



Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE
BIFURCACIONES EN LOS SISTEMAS
DINÁMICOS

Autor: FERNANDO ALONSO FERNÁNDEZ

TUTOR: JESÚS SUÁREZ PÉREZ DEL RÍO

2 de junio de 2024

Índice general

Introducción	3
1. Preliminares	5
1.1. Introducción a los sistemas dinámicos	5
1.1.1. Espacio de estados	5
1.1.2. Tiempo	6
1.1.3. Evolución	6
1.1.4. Definición formal de sistema dinámico	7
1.1.5. Retratos de fase y órbitas	8
1.1.6. Conjuntos invariantes	10
1.1.7. Equivalencia entre sistemas dinámicos	11
1.2. Sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales	14
1.2.1. Clasificación topológica de puntos de equilibrio y puntos fijos	16
1.3. Aplicaciones de Poincaré	19
1.4. Teoremas clásicos	21
2. Bifurcaciones	23
2.1. Introducción a las bifurcaciones	23
2.1.1. Estabilidad estructural	24
2.1.2. Valores y diagramas de bifurcación	26
2.2. Problema de clasificación	27
2.2.1. Formas topológicas normales	30
2.3. Bifurcaciones uniparamétricas en sistemas continuos	31
2.3.1. Condiciones de bifurcación simples	31
2.3.2. Bifurcación tangencial	32
2.3.3. Bifurcación de Hopf	37
2.3.4. Bifurcaciones especiales	47
2.4. Bifurcaciones uniparamétricas en sistemas discretos	53
2.4.1. Condiciones de bifurcación simples	53
2.4.2. Bifurcación tangencial	54
2.4.3. Bifurcación de duplicación de periodo	58
2.4.4. Bifurcación de Neimark-Sacker	62
2.5. Bifurcaciones en sistemas de dimensión n	69
2.5.1. La variedad central en sistemas continuos	70

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
2.5.2. La variedad central en sistemas discretos	73
2.5.3. La variedad central en sistemas paramétricos	74
3. Aplicaciones	79
3.1. Sistemas de tipo Lorenz	79
3.1.1. Bifurcaciones en el sistema de Lü	81
3.1.2. Conclusiones	89
3.2. La parábola logístitica de May	89
3.2.1. Bifurcaciones en la parábola logística de May	90
3.2.2. Conclusiones	93
3.3. Camino al caos	94
Objetivos alcanzados	95
Bibliografía	97

Introducción

Los sistemas dinámicos permiten representar matemáticamente los procesos que evolucionan con el tiempo de acuerdo con un conjunto de reglas deterministas. Estos sistemas pueden ser lineales o no lineales, y en el caso no lineal puede ocurrir que incluso con un modelo determinista exista una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que significa que pequeñas variaciones en el estado inicial pueden llevar a resultados muy dispares.

Los sistemas dinámicos se utilizan en una amplia variedad de campos, como la física, la biología, la economía y la ingeniería, para modelar y predecir el comportamiento de fenómenos [Fer+12]. El estudio de dichos sistemas resulta de interés en el caso en que estos dependan de ciertos parámetros, cuya variación pueda dar lugar a un cambio del comportamiento del sistema y la consecuente influencia en la evolución de los procesos que se pretenden modelizar a través de este. Todo ello da lugar a lo que se conoce como la Teoría de Bifurcaciones.

En este trabajo se abordará el estudio de los fundamentos básicos de la citada teoría, se analizarán detalladamente las bifurcaciones más generales que se producen en los sistemas (continuos y discretos) de baja dimensión y se pondrán de relieve sus importantes aplicaciones prácticas.

Para iniciar nuestro trabajo resulta necesario introducir los conceptos que se utilizarán a lo largo del mismo, para lo cual se ha incluido un primer capítulo de preliminares y conceptos básicos en los que se apoya la teoría de los sistemas dinámicos, para lo que nos hemos basado fundamentalmente en [Kuz04], [GH83] y [HK91]. Entre ellos destacan la definición formal de sistema dinámico, los conceptos de conjuntos invariantes como son los puntos fijos o puntos de equilibrio y los ciclos, así como el análisis de su estabilidad. Todo ello proporcionará las herramientas necesarias para poder comprender y asimilar el estudio de las bifurcaciones desde el enfoque de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos.

En el segundo capítulo se motivará el estudio del elemento vertebrador de este trabajo, que son las bifurcaciones en sistemas de dimensiones bajas. Ello se hará introduciendo el concepto de codimensión, para posteriormente realizar un estudio detallado de las principales bifurcaciones de codimensión uno a nivel local, en sistemas tanto continuos como discretos. El objetivo de este capítulo es establecer condiciones suficientes para poder determinar si en un sistema genérico se pueda dar alguna de estas bifurcaciones, en entornos de ciertos puntos singulares. Una vez hecho esto, el capítulo finaliza con una introducción a la Teoría de la Variedad Central, la cual es una herramienta que permite, dado un sistema dinámico de dimensión arbitraria, determinar variedades geométricas en donde se puede realizar el estudio de una bifurcación local gracias a la reducción de la dimensión del sistema en cuestión.

El último capítulo del trabajo se ha dedicado al estudio de la aplicación práctica de los resultados obtenidos en el desarrollo previo de la teoría de bifurcaciones. En primer lugar, se ha analizado el sistema de Lü [KHK10] observando como este presenta diferentes tipos de bifurcaciones de Hopf dependiendo de los valores del parámetro de bifurcación del sistema. En segundo lugar, se lleva a cabo el estudio de un ejemplo clásico como es la parábola logística de May, la cual configura el comportamiento de sistemas evolutivos y socioeconómicos [SJ06]; y también presenta ciertas bifurcaciones que abren el camino a la teoría del caos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos básicos en los que se apoya la teoría de los sistemas dinámicos (ver, por ejemplo, [Kuz04], [Sot79] o [Arn88]), necesarios para entender los desarrollos que van a ser llevados a cabo a lo largo del presente trabajo.

1.1. Introducción a los sistemas dinámicos

Coloquialmente hablando, un sistema dinámico es una representación matemática de un proceso (físico, químico, biológico, etc.) que evoluciona con el tiempo. Para poder representar matemáticamente esa evolución, necesitamos definir un conjunto que represente los estados de los elementos que intervienen en el proceso, un conjunto (numérico) que especifique el rango temporal en que se estudia el proceso y la regla de evolución que explique el comportamiento del sistema al desplazarnos en el tiempo.

1.1.1. Espacio de estados

Todos los posibles estados de un sistema vienen caracterizados por los elementos de un determinado conjunto X . Este conjunto se llama **espacio de estados** del sistema. De hecho, los elementos de X sirven para describir tanto la situación del sistema como para determinar su evolución.

Independientemente del espacio de estados que uno considere, todos ellos se caracterizan por tener una estructura determinada que a menudo viene determinada por una métrica, en cuyo caso hablamos de **espacios métricos**.

Un caso muy habitual se tiene cuando $X = \mathbb{R}^n$, es decir, un espacio real de dimensión finita que suele tener asociada la norma euclídea, que se usa para medir la distancia para $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota al producto escalar en \mathbb{R}^n definido por

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n (x_i y_i).$$

1.1.2. Tiempo

La evolución de un sistema dinámico conlleva un cambio en el estado del sistema a través del tiempo. Este vendrá representado por un conjunto numérico T , donde habitualmente para el caso continuo se tomará $T = \mathbb{R}$ y para el caso discreto $T = \mathbb{Z}$.

1.1.3. Evolución

La componente principal de un sistema dinámico es la evolución desde un estado inicial x_0 conocido, a un estado x_t del sistema, en un tiempo t . La forma más general de determinar dicha evolución es a través de una aplicación.

Definición 1.1. Sea X el espacio de estados del sistema dinámico y sea $t \in T$. La aplicación $\varphi^t : X \rightarrow X$ que transforma un estado inicial $x_0 \in X$ en otro estado $x_t = \varphi^t x_0 \in X$ en un tiempo t , se conoce como **operador de evolución** del sistema dinámico

Puede ocurrir tanto que la expresión del operador evolución se conozca explícitamente, como que únicamente se pueda calcular de manera aproximada.

Definición 1.2. Dado un sistema dinámico, la familia de operadores de evolución $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ se conoce como **flujo**.

Se observa que $\varphi^t(x_0)$ puede no estar definido para todos los pares $(x_0, t) \in X \times T$. Los sistemas dinámicos con el operador de evolución φ^t definido tanto para $t \geq 0$ como para $t < 0$ se llaman **invertibles**. En tales sistemas, el estado inicial x_0 define completamente no solo los estados futuros del sistema, sino también su comportamiento previo. Sin embargo, también es útil considerar sistemas dinámicos cuyo comportamiento futuro para $t > 0$ está completamente determinado por su estado inicial x_0 en $t = 0$, pero cuya evolución para $t < 0$ no puede reconstruirse de manera unívoca. Dichos sistemas dinámicos se denotan como **no invertibles** y vienen descritos mediante operadores de evolución definidos solo para $t \geq 0$ (es decir, para $t \in \mathbb{R}^+$ o $t \in \mathbb{Z}^+$).

También es posible que $\varphi^t(x_0)$ esté definido de manera local en el tiempo, por ejemplo, para $0 \leq t < t_0$, donde t_0 depende de $x_0 \in X$. Un ejemplo importante de este comportamiento es cuando un sistema dinámico de tiempo continuo con $X = \mathbb{R}^n$ tiende hacia infinito dentro de un tiempo finito, es decir:

$$\|\varphi^t(x_0)\| \rightarrow +\infty,$$

cuando $t \rightarrow t_0$.

El flujo de un sistema dinámico se suele caracterizar por poseer diferentes propiedades que resultan de gran utilidad a la hora de determinar el comportamiento de los mismos. A continuación mencionamos algunas de ellas.

Propiedad 1.1. Dado el flujo de un sistema dinámico $\{\varphi^t\}_{t \in T}$, se cumple lo siguiente:

- $\varphi^0 \equiv \text{Id}$, donde Id es la aplicación identidad: $\text{Id}(x) = x$, para todo $x \in X$.
- Dados $t, s \in T$ se tiene que $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$, es decir, $\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x))$, para todo $x \in X$.

La primera propiedad indica que el sistema dinámico no cambia su estado de manera repentina, mientras que la segunda afirma que el resultado de la evolución del sistema en el transcurso de $t + s$ unidades de tiempo, comenzando desde un punto $x \in X$, es el mismo que si primero el sistema pasara desde el estado x al estado resultante $\varphi^s(x)$ en solo s unidades de tiempo, y luego evolucionara durante las próximas t unidades de tiempo hasta $\varphi^t(\varphi^s(x))$ ¹.

En un sistema dinámico de tiempo discreto con $t \in \mathbb{Z}$, el flujo viene totalmente determinado por una única aplicación $f = \varphi^1$. De hecho, utilizando las propiedades anteriores se tiene que:

$$\varphi^2 = \varphi^1 \circ \varphi^1 = f \circ f = f^2,$$

donde f^2 es la segunda iteración de la aplicación f . Extendiendo este razonamiento se tendría que $\varphi^k = f^k$ para todo $k > 0$. Si el sistema de tiempo discreto es invertible, la ecuación anterior es válida para $k \leq 0$, donde $f^0 = \text{Id}$.

1.1.4. Definición formal de sistema dinámico

Definición 1.3. Un **sistema dinámico** es una 3-tupla $\{T, X, \varphi^t\}$, donde T es un conjunto de tiempos, X es un espacio de estados y $\varphi^t : X \rightarrow X$ es una familia de operadores de evolución parametrizados para $t \in T$ que satisfacen la *Propiedad 1.1*.

Habitualmente los sistemas dinámicos continuos vienen descritos por ecuaciones diferenciales y los discretos por aplicaciones, como se observa en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1. *Ley de enfriamiento de Newton*

Considerese un sistema dinámico continuo con $T = \mathbb{R}$, que viene dado por la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$T'(t) = K(T(t) - T_A).$$

Este sistema sirve como un modelo sencillo para estudiar la temperatura en cada instante de un objeto que se enfría considerando que la temperatura ambiente es constante, donde $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el instante t , T_A representa la temperatura ambiente y $K < 0$ es el coeficiente de intercambio de calor.

En este caso, dada una condición inicial $T(0) = T_0$ podemos calcular la solución explícita de la ecuación, obteniendo así el flujo del sistema dinámico

$$\{\varphi^t(T_0)\}_{t \in T} \equiv \{T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{Kt} \mid t \in T\}. \quad \diamond$$

¹Para sistemas invertibles, el operador de evolución φ^t satisface la propiedad anterior para valores de t, s tanto positivos como negativos, por tanto, φ^{-t} es el inverso de φ^t , ya que $\text{Id} = \varphi^{t+(-t)} = \varphi^t \circ \varphi^{-t}$

Ejemplo 1.2. *Mapa de Hénon*

Considerese un sistema dinámico discreto donde $T = \mathbb{Z}$, que viene dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

o equivalentemente puede escribirse como la relación de recurrencia

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}.$$

Este sistema fue introducido por Hénon en 1976 [Wen14], motivado por el modelo atmosférico de Lorenz, que estudiaremos en profundidad en el tercer capítulo de este trabajo.

Aunque originalmente fue planteado como un modelo matemático que recogía la dinámica de estiramiento y plegado de sistemas caóticos deterministas, ha sido utilizado para describir la dinámica de algunos sistemas físicos como un oscilador armónico forzado.

En este caso, el flujo del sistema dinámico viene dado por

$$\{\varphi^t\}_{t \in T} \equiv \{f^t \mid f(x, y) = (1 - ax^2 + by, x), (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in T\}. \quad \diamond$$

1.1.5. Retratos de fase y órbitas

A continuación se introducirán una serie de conceptos imprescindibles para entender el comportamiento geométrico básico de un sistema dinámico (T, X, φ^t) .

Definición 1.4. Se define la **órbita** de un sistema dinámico en x_0 , como un subconjunto ordenado de X de la forma:

$$\text{Or}(x_0) = \{x \in X \mid x = \varphi^t(x_0), \text{ para todo } t \in T \text{ tal que } \varphi^t(x_0) \text{ esté definido}\}.$$

De la definición se sigue que si $y_0 = \varphi^t(x_0)$, se cumple que $\text{Or}(y_0) = \text{Or}(x_0)$.

Las órbitas de un sistema continuo en el tiempo, son curvas en el espacio de estados X parametrizadas para un tiempo t con una orientación determinada. En cambio, las órbitas de un sistema discreto en el tiempo son sucesiones de puntos ordenados en X .

Definición 1.5. Sea un sistema dinámico de tiempo continuo. Se dice que $x_0 \in X$ es un **punto de equilibrio** si cumple que $\varphi^t(x_0) = x_0$, para todo $t \in T = \mathbb{R}$.

Definición 1.6. Sea un sistema dinámico de tiempo discreto. Se dice que $x_0 \in X$ es un **punto fijo** si cumple que $\varphi^t(x_0) = x_0$, para todo $t \in T = \mathbb{Z}$.

Las definiciones anteriores tienen una consecuencia muy directa, que es que un sistema que esté en un punto fijo o de equilibrio permanecerá ahí para siempre. Por lo tanto, estos puntos representan el comportamiento más sencillo que puede tener un sistema dinámico.

Observación 1.1. *Las definiciones introducidas hasta ahora son válidas para sistemas dinámicos generales. No obstante, en la teoría que se desarrollará en secciones posteriores, nos centrare-*

mos en sistemas dinámicos $(T, \mathbb{R}^n, \varphi^t)$ determinados por ecuaciones diferenciales o aplicaciones, donde:

- Dado un sistema continuo $\dot{x} = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, un punto de equilibrio x_0 verifica que $f(x_0) = 0$.
- Dado un sistema discreto $x \mapsto f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, un punto fijo x_0 verifica que $f(x_0) = x_0$.

Definición 1.7. Dado un sistema dinámico (T, X, φ^t) , se define un **ciclo** como una órbita periódica L_0 (sin puntos de equilibrio), es decir, para cada $x_0 \in L_0$ se satisface que $\varphi^{t+T_0}(x_0) = \varphi^t(x_0)$, para todo $t \in T$ donde $T_0 > 0$ se conoce como periodo.

En el caso de un sistema dinámico de tiempo continuo, un ciclo es un conjunto de puntos de la forma

$$\{\varphi^{t'}(x_0) \mid t' \in [t, t + T_0]\},$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $T_0 \in \mathbb{R}^+$.

En el caso de un sistema dinámico de tiempo discreto, un ciclo es un conjunto finito de puntos de la forma

$$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{N_0}(x_0) = x_0),$$

donde $f = \varphi^1$ y $T_0 = N_0 \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.8. Se dice que L_0 es un **ciclo límite**, si no existen ciclos adicionales en un entorno de L_0 .

Definición 1.9. El **retrato de fases** es la representación geométrica en el espacio de estados X de las órbitas significativas del sistema y de su orientación en el tiempo.

El retrato de fases contiene mucha información sobre el comportamiento de un sistema dinámico, ya que en él se pueden determinar el número y los tipos de estados asintóticos hacia los cuales tiende el sistema cuando $t \rightarrow \infty$ (y cuando $t \rightarrow -\infty$ si el sistema es invertible).

Diagrama de telaraña

Otra manera de estudiar cualitativamente la dinámica de los sistemas dinámicos discretos, es a través de lo que se conoce como **diagrama de telaraña**².

Consideremos un sistema dinámico discreto

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0 \text{ para } x_0 \text{ dado,}$$

que también puede expresarse como

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La construcción de un diagrama de telaraña sigue el siguiente esquema:

1. Se superponen en el plano las curvas $y = f(x)$ e $y = x$.

²Ver Capítulo 9 de [Lay15] o [Rod].

2. Identificando el punto $(x_0, 0)$, se traza una recta vertical hasta intersectar con $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, para posteriormente trazar una recta horizontal hasta la intersección con $y = x$, cuyas coordenadas serán $(f(x_0), f(x_0))$; y donde la abscisa de este punto se corresponde con la iteración x_1 .
3. Desde el punto $(f(x_0), f(x_0))$ se traza una recta vertical hasta intersectar con $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$, para posteriormente trazar una recta horizontal hasta la intersección con $y = x$, cuyas coordenadas serán $(f(x_1), f(x_1))$; y donde la abscisa de este punto se corresponde con la iteración x_2 .
4. Repitiendo los pasos anteriores de manera iterativa se obtendrá una sucesión de puntos $\{x_0, x_1, \dots\}$ que representa la dinámica del sistema iterativo.

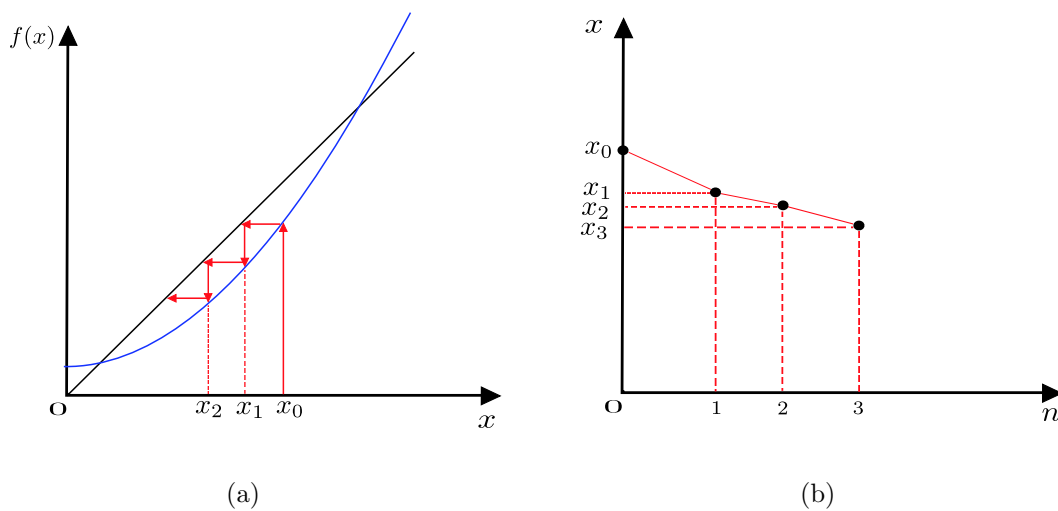


Figura 1.1: Diagrama de telaraña correspondiente al sistema discreto con $f(x) = x^2 + 0.01$.

1.1.6. Conjuntos invariantes

Definición 1.10. Un **conjunto invariante** de un sistema dinámico (T, X, φ^t) es un subconjunto $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$ entonces $\varphi^t(x_0) \in S$, para todo $t \in T$.

La definición implica claramente que $\varphi^t(S) \subset S$ para todo $t \in T$. Siempre se puede restringir el operador de evolución φ^t del sistema a su conjunto invariante S y considerar un sistema dinámico (T, X, ϕ^t) , donde $\phi^t = \varphi^t|_S$.

Un ejemplo muy habitual de conjunto invariante es cualquier órbita $\text{Or}(x_0)$.

Estabilidad de conjuntos invariantes

Para poder representar un estado asintótico observable de un sistema dinámico, un conjunto invariante S_0 debe ser estable en el sentido que introducimos a continuación.

Definición 1.11. Sea un sistema dinámico (T, X, φ^t) , donde X es un espacio métrico completo³ y sea S_0 un conjunto invariante cerrado.

³Un espacio métrico completo (X, d) se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy contenida en X converge a un $x_0 \in X$.

Se dice que S_0 es:

1. **Estable en el sentido de Lyapunov**, si para cualquier entorno U suficientemente pequeño de S_0 , existe otro entorno V de S_0 tal $\varphi^t(x) \in U$, para todo $x \in V$ y para todo $t > 0$.
2. **Asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov**, si existe un entorno U_0 de S_0 tal que $\varphi^t(x) \rightarrow S_0$, para todo $x \in U_0$, cuando $t \rightarrow +\infty$.

Esto también nos lleva a formular las siguientes definiciones.

Definición 1.12. Dado un conjunto invariante A_0 , se dice que es un **atractor** si existe un entorno U_{A_0} de A_0 tal que si $x \in U_{A_0}$, entonces $\varphi^t(x) \rightarrow A_0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Definición 1.13. Dado un conjunto invariante R_0 , se dice que es un **repulsor** si existe un entorno U_{R_0} de R_0 tal que si $x \in U_{R_0}$, entonces $\varphi^t(x) \rightarrow R_0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Con relación a lo anterior podemos realizar una serie de comentarios. Por un lado, es claro que existen conjuntos invariantes que son estables en el sentido de Lyapunov, pero que no son asintóticamente estables, y que además un conjunto atractor es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov, mientras que un repulsor es claramente inestable.

Por otro lado, también existen conjuntos invariantes que son atractores, pero no son estables en el sentido de Lyapunov. Esto ocurre debido a que puede haber entornos de S_0 , donde existan órbitas que tanto en un principio como eventualmente estén cerca de S_0 , pero hayan abandonado dicho entorno en algún momento del transcurso de su evolución.

Por último, en el caso de los sistemas discretos, la estabilidad de conjuntos invariantes se puede ver reflejada en los diagramas de telaraña a través de los siguientes elementos:

- Un punto fijo asintóticamente estable viene dado por una disminución en la longitud de los segmentos verticales, o por una especie de espiral atractora.
- Un punto fijo inestable viene dado por un aumento en la longitud de los segmentos verticales, o por una especie de espiral repulsora.
- Una órbita de período 2 se representa por un rectángulo, mientras que ciclos de períodos mayores dan lugar a bucles más complejos.

1.1.7. Equivalencia entre sistemas dinámicos

El estudio de los sistemas dinámicos presenta la necesidad de clasificar objetos atendiendo a propiedades que les sean comunes. Para ello, es necesario establecer equivalencias para definir clases de objetos y analizar las transiciones entre estas clases. Así, si entendemos que la estructura orbital es lo que distingue a un retrato de fases, es de esperar que bajo ciertas perturbaciones sobre los mismos se seguirán preservando muchas características importantes, dando lugar a retratos de fases equivalentes.

De este modo, resulta imprescindible especificar que tipo de perturbaciones y transformaciones se pueden realizar y hasta qué grado se exige que se preserve la estructura orbital.

A lo largo de la literatura se tratan diferentes conceptos acerca de la equivalencia entre siste-

mas, y en esta sección introduciremos estas nociones, comenzando por la conjugación topológica.

Definición 1.14. Sea una aplicación $f : A \rightarrow B$, se dice que f es un **homeomorfismo** si es una aplicación biyectiva y continua, y $f^{-1} : B \rightarrow A$ también es una aplicación continua.

Definición 1.15. Sea una aplicación $f : A \rightarrow B$, biyectiva, continua y con $f^{-1} : B \rightarrow A$ continua, es decir, un homeomorfismo. Si f y f^{-1} son de clase C^k , se dice que f es un **C^k -difeomorfismo**.

Definición 1.16. Sean dos sistemas dinámicos (T, X, φ^t) y (T, Y, ψ^t) . Se dice que estos sistemas son **topológicamente conjugados** si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que

$$h(\varphi^t(x_0)) = \psi^t(h(x_0)).$$

En primera instancia, se podría pensar que imponer la condición de que h sea un C^1 -difeomorfismo es algo natural. Sin embargo, podemos observar en el siguiente ejemplo como para dos ecuaciones lineales de primer orden muy sencillas supone un problema.

Ejemplo 1.3. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sean las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{x} = -2x. \quad (1.1)$$

Claramente, ambas ecuaciones tienen retratos de fases equivalentes, ya que sus soluciones para una condición inicial $x(0) = x_0$ vienen dadas por:

$$\varphi^t(x_0) = e^{-t}x_0, \quad \psi^t(x_0) = e^{-2t}x_0.$$

Suponiendo ahora que existe un C^1 -difeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entre ambos sistemas, claramente se ha de verificar que

$$h(\varphi^t(x)) = h(e^{-t}x_0) = e^{-2t}h(x_0) = \psi^t(h(x)).$$

Si derivamos respecto de la condición inicial x_0 obtenemos que

$$h'(e^{-t}x_0) \cdot e^{-t} = e^{-2t} \cdot h'(x_0).$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, dado el carácter autónomo de las ecuaciones, que $x_0 = 0$, lo que nos lleva a que

$$e^{-t} \cdot h'(0) = e^{-2t} \cdot h'(0).$$

Como h es un C^1 -difeomorfismo, ha de ser invertible, y consecuentemente se ha de tener que $h'(0) \neq 0$. Con lo cual, en vista de la expresión anterior, se tendría que $1 = 2$ lo cuál, supone una contradicción, e implica que no siempre podemos exigir que h sea un C^1 -difeomorfismo. \diamond

Por otro lado, se ha de notar que en la conjugación topológica el homeomorfismo h ha de preservar la parametrización temporal. Esta condición también puede resultar demasiado exigente a veces, y en realidad es suficiente con exigir que el homeomorfismo simplemente conserve el sentido de las órbitas. Esto es lo que se conoce como equivalencia topológica.

Definición 1.17. Sean dos sistemas dinámicos (T, X, φ^t) y (T, Y, ψ^t) . Se dice que estos sistemas son **topológicamente equivalentes**, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, que lleva las órbitas del primero en las órbitas del segundo preservando la dirección temporal, pero no necesariamente la parametrización.

Esto es, dado cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}$, existe $s : I_{\bar{x}} \rightarrow I_{h(\bar{x})}$ una función creciente para cada \bar{x} , se tiene que

$$h(\varphi^t(\bar{x})) = \psi^{s(t, h(\bar{x}))}(h(\bar{x})).$$

Hemos de notar que dos sistemas que sean topológicamente conjugados son topológicamente equivalentes, pero el recíproco no es cierto. Esto es algo que se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4. Sean dos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{y} = By, \quad (1.2)$$

con valores propios asociados $\lambda_{1,2}^A = \pm i$ y $\lambda_{1,2}^B = \pm 2i$, respectivamente.

Dadas las condiciones iniciales $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02})$ e $y(0) = y_0 = (y_{01}, y_{02})$ diferentes de cero, la solución de cada uno de los sistemas viene dada por

$$\varphi^t(x_0) = \begin{pmatrix} x_{01} \cos(t) - x_{02} \sin(t) \\ x_{01} \cos(t) + x_{02} \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \psi^t(y_0) = \begin{pmatrix} y_{01} \cos(2t) - y_{02} \sin(2t) \\ y_{01} \cos(2t) + y_{02} \sin(2t) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

En este caso las órbitas de ambos sistemas son círculos concéntricos en torno al punto $(0, 0)$, y bastaría con definir $h(x) = 1/x$ y $s(t, h(x)) = t/2$ para demostrar que estos sistemas son topológicamente equivalentes. Sin embargo, no se tiene que sean topológicamente conjugados, ya que si consideráramos que h tiene que preservar la parametrización temporal, entonces h dejaría de ser inyectiva y por tanto, dejaría de ser un homeomorfismo.

Para ver esto basta con observar que como los flujos están compuestos por funciones trigonométricas, el flujo $\varphi^t(x_0)$ tiene periodicidad 2π y el flujo $\psi^t(y_0)$ tiene periodicidad π . Esto significa que

$$\varphi^t(x_0) = \varphi^{t+2\pi}(x_0), \quad \psi^t(y_0) = \psi^{t+\pi}(y_0).$$

Con lo cual aplicando el homeomorfismo h se observa que

$$h(\varphi^{2\pi}(x_0)) = \psi^{2\pi}(h(x_0)) = \psi^\pi(\psi^\pi(h(x_0))) = \psi^\pi(h(x_0)) = h(\varphi^\pi(x_0)).$$

Dado que $\varphi^{2\pi}(x_0) \neq \varphi^\pi(x_0)$ por la periodicidad del flujo φ^t , se tiene que h no es biyectivo y, por tanto, los sistemas no son topológicamente conjugados. Sin embargo, sus retratos de fase son similares, ya que se corresponden a los de dos centros lineales, cuya única variación es la “velocidad” de recorrido de cada órbita. \diamond

Por último, puede resultar de interés estudiar la equivalencia entre sistemas a nivel local, es decir, en entornos de ciertos puntos cuyas propiedades sean singulares, como pueden ser los puntos de equilibrio o puntos fijos.

