexos. Como cada G_i es primo por hipótesis, sabemos por el Teorema 3.4.1 que un automorfismo φ_i de G_i genera un automorfismo φ de G de la forma:

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_k) = (x_1, x_2, \cdots, \varphi_i(x_i), \cdots, x_k)$$

Además, si G tiene dos factores G_j y G_ℓ que son isomorfos entre si entonces la aplicación permutación

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_\ell, \cdots, x_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_\ell, \cdots, x_j, \cdots, x_k)$$

es también un automorfismo de G.

Así, como por el Corolario 3.4.1 sabemos que el grupo $Aut(G)$ está generado por automorfismos de estos dos tipos, entonces la estructura de $Aut(G)$ es la misma que la de la unión de estas permutaciones y estos automorfimos φ_i. Es decir, que $Aut(G) \cong Aut(G_1 + G_2 + \cdots + G_k)$.■

4. Producto directo

El producto directo es introducido por Whitehead y Russell en sus ya famosos *Principia Mathematica* en la sección dedicada a operaciones en relaciones binarias, que se encuentra referenciado en [2]. Discutir los contenidos de este libro es una tarea (casi) inhumana por lo que seguiremos un prodecimiento similar al de la anterior sección más ameno para todos.

4.1. Definición y estructura algebraica

Al igual que se hizo con el producto cartesiano, el *producto directo* se introdujo en el Cuadro 2.2 mediante la tabla de multiplicar siguiente:

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

Figura 4.1: Tabla de multiplicar del producto directo

Denotaremos a este producto por el símbolo $\times$, obteniéndose de la tabla de multiplicar que las un grafo producto directo $G \times H$ viene dado por

$$V(G \times H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ y } h \in V(H)\},$$
$$E(G \times H) = \{[(g, h), (g', h')] \mid gg' \in E(G) \text{ y } hh' \in E(H)\}.$$

De las definiciones es directo ver que un grafo producto directo $G \times H$ tiene un bucle en el vértice (g, h) si y solo si G tiene un bucle en el vértice g y H tiene un bucle en el vértice h. Como esta restricción es bastante laxa consideraremos, a diferencia del producto cartesiano,

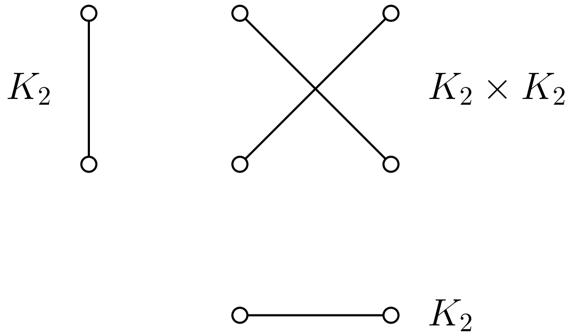

Figura 4.2: Justificación gráfica de la elección del símbolo $\times$ para representar el producto cartesiano.

grafos finitos arbitrarios. Es por ello que cuando nos refiramos a un grafo G en el contexto del producto directo entenderemos que $G \in \Gamma_0$.

Debemos tener cuidado y no confundir el producto directo con el producto cartesiano aplicado a conjuntos (no a grafos). Es decir, si tenemos G y H dos grafos, no confundir el significado del símbolo $\times$ en $G \times H$ y en $V(G) \times V(H)$. Por el contexto no habrá confusión, de poder haberla se indicará de a qué nos estamos refiriendo.

Al igual que hicimos con el producto cartesiano, justificamos el uso de la notación en este producto mediante la representación gráfica del producto $K_2 \times K_2$ en la Figura 4.2.

Al igual que con el producto cartesiano, mediante la Proposición 2.2.1 y el Corolario 2.2.1 deducimos que el producto directo es asociativo y conmutativo. Asimismo, de las definiciones anteriores de los vértices y aristas del grafo producto directo se ve que este distribuye sobre la unión disjunta. Recapitulando, tenemos que dados G, H y K grafos de Γ_0:

$$
\begin{aligned}
G \times H &\cong H \times G, \\
(G \times H) \times K &\cong G \times (H \times K), \\
G \times (H + K) &= G \times H + G \times K.
\end{aligned}
$$

Aplicando una vez más las definiciones dadas, podemos calcular el producto $K_1 \times K_2$ y comprobar si K_1 es, como en el producto cartesiano, la unidad del producto directo.

De la Figura 4.3 vemos como K_1 no es la unidad en este producto. De hecho, dado un grafo G, $K_1 \times G$ será un grafo con $|V(G)|$ vértices completamente inconexo, de donde deducimos que el producto directo de dos grafos conexos no tiene porqué ser conexo.

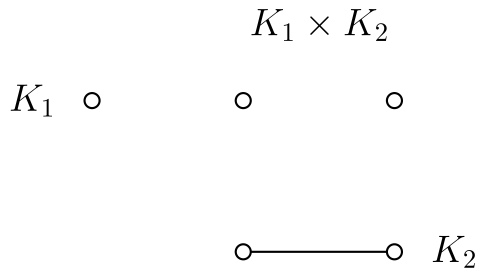

Figura 4.3: $K_1 \times K_2$. Notar que se trata de un grafo con dos vértices completamente inconexo.

Para solventar este problema y poder encontrar la unidad del producto directo consideramos K_1^s, el grafo de un vértice con un bucle. Este es efectivamente, el elemento neutro del producto.

Considerando el elemento neutro de la unión disjunta, se tiene que $\emptyset \times G = G \times \emptyset = \emptyset$.

Con esto, conocemos completamente la estructura algebraica del producto directo.

Teorema 4.1.1 (Estructura algebraica del producto directo) $(\Gamma_0, +, \times)$ *tiene estructura de semianillo conmutativo.*

A modo de curiosidad y para saciar nuestro gusto por lo abstracto, adentrémonos (superficialmente) en la teoría de categorías. En ella se define el *producto* de la siguiente forma.

Definición 4.1.1 *Sea C una categoría y $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de objetos en C. Sea $X \in C$ y sean $p_i : X \to X_i$ una colección de morfismos de proyección. Entonces, se dice que X es producto de los X_i si se satisface que para todo objeto Y y para una colección de morfismos $\varphi_i : Y \to X_i$ existe un único morfismo $\varphi : Y \to X$ tal que $\varphi_i = p_i\varphi$ para todo $i \in I$.*

Sea $G = \overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i$ y sea H un grafo. Una aplicación $\varphi_i : H \to G_i$ con la forma $\varphi_i = p_i\varphi$ donde $\varphi : H \to G$ es un homomorfimo, es también un homomorfismo (pues en este producto las proyecciones son homomorfimos). Es claro que φ es único.
Considerando que un morfismo de proyección en teoría de categorías es una proyeccion homeomorfa en el sentido de grafos tenemos que, según la teoría de categorías, el producto directo es *el* producto de grafos.

El producto directo recibe muchos nombres en la literatura: producto directo, producto categórico, producto tensorial o producto a secas entre otros. Quizás el más representativo de todos estos nombres sea el de *producto de Kronecker* puesto que la matriz de adyacencia del grafo $G \times H$ es el producto de Kronecker de las matrices de adyacencia. Si denotamos por M_G

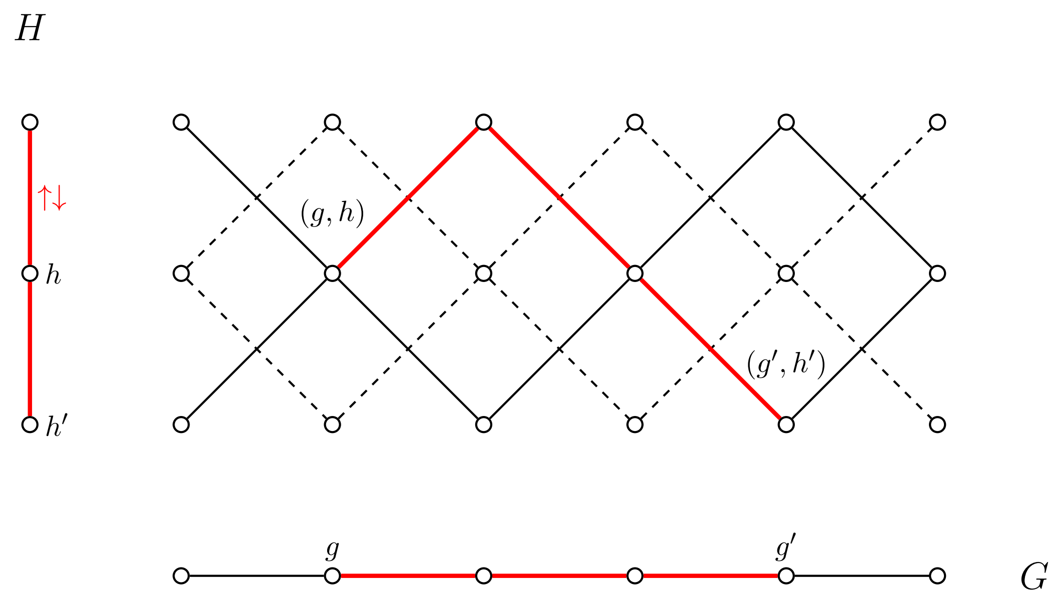

Figura 4.1: $G \times H$. Una de las componentes conexas está en linea continua y la otra en linea discontinua. El camino de mínima distancia entre los vértices (g, h) y (g', h'), las dos flechas rojas indican que se recorre el arco en los dos sentidos.

y M_H las matrices de adyacencia G y H respectivamente y por g_{ij} al elemento ij de la matriz M_G entonces se tiene que

$$M_G \otimes M_H = \begin{pmatrix} g_{11}M_H & g_{12}M_H & \cdots & g_{1n}M_H \\ g_{21}M_H & g_{22}M_H & \cdots & g_{2n}M_H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}M_H & g_{n2}M_H & \cdots & g_{nn}M_H \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos una forma sencilla de calcular el producto directo de dos grafos.

4.2. Estructura métrica

Hasta ahora no hemos visualizado la estructura de ningún grafo producto directo complicado, no tenemos ninguna intuición de como se calculan las distancias.

A la vista del grafo representado en la Figura 4.1 nos damos cuenta de que si queremos unir dos vértices arbitrarios (g, h) con (g', h') mediante un camino de longitud n debe de existir un camino de misma longitud en cada una de las proyecciones sobre sus factores.

Lema 4.2.1 *Sean G y H dos grafos y sean (g, h) y (g', h') dos vértices del grafo producto directo*

$G \times H$. Sea n un entero tal que existen un camino que une los vértices g y g' en G y un camino que une los vértices h y h' en H, ambos de longitud n. Entonces en $G \times H$ hay un camino de (g, h) a (g', h'). El menor entero n que lo cumple es la distancia entre esos dos vértices, $d_{G\times H}((g, h), (g', h'))$. Si no existe un entero en tales condiciones entonces no pertenecen a la misma componente conexa.

Demostración: Sean (g, h) y (g', h') dos vértices del grafo $G \times H$ tales que existe un camino de longitud n, $\pi = [(g, h), (a_1, b_1), \cdots, (a_{n-1}, b_{n-1}), (g', h')]$. Puesto que en el producto directo las proyecciones sobre cada uno de los factores son homomorfismos, sabemos que

$$p_G(\pi) = ga_1 \cdots a_{n-1}g',$$

y

$$p_H(\pi) = hb_1 \cdots b_{n-1}h'$$

son dos caminos de longitud n, el primero une g y g' en G y el segundo h con h' en H. Asimismo, es claro que a partir de esos dos caminos podemos construir el camino π.
Falta por ver que si no existe ese n entonces los vértices están en distintas componentes conexas. Si no existe un camino en $G \times H$ que una los vértices, entonces, $d_{G\times H}((g, h), (g', h')) = \infty$, por lo que están en diferentes componentes conexas. ■

De este lema se desprende un corolario inmediato gracias a la asociatividad del producto directo.

