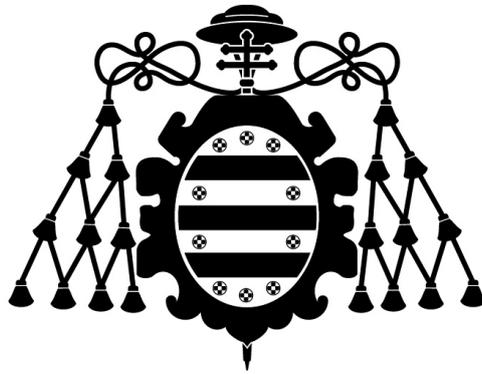


# Estrellas de d-mayor

Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff y de Tolman



## Universidad de Oviedo

**Autor:** José Galán Herrera

**Tutores:** Patrick Meessen, Carlos Hoyos

**Facultad:** Ciencias

**Año académico:** 2023/24



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estrellas en gravedad Newtoniana</b>	<b>3</b>
2.1. Ecuación de estructura de una estrella en 4d . . . . .	3
2.1.1. Caso: $\rho(r) = \rho_0$ constante . . . . .	5
2.2. Ecuación de estructura: Generalización d-dimensional . . . . .	6
2.2.1. Caso: $\rho(r) = \rho_0$ constante . . . . .	7
<b>3. Estrellas en Relatividad General. Caso 4-dimensional</b>	<b>9</b>
3.1. Solución exterior: el agujero negro de Schwarzschild . . . . .	11
3.2. Solución interior: Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff . . . . .	18
3.2.1. Estrellas de Buchdahl. Teorema de Buchdahl . . . . .	19
3.2.2. Estrellas de materia conforme . . . . .	22
3.2.3. Ecuación de Tolman. Soluciones de Tolman: I, III y IV. . . . .	24
<b>4. Estrellas en Relatividad General. Caso d-dimensional</b>	<b>33</b>
4.1. Solución exterior: el agujero negro de Tangherlini . . . . .	34
4.2. Solución interior: Generalización de la ecuación TOV . . . . .	37
4.2.1. Estrellas de Buchdahl d-dimensionales. Generalización del Teorema de Buchdahl . . . . .	39
4.2.2. Estrellas conformes d-dimensionales. . . . .	40
4.2.3. Ecuación de Tolman d-dimensional. . . . .	42
<b>5. Estrellas isotrópicas</b>	<b>48</b>
5.1. Condiciones de regularidad de un fluido. . . . .	50

5.2. El agujero negro de Tangherlini . . . . .	51
5.3. Clase de soluciones del tipo Rahman-Visser . . . . .	53
5.3.1. Métrica de Schwarzschild generalizada para el interior estelar . . . . .	54
5.3.2. Métrica de Stewart generalizada . . . . .	55
<b>6. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Apéndice: Convenios</b>	<b>60</b>
A.1. Convenios: Relatividad General . . . . .	60
<b>B. Apéndice: Desarrollos</b>	<b>63</b>
B.1. Cálculos: métrica de Schwarzschild . . . . .	63
B.2. Límite a bajas velocidades de las geodésicas . . . . .	65
B.3. Cálculos: métrica del interior estelar . . . . .	67
B.4. Cálculos: métrica isótropa. . . . .	69
<b>C. Apéndice: Relación dimensional entre constantes de Newton</b>	<b>71</b>
<b>D. Apéndice: Derivación del volumen de una esfera d-dimensional</b>	<b>74</b>
<b>E. Apéndice: Enunciado del Teorema de Gauss</b>	<b>78</b>
<b>Referencias</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de la historia las estrellas han sido seguramente los cuerpos celestes que más han asombrado al ser humano, idealizando siempre su capacidad de irradiar luz o aprovechando su valor como faros capaces de guiar en la nocturnidad de la noche. Fue pasado el tiempo, con el avance y desarrollo de la ciencia, cuando se comenzó a prestar atención al más conocido dentro de esta categoría y principal astro de nuestro sistema solar: el Sol. Una vez abierta la veda, la humanidad se embarcó en el estudio de todo tipo de cuerpos celestes, dando cuenta de sus características y también las leyes que los rigen, área que ha dado pie al desarrollo de este trabajo.

En esta memoria se tratarán las leyes que gobiernan el equilibrio estelar desde un punto teórico, partiendo en el capítulo 2 con una visión más simplificada del problema, representada por el análisis Newtoniano, para seguir posteriormente con un enfoque más realista a partir del uso de relatividad general. En éste capítulo se obtendrán algunos resultados conocidos por su relevancia, como el agujero negro de Schwarzschild, u otros más complejos como la derivación de la ecuación TOV, que describe el equilibrio hidrostático presente en objetos compactos como estrellas. Una vez vista esta ecuación se hallarán, mediante la asunción de hipótesis, varios resultados complementarios que detallan las características de distintos tipos de estrellas, así como sus límites físicos.

Una vez terminado, el tercer capítulo dará pie a un cuarto en el cual se considerará estar en presencia de un mundo con  $d$  dimensiones y, por tanto, se extenderán dimensionalmente los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Esto, más que un ejercicio de cálculo, es útil para comprender la manera en la que se generalizan conceptos en el caso de tener dimensiones físicas adicionales, además de permitir ver cómo algunos resultados conocidos dejan de ser válidos al realizar dicha extensión. Por otro lado, la consideración de dimensiones superiores es un área muy estudiada hoy en día debido

al gran interés en teorías que buscan la unificación de las fuerzas fundamentales como, por ejemplo, la teoría de cuerdas.

El cuarto capítulo tratará sobre una metodología implementada por *S. Rahman* y *M. Visser* para el estudio de estrellas simétricamente esféricas que presentan isotropía caracterizado por la presencia de una función generatriz que, a partir de su determinación, trivializará la obtención de soluciones para estrellas de este tipo.

Para finalizar, a modo de conclusiones, se presentarán de forma resumida los resultados de mayor importancia obtenidos a lo largo del trabajo, así como un breve análisis personal valorando las aptitudes extraídas de la realización del mismo.

## Capítulo 2

# Estrellas en gravedad Newtoniana

Primeramente derivaremos la ecuación que rige una estrella en física Newtoniana, conocida como ecuación de estructura de una estrella. Esta ecuación procede del análisis entre el equilibrio presente entre las fuerzas de expansión nucleares del interior de la estrella y la compresión dada por la fuerza gravitatoria debido a la presencia de masa. Una vez hecho esto, se resolverá dicha ecuación para el caso de una estrella con densidad de masa constante a lo largo de la misma. Finalmente se considerará el caso d-dimensional para deducir una ecuación de estructura más general y se repetirá a partir de ella el caso de densidad de masa constante.

### 2.1. Ecuación de estructura de una estrella en 4d

Consideramos una estrella con simetría esférica con fuerza neta nula en su interior que, por tanto, no presenta internamente aceleración de ningún tipo. Buscamos así una ecuación que formalice el equilibrio existente en el interior de la estrella, que supondremos formada por una material isótropo. En cuanto a las fuerzas presentes en el exterior estelar, el potencial gravitatorio  $\Phi(r)$  creado por la estrella en un punto exterior a la misma es:

$$\Phi(r) = -\frac{G_N M_\star}{r} \quad \forall r > R_\star \quad (2.1)$$

Donde se ha denotado la constante de gravitación universal de Newton como  $G_N$  y la masa y radio estelar como  $M_S$  y  $R_\star$  respectivamente. Por otro lado, la fuerza gravitatoria asociada al potencial  $\Phi(r)$  a una distancia  $r$  del centro estelar es:

$$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{G_N M_\star}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \forall r > R_\star \quad (2.2)$$

Siendo  $\vec{G}$  el campo gravitatorio generado por la estrella.

En el interior de la estrella la fuerza gravitatoria creada por la misma es compensada por una presión  $P(r)$  que evita por tanto su colapso, ya que una diferencia entre estas fuerzas de carácter compresivo y expansivo provocarían una compresión o expansión de la estrella, fenómenos que no se tendrán en cuenta en este trabajo.

La masa contenida en una esfera de radio  $r < R_*$  se puede expresar en función de la densidad de masa de la estrella  $\rho(r)$ :

$$dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2dr \quad \forall r < R_* \quad \longrightarrow \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r)r^2dr \quad , \quad M(R_*) = M_* \quad (2.3)$$

Considerando ahora un elemento diferencial de superficie sobre la esfera de radio  $r$  contenida en la estrella, la fuerza gravitatoria ejercida sobre el mismo es:

$$g\rho(r)dr = \rho(r)\frac{G_N M_*}{r^2}dr \quad (2.4)$$

Las fuerzas de presión expansivas presentes en la parte interna de la estrella van creciendo con el radio de la misma, por tanto se tiene que la presión neta hacia fuera de ella es:  $-\frac{dP}{dr}dr$ . De esta forma, del equilibrio entre ambas se obtiene la ecuación del movimiento:

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = \rho(r)\ddot{r} = -\frac{dP}{dr} - \frac{G_N M(r)}{r^2}\rho(r) \quad (2.5)$$

Debido al equilibrio entre fuerzas se tiene  $\ddot{r} = 0$  y por tanto se obtiene la ecuación de estructura:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G_N M(r)}{r^2}\rho(r) \quad (2.6)$$

Sustituyendo entonces por la expresión para  $M(r)$  hallada en (2.3), se puede hallar una versión más explícita de la misma:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G_N}{r^2}\rho(r) \int_0^r \rho(r)r^2dr \quad (2.7)$$

Como tanto la densidad de masa  $\rho$  como la masa  $M$  son cantidades positivas, se tiene que la presión es una función monótona decreciente respecto a la distancia al centro de la estrella. Esto concuerda con el hecho de que la presión sea producida por las reacciones nucleares de fusión que se dan en las capas más internas de la estrella y que, por tanto, va decreciendo hasta hacerse nula a la distancia del radio estelar  $R_*$ . De esta manera se ha encontrado una caracterización para el radio de la estrella, el cual queda definido como el valor de  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que:

$$P(r = R_*) = 0 \quad (2.8)$$

Se podría razonar también como una consecuencia de la continuidad de la presión como función del radio ya que, como a partir del radio estelar se encuentra el vacío<sup>1</sup>, necesariamente la presión es cero y por tanto ha de anularse en la frontera de la estrella, esto es  $R_*$ .