Definición 1.18. Un sistema dinámico (T, X, φ^t) se dice **localmente topológicamente equi-**

valente cerca de un punto equilibrio o en su caso un punto fijo $x_0 \in X$, a un sistema dinámico (T, Y, ψ^t) cerca de un punto equilibrio o en su caso un punto fijo $y_0 \in Y$, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ que verifica:

- Está definido en un entorno $U \subset X$ de x_0 .
- Satisface que $y_0 = h(x_0)$.
- Lleva las órbitas del primer sistema en U a órbitas del segundo sistema en $V = h(U) \subset Y$, preservando la dirección temporal.

Además, si U es un conjunto abierto, entonces V es también un conjunto abierto.

1.2. Sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales

Una de las maneras más habituales de representar un sistema dinámico es a través de una ecuación diferencial. El objetivo de esta sección es dar una serie de nociones fundamentales para relacionar estos dos conceptos y poder así desarrollar una teoría alrededor de los mismos.

Definición 1.19. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in X = \mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable, que denotaremos campo de vectores.

Se tiene que un sistema de n ecuaciones diferenciales autónomas viene descrita por la expresión

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, \dots, x_n), \text{ para todo } i = 1, \dots, n,$$

o equivalentemente en forma vectorial

$$\dot{x} = f(x).$$

Es necesario enunciar a continuación un resultado fundamental, que establece la existencia y unicidad de soluciones de un sistema de EDOs ⁴.

Teorema 1.1. Existencia y Unicidad de Soluciones

Sea un sistema de n -ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para U un abierto en \mathbb{R}^n .

Entonces existe una única función $x = x(t, x_0)$, donde $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular en (t, x_0) para cada $x_0 \in U$ y satisface las siguientes condiciones:

- $x(0, x_0) = x_0$.
- Existe un intervalo $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$, donde α_{x_0} y β_{x_0} dependen del punto x_0 , tal que para todo $t \in I_{x_0}$ se tiene que $x(t, x_0) \in U$ y $\dot{x}(t, x_0) = f(x(t, x_0))$.

La función $x = x(t, x_0)$ es una solución del sistema de EDO's con condición inicial en x_0 . Esta función da lugar a dos curvas para cada $x_0 \in U$:

⁴Se denotan a las ecuaciones diferenciales ordinarias como EDOs.

- $\text{Cr}(x_0) = \{(t, x) \mid x = x(t, x_0), \text{ para todo } t \in I_{x_0}\} \in \mathbb{R}^n$ es la curva correspondiente a la solución, que en $t = 0$ pasa por x_0 .
- $\text{Or}(x_0) = \{x \mid x = x(t, x_0), \text{ para todo } t \in I_{x_0}\} \in \mathbb{R}^n$ es la órbita que es la proyección sobre \mathbb{R}^n de la curva de la solución $\text{Cr}(x_0)$.

Ahora estamos en condiciones de establecer cuál es el operador de evolución para un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales. Este vendrá dado por $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y actúa como $\varphi^t(x_0) = x(t, x_0)$, es decir, a cada x_0 le asigna un punto en la órbita a través de x_0 para un tiempo t . Cada operador de evolución φ^t está definido para $x \in U$ y $t \in I_{x_0}$, donde recordemos que I_{x_0} depende de x_0 .

Ejemplo 1.5. *El péndulo simple*

Un ejemplo clásico y muy ilustrativo para mostrar los conceptos geométricos asociados a una ecuación diferencial es el del péndulo simple.

La expresión que modela el movimiento de un péndulo de longitud l , formando un ángulo $\theta(t)$ con la normal y que se mueve en el plano vertical, es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\theta) = 0.$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se puede reescribir como un sistema de dos ecuaciones lineales introduciendo las variables $x_1(t) = \theta(t)$ y $x_2(t) = \frac{d\theta}{dt}$, de tal manera que se obtiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g/l \cdot \sin(x_1) \end{cases} \quad (1.4)$$

La solución a esta ecuación no es algo trivial, ya que el término sinusoidal que aparece en el segundo miembro del sistema complica las cosas. Sin embargo, resulta posible dar una representación gráfica de la curva de la solución en el plano (t, x_1, x_2) y de la órbita correspondiente en el plano (x_1, x_2) . \diamond

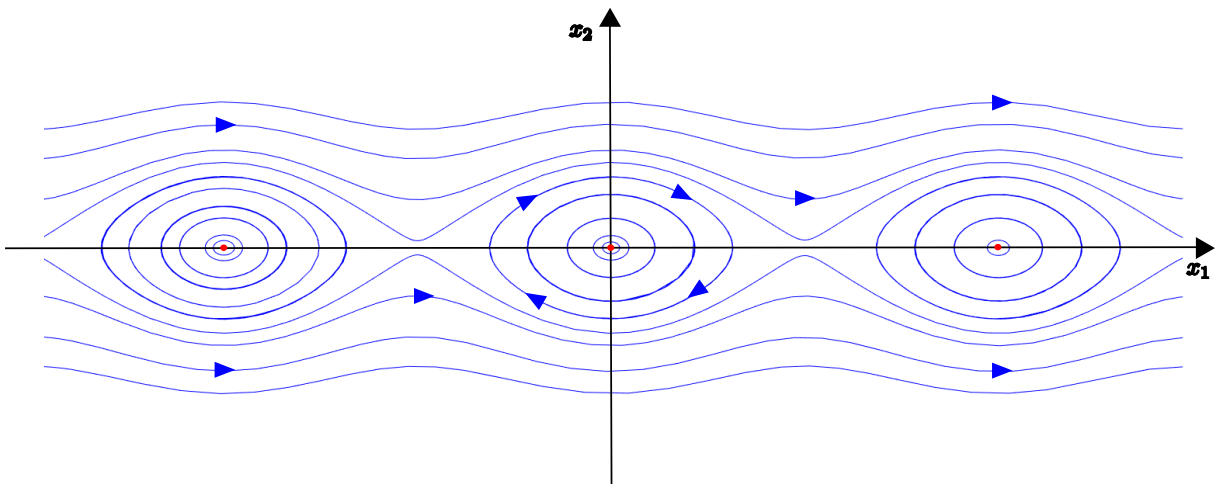


Figura 1.2: Órbitas del sistema (1.4).

1.2.1. Clasificación topológica de puntos de equilibrio y puntos fijos

Uno de los aspectos más útiles de la teoría cualitativa, es poder predecir algunas características del retrato de fases de un sistema definido por EDOs sin resolver explícitamente el sistema, lo cual puede resultar computacionalmente costoso. Por ello, el ejemplo más habitual de puntos de interés para estudiar los retratos de fases, son los puntos de equilibrio o puntos fijos. Así, en esta subsección se estudiará la geometría de los retratos de fases cerca de estos puntos, analizando la estabilidad de los mismos a través una clasificación topológica.

Puntos de equilibrio en sistemas dinámicos continuos

Sea un sistema dinámico de tiempo continuo definido por:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es una función regular. Sea $x_0 = 0$ un punto de equilibrio del sistema y sea A la matriz jacobiana evaluada en x_0 , es decir, $A = J_f(x_0)$. Sean n_- , n_0 y n_+ la cantidad de valores propios de A con parte real negativa, cero y positiva, respectivamente.

Una manera de estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio, es estableciendo condiciones sobre la matriz jacobiana del sistema evaluada en dichos puntos. Esto queda reflejado en el siguiente resultado.

Teorema 1.2. [Lyapunov (1892)]

Sea un sistema dinámico definido por

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es regular. Supongamos que existe un punto de equilibrio x_0 , y denotamos por A la matriz jacobiana de $f(x)$ evaluada en el equilibrio, es decir, $A = J_f(x_0)$. Entonces, el punto de equilibrio x_0 es estable si todos los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A satisfacen que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Prueba:

La prueba de este resultado se puede encontrar en una transcripción del trabajo original de Lyapunov [Lya92] o en un libro clásico en la literatura como [Sot79]. \square

Dentro de los puntos de equilibrio resulta posible hacer una distinción en función de los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en dichos puntos.

Definición 1.20. Un punto de equilibrio se dice **hiperbólico** si $n_0 = 0$, es decir, si no hay valores propios con parte real nula (valores propios en el eje imaginario). Además, un punto de equilibrio hiperbólico se dice **silla hiperbólica** si $n_- \cdot n_+ \neq 0$.

Definición 1.21. Un punto de equilibrio hiperbólico se dice **atractor** si $n_- = n$, es decir, si todos los valores propios tienen parte real negativa.

Definición 1.22. Un punto de equilibrio hiperbólico se dice **repulsor** si $n_+ = n$, es decir, si todos los valores propios tienen parte real positiva.

Resulta interesante estudiar en detalle la geometría de los retratos de fases cerca de un equilibrio hiperbólico.

Definición 1.23. Se define el conjunto $W^s(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^t(x) = x_0\}$ como la **variedad estable** en x_0 .

Definición 1.24. Se define el conjunto $W^u(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = x_0\}$ como la **variedad inestable** en x_0 ⁵.

La definición de estos conjuntos nos permite enunciar el siguiente resultado, relacionado con la estabilidad a nivel local de los mismos.

Teorema 1.3. Teorema de la variedad estable

Si x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico de $\dot{x} = f(x)$, se verifica que las intersecciones de $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ con un entorno suficientemente pequeño de x_0 contienen subvariedades regulares $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$ de dimensiones n^+ y n^- , respectivamente. Además, $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$ son tangentes a E_s y E_u , respectivamente, donde E_s y E_u son los subespacios propios generalizados correspondientes a la unión de todos los valores propios de A con parte real negativa y parte real positiva, respectivamente.

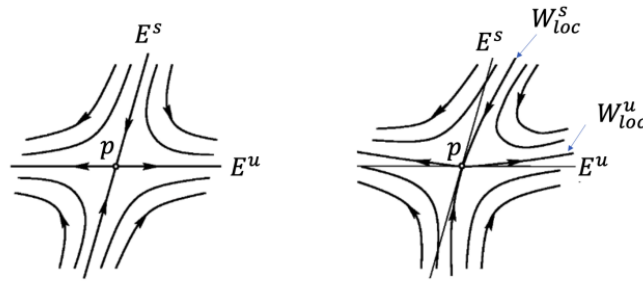


Figura 1.3: Representación de variedades estables e inestables locales.

A continuación enunciaremos otro resultado, que permitirá clasificar los puntos de equilibrio hiperbólicos en función de los valores propios del sistema asociado.

Teorema 1.4. Sea un sistema dinámico de tiempo continuo definido por:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Los retratos de fases del sistema cerca de dos puntos de equilibrios hiperbólicos x_0 e y_0 , son localmente topológicamente equivalentes si y solo si tienen el mismo número de valores propios con $Re(\lambda) < 0$ y $Re(\lambda) > 0$, es decir, si $n_- = n_+$.

Prueba:

Este resultado se puede encontrar en un libro clásico en la literatura como [Sot79]. \square

⁵En general, los conjuntos invariantes W^s y W^u son variedades de dimensiones n_- y n_+ respectivamente

Puntos fijos en sistemas dinámicos discretos

Sea un sistema dinámico discreto

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde la aplicación f es regular junto con su inversa f^{-1} (difeomorfismo). Sea $x_0 = 0$ un punto fijo del sistema y sea A la matriz jacobiana evaluada en x_0 , es decir, $A = J_f(x_0)$. Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A se llaman multiplicadores del punto fijo. Sean n_-, n_0 y n_+ los números de multiplicadores de x_0 que están dentro, en la frontera, y fuera de la circunferencia unidad $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, respectivamente.

De manera equivalente al caso continuo, se pueden establecer condiciones suficientes para su estabilidad en términos de la matriz jacobiana del sistema evaluada en x_0 .

Teorema 1.5. *Sea un sistema dinámico discreto*

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es una aplicación regular. Supongamos que tiene un punto fijo x_0 ($f(x_0) = x_0$), y denotemos por A la matriz jacobiana de $f(x)$ evaluada en x_0 , es decir, $A = J_f(x_0)$. Entonces, el punto fijo es estable si todos los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A satisfacen que $|\lambda_i| < 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Prueba:

Este resultado se puede encontrar en un libro clásico en la literatura como [Sot79]. \square

Definición 1.25. Un punto fijo se dice **hiperbólico** si $n_0 = 0$, es decir, si no hay valores propios en la frontera de la circunferencia unidad. Un punto fijo hiperbólico se dice **silla hiperbólica** si $n_- \cdot n_+ \neq 0$.

Definición 1.26. Un punto fijo hiperbólico se dice **atractor** si $n_- = n$, es decir, si todos los valores propios tienen parte real negativa.

Definición 1.27. Un punto fijo hiperbólico se dice **repulsor** si $n_+ = n$, es decir, si todos los valores propios tienen parte real positiva.

Al igual que en el caso continuo, podemos introducir conjuntos invariantes estables e inestables para un punto fijo x_0 (no necesariamente hiperbólico):

Definición 1.28. Se define el conjunto $W^s(x_0) = \{x \in X \mid f^k(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } k \rightarrow +\infty\}$ como la **variedad estable** en x_0 .

Definición 1.29. Se define el conjunto $W^u(x_0) = \{x \in X \mid f^k(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } k \rightarrow -\infty\}$ como la **variedad inestable** en x_0 .

Como no podía ser de otro modo, es posible formular resultados similares a los *Teoremas* 1.3 y 1.4, pero con alguna modificación en las condiciones de equivalencia.

Teorema 1.6. Teorema de la variedad estable

Si x_0 es un punto fijo hiperbólico de f , se verifica que las intersecciones de $W^s(x_0)$ y $W^u(x_0)$ con un entorno suficientemente pequeño de x_0 contienen subvariedades regulares $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$ de dimensiones n^+ y n^- , respectivamente. Además, $W_{loc}^s(x_0)$ y $W_{loc}^u(x_0)$ son tangentes a E_s y E_u , respectivamente, donde E_s y E_u son los subespacios propios generalizados correspondientes a la unión de todos los valores propios de A con módulo menor que 1 y mayor que 1, respectivamente.

Teorema 1.7. Sea un sistema dinámico discreto

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

Los retratos de fases del sistema cerca de dos puntos fijos hiperbólicos, (x_0, y_0) , son localmente topológicamente equivalentes si y solo si estos puntos fijos tienen la misma cantidad de n_- y n_+ , es decir, el mismo número de multiplicadores con $|\lambda| < 1$ y $|\lambda| > 1$, respectivamente, y los signos de los productos de todos los multiplicadores con $|\lambda| < 1$ y $|\lambda| > 1$ son iguales para ambos puntos fijos.

1.3. Aplicaciones de Poincaré

Es algo frecuente que los sistemas dinámicos de tiempo discreto aparezcan de manera natural en el estudio de sistemas dinámicos de tiempo continuo dados por ecuaciones diferenciales. Para ello, existe la posibilidad de establecer una conexión entre ambos tipos de sistemas. Esto resulta eficiente si el sistema discreto asociado está definido en un espacio de menor dimensión que el sistema original. Una de las herramientas para llevar a cabo este proceso, son las **aplicaciones de Poincaré**.

Sea un sistema dinámico de tiempo continuo definido por

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$

y supongamos que el sistema tiene una órbita periódica L_0 . Dado un punto $x_0 \in L_0$ introducimos un corte transversal en el ciclo por este punto, es decir, tomamos una sección trasnversal Σ . La sección transversal Σ es una hipersuperficie regular de dimensión $n - 1$ y codimensión 1, que interseca a L_0 con un ángulo no nulo.

Supongamos que Σ está definida cerca de x_0 por el conjunto de nivel cero de una función escalar regular $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x_0) = 0$:

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}.$$

Un ángulo de intersección no nulo implica que el gradiente

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right)^T,$$

no es ortogonal a L_0 en x_0 , es decir,

$$\langle \nabla g(x_0), f(x_0) \rangle \neq 0,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar estándar en \mathbb{R}^n . La elección más simple de Σ es un hiperplano ortogonal al ciclo L_0 en x_0 . Esta sección transversal está dada obviamente por el conjunto de nivel cero de la función lineal

$$g(x) = \langle f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

Ahora consideramos las órbitas de (1.5) cerca del ciclo L_0 . El ciclo en sí mismo es una órbita que comienza en un punto en Σ y regresa a Σ en el mismo punto $x_0 \in \Sigma$. Del *Teorema 1.1* se sigue que las soluciones de (1.5) dependen con continuidad de sus puntos iniciales, luego una órbita que comienza en un punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_0 también regresa a Σ en algún punto $x \in \Sigma$ cercano a x_0 . Además, estas órbitas cercanas también se intersecarán transversalmente con Σ . Por lo tanto, se puede construir una aplicación que nos lleve a un sistema dinámico de tiempo discreto:

$$\begin{aligned} P : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto P(x) = \tilde{x} \end{aligned}$$

Definición 1.30. La aplicación P se conoce como **aplicación de Poincaré** asociada al ciclo L_0 .

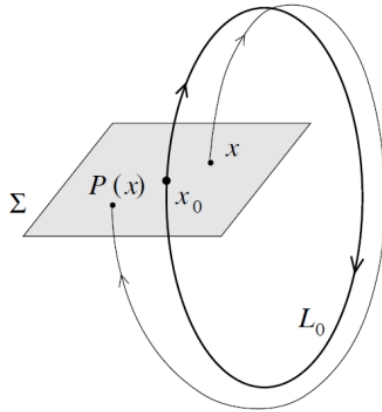


Figura 1.4: Aplicación de Poincaré asociada a un ciclo L_0 .

Cabe decir que el punto de intersección de Σ con la órbita periódica L_0 , es un punto fijo de la aplicación de Poincaré ($P(x_0) = x_0$), y podemos estudiar así su comportamiento local.

Introduzcamos coordenadas locales $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ en Σ de modo que $\xi_0 = 0$ ⁶ se corresponda con x_0 . Así, dadas las coordenadas locales ξ asociadas a x y las coordenadas locales $\tilde{\xi}$ asociadas a \tilde{x} , la aplicación de Poincaré viene caracterizada por una aplicación local $P : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, la cual transforma ξ en $\tilde{\xi}$:

$$P(\xi) = \tilde{\xi}.$$

⁶El origen $\xi_0 = 0$ de \mathbb{R}^{n-1} es un punto fijo de la aplicación P .

Además, la estabilidad del ciclo L_0 es equivalente a la estabilidad del punto fijo $\xi_0 = 0$ de la aplicación de Poincaré. Por lo tanto, el ciclo es estable si todos los valores propios (multiplicadores) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ de la matriz jacobiana

$$A = \left(\frac{dP}{d\xi} \right) \Big|_{\xi_0=0},$$

se encuentran en el interior de la circunferencia unidad ($|\lambda| = 1$).

El siguiente resultado indica que los multiplicadores son independientes del punto elegido sobre L_0 .

Lema 1.1. *Los multiplicadores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ de la matriz jacobiana A de la aplicación de Poincaré P asociado al ciclo L_0 son independientes del punto $x_0 \in L_0$, de la sección de transversal Σ y de las coordenadas locales que se tomen sobre el punto.*

Prueba:

La prueba de este resultado aparece en la sección 1.5 de [\[Kuz04\]](#). \square

1.4. Teoremas clásicos

En esta sección introduciremos dos resultados esenciales de la rama del análisis matemático, que resultan ser también muy importantes en el estudio de bifurcaciones, que abordaremos en el próximo capítulo.

Teorema 1.8. Teorema de la función implícita

Sea

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) \end{aligned}$$

una aplicación suficientemente regular en un entorno del origen tal que $F(0, 0) = 0$.

Sea $F_y(0, 0)$ la matriz:

$$F_y(0, 0) = \left(\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y_j} \right) \Big|_{(x, y) = (0, 0)} \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Si la matriz $F_y(0, 0)$ es invertible, entonces existe una única función definida a nivel local $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y = f(x)$, de la misma regularidad que F , tal que

$$F(x, f(x)) = 0$$

para todo x en algún entorno del origen en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.9. Teorema de la función inversa

Sea

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto y = g(x) \end{aligned}$$

una aplicación suficientemente regular definida en un entorno del origen tal que $y = g(x)$ y $g(0) = 0$.

Sea $g_x(0)$ la matriz jacobiana de g evaluada en $x = 0$:

$$g_x(0) = J_g(0) = \left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right) \Bigg|_{x=0} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Si la matriz $g_x(0)$ es invertible, entonces existe una única función definida a nivel local $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = f(y)$, tal que

$$g(f(y)) = y,$$

para todo y en algún entorno del origen en \mathbb{R}^n .

Se puede encontrar una formulación más general y las demostraciones detalladas de estos resultados, en el *Capítulo 13* de un libro clásico de análisis matemático como [\[Apo76\]](#).

Capítulo 2

Bifurcaciones

En muchas ocasiones existen sistemas que describen fenómenos físicos o situaciones que resultan de interés, y cuyo estudio depende de diversos parámetros. La evolución y la dinámica de dichos sistemas puede sufrir variaciones en función de los valores que tomen estos parámetros, pudiendo existir algunos que provoquen cambios sustanciales en la estructura cualitativa de las soluciones. La determinación de tales valores es fundamental para la comprensión del fenómeno, y da lugar a lo que se conoce como bifurcaciones.

La teoría de bifurcaciones consiste en el estudio de los cambios que experimenta el retrato de fases de un sistema dinámico en base a la variación de unos determinados parámetros.

Los principales resultados que se expondrán a continuación vienen recogidos de manera general en [Kuz04], [GH83] y [HK91].

2.1. Introducción a las bifurcaciones

Sea un sistema dinámico continuo con una dependencia paramétrica

$$\dot{x} = f(x, \alpha),$$

o de manera análoga un sistema dinámico discreto con una dependencia paramétrica

$$x \mapsto f(x, \alpha),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

Si ahora consideramos el retrato de fases del sistema en una región $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, y hacemos variar el parámetro α pueden ocurrir dos cosas, el sistema puede o no permanecer topológicamente equivalente al original en U_α .

Así, para entender conceptualmente la noción de bifurcación, resulta necesario extender la idea de equivalencia topológica a sistemas dinámicos dependientes de parámetros.

2.1.1. Estabilidad estructural

Definición 2.1. Dados dos sistemas dinámicos de tiempo continuo con parámetros de igual dimensión,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \alpha), & x \in \mathbb{R}^n, & \alpha \in \mathbb{R}^m, \\ \dot{y} &= g(y, \beta), & x \in \mathbb{R}^n, & \beta \in \mathbb{R}^m,\end{aligned}$$

se dice que ambos sistemas son **topológicamente equivalentes** si:

1. Existe un homeomorfismo $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $p(\alpha) = \beta$.
2. Existe un homeomorfismo que depende del parámetro α , $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $h_\alpha(x) = y$, que lleva las órbitas del primer sistema para un valor del parámetro α , en las órbitas del segundo sistema para un valor $p(\alpha) = \beta$, preservando la dirección temporal.

Podemos dar una adaptación de la definición anterior si queremos estudiar esta equivalencia a nivel local.

Definición 2.2. Dados dos sistemas dinámicos de tiempo continuo con parámetros de igual dimensión,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \alpha), & x \in \mathbb{R}^n, & \alpha \in \mathbb{R}^m, \\ \dot{y} &= g(y, \beta), & x \in \mathbb{R}^n, & \beta \in \mathbb{R}^m,\end{aligned}$$

se dice que ambos sistemas son **localmente topológicamente equivalentes** cerca del origen si existe una aplicación $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(\alpha))$ en un entorno de $(x, \alpha) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que:

1. Existe un homeomorfismo $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un entorno de $\alpha = 0$, tal que $p(0) = 0$.
2. Existe un homeomorfismo en un entorno U_0 de $x = 0$ que depende del parámetro α , $h_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $h_0(0) = y$, que lleva las órbitas del primer sistema en U_0 en las órbitas del segundo sistema en $h_0(U_0)$ preservando la dirección temporal.

A raíz de esto, buscamos ver bajo que condiciones los retratos de fase de un sistema sin perturbar son equivalentes a los retratos de fase del mismo sistema perturbado. Esto lo hacemos introduciendo el concepto de estabilidad estructural.

Definición 2.3. Sea un sistema dinámico continuo con una dependencia paramétrica

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m.$$

Si bajo perturbaciones suficientemente pequeñas del parámetro α , el retrato de fase del sistema en una región $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ permanece localmente topológicamente equivalente al original en U_α , entonces se dirá que el sistema es **localmente estructuralmente estable**.

Para ilustrar que este concepto es de gran interés, se puede probar el siguiente resultado que muestra la propiedad de que los puntos de equilibrio hiperbólicos son localmente estructuralmente estables bajo pequeñas perturbaciones de un parámetro.

Teorema 2.1. *Sea sistema dinámico continuo:*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

donde f es una función regular y x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico.

Entonces, el sistema es localmente estructuralmente estable bajo pequeñas perturbaciones de un parámetro.

Prueba:

Sea la perturbación del sistema anterior

$$\dot{x} = f(x) + \mathcal{E}g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

donde g es también una función regular y \mathcal{E} es un parámetro pequeño.

El sistema anterior tiene un equilibrio $x(\mathcal{E})$ para todo \mathcal{E} suficientemente pequeño tal que se cumpla que $x(0) = x_0$. De hecho, la ecuación para hallar los puntos de equilibrio del sistema puede escribirse como:

$$F(x, \mathcal{E}) = f(x) + \mathcal{E}g(x) = 0, \quad (2.2)$$

con $F(x_0, 0) = 0$.

Sea $A_0 = J_f(x_0)$, la matriz jacobiana de (2.1) en el punto de equilibrio x_0 . Dado que $\det(A_0) \neq 0$, porque x_0 es un punto hiperbólico, el Teorema de la Función Implícita garantiza la existencia de una función regular $x = x(\mathcal{E})$, tal que $x(0) = x_0$ y que cumple

$$F(x(\mathcal{E}), \mathcal{E}) = 0,$$

para valores pequeños de $|\mathcal{E}|$.

Por otra parte, la matriz jacobiana de $x(\mathcal{E})$ en (2.2) viene dada por

$$A_{\mathcal{E}} = \left(\frac{df(x)}{dx} + \mathcal{E} \frac{dg(x)}{dx} \right) \Bigg|_{x=x(\mathcal{E})}.$$

Debido a la dependencia paramétrica de esta matriz, es claro que los valores propios cambian conforme a la variación de dicho parámetro.

Por lo tanto, $x(\mathcal{E})$ no tendrá valores propios en el eje imaginario para todo $|\mathcal{E}|$ suficientemente pequeño, ya que no tiene tales valores propios en $\mathcal{E} = 0$. En otras palabras, $x(\mathcal{E})$ es un punto de equilibrio hiperbólico de (2.2) para todo \mathcal{E} , tal que $|\mathcal{E}|$ es lo suficientemente pequeño.

Además, las cantidades n_- y n_+ de valores propios estables e inestables de $A_{\mathcal{E}}$ permanecen constantes para estos valores de \mathcal{E} .

Aplicando el Teorema 1.4, encontramos que los sistemas anteriores son localmente topológicamente equivalentes cerca de los equilibrios. De hecho, para cada $|\mathcal{E}|$ pequeño, existe un entorno $U_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{R}^n$ del punto de equilibrio $x_{\mathcal{E}}$ en el cual el sistema (2.2) es topológicamente equivalente a (2.1) en U_0 . En resumen, hemos llegado a la conclusión de que un punto de equilibrio hiperbóli-

co es localmente estructuralmente estable bajo pequeñas perturbaciones, tal y como queríamos probar. \square

2.1.2. Valores y diagramas de bifurcación

Con relación al establecimiento del concepto de equivalencia topológica entre los retratos de fases de sistemas paramétricos, resulta de interés estudiar aquellos valores de los parámetros de un sistema para los cuales este deja de ser localmente estructuralmente estable

Esto nos lleva a formular las siguientes definiciones.

Definición 2.4. Se dice que α_0 es un **valor de bifurcación** para un sistema dinámico dependiente del parámetro α , si existen valores arbitrariamente próximos a α_0 para los que el retrato de fases del sistema no es topológicamente equivalente al retrato de fases en α_0 . En estas condiciones se denomina **bifurcación** al cambio topológico que se produce en el sistema para el valor de bifurcación.

A raíz de esto, resulta de gran utilidad tener una representación gráfica cualitativa donde se condensan todos los posibles comportamientos del sistema y las transiciones entre ellos a través de las variaciones de los parámetros. Para ello introduciremos el concepto de diagrama de bifurcación.

Definición 2.5. Sea un sistema dinámico continuo dado por

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m,$$

o un sistema dinámico discreto dado por

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m$$

Se denomina **diagrama de bifurcación**, a la representación en el plano (α, x) de las curvas formadas por los puntos de equilibrio o puntos fijos para los distintos valores de α .

A continuación ilustraremos con un ejemplo el análisis de un sistema unidimensional dependiente de un único parámetro.

Ejemplo 2.1. *Histéresis* [HK91]

Sea la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \alpha + x - x^3 \equiv f(\alpha, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

El retrato de fases para cada valor de α se puede resumir en diferentes casos.

- Para $\alpha = 0$, el sistema presenta tres puntos de equilibrio, de los cuales $x_0^\pm = \pm 1$ son estables y $x_0 = 0$ es inestable. Si el parámetro permanece entre $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_1$ para $\alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, podemos observar que el comportamiento del sistema no varía, es decir, es localmente estructuralmente estable.

Es para $\alpha = -\alpha_1$ o $\alpha = \alpha_1$ cuando el sistema pierde esta propiedad, ya que bajo una pequeña

perturbación del parámetro el comportamiento cambia:

- En efecto, para $\alpha = -\alpha_1$ el sistema presenta dos puntos de equilibrio, uno en $x_0^1 = 1/\sqrt{3}$ que es asintóticamente estable por la derecha e inestable por la izquierda y otro en $x_0^2 = -2/\sqrt{3}$ que es estable. Sin embargo, si consideramos $\alpha = -(\alpha_1 + \delta)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, pasamos a tener un único punto de equilibrio que es estable.
- De manera análoga, para $\alpha = \alpha_1$ el sistema presenta dos puntos de equilibrio, uno en $x_0^1 = -1/\sqrt{3}$ que es asintóticamente estable por la izquierda e inestable por la derecha y otro en $x_0^2 = 2/\sqrt{3}$ que es estable. Nuevamente, si consideramos $\alpha = (\alpha_1 + \delta)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, pasamos a tener un único punto de equilibrio que es estable.