Corolario 4.2.1 (Distancia en el producto directo) *Sea $G = \overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i$ y sean $x, y \in V(G)$. Entonces se tiene que la distancia entre los vértices x e y es*

$$d_G(x, y) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ camino de longitud } n \text{ de } p_{G_i}(x) \text{ a } p_{G_i}(y)\ \forall i\}$$

y si ese n no existe, entonces $d_G(x, y) = \infty$.

Nos preguntamos ahora como es la conexión en este tipo de producto. Vamos a enunciar un teorema que la determina, daremos ciertas indicaciones de la demostración.

Teorema 4.2.1 (Conexión en el producto directo) *Sean G y H dos grafos conexos. Si G ó H tienen un ciclo de longitud impar, entonces $G \times H$ es conexo. Si G y H es bipartito, entonces $G \times H$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Demostración: Daremos ciertas indicaciones del razonamiento. Para comenzar, consideremos dos casos.

i) Existen caminos en cada una de las proyecciones de igual paridad:

   En aquel camino π en el que la longitud sea menor, podemos tomar cualquier par de vértices a y b por los que pase y hacer $\pi \cup aba$, lo cual preserva la paridad. Haciendo esto las veces necesarias obtenemos el camino.

ii) Los caminos en cada una de las proyecciones tienen distinta paridad:

   Gracias al ciclo impar podemos cambiar la paridad en una proyección y entonces estamos en el caso anterior.

Asimismo, para probar el resultado de la conexión vamos a considerar la matriz de adyacencia. Sea G un grafo bipartito, entonces, su matriz de adyacencia es de la forma

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, por lo comentado arriba sobre el producto de Kronecker, dada la matriz de adyacencia M_H de un grafo H se tiene que la matriz de adyacencia de $G \times H$ es

$$M_{G\times H} = M_G \otimes M_H = \begin{pmatrix} 0 & A \otimes M_H \\ A^T \otimes M_H & 0 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que tiene exactamente dos componentes conexas. ■

Con esto, conocemos la estructura métrica de los grafos producto directo. Pasaremos a estudiarlos más en profundidad.

4.3. Factorización en primos en el producto directo

Pasamos al plato principal del producto directo. Toda esta sección la dedicaremos a probar que los grafos conexos en Γ_0 factorizan de modo único en primos bajo el producto directo. Probar esta afirmación no es sencillo y para hacerlo procederemos de la siguiente forma: primero definiremos una relación de equivalencia que nos permitirá estudiar la estructura de los grafos de forma más simplificada para a continuación definir el esqueleto de un grafo, el cual nos permite relacionar los productos directo y cartesianos. Tras estos conceptos estaremos en condiciones de factorizar en el producto directo.

4.3.1. Grafos finos

Al estudiar el producto cartesiano se vio que las capas estaban completamente determinadas bajo la factorización en grafos primos. Esto no ocurre con el producto directo, pero vamos a introducir un concepto que nos hará de "análogo".

Es evidente que si dos vértices tienen los mismos vecinos entonces sus posiciones pueden ser intercambiadas, lo cual complica la factorización en primos pues entran en consideración todas estas permutaciones de vértices. Para poder evitar este problema definimos la relación R entre dos vértices x e y de un grafo G como

$$xRy \Longleftrightarrow N_G(x) = N_G(y).$$

Obviamente es una relación de equivalencia. A sus clases de equivalencia las denotaremos por $[\cdot]$ y al conciente de un grafo G con esta relación como G/R.

Debemos notar que si x es un vértice un grafo G tal que x no tiene un bucle, entonces no existe una arista xx, por lo que $x \notin N_G(x)$ y entonces para cualquier otro vértice $y \in N_G(x)$ se tiene que $N_G(x) \neq N_G(y)$. Por lo tanto las clases de equivalencia $[x] \neq [y]$. Con este razonamiento podemos entonces deducir que $K_n/R = K_n$, $D_n/R = K_1$.

Como trabajaremos con los vecindarios de los vértices es conveniente dar una propiedad de estos los grafos producto directo.

Proposición 4.3.1 *Sea (x, y) un vértice de $G \times H$. Entonces*

$$N_{G\times H}((x, y)) = N_G(x) \times N_H(y).$$

Demostración: Veámoslo de forma directa. Sea (g, h) un vértice de $G \times H$ entonces por la definición de vecindario de un vértice se tiene que $(g, h) \in N_{G\times H}((x, y))$ si y solo si $[(g, h), (x, y)] \in E(G \times H)$. Recordando que las aristas de un grafo producto directo vienen definidas por

$$E(G \times H) = \{[(u, v), (u', v')] \mid uu' \in E(G) \text{ y } vv' \in E(H)\}$$

se tiene que $[(g, h), (x, y)]$ es una arista de $G \times H$ si y solo si $gx \in E(G)$ y $hy \in E(H)$ que ocurre si y solo si $g \in N_G(x)$ y $h \in N_H(y)$ y concluímos que $(g, h) \in N_G(x) \times N_H(y)$. Como todo han sido si y solo si se tiene la igualdad de arriba. $\blacksquare$

En esta proposición anterior no hemos de confundir el símbolo $\times$ de $N_G(x) \times N_H(y)$ con el producto directo. Esta es una $\times$ cartesiana, para diferenciarlas hemos de notar que se está operando. Si son grafos entones representa el producto directo de grafos y si son conjuntos arbitrarios entonces es el producto cartesiano de siempre.

Estamos en condiciones de dar una definición que nos será de gran ayuda en el futuro.

Definición 4.3.1 *Diremos que un grafo G es fino si todas sus clases de equivalencia por la relación R tienen exactamente un elemento. Es decir, G es fino si y solo si*

$$|[x]| = 1 \ \forall x \in V(G).$$

Es evidente que de acuerdo con esta definición, cualquier grafo cociente G/R es fino. Asimismo, si G es un grafo fino entonces es claro que puedo definir un función

$$\varphi : G/R \to G$$
$$[x] \mapsto x$$

y entonces se tiene que si $[x][y] \in E(G/R)$ entonces existe una arista $x'y' \in E(G)$ tal que $x' \in [x]$ e $y' \in [y]$. Puesto que G es fino se tiene que en cada clase de equivalencia hay un único elemento por lo que $x' = x$ e $y' = y$, así $xy \in E(G)$, que implica que $\varphi([x])\varphi([y]) = xy \in E(G)$ y entonces φ es un isomorfismo. Es decir, que si G es fino se tiene que $G/R \cong G$.

Para familiarizarnos con esta relación de equivalencia expondremos algunas de sus propiedades.

Lema 4.3.1 *Sea G un grafo, entonces $[x][y] \in E(G/R)$ si y solo si $xy \in E(G)$.*

Demostración: Veamos las dos implicaciones.

- $[x][y] \in E(G/R) \Longrightarrow xy \in E(G)$:
  Si $[x][y] \in E(G/R)$ entonces existen una arista en G de la forma $x'y'$ con $x' \in [x]$ e $y' \in [y]$. Por la definición de la relación R se tiene que $N_G(x') = N_G(x)$, $N_G(y') = N_G(y)$ y como $x'y' \in E(G)$ entonces $x \in N_G(y') = N_G(y) = \{v \in V(G) \mid yv \in E(G)\}$ por lo que $xy \in E(G)$.

- $xy \in E(G) \Longrightarrow [x][y] \in E(G/R)$: Evidente.

■

Esta primera es de una importancia vital para los desarrollos siguientes.

Proposición 4.3.2 *Sean G y H grafos tales que $G \overset{\varphi}{\cong} H$. Entonces $G/R \overset{\tilde{\varphi}}{\cong} H/R$ con $\tilde{\varphi}$ definida por $\tilde{\varphi}([x]) = [\varphi(x)]$. Además, $\tilde{\varphi}^{-1} = \widetilde{\varphi^{-1}}$.*

Demostración: Por el Lema 4.3.1 se tiene que dados dos clases de equivalencia $[x], [y] \in G/R$ se tiene que $[x][y] \in E(G/R)$ si y solo si $xy \in E(G)$. Por ser φ un isomorfismo por hipótesis, se tiene que $xy \in E(G)$ si y solo si $\varphi(x)\varphi(y) \in E(H)$ y aplicando otra vez el Lema 4.3.1 se sigue que $\varphi(x)\varphi(y) \in E(H)$ si y solo si $[\varphi(x)][\varphi(y)] := \tilde{\varphi}([x])\tilde{\varphi}([y]) \in E(H/R)$. Es decir, que $[x][y] \in E(G/R)$ si y solo si $\tilde{\varphi}([x])\tilde{\varphi}([y]) \in E(H/R)$ y por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo de grafos.

Asimismo, es claro que

$$\widetilde{\varphi^{-1}}\tilde{\varphi}([x]) = \widetilde{\varphi^{-1}}([\varphi(x)]) = [\varphi^{-1}\varphi(x)] = [x]$$

y de forma análoga

$$\tilde{\varphi}\widetilde{\varphi^{-1}}([x]) = \tilde{\varphi}([\varphi^{-1}(x)]) = [\varphi\varphi^{-1}(x)] = [x].$$

O sea, que $\tilde{\varphi}^{-1} = \widetilde{\varphi^{-1}}$. ■

Dado un isomorfismo φ en las condiciones de esta proposición, diremos que $\tilde{\varphi}$ es su *isomorfismo inducido por R*.

¿La implicación inversa se satisface? De manera general no, un contrajemplo para mostrarlo es

$$D_5/R \cong D_{37}/R \cong K_1,$$

pero es evidente que

$$D_5 \ncong D_{37}$$

puesto que $|V(D_5)| = 5$ mientras que $|V(D_{37})| = 37$. Esto lo que genera es que a pesar de que el número de clases de equivalencia en ambos grafos cociente sea la misma, los cardinales de estas no por lo que no va a haber un isomorfimos que relaciones cada vértice de un grafo con solo uno del otro.

Sin embargo, si en cada clase de equivalencia de ambos grafos cocientes poseyera el mismo cardinal, entonces sí que se daría la implicación en el otro sentido. Condensemos y formalicemos este razonamiento.

Lema 4.3.2 *Sean G y H dos grafos. Entonces $G \overset{\varphi}{\cong} H$ si y solo si $G/R \overset{\tilde{\varphi}}{\cong} H/R$ con $\tilde{\varphi}$ isomorfismo tal que preserva la cardinalidad de las clases de equivalencia, es decir, $|[x]| = |\tilde{\varphi}([x])|$ $\forall [x] \in V(G/R)$.*

Demostración: La implicación a la derecha ya está demostrada en la proposición anterior, queda ver la implicación a la izquierda.

Sea $\tilde{\varphi} : G/R \to H/R$ tal que $|[x]| = |\tilde{\varphi}([x])|\ \forall [x] \in V(G/R)$. Sea $\varphi : G \to H$ una aplicación cualquiera tal que preserva las clases de equivalencia de G, es decir, tal que $\varphi([x]) = \tilde{\varphi}([x])\ \forall [x] \in V(G/R)$.

Tenemos que ver que φ es un isomorfismo. Para ello notamos que si tenemos dos vértices de G, x e y, entonces

$$\begin{aligned} xy \in E(G) &\overset{4.3.1}{\iff} [x][y] \in E(G/R) \\ &\overset{\tilde{\varphi}\text{ iso.}}{\iff} \tilde{\varphi}([x])\tilde{\varphi}([y]) \in E(H/R) \\ &\iff \varphi([x])\varphi([y]) \in E(H/R) \\ &\overset{4.3.1}{\iff} \varphi(x)\varphi(y) \in E(H). \end{aligned}$$

De donde se sigue la tesis. ■

La siguiente propiedad nos permite ver que el producto directo de dos grafos finos es fino si y solo si cada uno de los factores lo es.