Pese a la aparente simplicidad de la ecuación diferencial, cabe recordar que la masa  $M(r)$  se define como una integral de la densidad de la estrella, y que es el producto de ambas el que aparece en la ecuación de estructura. Se precisa por tanto de más información para poder obtener una expresión de dicha ecuación, y para ello se contemplan dos métodos: partir de una hipótesis sobre la densidad de masa  $\rho(r)$  de la estrella, o utilizar una posible ecuación de estado de la materia constituyente de la estrella que relacione la densidad de masa y la presión. Se resolverá a continuación el primer caso propuesto.

### 2.1.1. Caso: $\rho(r) = \rho_0$ constante

Se obtendrá la ecuación de estructura en un caso particular, aquel en el que la distribución de masa es uniforme y por tanto la densidad de masa es constante en toda la estrella. Usando la ecuación (2.3) se tiene:

$$M(r) = \frac{4\pi\rho_0}{3}r^3, \quad 0 < r \leq R_* \longrightarrow M_* = \frac{4\pi\rho_0}{3}R_*^3 \quad (2.9)$$

Con lo que resulta una relación entre la densidad de masa y las características de nuestra estrella:

$$\rho_0 = \frac{3M_*}{4\pi R_*^3} \quad (2.10)$$

Sustituyendo esta última expresión de la masa en función del radio y el ansatz de densidad de masa constante en la ecuación de estructura:

$$P(r) - \Psi = -\frac{2\pi G_N \rho_0^2}{3}r^2 \quad (2.11)$$

Donde  $\Psi$  es una constante de integración cuyo valor viene dado por la presión en el núcleo estelar  $\Psi \equiv P(r = 0)$ , que inicialmente es desconocido, pero se puede obtener imponiendo la condición  $P(R_*) = 0$ . Luego, la dependencia de la presión con  $r$  resulta:

$$P(r) = \frac{2\pi G_N \rho_0^2}{3}(R_*^2 - r^2) \quad (2.12)$$

Donde se ha sustituido el valor de la constante de integración:

$$\Psi = \frac{2\pi G_N \rho_0^2}{3}R_*^2 \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>Por tanto una región espacial con densidad de masa nula.

Definiendo la presión en el núcleo de la estrella como  $P_c = P(r = 0)$ , de la ecuación (2.11) se deduce que:

$$P_c = \Psi = \frac{2\pi G_N \rho_0^2}{3} R_\star^2 \quad (2.14)$$

De este resultado es importante notar que no se obtiene una cota superior para el valor de la presión en el centro de la estrella, sino que es mayor cuanto mayor es el radio estelar, en contraposición con lo que se obtendrá cuando se haga un desarrollo más preciso con cálculos de relatividad general.

## 2.2. Ecuación de estructura: Generalización d-dimensional

La primera pregunta que puede surgir al plantear este problema es cómo se puede encontrar una expresión para la gravedad en dimensiones superiores de las que se tiene acceso. Este problema se solventa utilizando el *Teorema de Gauss*, enunciado en el apéndice E. Considerando entonces un volumen  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  de frontera  $\partial V$ , el campo gravitatorio,  $\vec{G}$ , generado por la masa en el volumen  $m(V)$  es:

$$\int_{\partial V} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = -G_N m(V) V_{(2)} = -4\pi G_N m(V) \quad (2.15)$$

Donde en el último paso se ha utilizado el valor del volumen de una 2-esfera de radio 1 (véase el apéndice D). Podemos tomar ahora un volumen  $V \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  en un universo d-dimensional con  $(d-1)$  dimensiones espaciales, de forma que utilizando una generalización del teorema de la divergencia en estas dimensiones:

$$\int_{\partial S} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV_{(n)} = -G_{(d)} m(V) V_{(n)} \quad (2.16)$$

Donde  $G_{(d)}$  es una generalización de la conocida constante de gravitación universal de Newton a  $d$  dimensiones. Consecuentemente, notar que:

$$[G_{(d)}] = m^{d-1} \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \implies [G_4] = [G_N] = m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \quad (2.17)$$

Asumiendo una generalización de la Ley de Newton para la gravitación a una región del espacio en este universo, la expresión del campo gravitatorio generado por una estrella (d-1)-dimensional de radio  $R_\star$  y masa  $M_\star$ :

$$\forall r > R_\star : \vec{G} = \frac{G_{(d)} M_\star}{r^{(d-2)}} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.18)$$

Utilizando que el campo gravitatorio se calcula a partir del gradiente del potencial gravitatorio, se obtiene una expresión analítica para el mismo resolviendo una ecuación diferencial ordinaria sencilla:

$$\vec{G} = -\nabla\Phi \implies \Phi = -\frac{G_{(d)} M_\star}{(d-1)r^{d-1}} \quad (2.19)$$

Para obtener la ecuación de estructura d-dimensional se procede de forma análoga al método expuesto en el apartado 2.1 adaptado al número de dimensiones presente. En esta línea, la masa contenida en una esfera de radio  $r$  y centro el origen<sup>2</sup> es<sup>3</sup>:

$$M(r) = V_{(d-2)} \int_0^r \rho(r) r^{d-2} dr \quad (2.20)$$

Considerando el equilibrio hidrostático entre las presiones de carácter expansivo y la compresión dada por la fuerza gravitatoria, procediendo de forma análoga a la sección anterior, se obtiene:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G^{(d)}}{r^{d-2}} M(r) \rho(r) \quad (2.21)$$

Y, sustituyendo la expresión de la masa estelar dada por (2.20), se deduce la ecuación de estructura generalizada:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G^{(d)} V_{(d-2)}}{r^{d-2}} \rho(r) \int_0^r \rho(r) r^{d-2} dr \quad (2.22)$$

Una vez encontrada, se podría utilizar cualquiera de los métodos mencionados anteriormente para encontrar una expresión explícita de la presión como función de la coordenada radial. Se resolverá a continuación en el caso de una estrella con densidad constante de masa.

### 2.2.1. Caso: $\rho(r) = \rho_0$ constante

Dada la hipótesis de que la densidad de la estrella es una función constante, la masa de la estrella en función del radio es:

$$M(r) = \frac{V_{(d-2)} \rho_0}{d-1} r^{d-1} \quad (2.23)$$

De forma que la masa total de la estrella viene dada por:

$$M_{\star} = \frac{V_{(d-2)} \rho_0}{d-1} R_{\star}^{d-1} \quad (2.24)$$

Siendo  $R_{\star}$  el radio de la estrella. Utilizando ahora tanto la expresión de  $M(r)$  como la hipótesis sobre la densidad en la ecuación de estructura e integrando, se obtiene una expresión sobre la variación de la presión:

$$P(r) = -\frac{G^{(d)} V_{(d-2)} \rho_0^2}{2(d-1)} r^2 + \Psi \quad (2.25)$$

<sup>2</sup>Considerando el origen como el punto donde se encuentra el centro estelar, al estar considerando estrellas con simetría esférica.

<sup>3</sup>La derivación del volumen de una esfera n-dimensional con símbolo  $V_{(n)}$  está hecho en el apéndice D.

Con  $\Psi$  una constante de integración, cuyo valor se fija imponiendo la condición de continuidad de la presión en el borde estelar:

$$P(R_\star) = 0 \implies \Psi = \frac{G_{(d)}V_{(d-2)}\rho_0^2 R_\star^2}{2(d-1)} \quad (2.26)$$

Luego la presión en la estrella varía con la coordenada radial como sigue:

$$P(r) = \frac{G_{(d)}V_{(d-2)}\rho_0^2}{2(d-1)} (R_\star^2 - r^2) \quad (2.27)$$

Finalmente, definiendo la presión en el centro de la estrella  $P_c = P(r = 0)$  y atendiendo a la ecuación (2.25), se halla claramente que:

$$P_c = \Psi = \frac{G_{(d)}V_{(d-2)}\rho_0^2}{2(d-1)} R_\star^2 \quad (2.28)$$

Por lo que se concluye que estrellas en dimensiones superiores no presentan ninguna cota superior para la presión en el núcleo estelar según la mecánica Newtoniana, al igual que se obtuvo en 4 dimensiones. Esto permitiría la existencia de estrellas con presión central infinita, lo que se traduce en estrellas infinitamente grandes y sin límite ninguno sobre la masa máxima que pueden llegar a tener. Es evidente que la existencia de estrellas de este tipo plantea muchas inconsistencias y, pese a que la hipótesis de partida sobre densidad de masa constante es poco realista, abre la puerta a la necesidad de rehacer los cálculos por medio de métodos más sofisticados, como la relatividad general. Es por ello que en el capítulo siguiente se buscará hallar una descripción más realista y detallada de estos objetos astronómicos.

