



Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

PCEO Grado en Matemáticas / Grado en Física

Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Dinámicas discretas en una circunferencia

Autora: Inés Vilanova de Diego

Supervisado por:

Santiago Ibáñez Mesa

Curso 2023-2024

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	9
1.1. Sistemas dinámicos	9
1.2. Conjuntos de Cantor	13
2. Sistemas discretos en una circunferencia	15
2.1. Movimientos cuasiperiódicos	15
2.1.1. Definición de órbita cuasiperiódica.	15
2.1.2. Reducción a aplicaciones en una circunferencia.	16
2.2. Aplicaciones de la circunferencia	18
2.2.1. Levantamiento de un homeomorfismo	20
2.2.2. Número de rotación	24
2.2.3. Número de rotación racional	32
2.2.4. Número de rotación irracional	36
2.2.5. Teoremas de Denjoy y Teorema de Clasificación de Poincaré	49
3. Aplicaciones estándar de Arnold	51
3.1. Escaleras del diablo	57
3.1.1. Continuidad de la aplicación número de rotación	59
3.1.2. Monotonía de la aplicación número de rotación	63
3.1.3. Intervalos de <i>frequency locking</i>	66
3.2. Interpretación del <i>frequency locking</i>	71

3.2.1. Sistema de osciladores acoplados	72
3.2.2. Lenguas de Arnold	73
Conclusiones	75
Bibliografía	77

Introducción

Un sistema dinámico es un modelo que describe la evolución temporal, ya sea discreta o continua, de un proceso que se desarrolla en un cierto espacio ambiente al que nos referiremos como espacio de fases. El objetivo principal es entender el comportamiento a largo plazo del sistema, identificando observables: puntos estacionarios, atractores caóticos, órbitas periódicas y movimientos cuasiperiódicos.

Al considerar flujos en un espacio de fases, la cuasiperiodicidad puede caracterizarse mediante la presencia de toros invariantes con una dinámica interna. Para toros 2–dimensionales, la dinámica se puede simplificar a una aplicación de una circunferencia sobre sí misma, mediante funciones de retorno adecuadas conocidas como aplicaciones de Poincaré. Pasamos entonces de sistemas dinámicos continuos en un toro 2–dimensional al estudio de sistemas dinámicos discretos 1–dimensionales. En particular, en este trabajo nos centraremos en el estudio de homeomorfismos en la circunferencia unidad. En este contexto, introduciremos y exploraremos el concepto de número de rotación, un elemento central en el estudio de estas aplicaciones, que proporciona el promedio de rotaciones de las órbitas en la circunferencia unidad, en el siguiente sentido.

Consideremos la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 y una aplicación $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Partimos de un punto $x_0 \in \mathbb{S}^1$ y, al iterar la función f , obtenemos una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En la Figura 1 tenemos una representación de este proceso. Cada elemento de la circunferencia unidad se puede expresar como $x = \exp(2\pi i\theta)$, quedando completamente determinado por un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$. Además, si $x_0 = \exp(2\pi i\theta_0)$, $x_1 = \exp(2\pi i\theta_1)$, podemos decir que la acción de f sobre x_0 ha sido *rotar* x_0 en un ángulo $\omega = |\theta_1 - \theta_0|$, como se puede observar en la Figura 2.

Nuestro objetivo es definir un valor que nos permita reflejar el promedio de rotación de los puntos de la circunferencia unidad a través de una aplicación f . Supongamos que estamos considerando una función cuya acción sobre los puntos de \mathbb{S}^1 consiste rotar en una cantidad constante ω ; estas aplicaciones las llamaremos *rotaciones rígidas*. Por ejemplo, supongamos que $\omega = 2\pi/3$ y partimos del punto $x_0 = 1$. Entonces, $x_1 = f(x_0) = \exp(i2\pi/3)$, $f(x_1) = \exp(i4\pi/3)$, $x_3 = f(x_2) = \exp(2\pi i) = 1$; es decir, al cabo de tres iteraciones volvemos al punto inicial. En efecto, al rotar en un ángulo $\frac{2\pi}{3}$ lo que estamos haciendo es dividir la circunferencia en tres partes, de

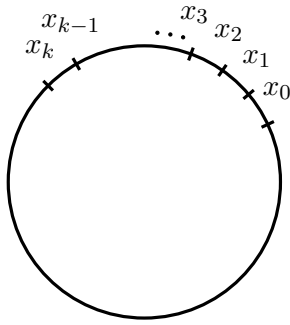


Figura 1: Representación de $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup 0}$

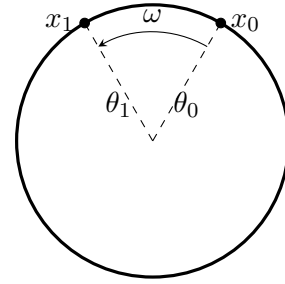


Figura 2: Representación del ángulo ω .

forma que cada órbita se cierra después de tres iteraciones. Tenemos una representación de esta órbita en la Figura 3.

Supongamos ahora que tenemos una rotación de ángulo $\frac{4\pi}{3}$, representada en la Figura 4. A primera vista puede parecer la misma situación que la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, pero los puntos x_2, x_1 se han intercambiado. Lo que ocurre en este caso es que las órbitas también se cierran después de tres iteraciones, pero antes de cerrarse recorremos dos veces la circunferencia unidad, mientras que en la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ la recorremos una sola vez.

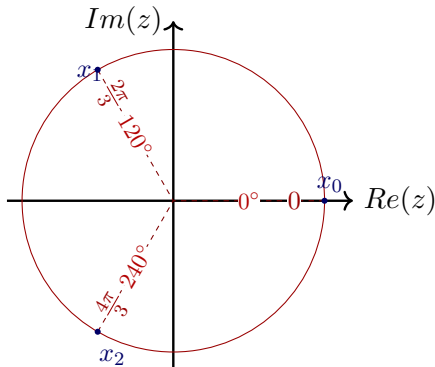


Figura 3: Rotación de ángulo $\frac{2\pi}{3}$

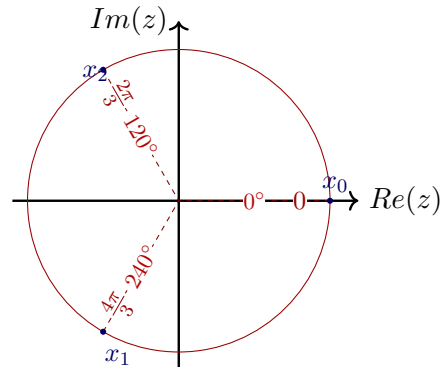


Figura 4: Rotación de ángulo $\frac{4\pi}{3}$

Las órbitas se cierran porque estamos considerando rotaciones de ángulo $\omega = 2\pi\alpha$, con α un número racional. Desde un punto de vista más general, lo que observamos es que si estudiamos rotaciones de ángulo ω de la forma

$$\omega = \frac{p}{q}2\pi,$$

con $p, q \in \mathbb{Z}$, primos entre sí y $q \neq 0$, entonces las órbitas se cierran al cabo de q iteraciones y, además, p es el número de veces que la órbita recorre la circunferencia antes de cerrarse. Por el contrario, si $\omega = 2\pi\alpha$, con $\alpha \in [0, 1)$ un número irracional, entonces las órbitas nunca se cerrarían, sino que cubrirían densamente la circunferencia. La dinámica de estas aplicaciones queda entonces perfectamente caracterizada por el número α , que llamaremos *número de rotación de la rotación rígida*.

Nos planteamos la posibilidad de extender el análisis de rotaciones a aplicaciones en la circunferencia unidad que no sean estrictamente rotaciones rígidas. En 1885 (ver [9]), Poincaré introdujo el concepto de número de rotación, un equivalente a α para aplicaciones en la circunferencia unidad que no sean necesariamente rotaciones rígidas. Para garantizar que el número de rotación esté bien definido, consideramos un espacio específico: los homeomorfismos de la circunferencia unidad. En particular, estudiaremos los homeomorfismos que conservan la orientación, aunque de forma análoga se podría desarrollar el mismo estudio para homeomorfismos que revierten la orientación. En este contexto, demostraremos la existencia de un parámetro $\rho(f)$ para cada homeomorfismo f , que se corresponde con el valor α en las rotaciones rígidas.

En el Capítulo 1 estableceremos un conjunto de definiciones y resultados preliminares que utilizaremos en el resto de capítulos. En el Capítulo 2 estableceremos la relación entre flujos continuos definidos en toros 2–dimensionales y aplicaciones de la circunferencia unidad, y definiremos el concepto de número de rotación. Además, demostraremos que el número de rotación es racional y de la forma $\frac{p}{q}$, si y solo si existen puntos periódicos de periodo q . Esto sugiere que, en estos casos, dividimos la circunferencia un número entero de veces y el número de rotación representa un promedio de las rotaciones de la órbita, calculado mediante el número de vueltas completas dividido entre el número de iteraciones antes de cerrarse.

Por otro lado, veremos que si el número de rotación es irracional, entonces todas las órbitas son densas en ciertos subconjuntos del espacio de fases, independientemente del punto de partida. Observaremos también que desde el punto de vista general no podemos afirmar que las órbitas sean densas en \mathbb{S}^1 como ocurría en la rotación rígida, también puede ocurrir que sean densas en un conjunto de Cantor.

Al final del Capítulo 2, enunciaremos el Teorema de Clasificación de Poincaré. Este teorema establece que si existe una órbita densa en la circunferencia unidad con número de rotación irracional, entonces la dinámica es equivalente a la rotación rígida. Además, enunciaremos los Teoremas de Denjoy, aplicables a difeomorfismos. El primer teorema nos da una condición suficiente para que un homeomorfismo con número de rotación irracional presente órbitas densas en la circunferencia unidad, mientras que el segundo teorema establece que si esta condición no se cumple, entonces para todo número irracional podemos encontrar un homeomorfismo que conserve la orientación y cuya dinámica no sea la misma que la de la rotación rígida.

En el Capítulo 3, una vez definido el concepto de número de rotación y examinadas sus propiedades más importantes, nos centraremos en el estudio de una relevante familia de homeomorfismos de \mathbb{S}^1 , las aplicaciones estándar de Arnold, y estudiaremos el número de rotación en función de los dos parámetros que intervienen en la definición de estas aplicaciones. Esta familia nos permitirá investigar fenómenos como las escaleras del diablo y las lenguas de Arnold. El interés en estudiar esta familia radica en la aparición del fenómeno del *frequency locking*, que se observa en una amplia gama de sistemas naturales y artificiales.

Como referencias más importantes para el estudio general de homeomorfismos de la circunferencia unidad hemos utilizado [4], [6] y [10], entre otros trabajos que se pueden consultar en la Bibliografía. Para el estudio de las aplicaciones de Arnold hemos seguido principalmente [5] y en menor medida [2] y [8].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sistemas dinámicos

Comenzamos con una serie de definiciones básicas en teoría de sistemas dinámicos continuos y discretos. Como referencia para los conceptos básicos definidos a continuación hemos utilizado principalmente [4] y [10] y en menor medida [6] y [8]. Además, utilizamos [12] para la definición de aplicaciones de Poincaré.

Definición 1.1. Un *sistema dinámico continuo* es un sistema de N ecuaciones diferenciales autónomas definido por N funciones $f_i : D_i \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, con D_i conjuntos abiertos

$$\begin{cases} x'_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ x'_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ x'_N &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases}$$

Podemos expresar el sistema anterior como una única ecuación de la forma $x'(t) = F(x(t))$, donde $F : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, con D un conjunto abierto, es un campo vectorial. Como es habitual, en un abuso de lenguaje nos referiremos también a la ecuación $x'(t) = F(x(t))$ como *campo vectorial*.

Definición 1.2. Dadas dos soluciones $x_1 : t \in I_1 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $x_2 : t \in I_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, se dice que x_2 es una *prolongación* de x_1 si $I_1 \subset I_2$ y $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in I_1$. Una solución que no admite prolongaciones se denomina *maximal*.

Observación 1.1. En lo que sigue, consideramos siempre que el dominio D es un conjunto abierto y $F : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una función de clase C^1 . En estas condiciones, para cada

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una única solución maximal del *problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Además, para cada $x_0 \in D$ I_{x_0} denotará el intervalo de definición de la solución maximal con condición inicial $x(0) = x_0$.

Definición 1.3. Sea $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una función de clase C^1 , consideremos la ecuación diferencial $x' = f(x(t))$. Denominamos *flujo* a la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \Delta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, x_0) &\mapsto \phi(t, x_0), \end{aligned}$$

de manera que fijado $x_0 \in \mathbb{R}^N$, la función $\phi : (t, x_0) \in I_{x_0} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ es solución maximal del problema de Cauchy con condición inicial $x(0) = x_0$. El dominio Δ está formado por aquellos puntos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ tales que $x \in D$ y $t \in I_x$.

Definición 1.4. En las condiciones anteriores, para cada $x \in D$ denominamos *órbita* de x al conjunto $\gamma_x = \{\phi(t, x) : t \in I_x\}$. Definimos la *órbita positiva* de x como el conjunto $\gamma_x^+ = \{\phi(t, x) : t \in I_x, t \geq 0\}$ y la *órbita negativa* de x como el conjunto $\gamma_x^- = \{\phi(t, x) : t \in I_x, t \leq 0\}$, de forma que $\gamma_x = \gamma_x^+ \cup \gamma_x^-$.

Definición 1.5. Sean $x' = f(x)$ y $x' = g(x)$ dos ecuaciones diferenciales con $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones de clase C^1 . Sean ϕ_f y ϕ_g los flujos correspondientes. Diremos que los campos $x' = f(x)$ y $x' = g(x)$ son conjugados si existe un homeomorfismo $h : A \rightarrow B$, que llamaremos *conjugación*, de forma que

$$h(\phi_f(t, y)) = \phi_g(t, h(y))$$

para todo $y \in A$ y para todo t donde ambos flujos estén definidos.

Definición 1.6. Sea X un espacio métrico completo y $f : x \in D \subset X \rightarrow X$ una aplicación continua. Un *sistema dinámico discreto* consiste en la iteración de la aplicación de f en D , es decir, $x_{n+1} = f(x_n)$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Partiendo de un estado inicial x_0 , aplicando f sucesivamente ($x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ...) obtenemos una sucesión de estados $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Además, se dice que el sistema dinámico dado por la aplicación $f : x \in D \subset X \rightarrow X$ es *invertible* si f tiene inversa.

Definición 1.7. Sea X un espacio métrico completo, $f : D \subset X \rightarrow X$ una aplicación continua y $x \in D$. Entonces, la *órbita positiva* de x por f es el conjunto dado por

$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tales que } f^n(x) \text{ está definido}\}$$

y la *órbita negativa* de x por f es el conjunto

$$O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tales que } f^{-n}(x) \text{ está definido}\}.$$

Finalmente, la *órbita* de x por f es el conjunto $O(x) = O^+(x) \cup O^-(x)$.

Definición 1.8. Se dice que x es un *punto fijo* de una aplicación $f : x \in D \subset X \rightarrow X$ si $f(x) = x$. El conjunto de puntos fijos de f se denota $Fix(f)$. Por otro lado, se dice que x es un *punto periódico* de una aplicación $f : x \in D \subset X \rightarrow X$ si existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $f^n(x) = x$. En estas condiciones, x se dice *periódico de periodo* n y el menor $k \in \mathbb{N}$ para el que $f^k(x) = x$ se denomina *periodo* de x .

Definición 1.9. Sea $f : x \in D \subset X \rightarrow X$ una aplicación continua y $x \in D$. Se dice que $y \in D$ pertenece al ω -límite de x si existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ de forma que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^{n_k}(x), y) = 0.$$

El conjunto de puntos que pertenecen al ω -límite de x por f se denota $\omega(x, f)$ o $\omega(x)$.

Definición 1.10. Sea $f : x \in D \subset X \rightarrow X$ una aplicación continua. Se dice que un conjunto $S \subset X$ es un conjunto *positivamente invariante* si $f(S) \subset S$. Además, se dice que S es *negativamente invariante* si $f^{-1}(S) \subset S$. Finalmente, se dice que S es *invariante* si S es positiva y negativamente invariante.

Definición 1.11. Un conjunto $S \subset X$ es un *conjunto minimal* de f si verifica:

- I. S es cerrado, no vacío e invariante.
- II. Para cada $B \subset S$ cerrado, no vacío e invariante se tiene que $B = S$.

Definición 1.12. Se dice que las aplicaciones $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ son *topológicamente conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, que denominamos *conjugación* tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$

Por otro lado, se dice que g es un *factor topológico* de f si existe una aplicación suprayectiva y continua $h : X \rightarrow Y$ tal que

$$h \circ f = g \circ h$$

En estas condiciones, h se denomina *semiconjugación*

Definición 1.13. Se dice que f es *transitiva en* X si existe $x \in X$ de forma que $O(x)$ es una órbita densa en X .

Definición 1.14. Sea ϕ el flujo asociado a la ecuación diferencial $x' = F(x, t)$. Se dice que $\Sigma \subset \mathbb{R}^{N-1}$ es una *superficie transversal* a ϕ si $F(x) \cdot n(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma$, donde $n(x)$ denota un vector normal a Σ en el punto x .

Definición 1.15. Supongamos que Σ es una superficie transversal a ϕ y que existe $V \subset \Sigma$ un subconjunto de forma que, para cada $x \in V$, existe $\tau_x > 0$ tal que $\phi(\tau_x, x) \in V$. Es decir, para cualquier condición inicial x en V existe cierto tiempo τ_x tal que la órbita vuelve a Σ y $\phi(t, x) \notin \Sigma$ si $t \in (0, \tau_x)$. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \tau : V &\rightarrow (0, \infty) \\ x &\mapsto \tau(x) = \tau_x = \min\{\tau > 0 : \phi(\tau, x) \in V\}. \end{aligned}$$

En estas condiciones, podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto P(x) = \phi(\tau(x), x). \end{aligned}$$

La aplicación P se denomina *aplicación de primer retorno de Poincaré* o simplemente *aplicación de Poincaré*.

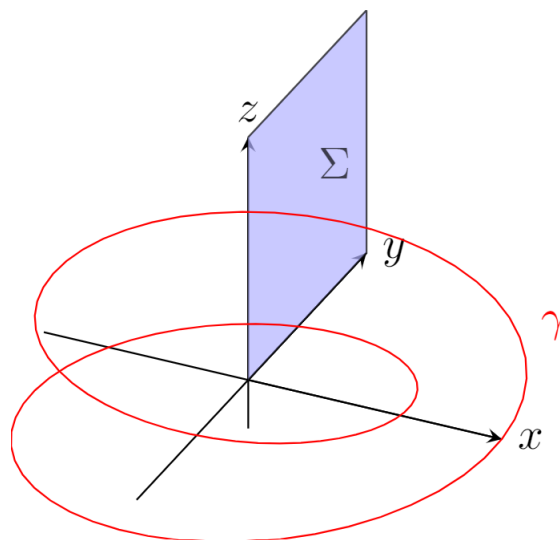


Figura 1.1: Construcción de la aplicación de Poincaré sobre una superficie Σ . En este ejemplo, tenemos una solución periódica por lo que la órbita γ es una curva cerrada, que tiene intersección con Σ en dos puntos distintos. En entornos adecuados de estos puntos estarían definidas aplicaciones de Poincaré.

Observación 1.2. Si el espacio de fases dado por el campo $x' = F(x(t))$ tiene dimensión N , entonces Σ y V son superficies $(N - 1)$ dimensionales. Así, la aplicación de Poincaré permite pasar de un sistema continuo N -dimensional a uno discreto $(N - 1)$ -dimensional. En la Figura

1.1 tenemos una representación de la construcción de una aplicación de Poincaré. Se ilustra un campo que exhibe una órbita periódica γ y Σ una sección transversal a los puntos de γ . La aplicación de Poincaré está definida en entornos de los puntos de intersección.

1.2. Conjuntos de Cantor

Como adelantamos en el capítulo introductorio, cuando estudiemos ω -límites de sistemas dinámicos discretos nos encontraremos con la posibilidad de obtener conjuntos de Cantor. Nuestro objetivo a continuación es establecer la definición general de conjunto de Cantor en un espacio topológico cualquiera tomando como modelo el conocido *conjunto ternario de Cantor*, que definimos a continuación. Como referencia para esta sección, hemos utilizado [5].

Sea $C_0 = [0, 1]$ y consideramos el siguiente proceso iterativo.

1. Consideramos los subintervalos $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$. En la primera iteración, eliminamos el intervalo abierto central de longitud $\frac{1}{3}$, siendo C_1 la unión de los dos intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3}$ restantes, es decir,

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

2. En la siguiente iteración, eliminamos los intervalos abiertos centrales de longitud $\frac{1}{9}$ de cada intervalo restante, dejando cuatro intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{9}$ cada uno. Definimos entonces C_2 de la siguiente manera:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cap \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cap \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cap \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

3. Procedemos de esta manera para todo $n \in \mathbb{N}$, eliminando iterativamente y para cada intervalo el subintervalo abierto central de longitud $\frac{1}{3^n}$ en cada paso y obteniendo así el conjunto C_n .

Obtenemos entonces una sucesión de conjuntos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $C_{n+1} \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.16. El *conjunto ternario de Cantor* es el conjunto C dado por

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

La definición anterior establece el concepto de conjunto de Cantor de los tercios de forma geométrica. Ahora bien, una forma equivalente de hacerlo como los elementos del intervalo $[0, 1]$ que

se pueden expresar en base 3 sin utilizar el dígito 1. Consideramos $x \in C$ y su expresión en base 3.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 3^{-n},$$

con $\alpha_n \in \{0, 1, 2\}$. Veamos que $\alpha_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comenzamos con $n = 1$, que se corresponde con $3^{-1} = \frac{1}{3}$. Por definición, $C \subset C_1$ y sabemos que o bien $x \in [0, \frac{1}{3}]$, de donde $\alpha_1 = 0$, o bien $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, y entonces $\alpha_1 = 2$. Supongamos que $\alpha_1 = 0$, esto es $\alpha_1 = 1$, y estudiamos α_2 , correspondiente a $3^{-2} = \frac{1}{9}$. Por definición de $C \subset C_2$, sabemos que o bien $x \in [0, \frac{1}{9}]$, de donde $\alpha_2 = 0$, o bien $x \in [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, es decir, $\alpha_2 = 2$.

En la n -ésima iteración partimos de un intervalo de longitud $\frac{1}{3^{n-1}}$ y tenemos que $\alpha_n = 0$ si x pertenece al primer tercio y $\alpha_n = 2$ si x pertenece al tercer tercio. Por construcción de C , x nunca pertenece al segundo tercio, y por tanto $\alpha_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto ternario de Cantor se define en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ siendo $d_{\mathbb{R}}$ la métrica usual. Para estudiar sus propiedades, consideramos las siguientes definiciones.

Definición 1.17. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es *perfecto* si es cerrado y todos sus puntos son puntos de acumulación.

Definición 1.18. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es *totalmente desconexo* si es no vacío y ningún subconjunto conexo tiene más de un elemento.