Proposición 4.3.3 *Sean H y K dos grafos sin vértices aislados. Entonces,*

$$V((H \times K)/R) = V(H/R) \times V(K/R)$$

y $[(h,k)] = [h] \times [k]$ (producto cartesiano de conjuntos). Además, $(H \times K)/R \cong H/R \times K/R$ a través de la aplicación que lleva $[(h,k)] \mapsto ([h],[k])$.

Demostración: Sea $[(h,k)]$ un vértice de $(H \times K)/R$. Entonces cualquier otro vértice (h',k') del grafo producto directo satisface que

$$\begin{aligned} (h',k') \in [(h,k)] &\overset{\text{def.}}{\iff} N_{H\times K}((h',k')) = N_{H\times K}((h,k)) \\ &\overset{4.3.1}{\iff} N_H(h') \times N_K(k') = N_H(h) \times N_K(k). \end{aligned}$$

Notando ahora que como por hipótesis ni H ni K tienen vértices aislados, entonces $\forall u \in V(H)$ se tiene que $N_H(u) \neq \emptyset$ (igual para cualquier vértice de K), de donde se sigue que

$$\begin{aligned} N_H(h') \times N_K(k') = N_H(h) \times N_K(k) &\iff N_H(h') = N_H(h) \text{ y } N_K(k') = N_K(k) \\ &\overset{\text{def.}}{\iff} h' \in [h] \text{ e } k' \in [k] \\ &\iff (h',k') \in [h] \times [k]. \end{aligned}$$

De no ser vértices aislados, en la primera equivalencia habría que cambiar la y por una o.

Veamos ahora que la aplicación del enunciado es un isomorfismo. Directamente, sean $[(h,k)]$ y $[(h',k')]$ vértices del grafo producto directo cociente, entonces

$$\begin{aligned}
[(h,k)][(h',k')] \in E((H\times K)/R) &\overset{4.3.1}{\iff} (h,k)(h',k') \in E(H\times K) \\
&\iff hh' \in E(H) \text{ y } kk' \in E(K) \\
&\overset{4.3.1}{\iff} [h][h'] \in E(H/R) \text{ y } [k][k'] \in E(K/R) \\
&\iff ([h],[k])([h'],[k']) \in E((H\times K)/R).
\end{aligned}$$

La cual es la definición de isomorfismo de grafos. ■

Notamos que este resultado garantiza que si tenemos un grafo $G = H \times K$ fino sin vértices aislados fino, entonces H y K son finos puesto que por ser G fino, por definición

$$\forall (h,k) \in V(G) : |[(h,k)]| = 1 \overset{\text{prop.}}{=} |[h]| \cdot |[k]| \implies |[h]| = 1 = |[k]|.$$

De este mismo resultado podemos obtener un corolario inmediato.

Corolario 4.3.1 *Sean H y K dos grafos sin vértices aislados y finos. Entonces $G = H \times K$ es fino.*

Demostración: Por la definición de grafo fino tenemos que

$$|[h]| = 1 \;\forall h \in V(H)$$
$$|[k]| = 1 \;\forall k \in V(K)$$

de la Proposición 4.3.3 sabemos que para todo $(h,k) \in V(H\times K)$ se tiene que $[(h,k)] = [h]\times[k]$, por lo que

$$|[(h,k)]| = |[h]\times[k]| = |[h]|\cdot|[k]| = 1 \;\forall (h,k) \in V(H\times K)$$

Y entonces $G = H \times K$ es fino. ■

Por la asociatividad del producto directo se prueba que si G_i es fino $\forall i \in \{1,2,\cdots,k\}$ entonces $G = \overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i$ es fino.

Consideremos ahora un grafo K cuya factorización en el producto directo sea $K = G \times H$, la proposición anterior afirma que $K/R = (G\times H)/R$ factoriza como

$$K/R = G/R \times H/R$$

Esto quiere decirnos que solo necesitamos conocer la factorización del grafo para saber como será la del grafo cociente.

Surge ahora la pregunta ¿pasa lo mismo al revés? Es decir, si tenemos que un grafo cociente G/R factoriza como $G/R = A \times B$ entonces ¿podemos conocer cómo factoriza G? La respuesta es que bajo ciertas restricciones sí, veremos cuáles son estas condiciones enunciadas en forma de un lema que será de utilidad al final del capítulo.

Este lema utiliza una idea feliz, a pesar de ello he decidido incluirlo pues es diferente al resto de razonamientos que se hacen en el resto de pruebas. A veces viene bien cambiar de aires.

Lema 4.3.3 *Sea G un grafo sin vértices aislados tal que $G/R \cong A \times B$. Sea (x, y) un vértice arbitrario de G/R (clases de equivalencia), entonces, si existen funciones $\alpha : V(A) \to \mathbb{N}$ y $\beta : V(B) \to \mathbb{N}$ tales que la cardinalidad de cada clase de equivalencia es $|(x, y)| = \alpha(x) \cdot \beta(y)$ entonces existen grafos tales que $G \cong A' \times B'$. Asimismo, $A \cong A'/R$ y $B \cong B'/R$.*

Demostración: Puesto que cualquier grafo cociente es fino tenemos que G/R es fino y por la Proposición 4.3.3 los grafos A y B son finos. Vamos a construir directamente los grafos A' y B' y con ello probaremos el resultado enunciado.

Consideramos $\{U_x \mid x \in V(A)\}$ con U_x conjuntos disjuntos tales que $|U_x| = \alpha(x)$. Definimos A' como sigue

$$V(A') = \bigcup_{x \in V(A)} U_x$$

y las adyacencias

$$E(A') = \{ab \mid a \in U_x, b \in U_y \text{ con } xy \in E(A)\}.$$

Veamos cuales son las clases de equivalencia de A'. Sea $\xi \in V(A')$ por la definición de los vértices y por ser los U_x disjuntos, tenemos que existe un único $x \in V(A)$ tal que $\xi \in U_x$. Entonces, $\forall y \in V(A)$ tal que $xy \in E(A)$ se tiene que $\forall \eta \in U_y$ la arista $\xi\eta \in E(A')$. Como A es fino tenemos no hay dos vértices con los mismos vecinos y por estar definidas las adyacencias en A' en función de los vértices de A deducimos que las clases de equivalencia en A' son $[\xi] = U_x$. Por lo tanto, la aplicación dada por

$$\hat{\alpha} : A \to A'/R$$

$$x \mapsto U_x$$

es un isomorfismo con $|\hat{\alpha}(x)| = |U_x| = \alpha(x)$.
De manera análoga construimos $B \overset{\hat{\beta}}{\cong} B'/R$.

Consideramos la composición de isomorfismos, que sabemos que será un isomorfismo, dado por

$$G/R = A \times B \to A'/R \times B'/R \overset{4.3.1}{\to} (A' \times B')/R$$

tales que lleva

$$(x, y) \mapsto (U_x, U_y) \mapsto U_x \times U_y$$

y se sigue la tesis. ■

De este lema se sigue un corolario inmediato e importante.

Corolario 4.3.2 *Un grafo G factoriza como $G = A \times K_p^s$ si y solo si p divide el orden de cada clase de G.*

4.3.2. Esqueleto cartesiano

Con el título de esta sección ya entran escalofríos y las cosas no van a mejorar. Esta es sin ninguna duda la sección más compleja que tenga que ver con el producto directo. Vamos a introducir la noción de esqueleto cartesiano, que es algo así como los pilares sobre los que se erige un grafo, y lo relacionaremos con el producto cartesiano. Conseguiremos llevar el problema de la factorización en grafos conexos en el producto cartesiano a grafos conexos no bipartitos en el producto directo. En esta sección añadiremos a la bibliografía que estamos siguiendo otro trabajo realizado por los mismos autores pero centrado en este tema específico. Este se haya referenciado en [3].

El esqueleto cartesiano de un grafo no es un concepto intuitivo, lo introduciremos de forma un poco mesiánica pues es complicado hacer una descripción extensa y detallada de su procedencia. El esqueleto cartesiano más que esqueleto es un fantasma que se aparece delante de nuestros ojos, un fantasma en el que verter toda nuestra fe.

Introduciremos el concepto de esqueleto cartesiano construyéndolo directamente. Para ello debemos de partir del *cuadrado Booleano* de un grafo.

Definición 4.3.2 *El cuadrado Booleano de un grafo G, denotado por G^s, es un grafo con los mismos vértices que G tal que xy es una arista si y solo si G tiene un camino de x a y de longitud 2. Formalmente y con notación de vecindarios*

$$V(G^s) = V(G),$$
$$E(G^s) = \{xy \mid N_G(x) \cap N_G(y) \neq \emptyset\}.$$

Figura 4.1: Grafo G y su cuadrado Booleano.

El nombre de cuadrado Booleano es, aunque a primera vista no lo parezca, extremadamente descriptivo. Si tenemos la matriz de adyacencia A de un grafo G, entonces la de G^s se obtiene elevando al cuadrado y cambiando todas los elementos distintos de cero por 1. Esto es justamente hacer la segunda potencia Booleana de una matriz, un cuadrado Booleano. Veamos este proceso con un ejemplo: sea G un grafo con matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces, la matriz de adyacencia de G^s viene dada por

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{G^s} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El cuadrado Booleano funciona muy bien con el producto directo. Veámoslo en forma de una lema.

Lema 4.3.4 *Sean $G_1, G_2, \cdots, G_k$ grafos. Entonces*

$$(\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i)^s = \overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i^s.$$

Es decir, que el cuadrado Booleano de un grafo producto directo es el producto directo de los cuadrados Booleanos de cada factor.

Demostración: Sean $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ y $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ dos vértices cualesquiera de $(\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i)^s$. Entonces, por la definición del cuadrado Booleanos de un grafo se tiene que

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k)(y_1, y_2, \cdots, y_k) \in E((\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i)^s)$$

si y solo si hay un camino de longitud 2 uniendo los vértices $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ e $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$. A su vez, este camino existe si y solo si para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ existe un camino de longitud 2 en G_i uniendo los vértices x_i e y_i y por la definición de cuadrado Booleano esto ocurre si y solo si $x_i y_i \in E(G_i^s)$ $\forall i$. Y por la definición de producto directo, tenemos otro si y solo si

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k)(y_1, y_2, \cdots, y_k) \in E(\underset{i=1}{\overset{k}{\times}} G_i^s).$$

$\blacksquare$

El esqueleto cartesiano de un grafo $G = H \times K$ es un subgrafo de G^s tal que tiene un comportamiento fino. Esta propiedad nos permitirá considerar descomponer el esqueleto de un grafo producto directo en el producto cartesiano de los esqueletos de los factores. Es decir, que si denotamos por $S(G)$ al esqueleto de un grafo fino $G = H \times K$, entonces tendremos la propiedad

$$S(H \times K) = S(H) \square S(K).$$

Para construirlo debemos quitar las aristas redundantes, aquellas que detallen más el grafo, pero que no cambien su estructura global. Cuáles quitar y cuáles no es un acto de fe que detallaremos más adelante, primero explicaremos qué quiere decir que una arista se comporte como en el producto cartesiano. Significa que satisface la propiedad: $(h, k)(h', k') \in E(H \times K)$ implica que

$$\begin{cases} h = h' \text{ y } k \neq k', \\ \text{ó} \\ h \neq h' \text{ y } k = k'. \end{cases}$$

Una arista $(h, k)(h', k')$ de un cuadrado Boolenao en estas condiciones diremos que es *cartesiana* respecto a la factorización.

De esta forma tendremos que el esqueleto cartesiano de un grafo funciona trabaja bien en el producto cartesiano, lo cual es de una ventaja abismal a la hora de deducir la factorización en el producto directo.