Por tanto, se observa que $-\alpha_1$ y α_1 son valores de bifurcación.

El hecho de que el sistema experimente un cambio en el retrato de fases para dos valores diferentes del parámetro, que están determinados por la dirección en la que este varía, es decir, si incrementa o aumenta su valor; puede recibir la interpretación del fenómeno de **histéresis**¹, ya que el estado asintótico del sistema depende no solo de α sino también de dónde se encontraba su estado en el pasado inmediato. \diamond

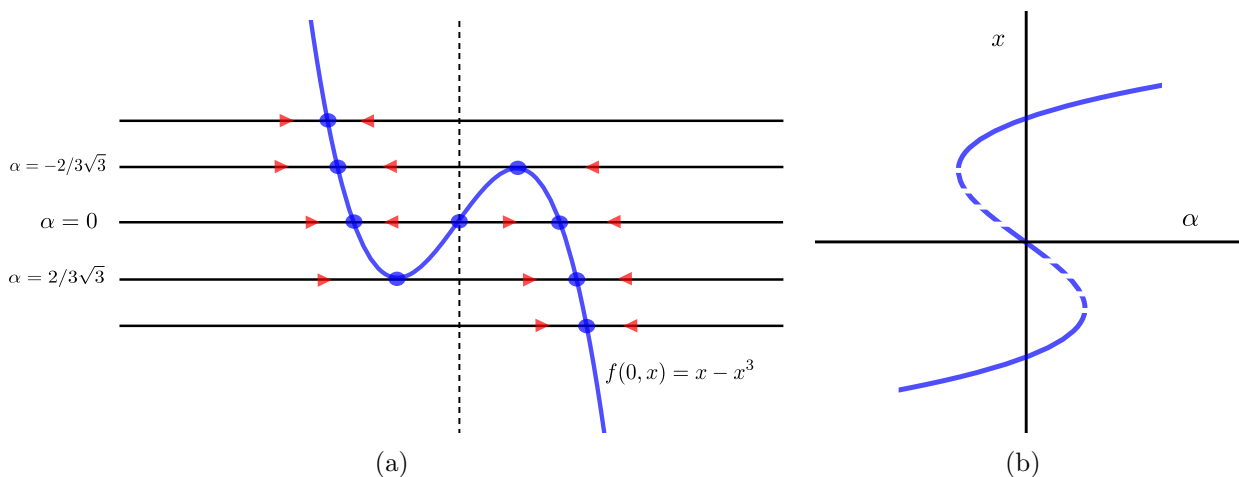


Figura 2.1: Retrato de fases del sistema (2.3) para distintos valores del parámetro (a) y diagrama de bifurcación (b).

2.2. Problema de clasificación

Sea un sistema dinámico continuo dado por

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m.$$

Recordemos que tal y como se había descrito en la *Definición 2.4*, un valor de bifurcación α_0 es aquel para el cual el sistema no es estructuralmente estable.

Esta definición no resulta del todo satisfactoria, ya que deja implícita la necesidad de estudiar de manera profunda y detallada el flujo asociado a cada valor de α , lo cual puede llegar a resultar

¹Fenómeno por el que el estado de un sistema depende de su historia previa y que se manifiesta por el retraso del efecto sobre la causa que lo produce.

muy complejo. Por ello, la teoría de bifurcaciones busca dar una respuesta más general, basada en el estudio de aspectos cualitativos de los flujos asociados a los sistemas. Lo que resulta de gran interés es que este estudio da lugar a una clasificación de manera sistemática de las bifurcaciones, ya que muchas características específicas de las mismas asociadas por ejemplo a las dimensiones del espacio paramétrico o de fases, aparecen repetidamente en diferentes problemas.

El origen de este problema de clasificación se basa en conceptos relacionados con la teoría topológica de la transversalidad asociada a variedades. Un resultado central de esta teoría, como es el *Teorema de transversalidad*, dice que dadas dos variedades \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 de dimensiones k y l , respectivamente, se pueden intersecar transversalmente en un espacio de dimensión n dando lugar a una variedad \mathcal{M}_3 de dimensión $(k + l - n)$. Claramente, se sigue que si $k + l < n$ esta intersección no puede ocurrir.

Ahondando en el problema de la intersección de variedades, cabe decir que aquellas que no ocurren de manera transversal pueden ser perturbadas hasta el caso transversal, pero la implicación inversa no es cierta, es decir, las intersecciones transversales no cambian su topología bajo perturbaciones. Claramente, esto guarda una estrecha relación con el concepto de estabilidad estructural que estamos tratando en nuestro problema de clasificación.

Es ahora donde para entender con mayor detalle el fenómeno de la intersección de variedades, hemos de introducir el concepto de codimensión.

Definición 2.6. Sea una variedad \mathcal{M} de dimensión l , en un espacio \mathcal{S} de dimensión n .

La **codimensión** de \mathcal{M} es la diferencia entre la dimensión de \mathcal{S} y la dimensión de \mathcal{M} , es decir,

$$\text{codim}(\mathcal{M}) = \text{dim}(\mathcal{S}) - \text{dim}(\mathcal{M}) = n - l.$$

A raíz de la definición anterior se sigue que dadas dos variedades \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 de dimensiones k y l , respectivamente, la codimensión de la intersección transversal de ambas viene dada por

$$\text{codim}(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) = \text{codim}(\mathcal{M}_1) + \text{codim}(\mathcal{M}_2) = (n - l) + (n - k) = 2n - (k + l).$$

La transversalidad es un concepto que se puede extender a la teoría de bifurcaciones de la siguiente manera.

Supongamos que queremos estudiar las bifurcaciones que ocurren en un sistema donde la dimensión del espacio paramétrico es m , es decir, un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m,$$

Para poder llevar a cabo esta tarea, es necesario establecer o imponer una serie de condiciones sobre el campo f , las cuales sirven para determinar el tipo de bifurcación que tiene lugar.

Veámoslo a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Sea un sistema dinámico continuo de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2,$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_{\alpha_1}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_{\alpha_2}(x_1, x_2) \end{cases}$$

que tiene un valor de bifurcación $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02})$, y un punto de equilibrio no hiperbólico en $x_0 = (x_{01}, x_{02})$, es decir:

$$\begin{cases} f_{\alpha_1}(x_{01}, x_{02}) = 0 \\ f_{\alpha_2}(x_{01}, x_{02}) = 0 \end{cases}$$

Es claro que estas dos últimas condiciones definirán una variedad \mathcal{M} de dimensión 2, en el espacio (x, μ) .

Si ahora buscamos estudiar la linealización del campo f_α en torno a los elementos de \mathcal{M} , podemos establecer una serie de condiciones de transversalidad que garanticen por ejemplo que:

- Ninguna linealización de f_α admite un valor propio nulo de multiplicidad mayor que 2.
- Todo punto de equilibrio que tenga un valor propio nulo de multiplicidad 2, tendrá una forma canónica de Jordan de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para establecer estas condiciones de transversalidad, se define una aplicación m tal que a cada par $(x, \alpha) \in \mathcal{M}$ lo lleva a la matriz jacobiana de f asociada al par (x, α) , es decir

$$m(x, \alpha) = J_f(x, \alpha).$$

Dado que \mathcal{M} es una variedad de dimensión dos, la imagen de la aplicación anterior solo se corresponderá con variedades de matrices cuya codimensión sea como mucho 2.

En este caso, el conjunto de las matrices que tengan una forma canónica de Jordan de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forma una variedad de codimensión dos. Esto es debido a que, dentro del conjunto de las matrices $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, una matriz genérica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tendrá asociada la forma de Jordan anterior siempre que se verifique que

$$\begin{cases} \text{tr}(A) = a + d = 0 \\ \det(A) = ad - bc = 0 \end{cases}$$

Claramente, estas dos condiciones definen una subvariedad de codimensión dos en \mathbb{R}^4 , la cual será intersecada por la imagen de la variedad \mathcal{M} , que tiene también dimensión dos. \diamond

Realizando este tipo de análisis, se pueden determinar una serie de condiciones mediante las cuales se pueden clasificar los diferentes tipos de bifurcación que aparecen de manera más frecuente. De entre este tipo de condiciones podemos distinguir entre dos tipos:

- **Condiciones que definen la bifurcación:** en el caso de las bifurcaciones locales, son condiciones que rompen la hiperbolicidad del punto singular.
- **Condiciones de transversalidad:** normalmente se trata de condiciones de no anulación

de ciertos valores que dependen de las derivadas de $f(\alpha, x)$ respecto a las variables o a los parámetros.

Por ende, podemos clasificar las formas canónicas de las matrices jacobianas de un sistema genérico de dimensión n en función de la codimensión ².

Codimensión 1

- Valor propio $\lambda = 0$ simple $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$
- Valores propios imaginarios $\lambda = \pm i\omega \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

donde A es una matriz de dimensiones $(n-1) \times (n-1)$.

Codimensión 2

- Valor propio $\lambda_{1,2} = 0$ doble y no diagonalizable $\rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$
- Valores propios $\lambda_1 = 0$ simple e imaginarios $\lambda_{2,3} = \pm i\omega \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$
- Valores propios imaginarios $\lambda_{1,2} = \pm i\omega'$ y $\lambda_{3,4} = \pm i\omega'' \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega' & 0 & 0 \\ \omega' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega'' \\ 0 & 0 & \omega'' & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

donde A es una matriz de dimensiones $(n-2) \times (n-2)$.

Una vez realizada toda esta discusión, resulta posible entender la estrecha relación entre la teoría de bifurcaciones y el concepto de codimensión, ya que hemos visto utilizando argumentos de transversalidad, que se requieren de k parámetros libres para alcanzar una bifurcación de codimensión k , lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.7. La **codimensión de una bifurcación** se corresponde con el mínimo número de condiciones independientes que la determinan.

Definición 2.8. La **codimensión de una bifurcación** se corresponde con la mínima dimensión del espacio paramétrico mediante la cual se alcanza la bifurcación de manera genérica.

2.2.1. Formas topológicas normales

Una vez establecido el concepto de codimensión de una bifurcación, se nos plantea dar respuesta al problema de la clasificación de todos los posibles diagramas de bifurcación de sistemas

²Para ver en mayor detalle consultar *Capítulo 3* de [GH83].

genéricos, al menos a nivel local, hasta cierta codimensión.

Para ello introduciremos una de las nociones centrales en la teoría de bifurcaciones, las **formas normales topológicas**, cuya importancia reside en el hecho de que dan lugar a diagramas de bifurcación universales en el caso de las **bifurcaciones para puntos de equilibrio o puntos fijos**.

Para el caso continuo, consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (2.4)$$

que tiene un punto de equilibrio en $x = 0$, para $\alpha = 0$.

Sea además un sistema polinomial en ξ_i

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^k, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (2.5)$$

donde $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ se corresponde con el vector de coeficientes de los polinomios del sistema. Suponiendo que el sistema tiene un punto de equilibrio en $\xi = 0$ para $\beta = 0$ y que satisface k condiciones de bifurcación que determinan una bifurcación de codimensión k , podemos establecer la siguiente definición.

Definición 2.9. Sea cualquier sistema genérico con las características de (2.4), que además satisfaga las mismas condiciones de bifurcación en $\alpha = 0$ que (2.5). Entonces, si (2.4) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a (2.5) para ciertos valores de σ , el sistema (2.4) será la **forma normal topológica** de (2.4).

Cabe decir que cuando usamos el término “sistemas genéricos”, nos referimos a sistemas que satisfacen unas condiciones de transversalidad.

2.3. Bifurcaciones uniparamétricas en sistemas continuos

En esta sección estudiaremos y formularemos una serie de condiciones que definen a las bifurcaciones de equilibrio para sistemas dinámicos de tiempo continuo con codimensión uno, en la dimensión más pequeña posible. A continuación, nos centraremos en las bifurcaciones tangencial (*fold*) para sistemas escalares y la bifurcación de Hopf para sistemas en el plano.

2.3.1. Condiciones de bifurcación simples

Sea un sistema continuo dependiente de un parámetro

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función regular con respecto a x y a α . Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico del sistema para $\alpha = \alpha_0$. Como hemos visto anteriormente en la subsección 2.1.1, generar pequeñas variaciones del parámetro provoca que el equilibrio se desplaza ligeramente pero permaneciendo hiperbólico. Por tanto, solo hay dos maneras de romper la condición de hiperbolicidad:

- Existe un valor propio real simple que se aproxima a cero de tal forma que $\lambda_1 = 0$, para algún valor del parámetro.
- Existe una pareja de valores propios puramente imaginarios que se aproxima a cero de tal forma que $\lambda_{1,2} = \pm ib$, donde $b > 0$, para algún valor del parámetro.

Estas dos posibilidades se corresponden con bifurcaciones de codimensión uno para sistemas continuos, las cuales podemos clasificar a través de las siguientes definiciones.

Definición 2.10. La bifurcación asociada con la aparición de un valor propio $\lambda_1 = 0$ se llama **bifurcación tangencial**.

Definición 2.11. La bifurcación asociada con la aparición de dos valores propios $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ donde $\omega > 0$, se llama **bifurcación de Hopf**.

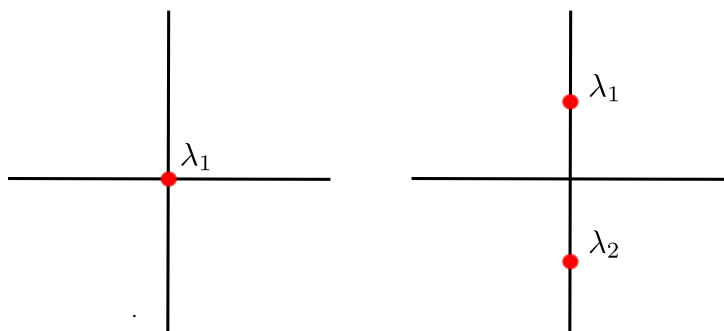


Figura 2.2: Casos críticos sobre la hiperbolicidad para sistemas continuos.

Cabe notar que la bifurcación tangencial se puede estudiar para $n \geq 1$, pero para la bifurcación de Hopf es necesario que $n \geq 2$, porque requiere la existencia de al menos dos valores propios.

En adelante desarrollaremos la teoría en torno a la cual se demuestra que un punto de equilibrio no hiperbólico que cumple una de las condiciones anteriores es estructuralmente inestable, y analizaremos las bifurcaciones correspondientes a nivel local.

2.3.2. Bifurcación tangencial

Sea el sistema dinámico uniparamétrico:

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

El comportamiento del sistema en función del valor de α se puede resumir en los siguientes casos:

- Para $\alpha < 0$ hay dos puntos de equilibrio, $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, siendo el negativo estable y el positivo inestable. Así, el comportamiento de las órbitas viene determinado por los intervalos, $(-\infty, x_1(\alpha))$, $(x_1(\alpha), x_2(\alpha))$ y $(x_2(\alpha), \infty)$.
- En $\alpha = 0$, el sistema tiene un equilibrio no hiperbólico en $x_0 = 0$, donde el valor propio asociado es $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ (visualizar como una matriz 1×1). Así, el comportamiento de las órbitas viene determinado por los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.
- Para $\alpha > 0$ no hay puntos de equilibrio en el sistema. Así, el comportamiento de las órbitas

se estudia solamente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

La colisión de dos puntos de equilibrio para su posterior desaparición, cuando α pasa de tomar valores negativos a positivos, da lugar a lo que se conoce como **bifurcación tangencial**.

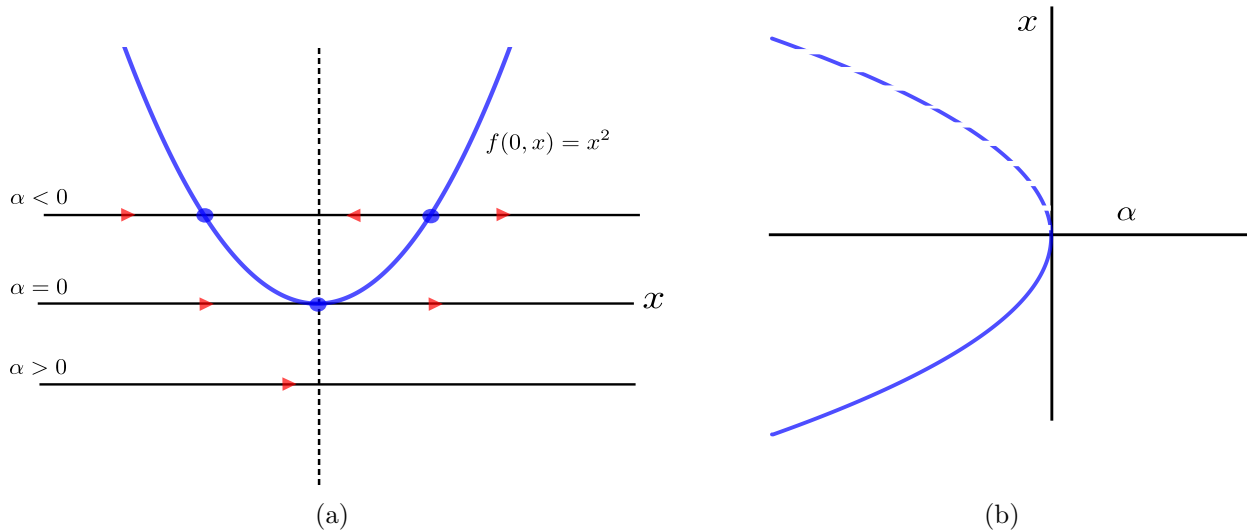


Figura 2.3: Retrato de fases del sistema (2.6) para distintos valores del parámetro (a) y diagrama de bifurcación (b).

Hemos de notar que el sistema

$$\dot{x} = \alpha - x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

se puede estudiar de manera totalmente análoga, teniendo en este caso la aparición de los dos puntos de equilibrio para $\alpha > 0$. No obstante, en adelante y sin pérdida de generalidad, estudiaremos el caso del sistema (2.6).

A continuación probaremos un lema gracias al cual veremos que los términos de orden superior no afectan al comportamiento cualitativo de la bifurcación.

Lema 2.1. *El sistema*

$$\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3),$$

es topológicamente equivalente en un entorno del origen al sistema

$$\dot{x} = \alpha + x^2.$$

Prueba:

La demostración se realizará en dos partes. En la primera haremos un análisis de los puntos de equilibrio y en la segunda construiremos un homeomorfismo que lleve estos puntos de equilibrio en otros puntos de equilibrio, preservando la orientación temporal.

Parte 1: Análisis de equilibrios

Sea una y variable escalar tal que permite reescribir el sistema inicial como:

$$\dot{y} = F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha), \quad (2.8)$$

donde $\psi = O(y^3)$ es una función regular cerca del origen.

Sea la variedad de equilibrio del sistema anterior cerca del origen:

$$\mathcal{M} = \{(y, \alpha) \mid F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha) = 0\}.$$

La curva que describe \mathcal{M} pasa por el origen ($F(0, 0) = 0$). Dado que $F_\alpha(0, 0) = 1$, estamos en condiciones de poder aplicar el Teorema de la Función Implícita de forma que:

$$\mathcal{M} = \{(y, \alpha) \mid \alpha = g(y)\},$$

donde g es una función regular que está definida para valores pequeños de $|y|$.

Más aún, se tiene que $g(y) = -y^2 + O(y^3)$. En efecto:

$$F(y, g(y)) = (-y^2 + O(y^3)) + y^2 + \psi(y, \alpha) = O(y^3).$$

Así, para cualquier $\alpha < 0$ suficientemente pequeño existen dos puntos equilibrios de (2.8) cerca del origen, $y_1(\alpha)$ e $y_2(\alpha)$, que están cerca de los equilibrios $x_1(\alpha)$ y $x_2(\alpha)$ de (2.6), para el mismo valor de α .

Parte 2: Construcción del homeomorfismo

A continuación construiremos un aplicación $y = h_\alpha(x)$ para valores de α suficientemente pequeños.

Consideremos

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{si } \alpha \geq 0 \\ a(\alpha) + b(\alpha)x & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

donde los coeficientes a y b se obtienen de las condiciones

$$h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2,$$

Esta aplicación $h_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo que lleva las órbitas de (2.6) cerca del origen en las órbitas de (2.8), preservando la dirección temporal. Con lo cual, se tiene que ambos sistemas son localmente topológicamente equivalentes, como queríamos demostrar. \square

Una vez probado este resultado, busquemos ver que el sistema (2.6) y el sistema (2.7), son formas normales topológicas de un sistema genérico de dimensión uno, que tiene una bifurcación tangencial.

Teorema 2.2. Forma normal topológica para la bifurcación tangencial

Sea el sistema dinámico uniparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función con un punto de equilibrio $x = 0$ para $\alpha = 0$. Además se tiene que $\lambda = J_x(0, 0) = 0$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- (F.1) $\frac{1}{2}(\partial^2 f / \partial x^2)|_{(0,0)} \neq 0$
- (F.2) $(\partial f / \partial \alpha)|_{(0,0)} \neq 0$.

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a una de las siguientes formas normales

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2.$$

Prueba:

Sea el sistema dinámico uniparamétrico:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

donde f es una función con un punto de equilibrio $x = 0$ para $\alpha = 0$. Además $\lambda = J_x(0, 0) = 0$.

Desarrollando en serie de Taylor $f(x, \alpha)$ con respecto a x en torno a $x = 0$, podemos escribir que:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde, como es bien sabido, se tiene que $f_0(\alpha) = f(0, \alpha)$ y $f_k(\alpha) = (k!)^{-1} (\partial^k f / \partial x^k)|_{(0, \alpha)}$.

Además se satisfacen las condiciones:

- Condición de equilibrio: $f_0(0) = f(0, 0) = 0$.
- Condición de bifurcación tangencial: $f_1(0) = (\partial f / \partial x)|_{(0,0)} = 0$.

Seguidamente realizaremos una serie de cálculos que son válidos para otros los problemas de bifurcación locales, donde a través de cambios coordenadas y parámetros, transformaremos el sistema (2.9) en el sistema (2.6) hasta los términos de segundo orden, para posteriormente prescindir los términos de orden superior usando el *Lema 2.1*.

Durante el proceso veremos que es necesario imponer algunas condiciones adicionales de no degeneración y transversalidad para que estas transformaciones sean posibles.

Paso 1: Cambio de coordenadas

Realizamos un desplazamiento lineal en las coordenadas introduciendo una nueva variable $\xi = x + \delta$, donde $\delta = \delta(\alpha)$ es una función que será definida más adelante.

Sustituyendo en (2.9) se obtiene que:

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + \dots$$

Por lo tanto

$$\dot{\xi} = [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] + [f_1(\alpha) - f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3). \quad (2.10)$$

Puesto que se cumple (F.1), se tiene que

$$f_2(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,0)} \neq 0,$$

y entonces existe una función regular $\delta(\alpha)$ que anula el término lineal en la ecuación anterior para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Esto se sigue del Teorema de la Función Implícita considerando la función

$$F(\alpha, \delta) \equiv f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \psi(\alpha, \delta)\delta^2 = 0,$$

para alguna función ψ . En efecto, se tiene que

$$F(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \delta} \right) \Big|_{(0,0)} = -2f_2(0) \neq 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \Big|_{(0,0)} = f_1'(0) \neq 0,$$

lo que implica la existencia (local) y unicidad de una función regular $\delta = \delta(\alpha)$ tal que $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$. La expresión explícita de esta función se obtiene de calcular la derivada de $F(\alpha, \delta(\alpha))$ respecto de α y evaluarla en $(0, \delta(0))$, obteniendo:

$$\delta'(0) = -\frac{f_1'(0)}{2f_2(0)} \quad \longrightarrow \quad \delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2),$$

donde el símbolo ' indica que se trata de la derivada respecto al parámetro α .

La ecuación (2.10) ahora no contiene términos lineales

$$\dot{\xi} = [f_0'(\alpha)\alpha + O(\alpha^2)] + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3). \quad (2.11)$$

Paso 2: Definición de un parámetro nuevo

Sea el parámetro $\mu(\alpha)$ que se obtiene del término lineal de la ecuación anterior, es decir

$$\mu = f_0'(\alpha)\alpha + O(\alpha^2) = f_0'(\alpha)\alpha + \alpha^2\phi(\alpha),$$

para cierta función regular ϕ .

Es fácil observar que μ cumple lo siguiente:

- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = f_0'(0) = (\partial f / \partial \alpha)|_{(0,0)}$

Dado que por hipótesis se verifica (F.2), se tiene que

$$\left. \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \right|_{(0,0)} \neq 0,$$

y se sigue del Teorema de la Función Inversa la existencia y unicidad local de una función inversa $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$.

Por lo tanto, la ecuación (2.11) quedaría como

$$\dot{\xi} = \mu + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3),$$

donde $b(\mu) = f_2(0) + O(\alpha)$ con $b(0) = f_2(0) \neq 0$ a causa de la suposición (F.1).

Paso 3: Ajuste final

Definiendo $\eta = |b(\mu)|\xi$ y $\beta = |b(\mu)|\mu$ se sigue que

$$\dot{\eta} = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3),$$

donde $s = \text{signo}(b(0)) = \pm 1$.

Por último, utilizando el *Lema* 2.1 podemos prescindir los términos de orden tres, llegando así al resultado buscado. \square

2.3.3. Bifurcación de Hopf

Sea el sistema de dos ecuaciones diferenciales uniparamétrico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (2.12)$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio $x_1 = x_2 = 0$ para todos los valores de α , donde además la matriz Jacobiana evaluada en dicho equilibrio viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$.

Sea la variable $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, tal que $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$.

Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

y podemos, por lo tanto, reescribir el sistema en forma compleja como:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - |z|^2 z$$

. Usando la expresión polar de un número complejo $z = \rho e^{i\varphi}$, obtenemos que:

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + i\rho\dot{\varphi}e^{i\varphi},$$

o

$$\dot{\rho}e^{i\varphi} + i\rho\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(\alpha + i - \rho^2),$$

lo que nos lleva a la forma polar del sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

En forma polar es posible representar de forma más simple los retratos de fase del sistema en un entorno del origen, el cual es el único punto de equilibrio.

Así, el comportamiento del sistema en función del valor de α se puede resumir en los siguientes casos:

- Para $\alpha < 0$, el equilibrio es un foco estable ya que $\dot{\rho} < 0$ y $\rho(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- Para $\alpha = 0$, se observa un atractor de carácter débil.
- Para $\alpha > 0$ tenemos que $\dot{\rho} > 0$ para $\rho > 0$ pequeños (el equilibrio se vuelve un foco inestable) y $\dot{\rho} < 0$ para $\rho \gg 1$. Es fácil ver que el sistema posee una órbita periódica para cualquier $\alpha > 0$ de radio $\rho_0 = \sqrt{\alpha}$, que además es estable ya que $\dot{\rho} < 0$ en su interior y $\dot{\rho} > 0$ en el exterior del ciclo.

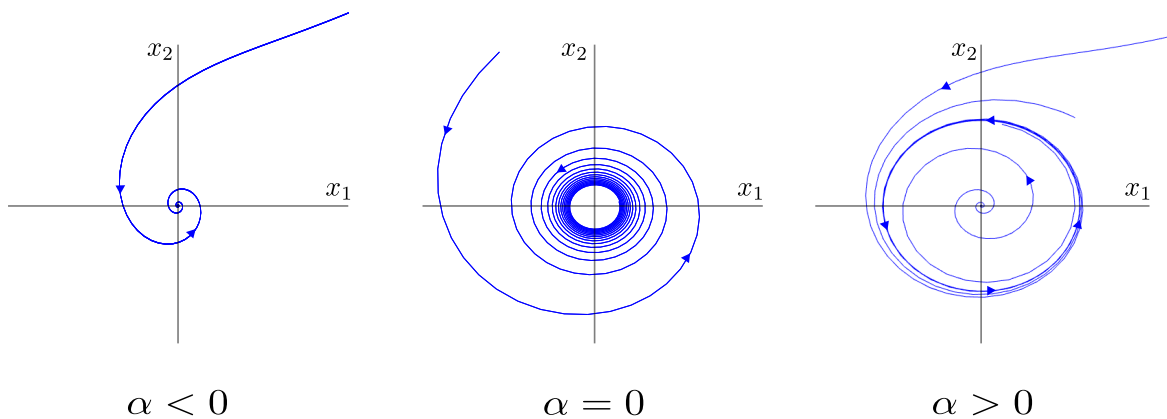


Figura 2.4: Retrato de fases del sistema (2.12) donde se observa la bifurcación Hopf.

Así, la aparición de una órbita periódica (ciclo límite) en el sistema a medida que α aumenta su valor, da lugar a lo que se conoce como **bifurcación de Andronov-Hopf** o **bifurcación de Hopf**. Cabe decir que como esta bifurcación aparece cuando se estudia un entorno del origen, diremos que se trata de una **bifurcación local** o **bifurcación de equilibrio**.

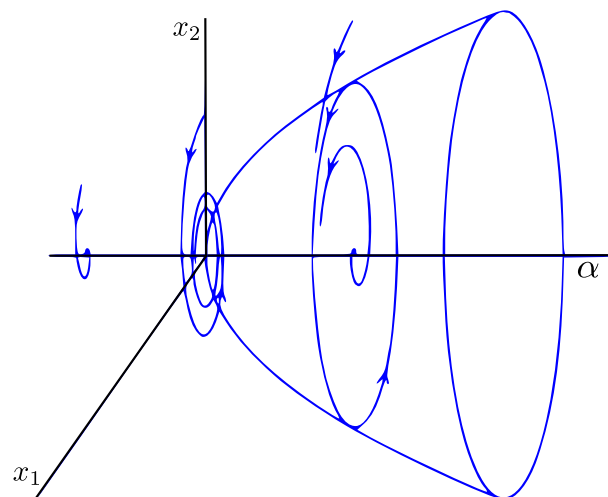


Figura 2.5: Diagrama de bifurcación para la bifurcación de Hopf.