Definición 1.19. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es *denso en ninguna parte* si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Se comprueba que el conjunto de Cantor ternario es compacto, perfecto, totalmente desconexo y denso en ninguna parte. Además, se puede demostrar que en cualquier espacio métrico (X, d) , si $A \subset X$ es compacto, totalmente desconexo y perfecto, entonces A es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor. La demostración de estos resultados se puede encontrar en [5] y nos permite generalizar el concepto de conjunto de Cantor de la siguiente manera:

Definición 1.20. Un conjunto $A \subset X$ se dice *conjunto de Cantor* si es compacto, totalmente desconexo y perfecto.

En la recta real se puede comprobar además que si un conjunto es perfecto, no vacío y denso en ninguna parte, entonces es totalmente desconexo (ver [5]). Por lo tanto, dado $A \subset \mathbb{R}$, se verifica que si A es no vacío, compacto, perfecto y denso en ninguna parte, entonces A es un conjunto de Cantor.

Capítulo 2

Sistemas discretos en una circunferencia

2.1. Movimientos cuasiperiódicos

En esta sección, definiremos el concepto de órbita cuasiperiódica y vincularemos el estudio de aplicaciones de la circunferencia al análisis de flujos continuos que contienen movimientos cuasiperiódicos; los sistemas dinámicos discretos definidos a partir de aplicaciones de la circunferencia unidad serán estudiados con detalle en la siguiente sección. Como referencia para esta primera parte del capítulo hemos seguido [2].

2.1.1. Definición de órbita cuasiperiódica.

Definición 2.1. Sea $\mathbb{T}^N = (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^N$ el toro de N -dimensional definido por las coordenadas $(\theta_1, \dots, \theta_N) \in [0, 2\pi) \times \dots \times [0, 2\pi)$. Consideramos el campo dado por

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i, \quad (2.1)$$

para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, con $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$ un vector constante. Los valores $\omega_1, \dots, \omega_N$ se denominan *frecuencias* y las órbitas de (2.1) se denominan *condicionalmente periódicas*. Si X es un campo de vectores cuyo retrato de fases contiene un toro invariante N -dimensional M y la restricción $X|_M$ es conjugada al campo (2.1), entonces también diremos que las órbitas de M son condicionalmente periódicas.

Además, se dice que las órbitas del campo (2.1) son *cuasiperiódicas* si las frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_N$ son racionalmente independientes, es decir, para cada $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se verifica que

$$k_1\omega_1 + \dots + k_N\omega_N \neq 0.$$

En este caso, también se dice que el toro es *cuasiperiódico*. En caso contrario, el toro M se

denomina *resonante*. Esta terminología se aplica a cualquier dinámica conjugada a 2.1.

2.1.2. Reducción a aplicaciones en una circunferencia.

Nos centraremos en el caso particular $N = 2$. Sea M un toro de 2-dimensional, determinado por los ángulos (θ_1, θ_2) . Podemos definir la familia de sistemas $X_{(\omega_1, \omega_2)}$ dada por

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

con $\omega_1\omega_2 \neq 0$. Se trata de un sistema de ecuaciones que describe el movimiento de dos osciladores independientes con frecuencias ω_1, ω_2 . Para cada condición inicial $(\theta_1^0, \theta_2^0) \in \mathbb{T}^2$, tenemos una solución de la forma

$$\begin{cases} \theta_1(t) = (\theta_1^0 + \omega_1 t) \text{ mód } 2\pi \\ \theta_2(t) = (\theta_2^0 + \omega_2 t) \text{ mód } 2\pi. \end{cases}$$

Nuestro objetivo es reducir el estudio de este flujo 2-dimensional al caso de aplicaciones 1-dimensionales. Para ello, justificamos la existencia de aplicaciones de Poincaré para los sistemas $X_{(\omega_1, \omega_2)}$ sobre una circunferencia inscrita en el toro, que denotaremos Σ , y que está representada en la Figura 2.1.

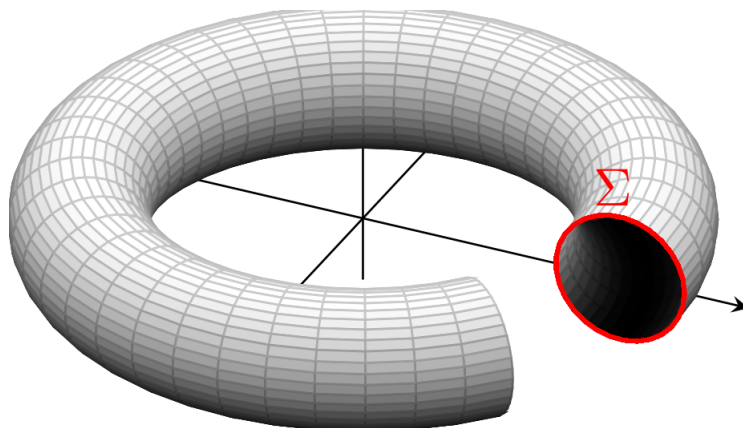


Figura 2.1: Circunferencia Σ inscrita en el toro.

Proposición 2.1. Sea $X_{(\omega_1, \omega_2)}$ la familia de campos vectoriales condicionalmente periódicos dada en (2.2). Entonces, existe un conjunto $\Sigma \subset \mathbb{T}^2$ y una aplicación $P_{(\omega_1, \omega_2)} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $P_{(\omega_1, \omega_2)}$ es una aplicación de Poincaré para el campo $X_{(\omega_1, \omega_2)}$.

Demostración. Sabemos que $\omega_1\omega_2 \neq 0$, de donde podemos suponer sin pérdida de generalidad

que $\omega_2 \neq 0$ (el caso $\omega_1 \neq 0$ es análogo). Consideremos la curva $\Sigma = \{(\theta_1, 0) : \theta_1 \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{T}^2$, es decir, una circunferencia inscrita en el toro. Veamos que podemos construir una aplicación de Poincaré definida en Σ . El sistema (2.2) puede entenderse como un campo constante $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F(\theta) = (\omega_1, \omega_2)$ para todo $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. En general, cualquier campo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que sea 2π -periódico en cada componente define un flujo sobre un toro 2-dimensional, es decir, F define un campo sobre $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})^2$.

Para empezar, veamos que Σ es una curva transversal al flujo. El vector $(0, 1)$ es normal a Σ en cada punto:

$$n \cdot F(\theta) = (0, 1) \cdot (\omega_1, \omega_2) = \omega_2 \neq 0$$

para todo $\theta \in \mathbb{T}^2$, y en particular para todo $\theta \in \Sigma$. Por tanto la superficie es transversal. Por otro lado, probaremos que para cada $x \in \Sigma$ existe τ_x tal que $\phi(\tau_x, x) \in \Sigma$. En efecto, los elementos de Σ son de la forma $x = (\theta_1^0, 0)$ con $\theta_1^0 \in [0, 2\pi)$. La solución del problema de Cauchy para el campo $X_{(\omega_1, \omega_2)}$ con esta condición inicial es

$$\begin{cases} \theta_1(t) &= (\theta_1^0 + \omega_1 t) \pmod{2\pi} \\ \theta_2(t) &= \omega_2 t \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Basta tomar $\tau_x = \frac{2\pi}{\omega_2}$, y así

$$\theta_1(\tau_x) = (\theta_1^0 + \omega_1 \tau_x) \pmod{2\pi} = (\theta_1^0 + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}) \pmod{2\pi},$$

$$\theta_2(\tau_x) = \omega_2 \tau_x \pmod{2\pi} = \omega_2 \frac{2\pi}{\omega_2} \pmod{2\pi} = 0.$$

Además, es claro que τ_x es el menor $\tau > 0$ tal que $\phi(\tau_x, x) \in \Sigma$. Finalmente, la aplicación

$$\begin{aligned} P_{\omega_1, \omega_2} : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto P(x) = \phi\left(\frac{2\pi}{\omega_2}, x\right) = (\theta_1^0 + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}, 0) \end{aligned}$$

es la aplicación de Poincaré asociada al flujo (2.2) sobre la sección transversal Σ . \square

Observación 2.1. Notamos que Σ es una circunferencia inscrita en el toro, por lo que podemos identificar Σ con $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ la circunferencia unidad en el plano complejo. Es decir, para cada $x = (\theta, 0) \in \Sigma$ con $\theta \in [0, 2\pi)$, definimos $z = \exp(\theta) \in \mathbb{S}^1$ y estudiaremos las aplicaciones de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ como aplicaciones $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de la circunferencia unidad. Además, los elementos $z \in \mathbb{S}^1$ se pueden expresar de forma única como $z = \exp(\theta) = \exp(2\pi it)$, con $t \in [0, 1)$. En consecuencia, las aplicaciones de Poincaré P_{ω_1, ω_2} se expresan como funciones de \mathbb{S}^1 de la

siguiente forma

$$f_{(\omega_1, \omega_2)} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x = \exp(2\pi it) \mapsto f_{(\omega_1, \omega_2)}(x) = \exp\left(2\pi i\left(t + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right).$$

Ahora bien, $f_{(\omega_1, \omega_2)}$ no depende del valor de ω_1 y ω_2 independientemente sino de su cociente. Definiendo $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, tenemos una familia de aplicaciones en la circunferencia unidad dependiente de un solo parámetro:

$$f_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x = \exp(2\pi it) \mapsto f_\alpha(x) = \exp(2\pi i(t + \alpha)).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\alpha \in [0, 1)$, pues para cada $\beta \in \mathbb{R}$ existe $\alpha \in [0, 1)$ de forma $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Obtenemos entonces una primera familia importante de aplicaciones de la circunferencia unidad.

Definición 2.2. Sea $\alpha \in [0, 1)$. La aplicación dada por

$$f_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x = \exp(2\pi it) \mapsto f_\alpha(x) = \exp(2\pi i(t + \alpha))$$

se denomina *rotación rígida de ángulo $2\pi\alpha$* .

2.2. Aplicaciones de la circunferencia

Habiendo comprendido en la sección anterior cómo las dinámicas condicionalmente periódicas sobre un toro 2-dimensional motivan el estudio de aplicaciones de \mathbb{S}^1 sobre sí mismas, en esta sección nos ocuparemos del estudio de la dinámica de los homeomorfismos de una circunferencia. Estableceremos conceptos como levantamiento o número de rotación de un homeomorfismo, que posteriormente aplicaremos a la familia de aplicaciones de Arnold. Para esta sección como referencias hemos utilizado principalmente [4], [10] y [6].

Observación 2.2. Aunque hayamos introducido un ejemplo muy concreto de homeomorfismos de la circunferencia unidad, las rotaciones rígidas, hemos de entender que el conjunto de flujos sobre el toro cuya dinámica está ligada un homeomorfismo sobre \mathbb{S}^1 es mucho más general. basta con que pueda definirse una aplicación de primer retorno dada por una curva inscrita en el toro.

Cada vez que fijamos dos puntos distintos $a, b \in \mathbb{S}^1$, se determinan dos arcos sobre la circunferencia. Si recorremos estos arcos desde a hasta b , en uno de ellos el recorrido se hace en el sentido

de las agujas del reloj y el otro en sentido contrario. En lo que sigue, cada vez que nos referamos a un arco $[a, b]$, se entenderá que nos referimos al arco recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj. Obsérvese que, con el fin de manejar una notación más simple, estamos representando los arcos como intervalos. Además, denotaremos $[a, b]$ en el caso de que el conjunto incluya los extremos y (a, b) para denotar al arco de circunferencia sin incluir los puntos a, b (ver Figura 2.2).

Definición 2.3. Diremos que un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ preserva (respectivamente, invierte) orientación si para cada $a, b \in \mathbb{S}^1$, con $a \neq b$, se cumple que si $x \in [a, b]$, entonces $f(x) \in [f(a), f(b)]$ (respectivamente $f(x) \in [f(b), f(a)]$).

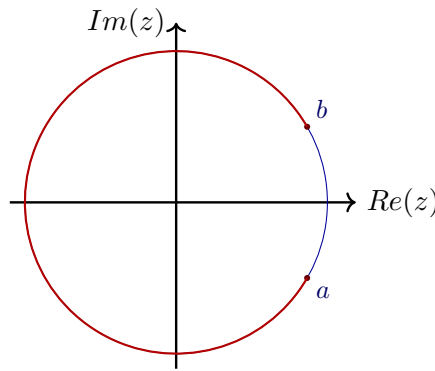


Figura 2.2: Representación del arco (a, b) en azul y del arco $[b, a]$ en rojo.

Proposición 2.2. Si f es un homeomorfismo que preserva orientación, entonces f^m también es un homeomorfismo que preserva orientación para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Demostración. El caso $m = 0$ es trivial pues $f^0 = Id$, la aplicación identidad. Supongamos $m > 0$. Probaremos el resultado por inducción. Para $m = 1$, sabemos que f preserva orientación por hipótesis. Supongamos que f^m preserva orientación. Entonces, para cada $a, b \in \mathbb{S}^1$ y para cada $x \in [a, b]$ se tiene que $f^m(x) \in [f^m(a), f^m(b)]$. Aplicando que f es un homeomorfismo que preserva orientación sobre el punto $f^m(x)$ tenemos que

$$f(f^m(x)) = f^{m+1}(x) \in [f(f^m(a)), f(f^m(b))] = [f^{m+1}(a), f^{m+1}(b)]$$

Y por tanto, f^{m+1} preserva orientación. Hemos probado que f^m preserva orientación para $m \geq 0$. Para $m < 0$ basta probar que f^{-1} preserva orientación y aplicar el resultado anterior, pues $f^{-m} = (f^{-1})^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $x \in [a, b]$ tal que $f^{-1}(x) \notin [f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$. En consecuencia, necesariamente tenemos que $f^{-1}(x) \in [f^{-1}(b), f^{-1}(a)]$. Como f es un homeomorfismo que preserva orientación,

$$x = f(f^{-1}(x)) \in [f(f^{-1}(b)), f(f^{-1}(a))] = [b, a]$$

Lo cual es una contradicción con la hipótesis de que $x \in [a, b]$. Por tanto, f^{-1} preserva orientación y por lo ya probado, f^{-m} también preserva orientación para todo $m \in \mathbb{N}$. \square

2.2.1. Levantamiento de un homeomorfismo

A continuación, definiremos el concepto de levantamiento de un homeomorfismo, que nos permitirá estudiar aplicaciones en la circunferencia unidad mediante funciones reales. Consideramos la definición propuesta en [4].

Definición 2.4. Sea $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ la circunferencia unidad. La aplicación $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$\Pi(t) = \exp(2\pi it) = \cos(2\pi t) + i \operatorname{sen}(2\pi t)$$

se denomina *aplicación recubridora*. Dado un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, se dice que una función continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un *levantamiento* o *elevación* de f si

$$\Pi \circ F = f \circ \Pi. \tag{2.3}$$

En otras palabras, un homeomorfismo de \mathbb{S}^1 y sus levantamientos presentan dinámicas semiconjugadas vía la aplicación Π .

Observación 2.3. Cada $x \in \mathbb{S}^1$ se puede expresar de forma única como $x = \Pi(t)$ para algún $t \in [0, 1)$. De esta forma, podemos pensar la circunferencia como el intervalo $[0, 1]$ con los extremos identificados. Por lo tanto, toda aplicación continua y, en particular, cualquier homeomorfismo de la circunferencia unidad se pueden estudiar como una apropiada función del intervalo $[0, 1]$ en sí mismo. Mediante la aplicación recubridora ampliamos la identificación a todos los números reales, usando la función Π que relaciona cada número complejo con todos sus posibles argumentos. Los levantamientos se pueden construir a partir de las representaciones de las aplicaciones como funciones del intervalo $[0, 1]$ en sí mismo.

Nota 2.1. El concepto de levantamiento puede establecerse en el contexto más general de las aplicaciones continuas $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Resultados generales de existencia de levantamientos pueden consultarse en [7].

Para construir un levantamiento de un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ podemos proceder de la siguiente forma. Fijamos un punto en \mathbb{S}^1 , por simplicidad, $\Pi(0)$. La imagen homeomorfa del arco $[\Pi(0), f^{-1}(\Pi(0))]$ es, o bien el arco $[f(\Pi(0)), \Pi(0)]$ si f preserva orientación, o bien el arco $[\Pi(0), f(\Pi(0))]$ si la orientación se invierte por el homeomorfismo. En lo que sigue $\Pi_*^{-1}(x)$ denotará el único elemento del conjunto $\Pi^{-1}(f(x)) \cap [0, 1)$.

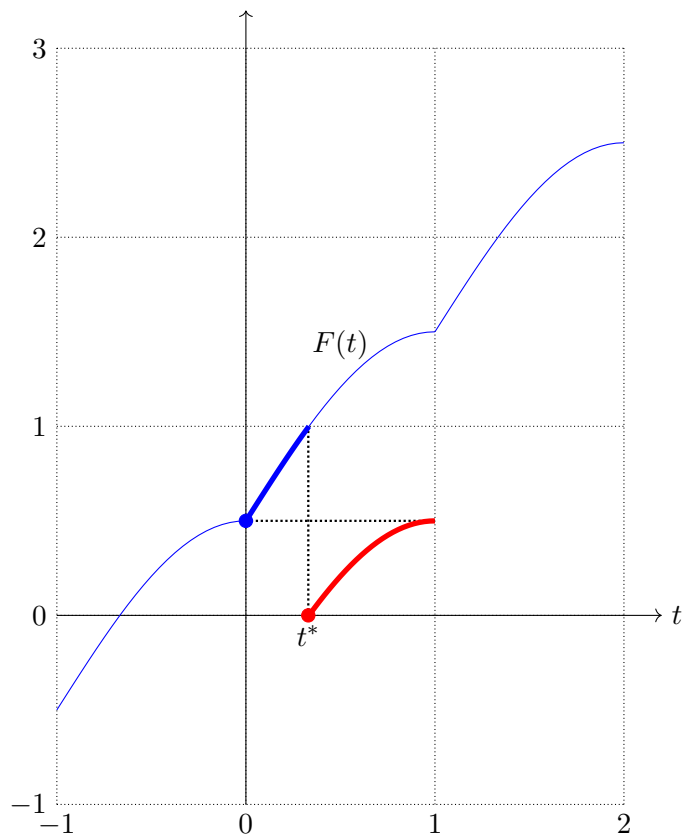


Figura 2.3: Levantamiento de una aplicación de S^1 que preserva orientación. Con trazo grueso, en rojo y azul, se representa la gráfica de la aplicación, pensada como aplicación del intervalo $[0, 1]$ (con extremos identificados) en sí mismo o, de otra forma, la gráfica de la aplicación $\Pi_*^{-1}(f(\Pi(t)))$. El trazo azul, independientemente del grosor, corresponde a la gráfica de $F(t)$.

Sea $t^* = \Pi_*^{-1}(f^{-1}(\Pi(0)))$. Si f preserva orientación definimos

$$F(t) = \begin{cases} \Pi_*^{-1}(f(\Pi(t))) & \text{if } t \in [0, t^*) \\ 1 + \Pi_*^{-1}(f(\Pi(t))) & \text{if } t \in [t^*, 1) \end{cases}$$

y $F(t) = F(t \bmod 1) + [t]$ si $t \notin [0, 1)$ (ver Figura 2.3). En caso contrario,

$$F(t) = \begin{cases} 1 + \Pi_*^{-1}(f(\Pi(t))) & \text{if } t \in [0, t^*) \\ \Pi_*^{-1}(f(\Pi(t))) & \text{if } t \in [t^*, 1) \end{cases}$$

y $F(t) = F(t \bmod 1) - [t]$ si $t \notin [0, 1)$.

Obsérvese que, por propia construcción, el levantamiento que hemos construido es estrictamente creciente (respectivamente decreciente) si f preserva (respectivamente invierte) la orientación. Además $F(t+1) = F(t) + 1$ (respectivamente $F(t+1) = F(t) - 1$) para todo $t \in \mathbb{R}$. En cualquier

caso, estas dos propiedades las probaremos a continuación sin hacer uso de esta construcción. También es inmediato que F verifica (2.3).

La construcción anterior también nos sugiere que si F es un levantamiento de un homeomorfismo y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $F + k$ también es un levantamiento, es decir, los levantamientos no son únicos. Consideremos, por ejemplo, la rotación rígida f_α de ángulo $2\pi\alpha$ definida en la sección anterior. Para cada $x \in \mathbb{S}^1$ tal $x = \exp(2\pi it)$ con $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(\exp(2\pi it)) = \exp(2\pi i(t + \alpha)).$$

Es claro entonces que $F_\alpha(t) = t + \alpha$ es un levantamiento de f_α , pero para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{F}_\alpha(t) = F(t) + k = t + \alpha + k$ también lo es. Es decir, F_α y \tilde{F}_α son dos levantamientos distintos de f_α , pero relacionados por una constante $k \in \mathbb{Z}$. La propiedad anterior, expresada en un sentido general, y otras que serán de utilidad posteriormente, se recogen en el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Sea f un homeomorfismo que preserva orientación y F un levantamiento de f . Entonces,*

- (a) F es estrictamente creciente.
- (b) Para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$, $F(t + k) = F(t) + k$.
- (c) La aplicación F^n , con $n \in \mathbb{N}$ es un levantamiento de f^n .
- (d) Para cada $k \in \mathbb{Z}$, si definimos $\tilde{F} = F(t) + k$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces \tilde{F} es un levantamiento de f .
- (e) Si \hat{F} es otro levantamiento de f , entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\hat{F}(t) = F(t) + k$.

Demostración. (a) Sea F^* la restricción de F a un intervalo $[\alpha, \alpha + 1)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, veamos que se trata de una función inyectiva. Sean t y s tales que $\alpha \leq t < s < \alpha + 1$. Si fuese $F^*(t) = F^*(s)$, entonces $f(\Pi(t)) = \Pi(F^*(t)) = \Pi(F^*(s)) = f(\Pi(s))$, pero $\Pi(t) \neq \Pi(s)$ con lo que se contradice el carácter inyectivo de f . Una función continua e inyectiva definida en un intervalo es, o bien estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente. Supongamos que F^* es estrictamente decreciente y consideremos, de nuevo, t y s tales que $\alpha \leq t < s < \alpha + 1$. Como f preserva orientación, si x pertenece al arco $[\Pi(t), \Pi(s)]$, entonces

$$f(x) \in [f(\Pi(t)), f(\Pi(s))] = [\Pi(F^*(t)), \Pi(F^*(s))],$$

pero, si $\tau \in [t, s]$, entonces se tiene que $\Pi(\tau) \in [\Pi(t), \Pi(s)]$ y

$$f(\Pi(\tau)) = \Pi(F(\tau)) \in [\Pi(F^*(s)), \Pi(F^*(t))],$$

lo que supone una contradicción. Concluimos que, si $t < s$ y $s - t < 1$, entonces $F(t) < F(s)$. Ahora bien, si $t < s$, podemos construir una secuencia $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$t = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = s$$

y $\tau_{i+1} - \tau_i < 1$ para $i = 1, \dots, n - 1$. Así

$$F(t) = F(\tau_1) < F(\tau_2) < \dots < F(\tau_{n-1}) < F(\tau_n) = s,$$

y concluimos que F es estrictamente creciente.