Las aristas que sobran se llaman *dispensables*. Demos una definición formal de qué quiere decir esto y cómo determinar si una lo es o no.

Definición 4.3.3 *Una arista xy de un cuadrado Booleano se dice dispensable si existe un vértice $z \in V(G)$ para el que se cumplen*

i) $N_G(x) \cap N_G(y) \subset N_G(x) \cap N_G(z)$ *ó* $N_G(x) \subset N_G(z) \subset N_G(y)$, *ii)* $N_G(y) \cap N_G(x) \subset N_G(y) \cap N_G(z)$ *ó* $N_G(y) \subset N_G(z) \subset N_G(x)$,

o si xy *es un bucle. Al conjunto de aristas dispensables de un grafo* G *lo denotaremos por* $D(G)$.

Notemos que estas condiciones no son independientes la una de la otra, puesto que si tenemos que $N_G(x) \subset N_G(z) \subset N_G(y)$ entonces se satisface directamente que

$$N_G(y) \cap N_G(x) \subset N_G(y) \cap N_G(z),$$

y lo mismo con el otro caso.

Dada esta definición ya estamos en condiciones de determinar bien qué es el esqueleto cartesiano de un grafo.

Definición 4.3.4 *El esqueleto cartesiano de un grafo* G *es el grafo obtenido de eliminar sus aristas dispensables. Lo denotaremos por* $S(G)$. *Formalmente, el esqueleto cartesiano es un grafo tal que*

$$V(S(G)) = V(G),$$
$$E(S(G)) = E(G) \setminus D(G).$$

Es evidente que el esqueleto cartesiano de un grafo se preserva bajo isomorfismos puesto que depende únicamente de las adyacencias de los vértices.

Proposición 4.3.4 *Sean* G *y* H *dos grafos tales que* $G \overset{\varphi}{\cong} H$. *Entonces* $S(G) \overset{\varphi}{\cong} S(H)$.

Antes de caracterizar los esqueletos cartesianos para grafos producto directo notemos que si tenemos un grafo $G = H \times K$, entonces gracias a la Proposición 4.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} N_G((h,k)) \cap N_G((h',k')) &= (N_H(h) \times N_K(k)) \cap (N_H(h') \times N_K(k')) \\ &= (N_H(h) \cap N_H(h')) \times (N_K(k) \cap N_K(k')). \end{aligned}$$

Enunciaremos un lema de apoyo necesario para probar la potencia del esqueleto cartesiano. Este lema de apoyo es algo lioso, pues en él es necesario dividir en muchos casos diferentes, pero con una lectura calmada se entiende perfectamente.

Lema 4.3.5 *Sea* G *un grafo fino con factorización respecto al producto directo arbitraria* $G = H \times K$. *Entonces, toda arista de* $S(G)$ *es cartesiana respecto a esta factorización.*

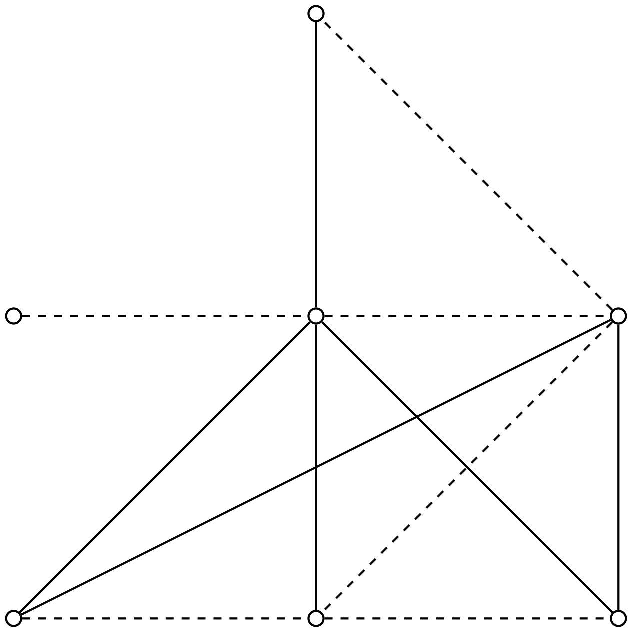

Figura 4.2: Un grafo primo en línea sólida y su esqueleto cartesiano en línea discontinua.

Demostración: Vamos a ver que toda arista no cartesiana de G es dispensable, de este modo no forma parte de $S(G)$ por construcción. Sea $(h,k)(h',k')$ una arista del cuadrado Booleano G^s no cartesiana, veremos todas las formas que puede tener esta arista.

Si es un bucle es dispensable por definición y entonces no está en $S(G)$.

Supongamos que $(h,k)(h',k')$ *no* es un bucle. Entonces por no ser ni cartesiana ni bucle la arista satisface que $h \neq h'$ y $k \neq k'$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} N_G((h,k)) \cap N_G((h',k')) &= (N_H(h) \cap N_H(h')) \times (N_K(k) \cap N_K(k')) \\ &\subseteq N_H(h) \times (N_K(k) \cap N_K(k')) \\ &= N_G((h,k)) \cap N_G((h,k')), \end{aligned}$$

debido a que obviamente $N_H(h) \cap N_H(h') \subseteq N_H(h)$. De manera análoga tenemos que

$$\begin{aligned} N_G((h,k)) \cap N_G((h',k')) &= (N_H(h) \cap N_H(h')) \times (N_K(k) \cap N_K(k')) \\ &\subseteq (N_H(h) \cap N_H(h')) \times N_K(k') \\ &= N_G((h,k') \cap N_G((h',k')). \end{aligned}$$

Esta expresión no la hemos hecho completamente simétrica pues será necesario para poder concluir la demostración.

Si ahora en estas dos relaciones tenemos que ambas son inclusiones estrictas entonces la arista

$(h,k)(h',k')$ es dispensable por definición. Si, por el contrario, una (y solo una) de ellas es una igualdad, entonces se tiene que

$$\begin{cases} N_H(h) \cap N_H(h') = N_H(h) \implies N_H(h) \subseteq N_H(h'), \\ \qquad\quad \text{ó} \\ N_K(k) \cap N_K(k') = N_K(k') \implies N_K(k') \subseteq N_K(k), \end{cases}$$

y por ser G fino por hipótesis, no hay dos vértices con el mismo conjunto de vecinos, por lo que

$$N_H(h) \subset N_H(h') \text{ ó } N_K(k') \subset N_K(k).$$

Repitiendo el razonamiento pero para los elementos prima en lugar de los no prima llegamos a que

$$N_H(h') \subset N_H(h) \text{ ó } N_K(k) \subset N_K(k').$$

Puesto que no puede darse una expresión del tipo p y $\neg p$ simultáneamente, tenemos que de las cuatro relaciones dicotómicas anteriores se sigue que hay dos únicos casos

$$\begin{cases} N_H(h) \subset N_H(h') \text{ y } N_K(k) \subset N_K(k'), \\ \qquad\quad \text{ó} \\ N_H(h') \subset N_H(h) \text{ y } N_K(k') \subset N_K(k). \end{cases}$$

Pero, aplicando teoría de conjuntos al primer caso se sigue que

$$N_H(h) \times N_K(k) \subset N_H(h') \times N_K(k) \subset N_H(h') \times N_K(k'),$$

lo que gracias a la Proposición 4.3.1 significa que

$$N_G((h,k)) \subset N_G((h',k)) \subset N_G((h',k')),$$

y entonces la arista $(h,k)(h',k')$ es dispensable por definición. De manera análoga se ve que en el otro caso que falta por analizar también se llega a que la arista es dispensable. ■

Estamos en condiciones de probar la propiedad fundamental del esqueleto cartesiano.

Proposición 4.3.5 *Sean H y K dos grafos finos sin vértices aislados. Entonces*

$$S(H \times K) = S(H) \square S(K).$$

Demostración: Comencemos notando que como H y K son finos por hipótesis, el Corolario 4.3.1 afirma que $H \times K$ es fino y por el lema anterior sabemos que $S(H \times K)$ solo tiene aristas cartesianas. Claramente $V(S(H \times K)) = V(S(H)\Box S(K))$, por lo que solo tenemos que comprobar que $E(S(H \times K)) = E(S(H)\Box S(K))$ y esto lo veremos por doble contenido.

- $E(S(H \times K)) \subseteq E(S(H)\Box S(K))$:

  Recordemos que las aristas del producto cartesiano de grafos son

  $$E(S(H)\Box S(K)) = \{(h,k)(h',k') \mid h = h' \text{ y } kk' \in E(S(K)) \text{ ó } hh' \in E(S(H)) \text{ y } k = k'\}.$$

  Puesto que todas las aristas de $S(H \times K)$ son cartesianas, estas tienen la forma $(h,k)(h',k)$ ó $(h,k)(h,k')$. Sin perder generalidad supondremos que trabajaremos con una arista de la forma $(h,k)(h',k)$, tenemos que ver que $hh' \in E(S(H))$.

  Por absurdo supongamos que tenemos una arista $(h,k)(h',k)$ tal que $hh' \notin E(S(H))$. Esto significa que hemos eliminado hh' en el proceso de creación de su esqueleto, por lo que hh' es dispensable en H^s y por la definición de arista dispensable sabemos que existe $z \in V(H)$ tal que se satisfacen las dos condiciones (no es un bucle pues pertenece al esqueleto $S(H \times K)$)

  i) $N_H(h) \cap N_H(h') \subset N_H(h) \cap N_H(z)$ ó $N_H(h) \subset N_H(z) \subset N_H(h')$,

  ii) $N_H(h') \cap N_H(h) \subset N_H(h') \cap N_H(z)$ ó $N_H(h') \subset N_H(z) \subset N_H(h')$.

  Puesto que K es por hipótesis un grafo sin vértices aislados tenemos que $N_K(k) \neq \emptyset$ y podemos multiplicar cartesianamente cada vecindario de estas relaciones sin que se cambien las inclusiones. Así, obviando los subíndices $H \times K$ en las expresiones de los vecindarios se obtiene que

  i) $N((h,k)) \cap N((h',k)) \subset N((h,k)) \cap N((z,k))$ ó $N((h,k)) \subset N((z,k)) \subset N((h',k))$,

  ii) $N((h',k)) \cap N((h,k)) \subset N((h',k)) \cap N((z,k))$ ó $N((h',k)) \subset N((z,k)) \subset N((h,k))$.

  Esta es justamente la definición de arista dispensable, o sea, que $(h,k)(h',k)$ es dispensable y como en $S(H \times K)$ no hay aristas dispensables por ser un esqueleto cartesiano tenemos que $(h,k)(h',k) \notin S(H \times K)$, contradicción.

- $E(S(H)\Box S(K)) \subseteq E(S(H \times K))$:

  Sea $(h,k)(h',k)$ tal que $hh' \in E(S(H))$ una arista de $S(H)\Box S(K)$. Debemos ver que no es dispensable en el grafo $(H \times K)^s = H^s \times K^s$ y por lo tanto estará en su esqueleto cartesiano.

Por absurdo supongamos que $(h,k)(h',k)$ es dispensable en $(H \times K)^s$. Consideraremos los cuatro casos que surgen de la definición de dispensabilidad aplicada a un elemento $z = (\xi, \eta)$.

Si $N((h,k)) \subset N((\xi,\eta)) \subset N((h',k))$ entonces

$$N_H(h) \times N_K(k) \subset N_H(\xi) \times N_K(\eta) \subset N_H(h') \times N_K(k)$$

implica, por estar emparedado, que $N_K(\eta) = N_K(k) \neq \emptyset$ por no tener vértices aislados por hipótesis. Esto nos permite cancelarlo en la relación anterior y obtener

$$N_H(h) \subset N_H(\xi) \subset N_H(h'),$$

que implica que hh' es dispensable en H^s y entonces por $hh' \notin S(H)$, contradicción.