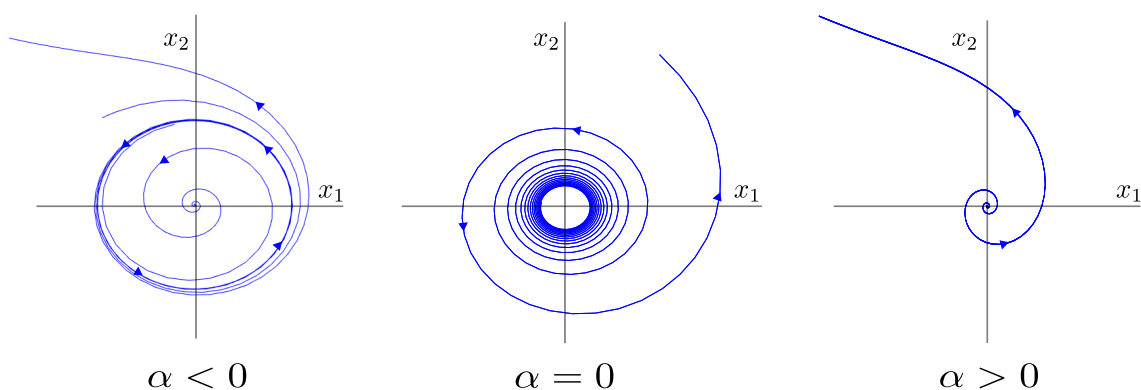
Si ahora consideramos el mismo sistema pero cambiando el signo de los términos no lineales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (2.14)$$

cuya expresión compleja es

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - |z|^2 z,$$

se puede analizar de manera análoga al caso inicial, observando que las únicas diferencias con respecto a este son que hay una órbita periódica (ciclo límite) inestable que desaparece cuando α pasa de tomar valores negativos a tomarlos positivos, y que para $\alpha = 0$ el sistema es inestable.

Figura 2.6: Retrato de fases del sistema (2.14) para distintos valores del parámetro α .

Estos sistemas dan lugar a dos tipos de bifurcaciones de Andronov-Hopf:

- **Supercrítica:** el ciclo límite aparece para valores de $\alpha > 0$.
- **Subcrítica:** el ciclo límite aparece para valores de $\alpha < 0$.

En ambos casos, tenemos una pérdida de estabilidad del equilibrio en $\alpha = 0$ bajo el aumento del parámetro. En la bifurcación supercrítica el punto de equilibrio estable se transforma en un

ciclo límite estable de pequeña amplitud, por lo tanto, el sistema "permanece" en un entorno del punto de equilibrio y tenemos una **pérdida de estabilidad suave o no catastrófica**. Por otro lado, en la bifurcación subcrítica la región de atracción del punto de equilibrio está limitada por el ciclo inestable, que va desapareciendo conforme el parámetro se acerca a su valor crítico. Así, el sistema está siendo "expulsado" del entorno del punto de equilibrio, dándonos una **pérdida de estabilidad aguda o catastrófica**.

Procediendo de manera análoga al caso de la bifurcación tangencial, podemos considerar un sistema donde intervengan términos de orden superior. Por comodidad usaremos notación vectorial, de tal modo que el sistema viene descrito por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \quad (2.15)$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, y los términos $O(\|x\|^4)$ pueden depender del parámetro α .

A continuación probaremos un lema gracias al cual veremos que los términos de orden superior no afectan al comportamiento cualitativo de la bifurcación.

Lema 2.2. *El sistema (2.15) es topológicamente equivalente en un entorno del origen al sistema (2.12).*

Prueba:

Este resultado se puede encontrar en el *Apéndice A* del *Capítulo 3* de [Kuz04]. \square

Nos apoyaremos en este resultado para probar que cualquier sistema genérico bidimensional que presente una bifurcación de Hopf, tiene por forma topológica normal a un sistema como (2.12) o (2.14), pudiendo haber únicamente una diferencia en el signo de los términos de orden 3.

Sea entonces un sistema dinámico bidimensional uniparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f una función regular, que tiene para $\alpha = 0$ un punto equilibrio $x = 0$ con autovalores asociados $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, donde $\omega_0 > 0$.

Utilizando el Teorema de la Función Implícita, se sigue que el sistema tiene un equilibrio único $x_0(\alpha)$ en algún entorno del origen para todo valor $|\alpha|$ suficientemente pequeño, ya que $\lambda = 0$ no es un valor propio de la matriz Jacobiana. Haciendo un cambio de coordenadas conveniente, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $x = 0$ es el punto de equilibrio del sistema para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Así, el sistema puede escribirse como

$$\dot{x} = Ax + F(x, \alpha),$$

donde F es una función regular cuyas componentes puede expandirse en serie de Taylor en x , comenzando estas al menos en términos cuadráticos, es decir, $F = O(\|x\|^2)$.

Por otro lado, la matriz Jacobiana $A(\alpha)$ se puede escribir como

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix},$$

donde los elementos de la matriz son funciones regulares en α . Sus valores propios son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

donde $\sigma = \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{tr}(A(\alpha))$ y $\Delta = \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) + b(\alpha)c(\alpha) = \det A(\alpha)$. En consecuencia

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)} \right)$$

La condición de bifurcación de Hopf de la *Definición 2.11*, implica que

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0.$$

Para valores pequeños de $|\alpha|$ podemos introducir los siguientes parámetros para simplificar la representación de los valores propios. Así, considerando

$$\begin{cases} \mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha) \\ \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)} \end{cases}$$

se llega a que

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha),$$

donde $\mu(0) = 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Por tanto en adelante usaremos la siguiente notación

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha).$$

A continuación probaremos una serie de lemas auxiliares, los cuáles nos permitirán reescribir el sistema de una forma más conveniente para finalmente poder transformarlo en un sistema de la forma (2.12).

Lema 2.3. *Sea el sistema $\dot{x} = Ax + F(x, \alpha)$. Introduciendo una variable compleja z en dicho sistema, se puede reescribir para valores suficientemente pequeños de $|\alpha|$ como*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \tag{2.16}$$

donde $g = O(|z|^2)$ es una función regular en (z, \bar{z}, α) .

Prueba:

Sea $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ un vector propio de $A(\alpha)$ cuyo valor propio asociado es $\lambda(\alpha)$, y sea $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ un vector propio de la matriz transpuesta $A^T(\alpha)$ cuyo valor propio asociado es $\bar{\lambda}(\alpha)$.

Considerando el producto escalar estándar en \mathbb{C}^2 , siempre se puede normalizar p con respecto a q , es decir se puede imponer que $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$.

Además, también se puede probar que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. Desarrollando la expresión en base a las

propiedades de valores propios y vectores propios se tiene que

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\bar{\lambda}} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \langle p, \bar{q} \rangle.$$

De la relación anterior se puede deducir fácilmente que:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Pero dado que para α suficientemente pequeño tenemos $w(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)} > 0$, esto implica que $\lambda \neq \bar{\lambda}$, y en consecuencia $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$.

De acuerdo con lo anterior, y por el hecho de que q y \bar{q} forman una base de vectores de \mathbb{C}^2 , se tiene que cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado de manera única para cualquier α pequeño como:

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha),$$

con

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle.$$

El número complejo z obviamente satisface la ecuación

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle,$$

expresión que tiene la forma que deseabamos, es decir, $g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle$. \square

La función $g(z, \bar{z}, \alpha)$ definida en el lema anterior se puede desarrollar en serie de Taylor de acuerdo con la expresión

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \cdot \bar{z}^l,$$

donde los coeficientes del desarrollo vienen dados por

$$g_{kl}(\alpha) = \left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \right) \Bigg|_{z=0},$$

para $k+l \geq 2$, con $k, l = 0, 1, \dots$

Utilizaremos esto como punto de partida para probar un resultado que permitirá hacer un cambio de coordenadas a la ecuación (2.16).

Lema 2.4. Forma normal de Poincaré para la bifurcación de Hopf

Sea la expresión

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \geq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \cdot \bar{z}^l + O(|z|^4), \quad (2.17)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$.

Dado el cambio de coordenadas complejo dependiente de parámetros

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, podemos transformar la ecuación inicial (2.17) en

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Prueba:

Eliminación de los términos de orden 2

Existe un cambio de coordenadas complejo dependiente de parámetros

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, podemos transformar la ecuación

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

en la ecuación

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3).$$

Este cambio de variable es invertible, y la expresión del cambio inverso viene dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} \bar{z} z - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^2)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \bar{z} \dot{\bar{z}} + \dots = \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + \dots = \\ &= \lambda w + \frac{1}{1} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3). \end{aligned}$$

Así, tomando

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos todos los términos cuadráticos. Hemos de notar que estos coeficientes están bien definidos ya que λ es no nulo para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, puesto que $\lambda(0) = i\omega_0$ con $\omega_0 > 0$.

Eliminación de los términos de orden 3

Existe un cambio de coordenadas complejo dependiente de parámetros

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} \bar{w}^3,$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, podemos transformar la ecuación

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z}^2 + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4),$$

en la ecuación

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4).$$

Este cambio de variable también es invertible, y la expresión del cambio inverso viene dada por

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{h_{30}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{30} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z \bar{z} \dot{z} + z^2 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2} (\dot{z} \bar{z}^2 + 2z \bar{z} \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + \dots = \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \lambda \frac{h_{30}}{2}\right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \bar{\lambda} \frac{h_{11}}{2}\right) z^2 \bar{z} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \lambda \frac{h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12}\right) z \bar{z}^2 + \\ &+ \left(\frac{g_{03}}{6} - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2}\right) \bar{z}^3 + \dots = \lambda w \frac{1}{6} (g_{30} - 2\bar{\lambda} h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 + \\ &+ \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4). \end{aligned}$$

Así, tomando

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\lambda}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\lambda - \lambda},$$

eliminamos todos los términos cúbicos en la ecuación resultante excepto $w^2 \bar{w}$, que debe tratarse por separado.

Para ello podemos definir

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}},$$

para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, ya que el denominador solo se anulará en $\alpha = 0$. Para obtener una transformación que dependa suavemente de α , habría que imponer que $h_{21} = 0$, lo que da lugar a que $c_1 = \frac{g_{21}}{2}$.

El resto de los coeficientes están bien definidos ya que λ es no nulo para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. \square

Ahora probaremos otro resultado mediante el cual podemos realizar un cambio de coordenadas sobre la forma normal de Poincaré, para obtener una expresión lo más cercana posible a (2.15).

Lema 2.5. *Consideramos la ecuación*

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

donde

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

con $\mu(0) = 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Supongamos que $\mu'(0) \neq 0$ y $Re(c_1(0)) \neq 0$. Entonces, la ecuación puede reescribirse mediante una transformación de coordenadas lineal dependiente de parámetros, un reescalado temporal y una reparametrización de tiempo no lineal, como una ecuación de la forma

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

donde u es una nueva coordenada compleja, y θ y β son redefiniciones del tiempo y del parámetro, respectivamente. Además $s = \text{signo}(\text{Re}\{c_1(0)\}) = \pm 1$.

Prueba:

Paso 1: Reescalado temporal lineal

Introducimos el nuevo tiempo $\tau = w(\alpha)t$. La dirección del tiempo se conserva ya que $w(\alpha) > 0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Luego

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

donde

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))},$$

Podemos considerar β como un nuevo parámetro debido a que

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\mu'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

y por lo tanto, el Teorema de la Función Inversa garantiza la existencia a nivel local de α como función de β .

Paso 2: Parametrización temporal no lineal

Cambiamos la parametrización del tiempo a lo largo de las órbitas introduciendo un nuevo tiempo $\theta = \theta(\tau, \beta)$ tal que

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\tau,$$

donde $e_1(\beta) = \text{Im}\{d_1(\beta)\}$.

Este cambio de tiempo es una transformación cercana a la identidad en un pequeño entorno del origen. Usando la nueva definición del tiempo, obtenemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde $l_1(\beta) = \text{Re}\{d_1(\beta)\} - \text{Im}\{d_1(\beta)\} = \text{Re}\{d_1(\beta)\} - \beta e_1(\beta)$ y $l_1(0) = \frac{\text{Re}\{c_1(0)\}}{\omega(0)}$.

Paso 3: Reescalado lineal de coordenadas

Finalmente, introducimos una nueva variable

$$\omega = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

lo cual está bien definido ya que $\text{Re}\{c_1(0)\} \neq 0$ y, por lo tanto, $l_1(0) \neq 0$. Entonces, la ecuación toma la forma que buscábamos

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + s|u|^2 + O(|u|^4),$$

con $s = \text{signo}(l_1(0)) = \text{signo}(\text{Re}\{c_1(0)\})$. \square

Cabe recalcar que $l_1(\beta)$ es una función real que se denota como **Primer coeficiente de Lyapunov**. Teniendo en cuenta la definición de los múltiples términos en la demostración anterior, este coeficiente se puede escribir como

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \operatorname{Re}\{ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}\}. \quad (2.18)$$

Una vez hecho todo este desarro, podemos concluir la sección con el resultado buscado.

Teorema 2.3. Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf

Consideramos un sistema dinámico bidimensional uniparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f una función regular, que tiene para $\alpha = 0$ un punto de equilibrio $x = 0$ con valores propios asociados

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

con $\mu(0) = 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Supongamos además que se cumplen las siguientes condiciones:

- (H.1) $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov.
- (H.2) $\mu'(0) \neq 0$.

Entonces, el sistema es localmente topológicamente equivalente cerca del origen a una de las siguientes formas normales

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

Prueba:

La demostración se realizará utilizando los resultados obtenidos en esta sección.

En primer lugar, se transforma para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, el sistema dinámico en uno equivalente de la forma

$$\dot{x} = Ax + F(x, \alpha),$$

que tiene un punto equilibrio $x = 0$ con valores propios asociados

$$\lambda(\alpha)_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

donde $\mu(0) = 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Mediante el *Lema 2.3* y el *Lema 2.4* se transforma el sistema anterior en una única ecuación de la forma

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Es ahora donde se necesitan las condiciones (H.1) y (H.2) para poder utilizar el *Lema 2.5*, y

realizar un cambio de coordenadas invertible dependiente de parámetros invertibles, así como una reparametrización del tiempo, que transforman el sistema de partida en

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4).$$

Finalmente por el *Lema 2.2*, se tiene que los términos de orden superior no afectan al comportamiento del sistema, y por tanto el sistema de partida es topológicamente equivalente a nivel local al sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.3.4. Bifurcaciones especiales

Como hemos visto en las subsecciones anteriores, todas las bifurcaciones uniparamétricas de sistemas que tienen un valor propio nulo y que verifican ciertas condiciones de transversalidad, son localmente topológicamente equivalentes a una bifurcación tangencial. Sin embargo, puede darse el caso en que, debido a una formulación concreta del sistema, tengamos un valor propio nulo pero no una bifurcación tangencial. Esto nos llevaría a la necesidad de imponer alguna condición adicional para garantizar la transversalidad, dando ello lugar así a la aparición de nuevas bifurcaciones de codimensión uno.

En muchas ocasiones en la teoría clásica de bifurcaciones, se asume que dado un sistema continuo genérico, el origen sea un punto de equilibrio para cualquier valor del parámetro, es decir, $f_\alpha(0) = 0$, para todo α . Esto haría que la condición (F.2) del *Teorema 2.2* no se verificase, y por lo tanto no puede ocurrir la bifurcación tangencial. Para solucionar esto, bastaría con imponer la condición $(\partial^2 f / \partial \mu \partial x)|_{(0,0)} \neq 0$, y ello da lugar a lo que se conoce como bifurcación transcítica.

Otra formulación particular donde no ocurre una bifurcación tangencial aún existiendo un valor propio nulo, se da para aquellos sistemas que presentan simetría. Diremos entonces que un sistema presenta simetría si se verifica que $f_\alpha(-x) = -f_\alpha(x)$, lo cual impide que ocurra una bifurcación transcítica, ya que no se verificaría la condición (F.1) del *Teorema 2.2*. Nuevamente, podemos reemplazar esta condición por $(\partial^3 f / \partial x^3) \neq 0$ y ello daría lugar a lo que se conoce como bifurcación pitchfork.

Bifurcación Transcítica

Sea el sistema dinámico uniparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = \alpha x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

El comportamiento del sistema en función del valor de α se puede resumir en los siguientes casos:

- Para $\alpha < 0$ hay dos puntos de equilibrio, $x_{01} = 0$ que es estable y $x_{02} = \alpha$ que es inestable.
- Para $\alpha = 0$ el sistema presenta un punto de equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$ donde la matriz jacobiana viene dada por $\lambda = f_x(0, 0) = 0$.

- Para $\alpha > 0$ hay dos puntos de equilibrio, $x_{01} = 0$ que es inestable y $x_{02} = \alpha$ que es estable.

El cambio de estabilidad entre dos puntos de equilibrio a uno cuando α pasa de tomar valores negativos a positivos, da lugar a lo que se conoce como **bifurcación transcítica**.

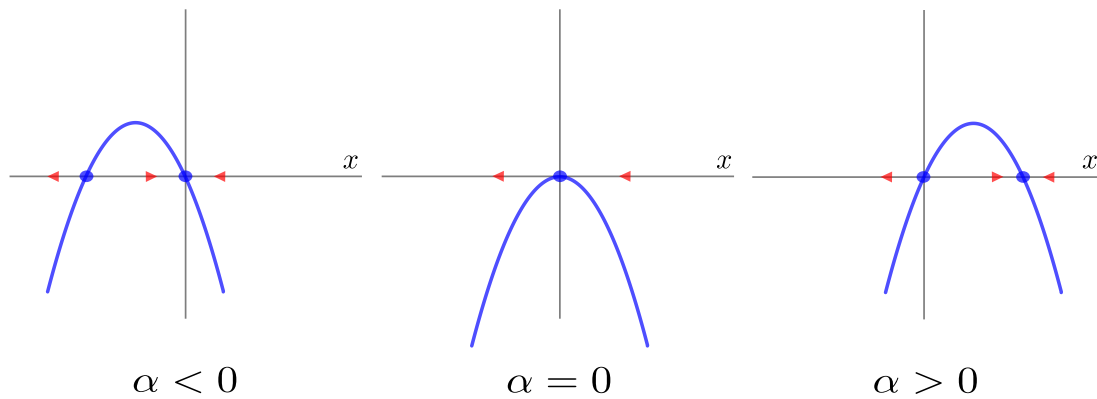


Figura 2.7: Retrato de fases del sistema (2.20) para distintos valores del parámetro.

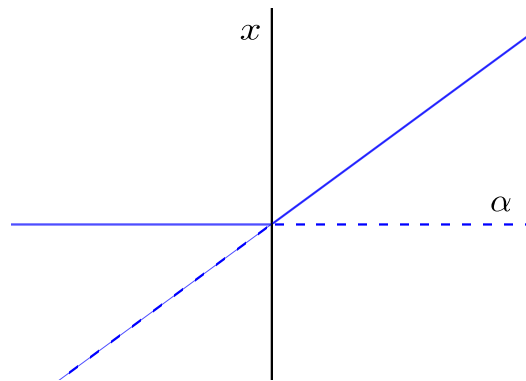


Figura 2.8: Diagrama de bifurcación del sistema (2.20).

A diferencia de la subsección anterior, haremos un razonamiento geométrico de manera cualitativa para determinar la forma normal de esta bifurcación [Beg15].

Empezaremos por observar que a raíz del análisis del retrato de fases del sistema (2.20), se pueden deducir las siguientes propiedades:

- (A) Existen dos curvas de puntos de equilibrio que pasan por $(x, \alpha) = (0, 0)$ y que tienen por ecuaciones $x = \alpha$ y $x = 0$.
- (B) Las dos curvas de puntos fijos existen a ambos lados de $\alpha = 0$.
- (C) La estabilidad de los puntos fijos de cada curva cambia al pasar por $\alpha = 0$.

Sea ahora un sistema uniparamétrico cualquiera

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.21)$$

que tiene un punto fijo no hiperbólico en $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Para que este sistema cumpla la condición (A) será necesario que se verifique que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)\Big|_{(0,0)} = 0.$$

ya que de lo contrario, sin más que utilizar el *Teorema de la Función Implícita*, existiría una única curva que pase por el origen.

Para hacer compatible esta condición con el hecho de que $x = 0$ sea una curva de puntos de equilibrio, es necesario reescribir el sistema (2.21) de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = x \cdot F(x, \alpha(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde

$$F(x, \alpha) = \begin{cases} f(x, \mu) & \text{si } x \neq 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{(0,\mu)} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como $x = 0$ es una curva de puntos fijos para el sistema anterior y pretendemos que haya dos curvas de puntos fijos que pasen por $(x, \alpha) = (0, 0)$, debemos imponer condiciones sobre F de modo que esta tenga una otra curva de ceros que pase por el origen que sea distinta de $x = 0$. Esto lo podemos hacer a través de las derivadas de F , de tal forma que

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{(0,0)} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Big|_{(0,0)} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)\Big|_{(0,0)} \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right)\Big|_{(0,0)}. \end{aligned}$$

Si ahora suponemos que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}\right)\Big|_{(0,0)} \neq 0$, entonces utilizando el *Teorema de la Función Implícita*, existe una función $\alpha(x)$ definida para x suficientemente pequeño, con $\alpha(0) = 0$ y tal que

$$F(x, \alpha(x)) = 0.$$

Por lo tanto, $\alpha(x)$ es una curva de puntos de equilibrio. Para que no coincida con $x = 0$ y para que exista a ambos lados de $\alpha = 0$ (C), debemos exigir que:

$$0 < \left|\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\Big|_{(0,0)}\right| < +\infty. \quad (2.22)$$

Para hallar la expresión explícita de esta derivada recurrimos a derivar $F(x, \alpha(x)) = 0$, donde aplicando la regla de la cadena y evaluando en $(0, 0)$ se llega a que

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\Big|_{(0,0)} = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Big|_{(0,0)} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right)\Big|_{(0,0)}\right)^{-1},$$

Así, para que se cumpla (2.22), debemos imponer que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Big|_{(0,0)} \neq 0$ y $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right)\Big|_{(0,0)} \neq 0$.

Todo esto nos lleva a enunciar el siguiente resultado central.

Teorema 2.4. Forma normal topológica para la bifurcación transcítica

Sea el sistema dinámico uniparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función suficientemente regular con un punto de equilibrio $x = 0$ para $\alpha = 0$. Además se tiene que $\lambda = J_x(0, 0) = 0$.

Supongamos que se cumplen las condiciones:

- (TC.1) $(\partial f / \partial \alpha)|_{(0,0)} = 0$
- (TC.2) $(\partial^2 f / \partial x^2)|_{(0,0)} \neq 0$.
- (TC.3) $(\partial^2 f / \partial x \partial \alpha)|_{(0,0)} \neq 0$.

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a una de las siguientes formas normales

$$\dot{\eta} = \beta\eta \pm \eta^2.$$

Bifurcación Pitchfork

Sea la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 \equiv f(\alpha, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

El comportamiento del sistema en función del valor de α se puede resumir en los siguientes casos:

- Para $\alpha < 0$, la ecuación presenta un punto de equilibrio estable en $x_0 = 0$.
- Para $\alpha = 0$ tenemos un punto de equilibrio estable en origen.
- Para $\alpha > 0$, la ecuación presenta un punto de equilibrio inestable en $x_0 = 0$, y dos puntos de equilibrio estables $x_0^\pm = \pm\sqrt{\alpha}$.

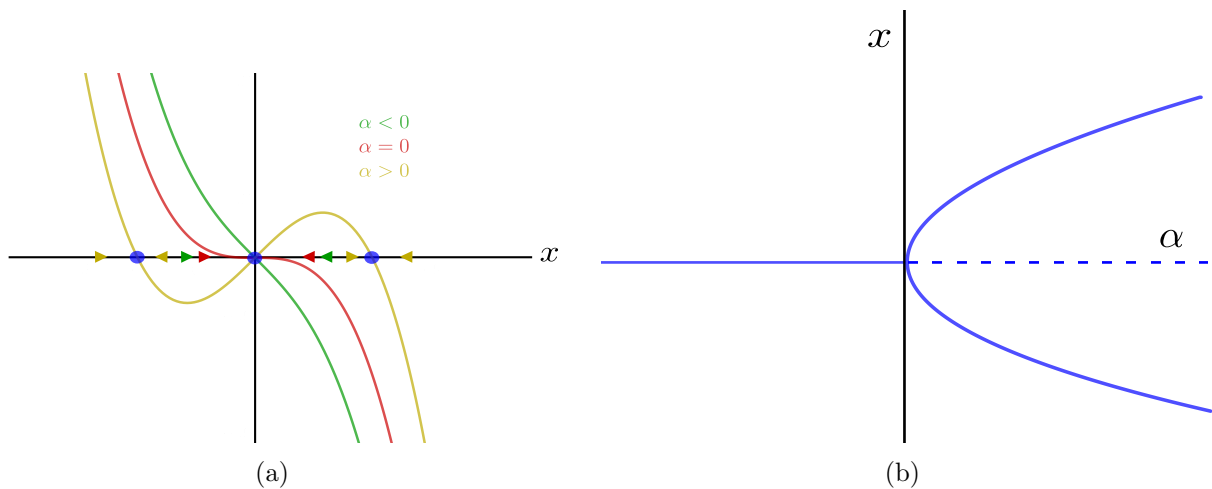


Figura 2.9: Retrato de fases del sistema (2.23) para diferentes valores del parámetro α (a) y digrama de bifurcación (b).

Así, la aparición de dos nuevos puntos de equilibrio estables en el sistema a medida que α aumenta su valor, da lugar a lo que se conoce como **bifurcación pitchfork**.

Si ahora consideramos el mismo sistema pero cambiando el signo del término de orden cúbico tendremos

$$\dot{x} = \alpha x + x^3 \equiv f(\alpha, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Este sistema se puede analizar de manera análoga al caso inicial, observando que las únicas diferencias con respecto a este son que ahora los puntos de equilibrio estables $x_0^\pm = \pm\sqrt{\alpha}$, aparecen para $\alpha < 0$.

Estos sistemas dan lugar a dos tipos de bifurcaciones pitchfork:

- **Supercrítica:** los nuevos puntos de equilibrio estables aparecen para valores de $\alpha > 0$.
- **Subcrítica:** los nuevos puntos de equilibrio estables aparecen para valores de $\alpha < 0$.

Al igual que en la subsección anterior, haremos un razonamiento geométrico de manera cualitativa para determinar la forma normal de esta bifurcación [Beg15].

Empezaremos por observar que a raíz del análisis del retrato de fases de los sistemas (2.23) y (2.24), se pueden deducir las siguientes propiedades:

- Existen dos curvas de puntos de equilibrio que pasan por $(0, 0)$, y que vienen dadas por $x = 0$ y $\alpha = \pm x^2$.
- La curva $x = 0$ existe a ambos lados de $\alpha = 0$, mientras que $\alpha = \pm x^2$ solo existe a un lado.
- Los puntos fijos de la curva $x = 0$ tienen diferentes tipos de estabilidad a ambos lados de $\alpha = 0$, mientras que los puntos fijos de $\alpha = \pm x^2$ tienen la misma estabilidad.

Sea ahora un sistema uniparamétrico cualquiera

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

que tiene un punto fijo no hiperbólico en $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Al igual que en el caso de la bifurcación transcítica, para que exista más de una curva de puntos fijos pasando por el origen se debe verificar que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

De manera análoga, para hacer compatible el hecho de tener dos curvas que pasen por el origen con que una de ellas sea $x = 0$, es necesario reescribir el sistema (2.25) de la forma

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = x \cdot F(x, \alpha(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde

$$F(x, \alpha) = \begin{cases} f(x, \mu) & \text{si } x \neq 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Big|_{(0, \mu)} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Además si ahora suponemos que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right) \Big|_{(0,0)} \neq 0$, entonces utilizando el *Teorema de la Función Implícita*, existe una función $\alpha(x)$ definida para x suficientemente pequeño, con $\alpha(0) = 0$ y tal que

$$F(x, \alpha(x)) = 0. \quad (2.26)$$

Por lo tanto, $\alpha(x)$ es una curva de puntos de equilibrio.

Para que se verifiquen las propiedades (A), (B) y (C) es suficiente con imponer que

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) \Big|_{(0,0)} = 0, \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) \Big|_{(0,0)} \neq 0. \quad (2.28)$$

Para hallar la expresión explícita de estas derivadas recurrimos a derivar $F(x, \alpha(x)) = 0$, donde aplicando la regla de la cadena y evaluando en $(0, 0)$ se llega a que

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) \Big|_{(0,0)} = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \Big|_{(0,0)} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right) \Big|_{(0,0)}\right)^{-1},$$

por lo que para que se cumpla (2.27) basta con imponer que $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \Big|_{(0,0)} = 0$ y $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right) \Big|_{(0,0)} \neq 0$.

Derivando nuevamente la expresión previa se obtiene que

$$\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right) \Big|_{(0,0)} \neq 0 = - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) \Big|_{(0,0)} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right) \Big|_{(0,0)}\right)^{-1},$$

por lo que para que se cumpla (2.28) basta con imponer que $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) \Big|_{(0,0)} \neq 0$ y $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\right) \Big|_{(0,0)} \neq 0$.

Todo esto nos lleva a enunciar el siguiente resultado central.

Teorema 2.5. Forma normal topológica para la bifurcación pitchfork

Sea el sistema dinámico uniparamétrico

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función suficientemente regular con un punto de equilibrio $x = 0$ para $\alpha = 0$. Además se tiene que $\lambda = J_x(0, 0) = 0$.

Supongamos que se cumplen las condiciones:

- (P.1) $(\partial f \partial \mu) \Big|_{(0,0)} = 0$
- (P.2) $(\partial^2 f \partial x^2) \Big|_{(0,0)} = 0$.
- (P.3) $(\partial^2 f / \partial x \partial \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0$.

- (P.4) $(\partial^3 f / \partial x^3)|_{(0,0)} \neq 0$.

Entonces el sistema es topológicamente localmente equivalente en un entorno del origen a una de las siguientes formas normales

$$\dot{\eta} = \beta\eta \pm \eta^3.$$

2.4. Bifurcaciones uniparamétricas en sistemas discretos

En esta sección estudiaremos y formularemos una serie de condiciones que definen a las bifurcaciones de equilibrio para sistemas dinámicos de tiempo discreto con dimensión arbitraria n . Más concretamente, nos centraremos en las bifurcaciones tangencial y de duplicación de periodo para sistemas escalares y la bifurcación de Neimark-Sacker para sistemas en el plano.

2.4.1. Condiciones de bifurcación simples

Sea un sistema continuo dependiente de un parámetro

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función regular con respecto a x y a α . Sea x_0 un punto fijo hiperbólico del sistema para $\alpha = \alpha_0$.