(b) Como $\Pi(t + 1) = \Pi(t)$, se tiene que

$$\Pi(F(t + 1)) = f(\Pi(t + 1)) = f(\Pi(t)) = \Pi(F(t)).$$

Por tanto, $F(t + 1) = F(t) + d(t)$, con $d(t) \in \mathbb{Z}$ y, puesto que $F(t + 1) - F(t)$ es una función continua de t . Entonces $d(t)$ es una función continua que toma valores en \mathbb{Z} y solo cabe que sea una función constante. Así, existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que

$$F(t + 1) = F(t) + d$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Obsérvese que, como F es estrictamente creciente, solo tiene sentido $d > 0$. Supongamos que $d \geq 2$. Puesto que F es continua, en el intervalo $[t, t + 1]$ alcanza todos los valores entre $F(t)$ y $F(t) + d$; en particular, existe $\bar{t} \in (t, t + 1)$ tal que $F(\bar{t}) = F(t) + 1$. Entonces,

$$f(\Pi(\bar{t})) = \Pi(F(\bar{t})) = \Pi(F(t) + 1) = \Pi(F(t)) = f(\Pi(t))$$

cuando $\Pi(\bar{t}) \neq \Pi(t)$, lo que supone una contradicción con el hecho de que f sea un homeomorfismo. Concluimos entonces que $d = 1$, y en consecuencia es inmediato que $F(t + k) = F(t) + k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, como

$$F(t) = F(t - 1 + 1) = F(t - 1) + 1,$$

se tiene que

$$F(t - 1) = F(t) - 1$$

de lo que sigue el resultado para todo $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Queremos probar que F^n es un levantamiento de f^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es cierto por ser F levantamiento de f . Supongamos el resultado cierto hasta $n - 1$. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$f^n(\Pi(t)) = f(f^{n-1}(\Pi(t))) = f(\Pi(F^{n-1}(t))) = \Pi(F(F^{n-1}(t))) = \Pi(F^n(t)),$$

Por inducción, concluimos que F^n es un levantamiento de f^n .

(d) Tomamos $k \in \mathbb{Z}$ y definimos $\tilde{F} = F(t) + k$. Como F es un levantamiento de F , se tiene que

$$\Pi(\tilde{F}(t)) = \Pi(F(t) + k) = \Pi(F(t)) = f(\Pi(t))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, \tilde{F} es un levantamiento de f .

(e) Para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\Pi(\hat{F}(t)) = f(\Pi(t)) = \Pi(F(t)).$$

Por tanto, existe $k_t \in \mathbb{Z}$ tal que $\hat{F}(t) = F(t) + k_t$. Como $k(t) = \hat{F}(t) - F(t)$ es una función continua, ha de ser una función constante. \square

2.2.2. Número de rotación

A continuación, demostraremos un teorema que nos permitirá establecer el concepto de número de rotación. Las propiedades establecidas en la Proposición 2.3 serán utilizadas en la argumentación. Para la demostración del teorema nos hemos basado principalmente en [6], y en menor medida en [4] y [11].

Para demostrar el teorema, probaremos previamente una proposición y un lema sobre sucesiones acotadas de números reales. En primer lugar, recordamos la noción de límite inferior de una sucesión de números reales.

Definición 2.5. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. El *límite inferior* de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene dado por

$$\liminf a_n = \sup\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Observación 2.4. Así como una sucesión de números reales puede no tener límite, siempre podemos definir su límite inferior, ya que los supremos e ínfimos de conjuntos de números reales están bien definidos, pudiendo ser números reales o $\pm\infty$. En particular, si consideramos sucesiones acotadas, veamos que el límite inferior debe ser un número real. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces existen $M, N > 0$ tales que

$$M < a_n < N$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M es una cota inferior de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que

$$\liminf a_n = \sup\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\} \geq \inf\{a_k : k \geq 1\} = \inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\} \geq M.$$

Es decir, $\liminf a_n \geq M$ para cierto $M \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $\liminf a_n \neq -\infty$. De la misma forma,

para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\inf\{a_k : k \geq n\} \leq N,$$

ya que $a_n \leq N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, N es una cota superior del conjunto

$$\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto, por definición de límite inferior,

$$\liminf a_n = \sup\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\} \leq N,$$

y en definitiva, $\liminf a_n \neq \infty$. En consecuencia, $\liminf a_n \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.4. *Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$a = \liminf a_n \in \mathbb{R}$$

Entonces, se verifica que

a) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que*

$$a_n > a - \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$.

b) *Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n > N$ de forma que*

$$a_n < a + \varepsilon.$$

Demostración. (a) Sea $\varepsilon > 0$ y definimos

$$A_n = \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

Por definición de supremo, a es la menor de las cotas superiores del conjunto $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En consecuencia, probaremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$a - \varepsilon < A_{n_0}.$$

Supongamos que no existe n_0 en estas condiciones, es decir, supongamos que

$$A_n < a - \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $a - \varepsilon < a$ sería una cota superior para el conjunto $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ menor que a , lo cual contradice la definición de supremo. Ahora bien, por definición de A_{n_0}

tenemos que

$$A_{n_0} = \inf\{a_n : n \geq n_0\} \leq a_n$$

para todo $n \geq n_0$. En definitiva,

$$a - \varepsilon < A_{n_0} \leq a_n$$

para todo $n \geq n_0$.

(b) Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ cualesquiera. Por definición de límite inferior, a es cota superior del conjunto $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. En particular,

$$A_N = \inf\{a_k : k \geq N\} \leq a.$$

Supongamos que

$$a_n \geq a + \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Entonces, $a + \varepsilon$ sería una cota inferior del conjunto $\{a_n : n \geq N\}$. Como A_N es el ínfimo de este conjunto, es la mayor de las cotas inferiores. Así, tendremos que

$$a + \varepsilon \leq A_N \leq a.$$

Es decir, llegamos a contradicción. Por lo tanto, existe $n > N$ de forma que $a_n < a + \varepsilon$. \square

Utilizaremos la proposición anterior para la demostración del siguiente lema.

Lema 2.5. *Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$A = \liminf \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_{m+n} \leq a_n + a_m + L$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Demostración. Probaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A.$$

Como consecuencia de la Proposición 2.4, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_n}{n} > A - \varepsilon \tag{2.4}$$

para todo $n \geq n_1$. También como consecuencia de la Proposición 2.4, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, con $n_2 > n_1$

tal que

$$\frac{a_{n_2}}{n_2} < A + \frac{\varepsilon}{6}. \quad (2.5)$$

De hecho, podremos suponer n_2 tan grande como queramos. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_2$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = kn_2 + r$, con $0 \leq r < n_2$. Entonces, por hipótesis,

$$a_{kn_2} \leq a_{(k-1)n_2} + a_{n_2} + L \leq a_{(k-2)n_2} + 2a_{n_2} + 2L \leq \dots \leq ka_{n_2} + (k-1)L. \quad (2.6)$$

Si $r = 0$, tomando n_2 suficientemente grande y utilizando (2.6),

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n_2k}}{n_2k} \leq \frac{ka_{n_2} + kL}{n_2k} = \frac{a_{n_2}}{n_2} + \frac{L}{n_2} \leq A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = A + \varepsilon. \quad (2.7)$$

Si $r > 0$, utilizando de nuevo la hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y (2.6),

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n_2k+r}}{n_2k+r} \leq \frac{a_{n_2k} + a_r + L}{n_2k+r} \leq \frac{ka_{n_2}}{n_2k+r} + \frac{a_r}{n_2k+r} + \frac{kL}{n_2k+r}. \quad (2.8)$$

A continuación, acotaremos los tres últimos sumandos obtenidos en la desigualdad anterior. Por un lado, por (2.5) se tiene que

$$\frac{ka_{n_2}}{n_2k+r} = \frac{n_2k}{n_2k+r} \frac{a_{n_2}}{n_2} \leq \frac{n_2k}{n_2k+r} \left(A + \frac{\varepsilon}{6} \right).$$

Además, como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_2k}{n_2k+r} \left(A + \frac{\varepsilon}{6} \right) = A + \frac{\varepsilon}{6},$$

existe $n_3 > n_2$ tal que, para cada $n > n_3$, ya que como $n = kn_2 + r$ suponer n suficientemente grande es equivalente a suponer k suficientemente grande, se tiene

$$\frac{n_2k}{n_2k+r} \left(A + \frac{\varepsilon}{6} \right) \leq A + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = A + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, observamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kL}{n_2k+r} = \frac{L}{n_2}.$$

En consecuencia, si tomamos n_2 tal que $\frac{L}{n_2} < \frac{\varepsilon}{6}$ y n_3 suficientemente grande, se verifica que

$$\frac{(k+1)L}{n_2k+r} < \frac{L}{n_2} + \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.10)$$

Por último, teniendo en cuenta que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_2k+r} = 0,$$

se tiene que, tomando $n_3 > n_2$ suficientemente grande, para cada $n > n_3$ se verifica que

$$\frac{a_r}{n_2k+r} \leq \frac{\max\{|a_r| : r \in \{1, \dots, n_2-1\}\}}{n_2k+r} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.11)$$

Aplicando las acotaciones (2.9), (2.10) y (2.11) a la desigualdad (2.8) se comprueba que, para cada $n > n_3$,

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{ka_{n_2}}{n_2k+r} + \frac{a_r}{n_2k+r} + \frac{(k+1)L}{n_2k+r} \leq A + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = A + \varepsilon. \quad (2.12)$$

Por las desigualdades (2.4), (2.7) y (2.12) se concluye que $\{\frac{a_n}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A . \square

Una vez demostrado este lema, estamos en condiciones de probar el teorema que nos permitirá definir el número de rotación.

Teorema 2.6. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y F un levantamiento de f . Entonces,*

(a) *Para cada $t \in \mathbb{R}$, el límite dado por*

$$\rho(F, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n}$$

existe y es un número real: $\rho(F, t) \in \mathbb{R}$.

(b) *$\rho(F, t) = \rho(F, s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

(c) *Sean F_1 y F_2 dos levantamientos de f tales que $F_1(t) = F_2(t) + k$, con $k \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$,*

$$\rho(F_1, t) = \rho(F_2, t) + k$$

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$, definimos las sucesiones $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dadas por $t_n = F^n(t)$, $a_n := t_n - t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $k_n := \lfloor a_n \rfloor$. Entonces, es claro que

$$t_n - t - k_n = a_n - \lfloor a_n \rfloor \geq 0,$$

esto es,

$$-(t_n - t - k_n) \leq 0. \quad (2.13)$$

Tomamos $n, m \in \mathbb{N}$. Aplicando la Proposición 2.3 tenemos que, como $k_n \in \mathbb{Z}$,

$$F^m(t + k_n) - (t + k_n) = F^m(t) + k_n - (t + k_n) = t_m - t = a_m. \quad (2.14)$$

Además,

$$t_n - t - k_n = a_n - \lfloor a_n \rfloor \leq 1$$

y, de forma equivalente,

$$t_n \leq (t + k_n + 1).$$

Por la Proposición 2.3, sabemos que F es creciente, y por tanto F^m también lo es, de donde

$$\begin{aligned} F^m(t_n) &\leq F^m(t + k_n + 1) = F^m(t + k_n) + 1, \\ F^m(t_n) - F^m(t + k_n) &\leq 1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aplicando la igualdad (2.14) y la definición de a_n , se tiene que

$$\begin{aligned} a_{m+n} &= t_{m+n} - t \\ &= F^m(t_n) - t + (t_n - t_n) + (F^m(t + k_n) - F^m(t + k_n)) + (k_n - k_n) + (t - t) \\ &= (F^m(t + k_n) - (t + k_n)) + (t_n - t) - (t_n - t - k_n) + F^m(t_n) - F^m(t + k_n) \\ &= a_m + a_n - (t_n - t - k_n) + F^m(t_n) - F^m(t + k_n). \end{aligned}$$

Además, utilizando las desigualdades (2.13) y (2.15), observamos que

$$a_{m+n} = a_m + a_n - (t_n - t - k_n) + F^m(t_n) - F^m(t + k_n) \leq a_m + a_n + 1.$$

Se trata de la hipótesis del Lema 2.5, con $L = 1$. Ahora bien, para aplicar este lema, debemos probar además que el límite inferior de $\{\frac{a_n}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un número real. Notamos que para todo $t \in \mathbb{R}$ existe $r \in \mathbb{Z}$ de forma que

$$t = s + r$$

para cierto $s \in [0, 1]$. Aplicando la Proposición 2.3,

$$F(t) - t = F(t + r) - (t + r) = F(s) + r - s - r = F(s) - s.$$

Como F es una función continua, también lo es la función $\tilde{F} : s \in \mathbb{R} \mapsto \tilde{F}(s) = F(s) - s \in \mathbb{R}$. Además, $[0, 1]$ es un conjunto compacto, de donde \tilde{F} alcanza máximo y mínimo en este intervalo. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} (F^n(t) - t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (F^j(t) - F^{j-1}(t)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (F(t_j) - t_j) \geq \min\{F(s) - s : s \in [0, 1]\}$$

Análogamente, se demuestra que $\frac{a_n}{n} \leq \max\{F(s) - s : s \in [0, 1]\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{\frac{a_n}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, y por la Observación 2.4, sabemos que

$$A = \liminf \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R}.$$

Estamos por tanto en condiciones de aplicar el Lema 2.5. Concluimos que $\{\frac{a_n}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a

un número real, que denotamos $\rho(F, t)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n} = \rho(F, t) \in \mathbb{R}.$$

(b) Sean $t, s \in \mathbb{R}$. Entonces, existen $x, y \in [0, 1]$, $k_t, k_s \in \mathbb{Z}$ de forma que $t = x + k_t \in [0, 1]$, $s = y + k_s \in [0, 1]$. Por lo tanto,

$$\rho(F, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x + k_t) - (x + k_t)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) + k_t - x - k_t}{n} = \rho(F, x).$$

Análogamente, se comprueba que $\rho(F, s) = \rho(F, y)$. Como $x, y \in [0, 1]$, es claro que $|x - y| \leq 1$. Además, por la Proposición 2.3 para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que F^n es un levantamiento de un homomorfismo. Así, aplicando de nuevo la Proposición 2.3, F^n verifica que

$$F^n(1) = F^n(0 + 1) = F^n(0) + 1,$$

de donde $F^n(1) - F^n(0) = 1$. Como F es continua, $[F^n(0), F^n(1)]$ es un intervalo de longitud 1. En consecuencia,

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{1}{n}(F^n(x) - x) - \frac{1}{n}(F^n(y) - y) \right| \leq \frac{1}{n}(|F^n(x) - F^n(y)| + |x - y|) \leq \frac{2}{n}.$$

Finalmente, tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\rho(F, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(y) - y}{n} = \rho(F, s).$$

(c) Consideremos dos levantamientos F_1, F_2 de f tales que $F_1(t) = F_2(t) + k$ para todo $t \in \mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $t \in \mathbb{R}$ se prueba por inducción que

$$F_1^n(t) = F_2^n(t) + nk.$$

Para $n = 1$ es cierto por cómo hemos tomado k . Suponiéndolo cierto para n , se tiene que

$$F_1^{n+1}(t) = F_1(F_1^n(t)) = F_1(F_2^n(t) + nk) = F_1(F_2^n(t)) + nk = F_2(F_2^n(t)) + k + nk = F_2^{n+1}(t) + (n+1)k$$

En consecuencia,

$$\rho(F_1, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_1^n(t) - t}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_2^n(t) - t + nk}{n} = \rho(F_2, t) + k,$$

es decir, $\rho(F_1, t) = \rho(F_2, t) + k$. □

Definición 2.6. Sea f un homeomorfismo que preserva orientación, F un levantamiento de f y $t \in \mathbb{R}$. Por el teorema anterior,

$$\rho(f) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n} \right) \pmod{1}$$

está bien definido y se denomina *número de rotación de f* .

Observación 2.5. Al principio del capítulo, observamos que los levantamientos de un homeomorfismo no son únicos. Sin embargo, para todo homeomorfismo f que preserva orientación podemos considerar un levantamiento F que verifique que

$$\rho(F, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n} = \rho(f).$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Para escoger F , basta considerar cualquier levantamiento \tilde{F} , que por el Teorema 2.6 verificará que $\rho(\tilde{F}, t) = \rho(f) + k$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, y definir $F(t) := \tilde{F}(t) - k$. Por la Proposición 2.3, F también es un levantamiento de f . Además, de nuevo por el Teorema 2.6,

$$\rho(F, t) = \rho(\tilde{F}, t) - k = \rho(f) + k - k = \rho(f).$$

De hecho, a partir de lo anterior se deduce que el levantamiento F tal que $\rho(F, t) = \rho(f)$ es único para cada homeomorfismo f . La siguiente proposición caracteriza parcialmente el levantamiento F que verifica que $\rho(F, t) = \rho(f)$ para cada homeomorfismo f .

Proposición 2.7. Sea f un homeomorfismo que preserva la orientación y F el único levantamiento de f de forma que $0 \leq F(0) < 1$. Entonces,

$$\rho(F, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n} \in [0, 1]$$

Demostración. Para empezar, probaremos que

$$0 \leq F^n(0) < n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ se cumple por hipótesis. Supongamos el resultado cierto para $n = k$, es decir

$$0 \leq F^k(0) < k.$$

Por la Proposición 2.3, sabemos que F es una función monótona. Por lo tanto,

$$0 \leq F(0) \leq F^{k+1}(0) \leq F(k) = F(0 + k) = F(0) + k < k + 1,$$

es decir $0 \leq F^{k+1}(0) < k + 1$. En consecuencia, hemos probado que

$$0 \leq \frac{F^n(0)}{n} < 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n} \in [0, 1],$$

de donde $\rho(F, 0) \in [0, 1]$. □

Observación 2.6. Es inmediato comprobar que, dado un homomorfismo f que preserva orientación, para cada $m \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\rho(f^m) = (m\rho(f)) \pmod{1}.$$

Tomamos $t \in \mathbb{N}$ y un levantamiento F tal que $\rho(F, t) = \rho(f)$ (que existe, por la Observación 2.5). Así,

$$\frac{\rho(F^m, t)}{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nm}(t) - t}{nm} = \rho(F, t).$$

y por lo tanto, $\rho(F^m, t) = m\rho(F, t) = m\rho(f)$ y en definitiva, $\rho(f^m) = (m\rho(f)) \pmod{1}$.

2.2.3. Número de rotación racional

Una vez hemos definido el concepto de número de rotación para homeomorfismos y establecido algunas propiedades básicas, separamos el estudio de estas aplicaciones en dos clases, según su número de rotación sea racional o irracional.

A continuación, demostraremos un teorema sobre homeomorfismos con número de rotación racional, para el cual hemos utilizado como referencias [4], [10] y [11]. Comenzamos con un lema que utilizaremos en la demostración de este teorema.

Lema 2.8. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y $\rho(f)$ su número de rotación. Sea F el levantamiento de f que verifica que $\rho(f) = \rho(F, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe un punto de periodo q de f . Entonces, existen $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ de manera que*

$$F^{jq}(t) = t + jp.$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $x \in \mathbb{S}^1$ es un punto de periodo q , con $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, esto es, $f^q(x) = x$. Consideramos $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = \exp(2\pi it)$, es decir, $\Pi(t) = x$. Por la Observación 2.5, podemos tomar F un levantamiento de f tal que

$$\rho(F, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n} = \rho(f).$$

Observamos que, como x es un punto de periodo q de f ,

$$\begin{aligned} \Pi(F^q(t)) &= (\Pi \circ F)(F^{q-1}(t)) = (f \circ \Pi)(F^{q-1}(t)) = f(\Pi \circ F)(F^{q-2}(t)) = \\ &= (f^2 \circ \Pi)(F^{q-2}(t)) = \dots = f^q(\Pi(t)) = f^q(x) = x = \Pi(t). \end{aligned}$$

Como $\Pi(t) = \Pi(F^q(t))$, existe $p \in \mathbb{Z}$ de forma que

$$F^q(t) = t + p. \quad (2.16)$$

Veamos que, además, para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $F^{jq}(t) = t + jp$. Lo probaremos por inducción. El caso $j = 1$ es la ecuación (2.16). Supongamos el resultado cierto hasta $j-1$. Entonces, aplicando la Proposición 2.3 y la ecuación (2.16),

$$F^{jq}(t) = F^q(F^{(j-1)q}(t)) = F^q(t + (j-1)p) = F^q(t) + (j-1)p = t + p + (j-1)p = t + jp,$$

y por tanto se verifica que $F^{jq}(t) = t + jp$. \square

Teorema 2.9. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y $\rho(f)$ su número de rotación. Entonces, $\rho(f) = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ si y solo si f tiene un punto de periodo q .*

Demostración. Supongamos que f tiene un punto periódico de periodo q . Tomamos F el levantamiento de F que verifica que $\rho(F, t) = \rho(f)$. Por el Lema 2.8, existen $t \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}$ de manera que $F^{jq}(t) = t + jp$. En consecuencia, el número de rotación de f resulta

$$\rho(f) = \rho(F, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^m(t) - t}{m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F^{jq}(t) - t}{jq} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t + jp - t}{jq} = \frac{p}{q},$$

es decir, $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Por otro lado, supongamos que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. De nuevo, consideramos $t \in \mathbb{R}$ y F un levantamiento que verifique que $\rho(f) = \rho(F, t)$. Supongamos que f no tiene puntos periódicos. Comenzaremos estudiando el caso $\rho(f) = 0$, esto es, supongamos que

$$\rho(F, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t) - t}{n} = \rho(f) = 0.$$

Sabemos que f no tiene puntos fijos, pues en particular serían puntos periódicos. En consecuencia, F tampoco tiene puntos fijos. En efecto, si $t \in \mathbb{R}$ fuera un punto fijo de F , entonces denotando $x = \Pi(t)$ tendríamos que

$$f(x) = f(\Pi(t)) = \Pi(F(t)) = \Pi(t) = x,$$

y por tanto f tendría un punto fijo. Como F no tiene puntos fijos, $F(t) - t \neq 0$ y, en particular $F(0) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $F(0) > 0$ (en el caso contrario, la demostración es análoga). Por ser F una función creciente, se sigue que $F^{n+1}(0) > F^n(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $F^n(0) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $s \in \mathbb{R}$ de manera que

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(0).$$

Como F es una función continua, tenemos que

$$F(s) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (F^n(0))\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(0) = s,$$

es decir, s es un punto fijo F , y llegamos entonces a contradicción, pues hemos justificado que F no puede tener puntos fijos. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ de manera que $F^k(0) > 1$. Veamos por inducción que entonces $F^{km}(0) > m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para $m = 1$ es precisamente $F^k(0) > 1$, y si lo suponemos cierto para m observamos que

$$F^{(k+1)m}(0) = F(F^{km}(0)) > F(m) = F(0 + m) = F(0) + m > m + 1,$$

donde hemos utilizado que $m \in \mathbb{Z}$ y las propiedades de F dadas por la Proposición 2.3. Tenemos entonces que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^{km}(0)}{m} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m} = 1,$$

y por la Observación 2.6

$$\rho(F, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n} \geq \frac{1}{k},$$

pero habíamos supuesto $\rho(f) = \rho(F, t) = 0$, y llegamos por tanto a una contradicción, que proviene de suponer que f no tiene puntos fijos. Hemos probado entonces que si $\rho(f) = 0$, entonces f presenta un punto fijo.