La condición

$$N((h',k)) \subset N((\xi,\eta)) \subset N((h,k))$$

es análoga.

Como cada una de estas dos condiciones implican dispensabilidad independientemente de que otra condición se satisfaga, solo nos falta considerar el caso en que se cumplan simultáneamente

$$N((h,k)) \cap N((h',k)) \subset N((h,k)) \cap N((\xi,\eta))$$

y

$$N((h',k)) \cap N((h,k)) \subset N((h',k)) \cap N((\xi,\eta)).$$

Ambas expresiones pueden ponerse como

$$(N_H(h) \cap N_H(h')) \times N_K(k) \subset (N_H(h) \cap N_H(\xi)) \times (N_K(k) \cap N_K(\eta)),$$

$$(N_H(h') \cap N_H(h)) \times N_K(k) \subset (N_H(h') \cap N_H(\xi)) \times (N_K(k) \cap N_K(\eta)).$$

Resringiendo cualquiera de estas expresiones al grafo K vemos como

$$N_K(k) \subseteq N_K(k) \cap N_K(\eta) \implies N_K(k) = N_K(k) \cap N_K(\eta) \neq \emptyset.$$

Y entonces podemos cancelar a ambos lados de la expresión obteniendo

$$N_H(h) \cap N_H(h') \subset N_H(h) \cap N_H(\xi),$$

$$N_H(h') \cap N_H(h) \subset N_H(h') \cap N_H(\xi).$$

Y con ello obtenemos que hh' es dispensable en H^s por lo que no es una arista de $S(H)$, contradicción.

Hemos visto que en todos los casos se llega a contradicción, luego tenemos que $(h,k)(h',k)$ no es dispensable en $(H \times K)^s$ y por lo tanto es una arista de $S(H \times K)$ por construcción.

■

Con esto solo nos queda estudiar la conexión del esqueleto cartesiano para tener todas sus propiedades caracterizadas. Este es nuestro objetivo y será necesario para probar la factorización en el producto directo. Antes de ir a la conexión necesitamos un lema de apoyo.

Lema 4.3.6 *Sea G un grafo sin vértices aislados y sean x e y dos vértices tales que $N_G(x) \subset N_G(y)$. Entonces G^s tiene un camino de x a y sin aristas dispensables.*

Demostración: Consideremos la cadena maximal de vecindarios

$$N_G(x) \subset N_G(y_1) \subset N_G(y_2) \subset \cdots \subset N_G(y_k) \subset N_G(y)$$

que existe puesto que por hipótesis $N_G(x) \subset N_G(y)$ luego, de no haber más elementos que lo satisfagan tomaríamos $y_1 = y$.

Puesto que $N_G(x) \subset N_G(y_1)$ y como G no tiene vértices aislados por hipótesis, se tiene que $N_G(x) \cap N_G(y_1) \neq \emptyset$ y entonces por definición $xy_1 \in E(G^s)$. Esta cadena es no dispensable, lo probaremos viendo las dos condiciones de dispensabilidad.

Si existiera un elemento $z \in V(G^s)$ tal que

$$N_G(x) \cap N_G(y_1) \subset N_G(x) \cap N_G(z),$$

como $N_G(x) \subset N_G(y_1) \implies N_G(x) \cap N_G(y_1) = N_G(x)$ y se sigue que

$$N_G(x) \subset N_G(x) \cap N_G(z),$$

lo cual no es posible.

Por otro lado, no existe ningún un elemento $\xi \in V(G^s)$ tal que

$$N_G(x) \subset N_G(\xi) \subset N_G(y_1).$$

puesto que hemos supuesto que la cadena de vecindarios inicial es maximal. Claramente el caso $N_G(y_1) \subset N_G(\xi) \subset N_G(x)$ es imposible por la forma en la que escogimos y_1.

Con esto hemos probado que xy_1 es una arista no dispensable. Repitiendo este argumento para cada arista y_iy_{i+1} y para y_ky tendremos que ninguna es dispensable y con ello el camino xy será no dispensable. ■

Estamos en condiciones de estudiar la última propiedad necesaria del esqueleto cartesiano antes de entrar en la factorización en el producto directo.

Proposición 4.3.6 *Sea G un grafo conexo. Entonces*

i) Si G tiene un ciclo impar, entonces $S(G)$ es conexo.

ii) Si G es bipartito, entonces $S(G)$ dos componentes cuyos conjuntos de vértices son los dos conjuntos bipartitos de G.

Demostración: Puesto que $S(G)$ es el subgrafo de G^s resultado que eliminar las aristas dispensables solamente tenemos que probar que $\forall xy \in E(G^s)$ existe un camino de x a y formado por aristas no dispensables y entonces se seguirá que existe un camino de x a y en $S(G)$. Supondremos que $x \neq y$ puesto que en $S(G)$ no hay bucles.

Para probar esta afirmación definimos para toda arista $xy \in E(G^s)$ el número entero

$$k_{xy} := \text{máx}\{|N_G(u) \cap N_G(v)| - |N_G(x) \cap N_G(y)| \mid u, v \in V(G) \text{ y } u \neq v\}.$$

Considerando que podemos tomar $u = x$ y $v = y$ tenemos que $k_{xy} \geq 0$ $\forall x \neq y$. Por inducción sobre k_{xy}.

- Si $k_{xy} = 0$:

  Entonces tenemos que $\forall u, v \in V(G)$ tales que $u \neq v$

  $$|N_G(u) \cap N_G(v)| \leq |N_G(x) \cap N_G(y)|. \tag{4.1}$$

  Supongamos que la arista xy es dispensable, entonces existe un vértice z tal que

  $$N_G(x) \cap N_G(y) \subset N_G(x) \cap N_G(z) \text{ ó } N_G(y) \cap N_G(x) \subset N_G(y) \cap N_G(z),$$

  lo cual significa que

  $$|N_G(x) \cap N_G(y)| < |N_G(x) \cap N_G(z)| \text{ ó } |N_G(y) \cap N_G(x)| < |N_G(y) \cap N_G(z)|,$$

  ambos casos llevan a contradicción. Si por el contrario el elemento z cumpliese que $N_G(x) \subset N_G(z) \subset N_G(y)$, entonces $N_G(y) \cap N_G(x) \subset N_G(y) \cap N_G(z)$ y estamos en el caso anterior, contradicción también.

Por lo tanto, si $k_{xy} = 0$ la arista xy es no dispensable.

Supongamos que si $k_{xy} < N$ con $0 < N \in \mathbb{N}$ entonces para la arista $xy \in E(G^s)$ existe un camino de x a y formado por aristas no dispensables.

- Si $k_{xy} = N$:

  La arista xy es dispensable, pues de no serlo $k_{xy} = 0$. Si $N_G(x) \subset N_G(y)$ ó $N_G(y) \subset N_G(x)$ aplicando el Lema 4.3.6 tendríamos probado que existe un camino de x a y formado por aristas no dispensables.

  Por otro lado, si no se dan ninguna de estas dos inclusiones y la arista xy es dispensable, entonces existe un $z \in V(G)$ tal que

  $$N_G(x) \cap N_G(y) \subset N_G(x) \cap N_G(z) \text{ y } N_G(y) \cap N_G(x) \subset N_G(y) \cap N_G(z),$$

  y para que se den las inclusiones estrictas debe de pasar que

  $$N_G(x) \cap N_G(z) \neq \emptyset \neq N_G(y) \cap N_G(z).$$

  Por lo que de las definiciones de vecindarios se sigue que $xy, yz \in E(G^s)$. Asimismo, también se tiene que

  $$|N_G(u) \cap N_G(v)| - |N_G(x) \cap N_G(z)| < |N_G(u) \cap N_G(v)| - |N_G(x) \cap N_G(y)| \; \forall u \neq v \in V(G),$$

  lo cual quiere decir que $k_{xz} < k_{xy}$ y de manera análoga $k_{zy} < k_{xy}$. Por la hipótesis de inducción se sigue que existen caminos de x a z y de z a y formado por aristas no dispensables en G^s.

■

4.3.3. Descomposición de grafos finos en factores primos

Estamos en condiciones de probar que todo grafo conexo no bipartito y fino tiene descomposición única en factores primos bajo el producto directo. El teorema que prueba esta afirmación depende de un lema previo. Es este lema la razón de la introducción del esqueleto cartesiano y es de los más liosos hasta el momento debido a la notación que hay que utilizar. Calma, paciencia y buena letra.

Lema 4.3.7 *Sean $G_1, G_2, \cdots, G_k$ y $H_1, H_2, \cdots, H_\ell$ grafos conexos, no bipartitos y finos. Sea $\varphi : \overset{k}{\underset{i=1}{\times}} G_i \to \overset{\ell}{\underset{j=1}{\times}} H_j$ un isomorfismo tal que*

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_k), \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_k), \cdots, \varphi_\ell(x_1, x_2, \cdots, x_k)).$$

Si un factor G_i es primo, entonces exactamente una de las aplicaciones $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\ell$ depende de x_i.

Demostración: Debido a que el producto directo es asociativo, basta probar el enunciado para el caso $k = \ell = 2$ y por la conmutatividad del mismo podemos suponer que G_1 es un factor primo. En estas condiciones tenemos que el isomorfismo que debemos considerar como hipótesis es

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 \times G_2 &\to H_1 \times H_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \varphi((x_1, x_2)) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Queremos probar $A \implies B$, que en matemáticas clásicas es lo mismo que probar $\neg B \implies \neg A$. Procederemos de esta forma, así que tenemos que ver que si ambas o ninguna de las aplicaciones φ_1 y φ_2 depende de x_1 entonces G_1 no es primo.

- Si ni φ_1 ni φ_2 dependen de x_1:
  En estas condiciones tenemos que

  $$\varphi((x_1, x_2)) = \varphi(x_2) \; \forall x_1 \in V(G_1).$$

  Pero puesto que por hipótesis φ es un isomorfismo de grafos, se tiene que φ es biyectiva entre vértices, por lo que preserva cardinalidades. De este modo

  $$|V(H_1) \times V(H_2)| = |V(G_1) \times V(G_2)| = |V(G_1)| \cdot |V(G_2)| = |V(G_2)|,$$

  de donde se sigue que $|V(G_1)| = 1$ y entonces G_1 no es primo.

- Si φ_1 y φ_2 dependen de x_1:
  Por el mismo razonamiento que en el caso anterior deducimos que G_1 tiene más de un vértice. Es claro por el mismo motivo que H_1 y H_2 también tienen más de un vértice.
  Si G_2 tuviese solo uno entonces $G_2 = K_1$ ó $G_2 = K_1^s$, pero por hipótesis G_2 es fino por lo que $G_2 = K_1^s$. Recordando que en el producto directo K_1^s es la unidad se sigue que

$G_1 \cong H_1 \times H_2$ y por lo tanto no es primo.