Observación 2.1. *En ocasiones usaremos por comodidad la notación*

$$\tilde{x} = f(x, \alpha), \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde \tilde{x} representa la imagen de x a través de la aplicación \mapsto .

La condición de hiperbolicidad asociada al punto fijo x_0 solo se puede romper en general para tres únicos casos:

- Existe un valor propio simple que se aproxima al círculo unidad de tal forma que $\mu_1 = 1$, para algún valor del parámetro.
- Existe un valor propio simple que se aproxima al círculo unidad de tal forma que $\mu_1 = -1$, para algún valor del parámetro.
- Existen una pareja valores propios puramente imaginarios que se acercan al círculo unidad de tal forma que $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ con $0 < \theta_0 < \pi$, para algún valor del parámetro.

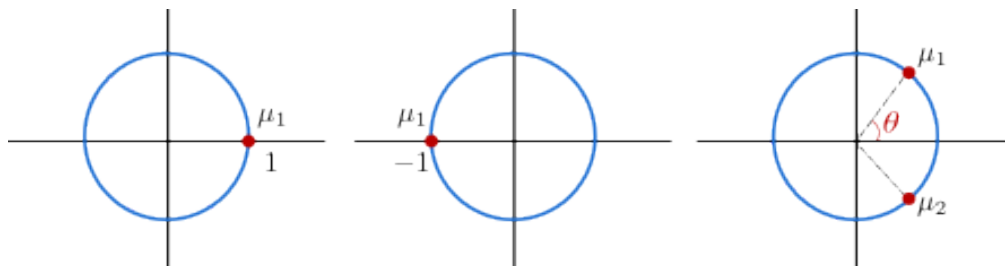


Figura 2.10: Casos críticos sobre la hiperbolicidad para sistemas discretos.

Estas tres posibilidades se corresponden con bifurcaciones de codimensión uno para sistemas discretos, las cuales podemos clasificar a través de las siguientes definiciones.

Definición 2.12. La bifurcación asociada con la aparición de un valor propio $\mu_1 = 1$ se llama **bifurcación tangencial**.

Definición 2.13. La bifurcación asociada con la aparición de un valor propio $\mu_1 = -1$ se llama **bifurcación de duplicación de periodo**.

Definición 2.14. La bifurcación asociada con la aparición de una pareja de valores propios puramente imaginarios $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ con $0 < \theta_0 < \pi$, se denomina **bifurcación de Neimark-Sacker**.

Cabe notar que las bifurcaciones tangencial y flip se pueden estudiar para $n \geq 1$, pero para la bifurcación de Neimark-Sacker es necesario que $n \geq 2$.

En adelante desarrollaremos la teoría en torno a la cual se demuestra que un punto fijo no hiperbólico que cumple una de las condiciones anteriores es estructuralmente inestable, y analizaremos las bifurcaciones correspondientes al retrato de fases a nivel local bajo la perturbación de parámetros.

2.4.2. Bifurcación tangencial

Sea el sistema dinámico uniparamétrico:

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 \equiv f(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.29)$$

donde la aplicación f_α es invertible para valores pequeños de $|\alpha|$ en un entorno del origen.

El comportamiento del sistema en función del valor de α se puede resumir en los siguientes casos:

- Para $\alpha < 0$ el sistema presenta dos puntos fijos: $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, de los cuales $x_1(\alpha)$ es estable y $x_2(\alpha)$ es inestable.
- Para $\alpha = 0$ el sistema presenta un punto fijo no hiperbólico $x_0 = 0$, donde la matriz jacobiana viene dada por $\mu = J_f(0, 0) = 1$.
- Para $\alpha > 0$ el sistema no presenta puntos fijos.

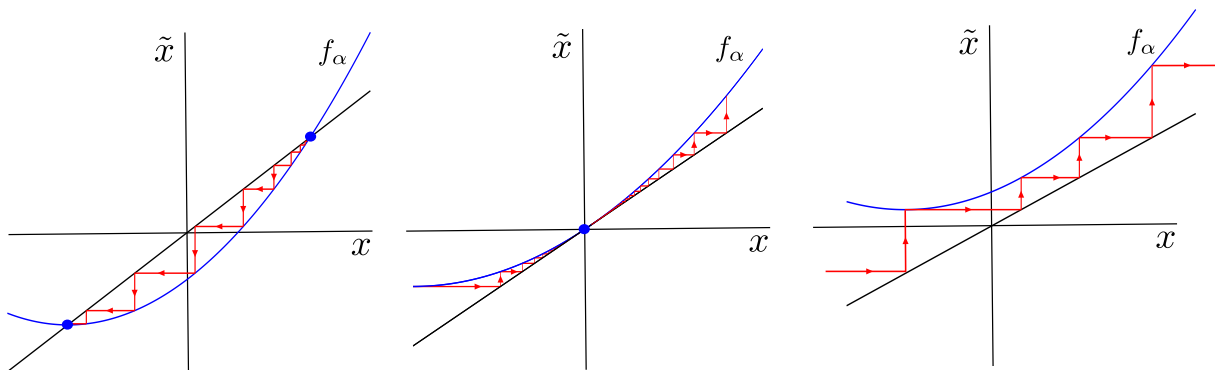


Figura 2.11: Diagrama de telaraña del sistema (2.29) para distintos valores del parámetro α .

La transición de dos equilibrios a uno cuando α pasa de tomar valores negativos a positivos, da lugar a lo que se conoce como **bifurcación tangencial** en un sistema discreto.

Hemos de notar que el sistema

$$x \mapsto \alpha + x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

se puede estudiar de manera totalmente análoga, teniendo en este caso la aparición de los dos puntos fijos para $\alpha > 0$.

No obstante, en adelante y sin pérdida de generalidad, estudiaremos el caso del sistema (2.29). En efecto, considerando que dicho sistema contiene términos de orden superior a dos, es decir, consideremos

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 + x^3\psi(x, \alpha) \equiv F_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

En un entorno suficientemente pequeño de $x = 0$ y para un mismo valor de $|\alpha|$ lo suficientemente pequeño, el número y la estabilidad de los puntos fijos son los mismos tanto para el sistema (2.29) como para el sistema (2.30). Además, para cada $|\alpha|$ pequeño es de esperar que se pueda construir en un entorno del origen, un homeomorfismo h_α que lleva órbitas de (2.29) en las órbitas correspondientes de (2.30), es decir, se espera que ambos sistemas sean localmente topológicamente equivalentes.

Sin embargo la construcción de h_α no es tan trivial como en el *Lema 2.1* del caso continuo, y de hecho la propiedad de que el homeomorfismo lleve puntos fijos de (2.29) en puntos fijos de (2.30), no garantiza que ocurra lo mismo entre las órbitas de ambos sistemas. No obstante, si que existe un homeomorfismo h_α que satisface la condición

$$f_\alpha(x) = h_\alpha^{-1}(F_\alpha(h_\alpha(x))),$$

para todo (x, α) en un entorno de $(0, 0)$, lo cual es suficiente para garantizar la veracidad del siguiente lema.

Lema 2.6. *El sistema*

$$x \mapsto \alpha + x + x^2 + O(x^3),$$

es topológicamente equivalente en un entorno del origen al sistema

$$x \mapsto \alpha + x + x^2.$$

A continuación y de manera análoga al caso de los sistemas continuos, buscamos probar que el sistema (2.29) es una forma normal topológica de un sistema genérico de dimensión uno, que tiene una bifurcación tangencial.

Teorema 2.6. *Forma normal topológica para la bifurcación tangencial*

Sea el sistema dinámico uniparamétrico

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función con un punto fijo $x_0 = 0$ para $\alpha = 0$. Además se tiene que $\mu = J_x(0, 0) = 1$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- (FD.1) $\frac{1}{2}(\partial^2 f / \partial x^2)|_{(0,0)} \neq 0$
- (FD.2) $(\partial f / \partial \alpha)|_{(0,0)} \neq 0$.

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a una de las siguientes formas normales

$$\eta \mapsto \beta + \eta \pm \beta^2.$$

Prueba:

Desarrollando en serie de Taylor $f(x, \alpha)$ con respecto a x centrado en torno a $x = 0$, podemos escribir:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde estamos usando que $f_0(\alpha) = f(0, \alpha)$ y $f_k(\alpha) = (k!)^{-1} (\partial^k f / \partial x^k)|_{(0,\alpha)}$.

Además se satisfacen las condiciones siguientes:

- Condición de punto fijo: $f_0(0) = f(0, 0) = 0$
- Condición de bifurcación tangencial: $f_1(0) = (\partial f / \partial x)|_{(0,0)} = 1$

Dado que $f_1(0) = 1$, podemos escribir

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + [1 + g(\alpha)]x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde $g(\alpha)$ es regular y $g(0) = 0$.

Seguidamente realizaremos una serie de cálculos que son válidos para todos los problemas de bifurcación locales, donde a través de cambios coordenadas y parámetros, transformaremos el sistema genérico de partida en el sistema (2.29) hasta los términos de segundo orden, para posteriormente eliminar los términos de orden superior usando el *Lema 2.6*.

Durante el proceso veremos que es necesario imponer algunas condiciones adicionales de transversalidad para que estas transformaciones sean posibles.

Paso 1: Cambio de coordenadas

Realizamos un desplazamiento lineal en las coordenadas introduciendo una nueva variable $\xi = x + \delta$, donde $\delta = \delta(\alpha)$ es una función que será definida más adelante.

Sustituyendo en la aplicación de partida, se obtiene que:

$$\tilde{\xi} = \tilde{x} + \delta = f(x, \alpha) + \delta = f(\xi - \delta, \alpha) + \delta.$$

Por lo tanto tenemos que :

$$\tilde{\xi} = [f_0(\alpha) - g(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] + \xi + [g(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 + O(\xi^3). \quad (2.31)$$

Si suponemos que

$$f_2(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0,0)} \neq 0, \quad (2.32)$$

entonces existe una función regular $\delta(\alpha)$ que anula el término lineal en la ecuación anterior para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Esto se sigue del Teorema de la Función Implícita considerando la función

$$F(\alpha, \delta) \equiv f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \psi(\alpha, \delta)\delta^2 = 0,$$

para alguna función ψ . Además se tiene que

$$F(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \delta} \right) \Big|_{(0,0)} = -2f_2(0) \neq 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \Big|_{(0,0)} = g'(0) \neq 0,$$

lo que implica la existencia (local) y unicidad de una función regular $\delta = \delta(\alpha)$ tal que $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$. La expresión explícita de esta función es

$$\delta(\alpha) = \frac{g'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2),$$

donde el símbolo ' indica que se trata de la derivada respecto al parámetro α .

Podemos observar entonces que (2.31) ahora no contiene términos lineales

$$\dot{\xi} = [f'_0(\alpha)\alpha + \alpha^2\psi(\alpha)] + \xi + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3). \quad (2.33)$$

Paso 2: Definición de un parámetro nuevo

Sea el parámetro $\mu(\alpha)$ que se obtiene del término lineal de la ecuación anterior, es decir

$$\mu = f'_0(\alpha)\alpha + \alpha^2\psi(\alpha).$$

Es fácil observar que μ cumple:

- $\mu(0) = 0$
- $\mu'(0) = f'_0(0) = (\partial f / \partial \alpha)|_{(0,0)}$

Dado que por hipótesis se verifica (FD.2) se tiene que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \Big|_{(0,0)} \neq 0, \quad (2.34)$$

se sigue del Teorema de la Función Inversa la existencia y unicidad local de una función inversa $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$.

Por lo tanto, la ecuación (2.33) quedaría como

$$\tilde{\xi} = \mu + \xi + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3),$$

donde $b(\mu) = f_2(0) + O(\alpha)$ con $b(0) = f_2(0) \neq 0$ a causa de la suposición (FD.1).

Paso 3: Ajuste final

Definiendo $\eta = |b(\mu)|\xi$ y $\beta = |b(\mu)|\mu$ se sigue que

$$\tilde{\eta} = \beta + \eta + s\eta^2 + O(\eta^3),$$

donde $s = \text{signo}(b(0)) = \pm 1$.

Por último, utilizando el *Lema 2.6* podemos eliminar los términos de orden tres, llegando así al resultado buscado. \square

2.4.3. Bifurcación de duplicación de periodo

Sea el sistema dinámico uniparamétrico:

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.35)$$

donde la aplicación f_α es localmente invertible para valores pequeños de $|\alpha|$ en un entorno del origen.

El comportamiento del sistema en función del valor de α se puede resumir en los siguientes casos:

- Para $\alpha < 0$ el sistema presenta un punto fijo no hiperbólico $x_0 = 0$ siempre que $\mu = -(1 + \alpha)$, el cual es estable.
- Para $\alpha = 0$ el sistema presenta un punto fijo no hiperbólico $x_0 = 0$ inestable, donde en este caso la matriz jacobiana viene dada por $\mu = f_x(0, 0) = -1$.
- Para $\alpha > 0$ el sistema presenta un punto fijo no hiperbólico $x_0 = 0$ siempre que $\mu = -(1 + \alpha)$, el cual es inestable.

Consideramos ahora la segunda iteración $f_\alpha^2(x)$ de la aplicación (2.35). Si denotamos $y = f_\alpha(x)$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} f_\alpha^2(x) &= f_\alpha(y) = -(1 + \alpha)y + y^3 = -(1 + \alpha)[-(1 + \alpha)x + x^3] + [-(1 + \alpha)x + x^3]^3 = \\ &= (1 + \alpha)^2x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + 2)x^3] + O(x^5). \end{aligned}$$

La aplicación f_α^2 claramente tiene un punto fijo $x_0 = 0$ y también dos puntos fijos para α pequeño ($\alpha > 0$)

$$x_{1,2} = f_\alpha^2(x_{1,2}),$$

donde $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$. Estos dos puntos son estables y constituyen un ciclo de período dos para la aplicación original f_α . Esto tiene una implicación directa, que es que

$$x_2 = f_\alpha^2(x_1) \quad x_1 = f_\alpha^2(x_2),$$

con $x_1 = -x_2$. En adelante denotaremos a este tipo de puntos fijos como **puntos 2-periódicos**.

Cuando α pasa de tomar valores positivos a negativos, provoca que el ciclo de período doble decrezca y finalmente desaparezca. Esto es una **bifurcación con duplicación de periodo**.

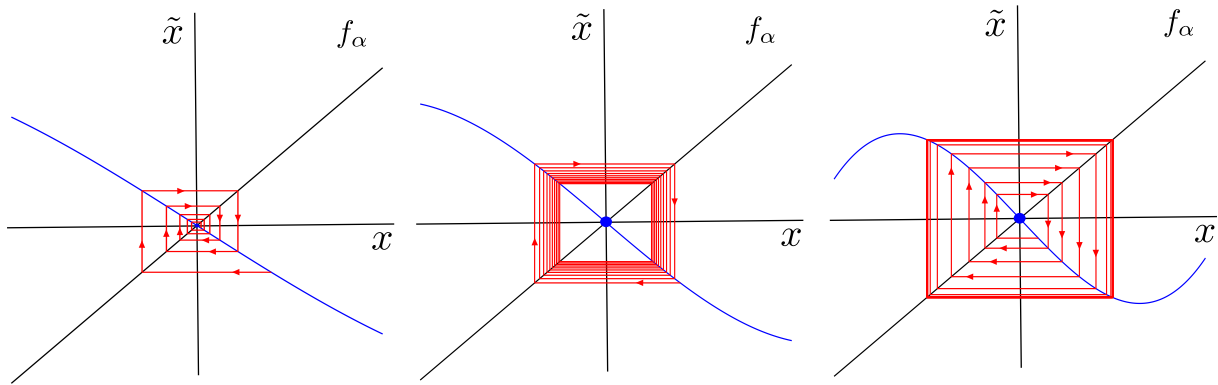


Figura 2.12: Diagrama de telaraña del sistema (2.35) para distintos valores del parámetro α .

De manera análoga, se puede estudiar el sistema

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3 \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.36)$$

cuyo retrato de fases se puede analizar del mismo modo que el caso inicial, observando que las únicas diferencias con respecto a este son que hay un ciclo límite inestable de periodo doble que desaparece cuando α pasa de tomar valores negativos a tomarlos positivos.

Esto da lugar a la aparición nuevamente de dos tipos de bifurcación:

- **Supercrítica:** el ciclo límite aparece para valores de $\alpha > 0$.
- **Subcrítica:** el ciclo límite aparece para valores de $\alpha < 0$.

Como es habitual, el tipo de bifurcación se determina por la estabilidad del punto fijo en el valor del parámetro de bifurcación.

Ahora consideremos que el sistema (2.35) contiene términos de orden superior a tres, es decir, consideremos

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 + O(x^4) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

De manera análoga al estudio hecho en secciones previas, el siguiente resultado garantiza que los términos de orden superior no tienen influencia sobre el comportamiento cualitativo de la bifurcación.

Lema 2.7. *El sistema*

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 + O(x^4),$$

es topológicamente equivalente en un entorno del origen al sistema

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3.$$

A continuación, buscamos probar que el sistema (2.35) es una forma normal topológica de un sistema genérico de dimensión uno, que tiene una bifurcación de duplicación de periodo.

Teorema 2.7. *Forma normal topológica para la bifurcación de duplicación de periodo*

Sea el sistema dinámico uniparamétrico

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función con un punto fijo $x_0 = 0$ para $\alpha = 0$. Además se tiene que $\mu = J_x(0, 0) = -1$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- (F.1) $\frac{1}{2}((\partial^2 f / \partial x^2)|_{(0,0)})^2 + \frac{1}{6}(\partial^3 f / \partial x^3)|_{(0,0)} \neq 0$
- (F.2) $(\partial^2 f / \partial x \partial \alpha)|_{(0,0)} \neq 0$.

Entonces el sistema es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a una de las siguientes formas normales

$$\eta \mapsto -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3.$$

Prueba:

Sea el sistema dinámico uniparamétrico:

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.38)$$

Por el Teorema de la Función Implícita, el sistema tiene un único punto fijo $x_0(\alpha)$ en algún entorno del origen para todo α suficientemente pequeño, ya que $J_x(0, 0) = 1 \neq 0$. Sin embargo, es posible realizar un cambio de coordenadas de tal manera que podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ es el punto fijo del sistema para α suficientemente pequeño.

Desarrollando en serie de Taylor $f(x, \alpha)$ con respecto a x centrado en $x = 0$

$$f(x, \alpha) = f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde estamos usando que $f_k(\alpha) = (k!)^{-1} (\partial^k f / \partial x^k)|_{(0, \alpha)}$.

Además se satisfacen las condiciones siguientes:

- Condición de no degeneración: $\frac{1}{2}((\partial^2 f / \partial x^2)|_{(0,0)})^2 + \frac{1}{6}(\partial^3 f / \partial x^3)|_{(0,0)} \neq 0$
- Condición de transversalidad: $(\partial^2 f / \partial x \partial \alpha)|_{(0,0)} \neq 0$

Además se tiene que $f_1(\alpha) = -[1 + g(\alpha)]$ para alguna función regular g .

Seguidamente realizaremos una serie de cálculos que son válidos para todos los problemas de bifurcación locales, donde a través de cambios coordenadas y parámetros, transformaremos el sistema (2.38) en el sistema (2.35) hasta los términos de segundo orden, para posteriormente eliminar los términos de orden superior usando el *Lema 2.7*.

Paso 1: Definición de un nuevo parámetro

Dado que $g(0) = 0$ y además como se tiene por hipótesis (F.2)

$$g'(0) = (\partial^2 f / \partial x \partial \alpha)|_{(0,0)} = 1 \neq 0,$$

se sigue del Teorema de la Función Inversa la existencia y unicidad local de una función inversa de g , que denotaremos por $\beta = g(\alpha)$.

Por tanto la expresión inicial queda escrita de la siguiente manera

$$\tilde{x} = \mu(\beta)x + a(\beta)^2 + b(\beta)^3 + O(x^4),$$

donde $\mu(\beta) = -(1 + \beta)$, y las funciones $a(\beta)$ y $b(\beta)$ son funciones regulares que verifican que

$$a(0) = f_2(0) = \frac{1}{2}(\partial^2 f / \partial x^2)|_{(0,0)}, \quad b(0) = \frac{1}{6}(\partial^3 f / \partial x^3)|_{(0,0)}.$$

Paso 2: Cambio de coordenadas

Realizando un nuevo cambio de coordenadas de la forma

$$x = y + \delta y^2,$$

donde $\delta = \delta(\beta)$ es una función regular que será definida más adelante. Además, el cambio de coordenadas anterior es invertible en algún entorno del origen, y su inversa puede encontrarse mediante el método de los coeficientes indeterminados, obteniendo

$$y = x - \delta x^2 + 2\delta^2 x^3 + O(x^4).$$

Juntando todo lo anterior se tiene que

$$\tilde{y} = \mu y + (a + \delta\mu - \delta\mu^2) + (b + 2\delta a - 2\delta\mu(\delta\mu + a) + 2\delta^2\mu^3)y^3 + O(y^4),$$

donde se observa que el término cuadrático se puede eliminar para todo β suficientemente pequeño si se define

$$\delta(\beta) = \frac{a(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)}.$$

Hay que recalcar que es posible definir $\delta(\beta)$ de esta manera ya que $\mu^2(\beta) - \mu(\beta) = 2 \neq 0$.

Sustituyendo en lo anterior se llega a que

$$\tilde{y} = \mu y + \left(b + \frac{2}{\mu^2 - \mu}\right) y^3 + O(y^4) = -(1 + \beta)y + c(\beta)y^3 + O(y^4),$$

para alguna función regular $c(\beta)$ que verifica por (F.1)

$$c(0) = a(0)^2 + b(0) = \frac{1}{2}((\partial^2 f / \partial x^2)|_{(0,0)})^2 + \frac{1}{6}(\partial^3 f / \partial x^3)|_{(0,0)} \neq 0.$$

Paso 3: Ajuste final

Si ahora aplicamos el reescalado

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{|c(\beta)|}}$$

vemos que nuestro sistema adquiere la expresión

$$\tilde{\eta} = -(1 + \beta)\eta + s\eta^3 + O(\eta^4).$$

donde $s = \text{signo}(c(0)) = \pm 1$.

Por último, utilizando el *Lema 2.7* podemos prescindir los términos de orden cuatro, llegando así al resultado buscado. \square

2.4.4. Bifurcación de Neimark-Sacker

Sea el sistema dinámico uniparamétrico en el plano

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

donde $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ y $d = d(\alpha)$ son funciones regulares, que verifican que $0 < \theta(0) < \pi$, $d(0) = 0$.

Este sistema tiene el punto fijo $x_1 = x_2 = 0$ para α con matriz jacobiana

$$A = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\mu_{1,2} = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta}$, lo que hace que (2.39) sea invertible en un entorno del origen para todos los α suficientemente pequeño.

A continuación estudiaremos el comportamiento del sistema, comenzando por observar que el punto fijo $x_1 = x_2 = 0$ no es hiperbólico para $\alpha = 0$, debido a que la matriz jacobiana tendría dos valores propios conjugados complejos en el círculo unitario.

Para continuar con el análisis de la bifurcación, introduciremos una variable compleja $z = x_1 + ix_2$ y definiremos $d_1 = d + ib$, de tal forma que el sistema queda descrito por la ecuación

$$z \mapsto e^{i\theta}z(1 + \alpha + d_1|z|^2) = \mu z + c_1 z|z|^2,$$

donde $\mu = \mu(\alpha) = (1 + \alpha)e^{i\theta}$ y $c = c(\alpha) = e^{i\theta}d_1(\alpha)$.

Resulta posible simplificar más aún la aplicación anterior utilizando la expresión en coordenadas de polares de un número complejo, es decir, utilizar que $z = \rho e^{i\varphi}$ llegando a

$$\rho \mapsto \rho|1 + \alpha + d_1(\alpha)\rho^2|.$$

Por simplicidad se puede reescribir el siguiente término como

$$|1 + \alpha + d_1(\alpha)\rho^2| = (1 + \alpha) \left(1 + \frac{2d(\alpha)}{1 + \alpha}\rho^2 + \frac{|d_1(\alpha)|^2}{(1 + \alpha)^2}\rho^4 \right)^{1/2} = 1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2 + O(\rho^4),$$

podemos expresar el sistema (2.39) en su forma polar

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho(1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2) + \rho^4 R_\alpha(\rho) \\ \varphi \mapsto \varphi + \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho) \end{cases} \quad (2.40)$$

donde R y Q son funciones regulares que dependen de ρ y de α .

Expresar el sistema en forma polar resulta muy útil, ya que se puede llevar a cabo el estudio de la bifurcación en función del valor de α de manera independiente para ρ y φ .

Por un lado, la primera ecuación define un sistema dinámico unidimensional que tiene un punto fijo $\rho = 0$ para todos los valores de α . El punto es linealmente estable si $\alpha < 0$, mientras que en el caso en que $\alpha > 0$, el punto se vuelve linealmente inestable. Por otro lado, la estabilidad del punto fijo en $\alpha = 0$ está determinada por el signo del coeficiente $d(0)$, siendo estable en el caso en que $d(0) < 0$.

Aparte de este punto fijo, existe otro para $\alpha > 0$ que resulta ser estable y viene dado por la expresión

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} + O(\alpha).$$

Por otro lado, la segunda ecuación define una rotación por un ángulo que depende de ρ y α , y que es aproximadamente igual a $\theta(\alpha)$.

Así, el comportamiento del sistema en función del valor de α se puede resumir en los siguientes casos:

- Para $\alpha < 0$ el punto fijo que tiene el sistema en $\rho = 0$ es linealmente estable. Además, las curvas invariantes del sistema cerca del origen se asemejan a las órbitas de un foco atractor para un sistema continuo.
- Para $\alpha = 0$, la estabilidad del punto fijo que tiene el sistema en $\rho = 0$ está determinada por el signo del coeficiente $d(0)$, siendo estable en el caso en que $d(0) < 0$.
- Para $\alpha > 0$ el punto fijo que tiene el sistema en $\rho = 0$ es linealmente inestable. Pero además, la existencia de otro punto fijo estable da lugar a la existencia de una curva invariante cerrada aislada que es única, estable y de naturaleza atractora. Dicha curva es un círculo de radio $\rho_0(\alpha)$, donde tanto las órbitas que comienzan dentro, a excepción del origen, como fuera de ella; acaban convergiendo a la misma.

La aparición de este conjunto invariante bajo la variación del parámetro α , da lugar a lo que se conoce como **bifurcación de Neimark-Sacker** en un sistema discreto.

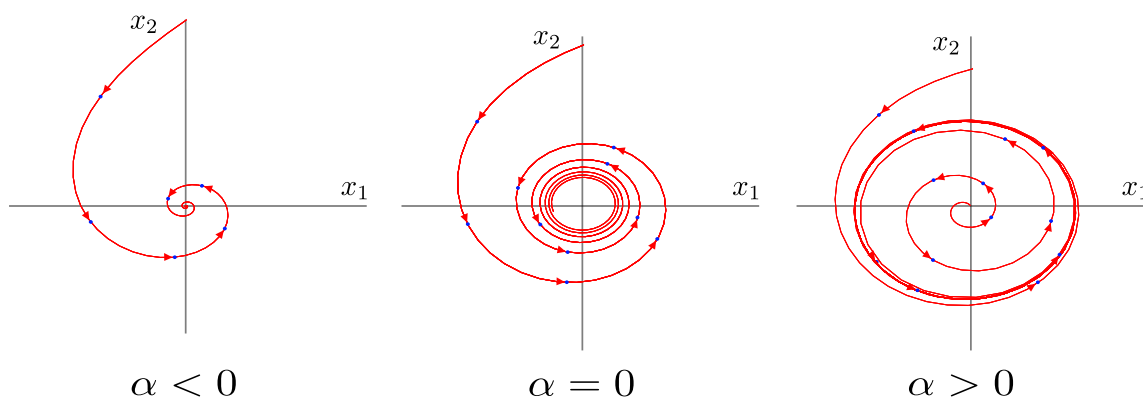


Figura 2.13: Diagrama de telaraña del sistema (2.39) para distintos valores del parámetro α , en el caso en que $d(0) < 0$.

El caso $d(0) > 0$ puede ser analizado de manera completamente análoga, teniendo en cuenta que la principal diferencia con respecto al caso inicial es que la curva invariante cerrada es inestable y desaparece cuando α pasa de tomar valores negativos a positivos. Se observa así, como el coeficiente $d(0)$ es el que determina la dirección de la aparición de la curva invariante en el sistema.

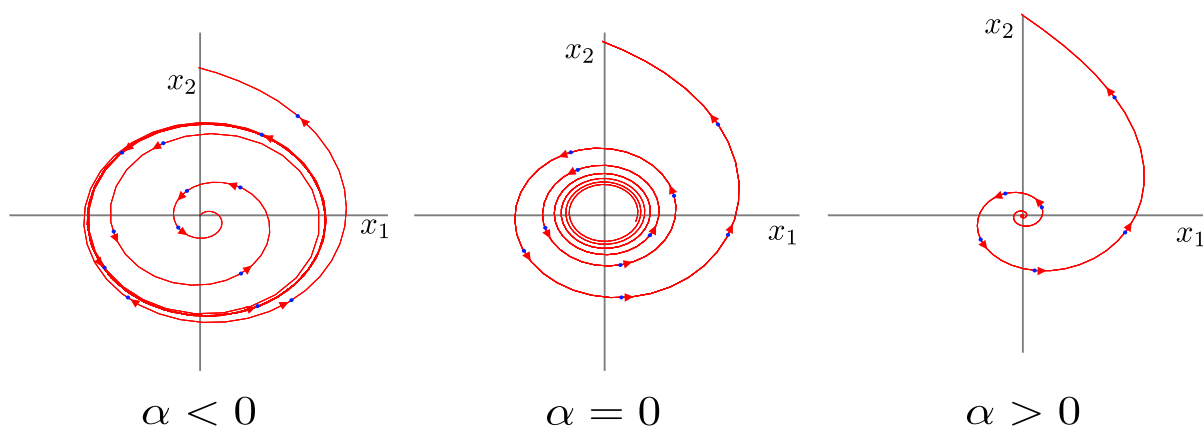


Figura 2.14: Diagrama de telaraña del sistema (2.39) para distintos valores del parámetro α , en el caso en que $d(0) > 0$.