Volvamos al caso general, suponiendo que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. De la Observación 2.6, tenemos que

$$\rho(f^q) = q\rho(f) = p \pmod{1} = 0.$$

Concluimos que f^q tiene un punto fijo o, equivalentemente, que f tiene un punto periódico de periodo q . \square

Corolario 2.10. *Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y $\rho(f)$ su número de rotación. Sea F el levantamiento de f que verifica que $\rho(f) = \rho(F, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, $\rho(f) = \frac{p}{q}$, si y solo si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $F^{jq}(t) = t + jp$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $\rho(f) = \frac{p}{q}$. Por el Teorema 2.9, f tiene un punto periódico de

Periodo q . Además, por el Lema 2.8, existen $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$ de manera que

$$F^{jq}(t) = t + j\tilde{p}.$$

Como F es el levantamiento de f que verifica que $\rho(F, t) = \rho(f)$, es claro que

$$\rho(F, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^m(t) - t}{m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F^{jq}(t) - t}{jq} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t + j\tilde{p} - t}{jq} = \frac{\tilde{p}}{q} = \frac{p}{q},$$

de donde $\tilde{p} = p$, y por tanto $F^{jq}(t) = t + jp$. Recíprocamente, supongamos que existe $t \in \mathbb{R}$ de forma que $F^{jq}(t) = t + jp$. Entonces, tal y como vimos en el Teorema 2.9,

$$\rho(F, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^m(t) - t}{m} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F^{jq}(t) - t}{jq} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t + jp - t}{jq} = \frac{p}{q},$$

esto es, $\rho(f) = \rho(F, t) = \frac{p}{q}$. □

Observación 2.7. Del corolario anterior es inmediato observar que, en particular, $\rho(f) = \frac{p}{q}$ si y solo si existe $s \in [0, 1)$ de forma que

$$F^{jq}(s) = s + jp.$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

En efecto, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{Z}$ de forma que $s = t + k \in [0, 1)$. De esta forma, utilizando las propiedades de la Proposición 2.3 y suponiendo que $F^{jq}(t) = t + jp$ se tiene que

$$F^{jq}(s + k) = F^{jq}(s) + k = s + k + jp,$$

esto es,

$$F^{jq}(s) = s + jp,$$

con lo que s es el valor buscado en $[0, 1)$.

Ejemplo 2.1 Sea f_α la rotación rígida de ángulo $2\pi\alpha$, con $\alpha \in [0, 1)$,

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(\exp(2\pi t)) = \exp(2\pi(t + \alpha)).$$

Hemos visto anteriormente que $F_\alpha(t) = t + \alpha$ es un levantamiento de f . Además,

$$F_\alpha^n(t) = t + n\alpha$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, como probaremos por inducción. Para $n = 1$ es cierto por definición de F y

suponiendo el resultado cierto hasta n , tenemos que

$$F_\alpha^{n+1}(t) = F_\alpha(F_\alpha^n(t)) = F_\alpha(t + n\alpha) = t + n\alpha + \alpha = t + (n+1)\alpha.$$

Por tanto,

$$\rho(F_\alpha, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_\alpha^n(t) - t}{n} = \frac{t + n\alpha - t}{n} = \alpha.$$

Como $\alpha \in [0, 1)$, $\rho(F_\alpha, t) \pmod{1} = \alpha \pmod{1} = \alpha$. Así, el número de rotación de f_α es precisamente $\rho(f_\alpha) = \alpha$. Consideremos, por ejemplo, una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, es decir, estamos tomando $\alpha = \frac{1}{4}$ (ver Figura 2.4). Entonces, para cada $x = \exp(2\pi it) \in \mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f^4(\exp(2\pi it)) = f^3\left(2\pi it + \frac{\pi i}{2}\right) = f^2(2\pi it + \pi i) = f\left(2\pi it + \frac{3\pi i}{2}\right) \\ &= \exp(2\pi it + 2\pi i) = \exp(2\pi it) = x. \end{aligned}$$

En este caso, todos los puntos son por tanto de periodo 4. De hecho, es inmediato comprobar que si $\alpha \in [0, 1)$ es racional, todos los puntos de \mathbb{S}^1 son periódicos por f_α . Por el contrario, si consideráramos una rotación de ángulo $2\pi\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ningún punto sería periódico. Durante la siguiente sección, veremos qué ocurre en el caso de número de rotación irracional.

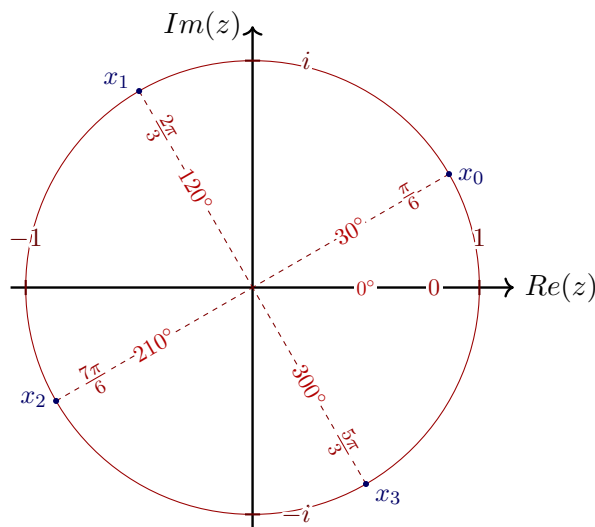


Figura 2.4: Representación de una órbita de la rotación rígida de ángulo $\pi/2$, con condición inicial $x_0 = \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)$.

2.2.4. Número de rotación irracional

A continuación, estudiaremos el comportamiento de los homeomorfismos para los que el número de rotación es irracional. Como referencias para esta sección hemos utilizado principalmente [6]

y [11] y en menor medida [5] y [10].

En primer lugar, debemos recuperar el concepto de ω -límite introducido en el primer capítulo. Para definir el ω -límite de un punto de \mathbb{S}^1 tenemos que definir una distancia entre los elementos de \mathbb{S}^1 .

Dados $a, b \in \mathbb{S}^1$, parece intuitivo definir la distancia entre ambos puntos como la longitud del arco $[a, b]$, que denotamos $l([a, b])$. Ahora bien, hemos definido $[a, b]$ como el arco que une a con b recorriendo la circunferencia en sentido antihorario. Por tanto, la aplicación \tilde{d} dada por $\tilde{d}(a, b) = l([a, b])$ no puede ser una distancia, pues no es simétrica: en general, $\tilde{d}(a, b) = l([a, b]) \neq l([b, a]) = \tilde{d}(b, a)$. Para resolver este problema, definimos la siguiente aplicación

$$d : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, +\infty)$$

$$(a, b) \mapsto d(a, b) = \min\{l([a, b]), l([b, a])\}.$$

De esta forma, definimos la distancia de a a b como la menor distancia al recorrer la circunferencia de a a b o de b a a . Es inmediato comprobar que $d(a, b) = 0$ si y solo si $a = b$ y $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{S}^1$. Es decir, la aplicación d es una distancia en \mathbb{S}^1 .

Observación 2.8. La distancia d en \mathbb{S}^1 se define a partir de la distancia usual en \mathbb{R} . Tomamos $a = \exp(2\pi it), b = \exp(2\pi is)$ con $t, s \in [0, 1)$. Entonces,

$$d(a, b) = 2\pi \min\{|t - s|, |t + s - 1|\}.$$

En la Figura 2.5 tenemos una comparación entre las distancias d y $d_{\mathbb{R}}$. Es inmediato comprobar

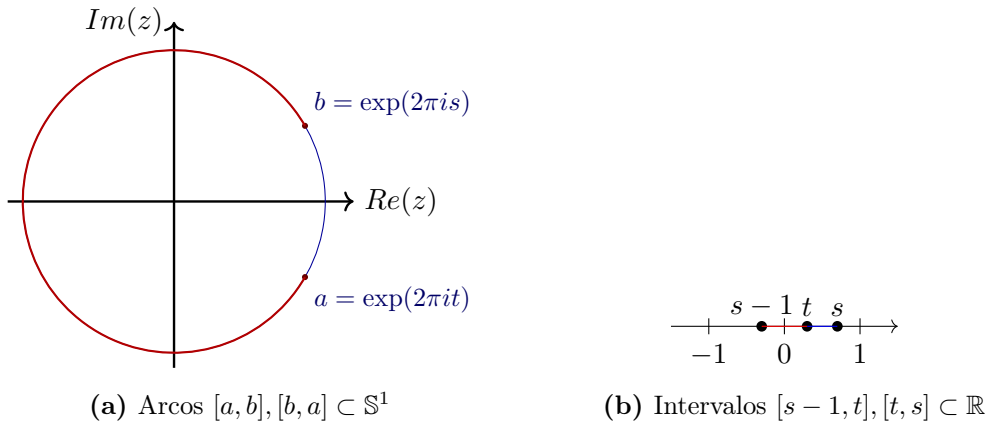


Figura 2.5: Comparación entre la distancia d en \mathbb{S}^1 y la métrica usual $d_{\mathbb{R}}$ en \mathbb{R} .

que, con esta métrica, los arcos abiertos (a, b) son conjuntos abiertos y los arcos cerrados $[a, b]$ son conjuntos cerrados, de forma análoga a los intervalos en \mathbb{R} con la métrica usual. Además, es conocido que en \mathbb{R} con la métrica usual los conjuntos conexos son intervalos. Veamos que en (\mathbb{S}^1, d) los conjuntos conexos son arcos de circunferencia.

Sea A un conjunto conexo, supongamos que no es un arco. Entonces, $A \neq \mathbb{S}^1$, por lo que existe $a \in \mathbb{S}^1 \setminus A$. Además, A no puede ser un conjunto unipuntual, pues sería un arco trivial. Así, dados $x, y \in A$ con $x \neq y$, tenemos que o bien $a \in (x, y)$ o bien $a \in (y, x)$.

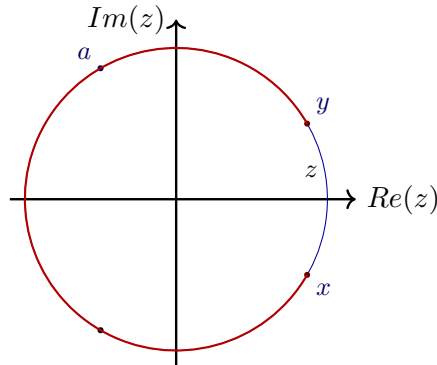


Figura 2.6: Representación de los puntos a, x, y, z en \mathbb{S}^1 .

Supongamos que $a \in (x, y)$, el otro caso sería análogo. Sea $z \in (x, y)$, y supongamos que $z \neq A$. Entonces, $\{A \cap (a, z), A \cap (z, a)\}$ es una partición de A con $(a, z), (z, a)$ abiertos disjuntos. Además, son no vacíos puesto que $y \in (z, a), x \in (a, z)$. Tenemos así una contradicción con el carácter conexo de A y concluimos que $z \in A$ para todo $z \in (x, y)$. Por lo tanto, es claro que A es un arco de circunferencia. Los puntos a, x, y, z están representados en la Figura 2.6.

Utilizaremos este resultado para caracterizar de forma más manejable los conjuntos de Cantor en \mathbb{S}^1 . En el primer capítulo, definimos un conjunto de Cantor en un espacio métrico como cualquier conjunto perfecto, totalmente desconexo y compacto. Ahora bien, en \mathbb{S}^1 , si un conjunto es no vacío, perfecto y denso en ninguna parte, entonces es totalmente desconexo.

En efecto, si $A \subset \mathbb{S}^1$ con $A \neq \emptyset$ es un conjunto perfecto, entonces A contiene más de un punto. Si A no es totalmente desconexo, existe una componente conexa con más de un punto. En consecuencia, existe un arco $[a, b] \subset A$ con $a \neq b$. Entonces, existen $c, d \in \mathbb{S}^1$ con $(c, d) \subset [a, b], c \neq a, d \neq b$ tales que $(c, d) \subset \text{Int}(A) \subset \text{Int}(\overline{A})$. Por tanto, A no es denso en ninguna parte. Concluimos entonces que si A es denso en ninguna parte, entonces es totalmente desconexo.

Una vez hemos definido la distancia y caracterizado los conjuntos de Cantor en \mathbb{S}^1 , estamos en condiciones de estudiar el concepto de ω -límite para homeomorfismos en una circunferencia. En primer lugar, demostramos el siguiente resultado general de propiedades de $\omega(x)$, independientes del homeomorfismo y el punto que estemos considerando.

Proposición 2.11. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo y $x \in \mathbb{S}^1$. Entonces, $\omega(x)$ es no vacío, cerrado e invariante.*

Demostración. En primer lugar, veamos que $\omega(x) \neq \emptyset$. Consideremos $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}^1$. Se trata de una sucesión contenida en un compacto (la propia circunferencia), por lo que contiene una

subsucesión es convergente. Es decir, existen $z \in \mathbb{S}^1$ y una subsucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = z.$$

Por definición, $z \in \omega(x)$ y por tanto, $\omega(x) \neq \emptyset$. A continuación, probaremos que $\omega(x)$ es cerrado. Sabemos que $\omega(x) \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar $z \in \overline{\omega(x)}$. Entonces, existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \omega(x)$ de forma que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a z cuando n tiende a ∞ . Por definición de $\omega(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{m_k^n\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k^n = \infty$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{m_k^n}(x), z_n) = 0.$$

En consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $m_{k(n)}^n \in \{m_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ verificando que

$$m_{k(n)}^n > n$$

y

$$d(f^{m_{k(n)}^n}(x), z_n) < \frac{1}{n}. \quad (2.17)$$

Como $m_{k(n)}^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{k(n)}^n = \infty.$$

Además, utilizando la desigualdad (2.17), la desigualdad triangular y que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a z cuando n tiende a ∞ se tiene que

$$0 \leq d(f^{m_{k(n)}^n}(x), z) \leq d(f^{m_{k(n)}^n}(x), z_n) + d(z_n, z) < \frac{1}{n} + d(z_n, z).$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + d(z_n, z) \right) = 0,$$

tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{m_{k(n)}^n}(x), z) = 0.$$

Así, hemos probado que $z \in \omega(x)$, de donde $\omega(x) = \overline{\omega(x)}$ y por tanto, el conjunto es cerrado. Finalmente, probaremos que $\omega(x)$ es un conjunto invariante. Veremos de forma conjunta que $\omega(x)$ es positiva y negativamente invariante.

Queremos probar que para cada $z \in \omega(x)$, se tiene que $f(z) \in \omega(x)$ y $f^{-1}(z) \in \omega(x)$. Por

definición de ω -límite, existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que n_k tiende a ∞ cuando k tiende a ∞ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^{n_k}(x), z) = 0.$$

Consideremos $y = f^m(x)$ con $m \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Definimos entonces la sucesión $\{\bar{n}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por $\bar{n}_k = n_k + m$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Es claro que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{n}_k = \infty.$$

Además, como f es un homeomorfismo, f^m existe y es continua para todo $m \in \mathbb{Z}$. En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{\bar{n}_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k+m}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^m(f^{n_k}(x)) = f^m(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x)) = f^m(z) = y.$$

Concluimos que $y = f^m(z) \in \omega(x)$. Tomando los casos particulares $m = 1$ y $m = -1$ se tiene que $f(z), f^{-1}(z) \in \omega(x)$ y, por lo tanto, $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$, $f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Así, $\omega(x)$ es un conjunto positivo y negativamente invariante, y en definitiva invariante. \square

A continuación, demostraremos el teorema que caracteriza los posibles ω -límites de los puntos de \mathbb{S}^1 para un homeomorfismo con número de rotación irracional. Antes del teorema necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 2.12. Sean $x \in \mathbb{S}^1$, $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y $\rho(f)$ su número de rotación. Supongamos que $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$ y para todo $y \in \mathbb{S}^1$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$f^{k_0}(y) \in [f^n(x), f^m(x)].$$

Demostración. Fijamos $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$ y denotamos $I = [f^n(x), f^m(x)]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $I_k = f^{-k(n-m)}(I)$. Observamos que I_k también es un arco de circunferencia, en particular,

$$I_k = f^{-k(n-m)}(I) = [f^{-k(n-m)+n}(x), f^{-k(n-m)+m}(x)].$$

Probaremos esta última igualdad por doble contenido. Por un lado, para cada $y \in I_k$, existe $z \in I$ tal que $f^{k(n-m)}(y) = z$. Por lo tanto, $f^{k(n-m)}(y) \in I$. Como f es un homeomorfismo que preserva orientación, $f^{-k(n-m)}$ también lo es. En consecuencia,

$$y = f^{-k(n-m)}(z) \in [f^{-k(n-m)}(f^n(x)), f^{-k(n-m)}(f^m(x))] = [f^{-k(n-m)+n}(x), f^{-k(n-m)+m}(x)].$$

Por otro lado, si tomamos $z \in [f^{-k(n-m)+n}(x), f^{-k(n-m)+m}(x)]$, como f es un homeomorfismo

que preserva orientación, $f^{k(n-m)}$ también lo es, de donde

$$f^{k(n-m)}(z) \in [f^{k(n-m)}(f^{-k(n-m)+n}(x)) = f^{k(n-m)}(f^{-k(n-m)+m}(x))] = [f^n(x), f^m(x)] = I,$$

y por tanto, $z \in f^{-k(n-m)}(I) = I_k$. Observamos además que, para todo k , el extremo derecho del arco I_k coincide con el extremo izquierdo de I_{k+1} . Así, denotamos $I_0 = I$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, el conjunto $\bigcup_{k=0}^N I_k$ también es un arco de circunferencia. En la Figura 2.7 tenemos una representación de la construcción de los arcos I_k en \mathbb{S}^1 .

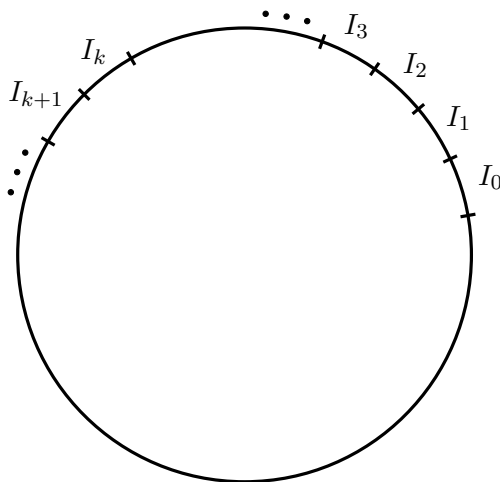


Figura 2.7: Construcción de los arcos I_k en \mathbb{S}^1 .

Veamos que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{S}^1 \subset \bigcup_{k=1}^l I_k$, y por tanto $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{k=1}^l I_k$. Supongamos que no existe l en estas condiciones. Definimos $I_l := \bigcup_{k=0}^l I_k$, tenemos que $\{I_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de arcos que verifica que $I_l = \mathbb{S}^1$ para todo $l \in \mathbb{N}$. La sucesión de longitudes verifica que

$$l(I_l) < l(I_{l+1})$$

para todo $l \in \mathbb{N}$ puesto que $I_l \subsetneq I_{l+1}$. Además,

$$0 \leq l(I_l) < 2\pi = l(\mathbb{S}^1).$$

Es decir, la sucesión de longitudes $\{l(I_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales creciente y contenida en el compacto $[0, 2\pi]$. Por lo tanto, es convergente. En consecuencia, la sucesión de arcos de circunferencia $\{I_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ es convergente a un intervalo $I_0 = [f^n(x), z]$ tal que $l(I_0) \leq 2\pi$. En particular, como el extremo izquierdo está fijado (viene dado por $f^n(x)$ para todo $l \in \mathbb{N}$),

existe un límite para el extremo derecho de los arcos. Esto es, existe $z \in \mathbb{S}^1$ tal que

$$\begin{aligned} z &= \lim_{k \rightarrow \infty} f^{-k(n-m)+m}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(-k+1)(n-m)}(f^m(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n-m)}(f^{-k(n-m)}(f^m(x))) = \\ &= f^{(n-m)}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{-k(n-m)+m}(x)\right) = f^{(n-m)}(z). \end{aligned}$$

donde $q = n - m > 0$ verifica que $f^q(z) = z$. Por tanto, z es un punto periódico de f . Sin embargo, habíamos supuesto que $\rho(f)$ es irracional y por el Teorema 2.9 sabemos que si f presenta un punto periódico, entonces $\rho(f)$ es racional. Llegamos entonces a contradicción. Así, hemos probado que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{k=1}^N I_k = \bigcup_{k=1}^N f^{-k(n-m)}([f^n(x), f^m(x)]).$$

Por lo tanto, para cada $y \in \mathbb{S}^1$, existe $j \in \{1, \dots, N\}$ de forma que $y \in f^{-j(n-m)}(I)$. Denotamos $k_0 = j(n - m)$. Además, se verifica que $k_0 \in \mathbb{N}$ puesto que hemos tomado $n > m$. Finalmente, $f^{k_0}(y) = f^{j(n-m)}(y) \in [f^n(x), f^m(x)]$. \square

Teorema 2.13. *Sea $x \in \mathbb{S}^1$, $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y $\rho(f)$ su número de rotación. Supongamos que $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces, se verifica que*

- (a) $\omega(x) = \omega(y)$ para todo $y \in \mathbb{S}^1$.
- (b) $\omega(x)$ es un conjunto minimal.
- (c) O bien $\omega(x) = \mathbb{S}^1$, o bien $\omega(x)$ es un conjunto de Cantor.

Demostración. (a) Por la Proposición 2.11, sabemos que $\omega(x) \neq \emptyset$. Dado $z \in \omega(x)$, comprobaremos que $z \in \omega(y)$. Por definición, existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ una sucesión de forma que n_k tiende a ∞ cuando k tiende a ∞ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^{n_k}(x), z) = 0. \quad (2.18)$$

Como n_k tiende a ∞ cuando k tiende a ∞ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente (en caso contrario, bastaría con tomar una subsucesión estrictamente creciente de $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$).

Para comprobar que $z \in \omega(y)$, construimos una sucesión $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la siguiente manera. Partimos del intervalo $J_1 = [f^{n_2}(x), f^{n_1}(x)]$. Notamos que, como $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, $n_2 > n_1$, y en general siempre tendremos $n_{k+1} > n_k$. Además, $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, por lo que podemos aplicar el Lema 2.12: existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{l_1}(y) \in J_1 = [f^{n_2}(x), f^{n_1}(x)].$$

Consideramos a continuación el siguiente intervalo, $J_2 = [f^{n_3}(x), f^{n_2}(x)]$. Para obtener l_2 , actuamos en dos etapas. Por un lado, sabemos que $f^{l_1}(y) = y_1$ para cierto $y_1 \in J_1$. Aplicamos el

Lema 2.12 a y_1 y obtenemos $l'_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{l'_2}(y_1) \in J_2.$$

Por tanto, si tomamos $l_2 = l_1 + l'_2$, tenemos que

$$f^{l_2}(y) = f^{l_1+l'_2}(y) = f^{l'_2}(f^{l_1}(y)) = f^{l'_2}(y_1) \in J_2.$$

Es decir, $f^{l_2}(y) \in J_2$. Además, $l_2 = l_1 + l'_2 > l_1$. Iteramos para todo $k \in \mathbb{N}$ y obtenemos una sucesión $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ verificando

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = \infty,$$

porque es una sucesión de números naturales en la que cada término se obtiene sumando un entero positivo al término anterior, así que es claro que diverge. Además,

$$f^{l_k}(y) \in J_k = [f^{n_{k+1}}(x), f^{n_k}(x)]$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ por construcción. En consecuencia, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que o bien

$$d(f^{n_{k+1}}(x), z) < d(f^{l_k}(y), z) < d(f^{n_k}(x), z),$$

o bien

$$d(f^{n_k}(x), z) < d(f^{l_k}(y), z) < d(f^{n_{k+1}}(x), z).$$

En cualquier caso, tomando límite $k \rightarrow \infty$ y utilizando (2.18) se tiene que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} d(f^{l_k}(y), z) = 0.$$

Por definición, $z \in \omega(y)$. Así, hemos probado que $\omega(x) \subset \omega(y)$, y como el otro contenido es análogo, concluimos que $\omega(x) = \omega(y)$.