Supondremos entonces que G_2 tiene más de un vértice. Considerando los esqueletos cartesianos de los factores tenemos por 4.3.4 que la aplicación $\varphi : S(G_1 \times G_2) \to S(H_1 \times H_2)$ también es un isomorfimos de grafos. Aplicando ahora que por hipótesis todos los factores son primos, por la propiedad fundamental del esqueleto cartesiano sabemos que

$$\varphi : S(G_1)\square S(G_2) \to S(H_1)\square S(H_2)$$

es un isomorfismo de grafos. Por la Proposición 4.3.6 sabemos que cada uno de los esqueletos $S(G_1), S(G_2), S(H_1)$ y $S(H_2)$ son conexos puesto que por hipótesis cada factor es conexo y no bipartito. Puesto que en el producto cartesiano hay factorización única en factores primos para grafos conexos, por el Teorema 3.3.2 podemos factorizar

$$\begin{aligned} S(G_1) &= A_1\square A_2\square\cdots\square A_k, \quad S(H_1) = C_1\square C_2\square\cdots\square C_\ell,\\ S(G_2) &= B_1\square B_2\square\cdots\square B_m, \quad S(H_2) = D_1\square D_2\square\cdots\square D_n. \end{aligned}$$

De modo que el isomorfismo es

$$\varphi : (A_1\square A_2\square\cdots\square A_k)\square(B_1\square B_2\square\cdots\square B_m) \to (C_1\square C_2\square\cdots\square C_\ell)\square(D_1\square D_2\square\cdots\square D_n),$$

y como el producto cartesiano es conmutativo podemos reordenar los factores de la imagen de φ de modo que el isomorfismo tenga la forma

$$\begin{aligned} \varphi :&(A_1\square A_2\square\cdots\square A_k)\square(B_1\square B_2\square\cdots\square B_m) \to\\ &(A_1\square A_2\square\cdots\square A_s\square B_1\square B_2\square\cdots\square B_t)\square(A_{s+1}\square A_{s+2}\square\cdots\square A_k\square B_{t+1}\square B_{t+2}\square\cdots\square B_m), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} &\varphi((a_1, a_2, \cdots, a_k), (b_1, b_2, \cdots, b_m))\\ &= ((a_1, a_2, \cdots, a_s, b_1, b_2, \cdots, b_t), (a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_k, b_{t+1}, b_{t+2}, \cdots, b_m))\\ &= (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

de forma que estamos denotando $x_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in V(G_1)$ y $x_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$, como estamos suponiendo que ambas aplicaciones φ_1 y φ_2 dependen de x_1, tenemos que $0 < s < k$. Sin embargo, como no tenemos restrincción sobre si estas tienen dependencia con x_2, no podemos restringir al valor t, de modo que $0 \leq t \leq m$.

Hasta ahora lo que hemos hecho es encontrar una correspondencia entre los vértices de G_1 y los de $\overset{k}{\underset{i=1}{\square}} A_i$ de modo que podemos escribir

$$x_1^i = (a_1^i, a_2^i, \cdots, a_s^i, a_{s+1}^i, \cdots, a_k^i)\ \forall x_1^i \in V(G_1),$$

y de igual forma pero para los vértices de G_2

$$x_2^j = (b_1^j, b_2^j, \cdots, b_t^j, b_{t+1}^j, \cdots, b_m^j)\ \forall x_2^j \in V(G_2).$$

Asimismo, con los vértices de la imagen $H_1 \times H_2$ tenemos

$$\varphi_1(x_1^i, x_2^j) = (a_1^i, a_2^i, \cdots, a_s^i, b_1^j, b_2^j, \cdots, b_t^j)\ \forall \varphi_1(x_1^i, x_2^j) \in V(H_1),$$
$$\varphi_2(x_1^i, x_2^j) = (a_{s+1}^i, a_{s+2}^i, \cdots, a_k^i, b_{t+1}^j, b_{t+2}^j, \cdots, b_m^j)\ \forall \varphi_2(x_1^i, x_2^j) \in V(H_2).$$

Vemos que esta notación es terrorífica, así que vamos a aligerarla antes de continuar. Definimos $x^i := (a_1^i, a_2^i, \cdots, a_s^i)$ e $y^i := (a_{s+1}^i, a_{s+2}^i, \cdots, a_k^i)$, de modo que todo vértice de G_1 se escribe como $x_1^i = (x^i, y^i)$. Análogamente, definimos $u^j := (b_1^j, b_2^j, \cdots, b_t^j)$ y $v^j := (b_{t+1}^j, b_{t+2}^j, \cdots, b_m^j)$ y todo vértice de G_2 se escribe $x_2^j = (u^j, v^j)$. Con esta notación tenemos que los vértices de H_1 se escribirán como (x^i, u^j) y los de H_2 como (y^i, v^j). De ahora en adelante suprimiremos los superíndices, pues queda claro que todo vértice de cualquiera de estos grafos puede escribirse de esta forma escogiendo en G_1 y G_2 los i, j necesarios.

Así, tenemos que en esta notación

$$\varphi((x, y), (u, v)) = ((x, u), (y, v)),$$

con φ el isomorfismo de nuestra hipótesis, solo hemos encontrado una forma de referirnos a cada vértice, no hemos hecho nada más hasta ahora.

Recordemos que el objetivo que tenemos es ver que G *no* es un grafo primo. Así que vamos a definir dos grafos Q y W de forma que ninguno de ellos sea la unidad en el producto directo y tales que $G_1 = Q \times W$. Estos dos grafos los definimos como

$$V(Q) = \{x \mid ((x, y), (u, v)) \in V(G_1 \times G_2)\},$$
$$E(Q) = \{xx' \mid ((x, y), (u, v))((x', y'), (u', v')) \in E(G_1 \times G_2)\},$$

y

$$V(W) = \{y \mid ((x, y), (u, v)) \in V(G_1 \times G_2)\},$$
$$E(W) = \{yy' \mid ((x, y), (u, v))((x', y'), (u', v')) \in E(G_1 \times G_2)\}.$$

De las definiciones es directo ver que $Q \neq K_1^s \neq W$. Falta ver que se cumple que $G_1 = Q \times W$.

Puesto que

$$\begin{aligned} V(Q \times W) &= \{(x,y) \mid ((x,y),(u,v)) \in V(G_1 \times G_2)\} \\ &= \{(x,y) \mid (x,y) \in V(G_1)\} \\ &= V(G_1), \end{aligned}$$

solo tenemos que comprobar que

$$(x,y)(x',y') \in E(G_1) \iff (x,y)(x',y') \in E(Q \times W),$$

y esto lo comprobamos por doble implicación.

- $(x,y)(x',y') \in E(G_1) \implies (x,y)(x',y') \in E(Q \times W)$:
  Sea $(x,y)(x',y') \in E(G_1)$, entonces hay una arista de $G_1 \times G_2$ de la forma

  $$((x,y),(u,v))((x',y'),(u',v')) \in E(G_1 \times G_2),$$

  y de las definiciones de Q y W de arriba se sigue que entonces $xx' \in E(Q)$ mientras que $yy' \in E(W)$, de modo que $(x,y)(x',y') \in E(Q \times W)$.
- $(x,y)(x',y') \in E(Q \times W) \implies (x,y)(x',y') \in E(G_1)$:
  Sea $(x,y)(x',y') \in E(Q \times W)$, entonces $xx' \in E(Q)$ e $yy' \in E(W)$. De las definiciones de estos grafos se sigue que tienen que existir aristas de la forma

  $$((x,\xi_y),(\xi_u,\xi_v))((x',\xi'_y),(\xi'_u,\xi'_v)) \in E(G_1 \times G_2),$$

  y

  $$((\eta_x,y),(\eta_u,\eta_v))((\eta'_x,y'),(\eta'_u,\eta'_v)) \in E(G_1 \times G_2).$$

  Aplicando a estas aristas el isomorfismo de la hipótesis φ a estas aristas tenemos que

  $$((x,\xi_u),(\xi_y,\xi_v))((x',\xi'_u),(\xi'_y,\xi'_v)) \in E(H_1 \times H_2),$$

  y

  $$((\eta_x,\eta_u),(y,\eta_v))((\eta'_x,\eta'_u)(y',\eta'_v)) \in E(H_1 \times H_2).$$

  Y restringiéndonos a cada grafo esto implica que

  $$\begin{aligned} (x,\xi_u)(x',\xi'_u) &\in E(H_1), \\ (y,\eta_v)(y',\eta'_v) &\in E(H_2). \end{aligned}$$

De modo que por la forma que tiene de actuar el producto directo tenemos que la arista $((x, \xi_u), (y, \eta_v))((x', \xi'_u), (y', \eta'_v)) \in E(H_1 \times H_2)$. Puesto que φ es un isomorfimos podemos aplicar φ^{-1} y con ello obtenemos que la arista

$$((x, y), (\xi_u, \eta_v))((x', y'), (\xi'_u, \eta'_v)) \in E(G_1 \times G_2),$$

y entonces concluímos que $(x, y)(x', y') \in E(G_1)$.

O sea, hemos obtenido que $G_1 = Q \times W$ con $Q \neq K_1^s \neq W$, entonces G_1 *no* es primo. Recapitulando todo lo visto hasta el momento, si ninguna o ambas funciones φ_1 y φ_2 dependen de x_1 entonces G_1 no es primo. De modo que si G_1 es primo entonces una y solo una de ella depende de x_1 tal y como queríamos probar.

■

Después de todo este sudor y lágrimas estamos en condiciones de probar que la factorización es única para grafos conexos, no bipartitos y finos. Cojamos fuerzas, si es que es posible, y vayamos a ello.

Teorema 4.3.1 (de la factorización única para conexos, no bipartitos y finos) *Sean $G_1, G_2, \cdots, G_k$ y $H_1, H_2, \cdots, H_\ell$ grafos conexos, no bipartitos, finos y primos tales que existe un isomorfismo $\varphi : \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} G_i \to \underset{j=1}{\overset{\ell}{\times}} H_j$. Entonces, $k = \ell$ y existe una permutación σ de $\{1, 2, \cdots, k\}$ e isomorfimos $\varphi_i : G_{\sigma(i)} \to H_i$ tales que*

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (\varphi_1(x_{\sigma(1)}), \varphi_2(x_{\sigma(2)}), \cdots, \varphi_k(x_{\sigma(k)})).$$

Demostración: El lema anterior implica que para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ existe una *única* φ_j que dependa de x_i. Puesto que cada H_j es primo, tiene más de un vértice y entonces φ_j es *no* constante por ser suprayectiva y así tenemos que $k \geq \ell$.
Razonando igual pero con φ^{-1} que existe por ser φ un isomorfismo por hipótesis se sigue que $\ell \geq k$ y con ello $k = \ell$.

Llegados a este punto reordenamos los x_i de modo que queda $x_{\sigma(i)}$ y se sigue la tesis. ■

4.3.4. Descomposición de grafos en el producto directo

Estamos consiguiendo alcanzar nuestro objetivo, vemos la luz al final del túnel. Sin embargo, lo que nos queda es de todo menos trivial. Necesitaremos enunciar otro lema de apoyo para poder ir a la demostración que nos interesa, la cual tampoco es nada sencilla. Invitamos al lector a parar a descansar cuando lo necesite. Es este lema la justificación de estudiar la relación de equivalencia relativa a los vecindarios.

Lema 4.3.8 *Sean $G_1, G_2, \cdots, G_k$ y $H_1, H_2, \cdots, H_\ell$ grafos conexos con ciclos impares. Sea un isomorfismo $\varphi : \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} G_1 \to \underset{j=1}{\overset{\ell}{\times}} H_j$ y sea su isomorfismo inducido por la relación de equivalencia $\tilde{\varphi} : \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} G_1/R \to \underset{j=1}{\overset{\ell}{\times}} H_j/R$,*

$$\tilde{\varphi}([x_1], [x_2], \cdots, [x_k]) = (\tilde{\varphi}_1([x_1], [x_2], \cdots, [x_k]), \cdots, \tilde{\varphi}_\ell([x_1], [x_2], \cdots, [x_k])).$$

Si un factor G_i es primo, entonces a lo sumo una de las funciones $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_\ell$ depende de $[x_i]$.

Demostración: Debido a que el producto directo es conmutativo y asociativo, basta probar el enunciado para el caso $k = \ell = 2$ y podemos suponer que G_1 es un factor primo. En estas condiciones tenemos que el isomorfismo que debemos considerar como hipótesis es

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 \times G_2 &\to H_1 \times H_2 \\ (x, y) &\mapsto \varphi((x, y)) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)), \end{aligned}$$

y su inducido

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : G_1/R \times G_2/R &\to H_1/R \times H_2/R \\ ([x], [y]) &\mapsto \tilde{\varphi}(([x], [y])) = (\tilde{\varphi}_1([x], [y]), \tilde{\varphi}_2([x], [y])). \end{aligned}$$

Razonando igual que en el Lema 4.3.7 descartamos los casos en los que los grafos $G_1/R, H_1/R$ y H_2/R tienen un único vértice.