## Capítulo 3

# Estrellas en Relatividad General. Caso 4-dimensional

En este apartado se modelará la situación en la cual se tiene una región del espacio donde reside una estrella masiva. A continuación, se resolverán las *ecuaciones de campo de Einstein* en dos casos distintos: primeramente en el exterior de la estrella y posteriormente en el interior de la misma. En la última parte, se aunarán los resultados obtenidos en la resolución de las ecuaciones de Einstein en el exterior estelar junto con la condición de isotropía de la estrella para obtener nuevos resultados.

El análisis del primer caso se debe a la importancia histórica del resultado obtenido en el exterior de la estrella, ya que se deben resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío, recuperándose los resultados obtenidos por *K. Schwarzschild* en 1917. En el segundo escenario planteado, se llegará a la *Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* y se resolverá en dos casos particulares. Finalmente, a partir de la condición de tener una estrella isotrópica se obtiene, siguiendo los pasos de *Edward C. Tolman*, la *Ecuación de Tolman* cuya resolubilidad analítica fue hallada por el propio autor en unos casos determinados. En el capítulo 5 se verá como Rahman y Visser trivializan dicha ecuación a partir de una función que parametriza las soluciones en todos los casos.

La base desde la que se comenzará son las ecuaciones de campo de Einstein, que son:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

$T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento y  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, que se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (3.2)$$

Donde  $R_{\mu\nu}$  hace referencia al tensor de Ricci y  $R$  al escalar de curvatura de Ricci. De este modo, claramente se obtiene la siguiente igualdad:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Equivalentemente, en algunos casos se hará uso de su versión alternativa:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (3.4)$$

Para continuar, es necesario definir una métrica que describa la geometría espacio-temporal del sistema a estudiar. A partir de ella, se calcularán los símbolos de Christoffel y con ellos el tensor de Riemann. Una contracción en particular de los índices del tensor de Riemann dará lugar al tensor de Ricci y consecuentemente, calculando su traza, el escalar de curvatura. Por otro lado es necesario obtener una expresión analítica de partida para el otro miembro de la ecuación, que se reduce a encontrar una expresión para el tensor de energía-momento, el cual vendrá determinado por el tipo de materia que componga la estrella.

Considerando las restricciones de simetría esférica y el hecho de ser estática impuestas sobre la estrella, resulta natural considerar una métrica con simetría esférica e independiente del tiempo:

$$ds^2 = -c^2e^{2A}dt^2 + e^{2B}dr^2 + r^2h^{ij}dy_idy_j \quad (3.5)$$

Donde  $A = A(r)$  y  $B = B(r)$  son funciones de la coordenada radial. Por otro lado  $h^{ij}$  representa la métrica de una 2-esfera, que tomaremos en coordenadas esféricas como:

$$h^{ij}dy_idy_j = d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2 \quad (3.6)$$

Es importante notar que una 2-esfera presenta invariancia bajo rotaciones, luego esto junto al hecho de que la métrica depende solamente de la coordenada radial implica que la estrella será también isótropa. Por otro lado, como se desconoce lo que hay en el interior de la estrella que se modeliza, se supone la presencia de un fluido perfecto cuya expresión del tensor energía-momento es la que sigue:

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \rho c^2)u_\mu u_\nu \quad (3.7)$$

Manteniendo la notación con respecto al capítulo 2,  $P$  representa la presión,  $\rho$  la densidad de masa y  $u_\mu$  la cuadrivelocidad del fluido. Teniendo en cuenta que la cuadrivelocidad del fluido en el marco comóvil (en el cual el fluido perfecto está estático) es  $\vec{u} = (-1, \vec{0})$ , se deriva que las componentes no nulas del tensor de energía momento tienen la siguiente forma:

$$T_{tt} = -\rho c^2 g_{tt} \quad T_{rr} = P g_{rr} \quad T_{ij} = P g_{ij} \quad i, j \in \theta, \phi \quad (3.8)$$

### 3.1. Solución exterior: el agujero negro de Schwarzschild

Se buscarán las soluciones a la ecuación de Einstein en el vacío, es decir, cuando  $T_{\mu\nu} = 0$ . De esta forma se replicarán los resultados obtenidos por K. Schwarzschild, quien en 1917 fue el primero en obtener soluciones no triviales a las ecuaciones de Einstein en el vacío con una geometría distinta del espacio-tiempo plano de Minkowski cuadridimensional,  $Mink_{1,3}$ . Para ello, consideró la siguiente métrica:

$$ds^2 = -c^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.9)$$

De forma que, comparándola con la métrica (3.5) se identifican:  $e^{2A} = f(r)$  y  $e^{2B} = f(r)^{-1}$ . Imponiendo la condición del vacío sobre el tensor de energía- momento y atendiendo a la ecuación (3.3) se tiene:

$$R_{\mu\nu} = 0 \implies R = 0 \quad (3.10)$$

Por tanto, se deben resolver las ecuaciones:  $R_{\mu\nu} = 0$ . Sean las entradas del tensor de Ricci<sup>1</sup> con respecto a la métrica (3.20):

$$\begin{cases} R_{tt} = c^2 \left[ e^{A-B} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{2}{r} e^{2(A-B)} \partial_r A \right] \\ R_{rr} = -e^{B-A} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{2}{r} \partial_r B \\ R_{ij} = [r e^{-2B} \partial_r (B - A) + 1 - e^{-2B}] h_{ij} \quad ; \quad \forall ij \in [\theta, \phi] \end{cases} \quad (3.11)$$

De esta forma considerando las ecuaciones dadas por las entradas  $tt$  y  $rr$ , se tiene:

$$\partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{2}{r} e^{A-B} \partial_r A = 0 \quad (3.12)$$

$$-e^{B-A} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{2}{r} \partial_r B = -\partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{2}{r} e^{A-B} \partial_r B = 0 \quad (3.13)$$

Sumando ambas ecuaciones, se encuentra:

$$\frac{2}{r} e^{A-B} \partial_r (A + B) = 0 \implies A = -B + \Psi(t) \quad (3.14)$$

Se obtiene por tanto una relación entre las funciones A y B, donde aparece una constante de integración  $\Psi(t)$  que puede considerarse nula a través de una redefinición de  $t$ . Utilizando esto en las ecuaciones  $R_{ij}$  se obtiene:

$$-2r e^{-2B} \partial_r B + 1 - e^{-2B} = 0 \implies \partial_r B = \frac{e^{-2B} - 1}{2r} \quad (3.15)$$

<sup>1</sup>Los cálculos explícitos se incluyen en el apéndice B.1

Por otro lado, operando en  $R_{rr} = 0$ :

$$\partial_r(e^{-2B}\partial_r A) = \frac{2}{r}e^{-2B}\partial_r B \implies \partial_r B = \frac{2}{r}e^{2B}\partial_r(e^{-2B}\partial_r A) \quad (3.16)$$

Igualando ambas ecuaciones y utilizando que  $\partial_r A = -\partial_r B$  resulta una ecuación diferencial ordinaria:

$$r\partial_r(1 - e^{-2B}) = 1 - e^{-2B} \quad (3.17)$$

Denotando  $f(r) = 1 - e^{-2B}$  se tiene que:  $r\partial_r(f(r)) = f(r) \equiv rf' = f$ . Operando entonces:

$$\frac{df}{f} = \frac{dr}{r} \implies f = \frac{2C}{r} \quad (3.18)$$

Con lo que se obtienen las soluciones buscadas:

$$e^{-2B} = e^{2A} = 1 - \frac{2C}{r} \quad (3.19)$$

Donde  $C$  es una constante de integración que ha de estar ligada a la masa del objeto  $M$ . Ahora se puede reescribir la métrica (3.20) sustituyendo los valores de  $e^{2A}$  y  $e^{-2B}$  obteniendo así la *métrica de Schwarzschild*:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2C}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.20)$$

Esta métrica describe el campo gravitatorio fuera de una esfera masiva, sin carga eléctrica y sin momento angular. Para hallar el valor de la constante de integración  $C$  será de utilidad el límite a bajas velocidades de las geodésicas<sup>2</sup> que arroja una relación entre el potencial gravitatorio y la entrada  $g_{tt}$  de la métrica:

$$g_{tt} = \eta_{tt} - 2\phi = -(c^2 + 2\phi) \quad (3.21)$$

$$c^2 e^{2A} = c^2 + 2\phi \implies \phi = \frac{c^2}{2} [e^{2A} - 1] \quad (3.22)$$

Lo cual, sustituyendo el potencial gravitatorio según la expresión dada en (2.1), permite hallar una relación entre la constante de integración y la masa  $M$ :

$$C = \frac{MG_N}{c^2} \implies M = \frac{c^2}{CG_N} \quad (3.23)$$

Volviendo ahora sobre la nueva expresión de la entrada tiempo-tiempo de la métrica:

$$g_{tt} = -c^2 \left(1 - \frac{2MG_N}{rc^2}\right) \quad (3.24)$$

---

<sup>2</sup>Desarrollo hecho en el apéndice B.2

Es sabido que esta componente representa la dilatación o contracción temporal provocada por la presencia de un campo gravitatorio. Un valor de esta componente superior o inferior a 1 supondrá una dilatación o contracción en el tiempo, siempre desde el punto de vista de un observador externo al campo. De esta forma es posible calcular el punto en el cual el valor de dicha componente se hace cero, es decir, calcular donde teóricamente el tiempo sufre una contracción tan grande que parece pararse <sup>3</sup>. Este fenómeno de aparente detención temporal según un observador asintótico representa la altísima dilatación temporal sufrida por el objeto que se encuentra en el campo gravitatorio, para el cual el tiempo continúa transcurriendo como de costumbre.