(b) Veamos que $\omega(x)$ es un conjunto minimal. Por la Proposición 2.11, sabemos que es no vacío, cerrado e invariante. Supongamos que $B \subset \omega(x)$ es un conjunto no vacío, cerrado e invariante. Por ser B no vacío, podemos escoger un $z \in B$. Por otro lado, para cada $y \in \omega(x)$, dado que $\omega(x) = \omega(z)$, se tiene que $y \in \omega(z)$. Por definición, existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ una sucesión de forma que n_k tiende a ∞ cuando k tiende a ∞ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^n(z) = y.$$

Dado que B es invariante, $f^{n_k}(z) \in B$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, por ser B cerrado, concluimos que $y \in B$. Así, tenemos que $\omega(x) \subset B$ y, en definitiva, $\omega(x) = B$. Por tanto, $\omega(x)$ es un conjunto minimal.

(c) Comprobamos que $\omega(x)$ es o bien \mathbb{S}^1 o bien un conjunto de Cantor. Consideremos $\partial\omega(x)$ la frontera de $\omega(x)$. Sabemos que $\partial\omega(x)$ es un conjunto cerrado, por ser una frontera. Por definición,

$$\partial\omega(x) = \overline{\omega(x)} \setminus \text{Int}(\omega(x)) = \omega(x) \setminus \text{Int}(\omega(x)).$$

Supongamos que $\partial\omega(x) = \emptyset$. Entonces,

$$\partial\omega(x) = \omega(x) \setminus \text{Int}(\omega(x)) = \emptyset,$$

es decir $\omega(x) = \text{Int}(\omega(x))$. Por tanto, $\omega(x)$ es un conjunto no vacío, abierto y cerrado a la vez, y así $\omega(x) = \mathbb{S}^1$. Supongamos ahora que $\partial\omega(x) \neq \emptyset$, esto es, $\omega(x) \neq \mathbb{S}^1$. Veamos que $\partial\omega(x)$ es un conjunto invariante. Como $\partial\omega(x) \neq \emptyset$, podemos tomar $z \in \partial\omega(x)$, verificando

$$z \in \overline{\omega(x)} \cap \overline{\mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)} = \omega(x) \cap \overline{\mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)}.$$

En particular, $z \in \overline{\mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)}$, por lo que existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)$ una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Por ser f continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z).$$

Como $\omega(x)$ es positivamente invariante, $f(z) \in \omega(x)$. Ahora bien, $\omega(x)$ también es negativamente invariante, por lo que $f(z_n) \notin \omega(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si existiera $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(z_n) \in \omega(x)$, se verificaría que, por ser $\omega(x)$ negativamente invariante,

$$f^{-1}(f(z_n)) = z_n \in \omega(x),$$

lo cual es una contradicción con $z_n \in \mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)$. Así, necesariamente $f(z_n) \in \mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $f(z) \in \overline{\mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)}$ y finalmente

$$f(z) \in \omega(x) \cap \overline{\mathbb{S}^1 \setminus \omega(x)} = \partial\omega(x).$$

Hemos probado que $f(z) \in \partial\omega(x)$, es decir, $\partial\omega(x)$ es positivamente invariante. Probar que además es negativamente invariante es análogo ya que f es un homeomorfismo, basta intercambiar f y f^{-1} en la demostración anterior. Así, concluimos que $\partial\omega(x)$ es un conjunto invariante.

Como $\partial\omega(x)$ es un subconjunto cerrado e invariante de $\omega(x)$ y $\omega(x)$ es un conjunto minimal, concluimos que o bien $\partial\omega(x) = \emptyset$, o bien $\partial\omega(x) = \omega(x)$. Estamos estudiando el caso $\partial\omega(x) \neq \emptyset$, por lo que $\partial\omega(x) = \omega(x)$. Entonces,

$$\text{Int}(\overline{\omega(x)}) = \text{Int}(\omega(x)) = \omega(x) \setminus \partial\omega(x) = \omega(x) \setminus \omega(x) = \emptyset.$$

Es decir, $\omega(x)$ es denso en ninguna parte. Veamos que, además, se trata de un conjunto de Cantor. Por un lado, comprobamos que $\omega(x)$ es perfecto. Ya sabemos que es cerrado, así que solo debemos probar que todos sus puntos son de acumulación. Sea $z \in \omega(x)$. Por el apartado (a), sabemos que $\omega(x) = \omega(z)$. Así, existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ una sucesión tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = z.$$

Como $\rho(f)$ es irracional, por el Teorema 2.9 no existen puntos periódicos, por lo que $f^{n_k}(z) \neq z$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, z es un punto de acumulación de $\omega(x)$, y $\omega(x)$ es perfecto. Es decir, hemos probado que, en el caso $\omega(x) = \partial\omega(x)$, $\omega(x)$ es un conjunto no vacío, denso en ninguna parte y perfecto. Por la Observación 2.8, tenemos que $\omega(x)$ es totalmente desconexo.

Finalmente, sabemos que para demostrar que $\omega(x) \subset \mathbb{S}^1$ es un conjunto de Cantor es necesario comprobar que es compacto, pero esta propiedad es inmediata ya que $\omega(x)$ es cerrado y está contenido en \mathbb{S}^1 , un conjunto compacto. En definitiva, hemos obtenido que o bien $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ o bien $\omega(x)$ es un conjunto no vacío, compacto, perfecto y denso en ninguna parte, esto es, un conjunto de Cantor. \square

Ejemplo 2.2 De nuevo, consideremos el ejemplo más sencillo de homeomorfismo de una circunferencia, que es la rotación rígida de ángulo $2\pi\alpha$, con $\alpha \in [0, 1)$:

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(\exp(2\pi t)) = \exp(2\pi(t + \alpha)).$$

Sabemos que su número de rotación es $\rho(f_\alpha) = \alpha$. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y veamos que $\omega(x) = \mathbb{S}^1$. Dado $x \in \mathbb{S}^1$, probaremos que la órbita positiva de x por f_α , dada por

$$O^+(x) = \{f_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

es un conjunto denso en \mathbb{S}^1 . Es decir, dado $z \in \mathbb{S}^1$, queremos probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que

$$d(f_\alpha^n(x), z) < \varepsilon.$$

Como f_α no tiene puntos periódicos, $O^+(x)$ es un conjunto infinito; sin embargo, \mathbb{S}^1 tiene longitud finita. Sea $\varepsilon > 0$, consideramos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq \frac{2\pi}{\varepsilon} + 1$ y supongamos que existe $A = \{x_1, \dots, x_k\} \subset O^+(x)$ un conjunto de k elementos de forma que

$$d(x_i, x_j) > \varepsilon$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$ con $i \neq j$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los puntos

$\{x_1, \dots, x_k\}$ están ordenados en la circunferencia, de forma que para cada $i \in \{2, \dots, k-1\}$ el elemento x_i pertenece al arco (x_{i-1}, x_{i+1}) , y además $x_1 \in (x_k, x_2)$, $x_k \in (x_{k-1}, x_1)$. De esta forma, $[x_1, x_k]$ es un arco de circunferencia. Recordemos que, por definición de la distancia d , se tiene que

$$d(a, b) = \min\{l([a, b]), l([b, a])\} \geq l([a, b])$$

para todo $a, b \in \mathbb{S}^1$. Así, la longitud del arco $[x_1, x_k]$ verifica

$$l([x_1, x_k]) = \sum_{i=1}^{k-1} l([x_i, x_{i+1}]) \geq \sum_{i=1}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) > (k-1)\varepsilon \geq \frac{2\pi}{\varepsilon}\varepsilon > 2\pi. \quad (2.19)$$

Llegamos entonces a una contradicción, pues tenemos un arco de la circunferencia unidad de longitud mayor que 2π . Denotamos A_k el conjunto formado por los k primeros elementos de la órbita de positiva de x por f_α , esto es

$$A_k = \{f_\alpha^n(x) : n \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Por (2.19), existen $m, n \in \{1, \dots, k\}$, con $m \neq n$ y

$$d(f_\alpha^m(x), f_\alpha^n(x)) < \varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad, supondremos $m > n$. Por otro lado, observamos que las rotaciones rígidas preservan distancias. Dados $a, b \in \mathbb{S}^1$, con $a = \exp(2\pi it)$, $b = \exp(2\pi is)$, $s, t \in [0, 1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f_\alpha(a), f_\alpha(b)) &= d(\exp(2\pi i(t + \alpha)), \exp(2\pi i(s + \alpha))) \\ &= 2\pi \min\{|(t + \alpha) - (s + \alpha)|, |(t + \alpha) - (s + \alpha - 1)|\} \\ &= 2\pi \min\{|t - s|, |t + s - 1|\} \\ &= d(a, b). \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que, por tanto, el homomorfismo f_α^n también preserva distancias, pues se trata de la rotación rígida de ángulo $n\alpha$, como probaremos por inducción. Para $n = 1$ es obvio, y suponiendo el resultado cierto hasta n y comprobamos que, para cada $x = \exp(2\pi it) \in \mathbb{S}^1$,

$$f_\alpha^{n+1}(x) = f_\alpha(f_\alpha^n(x)) = f_\alpha \exp(2\pi i(t + n\alpha)) = \exp(2\pi i(t + n\alpha + \alpha)) = \exp(2\pi i(t + (n+1)\alpha)).$$

Como f_α^n es una rotación rígida,

$$d(f_\alpha^m(x), f_\alpha^n(x)) = d(f_\alpha^{(m-n)}(x), x) < \varepsilon.$$

Además, veamos que $d(f_\alpha^{(m-n)}(x), x) = d(f_\alpha^{(m-n)}(y), y)$ para todo $y \in \mathbb{S}^1$. En efecto, supongamos

que $x = \exp(2\pi it)$, $y = \exp(2\pi is)$, con $s, t \in [0, 1]$. Consideramos f_β la rotación rígida de ángulo $2\pi(s - t)$. Entonces,

$$f_\beta(x) = \exp(2\pi i(t + \beta)) = \exp(2\pi i(t + (s - t))) = \exp(2\pi is) = y.$$

Por lo tanto,

$$f_\alpha^{(m-n)}(y) = f_\alpha^{(m-n)}(f_\beta(x)) = \exp(2\pi i(t + \beta + (m - n)\alpha)) = f_\beta(f_\alpha^{(m-n)}(x)).$$

Como f_β es una rotación rígida y por tanto preserva distancias,

$$d(f_\alpha^{(m-n)}(y), y) = d(f_\alpha^{(m-n)}(f_\beta(x)), f_\beta(x)) = d(f_\beta(f_\alpha^{(m-n)}(x)), f_\beta(x)) = d(f_\alpha^{(m-n)}(x), x) \quad (2.20)$$

En el Ejemplo 2.1, demostramos que el número de rotación de f_α es $\rho(f_\alpha) = \alpha$. Por la Observación 2.6, sabemos que $\rho_0 = \rho(f_\alpha^{(m-n)}) = ((m - n)\alpha) \pmod{1}$. Así, se verifica (ver Figura 2.8)

$$d(f_\alpha^{(m-n)}(x), x) = 2\pi \min\{\rho_0, 1 - \rho_0\}.$$

Denotamos $r = 2\pi \min\{\rho_0, (1 - \rho_0)\}$. Por la ecuación (2.20),

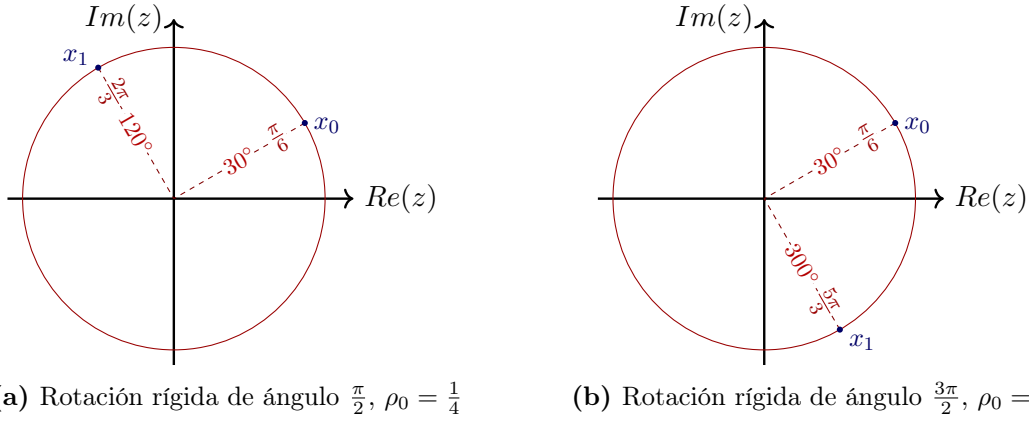


Figura 2.8: En la rotación rígida de ángulo $\frac{\pi}{2}$, la distancia entre x_0 y x_1 es $\frac{\pi}{2} = 2\pi\frac{1}{4} = 2\pi\rho_0$ porque tenemos una rotación de ángulo menor que π , y por tanto un número de rotación menor que $\frac{1}{2}$. Por otro lado, en la rotación rígida de ángulo $\frac{3\pi}{2}$, tenemos que la distancia entre x_0 y x_1 es $\frac{\pi}{2} = 2\pi\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 2\pi(1 - \rho_0)$, pues tenemos una rotación de ángulo mayor que π , equivalentemente, un número de rotación mayor que $\frac{1}{2}$.

$$d(f_\alpha^{(m-n)}(y), y) = d(f_\alpha^{(m-n)}(x), x) = r < \varepsilon$$

para todo $y \in \mathbb{S}^1$. Recordemos que $k > \frac{2\pi}{\varepsilon} + 1$. El conjunto

$$B_k = \{(f_\alpha^{(m-n)})^k(x) : k \in \{1, \dots, N\}\} \subset O^+(x)$$

divide la circunferencia en k arcos de longitud menor que ε . En la Figura 2.9 tenemos una representación del conjunto B_k .

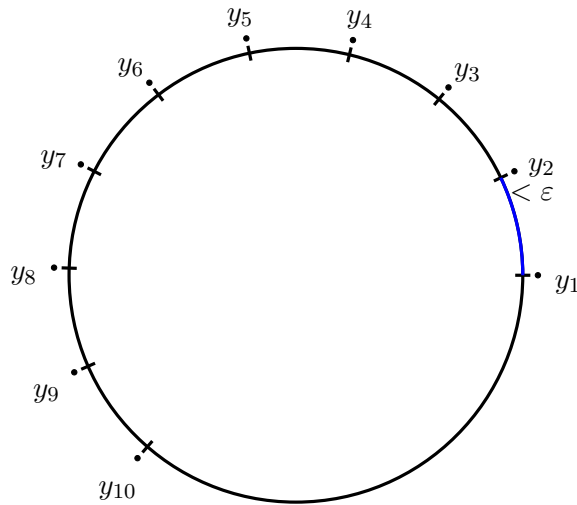


Figura 2.9: Suponemos $k > 10$ y representamos los 10 primeros elementos del conjunto B_k en el caso $\rho_0 < \frac{1}{2}$. Tenemos puntos equiespaciados en la circunferencia que forman arcos de longitud menor que ε .

Para cada $z \in \mathbb{S}^1$ existe $n_0 \in \{1, \dots, k(m-n)\}$ de forma que

$$d(f_\alpha^{n_0}(x), z) < \varepsilon.$$

Concluimos así que, $O^+(x)$ es un conjunto denso en \mathbb{S}^1 . Veamos que, en consecuencia, $\omega(x) = \mathbb{S}^1$. Dado $z \in \mathbb{S}^1$, probaremos que $z \in \omega(x)$. Consideremos la sucesión dada por $\varepsilon = \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $O^+(x)$ es denso en \mathbb{S}^1 , existe una sucesión $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^{m_k}(x), z) < \varepsilon_k = \frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Es claro que, si la órbita positiva de x es un conjunto denso en \mathbb{S}^1 , para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $O^+(f^k(x))$ también es denso en \mathbb{S}^1 , pues resulta de quitar a $O^+(x)$ una cantidad finita de términos. Para probar que $z \in \omega(x)$, construimos una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ de la siguiente manera. Para $k = 1$, definimos n_1 tal que

$$d(f^{n_1}(x), z) < \varepsilon_1 = 1.$$

Para $k > 1$, utilizando que $O^+(f^{n_{k-1}}(x))$ es un conjunto denso, consideramos $m_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^{m_k}(f^{n_{k-1}}(x)), z) = d(f^{(m_k+n_{k-1})}(x), z) < \varepsilon,$$

y definimos $n_k = m_k + n_{k-1}$. De esta forma, obtenemos una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ verificando que

n_k tiende a ∞ cuando k tiende a ∞ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^{n_k}(x), z) = 0.$$

Por definición, $z \in \omega(x)$, y en definitiva, $\omega(x) = \mathbb{S}^1$.

2.2.5. Teoremas de Denjoy y Teorema de Clasificación de Poincaré

Los resultados obtenidos acerca de la rotación rígida se pueden resumir en la siguiente proposición.

Proposición 2.14. *Sea f_α la rotación rígida de ángulo $2\pi\alpha$, con $\alpha \in [0, 1)$. Entonces, el número de rotación de f_α es $\rho(f_\alpha) = \alpha$. Además, se verifica que*

- (a) $\rho(f) = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ si y solo si todas las órbitas son periódicas de periodo q .
- (b) $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si y solo si $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

La demostración ha sido desarrollada a través de los Ejemplos 2.1 y 2.2. La rotación rígida es un ejemplo del caso número de rotación irracional y $\omega(x) = \mathbb{S}^1$. Ahora bien, por el Teorema 2.13, sabemos que otra posibilidad de $\omega(x)$ cuando el número de rotación es irracional es que $\omega(x)$ sea un conjunto de Cantor.

Cabe preguntarse entonces si existe algún resultado que caracterice en cuál de los dos casos nos encontramos. A continuación, enunciaremos un conjunto de resultados sin demostración, que se pueden consultar en [4], [5] y [6].

Teorema 2.15. *(Clasificación de Poincaré) Sea $x \in \mathbb{S}^1$, $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva orientación, $\rho(f)$ su número de rotación y $f_{\rho(f)}$ la rotación rígida de ángulo $2\pi\rho$. Supongamos que $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces, existe una función continua y monótona $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ f = f_{\rho(f)} \circ h$. Además,*

1. Si f es transitiva, entonces h es un homeomorfismo y por tanto una conjugación entre f y $f_{\rho(f)}$.
2. Si f no es transitiva, entonces h no es inversible y $f_{\rho(f)}$ es un factor topológico de f .

En el Ejemplo 2.2 probamos que una rotación rígida con número de rotación irracional presenta una órbita densa. El Teorema de Clasificación de Poincaré demuestra que si f es transitiva, es decir, si existe una órbita de f que es densa, entonces f es conjugada a una rotación rígida. Además, en el caso de que f no sea transitiva, la rotación rígida aparece como factor topológico.

Los resultados probados en el capítulo anterior son válidos para homeomorfismos, siendo únicamente necesario imponer que f y su inversa existan y sean continuas. Los teoremas de Denjoy se aplican a difeomorfismos, es decir, requieren condiciones de diferenciabilidad.

Teorema 2.16. (*Primer teorema de Denjoy*). *Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de clase C^2 un difeomorfismo que preserva la orientación y tal que $\rho(f)$ es irracional. Entonces, f es transitiva y topológicamente conjugada a la rotación rígida de ángulo $\alpha = 2\pi\rho(f)$.*

Teorema 2.17. (*Segundo teorema de Denjoy*). *Para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irracional, existe un difeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de clase C^1 de forma que $\rho(f) = r$ y $\omega(x)$ es un conjunto de Cantor para todo $x \in \mathbb{S}^1$.*

El primer teorema establece que, si $\rho(f)$ es irracional y f es suficientemente regular, entonces presenta la misma dinámica que la rotación rígida. Por otro lado, el segundo teorema demuestra que la condición C^2 es necesaria, existiendo para todo número irracional un difeomorfismo de clase C^1 cuya dinámica contiene conjuntos de Cantor. El *teorema de clasificación de Poincaré* es un resultado que también caracteriza si podemos encontrar o no $\omega(x) \neq \mathbb{S}^1$, pero sin pasar por diferenciabilidad.

Los teoremas de Poincaré y Denjoy se aplican a homeomorfismos con número de rotación irracional. También se puede demostrar (ver [5]) que si $\rho(f) = \frac{p}{q}$ todas las órbitas o bien son periódicas o bien tienden asintóticamente a una órbita periódica.

Capítulo 3

Aplicaciones estándar de Arnold

En el primer capítulo, introdujimos el sistema $X_{(\omega_1, \omega_2)}$ que describe la dinámica de dos osciladores no acoplados en un toro 2-dimensional y viene dado por (2.2)

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2. \end{cases}$$

Para *acoplar* los dos osciladores, modificamos las ecuaciones diferenciales anteriores incluyendo términos *mixtos* a través de una función f no lineal

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + c_1 f(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + c_2 f(\theta_1 - \theta_2). \end{cases} \quad (3.1)$$

Las constantes c_1 y c_2 indican la fuerza del acoplamiento. Cuando ambas son cero, no hay acoplamiento y obtenemos de nuevo un flujo lineal en el toro 2-dimensional. Tal y como hicimos para el sistema lineal (2.2), podemos estudiar la dinámica del toro construyendo aplicaciones de Poincaré en una circunferencia inscrita, por ejemplo $\Sigma = \{(\theta_1, 0) : \theta_1 \in [0, 2\pi)\}$, obteniendo entonces una aplicación dependiente de cuatro parámetros $P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2}$.

$$\begin{aligned} P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2} : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ x &\mapsto P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2}(x) \end{aligned}$$

En ausencia de los términos de acoplamiento, es decir, cuando $c_1 = c_2 = 0$, la aplicación $P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2}$ es la rotación rígida con número de rotación $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ (suponiendo que hemos tomado ω_1, ω_2 con $\omega_2 \neq 0$ y $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in [0, 1)$). Para valores pequeños de las constantes de acoplamiento, tenemos una pequeña perturbación de esta rotación. Podemos suponer entonces que la aplicación

de Poincaré es de la forma

$$P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2} : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$x \mapsto P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2}(x) = \exp(2\pi i(t + \alpha) + ig(t, \alpha, \varepsilon)),$$

con $g(t, \alpha, \varepsilon)$ una función periódica en t . En particular, estudiaremos con profundidad la familia de aplicaciones dada por $g(t, \alpha, \varepsilon) = \varepsilon \sin(2\pi t)$, de forma que g tiene periodo 1 en t . Consideramos la siguiente definición propuesta por [4].