Vamos a probar que si $\tilde{\varphi}_1$ y $\tilde{\varphi}_2$ dependen de $[x]$ entonces G_1 *no* es primo. Puesto que G/R es fino para todo grafo G tenemos que G_1/R es fino y por el Lema 4.3.7 tenemos que G_1/R *no* es primo. Sea una factorización de este en primos $G_1/R = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, entonces cada clase de equivalencia la podemos escribir como

$$[x] = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

y con esto el isomorfismo inducido $\tilde{\varphi}$ es

$$\tilde{\varphi} : \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i \times G_2/R \to H_1/R \times H_2/R,$$

y como cada factor A_i es primo, por el mismo lema sabemos que *una y solo una* de las componentes $\tilde{\varphi}_1$ y $\tilde{\varphi}_2$ depende de cada a_i.
Como el producto directo es conmutativo podemos reordenar los factores primos A_i de modo que $\tilde{\varphi}_1$ dependa de $a_1, a_2, \cdots, a_s$ y $\tilde{\varphi}_2$ del resto. Así

$$\tilde{\varphi}(a_1, a_2, \cdots, a_s, a_{s+1}, \cdots, a_n, [y]) = (\tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, \cdots, a_s, [y]), \tilde{\varphi}_2(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n, [y])).$$

Hasta ahora solo hemos encontrado una factorización de G_1/R, el Lema 4.3.3 garantiza que si existen unas funciones con ciertas propiedades entonces existe una factorización no trivial de G_1 por lo que este *no* será primo. Estas funciones consideradas en nuestro caso son $\alpha : V(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_s) \to \mathbb{N}$ y $\beta : V(A_{s+1} \times A_{s+2} \times \cdots \times A_n) \to \mathbb{N}$ tales que

$$|[x]| = |(a_1, a_2, \cdots, a_n)| = \alpha(a_1, a_2, \cdots, a_s) \cdot \beta(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n).$$

Vamos a construirlas. Sea $[y_0] \in V(G_2/R)$ cualquiera pero fijo. Como φ es un isomorfismo lleva clases de equivalencia de manera biyectiva a clases de equivalencia, es decir, lleva

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \times [y_0] \mapsto \tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, \cdots, a_s, [y_0]) \times \tilde{\varphi}_2(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n, [y_0]),$$

con $\times$ producto cartesiano de conjuntos. Considerando cardinalidades y despejando tenemos que

$$|(a_1, a_2, \cdots, a_n)| = |\tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, \cdots, a_s, [y_0])| \frac{|\tilde{\varphi}_2(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n, [y_0])|}{|[y_0]|},$$

puesto que $|(a_1, a_2, \cdots, a_n)|$ es un número entero tenemos que podemos poner la fracción

$$\frac{|\tilde{\varphi}_2(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n, [y_0])|}{|[y_0]|} = \frac{N(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n)}{D(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n)},$$

con $N(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n)$ y $D(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n)$ el numerador y denominador reducidos al máximo posible. Puesto que las cardinalidades son números naturales tenemos que

$$D(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n) \Big| |\tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, \cdots, a_s, [y_0])| \ \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Definimos ahora $d \in \mathbb{N}$ como el mínimo común múltiplo de todos los $D(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n)$ y evidentemente d divide a $|\tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, \cdots, a_s, [y_0])|$. Con esto podemos poner

$$\begin{aligned} |(a_1, a_2, \cdots, a_n)| &= \frac{|\tilde{\varphi}_1(a_1, a_2, \cdots, a_s, [y_0])|}{d} d \frac{N(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n)}{D(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n)} \\ &= \alpha(a_1, a_2, \cdots, a_s) \cdot \beta(a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

De modo que estamos en las condiciones del 4.3.3 y tenemos que G_1 *no* es primo. ■

Estamos en condiciones de probar el resultado central de este capítulo. En el caso del producto cartesiano la demostración del análogo había sido trivial ya que se iba componiendo de los resultados previos. Ahora no es así, condensaremos todos los resultados precedentes en la siguiente demostración, pero ni mucho menos de manera trivial.

Teorema 4.3.2 (de factorización en el producto directo) *Cualquier grafo conexo no bipartito con más de un vértice tiene factorización única en grafos primos bajo el producto directo.*

Demostración: Sea G un grafo conexo no bipartito y con más de un vértice. Supongamos que G tiene dos factorizaciones en factores primos bajo el producto directo $G \cong \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} G_i$ y $G \cong \underset{j=1}{\overset{\ell}{\times}} H_j$. Debemos ver que $k = \ell$ y que los factores pueden ser reordenados de modo que $G_i \cong H_i$.

Puesto que por hipótesis G es conexo, entonces por el Teorema 4.2.1 que cada factor G_i y H_j es conexo y tiene un ciclo de longitud impar. Sea el isomorfimo (que existe por como hemos definido los factores)

$$\varphi : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k \to H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_\ell$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \varphi((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = (\varphi_1((x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_\ell((x_1, x_2, \cdots, x_n)),$$

y sea su isomorfismo inducido

$$\tilde{\varphi} : G_1/R \times G_2/R \times \cdots \times G_k/R \to H_1/R \times H_2/R \times \cdots \times H_\ell/R,$$

dado por $\tilde{\varphi}(([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])) = (\tilde{\varphi}_1(([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])), \cdots, \tilde{\varphi}_\ell(([x_1], [x_2], \cdots, [x_n]))$.

El Lema 4.3.8 afirma que para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ a lo sumo una de las componentes $\tilde{\varphi}_j$ depende de $[x_i]$. Puesto que para el isomorfismo inducido se tiene que $\tilde{\varphi}^{-1} = \widetilde{\varphi^{-1}}$ aplicando el mismo resultado al isomorfismo φ^{-1} deducimos trivialmente que cada una de las componentes $\tilde{\varphi}_j$ depende *a lo sumo* de un $[x_i]$. Puesto que el producto directo es conmutativo reordenamos los factores de tal forma que $\tilde{\varphi}_i$ dependa exclusivamente de $[x_i]$. Sea m el mayor de los i tales que $\tilde{\varphi}_i$ depende de $[x_i]$, entonces si ponemos los $\tilde{\varphi}_j$ sin dependencia con $[x_j]$ como una función arbitraria $[y_j]$ tenemos que poniendo

$$\tilde{\varphi}([x_1], [x_2], \cdots, [x_m], [x_{m+1}], \cdots, [x_k]) = (\tilde{\varphi}_1([x_1]), \cdots, \tilde{\varphi}_m([x_m]), [y_{m+1}], \cdots, [y_\ell]),$$

vemos que nos "sobran" $[x_i]$ para $m < i \leq k$.

Para estos índices sobrantes, puesto que $\tilde{\varphi}$ es biyectiva por ser un isomorfismo, debe de ser constante y por lo tanto tenemos que G_i/R tiene un único vértice $[x_i]$. Para que esto suceda, tiene que pasar que G_i sea un grafo completo con bucles en cada vértice y con número de vértices arbitrario. Por el Corolario 4.3.2 tenemos que este número es primo así que $G_i = K^s_{p_i}$ $\forall i \in \{m+1, m+2, \cdots, k\}$ y con ello $|[x_i]| = p_i$. Análogamente pero trabajando con la aplicación inversa tenemos que $H_j = K^s_{q_j}$ $\forall j \in \{m+1, m+2, \cdots, \ell\}$ con q_j primo tal que $|[y_j]| = q_j$.

Asimismo, para los índices $1 \leq i \leq m$ tenemos que ni G_i/R ni H_i/R tienen un único vértice, así que no son grafos de la forma K^s_p. Como $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo tenemos que cada componente $G_i/R \overset{\tilde{\varphi}_i}{\cong} H_i$. Y como $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo tenemos que las cardinalidades del dominio e imagen se preservan, con lo que

$$\prod_{i=1}^{k} |[x_i]| = \left(\prod_{i=1}^{m} |\tilde{\varphi}_i([x_i])|\right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^{\ell} |[y_i]|\right).$$

Despejamos para un índice que no sobre $1 \leq r \leq m$

$$\left(\prod_{i=1}^{r-1} |[x_i]|\right) \cdot |[x_r]| \cdot \left(\prod_{i=r+1}^{k} |[x_i]|\right) = \left(\prod_{i=1}^{r-1} |\tilde{\varphi}_i([x_i])|\right) \cdot |\tilde{\varphi}_r([x_r])| \cdot$$
$$\cdot \left(\prod_{i=r+1}^{m} |\tilde{\varphi}_i([x_i])|\right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^{\ell} |[y_i]|\right),$$

y reordenando se tiene que

$$\frac{|[x_r]|}{|\tilde{\varphi}_r([x_r])|} = \left(\prod_{i=1}^{r-1} \frac{|\tilde{\varphi}_i([x_i])|}{|[x_i]|}\right) \cdot \left(\prod_{i=r+1}^{m} \frac{|\tilde{\varphi}_i([x_i])|}{|[x_i]|}\right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^{\ell} |[y_i]|\right).$$

Debemos ahora notar que como las variables que aparecen a izquierda y a derecha son distintas la expresión *debe* ser constante, así que existen a y b tales que

$$\frac{|[x_r]|}{|\tilde{\varphi}_r([x_r])|} = \frac{a}{b} \implies |[x_r]| = \frac{a}{b} |\tilde{\varphi}_r([x_r])|.$$

O sea que a divide a $|[x_r]|$ y como G_r es primo y no es K^s_p, por el Corolario 4.3.2 tenemos que $a = 1$. Análogamente pero razonando con la inversa tenemos que $b = 1$ y entonces

$$|[x_r]| = |\tilde{\varphi}_r([x_r])| \ \forall [x_r] \in V(G_r/R) \ \forall r \in \{1, 2, \cdots m\},$$

y de esta forma tenemos por el Lema 4.3.2 que $G_r \overset{\varphi_r}{\cong} H_r$.

Cancelando en los productorios todos los términos con $i \leq m$ tenemos que

$$\prod_{i=r+1}^{k} |[x_i]| = \prod_{i=m+1}^{\ell} |[y_i]|,$$

que por lo deducido arriba de que G_i/R tiene un vértice, esto podemos ponerlo como

$$\prod_{i=r+1}^{k} p_i = \prod_{i=m+1}^{\ell} q_i$$

con p_i y q_i primos. Así que tenemos que estos pueden reordenarse de modo que $p_i = q_j$ para alguna pareja i, j. Así que $k = \ell$ y las factorizaciones son las mismas. ■

5. Producto fuerte

Dedicaremos estas últimas páginas a dar unas pinceladas sobre el que será el último producto de grafos que consideraremos. Esta sección se incluye únicamente puesto que la factorización se obtiene de manera inmediata a partir de los resultados del producto directo.

5.1. Definición y resultados

Al igual que se hizo con el producto cartesiano, el *producto fuerte* se introdujo en el Cuadro 2.2 mediante la tabla de multiplicar siguiente:

$*$	Δ	1	0
Δ	Δ	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

Figura 5.1: Tabla de multiplicar del producto fuerte

Denotaremos a este producto por el símbolo $\boxtimes$, obteniéndose de la tabla de multiplicar que las un grafo producto fuerte $G \boxtimes H$ viene dado por:

$$\begin{aligned} V(G \boxtimes H) &= \{(g,h) \mid g \in V(G) \text{ y } h \in V(H)\}, \\ E(G \boxtimes H) &= \{[(g,h),(g',h')] \mid g = g' \text{ y } hh' \in E(H) \text{ ó } gg' \in E(G) \text{ y } h = h'\} \\ &\quad \cup \{[(g,h),(g',h')] \mid gg' \in E(G) \text{ y } hh' \in E(H)\} \\ &\quad = E(G \square H) \cup E(G \times H). \end{aligned}$$

Entendemos de estas definiciones porqué se llama producto fuerte, pues une los vértices como el producto cartesiano y directo a la vez. Al igual que hicimos con los otros dos productos previamente estudiados, podemos justificar la notación en este producto con la Figura 5.2.