Esto da lugar a la aparición nuevamente de dos tipos de bifurcación:

- **Supercrítica:** el ciclo invariante es estable para valores de $\alpha > 0$.
- **Subcrítica:** el ciclo invariante es inestable para valores de $\alpha < 0$.

En adelante y de manera análoga a como venimos haciendo con el estudio de las diferentes bifurcaciones, es de esperar que ahora consideremos que el sistema (2.39) contiene términos de orden superior y que estos términos no afecten al comportamiento del sistema.

Sin embargo esto no ocurre así, es decir, no podemos afirmar que el sistema sea localmente topológicamente equivalente al sistema original. Si se expresa el sistema con términos de orden superior en forma polar, el mapeo para ρ dependerá de φ , y por tanto su contribución no se puede considerar despreciable. No obstante, los retratos de fases de ambos sistemas si que comparten ciertas características, que se pueden utilizar para abordar el problema desde otra perspectiva.

Para ello haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.8. *Sea el sistema dinámico correspondiente a la bifurcación de Neimark-Sacker añadiendo términos de orden superior*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1+\alpha) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2+x_2^2) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4).$$

Se cumple que los términos $O(\|x\|^4)$ no afectan la bifurcación de la curva invariante cerrada, es decir, una curva invariante localmente única bifurca desde el origen en la misma dirección y con la misma estabilidad que en el sistema (2.39).

Prueba:

Este resultado se puede encontrar en el Apéndice B del Capítulo 4 de [Kuz04]. \square

Así, de manera análoga a como procedimos en el caso de la bifurcación de Hopf, nos apoyaremos en este último resultado para probar que cualquier sistema genérico bidimensional que presente una bifurcación de Neimark-Sacker, tiene por forma topológica normal a un sistema como (2.39).

Sea el sistema dinámico uniparamétrico en el plano

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

donde f es una función regular, que tiene para $\alpha = 0$ un punto fijo $x = 0$ con valores propios de la forma $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, donde $0 < \theta_0 < \pi$.

Por el Teorema de la Función Implícita, el sistema tiene un punto fijo único $x_0(\alpha)$ en algún entorno del origen para todos $|\alpha|$ suficientemente pequeño, ya que 1 no es un valor propio de la matriz Jacobiana. Sin embargo, es posible realizar un cambio de coordenadas de tal manera que podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ es el punto fijo del sistema para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Así, el sistema puede escribirse como

$$x \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha),$$

donde F es una función regular cuyas componentes pueden expandirse en serie de Taylor en x , comenzando estas al menos en términos cuadráticos, y donde $F(0, \alpha) = 0$ para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

La matriz Jacobiana $A(\alpha)$ tiene dos valores propios de la forma

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)},$$

donde $r(0) = 1$ y $\varphi(0) = \theta_0$. Así, $r(\alpha) = 1 + \beta(\alpha)$ para alguna función regular $\beta(\alpha)$, con $\beta(0) = 0$. Suponiendo que $\beta'(0) \neq 0$, podemos usar β como un nuevo parámetro y expresar los valores propios en términos de β , es decir, $\mu_1(\beta) = \mu(\beta)$, $\mu_2(\beta) = \bar{\mu}(\beta)$, donde

$$\mu_1(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)},$$

para $\theta(\beta)$ una función regular tal que $\theta(0) = \theta_0$.

A continuación se enunciarán una serie de resultados técnicos que se usarán más adelante, comenzando por un lema cuya demostración no realizaremos ya que es análoga a la ya vista en el *Lema 2.3*.

Lema 2.9. *Sea el sistema previo, $x \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha)$. Introduciendo una variable compleja z en dicho sistema, se puede reescribir para valores suficientemente pequeños de $|\alpha|$ como*

$$z \mapsto \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta), \quad (2.41)$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, y g es una función regular cuya expansión de Taylor con respecto a (z, \bar{z}) contiene términos cuadráticos y de orden superior:

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \cdot z^{-l},$$

con $k, l = 0, 1, \dots$

Al igual que con la bifurcación de Hopf utilizaremos esto como punto de partida para probar el siguiente resultado que permitirá hacer un cambio de coordenadas a la ecuación (2.41).

Lema 2.10. Forma normal de Poincaré para la bifurcación de Neimark-Sacker

Sea la aplicación

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4),$$

donde $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$, y $\theta_0 = \theta(0)$ es tal que $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$.

Dado el cambio de coordenadas complejo dependiente de parámetros

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{6} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño, podemos transformar la aplicación inicial en un aplicación de la forma:

$$w \mapsto \mu w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)$$

donde $c_1 = c_1(\beta)$.

Prueba:

Eliminación de los términos de orden 2

Dado el cambio de coordenadas complejo dependiente de parámetros

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 - h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

podemos transformar la aplicación

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

en la aplicación

$$w \mapsto \mu w + O(|w^3|).$$

El cambio de variable anterior es invertible, y la expresión del cambio inverso viene dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} \bar{z} z - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

Por lo tanto, en las nuevas coordenadas \bar{w} , la aplicación de partida toma la forma

$$\bar{w} = \mu w + \frac{1}{2} (g_{20} + (\mu - \mu^2)h_{20}) w^2 + (g_{11} + (\mu - |\mu|^2)h_{11}) w\bar{w} + \frac{1}{2} (g_{02} + (\mu - \bar{\mu}^2)h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3).$$

Así, tomando

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{(\mu^2 - \mu)}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{(|\mu|^2 - \mu)}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{(\bar{\mu}^2 - \mu)},$$

eliminamos todos los términos cuadráticos. Hemos de notar que estos coeficientes están bien definidos ya que los denominadores son no nulos para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño incluyendo $\beta = 0$, debido a que el hecho de suponer que $e^{i\theta_0} \neq 1$ y $e^{3i\theta_0} \neq 1$ implica que

$$\begin{aligned} \mu^2(0) - \mu(0) &= e^{i\theta_0}(e^{i\theta_0} - 1) \neq 0 \\ |\mu(0)|^2 - \mu(0) &= 1 - e^{i\theta_0} \neq 0 \\ \bar{\mu}^2(0) - \mu(0) &= e^{i\theta_0}(e^{-3i\theta_0} - 1) \neq 0 \end{aligned}$$

Eliminación de los términos de orden 3

Dado el cambio de coordenadas complejo dependiente de parámetros

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño, podemos transformar la aplicación

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4),$$

en la aplicación

$$w \mapsto \mu w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4).$$

Este cambio de variable también es invertible, y la expresión del cambio inverso viene dada por

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} + (\mu - \mu^3)h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} + (\mu - \mu|\mu|^2)h_{21}) w^2 \bar{w} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{12} + (\mu - \bar{\mu}|\mu|^2)h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\mu - \bar{\mu}^3)h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4). \end{aligned}$$

Así, tomando

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{(\mu^3 - \mu)}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{(\bar{\mu}|\mu|^2 - \mu)}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{(\bar{\mu}^3 - \mu)},$$

eliminamos todos los términos cúbicos excepto $\omega^2\bar{\omega}$, que debe tratarse por separado.

Para ello podemos definir

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\mu(1 - |\mu|^2)},$$

para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño, ya que el denominador solo se anulará en $\beta = 0$. Para obtener una transformación que dependa suavemente de β , habría que imponer que $h_{21} = 0$, lo que da lugar a que $c_1 = \frac{g_{21}}{2}$.

El resto de los coeficientes están bien definidos ya que los denominadores son no nulos para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño, debido a que el hecho de suponer que suponiendo que $e^{2i\theta_0} \neq 1$ y $e^{4i\theta_0} \neq 1$ implica que

$$\begin{aligned}\mu^3(0) - \mu(0) &= e^{-i\theta_0}(e^{4i\theta_0} - 1) \neq 0, \\ \bar{\mu}|\mu(0)|^2 - \mu(0) &= e^{-i\theta_0}(1 - e^{2i\theta_0}) \neq 0, \\ \bar{\mu}^3(0) - \mu(0) &= e^{-3i\theta_0}(1 - e^{4i\theta_0}) \neq 0. \quad \square\end{aligned}$$

Observación 2.2. *A raíz de la prueba del resultado anterior, se puede determinar de manera explícita el valor del coeficiente c_1 , llegando a la expresión*

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{2(\mu^2 - \mu)(\bar{\mu} - 1)} + \frac{|g_{11}|^2}{(1 - \bar{\mu})} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\mu^2 - \bar{\mu})} + \frac{g_{21}}{2}.$$

Teorema 2.8. *Forma normal topológica de la bifurcación de Neimark-Sacker*

Sea entonces un sistema dinámico bidimensional uniparamétrico

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con f una función regular, que tiene para $\alpha = 0$ un punto equilibrio $x_0 = 0$ con valores propios asociados

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)},$$

donde $r(0) = 1$ y $\varphi(0) = \theta_0$. Supongamos además que se cumplen las siguientes condiciones:

- (NS.1) $r'(0) \neq 0$
- (NS.2) $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$

Entonces, existe un entorno de x_0 en el cual una única curva cerrada e invariante se bifurca de x_0 en $\alpha = 0$.

Prueba:

La demostración se realizará utilizando los resultados obtenidos en esta sección.

En primer lugar, se transforma para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño, el sistema dinámico en uno equivalente de la forma

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha),$$

que tiene un punto equilibrio $x = 0$ con valores propios asociados

$$\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)},$$

donde $r(0) = 1$ y $\varphi(0) = \theta_0$.

Mediante el *Lema 2.9* y el *Lema 2.10* se transforma el sistema anterior en uno de la forma

$$w \mapsto \mu w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

donde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Pero dado que $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, esta aplicación puede escribirse como

$$w \mapsto e^{i\theta(\beta)}(1 + \beta + d_1(\beta)|w|^2)w + O(|w|^4),$$

donde $d_1(\beta) = d(\beta) + ib(\beta)$ para $d(\beta), b(\beta)$ funciones reales.

Si deshacemos el cambio para volver a las coordenadas (y_1, y_2) ($w = y_1 + iy_2$), recuperamos el sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &\mapsto (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos(\theta(\beta)) & -\sin(\theta(\beta)) \\ \sin(\theta(\beta)) & \cos(\theta(\beta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \\ &+ (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos(\theta(\beta)) & -\sin(\theta(\beta)) \\ \sin(\theta(\beta)) & \cos(\theta(\beta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & d(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \end{aligned}$$

Finalmente, $d(\beta) = \operatorname{Re}\{d_1(\beta)\} = \operatorname{Re}\{e^{-i\theta(\beta)}c_1(\beta)\}$, donde claramente se verifica que $d(0) = \operatorname{Re}\{e^{-i\theta_0}c_1(0)\}$.

Finalmente por el *Lema 2.8*, se tiene que los términos $O(\|x\|^4)$ no afectan a la bifurcación de la curva invariante cerrada, y por ello concluimos que existe un entorno de x_0 en el cual una única curva cerrada e invariante se bifurca de x_0 para $\alpha = 0$. \square

2.5. Bifurcaciones en sistemas de dimensión n

Hasta ahora hemos estudiado bifurcaciones de puntos de equilibrio y puntos fijos en sistemas dinámicos genéricos de dimensiones pequeñas. Esta sección pretende poner de manifiesto que estas bifurcaciones ocurren de manera muy similar en sistemas de dimensiones superiores.

Así, tratando el caso continuo y el discreto por separado, vamos a formular una serie de resultados principales cuya finalidad es la de reducir la dimensión de un sistema dado, cerca de una bifurcación local.

Esto lo haremos viendo que existen ciertas variedades que son invariantes y que dependen de parámetros, en cuyo interior el sistema presenta sus bifurcaciones correspondientes, mientras que el comportamiento fuera de ellas es en cierto modo “trivial”.

2.5.1. La variedad central en sistemas continuos

Partiremos en primer lugar del **caso crítico**, en donde supondremos que el sistema se halla en un valor de bifurcación, y equivalentemente esto implica la existencia de un punto de equilibrio no hiperbólico.

Antes de enunciar el resultado principal, es conveniente dar unas definiciones que son muy utilizadas a lo largo de toda la literatura.

Definición 2.15. A los valores propios que verifican que $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$, se les denota por **valores propios críticos**.

Definición 2.16. Al subespacio vectorial T^c , constituido por los vectores propios correspondientes a los valores propios con $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$, se le denota por **subespacio crítico**.

A continuación enunciamos uno de los resultados centrales de esta sección.

Teorema 2.9. Teorema de la Variedad Central para sistemas continuos

Sea el sistema dinámico continuo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es una función suficientemente regular que cumple que $f(0) = 0$.

Sea $A \equiv J_x(0)$ la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio $x_0 = 0$, con valores propios asociados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Supongamos que el punto de equilibrio no es hiperbólico y que por lo tanto, existen valores propios con parte real nula. Denotaremos además por n_+ al número de valores propios con $\operatorname{Re}\{\lambda\} > 0$, por n_- al número de valores propios con $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$ y por n_0 al número de valores propios con $\operatorname{Re}\{\lambda\} = 0$.

Entonces, si φ^t es flujo asociado al sistema se cumple que:

1. Existe una variedad regular e invariante de dimensión n_0 definida a nivel local, $W_{loc}^c(0)$, que es tangente a T^c en $x_0 = 0$
2. Existe un entorno U de $x_0 = 0$, tal que si $\varphi^t(x) \in U$ para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$), entonces $\varphi^t(x) \rightarrow W_{loc}^c(0)$ para $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Prueba:

La prueba de este resultado se puede encontrar en [Car82]. \square

Conviene hacer unas aclaraciones sobre las implicaciones más directas del teorema anterior.

- La variedad $W_{loc}^c(0)$ se la denota por **variedad central local**.
- La segunda afirmación del teorema implica que las órbitas que permanecen cerca del punto de equilibrio para $t \geq 0$ o $t \rightarrow 0$ tienden a $W_{loc}^c(0)$ en la dirección temporal correspondiente. Por ello, si suponemos por ejemplo que estamos en una situación donde todas las órbitas que comienzan en U permanecen en esta región para siempre (una condición necesaria para esto es $n^+ = 0$), entonces el teorema implica que estas órbitas se acercan a $W_{loc}^c(0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$, en cuyo caso se dice que la variedad es **atractora**.

- La variedad central no tiene porque ser única, pudiendo haber casos en los que existe una familia de variedades dependientes de una o varias de las variables del sistema.
- Si f es una función de clase C^k , entonces la variedad central $W_{\text{loc}}^c(0)$ es una variedad de clase C^k en algún entorno V de x_0 . Sin embargo, para algunos sistemas donde f es de clase C^∞ , podría no existir una variedad de clase C^∞ , debido a que el entorno V puede “contraerse”.

Una vez visto esto, podemos dar una caracterización más general de la dinámica de un sistema cerca de un punto de equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$. Para ello escribimos el sistema de partida en una base de vectores propios generalizados de la matriz Jacobiana A , donde separando aquellos que son críticos de los que no, podemos expresarlo como:

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, v) \\ \dot{v} = Cv + h(u, v) \end{cases} \quad (2.42)$$

donde $u \in \mathbb{R}^{n_0}$, $v \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, $B \in M_{n_0 \times n_0}$ con todos sus valores propios complejos puros, mientras que $C \in M_{(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)}$ sin ningún valor propio complejo puro.

Además dado que estamos trabajando con un punto de equilibrio no hiperbólico $(0, 0)$, se ha de verificar que

$$\begin{cases} g(0, 0) = 0 & D_g(0, 0) = 0 \\ h(0, 0) = 0 & D_h(0, 0) = 0 \end{cases}$$

y por tanto, las funciones g y h admiten desarrollos en serie de Taylor que comienzan al menos con términos cuadráticos.

Entonces, una variedad central $W_{\text{loc}}^c(0)$ del sistema (2.42) se puede representar a nivel local como

$$W_{\text{loc}}^c(0) = \{(u, v) \mid v = S(u)\},$$

donde $V : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$ es una función suficientemente regular con $S(0, 0) = 0$, y debido a que $W_{\text{loc}}^c(0)$ es tangente al subespacio T^c , se cumple que $D_S(0, 0) = 0$.

A raíz de esto es claro que, para obtener una expresión para la variedad central resulte necesario conocer una expresión de $S(x)$. Utilizando el hecho de que la variedad central es invariante, vamos a obtener la ecuación que esta función debe verificar.

Las coordenadas (u, v) de cualquier punto de $W_{\text{loc}}^c(0)$ deben verificar $u = S(v)$, luego derivando esta expresión se obtiene:

$$\dot{v} = D_S(u)\dot{u}.$$

Por otra parte, cualquier punto de $W_{\text{loc}}^c(0)$ verifica el sistema (2.42), por lo que si lo sustituimos en la expresión anterior, obtendremos:

$$D_S(u)[Au + g(u, S(u))] = BS(u) + h(u, S(u)).$$

Por tanto, $S(u)$ debe satisfacer:

$$N(S(u)) \equiv D_H(u)[Au + g(u, S(u))] - BS(u) - h(u, S(u)) = 0.$$

Aunque la resolución de esta ecuación no es algo trivial en general, existen métodos para obtener soluciones aproximadas con un grado prefijado de exactitud.

En definitiva, esta formulación del problema nos lleva directamente al siguiente resultado.

Teorema 2.10. Principio de reducción para sistemas continuos

El sistema (2.42) es topológicamente localmente equivalente cerca del origen al sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, S(u)) \\ \dot{v} = Cv \end{cases} \quad (2.43)$$

con $v = S(u)$.

Además, si la variedad central resultante no fuera única, entonces todos los sistemas de la forma anterior con diferentes S son localmente topológicamente equivalentes.

Prueba:

La prueba de este resultado se puede encontrar en [KP90]. \square

Hemos de notar, que la principal utilidad de este resultado es que la primera ecuación del sistema es la restricción de (2.42) a su variedad central. Por ello una vez determinada esta, el estudio de las propiedades del sistema se convierte en un tarea mucho más sencilla.

Observación 2.3. *Observemos que las ecuaciones del sistema anterior para u y v están desacopladas. Por lo tanto, la dinámica del sistema está esencialmente determinada por la restricción, ya que la segunda ecuación es lineal y tiene soluciones que decrecen o crecen exponencialmente.*

Por ejemplo, si $u = 0$ es el equilibrio asintóticamente estable de la restricción y todos los autovalores de C tienen parte real negativa, entonces $(u, v) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (2.42).

Además, dada la linealidad en la segunda ecuación de (2.43), se puede simplificar el problema separando la matriz C en dos matrices C_- y C_+ , que contengan los valores propios con parte real negativa y positiva, respectivamente. Esto hace que $\dot{v} = Cv$ se pueda reemplazar por

$$\begin{cases} \dot{v}_- = C_- v \\ \dot{w} = C_+ w \end{cases}$$

que a su vez se puede reemplazar por el **sistema canónico de un punto de silla**:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v \\ \dot{w} = w \end{cases}$$

con $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^+}$, por ser localmente topológicamente equivalentes.

Por lo tanto, el Principio de Reducción para sistemas continuos puede reinterpretarse del siguiente modo:

Cerca de un equilibrio no hiperbólico, el sistema es localmente topológicamente equivalente a su restricción a la variedad central combinada con un punto de silla estándar.

2.5.2. La variedad central en sistemas discretos

Al igual que en el caso continuo, partiremos del **caso crítico**, en donde supondremos que el sistema se halla en un valor de bifurcación, y equivalentemente esto implica la existencia de un punto fijo no hiperbólico.

Teorema 2.11. Teorema de la Variedad Central para sistemas discretos

Sea un sistema dinámico discreto

$$x \mapsto f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.44)$$

donde f es suficientemente regular, $f(0) = 0$.

Sea $A \equiv J_x(0)$ la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio $x_0 = 0$, con valores propios asociados $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Supongamos que el punto de equilibrio no es hiperbólico y que por lo tanto, existen valores propios en la circunferencia unidad ($|\mu_i| = 1$ para algún i). Denotaremos además por n_+ al número de valores propios fuera de la circunferencia unidad, por n_- al número de valores propios dentro del circunferencia unidad y por n_0 al número de valores propios en la circunferencia unidad.

Sea T^c el subespacio vectorial constituido por los vectores propios correspondientes a los valores propios en la circunferencia unidad.

Entonces, dado $\varphi^k = f^k$ para $k \in \mathbb{Z}$ el flujo asociado al sistema se cumple que:

1. Existe una variedad regular e invariante de dimensión n_0 definida a nivel local, $W_{loc}^c(0)$ que es tangente a T^c en $x_0 = 0$
2. Existe un entorno U de $x_0 = 0$, tal que si $\varphi^k(x) \in U$ para todo $k \geq 0$ ($k \leq 0$) con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\varphi^k(x) \rightarrow W_{loc}^c(0)$ para $k \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow -\infty$).

De manera análoga al caso continuo, usando una base de vectores propios generalizados de la matriz jacobiana de A , podemos reescribir el sistema como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu + g(u, v) \\ Cv + h(u, v) \end{pmatrix},$$

donde ahora B es una matriz que tiene valores propios en la circunferencia unidad, mientras que los valores propios de C están dentro o fuera de ella, de manera no excluyente.

En consecuencia la variedad central se puede escribir como $W_{loc}^c(0) = \{(u, v) : v = V(u)\}$, y el Principio de Reducción sigue siendo válido.

Teorema 2.12. Principio de reducción para sistemas discretos

El sistema (2.44) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu + g(u, V(u)) \\ Cv \end{pmatrix}.$$

Además, la variedad central resultante no fuera única, entonces todos los sistemas de la forma anterior con diferentes V son localmente conjugadas.

2.5.3. La variedad central en sistemas paramétricos

Sea un sistema dinámico uniparámetro

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.45)$$

Supongamos que para $\alpha = 0$ el sistema tiene un punto de equilibrio no hiperbólico $x_0 = 0$, con n_0 valores propios en el eje imaginario, n_- valores propios con parte real negativa y n_+ valores propios con parte real positiva.

Tratando a α como una variable dependiente, se tiene el sistema extendido:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \\ \dot{x} = f(x, \alpha) \end{cases} \quad (2.46)$$

donde la matriz jacobiana evaluada en el punto $(\alpha, x) = (0, 0)$, tiene dimensión $(n+1) \times (n+1)$ y es de la forma

$$A = J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_\alpha(0, 0) & f_x(0, 0) \end{pmatrix},$$

y además tiene $(n_0 + 1)$ valores propios en el eje imaginario y $(n - n_0)$ valores propios con parte real no nula.

Reescribiendo nuevamente el sistema en función de unos vectores propios generalizados de la matriz Jacobiana A y separando aquellos que son críticos de los que no, llegamos a que

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \\ \dot{u} = Bu + g(u, v, \alpha) \\ \dot{v} = Cv + h(u, v, \alpha) \end{cases} \quad (2.47)$$

Aplicando la teoría de la variedad central ilustrada anteriormente y asumiendo que la función $S \equiv S(u, \alpha)$, podemos obtener una variedad de dimensión $(n_0 + 1)$ de la forma

$$W_\alpha^c \equiv W_{\text{loc}}^c(0) = \{(u, v, \alpha) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_+ + n_-} \times \mathbb{R} \mid v = S(u, \alpha)\}, \quad (2.48)$$

donde se verifica que $S(0, 0) = 0$ y $D_S(0, 0) = 0$.

Hemos de notar que la definición estricta de variedad central, vista en el *Teorema 2.9*, exige que esta esté definida únicamente para $\alpha = 0$; en cuyo caso, W_0^c será la variedad central dada por (2.48). Esto es algo que puede resultar contradictorio, ya que el estudio de bifurcaciones requiere de trabajar en un entorno del valor de bifurcación. Sin embargo, el hecho de tratar a α como una variable dependiente a través de la ecuación $\dot{\alpha} = 0$, permite establecer la existencia de un conjunto de variedades, W_α^c , para valores de $|\alpha|$ suficientemente pequeños. En consecuencia, solo para dichos valores se tiene que el sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + f(u, S(u, \alpha), \alpha) \\ \dot{v} = Cv \end{cases}$$

es la restricción de (2.47) a W_α^c . Todo ello, conlleva que la dinámica “esencial” del sistema cerca del valor de bifurcación ocurra en W_α^c y se observe a través de la primera ecuación del sistema anterior, lo que da pie al siguiente resultado.

Teorema 2.13. *Shoshitaishvilly [1975]*³

El sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = Bu + g(u, v, \alpha) \\ \dot{v} = Cv + h(u, v, \alpha) \end{cases} \quad (2.49)$$

es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen al sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + f(u, S(u, \alpha), \alpha) \\ \dot{v}_- = C_- v \\ \dot{w} = C_+ w \end{cases}$$

para todo α con $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

Una vez visto esto, estudiemos como realizar el análisis de un sistema reducido a su variedad central a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. Sea la EDO de segundo orden dependiente de un parámetro α

$$\ddot{x} + \dot{x} - \alpha x + x^2 = 0.$$

Si introducimos la variable $y = \dot{x}$, podemos obtener un sistema de dos EDOs de orden uno el sistema equivalente de EDOs

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y + \alpha x - x^2 \end{cases} \quad (2.50)$$

La matriz jacobiana del sistema evaluada en el origen es

$$A \equiv J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

³Para más ver una discusión en mayor profundidad consultar [Arn88].

y sus valores propios vienen dados por la expresión

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2},$$

con lo cual, solo existirá un valor propio con parte real nula si y solo si $\alpha = 0$. Por lo tanto, se espera que $\alpha = 0$ sea un valor de bifurcación en el origen del sistema.

Para poder estudiar el sistema en su variedad central para $\alpha = 0$, hemos de dar primero su forma normal. Así, buscamos escribir la matriz jacobiana en su forma de Jordan a través del cálculo de las matrices de cambio formadas por los vectores propios.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 &\longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 = -1, &\longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, introduciendo un nuevo sistema de coordenadas, (u, v) se tiene que el cambio viene dado en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o equivalentemente como $u = x + y$, $v = -y$.

Por lo tanto, el sistema viene expresado en las nuevas coordenadas como

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} + \dot{y} = y - y + \alpha x - x^2 = \alpha(u + v) - (u + v)^2 \\ \dot{v} = -\dot{y} = y - \alpha x + x^2 = -v - \alpha(u + v) + (u + v)^2 \end{cases}$$

Ahora, consideramos el sistema extendido donde α se trata como si fuera una variable dependiente:

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha(u + v) - (u + v)^2 \\ \dot{v} = -v - \alpha(u + v) + (u + v)^2 \\ \dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$

Dado que estamos en las condiciones del *Teorema de la Variedad Central*, se tiene que existe una variedad $W_{\text{loc}}^c(0)$ que es tangente en $(x_0, y_0, \alpha_0) = (0, 0, 0)$ al subespacio T^c , donde

$$T^c = \{\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(x, \alpha) \mid x, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Lo que buscamos es dar una parametrización de la variedad central tal que podamos expresarla como $W_{\text{loc}}^c(0) = \{(u, v, \alpha) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_+ + n_-} \times \mathbb{R} \mid v = S(u, \alpha)\}$. Así:

$$v = S(u, \alpha) = au^2 + bu\alpha + c\alpha^2 + \dots,$$

que sustituyendo en la ecuación \dot{v} se llega a que

$$\dot{v} = -(au^2 + bu\alpha + c\alpha^2 + \dots) - \alpha(u + \dots) + u^2 + \dots = (1-a)u^2 - (b+1)u\alpha + \dots$$

Si ahora se deriva la parametrización $S(u, \alpha)$ se obtiene que

$$\dot{u} = \frac{\partial S}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = (2au + b\alpha)\dot{u} = \dots,$$

donde todos los términos son al menos de orden tres. Por lo tanto, despejando los coeficientes de los términos cuadráticos se llega a que $a = 1$, $b = -1$, y la parametrización de la variedad central vendría dada por

$$y = S(u, \alpha) = x^2 - x\mu + \dots$$

Una vez hemos calculado esto, buscamos estudiar el comportamiento del sistema en la variedad central a nivel local, el cual viene determinado principalmente por la ecuación \dot{u} :

$$\dot{u} = \alpha(u + u^2 - \alpha u + \dots) - (u^2 + 2u(u^2 - \alpha u) + \dots) = \alpha u - u^2 + O(u^3).$$

Se observa que a tenemos una expresión que a primer orden se corresponde con la forma estándar de una bifurcación transcítica

$$\dot{u} = \alpha u - u^2,$$

cuyo comportamiento es conocido.

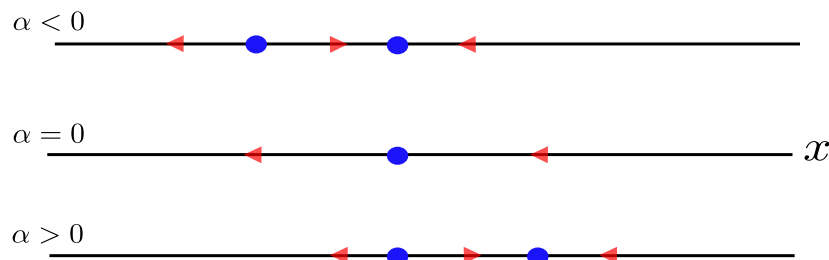


Figura 2.15: Retrato de fases del sistema (2.50) restringido a la variedad central para distintos valores del parámetro α .

Observamos que, en consonancia con lo comentado anteriormente, el comportamiento fundamental del sistema se puede estudiar de manera muy sencilla en su variedad central. Más aún, también se puede apreciar en la siguiente figura, como el comportamiento fuera de la variedad central se corresponde con el propio de un punto de silla, ya que estamos en las condiciones del *Principio de reducción para sistemas continuos*. \diamond

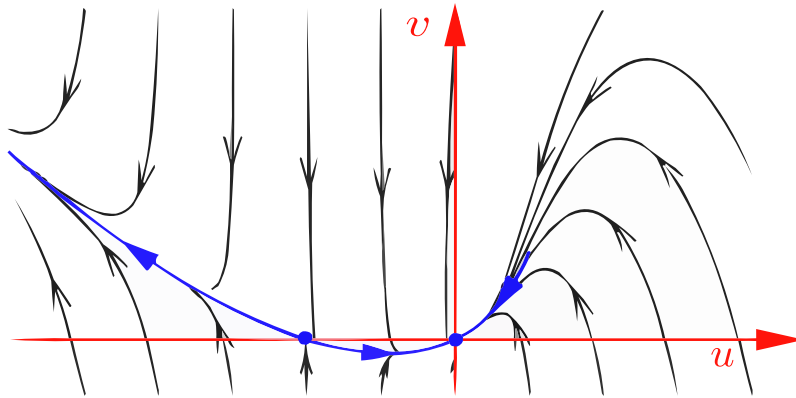


Figura 2.16: Retrato de fases del sistema (2.50) para $\alpha < 0$.