Definición 3.1. Sean $\alpha \in [0, 1), \varepsilon \in [0, 1]$. La aplicación dada por

$$f_{\alpha, \varepsilon} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x = \exp(2\pi it) \mapsto \exp(2\pi i(t + \alpha) + i\varepsilon \sin(2\pi t))$$

se denomina *aplicación de Arnold* o *aplicación estándar de Arnold* de parámetros ε, α . El conjunto de aplicaciones $f_{\alpha, \varepsilon}$ para $\alpha \in [0, 1), \varepsilon \in [0, 1]$ se denomina *familia estándar de Arnold*.

Para empezar, debemos justificar que se trata de una familia de homeomorfismos de la circunferencia unidad que preserva orientación. Para demostrar que $f_{\alpha, \varepsilon}$ es un homeomorfismo de la circunferencia unidad. Comenzamos con la siguiente observación.

Observación 3.1. Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación de la circunferencia unidad continua y biyectiva y supongamos que existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y biyectiva tal que $f \circ \Pi = \Pi \circ F$. Como F es una función real, biyectiva y continua, F^{-1} existe y también es continua. Ahora bien, la aplicación

$$\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$t \mapsto \exp(2\pi it)$$

no es inyectiva, por lo que no podemos considerar su inversa. Sin embargo, es claro que la aplicación

$$\hat{\Pi} : [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$t \mapsto \exp(2\pi it)$$

sí es biyectiva, y podemos considerar $\hat{\Pi}^{-1}$. Además, es claro que $\hat{\Pi}$ también verifica que $f \circ \hat{\Pi} = \hat{\Pi} \circ F$. Definimos entonces la aplicación g dada por

$$g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x \mapsto (\hat{\Pi} \circ F^{-1} \circ \hat{\Pi}^{-1})(x)$$

Sea $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $x = \exp(2\pi it)$ con $t \in [0, 1)$. Entonces,

$$(f \circ g)(x) = f\left(\hat{\Pi}\left(F^{-1}(\hat{\Pi}^{-1}(x))\right)\right) = \hat{\Pi}(F(F^{-1}(t))) = \hat{\Pi}(t) = x,$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(f\left(\hat{\Pi}(t)\right)\right) = g\left(\hat{\Pi}(F(t))\right) = \hat{\Pi}\left(F^{-1}\left(\hat{\Pi}^{-1}\left(\hat{\Pi}(F(t))\right)\right)\right) = \hat{\Pi}(t) = x.$$

Es decir, $f^{-1} = g = \hat{\Pi} \circ F^{-1} \circ \hat{\Pi}^{-1}$. Tenemos entonces que f^{-1} es continua por ser composición de funciones continuas. Por lo tanto, para demostrar que una aplicación f de la circunferencia unidad es un homeomorfismo basta con probar que es continua, biyectiva y que existe F una función real biyectiva y continua tal que $f \circ \Pi = \Pi \circ F$. En estas condiciones, F es además un levantamiento de f .

Proposición 3.1. *La aplicación*

$$f_{\alpha, \varepsilon} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x = \exp(2\pi it) \mapsto \exp(2\pi i(t + \alpha) + i\varepsilon \sin(2\pi t))$$

es un homeomorfismo que preserva orientación para todo $\varepsilon \in [0, 1]$ y para todo $\alpha \in [0, 1)$. Además, un levantamiento de $f_{\alpha, \varepsilon}$ viene dado por la aplicación

$$F_{\alpha, \varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto t + \alpha + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi t).$$

Demostración. Tomamos $\alpha \in [0, 1)$ arbitrario. Si $\varepsilon = 0$, entonces $f_{\alpha, \varepsilon=0} = f_\alpha$ es la rotación rígida de ángulo $2\pi\alpha$, que ya sabemos que es un homeomorfismo. Consideramos el caso $\varepsilon \in (0, 1)$.

Es claro que $f_{\alpha, \varepsilon}$ y $F_{\alpha, \varepsilon}$ son funciones continuas y $\Pi(F_{\alpha, \varepsilon}(t)) = f_{\alpha, \varepsilon}(\Pi(t))$ para todo $t \in [0, 1)$. Además, $F_{\alpha, \varepsilon}$ es una función real y de clase C^∞ . Por lo tanto, $F_{\alpha, \varepsilon}$ es inyectiva si y solo si es localmente inyectiva en todo punto. Si $F_{\alpha, \varepsilon}$ no es localmente inyectiva, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ en el que la derivada es nula. Es decir, t_0 verifica que

$$\frac{d}{dt} F_{\alpha, \varepsilon}(t_0) = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} 2\pi \cos(2\pi t_0) = 1 + \varepsilon \cos(2\pi t_0) = 0,$$

es decir,

$$\cos(2\pi t_0) = -\frac{1}{\varepsilon} < -1,$$

pues hemos tomado $\varepsilon \in (0, 1)$. Llegamos entonces a una contradicción y podemos concluir que $\frac{d}{dt} F_{\alpha, \varepsilon}(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde $F_{\alpha, \varepsilon}$ es inyectiva. Finalmente, estudiamos el caso $\varepsilon = 1$. Observamos que

$$\frac{d}{dt} F_{\alpha, \varepsilon=1}(t) = 1 + \frac{1}{2\pi} 2\pi \cos(2\pi t) = 1 + \cos(2\pi t) = 0,$$

entonces, $\cos(2\pi t) = -1$, de donde

$$t = \frac{2m+1}{2},$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Estudiamos la derivada segunda de $F_{\alpha,1}$ en un punto t_0 de la forma $t_0 = \frac{2m+1}{2}$. Se tiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}F_{\alpha}(t_0) = -\sin(2\pi t_0) = -\sin(\pi(2m+1)) = 0.$$

Estudiamos entonces la derivada tercera de $F_{\alpha,1}$.

$$\frac{d^3}{dt^3}F_{\alpha}(t_0) = -\cos(2\pi t_0) = -1 < 0,$$

de donde $F_{\alpha,1}$ es estrictamente creciente en t_0 . Hemos demostrado entonces que la función $F_{\alpha,\varepsilon}$ es inyectiva para todo $\varepsilon \in [0, 1]$ y para todo $\alpha \in [0, 1)$. Es claro además que $F_{\alpha,\varepsilon}$ es suprayectiva porque es una función real e inyectiva definida en todo \mathbb{R} .

Veamos que $f_{\alpha,\varepsilon}$ también es inyectiva. Supongamos que existen $x, y \in \mathbb{S}^1$ tales que $f_{\alpha,\varepsilon}(x) = f_{\alpha,\varepsilon}(y)$. Tomamos $t, s \in \mathbb{R}$ de forma que $x = \exp(2\pi it) = \Pi(t)$, $y = \exp(2\pi is) = \Pi(s)$. Notamos que

$$f_{\alpha,\varepsilon}(x) = f_{\alpha,\varepsilon}(\Pi(t)) = \Pi(F_{\alpha,\varepsilon}(t)), \quad f_{\alpha,\varepsilon}(y) = f_{\alpha,\varepsilon}(\Pi(s)) = \Pi(F_{\alpha,\varepsilon}(s)).$$

Como $f_{\alpha,\varepsilon}(x) = f_{\alpha,\varepsilon}(y)$, tenemos que $\Pi(F_{\alpha,\varepsilon}(t)) = \Pi(F_{\alpha,\varepsilon}(s))$, de donde existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$F_{\alpha,\varepsilon}(t) = F_{\alpha,\varepsilon}(s) + k.$$

Observamos que

$$F_{\alpha,\varepsilon}(s) + k = s + \alpha + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi t) + k = (s+k) + \alpha + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi(t+k)) = F_{\alpha,\varepsilon}(s+k),$$

pues $\sin(2\pi t) = \sin(2\pi(t+k))$, ya que $k \in \mathbb{Z}$. Como $F_{\alpha,\varepsilon}$ es inyectiva, $t = s+k$. Entonces,

$$x = \exp(2\pi it) = \exp(2\pi i(s+k)) = \exp(2\pi is) = y,$$

es decir, $f_{\alpha,\varepsilon}$ es inyectiva. Veamos que, además, $f_{\alpha,\varepsilon}$ es suprayectiva. Para empezar, observamos que $F_{\alpha,\varepsilon}(0) = \alpha$ y $F_{\alpha,\varepsilon}(1) = \alpha + 1$. Dado $y \in \mathbb{S}^1$, existe $s \in [\alpha, \alpha + 1]$ de forma que $y = \exp(2\pi is)$. Como $F_{\alpha,\varepsilon}$ es una función real y continua, por el Teorema del Valor Intermedio existe $t \in [0, 1)$ de forma que $F_{\alpha,\varepsilon}(t) = s$. En consecuencia, $x = \exp(2\pi it)$ verifica que

$$f_{\alpha,\varepsilon}(x) = f_{\alpha,\varepsilon}(\Pi(t)) = \Pi(F_{\alpha,\varepsilon}(t)) = \Pi(s) = \exp(2\pi is) = y.$$

Por tanto, $f_{\alpha,\varepsilon}$ es suprayectiva. Tenemos entonces que $f_{\alpha,\varepsilon}$ es una función biyectiva, continua y tal que $\Pi \circ F_{\alpha,\varepsilon} = f_{\alpha,\varepsilon} \circ \Pi$ con $F_{\alpha,\varepsilon}$ una función continua y biyectiva. Por la Observación 3.1, $f_{\alpha,\varepsilon}$ es un homeomorfismo y $F_{\alpha,\varepsilon}$ es un levantamiento de $f_{\alpha,\varepsilon}$. Además, es claro que $f_{\alpha,\varepsilon}$ preserva

orientación por ser $F_{\alpha,\varepsilon}$ creciente. □

Observación 3.2. A partir de la demostración anterior, también queda claro que la familia de homeomorfismos se puede definir únicamente para $\varepsilon \in [0, 1]$, pues si tomáramos $\varepsilon > 1$, la función $f_{\alpha,\varepsilon}$ dejaría de ser inyectiva y por lo tanto, no sería un homeomorfismo. En la Figura 3.1 se puede observar cómo la función $F_{\alpha,\varepsilon}$ deja de ser inyectiva si consideramos $\varepsilon > 1$.

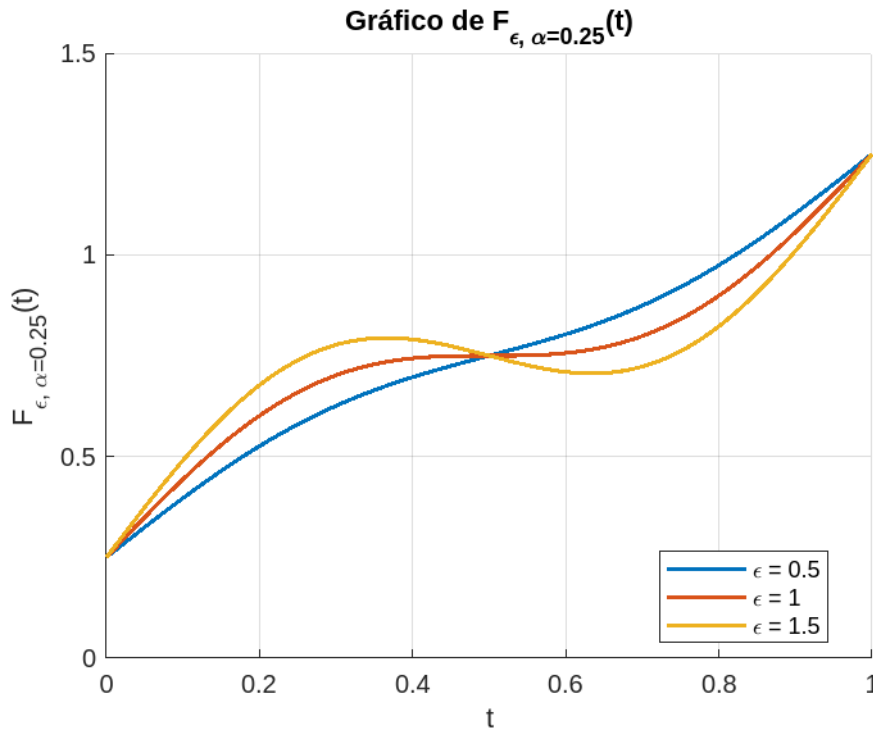


Figura 3.1: Representación de las funciones $F_{\alpha,\varepsilon}$ restringidas a $[0, 1]$ para distintos valores de ε .

En efecto, consideremos la función $F_{\alpha,\varepsilon}$ con $\varepsilon > 1$. Notamos que

$$\frac{d}{dt}F_{\alpha,\varepsilon}(t) = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}2\pi \cos(2\pi t) = 1 + \varepsilon \cos(2\pi t) = 0,$$

de donde

$$\cos(2\pi t) = -\frac{1}{\varepsilon} \in (0, 1),$$

pues $\varepsilon > 1$. En este caso, sí existe $t_0 \in (0, 1)$ de manera que $\cos(2\pi t_0) = -\frac{1}{\varepsilon}$ y por tanto $\frac{d}{dt}F_{\alpha,\varepsilon}(t_0) = 0$. Además, supongamos que $\frac{d^2}{dt^2}F_{\alpha,\varepsilon}(t_0) = 0$. Entonces,

$$\frac{d^2}{dt^2}F_{\alpha,\varepsilon}(t_0) = -\sin(2\pi t_0) = 0,$$

luego $t_0 = \frac{m}{2}$, con $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto

$$\cos(2\pi t_0) = \cos\left(2\pi \frac{m}{2}\right) = \pm 1 = -\frac{1}{\varepsilon}$$

con $\varepsilon > 1$, lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que o bien $\frac{d^2}{dt^2} F_{\alpha,\varepsilon}(t_0) > 0$ o bien $\frac{d^2}{dt^2} F_{\alpha,\varepsilon}(t_0) < 0$, pero en todo caso la función $F_{\alpha,\varepsilon}$ presenta un máximo o mínimo local y no es inyectiva. Si $s, t \in \mathbb{R}$ son tales que $F_{\alpha,\varepsilon}(t) = F_{\alpha,\varepsilon}(s)$, entonces

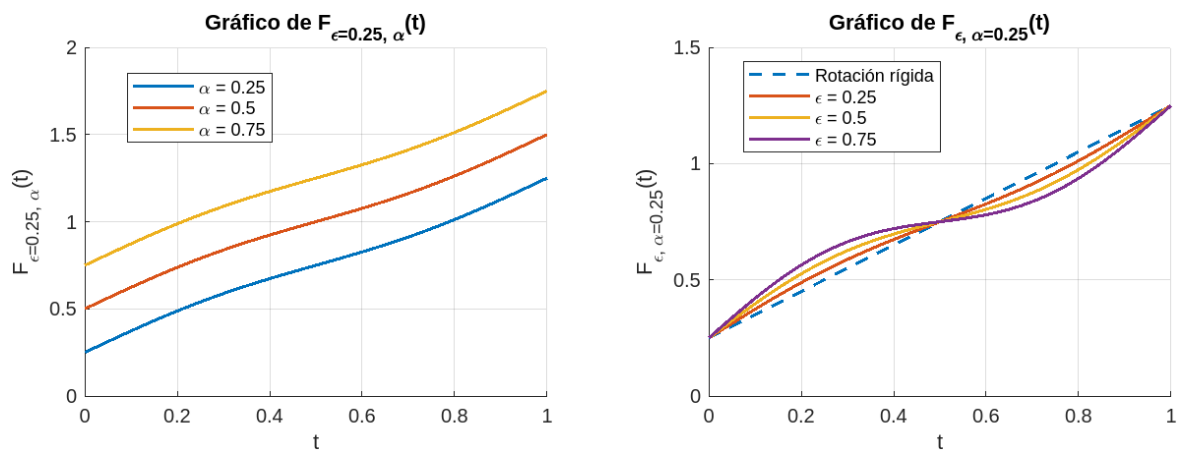
$$f_{\alpha,\varepsilon}(\Pi(t)) = \Pi(F_{\alpha,\varepsilon}(t)) = \Pi(F_{\alpha,\varepsilon}(s)) = f_{\alpha,\varepsilon}(\Pi(s)),$$

es decir, $f_{\alpha,\varepsilon}$ tampoco es inyectiva.

En el segundo capítulo, estudiamos resultados generales para homeomorfismos de la circunferencia unidad, utilizando el concepto de número de rotación. Durante este capítulo aplicaremos estos resultados a la familia de aplicaciones de Arnold. Sabemos que un levantamiento de $f_{\alpha,\varepsilon}$ viene dado por

$$F_{\alpha,\varepsilon}(t) = t + \alpha + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi t).$$

En la Figura 3.2 tenemos una representación de $F_{\alpha,\varepsilon}$ para distintos valores de los parámetros ε, α .



(a) Representación de $F_{\alpha,\varepsilon}$ restringida a $[0, 1]$ para distintos valores de α , fijando $\varepsilon = 0.25$

(b) Representación de $F_{\alpha,\varepsilon}$ restringida a $[0, 1]$ para distintos valores de ε , fijando $\alpha = 0.25$.

Figura 3.2: Representación de levantamientos de las aplicaciones de la familia de Arnold restringidas al intervalo $[0, 1]$ para distintos valores de los parámetros ε, α . En la figura de la derecha comparamos también con el caso $\varepsilon = 0$, que se corresponde con la rotación rígida de ángulo $2\pi\alpha$, en este caso con $\alpha = 0.25$.

3.1. Escaleras del diablo

Comenzamos estudiando el número de rotación de un homeomorfismo de la familia estándar de Arnold como función del parámetro α . Dado $\alpha \in [0, 1)$, si consideramos $\varepsilon = 0$ obtenemos f_α la rotación rígida de ángulo $2\pi\alpha$ cuyo número de rotación es $\rho(f_\alpha) = \alpha$. Fijamos $\varepsilon \in (0, 1]$ y durante esta sección estudiaremos la aplicación

$$\begin{aligned}\rho_0 : [0, 1) &\rightarrow [0, 1) \\ \alpha &\mapsto \rho(f_{\alpha, \varepsilon})\end{aligned}$$

Observamos que los levantamientos $F_{\alpha, \varepsilon}$ verifican que

$$F_{\alpha, \varepsilon}(0) = \alpha \in [0, 1).$$

Por la Proposición 2.7, tenemos que para cada $t \in \mathbb{R}$ $\rho(F, t) \in [0, 1]$, de donde $\rho(f) = \rho(F, t)$ si $\rho(F, t) < 1$ y $\rho(f) = 0$ si $\rho(F, t) = 1$. Así, para estudiar el comportamiento de ρ_0 consideraremos la aplicación

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} : [0, 1) &\rightarrow [0, 1] \\ \alpha &\mapsto \rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t)\end{aligned}$$

La función $\tilde{\rho}$ coincidirá con ρ_0 para todos los valores de $\alpha \in [0, 1)$ salvo para aquellos en los que $\tilde{\rho}(\alpha) = 1$, pues en estos casos $\rho_0(\alpha) = 0$. Nuestro objetivo es comprobar que $\tilde{\rho}$ es una escalera del diablo, concepto que definimos a continuación, considerando la definición de [5]. Se trata de la referencia principal que seguiremos en esta sección, además de [3] y [4].

Definición 3.2. Sea $\phi : [0, 1) \rightarrow [0, 1]$ una función continua y monótona. Supongamos que existe $\{I_j\}_{j \in J}$ una familia de intervalos cerrados disjuntos contenidos en $[0, 1]$ de longitud no nula verificando

(a) La unión de intervalos es densa en $[0, 1)$, esto es

$$\overline{\bigcup_{j \in J} I_j} = [0, 1)$$

(b) Para cada $j \in J$, existe $t_j \in [0, 1]$ verificando $\phi(t) = t_j$ para todo $t \in I_j$, y además $t_j \neq t_k$ para todo $j, k \in J$ tales que $j \neq k$.

Entonces, ϕ se denomina *escalera del diablo*.

Ejemplo 3.1 Se puede construir una escalera del diablo a partir del conjunto ternario de Cantor.

Consideramos $x \in C$ y su expresión en base 3 introducida en el primer capítulo.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 3^{-n},$$

con $\alpha_n \in \{0, 2\}$. Definimos la aplicación

$$f : C \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-(n+1)}.$$

Se comprueba (ver [5]) que $f(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in C$ y que f es suprayectiva y no decreciente.

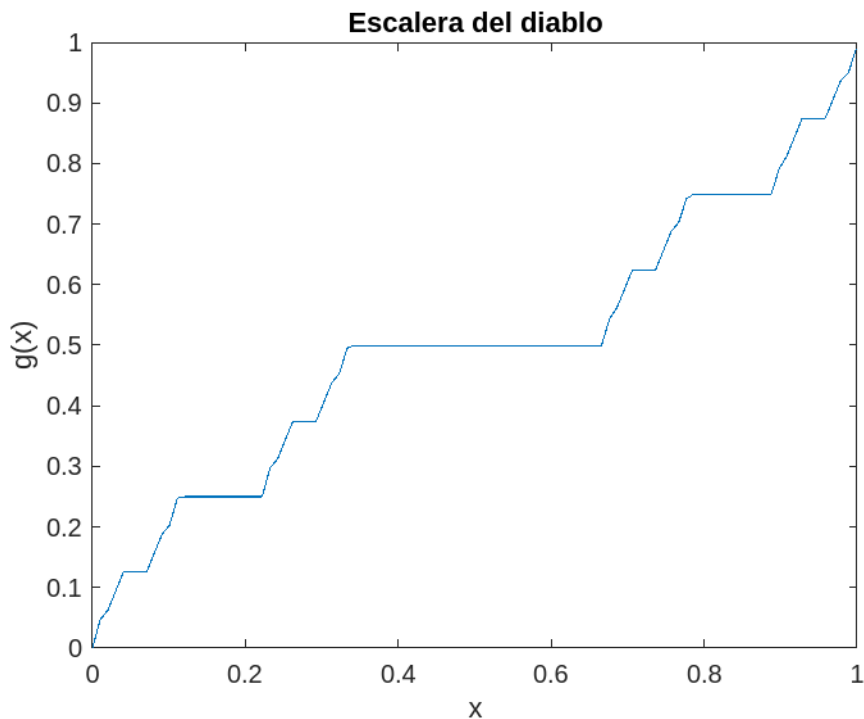


Figura 3.3: Escalera del diablo a partir del conjunto ternario de Cantor

Además, los dos extremos de un intervalo eliminado se asignan al mismo valor. Podemos extender entonces f a una aplicación continua g no decreciente en $[0, 1]$, tomándola constante en cada intervalo eliminado e igual al valor común de f en los extremos para cada uno de estos intervalos. Obtenemos de esta forma una escalera del diablo, que a menudo también se conoce como función de Cantor. La función g está representada en la Figura 3.3.

3.1.1. Continuidad de la aplicación número de rotación

Denotamos $\text{Hom}(\mathbb{S}^1)$ el conjunto de homeomorfismos de la circunferencia unidad y nuestro objetivo a continuación es estudiar la continuidad de la aplicación número de rotación $\rho : \text{Hom}(\mathbb{S}^1) \rightarrow [0, 1)$; como referencia para toda esta parte hemos utilizado [5]. Para empezar, tenemos que definir un espacio topológico en $\text{Hom}(\mathbb{S}^1)$.