Es sencillo obtener el cero de esta función, dado por:

$$r_H = \frac{2MG_N}{c^2} \quad (3.25)$$

El denominado radio del *horizonte de sucesos*, también conocido como el *radio de Schwarzschild*, que se corresponde con el radio de un agujero negro de masa  $M$ . Según el *Teorema de unicidad de agujeros negros* [1], enunciado por *W. Israel*, la única solución a las ecuaciones de campo de Einstein un espacio-tiempo vacío y estático es el agujero negro de Schwarzschild. Este resultado tiene como consecuencia que, si se tiene una estrella de masa  $M_*$  y de radio  $R_*$  y satisface que  $R_* < r_H$ , entonces la estrella es, en realidad, un agujero negro de Schwarzschild. Se define por tanto el radio de Schwarzschild de una estrella de masa  $M$  como el radio por debajo del cual una estrella se convierte en un agujero negro. Con esto, una vez definido  $r_H$ , se encuentra que la métrica (3.20) se puede escribir en función del mismo como:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \quad (3.26)$$

Considerando ahora esta métrica, supóngase la presencia de un fotón en una órbita estable de radio  $r$  alrededor de la singularidad, lo que implica  $dr = 0$ . Dado que se trata de un fotón que viaja a la velocidad de la luz se tiene que  $ds = 0$  y adicionalmente, debido a la simetría esférica, para cualquier órbita considerada del fotón siempre es posible realizar un cambio de coordenadas fijando la coordenada angular  $\theta = 0$ , con lo que  $d\theta = 0$ . Con esto, la igualdad dada por la métrica anterior se reduce a:

$$\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) c^2 dt^2 = r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \quad (3.27)$$

---

<sup>3</sup>Siempre desde el marco de referencia de un observador asintótico: aquel que se encuentra a una distancia asintóticamente infinita y que por tanto no está bajo los efectos del campo gravitatorio

Luego se tiene por un lado:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{c}{r \operatorname{sen}\theta} \sqrt{1 - \frac{r_H}{r}} \quad (3.28)$$

Por otro lado, se obtendrá la derivada de la coordenada  $\phi$  con respecto al tiempo propio considerando la ecuación de las geodésicas (B.1) y tomando la parte radial, dada por:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^r \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3.29)$$

Calculando los símbolos de Christoffel pertinentes y teniendo en cuenta que con las simplificaciones asumidas previamente, se tiene que  $\frac{dr}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = 0$ , con lo que se deduce:

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{c^2 r_H}{2r^3 \operatorname{sen}^2\theta} \quad (3.30)$$

Igualando esta ecuación con el cuadrado de (3.28) y simplificando términos, resulta:

$$R_\gamma = \frac{3r_H}{2} \quad (3.31)$$

Con lo que se concluye que existe una distancia del centro del agujero negro igual a 1.5 veces el radio de Schwarzschild en la cual es posible tener fotones viajando en órbitas circulares estables alrededor del mismo. Esto define lo que se conoce como *esfera de fotones*, un límite inferior a partir del cual no es posible tener fotones en órbitas circulares estables, ya que a partir de ella la el intenso campo gravitatorio presente provoca su caída hacia la singularidad. Para tener una representación visual aproximada se ha introducido la imagen 3.1 que representa el esquema teórico de un agujero negro de Schwarzschild, donde la singularidad es representada por una pequeña esfera interior, rodeada por otra esfera que denota el horizonte de sucesos a una distancia igual al radio de Schwarzschild, y en última instancia se tiene la esfera de fotones a  $1.5 r_H$  del centro del agujero negro.

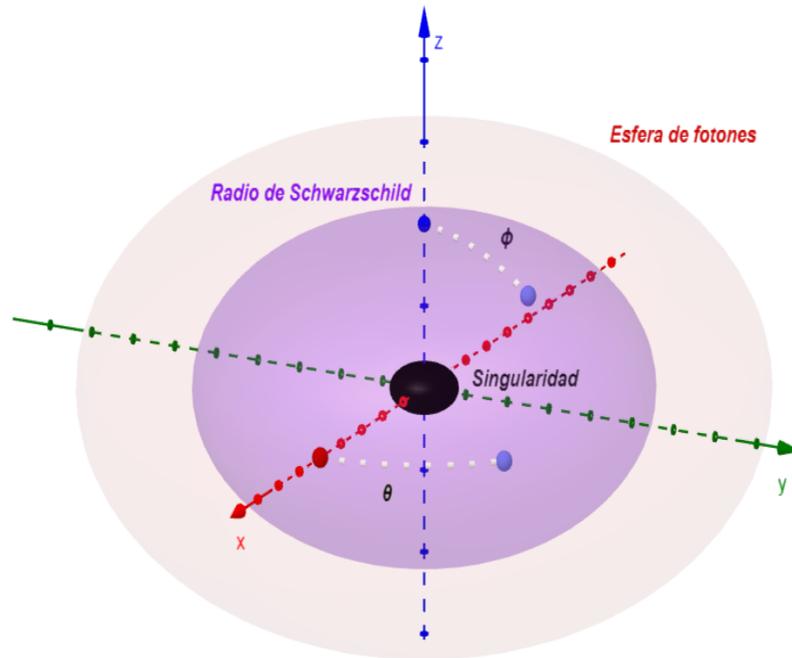


Figura 3.1: Esquema del agujero negro de Schwarzschild, producción propia con Geogebra.

Adicionalmente, aprovechando de nuevo el concepto de radio de Schwarzschild de una estrella, es posible definir una nueva propiedad para una estrella, la *compacidad*, definida como:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_H}{R_\star} \quad (3.32)$$

Que da una idea de cuán cercana o distante se encuentra la estrella en cuestión de ser un agujero negro, tomando valores en  $(0, \frac{1}{2})$  y siendo mayor cuánto más cercano sea el valor a  $\frac{1}{2}$ .

A modo de ejemplo, considerando la masa y radio solar<sup>4</sup>  $M_\odot = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$  y  $R_\odot = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$ , se muestran, en la tabla siguiente, los valores de compacidad de una lista de estrellas, indicando también el tipo estelar al que pertenecen<sup>5</sup>:

<sup>4</sup>Los valores de masa y radio solar han sido tomados de: masa de [2] y radio de [3].

<sup>5</sup>La ausencia de las incertidumbres en los valores de masa, radio y compacidad se deben a que el objetivo de la tabla es simplemente mostrar algunos ejemplos sobre los órdenes de magnitud de las compacidades de cada tipo estelar, no realizar un estudio exhaustivo de los mismos.

Nombre	Tipo estelar	Masa ( $M_{\odot}$ )	Radio ( $R_{\odot}$ )	$\mathcal{C}$
El Sol	Estrella de Secuencia Principal	1,0	1,0	$2,12 \times 10^{-6}$
Sirio B	Enana Blanca	1,0	$8,4 \times 10^{-3}$	$2,66 \times 10^{-3}$
Aldebarán	Gigante Roja	1,6	44	$7,72 \times 10^{-8}$
Beltegeuse	Supergigante Roja	19,0	640	$6,30 \times 10^{-8}$
Rigel	Supergigante azul	21,0	79	$5,65 \times 10^{-7}$
PSR J0348+0432	Estrella de neutrones	2,0	$1,8 \times 10^{-5}$	0,24
Delta Cephei	Cefeida	4,5	45	$2,12 \times 10^{-7}$
Proxima Centauri	Enana Roja	$1,2 \times 10^{-1}$	$1,5 \times 10^{-1}$	$1,70 \times 10^{-6}$

Cuadro 3.1: Tabla con la compacidad de distintas estrellas especificando su clasificación estelar

Se listan a continuación las referencias de donde se han tomado los radios y masas de las estrellas recogidos en la tabla 3.1. La innegable longitud de las fuentes utilizadas se debe principalmente a que misiones actuales de carácter astrofísico, como GAIA dirigida por la *Agencia Espacial Europea*, se utilizan para medir magnitudes observables de estrellas. Sin embargo la masa y el radio de las mismas no son cantidades observables y, por tanto, han de ser inferidos teóricamente por lo que para hallar dichos valores relativos a estrella suele ser necesario consultar un artículo especializado. Con esto se sigue la enumeración: la masa de Sirio B de [4] y su radio de [5], la masa de Aldebarán de [6] y radio de [7], la masa de Beltegeuse en [8] y su radio de [9], la masa de Rigel de [10] y su radio de [11], la masa de PSR J0348+0432de [12] y su radio de [13], ambas magnitudes de Delta Cephei de [14] y finalmente ambas magnitudes de Proxima Centauri de [15].