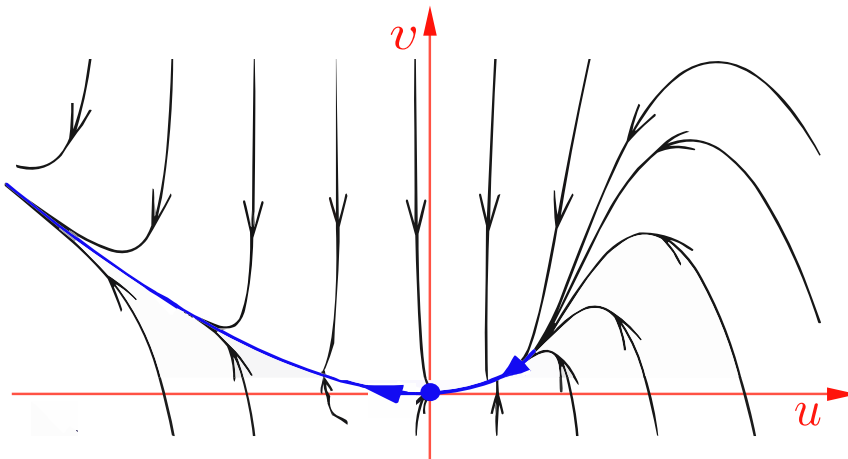


Figura 2.17: Retrato de fases del sistema (2.50) para $\alpha = 0$.

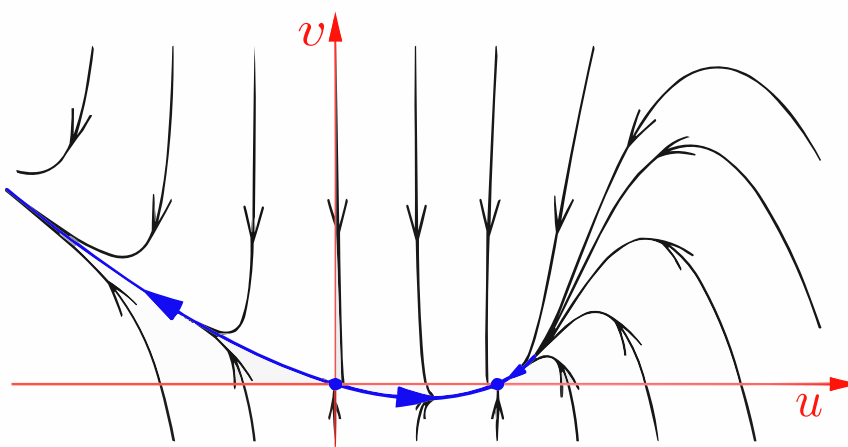


Figura 2.18: Retrato de fases del sistema (2.50) para $\alpha > 0$.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este último capítulo, nos adentraremos en la aplicación práctica de los diversos resultados alcanzados en el estudio de la teoría de bifurcaciones.

Comenzaremos analizando el sistema de Lü, que es una variante del conocido modelo de Lorenz. El planteamiento de este último, supuso la introducción a toda una nueva teoría acerca del caos, aplicable no solo en el campo de las matemáticas sino en otros como el de la biología, la física o la economía. Por otro lado, también realizaremos un análisis de la emblemática parábola logística de May, un modelo discreto que configura el comportamiento en sistemas evolutivos y socioeconómicos. Exploraremos cómo las bifurcaciones revelan patrones interesantes en la evolución de este sistema y cómo estos pueden dar información acerca de posibles fenómenos caóticos.

3.1. Sistemas de tipo Lorenz

En 1963, el meteorólogo del Instituto de Tecnología de Massachusetts (M.I.T.), Edward Norton Lorenz, descubrió que un sistema determinista aparentemente simple podría tener dinámicas extremadamente complicadas en un amplio rango de valores de diferentes parámetros [Lor00].

En efecto, el modelo atmosférico consistía en considerar una atmósfera bidimensional rectangular, como si fuera una capa de un fluido de grosor h , que se encuentra entre dos placas horizontales muy largas, rígidas, isotérmicas y que no están sometidas a ninguna tensión. La placa inferior se encuentra a una temperatura T_0 y la placa superior tiene una temperatura T_1 , con $T_0 > T_1$. Por ende, mientras la diferencia de temperatura $\Delta T = T_0 - T_1$ sea pequeña, la capa de fluido permanecerá estática y, por tanto estará en equilibrio estable. Cuando ΔT se incrementa hasta un valor crítico, esta capa de fluido estática sale de su posición de equilibrio y consecuentemente al ser la temperatura de la placa superior más pequeña que la temperatura de la placa inferior, aparece un flujo de convección tubular en la capa del fluido (**convección térmica**).

El comportamiento del sistema viene descrito por el siguiente sistema de ecuaciones: ¹

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\sigma, r, b > 0$.

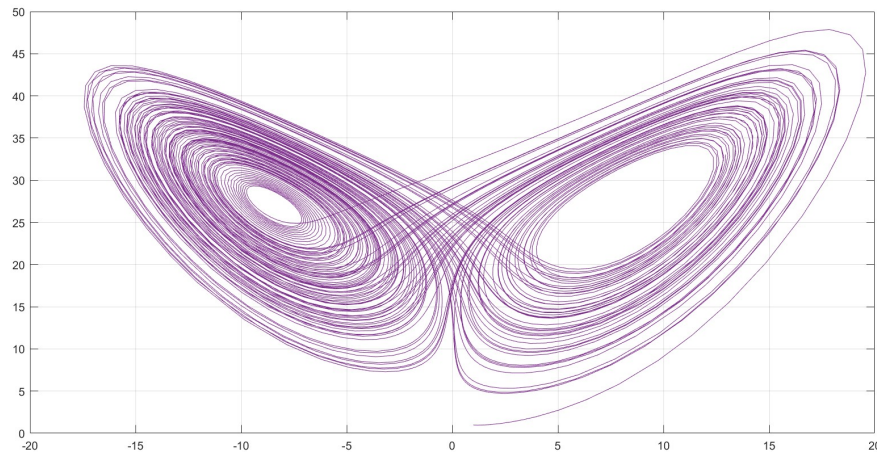


Figura 3.1: Órbitas del atractor de Lorenz para $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

El sistema, aunque de apariencia simple, resulta muy complicado de resolver analíticamente ya que contiene términos no lineales cruzados xz y xy en la segunda y tercera ecuación, respectivamente. En efecto, utilizando métodos de resolución numérica, se pueden estudiar las órbitas del sistema, observando que estas describen varios bucles a la izquierda y a la derecha en direcciones opuestas de rotación, y cuyo número varía con cambios infinitesimales de las condiciones iniciales.

De hecho, para los valores de los parámetros $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$ y las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$, la trayectoria de las órbitas del sistema en el plano XZ se asemeja a las alas de una mariposa tal y como se observa en la *Figura 3.1*.

Este conjunto se conoce como un **atractor extraño**, y su aparición dio pie a una nueva era en la teoría del caos.

En las últimas dos décadas, el caos ha pasado gradualmente de ser simplemente un fenómeno curioso a uno con significado práctico y aplicable, y ello ha dado lugar a la aparición de sistemas con nuevos atractores caóticos como el de Chen (1999) o el sistema de Lü (2002), que fueron denominados como **sistemas de tipo Lorenz**.

Resulta curioso como a pesar de que tanto el sistema de Chen [Hou+10] como el sistema de Lü [KHK10] no son topológicamente equivalentes al de Lorenz, todos ellos presentan la misma simetría, disipatividad, estabilidad de puntos de equilibrio, bifurcaciones y estructuras

¹La deducción del sistema de Lorenz se recoge en las páginas 229-235 de [Lay15].

topológicas.

El sistema en el cual nos centraremos en adelante es el sistema de Lü, el cual viene dado por el siguiente sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

donde a, b y c son parámetros.

3.1.1. Bifurcaciones en el sistema de Lü

Aunque hayamos introducido la idea de caos determinista y de atractor extraño, el objetivo de esta sección no es el estudio dichos conceptos. Lo que se pretende llevar a cabo, es un análisis de la bifurcación de Hopf a través de la manipulación de los tres parámetros del sistema de Lü, estableciendo uno de ellos como *parámetro de bifurcación* y los otros dos restantes como *parámetros de control*. Esto permitirá realizar una clasificación en el espacio de los parámetros de control, según el tipo de bifurcación de Hopf que pueda ocurrir: supercrítica, subcrítica y degenerada.

Para realizar este estudio recurriremos a los resultados sobre la variedad central, que fueron vistos en la subsección 2.5.3, y a los resultados sobre la bifurcación de Hopf que fueron vistos en la subsección 2.3.3. Así, estudiaremos la dinámica del sistema sobre su variedad central, donde esta viene descrita por las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{r} = (d\alpha + l_1r^2)r \\ \dot{\theta} = \omega + c\alpha + br^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Recordemos que el elemento l_1 se corresponde con el primer coeficiente de Lyapunov, cuya expresión explícita fue deducida en (2.18).

Este coeficiente tiene una relación muy estrecha con los diferentes tipos de bifurcaciones de Hopf, los cuales surgían de la aparición o desaparición de una órbita periódica conforme se varían los valores del parámetro de bifurcación. Así, podemos distinguir tres tipos de bifurcaciones de Hopf:

- **Supercrítica:** si $l_1 < 0$, entonces la órbita periódica es estable y aparece para valores del parámetro positivos.
- **Degenerada:** si $l_1 = 0$, entonces en el valor de bifurcación el punto singular es un centro y la bifurcación puede llevar a la aparición de uno o varios ciclos límite.
- **Subcrítica:** si $l_1 > 0$, entonces la órbita periódica es inestable y aparece para valores del parámetro negativos.

Una vez visto esto comenzaremos el análisis del sistema de Lü, tomando como parámetro de

bifurcación $a = \alpha$ y como parámetros de control b y c . Así, el sistema a considerar sería:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = cx_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Análisis de puntos de equilibrio no hiperbólicos

En primer lugar, buscaremos calcular los puntos de equilibrio del sistema y determinaremos aquellos que sean no hiperbólicos, ya que serán los que puedan dar lugar a la aparición de la bifurcación de Hopf.

Resolviendo el sistema $f(x_1, x_2, x_3, \alpha) = 0$ se obtienen tres puntos de equilibrio

$$P_1 = (0, 0, 0), \quad P_2 = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c), \quad P_3 = (-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c).$$

Recordemos que para que se cumpla el *Teorema 2.3*, y el sistema sea localmente topológicamente equivalente al de la forma normal de la bifurcación de Hopf, deben existir para α_0 un par de valores propios complejos puros.

Así, estudiando la matriz jacobiana del sistema, podremos determinar los valores propios para cada punto de equilibrio.

Por un lado, para P_1 se tiene que la matriz viene dada por:

$$A(P_1) \equiv J_f(P_1) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que al tratarse de una matriz triangular superior los valores propios son los elementos de la diagonal, y al ser todos reales no nulos concluimos que P_1 es un punto de equilibrio hiperbólico, quedando descartado en el estudio.

Por otro lado para P_2 se tiene que la matriz viene dada por:

$$A(P_2) \equiv J_f(P_2) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}.$$

y sus valores propios se determinarán a través de su polinomio característico

$$\lambda^3 + (\alpha + b - c)\lambda^2 + (\alpha b)\lambda + (2\alpha cb) = \lambda^3 + a_1(\alpha)\lambda^2 + a_2(\alpha)\lambda + a_3(\alpha) = 0. \quad (3.5)$$

Veamos que condiciones se deben cumplir entre los coeficientes del polinomio para que una solución sea $\lambda = i\omega_0$. Sustituyendo y simplificando, el polinomio característico quedaría como:

$$i\omega_0(a_2(\alpha) - \omega_0^2) + (a_3(\alpha) - a_1(\alpha)\omega_0^2) = 0.$$

Resolviendo la ecuación anterior se sigue que

$$a_2(\alpha) = \omega_0^2 = \frac{a_3(\alpha)}{a_2(\alpha)};$$

y en consecuencia, se tiene que el polinomio característico posee un par de raíces imaginarias si existe α tal que $a_3(\alpha) = a_1(\alpha)a_2(\alpha)$ y $a_2(\alpha) > 0$.

Estudiando la condición anterior para los coeficientes de (3.5) se tiene:

$$2bc\alpha = (\alpha - c + b)b\alpha;$$

y resolviendo para α se obtienen dos soluciones:

$$\alpha_0 = (3c - b), \quad \alpha_1 = 0,$$

de las cuales únicamente es válida α_0 , al ser la única que verifica que $a_2(\alpha_0) = b(3c - b) > 0$ siempre que $3c > b$. En estas condiciones, los valores propios vienen dados por

$$\lambda_0 = -2c, \quad \lambda_1 = i\sqrt{(3c - b)b}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{(3c - b)b}.$$

Por otro lado, para que ocurra la bifurcación de Hopf se debe cumplir la condición

$$\mu'(\alpha_0) = \left(\frac{d\mu(\alpha)}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0,$$

que se traduce en el hecho de que los valores propios complejos de la forma $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\beta(\alpha)$, crucen a través del eje imaginario cuando se varía el valor de α alrededor de α_0 .

Para obtener $\mu'(\alpha_0)$ ² utilizaremos la expresión:

$$\mu'(\alpha_0) = \frac{a_3'(\alpha_0) - \omega_0^2 a_1'(\alpha_0) + \lambda_0 a_2'(\alpha_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)},$$

que para nuestros coeficientes da

$$\mu'(\alpha_0) = \frac{b(b - 3c)}{2(4c^2 + 3bc - b^2)}.$$

Observamos que si $3c = b$, entonces $\mu'(\alpha_0) = 0$, pero como necesariamente habíamos visto que tenía que darse $3c > b$, se tendrá que $\mu'(\alpha_0) \neq 0$. En adelante a la región del espacio paramétrico que verifica que $3c > b$, la denotaremos por **región factible**.

Recalcando el hecho de que el estudio realizado es análogo para el punto P_3 , se puede concluir que en ambos puntos de equilibrio habrá una bifurcación de Hopf alrededor del valor de bifurcación $\alpha_0 = (3c - b) > 0$.

²La obtención de $\alpha'(\alpha)$ se puede seguir en las páginas 15-17 de [Bac07].

Cálculo de la variedad central

Continuando con el análisis para el punto de equilibrio P_2 , haremos uso de la variedad central para determinar la expresión del primer coeficiente de Lyapunov. Comenzaremos utilizando el carácter autónomo del sistema para hacer un cambio de coordenadas que lleve el punto de equilibrio al origen, y obtener el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (b - 3c)(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 = c(\sqrt{bc} + y_2) - (\sqrt{bc} + y_1)(c + y_3) \\ \dot{y}_3 = (\sqrt{bc} + y_1)(\sqrt{bc} + y_2) - b(c + y_3) \end{cases}$$

donde el punto de equilibrio a estudiar se encuentra en $(y_1^0, y_2^0, y_3^0) = (0, 0, 0)$.

Dado que solo hemos hecho una traslación, los valores propios de la matriz jacobiana que viene dada por

$$A(y_0) \equiv J_g(y_0) = \begin{pmatrix} b - 3c & -b + 3c & 0 \\ -c & c & \sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix},$$

continúan siendo los que teníamos en un principio.

A continuación, buscamos expresar el sistema en su forma canónica de Jordan para facilitar los cálculos, para lo cual es necesario determinar una matriz de cambio que esté formada por vectores propios. Dado que los valores propios son complejos, bastará con calcular únicamente uno de los vectores propios ya que podrá separarse en su parte real y su parte imaginaria. Sin pérdida de generalidad lo haremos para λ_1 y λ_0 , de tal modo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0 &\longrightarrow \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{bc}(3c - b) \\ \sqrt{bc}(c - b) \\ -2bc \end{pmatrix} \\ \lambda_1 = i\sqrt{\frac{(3c - b)b}{2}} &\longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{bc}(3c - b) \\ \sqrt{bc}(3c - b) \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0\sqrt{bc} \\ \omega_0(b - 2c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora podemos construir la matriz de cambio, que vendrá dada por:

$$P = (\text{Im}(\mathbf{v}_1), \text{Re}(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_0) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{bc}(3c - b) & \sqrt{bc}(3c - b) \\ \omega_0\sqrt{bc} & \sqrt{bc}(3c - b) & \sqrt{bc}(c - b) \\ \omega_0(b - 2c) & \omega_0^2 & -2bc \end{pmatrix}.$$

Calculando la matriz P^{-1} podemos obtener la forma canónica de Jordan de la matriz del sistema, e introduciendo un nuevo sistema de coordenadas (u, v, w) se tiene que el cambio viene dado en forma matricial viene dada por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(3c - b)} & 0 \\ \sqrt{b(3c - b)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de EDOs en las nuevas coordenadas viene expresado como:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{b(3c-b)} & 0 \\ \sqrt{b(3c-b)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(u, v, w) \\ f_{22}(u, v, w) \\ f_{33}(u, v, w) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

en donde

$$\begin{aligned} f_{11}(u, v, w) = & \frac{w+v}{b^2-3bc-4c^2} \left((b^4u + 2\sqrt{b(3c-b)}c^3(w+3v)) + \right. \\ & + b^2c \left(2\sqrt{b(3c-b)}w + 29cu - 8\sqrt{b(3c-b)}v \right) + b^3 \left(-10cu + \sqrt{b(3c-b)}v \right) + \\ & \left. + bc^2 \left(-12\sqrt{b(3c-b)}w - 24cu + 13\sqrt{b(3c-b)}v \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{22}(u, v, w) = & -\frac{(b-3c)(w+v)}{b^2-3bc-4c^2} \left(-4\sqrt{b(3c-b)}c^2u + b^3v + b^2 \left(3cw - \sqrt{b(3c-b)}u - 4cv \right) + \right. \\ & \left. + bc \left(-5cw + 3\sqrt{b(3c-b)}u + 3cv \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{33}(u, v, w) = & -\frac{(b-3c)(w+v)}{b^2-3bc-4c^2} \left(c^2u + b^3v + b^2 \left(3cw - \sqrt{b(3c-b)}u - 4cv \right) + \right. \\ & \left. + bc \left(-5cw + 3\sqrt{b(3c-b)}u + 3cv \right) \right). \end{aligned}$$

Juntando ahora el hecho de que la variedad central la podemos expresar como

$$W_{\text{loc}}^c(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_+ + n_-} \times \mathbb{R} \mid w = S(u, v)\},$$

y que dada la parametrización

$$w = S(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + \dots,$$

su derivada viene dada por

$$\dot{w} = \frac{\partial S}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial S}{\partial v} \dot{v} = (2au + bv)\dot{u} = \dots,$$

es posible sustituir y operar, para obtener que la parametrización de la variedad central viene dada por:

$$\begin{aligned} S(u, v) = & \left(\frac{b(b-3c)^2(b-2c)^2}{4c(b^3-7b^2c+11bc^2+4c^3)} \right) u^2 - \\ & - \left(\frac{(b(3c-b))^{3/2}(b-2c)^2}{2b(b^3-7b^2c+11bc^2+4c^3)} \right) uv + \\ & + \left(\frac{b(b-3c)^2(b^3-5b^2c+4bc^2-2c^3)}{4c(b^4-6b^3c+4b^2c^2+15bc^3+4c^4)} \right) v^2. \end{aligned}$$

Ahora el sistema que estudiaremos es la restricción del sistema (3.6) a la variedad central, es decir:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\sqrt{b(3c-b)}v + f_{11}(u, v, S(u, v)) \\ \dot{v} = \sqrt{b(3c-b)}u + f_{22}(u, v, S(u, v)) \end{cases}$$

Con esto podemos determinar la expresión del primer coeficiente de Lyapunov, la cual viene dada por

$$l_1 = -\frac{3b^2(b-3c)^3(c-2b)(2c-b)}{8(b-4c)(b+c)\left(b-\frac{3+\sqrt{13}}{2}c\right)\left(b-\frac{3-\sqrt{13}}{2}c\right)}.$$

Como comentamos inicialmente, será el signo del primer coeficiente de Lyapunov el que determinará el tipo de bifurcación de Hopf que ocurra. Para analizar esto, calcularemos en primer lugar los valores de b y c para los que $l_1 = 0$, obteniendo

$$c_1 = 2b, \quad c_2 = \frac{1}{2}b, \quad c_3 = \frac{1}{3}b.$$

Por otro lado, es interesante estudiar la dinámica del sistema más allá de estos valores de b y c . Así, percatándonos del hecho de que el denominador no se anula dentro de la región factible; y que el signo del mismo es positivo ya que $(b-4c) < 0$, $(b+c) > 0$, $(b-\frac{3+\sqrt{13}}{2}c) < 0$ y $(b-\frac{3-\sqrt{13}}{2}c) > 0$, bastaría con estudiar el signo del numerador para valores diferentes de c_1 , c_2 y c_3 .

Volviendo a mirar en detalle la expresión del numerador $-3b^2(b-3c)^3(c-2b)(2c-b)$, se puede observar que dentro de la región factible, el producto de los primeros términos es positivo; y por tanto, solo sería necesario estudiar el signo el tercer y cuarto factor. Con todo ello podemos hacer la siguiente distinción de casos:

1. Si $c < \frac{1}{3}b$ nos encontramos fuera de la región factible.
2. Si $\frac{1}{3}b < c < \frac{1}{2}b$, entonces $b-3c < 0$, $2c-b < 0$ y $c-2b < 0$, por lo que concluimos que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.
3. Si $\frac{1}{2}b < c < 2b$, entonces $c-2b < 0$, $2c-b > 0$ y $b-3c < 0$, por lo que concluimos que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es negativo.
4. Si $c > 2b$, entonces $c-2b > 0$, $2c-b > 0$ y $b-3c > 0$, por lo que concluimos que en esta región el primer coeficiente de Lyapunov es positivo.

En términos de la región factible, podemos resumir los diferentes casos en la *Figura* (3.2).

Por último, resulta interesante ver gráficamente el comportamiento de las órbitas del sistema para las tres bifurcaciones de Hopf estudiadas. Para ello se ha utilizado el paquete *Matcont* [Dho+03] de Matlab, que permite el estudio interactivo de bifurcaciones y sistemas dinámicos.

Pero antes de ver los diferentes resultados de las simulaciones, conviene recalcar que en base al análisis realizado al comienzo de la subsección 2.3.3, puede parecer que la bifurcación de Hopf supercrítica solo se puede dar cuando α pasa de ser negativo a positivo; y la bifurcación de Hopf subcrítica solo cuando α pasa de ser positivo a negativo. Sin embargo, el tipo de bifurcación está relacionada con la aparición de un ciclo límite estable (supercrítica) o inestable (subcrítica),

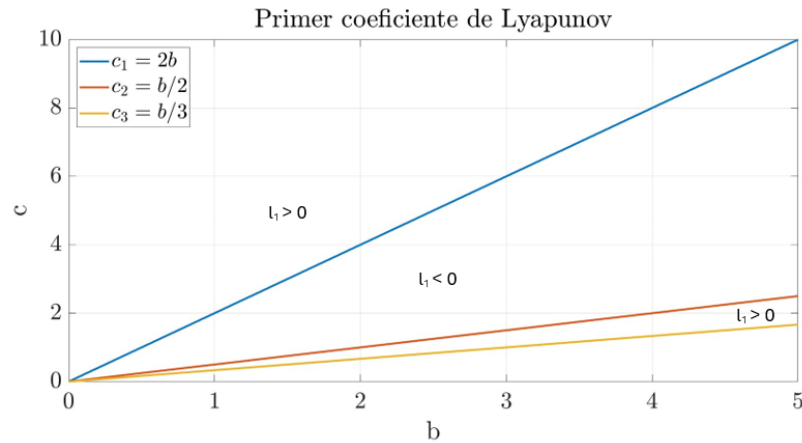


Figura 3.2: Signo del primer coeficiente de Lyapunov en el espacio de los parámetros de control.

hecho que depende del signo de $\mu'(\alpha_0)$, tal y como exigía la condición (H.2) del *Teorema 2.3*.

En el caso de la forma normal de la bifurcación de Hopf, se tenía que $\mu'(\alpha_0) > 0$. No obstante, debido a las características del sistema de Lü, se tendrá que $\mu'(\alpha_0) < 0$ y en consecuencia, la aparición del ciclo límite estable (bifurcación de Hopf supercrítica) se dará para valores $\alpha < \alpha_0$, mientras que la aparición del ciclo límite inestable (bifurcación de Hopf subcrítica) se dará para valores $\alpha > \alpha_0$.

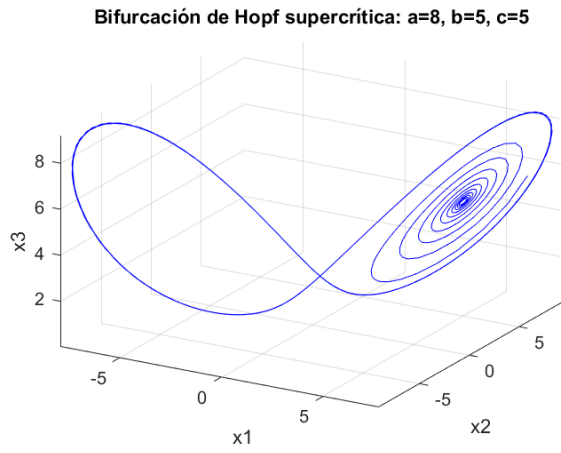
En base a esto obtenemos de manera clara el caso de la bifurcación de Hopf supercrítica, en donde como hemos comentado aparece un ciclo límite estable conforme se varía el parámetro de bifurcación.

Por otro lado, conviene notar que el estudio de la bifurcación subcrítica no es una tarea tan sencilla de realizar como puede parecer. El principal motivo reside en el hecho de poder observar el ciclo límite inestable en $\alpha > \alpha_0$, ya que habría que encontrar una condición inicial que estuviera justo en la órbita periódica del sistema. La manera más eficiente de atacar el problema es utilizar modificaciones del sistema donde el uso de una serie de parámetros de control adicionales permiten estabilizar las órbitas para obtener retratos de fase más claros, tal y como se puede consultar en [YL11] y [Cal17].

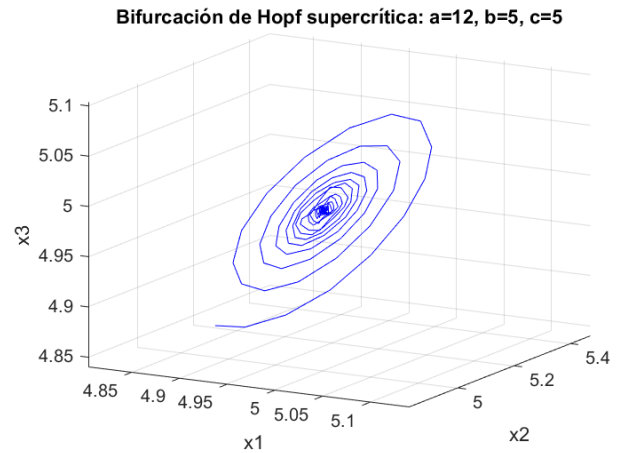
Dada la dificultad de abordar dicha tarea en este trabajo, lo que se ha realizado es una serie de simulaciones de tal manera que se pueda “intuir” la existencia del ciclo límite en base al carácter inestable de las órbitas a ambos lados del mismo.

Por último se puede obtener también un caso especial que no fue desarrollado con anterioridad, que es el de la bifurcación de Hopf degenerada. Este ocurre cuando el coeficiente de Lyapunov es nulo, lo cual da lugar a que no se tenga la equivalencia topológica que garantiza el *Teorema 2.3*. No obstante esto no implica que no pueda darse la aparición de un ciclo límite o incluso de varios; aunque lo sorprendente es el hecho de que para nuestro sistema y nuestros parámetros lo que se observa es la transición de un atractor a un oscilador caótico.

Bifurcación de Hopf supercrítica



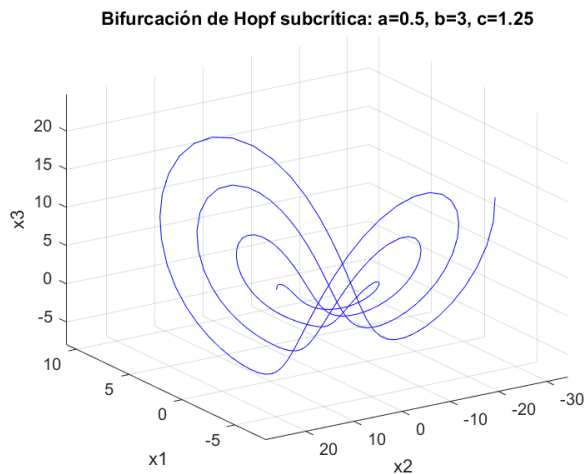
(a)



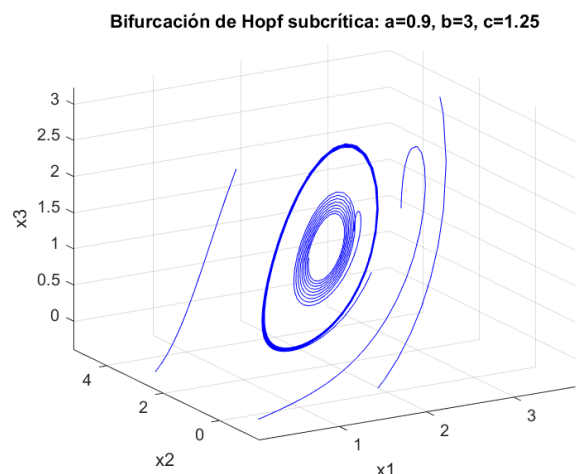
(b)

Figura 3.3: Órbitas del sistema de Lü para $\alpha < \alpha_0$ (a) y $\alpha > \alpha_0$ (b), para la bifurcación de Hopf supercrítica.