Dado $f \in \text{Hom}(\mathbb{S}^1)$, sabemos que cada levantamiento de f pertenece al conjunto de funciones reales y continuas, que denotamos $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Ahora bien, por las propiedades de la Proposición 2.3, el comportamiento de F está determinado por su restricción al intervalo $[0, 1]$. Por tanto, podemos considerar la norma del máximo en $\mathcal{C}([0, 1])$ dada por

$$\|F\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \max\{|F(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

El problema es que, dado $f \in \text{Hom}(\mathbb{S}^1)$, los levantamientos de f no son únicos. Sin embargo, en la Observación 2.5 vimos que existe un único levantamiento F de f tal que $\rho(F, t) = \rho(f)$. Consideramos entonces la distancia en $\text{Hom}(\mathbb{S}^1)$ dada por

$$d_{\text{Hom}(\mathbb{S}^1)}(f, g) = \|F - G\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \max\{|F(t) - G(t)| : t \in [0, 1]\},$$

con F un levantamiento de f y G un levantamiento de g tales que $\rho(F, t) = \rho(f)$, $\rho(G, t) = \rho(g)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Comenzamos probando un lema que utilizaremos en muchas ocasiones a lo largo del capítulo.

Lema 3.2. *Sea f un homeomorfismo que conserva la orientación y F el levantamiento de f tal que $\rho(F, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $t \in \mathbb{R}$ y consideremos $r', r \in \mathbb{Q}$ tales que $r' < \rho(F, t) < r$. Supongamos que $r = \frac{p}{q}, r' = \frac{p'}{q'}$, con $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \neq 0$. Entonces, se verifica que*

$$F^{jq}(t) - t < jp,$$

$$F^{jq'}(t) - t > jp'.$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que

$$F^q(t) > t + p. \tag{3.2}$$

Por inducción, veamos que entonces $(F^q)^j > t + jp$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para $j = 1$, es (3.2). Utilizando (3.2) y las propiedades de F demostradas en la Proposición 2.3,

$$(F^q)^j(t) = F^q(F^{q(j-1)}(t)) > F^q(t + (j-1)p) = F^q(t) + (j-1)p > t + jp$$

Entonces,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(F^q)^{(j)}(t) - t}{j} \geq \frac{jp}{j} = p,$$

es decir, $\rho(F^q, t) \geq p$. Por la Observación 2.6, tenemos entonces que $\rho(F, t) \geq \frac{p}{q}$ lo cual contradice la hipótesis $\rho(F, t) < \frac{p}{q}$. Por lo tanto, hemos probado que $F^q(t) - t - p \leq 0$. Ahora bien, por el Corolario 2.10 sabemos que, si $F^q(t) - t = p$, entonces $\rho(F, t) = \frac{p}{q}$ y habíamos tomado p, q tales que $\rho(F, t) < \frac{p}{q}$. Por tanto, se tiene que

$$F^q(t) - t < p. \quad (3.3)$$

Veamos entonces que $F^{jq}(t) - t < jp$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $j = 1$, es la ecuación (3.3). Suponiendo el resultado cierto hasta $j - 1$ y utilizando la Proposición 2.3,

$$(F^q)^j(t) = F^{q(j-1)}(t) < F^q(t + (j-1)p) = F^q(t) + (j-1)p < t + jp.$$

De forma análoga se demuestra que $F^{jq'}(t) - t > jp'$ para todo $j \in \mathbb{N}$. □

Teorema 3.3. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \rho : \text{Hom}(\mathbb{S}^1) &\rightarrow [0, 1) \\ f &\mapsto \rho(f) \end{aligned}$$

que a cada homeomorfismo f de la circunferencia unidad que conserva orientación le asigna su número de rotación es continua.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $f \in \text{Hom}(\mathbb{S}^1)$. Como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , existen $r, r' \in \mathbb{Q}$ tales que $r' < \rho(f_0) < r$, con

$$|r - r'| < \varepsilon,$$

es decir, $[r', r]$ es un intervalo de longitud menor que ε . Supongamos que $r = \frac{p}{q}, r' = \frac{p'}{q'}$, con $p, p', q, q' \in \mathbb{Z}, q \neq 0, q' \neq 0$. De esta forma,

$$\frac{p'}{q'} < \rho(f) < \frac{p}{q}.$$

Sea F un levantamiento de f que verifica que $\rho(f) = \rho(F, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $t \in [0, 1]$, por el Lema 3.2, sabemos que

$$F^q(t) - t < p.$$

Como la función $F^q - Id$ es continua, alcanza un valor máximo en el intervalo $[0, 1]$. Entonces, existe $\delta > 0$ de manera que

$$F^q(t) - t < p - \delta$$

para todo $t \in [0, 1]$. Sea $g \in \text{Hom}(\mathbb{S}^1)$ y G el levantamiento de g que verifica que $\rho(g) = \rho(G, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si tomamos f, g arbitrariamente cerca, podemos suponer F^q, G^q también tan cercanas como queramos. Tomamos g tal que

$$\|F^q - G^q\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \max\{|F^q(t) - G^q(t)| : t \in [0, 1]\} < \frac{\delta}{2}.$$

Supongamos que existe $t_0 \in [0, 1]$ de forma que

$$G^q(t_0) > t_0 + p - \frac{\delta}{2}.$$

Como $F^q(t_0) < t_0 + p - \delta < t_0 + p - \frac{\delta}{2} < G^q(t_0)$, obtenemos

$$|F^q(t_0) - G^q(t_0)| = G^q(t_0) - F^q(t_0) > \left(t_0 + p - \frac{\delta}{2}\right) - (t_0 + p - \delta) = \frac{\delta}{2},$$

lo cual contradice haber tomado G, F tales que $\|F^q - G^q\|_{\mathcal{C}([0,1])} < \frac{\delta}{2}$. En consecuencia,

$$G^q(t) \leq t + p - \frac{\delta}{2} < t + p$$

para todo $t \in [0, 1]$ y, por tanto, por el Lema 3.2, $G^{jq}(t) < t + jp$. Así, dado $t \in [0, 1]$ arbitrario, se tiene que

$$q\rho(G, t) = q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(t) - t}{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{G^{qj}(t) - t}{j} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t + jp - t}{j} = p,$$

de donde $\rho(G, t) \leq \frac{p}{q} = r$. Con un razonamiento análogo, se obtiene que $\rho(G, t) \geq \frac{p'}{q'} = r'$. Tenemos entonces que $\rho(f), \rho(g) \in [r', r]$, con $[r', r]$ un intervalo de longitud menor que ε . Por lo tanto,

$$|\rho(f) - \rho(g)| < \varepsilon,$$

es decir, ρ es continua. □

Notamos que en el resultado anterior hemos probado la continuidad del número de rotación de los homeomorfismos de la circunferencia unidad a partir de una norma definida para sus levantamientos. Definimos el conjunto

$$\text{Lev}_{|[0,1]} = \{F_{|[0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f \in \text{Hom}(\mathbb{S}^1) \text{ tal que } \\ F \text{ es el levantamiento de } f \text{ con } F(0) \in [0, 1)\},$$

donde $F_{|[0,1]}$ denota la restricción de la función real F en el intervalo $[0, 1]$. Como los levantamientos son funciones continuas, tenemos que $\text{Lev}_{|[0,1]} \subset \mathcal{C}[0, 1]$. Así, como consecuencia inmediata del Teorema 3.3, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4. Sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. La aplicación

$$\begin{aligned} \rho_L : \text{Lev}_{|[0,1]} &\rightarrow [0, 1] \\ F &\mapsto \rho(F, t) \end{aligned}$$

es continua.

Estamos en condiciones de demostrar la continuidad de la aplicación $\tilde{\rho}$.

Proposición 3.5. Sean $\varepsilon \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$, cualesquiera pero fijos.

(a) La aplicación

$$\begin{aligned} G : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto F_{\alpha, \varepsilon}(t) \end{aligned}$$

es continua.

(b) La aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ \alpha &\mapsto \rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t) \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. (a) Sean $\alpha_0 \in [0, 1]$, $\varepsilon_0 > 0$ arbitrarios. Tomamos $\delta = \varepsilon_0$ y $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$|\alpha - \alpha_0| < \delta$$

Entonces, se verifica que

$$|F_{\alpha, \varepsilon}(t) - F_{\alpha_0, \varepsilon}(t)| = \left| t + \alpha + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \sin(2\pi t) - \left(t + \alpha_0 + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \sin(2\pi t) \right) \right| = |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon_0.$$

(b) En primer lugar, veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} R : [0, 1] &\rightarrow \text{Lev}_{|[0,1]} \\ \alpha &\mapsto \tilde{F}_{\alpha, \varepsilon}, \end{aligned}$$

con $\tilde{F}_{\alpha, \varepsilon}$ la restricción de $F_{\alpha, \varepsilon}$ en el intervalo $[0, 1]$ es continua. Está bien definida porque $F_{\alpha, \varepsilon}(0) = 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ y para todo $\varepsilon \in [0, 1]$. Veamos que la aplicación R es continua. De nuevo, consideramos $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 \in [0, 1]$ arbitrarios, y tomamos α tal que $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon_0$. Para cada

$t \in [0, 1]$ sabemos por el apartado (a) que

$$|\tilde{F}_{\alpha,\varepsilon}(t) - \tilde{F}_{\alpha_0,\varepsilon}(t)| < \varepsilon_0.$$

En consecuencia,

$$\|\tilde{F}_{\alpha,\varepsilon} - \tilde{F}_{\alpha_0,\varepsilon}\|_{C([0,1])} = \max\{|\tilde{F}_{\alpha,\varepsilon}(t) - \tilde{F}_{\alpha_0,\varepsilon}(t)| : t \in [0, 1]\} < \varepsilon_0.$$

Es decir, la aplicación R es continua. Notamos que $\tilde{\rho} = \rho \circ R$. Por el Corolario 3.3, sabemos que la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_L : \text{Lev}_{|[0,1]} &\rightarrow [0, 1] \\ F &\mapsto \rho(F, t) \end{aligned}$$

es continua. Por lo tanto, $\tilde{\rho}$ es composición de aplicaciones continuas, y en definitiva continua. \square

3.1.2. Monotonía de la aplicación número de rotación

Una vez hemos demostrado que $\tilde{\rho}$ es una función continua verificamos que es monótona, en particular, no decreciente.

Proposición 3.6. *Sean $\varepsilon \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Entonces,*

(a) *Para cada $\alpha \in [0, 1)$ y para cada $\beta > 0$ tal que $\alpha + \beta \in [0, 1)$ se verifica que*

$$F_{(\alpha+\beta),\varepsilon}^n(t) \geq F_{\alpha,\varepsilon}^n(t) + \beta$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) *$F_{\alpha,\varepsilon}^n(t)$ es estrictamente creciente en α para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *La aplicación*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : [0, 1) &\rightarrow [0, 1) \\ \alpha &\mapsto \rho(F_{\alpha,\varepsilon}, t) \end{aligned}$$

es no decreciente.

Demostración. (a) Lo probaremos por inducción. Para $n = 1$, es claro que

$$F_{(\alpha+\beta),\varepsilon}(t) = t + (\alpha + \beta) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi t) = F_{\alpha,\varepsilon}(t) + \beta$$

Supongamos el resultado cierto hasta $n - 1 \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.3, sabemos que $F_{\alpha,\varepsilon}(t)$ es estrictamente creciente en t para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$F_{(\alpha+\beta),\varepsilon}^n(t) = F_{(\alpha+\beta),\varepsilon}(F_{(\alpha+\beta),\varepsilon}^{n-1}(t)) \geq F_{\alpha+\beta,\varepsilon}(F_{\alpha,\varepsilon}^{n-1}(t)) \geq F_{\alpha,\varepsilon}(F_{\alpha,\varepsilon}^{n-1}(t)) + \beta = F_{\alpha,\varepsilon}^n(t) + \beta$$

(b) Es inmediato por el apartado anterior. Consideramos $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1)$ tales que $\alpha_1 < \alpha_2$. Entonces, $\beta = \alpha_2 - \alpha_1 > 0$. En consecuencia,

$$F_{\alpha_2,\varepsilon}^n(t) = F_{\alpha_1+\beta,\varepsilon}^n(t) \geq F_{\alpha_1,\varepsilon}^n(t) + \beta > F_{\alpha_1,\varepsilon}^n(t).$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Consideremos de nuevo $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1)$ tales que $\alpha_1 < \alpha_2$. Entonces,

$$\rho(F_{\alpha_1,\varepsilon}, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\varepsilon,\alpha_1}^n(t) - t}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\varepsilon,\alpha_2}^n(t) - t}{n} = \rho(F_{\alpha_2,\varepsilon}, t),$$

por lo que $\tilde{\rho}$ es no decreciente en α . □

Sabemos que $\tilde{\rho}$ es no decreciente para todo $\alpha \in [0, 1)$. A continuación, veremos que $\tilde{\rho}$ es estrictamente creciente cuando toma valores irracionales. Como referencia para esta proposición hemos utilizado [3].

Proposición 3.7. *Sean $\varepsilon \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha_0 \in [0, 1)$ tal que $\rho(f_{\alpha_0,\varepsilon}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces, la aplicación*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : [0, 1) &\rightarrow [0, 1) \\ \alpha &\mapsto \rho(F_{\alpha,\varepsilon}, t) \end{aligned}$$

es estrictamente creciente en $\alpha = \alpha_0$.

Demostración. Sea $\alpha \in [0, 1)$ tal que $\alpha \in \alpha_0$. Queremos probar que entonces $\tilde{\rho}(\alpha_0) < \tilde{\rho}(\alpha)$. Denotamos $\beta_0 = \alpha - \alpha_0 > 0$.

Como $\rho(f_{\alpha_0,\varepsilon})$ es irracional y $F_{\alpha_0,\varepsilon}$ es una función de clase C^2 , por el Primer Teorema de Denjoy (Teorema 2.16) tenemos que f_{ε,α_0} es conjugada a la rotación rígida de ángulo $2\pi\beta$ con $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por tanto, todas las órbitas son densas en \mathbb{S}^1 .

En consecuencia, dado $x \in \mathbb{S}^1$ arbitrario, podemos encontrar sucesiones con las que aproximarnos a x por ambos lados de x en la circunferencia. Es decir, existen dos sucesiones $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tales que n_k y m_k tienden a ∞ cuando k tiende a ∞ y, además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\alpha_0,\varepsilon}^{n_k}(x) = x$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(x) = x,$$

con $d(x, f_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(x)) = l([x, f_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(x)])$ y $d(x, f_{\alpha_0}^{m_k}(x)) = l([f_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(x), x])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea t tal que $\Pi(t) = x$. Se sigue la existencia de una sucesión $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ verificando que

$$F_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(t) < t + p_k \quad (3.4)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(t) - t + p_k) = 0. \quad (3.5)$$

Por (3.4) y (3.5), existe $k \in \mathbb{N}$ de manera que

$$0 < t + p_k - F_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(t) < \beta_0.$$

Denotamos $\beta = t + p_k - F_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(t)$. Por la Proposición 3.6 tenemos que

$$F_{(\alpha+\beta), \varepsilon}^{m_k}(t) \geq F_{\alpha, \varepsilon}^{m_k}(t) + \beta.$$

En consecuencia,

$$F_{(\alpha_0+t+p_k-F_{\alpha_0}^{m_k}(t)), \varepsilon}^{m_k}(t) \geq F_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(t) + t + p_k - F_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(t) = t + p_k.$$

Por lo tanto, se verifica que

$$F_{\alpha_0, \varepsilon}^{m_k}(t) < t + p_k \leq F_{(\alpha_0+t+p_k-F_{\alpha_0}^{m_k}(t)), \varepsilon}^{m_k}(t).$$

Por el Teorema de los Valores Intermedios, existe $\alpha_k \in [\alpha_0, \alpha_0 + t + p_k - F_{\alpha_0}^{m_k}(t)]$ tal que

$$F_{\alpha_k, \varepsilon}(t) = t + p_k,$$

de donde

$$\tilde{\rho}(\alpha_0) \leq \tilde{\rho}(\alpha_k) \leq \tilde{\rho}(\alpha_0 + \beta) \leq \tilde{\rho}(\alpha)$$

Por el Corolario 2.10, tenemos que $\rho(\alpha_k) \in \mathbb{Q}$ y sabemos que $\tilde{\rho}(\alpha_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces,

$$\tilde{\rho}(\alpha_0) \leq \tilde{\rho}(\alpha_k) \leq \tilde{\rho}(\alpha_0 + \beta) \leq \tilde{\rho}(\alpha_0 + \beta_0) \leq \tilde{\rho}(\alpha).$$

De forma análoga se demuestra que si $\alpha < \alpha_0$, entonces $\tilde{\rho}(\alpha) < \tilde{\rho}(\alpha_0)$ y concluimos así que $\tilde{\rho}$ es estrictamente creciente en α_0 . \square

3.1.3. Intervalos de *frequency locking*

Sabemos que $\tilde{\rho}$ es una aplicación continua y no decreciente en α . Además, hemos caracterizado el comportamiento de $\tilde{\rho}$ cuando $\tilde{\rho}(\alpha)$ es irracional. Ahora bien, para comprobar que $\tilde{\rho}$ es una escalera del diablo, necesitamos además encontrar un conjunto de intervalos cerrados $\{I_j\}_{j \in J}$ disjuntos contenidos en $[0, 1]$ de longitud no nula verificando:

(a) La unión de intervalos es densa en $[0, 1)$, esto es

$$\overline{\bigcup_{j \in J} I_j} = [0, 1).$$

(b) Para cada $j \in J$, existe $t_j \in [0, 1]$ verificando $\phi(t) = t_j$ para todo $t \in I_j$, y además $t_j \neq t_k$ para todo $j, k \in J$ tales que $j \neq k$.

Para determinar los intervalos $\{I_j\}_{j \in J}$, estudiamos el comportamiento de $\tilde{\rho}$ en $\alpha \in [0, 1)$ cuando $\tilde{\rho}(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Como referencia para el siguiente teorema hemos utilizado [4].

Teorema 3.8. Sean $\varepsilon \in [0, 1]$ y $\alpha_0 \in [0, 1)$ tal que $\rho(f_{\alpha_0, \varepsilon}) = r \in \mathbb{Q}$. Entonces, existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ no trivial tal que $\alpha_0 \in I$ y $\rho(f_{\alpha, \varepsilon}) = r$ para todo $\alpha \in I$.

Demostración. Supongamos que $\rho(f_{\alpha, \varepsilon}) = r = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Por el Corolario 2.10, $\rho(f_{\alpha_0, \varepsilon}) = \frac{p}{q}$ si y solo si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ de forma que

$$F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t_0) = t_0 + p, \quad (3.6)$$

es decir, la gráfica de $F_{\alpha_0, \varepsilon}^q$ corta a la recta dada por la gráfica de la función $\phi(t) = t + p$ para $t = t_0$ y $\alpha = \alpha_0$. Si se verifica que

$$\frac{\partial F_{\alpha_0, \varepsilon}^q}{\partial t}(t_0) \neq 1,$$

entonces la intersección es transversal y, por lo tanto, el corte persiste para valores de α suficientemente próximos a α_0 . En caso contrario, es decir, si

$$\frac{\partial F_{\alpha_0, \varepsilon}^q}{\partial t}(t_0) = 1,$$

entonces hemos de tener en cuenta la analiticidad de $F_{\alpha_0, \varepsilon}^q$. En efecto, para t en un entorno de t_0 podemos escribir

$$F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(F_{\alpha_0, \varepsilon}^q)^{(j)}(t_0)}{j!} (t - t_0)^j,$$

donde hemos denotado

$$(F_{\alpha_0, \varepsilon}^q)^{(j)}(t_0) = \frac{\partial^j F_{\alpha_0, \varepsilon}^q}{\partial t^j}(t_0).$$

para todo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Observamos que

$$\begin{aligned} F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t) - \phi(t) &= F(t_0) + \frac{\partial F_{\alpha_0, \varepsilon}^q}{\partial t}(t_0)(t - t_0) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t))^{(j)}}{j!} (t - t_0)^j - (t + p) \\ &= (t_0 + p) + (t - t_0) - (t + p) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t_0))^{(j)}}{j!} (t - t_0)^j \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t_0))^{(j)}}{j!} (t - t_0)^j. \end{aligned}$$

Supongamos que

$$(F_{\alpha_0, \varepsilon}^q)^{(j)}(t_0) = 0$$

para todo $j \geq 2$. Entonces, $F_{\alpha_0, \varepsilon}^q$ es un polinomio de grado 1. En particular, tenemos que

$$F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t) = t + p,$$

y por tanto $F_{\alpha_0, \varepsilon}^q$ es un levantamiento de una rotación rígida; es decir, nos encontramos en el caso $\varepsilon = 0$. Como estamos suponiendo $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $l \in \mathbb{N}$ con $l \geq 2$ de forma que

$$(F_{\alpha_0, \varepsilon}^q)^{(l)}(t_0) \neq 0.$$

Sea $i \geq 2$ el menor de los órdenes de derivación para los que la derivada parcial no se anula. Entonces,

$$F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t) = \phi(t) + (t - t_0)^i \left(\frac{\partial^i F_{\alpha_0, \varepsilon}^q}{\partial t^i}(t_0) + O(|t - t_0|) \right).$$

Si i es impar, entonces $F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t) - \phi(t)$ cambia de signo en $t = t_0$ y por lo tanto persiste un punto de corte en las gráficas de ambas funciones para α suficientemente próximo a α_0 .

En el caso de que i sea par, las gráficas tienen un contacto tangencial en $t = t_0$, de forma que la gráfica de $F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t)$ es una función cóncava, pudiendo ser cóncava hacia arriba o hacia abajo. No podemos garantizar que el punto de corte persista para valores de α próximos a α_0 .

Sin embargo, como por la Proposición 3.6 sabemos que $F_{\alpha, \varepsilon}^q$ es monótona respecto a α , podemos concluir que las gráficas se cortan para algún valor o bien $\alpha > \alpha_0$ o bien para $\alpha < \alpha_0$, según la concavidad sea hacia arriba o hacia abajo.

En cualquier caso obtenemos un intervalo I_r de manera que para cada $\alpha \in I_{p/q}$, existe $t \in \mathbb{R}$ verificando que

$$F_{\alpha_0, \varepsilon}^q(t) = t + p.$$

Por el Corolario 2.10, tenemos que $\rho(f_{\alpha, \varepsilon}) = \frac{p}{q}$ para todo $\alpha \in I_r$. □

Hemos demostrado entonces que para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ existe un intervalo $I_r \subset [0, 1)$ tal que $\rho(f_{\alpha, \varepsilon}) = r$ para todo $\alpha \in I_r$; este fenómeno se conoce como *frequency locking* y estudiaremos su importancia con más detalle en la siguiente sección.

Notamos que $\rho(f_{\alpha, \varepsilon})$ no coincide exactamente con $\tilde{\rho}(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1)$, pues puede ocurrir que $\rho(f_{\alpha, \varepsilon}) = 0$ y $\tilde{\rho}(\alpha) = 1$, pero en ambos casos tenemos que $0, 1 \in \mathbb{Q}$, por lo que podemos aplicar el Teorema 3.8 para afirmar que $\tilde{\rho}$ presenta intervalos de *frequency locking* cuando toma valores racionales.

Estamos en condiciones de demostrar que $\tilde{\rho}$ es una escalera del diablo.

Teorema 3.9. *Sean $\varepsilon \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. La aplicación*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : [0, 1) &\rightarrow [0, 1) \\ \alpha &\mapsto \rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t) \end{aligned}$$

es una escalera del diablo.