A partir de los datos dados en la tabla anterior, para una mejor comprensión y posterior análisis de los mismos se considera la siguiente representación gráfica:

## Compacidad vs clasificación estelar

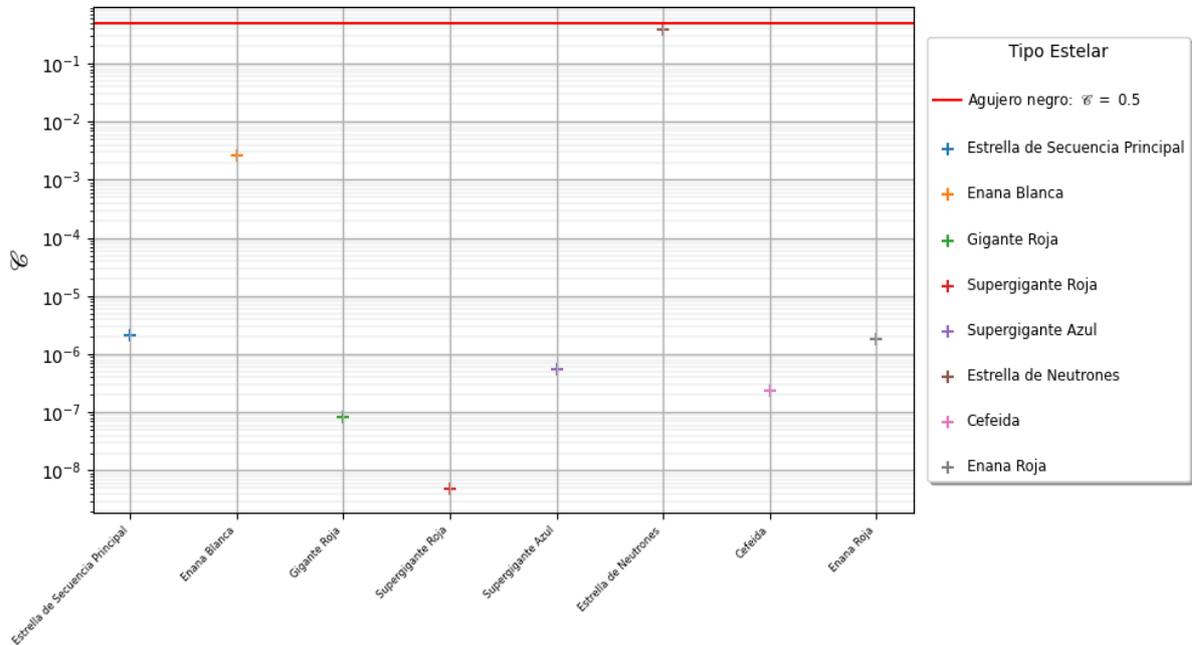


Figura 3.2: Compacidad de estrellas pertenecientes a distintos tipos estelares. Producción propia a partir de los datos de la tabla 3.1

Se observa que el valor más cercano a la cota superior <sup>6</sup>, y por tanto el tipo de estrella más cercano al colapso gravitacional, es el relativo a la estrella de neutrones PSR J0348+0432. Esto concuerda con la teoría actual que establece que la creación de agujeros negros se da tras Supernovas de tipo *II* cuando la masa total del núcleo remanente tras la explosión es superior a  $2,3M_{\odot}$ , límite denominado *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* teorizado por primera vez en [16]. Por otro lado la estrella con menor compacidad es la supergigante roja Beltegeuse, principalmente debido a su inmenso radio, de casi 900 veces el radio solar, de donde se deduce la razón del nombre asociado a su tipo estelar. Como última observación cabe destacar que el valor de la masa de la enana blanca Sirio B es menor de  $1,44M_{\odot}$ , respetando por tanto el conocido como *límite de Chandrasekhar* enunciado por S. Chandrasekhar en 1931 y sobre el que se puede obtener más información en la referencia [17].

<sup>6</sup>Reflejado por la línea horizontal roja

### 3.2. Solución interior: Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Se obtendrá una ecuación de estructura para objetos masivos que presentan simetría esférica compuestos por un material isótropo en el marco de la Relatividad General. Se estudiarán soluciones particulares de la ecuación TOV como son las *estrellas de Buchdahl* o las estrellas formadas por materia conforme. Finalmente se derivará la *ecuación de Tolman* y se resolverá alguna de sus soluciones particulares.

Se hará a continuación la derivación de la ecuación TOV siguiendo el método presente en la referencia [18]. De acuerdo con el *Teorema de Birkhoff* y el *Teorema de unicidad* de *W. Israel*, dados en [19, 1] respectivamente, el agujero negro de Schwarzschild es la solución más general que describe la geometría espacio-temporal en el exterior de una estrella estática que presenta simetría esférica. Sin embargo, para encontrar una ecuación de estructura en el interior estelar, se debe considerar una métrica más general:

$$ds^2 = -c^2 e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N m(r)}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.33)$$

Se supone el interior estelar compuesto de un fluido perfecto, por tanto el tensor de energía-momento viene dado por la expresión (3.7). El método a seguir será, a partir de la métrica anterior y del tensor de energía momento, resolver la igualdad (3.4) y obtener la ecuación de estructura de la estrella.

Las entradas del tensor de Ricci<sup>7</sup> para la métrica del interior estelar es:

$$\begin{cases} R_{tt} = e^{2\Phi} \left[ (\Phi'' + (\Phi')^2) \left( c^2 - \frac{2G_N m}{r} \right) + \Phi' \left( \frac{2rc^2 - 3G_N m - G_N r m'}{r^2} \right) \right] \\ R_{rr} = \left( 1 - \frac{2G_N m}{rc^2} \right)^{-1} \left[ \frac{G_N (2 + r\Phi')(r m' - m)}{c^2 r^3} \right] - \Phi'' - (\Phi')^2 \\ R_{\theta\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta} R_{\phi\phi} = \Phi' \left( \frac{2G_N m}{c^2} - r \right) + \frac{G_N m}{c^2 r} + \frac{G_N m'}{c^2} \end{cases} \quad (3.34)$$

Luego el escalar de curvatura:

$$R = 2 \left[ \frac{G_N m'}{c^2 r^2} + \frac{\Phi'}{c^2 r^2} (G_N r m' + 3G_N m - 2rc^2) - (\Phi'' + (\Phi')^2) \left( 1 - \frac{2G_N m}{rc^2} \right) \right] \quad (3.35)$$

Ahora ya se está en disposición de obtener las entradas del tensor de Einstein:

$$G_{tt} = \frac{2G_N m'}{r^2} e^{2\Phi} \quad ; \quad G_{rr} = \frac{2}{r} \left[ \Phi' - \frac{G_N m}{c^2 - \frac{2G_N m}{r}} \right] \quad (3.36)$$

<sup>7</sup>Cálculos explícitos incluidos en el apéndice B.3

Recordando que las entradas del tensor  $T$  son las dadas en (3.8), se obtienen dos ecuaciones diferenciales:

$$8\rho\pi G_N e^{2\Phi} = \frac{2G_N m'}{r^2} e^{2\Phi} \implies m' = 4\rho\pi r^2 \quad (3.37)$$

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \left[ \Phi' - \frac{G_N m}{c^2 - \frac{2G_N m}{r}} \right] \implies \Phi' = \frac{G_N m + \frac{4\pi G_N P r^3}{c^2}}{r \left( r - \frac{2G_N m}{c^2} \right)} \quad (3.38)$$

Finalmente, para encontrar la ecuación se necesita obtener una ecuación diferencial que involucre la presión. Para ello se utilizará la *Identidad de Bianchi*/conservación de la energía, que implica que la divergencia del tensor de Einstein es nula, luego se tiene que también ha de ser nula la divergencia del tensor de energía-momento:

$$0 = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\nu}{}^\mu T^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\nu}{}^\nu T^{\mu\rho} \quad (3.39)$$

Notando que en los casos  $\mu = t$  y  $\mu = i$  la identidad se satisface trivialmente, y considerando  $\mu = r$  para encontrar la variación de la presión respecto del radio:

$$0 = \partial_r T^{r\nu} + \Gamma_{\rho\nu}{}^r T^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\nu}{}^\nu T^{r\rho} \quad (3.40)$$

Se llega a:

$$0 = \left( 1 - \frac{2G_N m}{rc^2} \right)^{-1} (P' + c^2 \rho \Phi' + P \Phi') \implies P' = -\Phi' (P + c^2 \rho) \quad (3.41)$$

Y se obtiene, finalmente la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G_N}{r^2} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \left( m + \frac{4\pi r^3 P}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{2G_N m}{rc^2} \right)^{-1} \quad (3.42)$$

Donde considerando el límite no relativista, es decir:  $c \rightarrow \infty$ , se recupera el resultado obtenido trabajando con gravedad Newtoniana (2.6).

### 3.2.1. Estrellas de Buchdahl. Teorema de Buchdahl

El término *Estrellas de Buchdahl* se utiliza para referirse a aquellas estrellas que presentan una densidad de masa constante  $\rho = \rho_0$ . Pese a que fue Schwarzschild el primero en resolver su métrica para el interior estelar, tomando para ello el caso de densidad de masa constante, se denotan dichas estrellas por el nombre de Buchdahl ya que fue *W. Buchdahl* quien partió de esta suposición para derivar su conocido Teorema de Buchdahl. La hipótesis de tener una estrella con densidad de masa constante es bien sabido que es una aproximación bastante poco realista, aunque permite no tener la

necesidad de especificar una ecuación de estado que rijan el interior estelar.