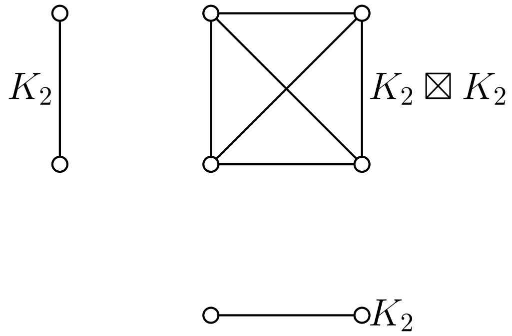

Figura 5.2: Justificación gráfica de la elección del símbolo $\boxtimes$ para representar el producto cartesiano.

Las propiedades algebraicas se deducen de forma análoga a los dos productos de grafos previamente estudiados. Damos estas en el siguiente teorema.

Teorema 5.1.1 (Estructur algebraica del producto fuerte) $(\Gamma, +, \boxtimes)$ *tiene estructura de semianillo conmutativo donde el grafo* K_1 *es la unidad.*

Daremos la única definición necesaria para probar la factorización en grafos primos para este tipo de producto.

Definición 5.1.1 *Sea* G *un grafo sin ciclos. Entonces, el grafo resultante de añadir un ciclo en cada vértice lo llamaremos grafo "loop" y lo denotaremos por* $\mathcal{L}$.

Necesitamos enunciar un lema de directa demostración y con él tendremos directamente el teorema de factorización en el producto fuerte.

Lema 5.1.1 *Sean* $G_1, G_2, \cdots, G_k$ *grafos sin ciclos. Entonces*

$$\mathcal{L}(\mathop{\boxtimes}_{i=1}^{k} G_i) = \mathop{\times}_{i=1}^{k} \mathcal{L}(G_i).$$

Demostración: De la definición del grafo "loop" y del producto fuerte se sigue que

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k)(y_1, y_2, \cdots, y_k) \in E(\mathcal{L}(\mathop{\boxtimes}_{i=1}^{k} G_i))$$

si y solo si es un bucle o una arista de $\mathop{\boxtimes}_{i=1}^{k} G_i$. Es decir, si y solo si

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \text{ ó } (x_1, x_2, \cdots, x_k)(y_1, y_2, \cdots, y_k) \in E(\mathop{\boxtimes}_{i=1}^{k} G_i).$$

A su vez, esto ocurre si y solo si

$$\begin{aligned} x_i = y_i \text{ ó } x_iy_i \in E(G_i)\ \forall i \in \{1,2,\cdots,k\} &\Longleftrightarrow x_iy_i \in E(\mathcal{L}(G_i))\ \forall i \in \{1,2,\cdots,k\} \\ &\Longleftrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_k)(y_1,y_2,\cdots,y_k) \in E(\underset{i=1}{\overset{k}{\times}} \mathcal{L}(G_i)). \end{aligned}$$

■

Con este resultado estamos en condiciones de probar el teorema de factorización en el producto fuerte, con el que cerraremos la sección.

Teorema 5.1.2 (de factorización en el producto fuerte) *Todo grafo conexo sin bucles tiene factorización única en factores primos con respecto al producto fuerte.*

Demostración: Sea G un grafo conexo y sin bucles. Entonces, el grafo $\mathcal{L}(G)$ es conexo y, puesto que todo vértice presenta un bucle por definición de grafo "loop", se tiene que es no bipartito. Luego, por el Teorema de factorización en el producto directo 4.3.2, tenemos que $\mathcal{L}(G)$, valga la redundancia, tiene factorización única en el producto directo.

Asimismo, puesto que $\mathcal{L}(G)$ tiene un bucle en cada vértice, de la definición de las adyacencias en el producto directo se deduce que cada factor primo debe tener un bucle en cada vértice. Así que la descomposición en factores primos respecto al producto directo viene determinado de forma única por

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A_1) \times \mathcal{L}(A_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(A_n),$$

con A_i un grafo sin bucles $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Sea $G = G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$ una factorización de G en factores primos respecto al producto fuerte. Por el lema anterior sabemos que

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \times \mathcal{L}(G_2) \times \cdots \times \mathcal{L}(G_k).$$

Vamos a probar que cada factor $\mathcal{L}(G_i)$ es primo respecto al producto directo. Para ello, por tener $\mathcal{L}(G_i)$ un bucle en cada vértice, podemos suponer que existen dos grafos sin bucles B y C tales que

$$\mathcal{L}(G_i) = \mathcal{L}(B) \times \mathcal{L}(C) \overset{5.1.1}{=} \mathcal{L}(B \boxtimes C).$$

Entonces, es evidente de la definición de grafo "loop" que $G_i \cong B \boxtimes C$, y por ser G_i primo por hipótesis, deducimos que o bien B o bien C es K_1. Así que o bien $\mathcal{L}(B)$ o bien $\mathcal{L}(C)$ es $\mathcal{L}(K_1) = K_1^s$, por lo que $\mathcal{L}(G_i)$ es primo.

Del Teorema de factorización en el producto directo 4.3.2 se sigue que $n = k$ y que podemos ordenar los factores para que $\mathcal{L}(A_i) \cong \mathcal{L}(G_i)$, con lo que $A_i \cong G_i$ $\forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Por estar los A_i determinados de forma única por G se sigue la tesis. ■

6. Aplicaciones

Como autor tengo responsabilidad absoluta sobre los contenidos aquí expuestos, es por ello que antes de incidir en las diferentes aplicaciones que tienen los productos de grafos debo hacer ciertos comentarios.

Las diferentes aplicaciones no validan ni invalidan los razonamientos hechos hasta el momento, de hecho, deben ser tomados como un "extra", de ningún modo como una pieza fundamental de todo el trabajo realizado hasta el momento. Las matemáticas, a diferencia de otras disciplinas prácticas (como podría ser, por ejemplo, el derecho), no debe ser *nunca* supeditada a creencias utilitaristas.

La guía moral de centrarse en lo útil desemboca, de un modo u otro, en la *lógica del beneficio*. ¿Qué es útil? ¿Aquello con mayor número de aplicaciones prácticas? ¿Aquello que soluciona un problema más importante? ¿Cómo se determina la importancia de un problema? Todas estas preguntas confluyen, en el marco institucional en el que nos encontramos, en maximización de ganancias. Introducir el utilitarismo en la academia solo supedita esta al beneficio, conduce a la privaticación del conocimiento, la barbarie.

Si no salvamos a la academia, la academia no podrá salvarnos a nosotros. La ciencia no es imparcial y debemos combatir en todos los ámbitos por su defensa.

Teniendo en mente todo lo comentado, estamos en condiciones de adentrarnos (conscientemente) en las aplicaciones que tienen los productos de grafos. Daremos unas pequeñas pinceladas en diversos campos, pero, evidentemente, hay muchas más.

6.1. Algunas aplicaciones en Física

Un tema que me toca de cerca es el de la física de la materia condensada. El objeto de estudio en esta rama de la física es el de las interacciones electrónicas en los materiales sólidos.

Un grafo puede interpretar la disposición espacial de un conjunto de átomos, de forma que las propiedades topológicas del grafo representar magnitudes físicas.
Por ejemplo, la intensidad de la interacción entre dos electrones, representados por vértices del grafo, tendrá una dependencia con la distancia entre estos. De esta forma, puesto que interesa estudiar las propiedades de millones de electrones, es necesario factorizar nuestro grafo para poder estudiar las distancias en este.
Asimismo, en la *twistrónica*, el estudio de las propiedades de materiales de grosor atómico apilados, puede interpretarse de la misma forma cada uno de los átomos como un vértice. Si lo que se quiere estudiar son las interacciones entre capas pueden considerarse el grafo de todos los átomos como bipartito. Es claro entonces que los resultados involucrando este tipo de grafos cobran relevancia en el tema.

6.2. Algunas aplicaciones en Química

Existe toda una disciplina llamada *teoría de grafos molecular*. Es bastante evidente que la teoría de grafos en química tendrá un peso no despreciable.
Una molécula puede ser descrita por un grafo, cuyos vértices representan cada átomo y las aristas las interacciones que mantienen a la molécula unida. De esta forma, propiedades topológicas, como otras cantidades conservadas (en las que no entraremos) juegan un papel importante en las propiedades físico-químicas de la misma ([4]).

6.3. Algunas aplicaciones en Matemáticas

Además de ser una rama de las matemáticas independiente, la teoría de grafos y en particular los productos de grafos tienen relevancia en las conocidas como *álgebras evolutivas*. Específicamente, el producto directo es importante pues te permite reducir las dimensiones del problema, pudiendo descomponer el álgebra a estudio en factores diversos con propiedades conservadas en estos. De esta forma es posible reducir la dificultad del problema de manera más o menos sencilla ([5]).

7. Cierre

Esta última parte debería ir dirigida a concluir el trabajo, pero ¿cómo concluir un texto de matemáticas? Los resultados ya están expuestos e interpretados en la medida de lo posible, como mucho podremos dar unas pequeñas pinceladas de lo que falta.

Para extender este trabajo podríamos adentrarnos más en el producto fuerte y comenzar a tratar el lexicográfico, al que solamente hemos dedicado unas pequeñas lineas. Tras esto, sería conveniente entrar en materia y adentrarse en los problemas de coloreado de grafos, que tratan de buscar formas de "pintar" los grafos sin repetir colores de forma adyacente.

Ahora voy a tomarme la libertad de hablar de mí. Este trabajo no ha sido sencillo, el libro que he usado de guía no es fantástico y entenderlo se me ha hecho cuesta arriba. Aún así, estoy realmente contento del resultado, creo haber acabado con la materia dominada en la medida de mis posibilidades.

Con esto, doy fin a cinco años de estudio de matemáticas. Lo más importante de este tiempo ha sido el darme cuenta de que esta es mi pasión, hasta el punto de querer continuar estudiando y (si Dios quiere) dedicarme a esto. Temas de lógica son los que me esperan en el máster (si Dios quiere), bastante alejados de la teoría de grafos que hemos estado tratando, pero seguramente que más reconfortantes. Estos años han conseguido curtirme y estoy convencido de que a pesar de que el derrotero en el que acabe sea distinto del esperado (Dios no quiera), seré capaz de enfrentarme a él. Ningún gigante pudo con Don Quijote, ningún gigante podrá conmigo.

Bibliografía

[1] Hammack, R., Imrich, W., & Klavžar, S. (2011). *Handbook of product graphs, second edition (discrete mathematics and its applications)*. CRC Press, Boca Raton, FL. ISBN: 9781439813041.

[2] Whitehead, A. N., & Russell, B. (1910). *Principia Mathematica*, vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, UK. Nota: 3 volúmenes, publicados 1910–1913.

[3] Hammack, R. H., & Imrich, W. (2009). On Cartesian skeletons of graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, *2*, 191–205. Also available at http://amc.imfm.si ISSN 1855-3966 (printed edn.), ISSN 1855-3974 (electronic edn.).

[4] Rodríguez, J. A., & Vidal, R. M. (2022). Tensor product of evolution algebras. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19(6), 241. https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-022-02246-5

[5] Gutman, I., & Polansky, O. E. (1992). *Chemical graph theory* (2nd ed.). CRC Press, Boca Raton, FL. https://www.google.es/books/edition/Chemical_Graph_Theory/X0AG7HhiccoC?hl=es&gbpv=0