Demostración. Por las Proposiciones 3.5 y 3.6 sabemos que $\tilde{\rho}$ es una función continua y monótona, en particular, no decreciente. Para cada $r \in [0, 1) \cup \mathbb{Q}$, definimos el conjunto

$$I_r = \{\alpha \in [0, 1) : \rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t) = r\}.$$

Por el Teorema 3.8, sabemos los intervalos I_r son no triviales. Además, para cada $r \in \mathbb{Q}$, $I_r = \tilde{\rho}^{-1}(\{r\})$ con $\tilde{\rho}$ una función continua y $\{r\} \subset [0, 1]$ un conjunto cerrado, por lo que I_r es cerrado. Veamos que su unión es densa en $[0, 1)$.

Consideramos $\alpha \in [0, 1)$ y $\delta > 0$ cualesquiera. Como $\tilde{\rho}$ es una aplicación continua y $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ es un conjunto conexo, tenemos que

$$\tilde{\rho}((\alpha - \delta, \alpha + \delta))$$

es un conjunto conexo en $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, y por tanto, un intervalo. Como los racionales son densos en \mathbb{R} , existe $s \in \mathbb{Q} \cup [0, 1]$ tal que $s \in \tilde{\rho}((\alpha - \delta, \alpha + \delta))$. Sea $\alpha_s \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ tal que

$$\tilde{\rho}(\alpha_s) = s \in \mathbb{Q}.$$

Entonces,

$$s \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} I_r,$$

y, en definitiva,

$$\alpha \in \overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} I_r},$$

por lo que

$$\overline{\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} I_r} = [0, 1].$$

Finalmente, $\tilde{\rho}$ toma valores constantes en I_r para todo $r \in \mathbb{Q}$ y distintos para cada $r \neq s$, por definición de los intervalos $\{I_r\}_{r \in \mathbb{Q}}$. Concluimos entonces que $\tilde{\rho}$ es una escalera del diablo. \square

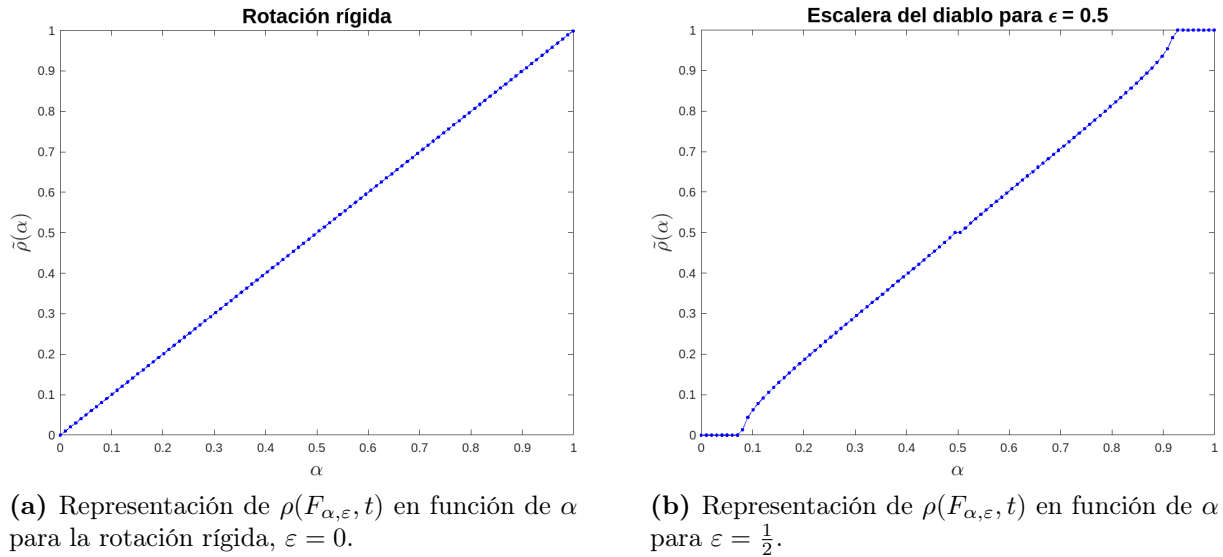


Figura 3.4: Comparación de $\rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t)$ para rotación rígida y $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

En las Figuras 3.4 y 3.5 podemos observar cómo pasamos de una línea recta en la rotación rígida correspondiente a $\varepsilon = 0$ a gráficas que presentan intervalos de *frequency locking* al aumentar el valor de ε .

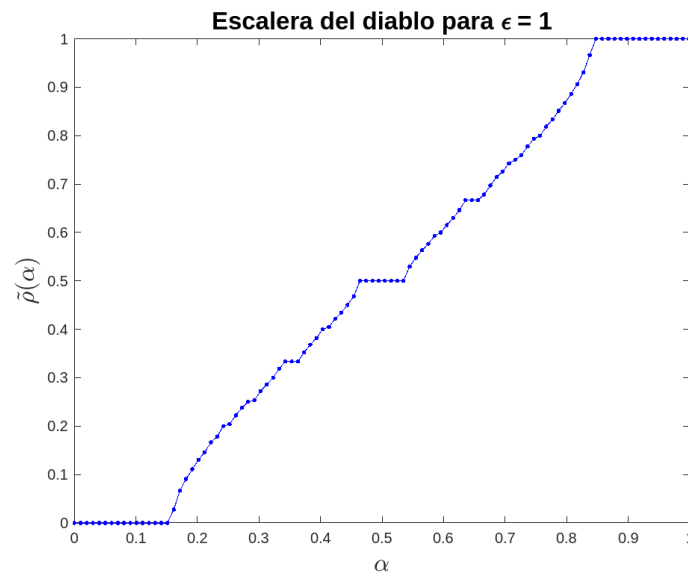


Figura 3.5: Representación de $\rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t)$ en función de α para $\varepsilon = 1$.

La Figura 3.5, caso $\varepsilon = 1$, recuerda a la escalera del diablo asociada al conjunto ternario de Cantor que introdujimos en el Ejemplo 3.1 y que está representada en la Figura 3.3. En la Figura 3.5 se aprecia especialmente el fenómeno de *frequency locking* y en consecuencia algunos autores la denominan *escalera del diablo completa* (ver [8]). Como veremos a continuación, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$C = \{\alpha \in [0, 1) : \tilde{\rho} \text{ es estrictamente creciente en } \alpha\}$$

es un conjunto de Cantor, y por lo tanto homeomorfo al conjunto ternario de Cantor.

Teorema 3.10. *Sea $\varepsilon \in (0, 1]$. El conjunto*

$$C = \{\alpha \in [0, 1) : \tilde{\rho} \text{ es estrictamente creciente en } \alpha\}$$

es un conjunto de Cantor.

Demostración. Como $C \subset \mathbb{R}$, para probar que es un conjunto de Cantor debemos probar que es un conjunto no vacío, compacto, perfecto y denso en ninguna parte.

En primer lugar, veamos que es un conjunto no vacío. Por la Proposición 3.5, sabemos que para cada $t \in \mathbb{R}$ la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : [0, 1) &\rightarrow [0, 1) \\ \alpha &\mapsto \rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t) \end{aligned}$$

es continua. Como $\tilde{\rho}$ es continua y $[0, 1)$ es conexo, $\tilde{\rho}([0, 1))$ es un conjunto conexo contenido en \mathbb{R} . Por lo tanto, es un intervalo. Los irracionales son densos en \mathbb{R} , de donde $\tilde{\rho}([0, 1)) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Así, existe $\alpha \in [0, 1)$ de manera que

$$\tilde{\rho}(\alpha) \in [0, 1) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Por los Teoremas 3.7 y 3.8, sabemos que

$$C = \{\alpha \in [0, 1) : \tilde{\rho} \text{ es estrictamente creciente en } \alpha\} = \{\alpha \in [0, 1] : \rho(f_{\alpha, \varepsilon}) \in [0, 1) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

En consecuencia, $\alpha \in C$, y por tanto $C \neq \emptyset$. A continuación, probaremos que C es cerrado, equivalentemente, que $C = \overline{C}$. Sea $\alpha \in \overline{C}$ y supongamos que $\alpha \notin C$. Entonces, $\tilde{\rho}(\alpha) = r \in \mathbb{Q}$. Por el Teorema 3.7, existe I_r un intervalo no trivial de manera que $\alpha \in I_r$.

Pero como $\alpha \in \overline{C}$, tenemos que $C \cap I_r \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción con la definición de C . Así, $\alpha \in C$ y por tanto, C es cerrado. Además, $C \subset [0, 1)$, por lo que es claro que además C es acotado y en definitiva, compacto.

Para probar que C es un conjunto perfecto, debemos probar además que todos sus puntos son de acumulación. Sea $\alpha_0 \in C$ arbitrario. Queremos probar que para cada $\delta > 0$

$$(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta) \setminus \{\alpha_0\} \cap C \neq \emptyset.$$

Es claro que

$$(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta) \setminus \{\alpha_0\} = (\alpha_0 - \delta, \alpha_0) \cup (\alpha_0, \alpha_0 + \delta).$$

Como $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0)$ es un conjunto conexo y $\tilde{\rho}$ es una función continua, $\tilde{\rho}((\alpha_0 - \delta, \alpha_0))$ es un conjunto conexo en \mathbb{R} , y por tanto un intervalo. Como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en \mathbb{R} , $\tilde{\rho}((\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Es decir, existe $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0)$ de manera que

$$\tilde{\rho}(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Por lo tanto, $\alpha \in C$ y en definitiva,

$$\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta) \setminus \{\alpha_0\} \cap C \neq \emptyset.$$

Tenemos entonces que C es un conjunto cerrado y todos sus puntos son de acumulación, por lo que es perfecto. Por último, demostraremos que C es denso en ninguna parte. Como C es cerrado, es claro que $\overline{C} = C$. Supongamos que $\text{Int } C \neq \emptyset$. Entonces, existen $\alpha_0 \in C$ y $\delta > 0$ de manera que

$$(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta) \subset C.$$

De nuevo, como $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ es conexo y $\tilde{\rho}$ es continua, $\tilde{\rho}((\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta))$ es un intervalo. Por lo tanto, como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , existe $r \in \mathbb{Q}$ de manera que $r \in \tilde{\rho}((\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)) \cap \mathbb{Q}$. Así, existe $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ tal que

$$\tilde{\rho}(\alpha) = r \in \mathbb{Q}.$$

Por el Teorema 3.8, $\tilde{\rho}$ es constante con valor r en cierto intervalo que contiene a α , lo cual contradice

$$\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta) \subset C.$$

Obtenemos entonces que $\text{Int } C = \emptyset$, esto es, C es denso en ninguna parte. Es decir, $C \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío, compacto, perfecto y denso en ninguna parte. Por lo tanto, C es un conjunto de Cantor. \square

3.2. Interpretación del *frequency locking*

Los resultados obtenidos en la sección anterior sobre la dependencia del número de rotación $\rho(f_{\alpha, \varepsilon})$ en función del parámetro α también nos proporcionan información acerca de los flujos en el toro 2-dimensional. Discutiremos cualitativamente algunos resultados que podemos extraer del

estudio de la familia de Arnold para el estudio de sistemas de osciladores acoplados, utilizando como referencia [2], [5] y [8]. Comenzamos estudiando la interpretación en el toro del fenómeno *frequency locking*.

3.2.1. Sistema de osciladores acoplados

El *frequency locking* ocurre cuando la interacción de los dos osciladores no lineales hace que se sincronicen de forma que sus frecuencias básicas se vuelven conmesurables (lo cual implica una órbita periódica) y se mantienen de esta forma para un intervalo de parámetros. Recordemos que estamos estudiando un sistema de osciladores acoplados dado por el campo (3.1)

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 + c_1 f(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \omega_2 + c_2 f(\theta_1 - \theta_2), \end{cases} \quad (3.7)$$

y la aplicación de Poincaré

$$P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2} : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$x \mapsto P_{\omega_1, \omega_2, c_1, c_2}(x) = \exp(2\pi i(t + \alpha) + ig(t, \alpha, \varepsilon)),$$

con $g(t, \alpha, \varepsilon) = \varepsilon \sin(2\pi t)$. Supongamos que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. En ese caso, $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \omega t$ es una solución de (3.1) para cualquier valor de c_1 y c_2 . Además, $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$, y es claro que si además $c_1 = c_2 = 0$, entonces la aplicación de Poincaré es la identidad.

Para $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ y para valores pequeños de $\omega_2 - \omega_1$ estamos considerando $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \approx 1$. Por el Teorema 3.8, sabemos que existe $\delta > 0$ de forma que para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t) = 1$ para todo $\alpha \in (1 - \delta, 1]$, y en este caso $f_{\alpha, \varepsilon}$ presenta órbitas de periodo 1, es decir, puntos fijos. Además, todas las órbitas son asintóticas a puntos fijos. Por lo tanto, los dos osciladores se sincronizan siempre que sus frecuencias naturales estén suficientemente cerca una de la otra.

En general, para cada par ω_1, ω_2 , sin pérdida de generalidad, podemos considerar $\omega_2 \neq 0$ y $\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \in [0, 1)$. Por el Teorema 3.8 para cada $r \in \mathbb{Q} \cup [0, 1)$ con $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, existe $\delta_r > 0$ de forma que si $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in (\alpha_r - \delta, \alpha_r + \delta)$, entonces $\rho(f_{\alpha, \varepsilon}) = \frac{p}{q}$, y por lo tanto todas las soluciones correspondientes de (3.1) son todas asintóticas a una solución periódica con frecuencias iguales o al menos conmesurables.

Ahora bien, sabemos que para cada $\varepsilon \in [0, 1]$ el conjunto

$$C = \{\alpha \in [0, 1] : \rho(f_{\alpha, \varepsilon}) \in [0, 1) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

verifica que $C \neq \emptyset$, por lo que existen valores de ω_1, ω_2 para los que el sistema (3.1) no presenta un comportamiento periódico o asintóticamente periódico. Los levantamientos de $F_{\alpha, \varepsilon}$ son de clase

\mathcal{C}^2 , por lo que en el caso $\rho(f_{\alpha,\varepsilon}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ podemos aplicar los Teoremas de Denjoy y concluir que $f_{\alpha,\varepsilon}$ es conjugada a una rotación rígida. Es claro además que para cualquier circunferencia inscrita en el toro obtenemos esencialmente la misma aplicación de Poincaré salvo por una constante aditiva en los levantamientos correspondientes. Así, cuando $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el sistema (3.1) es cuasiperiódico.

3.2.2. Lenguas de Arnold

Las lenguas de Arnold son una representación más detallada del *fenómeno de frequency locking* en el espacio paramétrico, teniendo en cuenta no solo la dependencia del número de rotación con respecto a α sino la variación de la longitud de los intervalos de *frequency locking* en función de ε . En esta sección, estudiaremos gráficamente el comportamiento del número de rotación $\rho(f_{\alpha,\varepsilon})$ al variar tanto el parámetro α como el parámetro ε . Como referencia, utilizamos [8].

Notamos que, en la rotación rígida, teníamos que $\rho(f_\alpha) = \alpha$. Así, el conjunto de valores de $\alpha \in [0, 1)$ para los que existen órbitas periódicas en el sistema (3.1) coincide con $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, y por tanto es un conjunto de medida de Lebesgue nula. Si $\varepsilon > 0$, denotamos

$$C_\varepsilon = \{\alpha \in [0, 1] : \rho(f_{\alpha,\varepsilon}) \in [0, 1) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Entonces, dado $t \in \mathbb{R}$ arbitrario,

$$[0, 1) = C_\varepsilon \cup \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} I_{r,\varepsilon} \right),$$

donde $I_{r,\varepsilon}$ denota el conjunto

$$I_{r,\varepsilon} = \{\alpha \in [0, 1) : \rho(F_{\alpha,\varepsilon}, t) = r\},$$

que, por el Teorema 3.8, es un intervalo no trivial. Consideremos $l(I_{r,\varepsilon})$ la longitud de cada intervalo y denotamos

$$S(\varepsilon) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} l(I_{r,\varepsilon}),$$

que es la medida de Lebesgue del conjunto de valores de α para los cuales el sistema presenta órbitas periódicas. Es claro entonces que

$$T(\varepsilon) = \mu_1(C_\varepsilon)$$

con μ_1 la medida de Lebesgue en \mathbb{R} es la medida de los valores de α para los que el sistema (3.1) presenta órbitas cuasiperiódicas.

Arnold demuestra (ver [1]) que, así como para $\varepsilon = 0$ tenemos que $S(\varepsilon = 0) = 0$ y $T(\varepsilon = 0) = 1$,

para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que $S(\varepsilon), T(\varepsilon) \in (0, 1)$, es decir, ambos conjuntos tienen medida nula. Para $\varepsilon = 1$, se tiene que $S(\varepsilon = 0) = 1$ y $T(\varepsilon = 1) = 0$, es decir, el conjunto de valores de α para los que el flujo es cuasiperiódico tiene medida nula, y por lo tanto para cada $\alpha \in [0, 1)$ excepto para un conjunto de medida 0, los dos osciladores se acoplan y el sistema presenta órbitas periódicas. Además, S es creciente en ε y T es decreciente en ε . Sea $r \in [0, 1) \cup \mathbb{Q}$. Consideramos el conjunto

$$L_r = \{(\varepsilon, \alpha) \in [0, 1] \times [0, 1) : \rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t) = r\}$$

Nuestro objetivo es caracterizar la forma de los conjuntos L_r en el espacio $(\varepsilon, \alpha) \in [0, 1] \times [0, 1)$. Para empezar, fijado ε , notamos que si r es irracional, entonces por el Teorema 3.7 existe un único $\alpha \in [0, 1)$ tal que $\rho(f_{\alpha, \varepsilon}) = r$. Por lo tanto, si r es irracional, L_r es una curva.

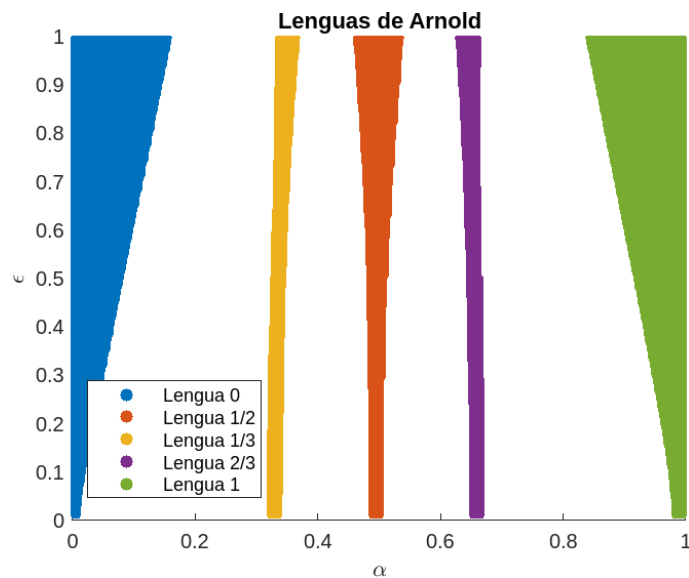


Figura 3.6: Representación de las lenguas de Arnold

Supongamos ahora que r es racional. En el caso $\varepsilon = 0$, tenemos las rotaciones rígidas f_α , y sabemos que $\rho(f_\alpha) = r$ si y solo si $\alpha = r$. Sin embargo, si $\varepsilon \in (0, 1]$ sabemos por el Teorema 3.8 que existe un intervalo $I_{r, \varepsilon}$ de forma que

$$\rho(F_{\alpha, \varepsilon}, t) = r$$

para todo $\alpha \in I_{r, \varepsilon}$. Además, se puede demostrar que, para cada $r \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, la longitud de los intervalos $I_{r, \varepsilon}$ es creciente en ε (ver Figura 3.6). Por lo tanto, los conjuntos L_r presentan una forma característica que se suele denominar *lengua de Arnold*. Finalmente, notamos que los conjuntos L_r tienen intersección vacía entre sí porque $f_{\alpha, \varepsilon}$ es un homeomorfismo para todo $\varepsilon \in [0, 1], \alpha \in [0, 1)$ y por tanto su número de rotación está bien definido.

Conclusiones

El enfoque principal de este Trabajo Fin de Grado ha sido explorar la dinámica de los homeomorfismos en la circunferencia unidad a partir del concepto de número de rotación. Este parámetro, fundamental en el estudio de sistemas dinámicos en una dimensión, nos ha permitido caracterizar el comportamiento promedio de las órbitas bajo la acción de diversas aplicaciones.

A pesar de ser un concepto bien establecido, realizar una demostración formal y completa de la existencia y unicidad del número de rotación resultó todo un desafío. Una vez obtenido este resultado fundamental, fuimos capaces además de estudiar a grandes rasgos cuáles son las posibles dinámicas que puede presentar un homeomorfismo de la circunferencia unidad en función de su número de rotación, y en particular, de su carácter racional o irracional.

Sin embargo, nuestro análisis dejó fuera algunos resultados importantes, cuyo estudio en profundidad queda para futuras exploraciones. En particular, los teoremas de Poincaré y Denjoy caracterizan la dinámica de homeomorfismos de número de rotación irracional. También habría sido interesante analizar con más profundidad las posibles órbitas no periódicas que puede presentar un homeomorfismo con número de rotación racional.

Por último, aplicamos los resultados obtenidos para homeomorfismos de la circunferencia unidad a la familia de aplicaciones estándar de Arnold. El interés en estudiar esta familia radica en la aparición de fenómenos como el *frequency locking*, las escaleras del diablo y las lenguas de Arnold. Se trata de fenómenos observables en una amplia gama de sistemas naturales y artificiales. En especial, la exploración de las lenguas de Arnold, que introducimos en el Capítulo 3, abre la puerta a un análisis más profundo de cuestiones relacionadas con el caos, los sistemas hamiltonianos y la aplicación estándar de Chirikov.

En definitiva, aunque hemos establecido una base en el estudio de los homeomorfismos en la circunferencia unidad y, en particular, de la familia de aplicaciones estándar de Arnold, el campo sigue ofreciendo numerosas oportunidades para futuros proyectos.

Bibliografía

- [1] Arnol'd, V.I. Small denominators. I. Mapping the Circle onto Itself. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 25(1):21–86, 1961.
- [2] Broer, H.W., Dumortier, F., Van Strien, S. y Takens, F. *Structures in Dynamics: Finite Dimensional Deterministic Studies*. Elsevier, 1991.
- [3] De Melo, W. y Van Strien, S. *One-Dimensional Dynamics*, tomo 25. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. CRC Press, 2021.
- [5] Hasselblatt, B. y Katok, A. *A First Course in Dynamics: With a Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press, 2003.
- [6] Katok, A. y Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, tomo 54. Cambridge University Press, 1995.
- [7] Munkres, J. *Topología, 2ª edición*. Pearson Educación, 2002.
- [8] Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] Poincaré, H. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1:167–244, 1885.
- [10] Robinson, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press, 1998.
- [11] Turer, G. Dynamical systems on the circle. Informe técnico, University of Chicago, 2019. Mimeo, <http://math.uchicago.edu/may/REU2019/REUPapers/Turer.pdf>.
- [12] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2003. ISBN 9780387001777. URL <https://books.google.es/books?id=RSI4RGdwnU4C>.