Partiendo de la asunción hecha por Schwarzschild y utilizando la relación (3.37) entre la masa de la estrella y la distancia radial hasta el centro de la misma, obtenida en la derivación de la ecuación TOV, se obtiene fácilmente una expresión de la masa estelar:

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_0}{3}r^3 \quad (3.43)$$

Para continuar se deberá resolver la ya mencionada ecuación TOV. Para ello se considerarán los siguientes cambios de variable, los cuales se simplificarán en gran medida los cálculos posteriores:

$$u = \frac{P}{\rho_0 c^2} \quad , \quad \alpha = \frac{8\pi\rho_0 G_N}{3c^2} = \frac{\kappa\rho_0 c^2}{3} \quad (3.44)$$

De donde claramente  $P' = \rho_0 c^2 u'$ . Trabajando con (3.42), se puede escribir:

$$u' = -\frac{1}{2}(1+u)(1+3u)\frac{\alpha r}{1-\alpha r^2} \quad (3.45)$$

Esta ecuación diferencial se resuelve fácilmente, para dar lugar a:

$$\frac{1+3u}{1+u} = \mathcal{B}\sqrt{1-\alpha r^2} \quad (3.46)$$

Siendo  $\mathcal{B}$  una constante de integración, cuyo valor puede ser fijado suponiendo que la presión en el centro de la estrella es  $P(r=0) = P_c$ . De esta forma se obtiene que  $\mathcal{B} = \frac{1+3u_c}{1+u_c}$  y por tanto la expresión anterior resulta:

$$\frac{1+3u}{1+u} = \frac{1+3u_c}{1+u_c}\sqrt{1-\alpha r^2} \quad (3.47)$$

Donde se ha introducido la notación  $u_c = P_c/(\rho_0 c^2)$  y se sigue que en esta aproximación con mecánica relativista la presión en el centro de la estrella no crece indefinidamente con el radio estelar, mientras que en mecánica Newtoniana se encontraba una divergencia para dicho valor, hallado en la sección 2.1.1. Exigiendo ahora la continuidad de la presión en el límite entre el interior estelar y el espacio exterior vacío, se introduce la restricción  $P(r=R_\star) = 0$  a partir de la cual se halla la siguiente expresión para el radio estelar:

$$\alpha R_\star^2 = \frac{4u_c(1+2u_c)}{(1+3u_c)^2} \quad (3.48)$$

Que permite el cálculo del radio de una estrella a partir de  $u_c$ , es decir, un término proporcional al cociente entre la presión en el centro de la estrella y la densidad constante de masa  $\rho_0$ . Luego el valor máximo de  $R_\star$  se obtiene en el límite  $\frac{P_c}{\rho_0} \rightarrow \infty \implies P_c \rightarrow \infty$ . Sin embargo, sabemos que

este límite de presión infinita en el núcleo estelar está relacionado con la posibilidad de que la estrella en cuestión se transforme en un agujero negro. Para estudiar si en este caso el fenómeno es posible recuérdese la definición de la compacidad de una estrella dada en (3.32), y notar que:

$$\alpha = \frac{8\pi\rho_0 G_N}{3c^2} = \frac{2G_N\rho_0}{c^2} \frac{4\pi}{3} \frac{R_\star^3}{R_\star^3} = \frac{2G_N\rho_0}{c^2} \frac{V_\star}{R_\star^3} = \frac{2G_N M}{c^2 R_\star^3} = \frac{r_H}{R_\star^3} \quad (3.49)$$

Luego:

$$\frac{2u_c(1+2u_c)}{(1+3u_c)^2} = \frac{1}{2}\alpha R_\star^2 = \frac{r_H}{2R_\star} = \mathcal{C} \quad (3.50)$$

Así, tomando el límite expuesto anteriormente:

$$\mathcal{C}_{\text{máx}} = \lim_{P_c \rightarrow \infty} \mathcal{C} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2} \quad (3.51)$$

Se concluye por tanto que una estrella de Buchdahl nunca podrá convertirse en un agujero negro. De hecho, como fue expuesto por Buchdahl en el conocido como *Teorema de Buchdahl* en la referencia [20], el límite  $\mathcal{C} \leq \frac{4}{9}$  resulta ser una desigualdad estricta en el caso de tratar con cualquier estrella estática, isótropa que presente simetría esférica, y esta condición por tanto establece que no pueden existir estrellas<sup>8</sup> tales que:

$$R_\star > \frac{9}{4} \frac{G_N M_\star}{c^2} \quad (3.52)$$

Del mismo modo, considerando la igualdad estricta dada por el teorema, despejando la masa  $M_\star$  se encuentra una cota superior para la misma dada por:

$$M_\star < \frac{4}{9} \frac{R_\star c^2}{G_N} \quad (3.53)$$

Ahora, recordando la definición de compacidad y de la esfera de fotones, se puede definir una nueva compacidad que haga referencia a la accesibilidad a dicha esfera de fotones. De esta forma, para una estrella se puede expresar la compacidad en función del radio de la esfera de fotones como sigue:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{acc} = \frac{1}{3} \frac{R_\gamma}{R_\star} \leq \frac{4}{9} \quad (3.54)$$

Donde  $\mathcal{C}_{acc}$  está definida como la *compacidad accesible* de la estrella, englobando los valores de compacidad para los cuales la esfera de fotones se encuentra por encima de la superficie de la estrella. Pero teniendo en cuenta que la esfera de fotones no es más que una órbita estable de los mismos, claramente para que estos fotones sean accesibles desde el exterior de la estrella, se debe cumplir:

---

<sup>8</sup>el límite dado por el Teorema de Buchdahl es general para toda estrella que satisfaga las condiciones previamente mencionadas.

$R_\gamma > R_\star$ . En el caso que la compacidad de la estrella toma su valor máximo  $\mathcal{C} \leq 4/9$ , se tiene que  $r_H \leq 8R_\star/9$ , de donde claramente se deduce

$$R_\gamma = \frac{4}{3}R_\star > R_\star \quad (3.55)$$

Con lo que la órbita de los fotones se encuentra por encima de la superficie de la estrella, y por tanto la esfera de fotones será accesible. Por otro lado, si la compacidad fuese  $\mathcal{C} = 1/3$ , el radio de Schwarzschild resulta  $r_H = 2R_\star/3$ , con lo que se obtiene:

$$R_\gamma = R_\star \quad (3.56)$$

Con lo que se deduce que en este caso, al estar la esfera de fotones a la altura de la superficie estelar, la esfera de fotones no será accesible. Con todo esto se concluye que la esfera de fotones siempre será accesible para toda estrella con una compacidad  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{obs} \in (\frac{1}{3}, \frac{4}{9}]$ . Considerando los valores de compacidad para las estrellas recogidas en la tabla 3.1 se deduce que dicho fenómeno no estará presente en ninguna de ellas, ya que ni siquiera la estrella de neutrones elegida consigue presentar una compacidad mayor del límite  $1/3$ .

La hipótesis de Schwarzschild sobre la presencia de una estrella con densidad de masa constante no deja de ser una idealización, ya que dicha magnitud suele ser descrita por una función con dependencia radial comúnmente denominada como el *perfil de densidad de una estrella*, el cual nunca es constante, con lo que no se han observado estrellas de este tipo presentes en la naturaleza. Sin embargo, la importancia del resultado de Buchdahl radica en probar la existencia de un límite superior para la compacidad de una estrella antes de colapsar gravitacionalmente, teniendo en cuenta todos los efectos relativistas asociados de forma que la existencia de este límite puede ser extendido a otro tipo de estrellas con propiedades más generales.

### 3.2.2. Estrellas de materia conforme

En este apartado se resolverá uno de los ejercicios presentes en el capítulo 10 de la referencia [18], en concreto será el ejercicio 16 planteado en la página 279. Antes de comenzar es importante clarificar que se empleará el término *estrellas conformes* para referirse a aquellas estrellas hechas de materia conforme, englobando este último concepto a todo tipo de materia cuyo tensor de energía momento tenga traza nula  $T = 0$ . Además, en general, para este tipo de estrellas es conocida una ecuación de estado la cual será la hipótesis de la que se partirá para la resolución de la ecuación TOV. En este caso

la ecuación de estado será:

$$3P = \rho c^2 \quad (3.57)$$

Un modelo estelar construido a partir de esta ecuación de estado, debido a restricciones dimensionales, ha de satisfacer dos relaciones de proporcionalidad: la masa debe ser proporcional al radio  $m \propto r$  y la densidad debe ser inversamente proporcional al cuadrado del mismo  $\rho \propto r^{-2}$ . Considerando que la masa en función del radio es:

$$m(r) = \mu c^2 r \quad (3.58)$$

Siendo  $\mu$  una constante, se halla una expresión para la densidad que satisface la condición supuesta, utilizando (3.43) con  $\rho = \rho(r) \neq \rho_0$ :

$$\rho(r) = \frac{\mu c^2}{4\pi r^2} \quad (3.59)$$

En este caso, ya que se deduce la relación directamente proporcional entre la presión y la densidad de masa de la ecuación de estado 3.57, se tiene que tanto la densidad de la estrella como la presión ejercida por la misma decrece con  $r$  hasta su valor máximo  $R_*$ , pero nunca se anula. Esto no significa más que la materia conforme es un tipo de materia con comportamiento gaseoso, de forma que la densidad y la presión decaen con el radio hasta valores no nulos ya que el fluido que compone la estrella busca ocupar la mayor cantidad de espacio posible. A partir de estas hipótesis y utilizando (3.42), se encuentra el valor de la constante de proporcionalidad:

$$\mu = \frac{3}{14G_N} \quad (3.60)$$

Analizando la física subyacente a las condiciones impuestas en este apartado, al trabajar con la ecuación de estado (3.57) se trataría de una estrella para la cual no existe un radio  $R_*$  en el que la presión se anule. Esto significa que nunca se llegaría a poder imponer la condición de continuidad de la presión en el borde estelar y, por tanto, no es posible que exista una estrella hecha de materia conforme de tamaño finito.