Bifurcación de Hopf subcrítica



(a)



(b)

Figura 3.4: Órbitas del sistema de Lü para $\alpha < \alpha_0$ (a) y $\alpha > \alpha_0$ (b), para la bifurcación de Hopf subcrítica.

Bifurcación de Hopf degenerada

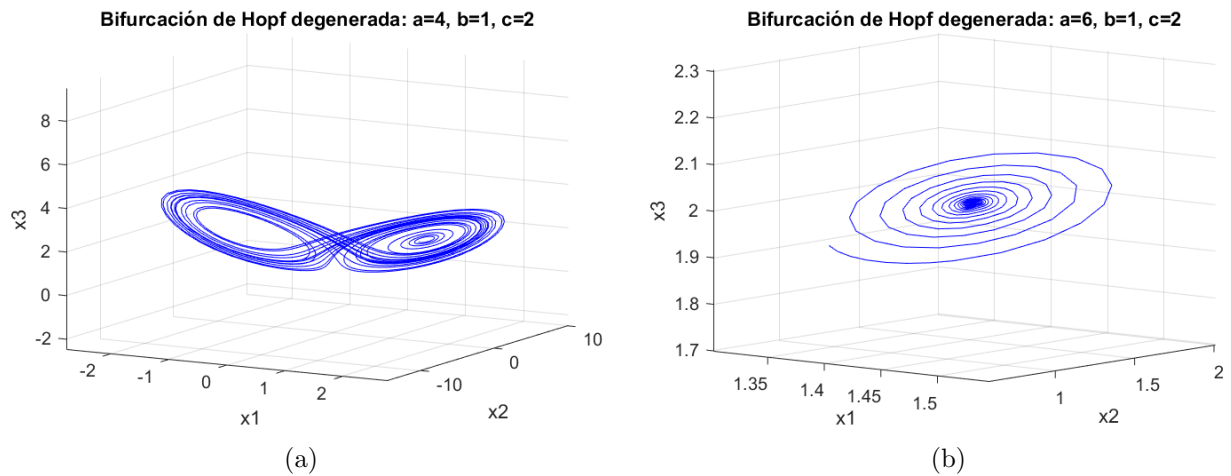


Figura 3.5: Órbitas del sistema de Lü para $\alpha < \alpha_0$ (a) y $\alpha > \alpha_0$ (b), para la bifurcación de Hopf degenerada.

3.1.2. Conclusiones

Finalmente, hemos visto en primera instancia como determinar las regiones factibles en el espacio de los parámetros de control, así como el signo del primer coeficiente de Lyapunov en cada una de ellas. Si además, se analizan los casos restantes para b y c como parámetros de bifurcación, tal y como se hace en [Bac07]; se llega al siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea el sistema de Lü*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + ax_2 \\ \dot{x}_2 = cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2 \end{cases}$$

Si se considera cualquiera de los parámetros a, b o c del sistema como parámetro de bifurcación, y el resto como parámetros de control, existen puntos en el espacio de los parámetros de control en los cuales el sistema experimenta la bifurcación de Hopf supercrítica, subcrítica y degenerada.

3.2. La parábola logística de May

En 1976, el biólogo Robert M. May analizó un modelo de crecimiento poblacional simple que podría derivar en dinámicas de comportamiento muy complicadas. Este consistía en un sistema discretizado dado por

$$x_{n+1} = f(x_n) = \alpha x_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha \in [0, 4],$$

donde la variable x_n representa la densidad de población de individuos en un ecosistema aislado existente en el tiempo n , y el parámetro α representa la tasa de reproducción y mortalidad.

Se observa así, que como la densidad de población x_{n+1} en el tiempo $n+1$ es proporcional a la densidad en la generación anterior x_n , siempre que $x_n < 1$ la población aumentará. En cambio, si $x_n \approx 1$ la población disminuirá. Por ello, el crecimiento de dicha población, que será de tipo exponencial; junto con los diferentes valores que puede tomar el parámetro α y el hecho de que el ecosistema solo admite una cantidad máxima de individuos determinan la complejidad de la evolución de la población [Rod].

El modelo de la parábola logística no solo sirve para describir la evolución de una población, sino que ha sido utilizado para otros fines como determinar el comportamiento de modelos bancarios con una tasa autolimitada de interés [SJ06] o como generador de números pseudoaleatorios [PR95].

Sin embargo, el principal interés que tiene la parábola logística de May es el hecho es que los comportamientos que presenta como por ejemplo la sensibilidad a las condiciones iniciales; o el fenómeno de la duplicación de periodo, se encuentran en muchos otros sistemas tanto discretos como continuos.

3.2.1. Bifurcaciones en la parábola logística de May

En esta subsección no se pretende llevar a cabo una interpretación de la dinámica poblacional que proporciona la parábola logística de May. Lo que se pretende llevar a cabo es un análisis de las bifurcaciones transcítica y de duplicación de periodo, presentes en este modelo; a través de la manipulación del *parámetro de control* α .

Comenzaremos nuestro análisis observando que hay ciertos casos cuyo estudio no se hace necesario. Por ejemplo, aquellos donde el valor de partida sea $x_0 = 0$ o $x_1 = 0$, ya que eventualmente se tendrá que $x_n = 0$ para todo $n \geq 0$ o $x_n = 0$ para todo $n \geq n_0$, respectivamente. Por ende consideraremos que el sistema solo es de interés siempre que $x_n \in (0, 1)$ y $\alpha \in (0, 4)$.

En primer lugar, buscaremos calcular los puntos fijos del sistema, ya que serán los que puedan dar lugar a la aparición de bifurcaciones. Para ello hemos de encontrar las raíces del polinomio

$$P_1(x) = f(x) - x = \alpha x(1 - x) - x = -\alpha x^2 + (1 - \alpha)x.$$

Estas vienen dadas por

$$x_1^- = 0, \quad x_1^+ = 1 - \frac{1}{\alpha},$$

pero dado que estamos considerando un modelo donde $x \in (0, 1)$, el punto fijo x_1^+ solo está definido para $\alpha \geq 1$.

A continuación, buscaremos determinar los puntos 2-periódicos del sistema, al igual que hicimos en la subsección 2.4.3; siendo estos aquellos que verifiquen que $f_\alpha^2(x) = x$. Esto se puede encontrando las raíces del polinomio

$$P_2(x) = f^2(x) - x = x(\alpha^2(1 - x)(1 - \alpha x(1 - x)) - 1),$$

pero dado que x_0 y x_1 han de ser soluciones de $P_2(x)$, podemos de manera equivalente resolver

la factorización

$$P_2(x) = x(x - x_1)(-\alpha^3 x^2 + \alpha^2(\alpha + 1)x - \alpha(\alpha + 1)).$$

Las raíces que se obtienen vienen dadas por

$$x_2^\pm = \frac{1}{2\alpha} \left(\alpha + 1 \pm \sqrt{(\alpha + 1)(\alpha - 3)} \right).$$

Dado que estamos en un modelo donde $x \in (0, 1)$, es necesario imponer condiciones para que x_2^- y x_2^+ sean valores reales; llegando a que esto ocurrirá siempre que $\alpha > 3$.

Hemos obtenido entonces que x_2^- y x_2^+ son los dos únicos puntos 2-periódicos de la parábola logística de May, con lo cual estos dos puntos forman un 2-ciclo, ya que se verifica que

$$x_2^- = f^2(x_2^+), \quad x_2^+ = f^2(x_2^-).$$

Bifurcación transcítica

Volviendo a los puntos fijos calculados anteriormente, estudiaremos ahora los multiplicadores a través de la matriz jacobiana, para así determinar el comportamiento del sistema.

Como es claro que $A(x) \equiv J_f(x) = f'(x) = \alpha(1 - 2x)$, se tiene en consecuencia que

$$A(x_1^-) = \alpha, \quad A(x_1^+) = 2 - \alpha,$$

siempre que x_1^+ esté definido. Todo ello nos permite hacer la siguiente clasificación:

- Para $0 < \alpha < 1$, $x_1^- = 0$ es el único punto fijo del sistema y además es estable.
- Para $\alpha = 1$, $x_1^- = x_1^+ = 0$ es un punto fijo no hiperbólico doble.
- Para $1 < \alpha < 3$, el sistema presenta dos puntos fijos, de los cuales $x_1^- = 0$ es inestable y $x_1^+ = 1 - 1/\alpha$ es estable.

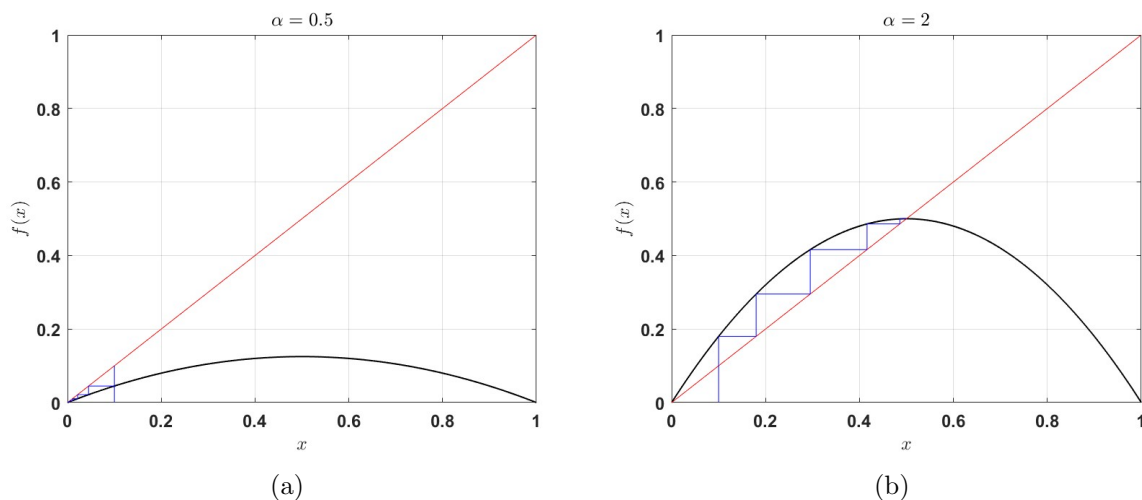


Figura 3.6: Diagrama de telaraña de la parábola logística de May para $\alpha < 1$ (a) y $\alpha > 1$ (b), para la bifurcación transcítica.

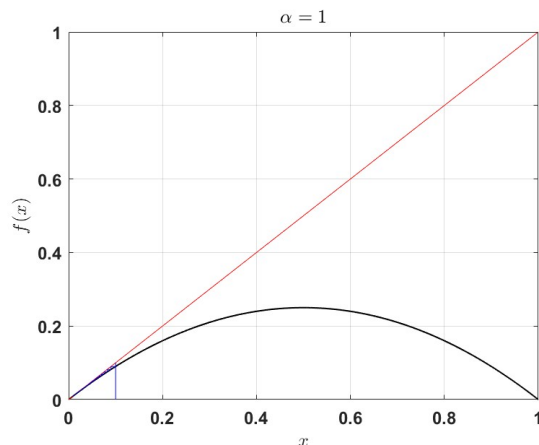


Figura 3.7: Diagrama de telaraña de la parábola logística de May para $\alpha = 1$, para la bifurcación transcritical.

Acabamos de observar que en $\alpha = 1$ tenemos un valor de bifurcación, ya que para pequeñas perturbaciones del parámetro en torno a $\alpha = 1$, el sistema pasa de tener un punto fijo estable en el origen, a tener dos puntos fijos donde $x = 0$ pierde su estabilidad. Esto se corresponde con la existencia de una bifurcación transcritical que no se estudió en la sección de bifurcaciones discretas, pero que es totalmente análoga al caso continuo.

Bifurcación de duplicación de periodo

Por otro lado, volvamos ahora a los puntos 2-periódicos calculados anteriormente, para los cuales estudiaremos ahora los multiplicadores a través de la matriz jacobiana asociada a la función $g(x) = f^2(x) = f(f(x))$, para así determinar el comportamiento del sistema.

Nuevamente, es claro que $B(x) \equiv J_g(x) = g'(x) = \alpha^2(1 - 2f(x))(1 - 2x)$ y se tiene en consecuencia

$$B(x_2^-) = \alpha^2(1 - 2x_2^+)(1 - 2x_2^-), \quad B(x_2^+) = \alpha^2(1 - 2x_2^-)(1 - 2x_2^+),$$

siempre que $\alpha > 3$.

Aquí haremos un análisis del comportamiento del sistema más detallado, ya que el ejemplo así lo requiere. En primer lugar, si estudiamos el caso límite donde $\alpha = 3$, lo que se observa es que $x_2^- = x_2^+ = 2/3$ es un punto fijo doble.

Si vamos más allá y estudiamos el caso donde $\alpha > 3$, tendremos que aparece un 2-ciclo cuya estabilidad vendrá determinada por la condición $|g'(x_2^\pm)| < 1$. Operando la desigualdad se llega a que

$$|g'(x_2^\pm)| = |\alpha^2(1 - 2x_2^+)(1 - 2x_2^-)| < 1 \quad \longleftrightarrow \quad 3 < \alpha < 1 + \sqrt{6} = 3.4494897.$$

Todo ello nos permite hacer la siguiente clasificación:

- Para $\alpha = 3$, $x_2^- = x_2^+ = 2/3$ es un punto fijo no hiperbólico doble.
- Para $3 < \alpha < 1 + \sqrt{6}$, el sistema presenta dos puntos fijos que conforman un 2-ciclo estable.

- Para $\alpha > 1 + \sqrt{6}$, el sistema presenta dos puntos fijos que conforman un 2-ciclo inestable.

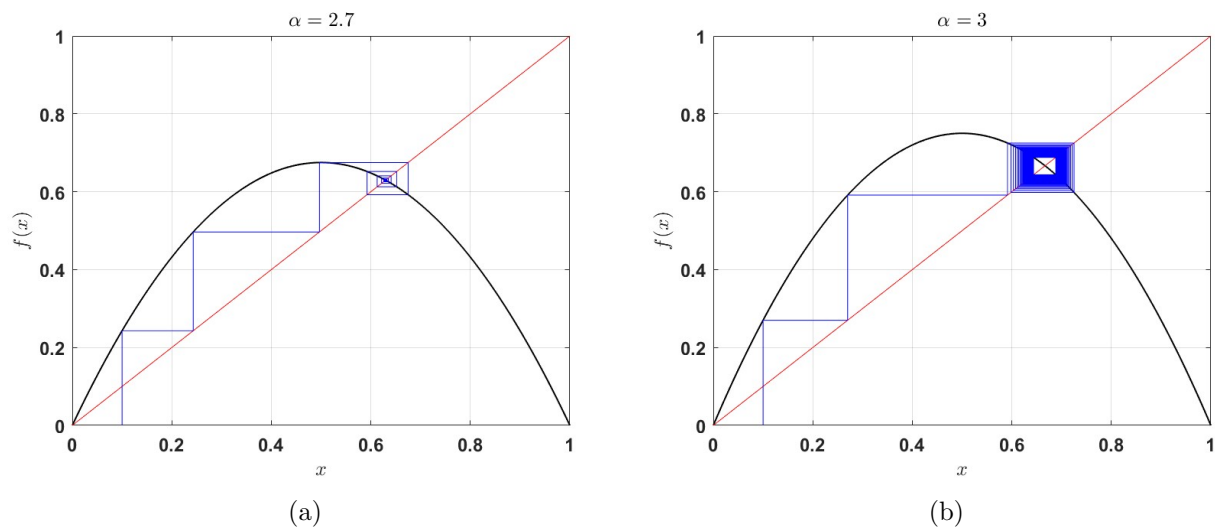


Figura 3.8: Diagrama de telaraña de la parábola logística de May para $\alpha < 3$ (a) y $\alpha > 3$ (b), para la bifurcación transcítica.

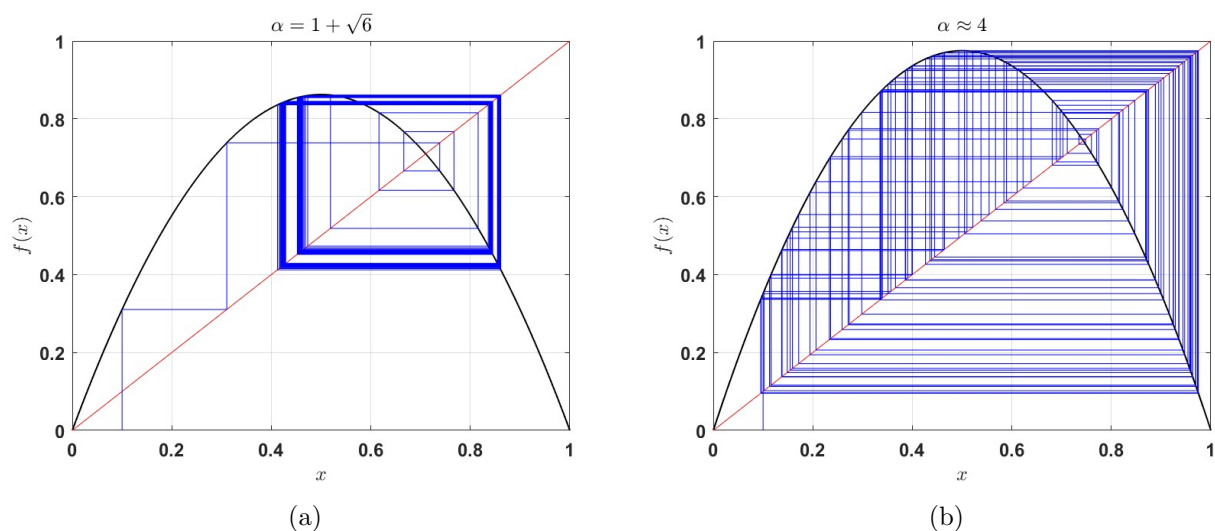


Figura 3.9: Diagrama de telaraña de la parábola logística de May para $\alpha = 1 + \sqrt{6}$ (a) y $\alpha > 1 + \sqrt{6}$ (b), para la bifurcación transcítica.

3.2.2. Conclusiones

Finalmente, hemos visto como a través del estudio de los puntos fijos y los puntos 2-periódicos del sistema, se puede determinar la dinámica de este; y finalmente hemos concluido que la parábola logística de May presenta una bifurcación transcítica en $\alpha = 1$, una bifurcación de duplicación de periodo en las regiones factibles en $\alpha = 3$ y otra bifurcación en $\alpha = 1 + \sqrt{6}$, donde se empiezan a observar comportamientos caóticos. Todo ello se puede resumir a través del siguiente diagrama de bifurcación [Cas10]:

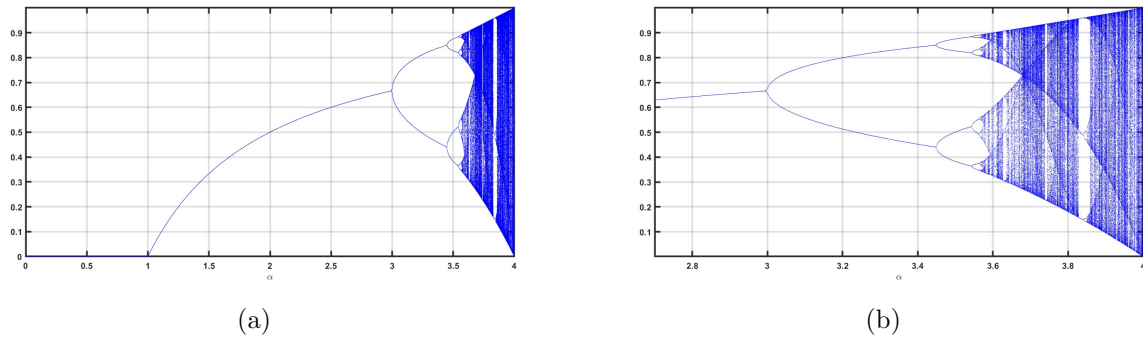


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación de la parábola logística de May [Yan23].

3.3. Camino al caos

Aparte de lo ya comentado, hemos podido observar que tanto en el sistema de Lü como en la parábola logística estamos ante dos sistemas que presentan comportamientos de tipo caótico para determinados valores de los parámetros. Esto se puede enmarcar dentro de lo que se conoce como la **Teoría del Caos**, que consiste en una rama de las matemáticas que estudia los fenómenos que se dan en algunos sistemas dinámicos no lineales que presentan una alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

La teoría del caos se inicia a finales del siglo XIX, cuando Henri Poincaré introduce, con sus estudios pioneros sobre la estabilidad del sistema solar, un nuevo punto de vista de la dinámica caótica. Posteriormente, y tal como ya hemos comentado previamente, fue Lorenz quien estudiando su modelo atmosférico encontró un atractor extraño, a raíz del cual introdujo el conocido concepto del “Efecto Mariposa”. En las dos últimas décadas el interés por los fenómenos caóticos ha ido en aumento, extendiéndose a campos del conocimiento muy dispares y alejados de las matemáticas, como por ejemplo el estudio de reacciones químicas [CB06], circuitos eléctricos [Elv99], mecánica celeste [Gur03], economía [CS02], vibraciones mecánicas, láseres, y un largo etcétera. Ello se debe en parte al desarrollo de la capacidad de computación, que permite simular numéricamente el comportamiento de este tipo de sistemas que abundan en la naturaleza, tal y como se ha realizado en este capítulo.

Así como se ha adelantado, la principal característica de los sistemas caóticos es su sensibilidad a la perturbación de las condiciones iniciales, lo que en ocasiones dará lugar que las trayectorias que se generan a partir de las mismas diverjan hasta que no exista ningún tipo de correlación entre ellas. Por otra parte, aunque los fenómenos caóticos presentan a menudo comportamientos y conductas universales que derivan de los términos no lineales que los originan, en la práctica es imposible determinar con total exactitud al estado inicial del sistema.

En lo que respecta a desarrollos futuros que puedan dar continuidad al llevado cabo en este trabajo, resulta de interés el hecho de que la teoría de bifurcaciones guarda una estrecha relación con la teoría del caos [The09] y en consecuencia, los futuros desarrollos de esta última podrán permitir abordar nuevos aspectos en el estudio de la teoría presentada en esta memoria.

Objetivos alcanzados

En este trabajo se han desarrollado de manera satisfactoria todos los objetivos previstos en un inicio y en particular los siguientes:

- Se ha profundizado en las cuestiones básicas de los sistemas dinámicos, tanto continuos como discretos, especialmente en aquellas que se refieren a la determinación del comportamiento cualitativo de las órbitas de estos. Esto se ha llevado a cabo mediante una recopilación de definiciones y resultados fundamentales para asentar los conceptos de estabilidad y equivalencia topológica, que son elementos vertebradores de la teoría de bifurcaciones.
- Se ha analizado con detalle el concepto de bifurcación y su significado en el análisis de sistemas paramétricos, en los que representa un cambio cualitativo en el comportamiento de los mismos. Esto ha dado lugar a la motivación del problema de clasificación de bifurcaciones en función de su codimensión y a la introducción del concepto de forma normal topológica.
- Se han estudiado de manera detallada las bifurcaciones más importantes que se presentan en los sistemas uniparamétricos de baja dimensión, analizando las condiciones de transversalidad necesarias para que se ocurran de manera general. En el caso de los sistemas continuos se ha comenzado estudiando en detalle la bifurcación tangencial y la de Hopf, desarrollando los diferentes resultados que dan lugar a los teoremas centrales que permiten afirmar la estabilidad estructural respecto a sistemas genéricos, para finalizar con el análisis de dos tipos de bifurcación especiales como son la bifurcación transcítica y pitchfork. De manera análoga, en el caso de los sistemas discretos se han estudiado en detalle la bifurcación tangencial, la de duplicación de período y la de Neimark-Sacker, desarrollando resultados que eventualmente también garantizan la estabilidad estructural respecto a sistemas genéricos.
- Se han tratado los resultados relativos a la teoría de la variedad central, que permiten extender el estudio de las bifurcaciones en sistemas de dimensiones superiores. Con ello se ha conseguido mostrar que existen ciertas variedades que son invariantes y que dependen de parámetros, en cuyo interior el sistema presenta sus bifurcaciones correspondientes, mientras que el comportamiento fuera de ellas es en cierto modo “trivial”.
- Se han analizado dos ejemplos de aplicación de las bifurcaciones estudiadas, consistiendo estos en un sistema de tipo Lorenz y en el modelo logístico de población. Por un lado, se ha determinado la existencia de varios tipos de bifurcaciones de Hopf en el sistema de Lü, y, por otro lado, se ha determinado la existencia de una bifurcación transcítica y una

bifurcación de duplicación de periodo en la parábola logística de May. Además, este estudio ha dado lugar a una aproximación al concepto de caos, pues alguna de estas bifurcaciones lleva de manera natural a este tipo de comportamientos.

- Se han realizado experimentos numéricos utilizando el programa específico Matcont, para la simulación de los sistemas tratados a lo largo de la memoria.

Conviene destacar que, por cuestiones de brevedad, algunos aspectos de interés no se han podido recoger a lo largo de esta memoria. Sin embargo, y de cara a desarrollos futuros que puedan dar continuidad al trabajo realizado en este proyecto de fin de grado, el estudio de bifurcaciones de codimensión superior, el estudio de bifurcaciones en sistemas multiparamétricos, el estudio de bifurcaciones de carácter global o el estudio detallado de la relación de los sistemas dinámicos continuos y discretos a través de las aplicaciones de Poincaré, y sus múltiples consecuencias relacionadas con la teoría de bifurcaciones, podrían ser temas que permitieran completar el que aquí se ha tratado.

Por otro lado, también habría que tener en cuenta, tal y como se comentó anteriormente, la significativa relación entre la teoría de bifurcaciones y la teoría de caos. Los avances que se puedan llevar a cabo de manera paralela en ambas teorías, pueden dar lugar a nuevas perspectivas y metodologías para abordar problemas complejos que permitan explorar nuevos aspectos que hasta ahora han permanecido fuera de nuestro alcance. Esto podría traducirse en la identificación de nuevas bifurcaciones, la mejora en las técnicas de predicción de los comportamientos de los sistemas y el desarrollo de aplicaciones prácticas en modelos donde la estabilidad y la evolución presentan fases críticas.

Bibliografía

- [Fer+12] Mariano Ferrari et al. «Sistemas Dinámicos y Aplicaciones». En: ene. de 2012, pág. 5.
- [Kuz04] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. 2.^a ed. Springer New York, 2004.
- [GH83] John Guckenheimer y Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [HK91] J.K. Hale y H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [KHK10] Xiangxing Kong, Zhenting Hou y Ning Kang. «On the Non-equivalence of Lü System and Lorenz System». En: *2010 International Workshop on Chaos-Fractal Theories and Applications*. 2010, págs. 306-308.
- [SJ06] H.G. Schuster y W. Just. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Wiley, 2006.
- [Sot79] J.M. Sotomayor Tello. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. 1.^a ed. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1979.
- [Arn88] V.I. Arnold. *Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, 1988.
- [Wen14] H. Wen. «A review of the Hénon map and its physical interpretations». En: (abr. de 2014).
- [Lay15] G.C. Layek. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer India, 2015.
- [Rod] Soledad Pérez Rodríguez. *Ecuaciones en diferencias no lineales. Bifurcación en sistemas discretos*. Modelización: Universidad de la Laguna.
- [Lya92] A.M. Lyapunov. *General Problem of the Stability Of Motion*. Control Theory and Applications Series. Taylor & Francis, 1992.
- [Apo76] T.M. Apostol. *Análisis matemático*. 2.^a ed. Reverté, 1976.
- [Beg15] Francisco Begines Begines. «Análisis de bifurcaciones en modelos dinámicos macroeconómicos de tiempo continuo». Tesis doct. Universidad de Sevilla, 2015.
- [Car82] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag New York, 1982.
- [KP90] U. Kirchgraber y K.J. Palmer. *Geometry in the Neighborhood of Invariant Manifolds of Maps and Flows and Linearization*. Longman Scientific & Technical, 1990.
- [Lor00] E.N. Lorenz. *La Esencia Del Caos*. Debate, 2000.
- [Hou+10] Z. Hou et al. «On the non-equivalence of Lorenz System and Chen System». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 20.02 (feb. de 2010), págs. 557-560. ISSN: 1793-6551.

- [Bac07] David Baca Carrasco. «Análisis paramétrico de la bifurcación de Hopf en sistemas tipo Lorenz». Tesis doct. Universidad de Sonora, Hermosillo (Méjico), 2007.
- [Dho+03] Annick Dhooge et al. «Cl-matcont: A Continuation Toolbox in Matlab». En: vol. 3. Mar. de 2003, págs. 161-166.
- [YL11] Pei Yu y Jinhua Lü. «Bifurcation control for a class of Lorenz-like systems». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 21.09 (ago. de 2011), págs. 2647-2664.
- [Cal17] Pablo Emilio Calderón Saavedra. «Control de la Bifurcación de Hopf en el Sistema de Li-Ou: Análisis y Diseño». Tesis doct. Universidad Veracruzana, 2017.
- [PR95] S. C. Phatak y S. Suresh Rao. «Logistic map: A possible random-number generator». En: *Phys. Rev. E* 51 (4 abr. de 1995), págs. 3670-3678.
- [Cas10] José María Castelo Ares. «La aplicación logística: un laboratorio del caos». Tesis doct. Universidad de Valencia, 2010.
- [Yan23] Hui Yang. «Mining Nonlinear Dynamics in Operational Data for Process Improvement». En: *Infors Tutorials in Operations Research* (jul. de 2023), págs. 109-132.
- [CB06] Jeffrey A. Cramer y Karl S. Booksh. «Chaos theory in chemistry and chemometrics: a review». En: *Journal of Chemometrics* 20 (nov. de 2006).
- [Elv99] Jaramillo Elvia Rosa Freire. «El caos en circuitos electrónicos». Tesis doct. Universidad de Quito, 1999.
- [Gur03] V. G. Gurbadyan. «Chaotic Phenomena in Astrophysics and Cosmology». En: *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2003.
- [CS02] Pablo Coto Millán y José María Sarabia Alegría. «Dinámicas no lineales y caóticas en los mercados financieros». En: *Cuadernos de Economía* 69–85 (2002).
- [The09] Mrs. T. Theivasanthi. *Bifurcations and Chaos in Simple Dynamical Systems*. 2009.