Es evidente además, como se prueba a continuación, que este mismo argumento se puede repetir siempre que se tenga una estrella que presente una ecuación de estado de tipo lineal:

$$P = \alpha \rho c^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.61)$$

Razonando de la misma forma que como hecho anteriormente y considerando las mismas parametrizaciones dadas por (3.58) y (3.59) se puede obtener, por medio de la ecuación TOV:

$$\mu = \frac{2\alpha}{G_N(\alpha^2 + 6\alpha + 1)} \quad (3.62)$$

Claramente para recuperar (3.60) basta tomar  $\alpha = 1/3$ .

### 3.2.3. Ecuación de Tolman. Soluciones de Tolman: I, III y IV.

En 1939 *Richard C. Tolman* a partir de observaciones sobre el tensor de energía-momento de un fluido perfecto e isótropo, de iguales características que el modelado en (3.8), derivó en [21] lo que hoy en día se conoce como la *Ecuación de Tolman*. Esta ecuación permite, utilizando las observaciones previamente mencionadas, simplificar las ecuaciones de campo de Einstein y resolverlas de forma exacta, soluciones que reciben el nombre de *Solución de Tolman roma-numérico*.

La primera observación que hizo notar Tolman fue que en (3.8) se tiene  $T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = T_r^r$ , lo que mediante las ecuaciones de Einstein (3.1) implica  $G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = G_r^r$ . Esta condición sobre el tensor de energía-momento tiene un claro carácter geométrico y lo que refleja es que, una estrella conformada por un fluido que presente esta condición de isotropía, es decir una *estrella isótropa*, posee la misma distribución de energía, momento y presión en todas las direcciones espaciales. Esta condición se traslada como se ha mencionado al tensor de Einstein, lo que significa que la solución a las ecuaciones también ha de presentar dicha característica.

Se pueden aprovechar ahora estas relaciones e involucrar los distintos términos de la métrica (3.5). Efectivamente, por un lado se tiene que  $P = T_r^r = e^{-2B}T_{rr}$  y por otro lado se conoce que  $P = T_i^i \ \forall i \in \{\theta, \phi\}$  luego es válida la expresión  $2P = T = r^{-2}h^{ij}T_{ij}$ . Esto permite obtener la siguiente relación:

$$2r^2e^{-2B}T_{rr} = h^{ij}T_{ij} \quad (3.63)$$

Que, por las ecuaciones de Einstein:

$$2r^2e^{-2B}G_{rr} = h^{ij}G_{ij} \quad (3.64)$$

Por definición del tensor de Einstein (3.2):

$$2r^2e^{-2B} \left[ R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R \right] = h^{ij} \left[ R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \right] \quad (3.65)$$

Considerando las entradas de la métrica  $g_{rr} = e^{2B}$  y  $g_{ij} = r^2h_{ij}$  se obtiene:

$$2r^2e^{-2B}R_{rr} = h^{ij}R_{ij} \quad (3.66)$$

Con lo cual resulta ser una observación muy ventajosa, al llegar a una expresión simplificada en la que se ha anulado el escalar de curvatura  $R$ . A partir de la expresión anterior, multiplicando ambos

miembros por  $r$  y considerando las entradas del tensor de Ricci dadas en (3.11), se pueden hacer arreglos en la expresión de forma que se obtiene la conocida *Ecuación de Tolman*:

$$0 = \partial_r \left( \frac{e^{-2B} - 1}{r^2} \right) + \partial_r \left( \frac{e^{-2B} \partial_r A}{r} \right) + e^{-2(A+B)} \partial_r \left( \frac{e^{2A} \partial_r A}{r} \right) \quad (3.67)$$

Llegado a este punto, es razonable introducir el siguiente comentario acerca de la constante cosmológica. En ningún momento en este trabajo, cuyo objetivo principal es la descripción de modelos estelares bajo simetría esférica, se ha trabajado considerando la constante cosmológica  $\Lambda$  y, por tanto, se han considerado las ecuaciones de Einstein como las dadas por (3.1). La razón detrás de la omisión de la constante cosmológica es que no juega un papel importante al estudiar, por ejemplo, las condiciones de contorno del borde estelar las cuales son dominadas por la fuerza gravitatoria y la presión interna, además de simplificar ampliamente las soluciones y los cálculos hechos en el proceso. Teniendo ahora en cuenta esta constante, las ecuaciones de Einstein resultan ser<sup>9</sup>:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.68)$$

Lo cual visiblemente se reduce a  $G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$  en casos en los que  $T_{\mu\nu} = 0$ , es decir, cuando no hay fuente alguna de gravedad y es esta misma razón lo que da verdadera importancia al concepto de la constante cosmológica, ya que permite que haya curvatura espacio-temporal pese a no haber una fuente de la misma.

Se hará a continuación una breve introducción al concepto de la constante cosmológica con el fin de dejar clara su importancia en cuanto a su propia presencia en las ecuaciones de Einstein. El primero en introducirla fue mismamente Einstein en [22] como una modificación a sus ecuaciones de campo originales de forma que se pudiese obtener como solución un universo estático, como se creía en la época, introduciendo un efecto de fuerza repulsiva que compensase las fuerzas gravitatorias presentes. Esta creencia cambió en la década de 1920 cuando *E. Hubble* en [23] presentó, a partir del estudio de las distancias entre galaxias, que las galaxias más lejanas se alejaban entre sí a velocidades mayores que las más cercanas, lo que resultaba una prueba empírica de la expansión del universo. Con esto se había probado que el universo no era realmente estático como se venía pensando, con lo que Einstein reconoció su error y se dejó durante décadas de considerar dicha constante, tomando  $\Lambda = 0$ .

No fue hasta finales de la década de 1990 cuando se demostró gracias al trabajo conjunto de dos grupos de investigación, el *Supernova Cosmology Project* y el *High-Z Supernova*, con sus estudios

---

<sup>9</sup>Siendo  $k$  la constante definida en (C.15)

[24, 25] sobre el corrimiento al rojo presente en supernovas, la expansión acelerada del universo. Este hallazgo volvió a dar sentido a la posible presencia de  $\Lambda$  en las ecuaciones de Einstein, en este caso con un valor positivo. Sin entrar en mucho más detalle, dependiendo del valor considerado para la constante cosmológica, se dice estar trabajando en un universo de *De Sitter* si se considera  $\Lambda > 0$  o en un universo *anti-De Sitter* si  $\Lambda < 0$ , todo ello debido al modelo cosmológico presentado por *W. de Sitter* en su artículo [26] en 1917.

Una vez visto esto, partiendo de (3.68) y utilizando la condición de isotropía (3.64), se cancela la constante cosmológica y se recupera la ecuación de Tolman, lo que significa que de esta ecuación también se obtienen estrellas simétricamente esféricas al considerar  $\Lambda \neq 0$ .

Dada una solución a la ecuación de Tolman, utilizando los valores de las entradas de  $T_\mu^\mu$ , vistas en el primer párrafo de esta sección, y considerando en las 'nuevas' ecuaciones de Einstein (3.68) el hecho  $\Lambda = 0$  se encuentran las siguientes dos relaciones con la presión  $P$  y la densidad  $\rho$ <sup>10</sup>:

$$\kappa\rho = \frac{1}{r^2} \partial_r [r(1 - e^{-2B})] \quad (3.69)$$

$$\kappa P = \frac{1}{r^2} (e^{-2B} - 1) + \frac{1}{r} e^{-2A-2B} \partial_r e^{2A} \quad (3.70)$$

Y, considerando  $P_c$  la presión en el centro de la estrella, de la condición  $P(r = 0) = \kappa P_c$ .

En el artículo original [21] Tolman estudió 8 casos en los que su ecuación era resoluble analíticamente y que por tanto daban lugar a soluciones exactas, que anteriormente nombramos como soluciones de Tolman roma-numérico. En este caso se resolverán los casos I, III y IV, considerados de mayor importancia, por lo que se deja como posible extensión a este trabajo el tratamiento y explicación de los casos restantes.

### Solución de Tolman I

Esta solución se basa en la hipótesis  $A = 0$ , que es equivalente a eliminar de la métrica (3.5) el coeficiente tiempo-tiempo, por lo que en este caso se considera que no hay presente ni dilatación ni contracción temporal. Imponiendo la hipótesis en (3.67) se obtiene:

$$e^{-2B} = 1 + \Psi r^2 \quad (3.71)$$

---

<sup>10</sup>Se considerarán en los dos casos particulares que siguen que el valor de la velocidad de la luz es  $c = 1$ . Esto se argumenta puesto que lo interesante es encontrar el tipo de dependencias que siguen la densidad (de masa o de energía, ya que ahora son equivalentes) de la estrella y la presión a lo largo de la misma.

Donde  $\Psi$  es una constante de integración. Ahora considerando las 'nuevas' ecuaciones de Einstein (3.68), se encuentran las siguientes dos igualdades:

$$\begin{cases} \kappa\rho = -\Lambda - 3\Psi \\ \kappa P = \Lambda + \Psi \end{cases} \quad (3.72)$$

Imponiendo condiciones naturales para exigir que efectivamente se trate de un fluido, como que la presión y la densidad de masa han de ser positivas, se concluye que la constante de integración ha de ser negativa  $\Psi < 0$ , mientras que el valor de la constante cosmológica ha de ser mayor que cero  $\Lambda > 0$ , es decir, de tipo De Sitter.

Por otro lado, considerando la constante de integración como  $\Psi = -1/R^2$ , se encuentra la relación:

$$-\Psi < \Lambda < -3\Psi \implies \frac{1}{R^2} < \Lambda < \frac{3}{R^2} \quad (3.73)$$

Con lo que las expresiones de densidad de masa y presión (3.72) se convierten en:

$$\begin{cases} \kappa\rho = \frac{3}{R^2} - \Lambda \\ \kappa P = \Lambda - \frac{1}{R^2} \end{cases} \quad (3.74)$$

Con lo que se concluye que ambas son constantes. Se puede ver además que, al hacer tender a infinito el radio  $R$ , resultarían las siguientes igualdades sobre la presión y densidad:  $P = \Lambda/\kappa = -\rho$ , siendo  $\Lambda > 0$  de tipo De Sitter. Esto podría dar lugar a densidades negativas lo cual es imposible en cualquier tipo de materia ordinaria, sin embargo, aplicando el límite a las cotas de  $\Lambda$  dadas de 3.73 se tiene claramente que  $\Lambda \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  con lo que se recupera la consistencia al tener presión y densidad nulas, es decir espacio vacío.

Finalmente notar que, tras la imposición anterior de la constante de integración, la métrica resulta:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr^2 + r^2 dS^2 \quad (3.75)$$

Que, tras una redefinición de la coordenada radial como  $r = R \operatorname{sen}\theta$ :

$$ds^2 = -dt^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2(\theta) dS^2 \quad (3.76)$$

$$ds^2 = -dt^2 + R^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2(\theta) dS^2) \quad (3.77)$$

O, equivalentemente:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2 dS^3 \quad (3.78)$$

Siendo  $dS^3$  la métrica de una 3-esfera. La métrica resultante describe el espacio-tiempo como  $\mathbb{R} \times S_R^3$  y recibe el nombre de *Universo de Einstein*. Esto se debe a que fue hallada por Einstein buscando soluciones cosmológicas estáticas y simétricamente esféricas para el mismo.

### Solución de Tolman III

En este caso la asunción hecha se basa en tomar que la entrada radial-radial de la métrica tiene la forma que sigue:

$$e^{-2B} = 1 + \aleph r^2 \quad (3.79)$$

Donde  $\aleph$  es una constante. Introduciendo este ansatz en la ecuación de Tolman (3.67) claramente se tiene que el primer término se anula. Además, utilizando la ecuación (3.69) obtenida para la densidad de energía, se determina el valor de la constante  $\aleph$  como:

$$\aleph = -\frac{\kappa\rho}{3} \quad (3.80)$$

De donde trivialmente se deduce que la densidad de la estrella en la solución de Tolman III es constante, por lo que se deberían recuperar los resultados de la sección 3.2.1, luego por analogía se utilizará la notación  $\rho = \rho_0$ .

Recuperando la notación original empleada por Tolman, se reescribirá la condición simplificadora como sigue a continuación:

$$e^{-2B} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad \text{donde: } \frac{1}{R^2} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \quad (3.81)$$

Ahora existen dos caminos distintos a seguir para la resolución de este caso: se puede utilizar la forma para la presión hallada en 3.2.1 y resolver para A, o utilizar directamente la ecuación de Tolman. Se optará por la segunda opción y para el desarrollo del método, al conocer  $e^{-2B}$ , se introducirá una coordenada  $y = y(r)$  con dependencia radial de forma que:

$$e^{-2B} = y^\gamma \quad (3.82)$$

Siendo  $\gamma$  una constante a determinar. La pregunta que surge es cómo determinar dicha constante sin utilizar atajos como: valerse de un programa de cálculo para que resuelva la ecuación de Tolman, observar la dependencia de la presión hallada en 3.2.1 en función de la coordenada  $y$  o nutrirse de buenas ideas en el artículo original de Tolman. Para ello la forma correcta es observar que la ecuación

de Tolman bajo estas coordenadas daría lugar a términos disipativos del tipo  $y^p \partial_y A$ , siendo  $p$  una potencia cualquiera, y términos no lineales de la forma  $(\partial_y A)^2$ . Se ve entonces que el término disipativo desaparece cuando  $\gamma = 2$ , por lo que considerando este caso:

$$y = e^{-B} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \implies \frac{R^2}{r} \partial_r = -\frac{1}{y} \partial_y \quad (3.83)$$

Situación bajo la cual la ecuación de Tolman se reduce a:

$$0 = \partial_y^2 A + \partial_y A \partial_y A \quad (3.84)$$

Donde se puede hacer uso del siguiente truco para evitar la presencia del término cuadrático:

$$\partial_y^2 A + \partial_y A \partial_y A = e^{-A} \partial_y^2 e^A \quad (3.85)$$

De forma que la ecuación (3.84) resulta:

$$0 = e^{-A} \partial_y^2 e^A \quad (3.86)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$e^{2A} = \left( \Psi + \zeta \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right)^2 \quad (3.87)$$

Siendo  $\Psi$  y  $\zeta$  dos constantes de integración.

where  $h$  and  $f$  are the two integration constants.

Calculando ahora la presión sustituyendo las relaciones encontradas en la ecuación (3.70), se llega a que:

$$P = -\frac{1}{\kappa R^2} \frac{\Psi + 3\zeta y}{\Psi + \zeta y} \quad (3.88)$$

Una vez hallada la presión, la determinación de las constantes de integración  $\Psi$  y  $\zeta$  se realiza simplemente identificando con la ecuación (3.47) de la sección 3.2.1. Entonces:

$$\Psi = -3 \frac{1 + u_c}{1 + 3u_c} \zeta \quad (3.89)$$

Fijando el valor de  $\zeta = -1$ , lo cual siempre es posible ya que basta para ello redefinir el tiempo  $t$ , se deduce:

$$\Psi = 3 \frac{1 + u_c}{1 + 3u_c} \quad (3.90)$$

Introduciendo una nueva coordenada  $\chi$  y haciendo una redefinición de  $r$  dada por:  $r = R \text{sen}(\chi)$ , o equivalentemente:  $y = \cos(\chi)$ , como  $r \in [0, R_\star]$  se debe cumplir que  $\chi \in [0, \chi_\star]$  con  $\chi_\star$  el ángulo que satisface la condición  $R_\star = R \text{sen}(\chi_\star)$

Prestando atención a la ecuación (3.88) se nota que el radio de la estrella  $R_*$  se encuentra en el valor  $y_*$ , que es tal que:

$$\Psi = 3 y_* = 3 \cos(\chi_*) \quad (3.91)$$

Aunando todos los resultados obtenidos e introduciéndolos en la métrica, se obtiene la solución de Tolman III:

$$ds^2 = - [3 \cos(\chi_*) - \cos(\chi)]^2 dt^2 + R^2 [d\chi^2 + \text{sen}^2(\chi) dS^2] \quad (3.92)$$

Que no es más que el sistema de coordenadas original en el que Schwarzschild eligió representar su solución al interior estelar, de donde se concluye que la tercera solución de Tolman es la métrica interior de Schwarzschild.

Una vez visto esto, se pueden hacer algunas observaciones destacables: pese a que la parte espacial de la métrica parece la representación habitual de la métrica de una 3-esfera  $S^3$ , no llega a recubrir la esfera completa, ya que para ello se necesitaría que  $\chi_* = \pi$  o que  $\cos(\chi_*) = 0$ . No obstante, atendiendo a las ecuaciones que determinan la constante  $\Psi$  se satisface:

$$\cos(\chi_*) = \frac{1 + u_c}{1 + 3u_c} \in \left[ \frac{1}{3}, 1 \right] \quad (3.93)$$

Con esto se concluye que la solución de Tolman III nunca podrá recubrir por completo la 3-esfera. Como observación adicional, destaca que no existe ningún valor de  $\chi \in [0, \chi_*]$  para el cual se anule la entrada tiempo-tiempo de la métrica,  $g_{tt} = 0$ , por lo que no hay ningún horizonte de sucesos posible para estrellas de este tipo.

#### **Solución de Tolman IV**

En este caso la hipótesis asumida es  $\partial_r e^A = \alpha r$ , cuyo significado físico radica en la existencia de una relación entre la tasa de cambio en la deformación temporal, ya que la función  $e^A$  está presente en la coordenada  $g_{tt}$  de la métrica, como proporcional a la coordenada radial  $r$ .

A partir de la hipótesis se deduce una expresión para  $e^{2A}$ , que puede ser reescrita como:

$$e^{2A} = 1 + \frac{r^2}{\gamma^2} \quad (3.94)$$

De forma que despejando se encuentra también:

$$\partial_r A = \frac{\alpha r}{1 + \frac{r^2}{\gamma^2}} \quad (3.95)$$

A partir de las relaciones anteriores y considerando la ecuación de Tolman (3.67), se obtuvo la solución restante utilizando el programa<sup>11</sup> de cálculo simbólico *Maple*:

$$e^{2B} = \frac{1 + 2\frac{r^2}{\gamma^2}}{(1 - \psi\frac{r^2}{\gamma^2})(1 + \frac{r^2}{\gamma^2})} \quad (3.96)$$

Luego, sustituyendo en (3.70), se tiene que la presión:

$$\kappa P = \frac{1 - \psi - 3\psi\frac{r^2}{\gamma^2}}{\gamma^2 \left(1 + 2\frac{r^2}{\gamma^2}\right)} \quad (3.97)$$

De donde, imponiendo la continuidad de la presión en el borde estelar  $P(R_*) = 0$ , se puede obtener el radio de la estrella:

$$R_*^2 = \frac{\gamma^2(1 - \psi)}{3\psi} \quad (3.98)$$

Y claramente, tomando la coordenada radial por su valor en el origen, se encuentra que la presión en el núcleo estelar es:

$$P_c = \frac{1 - \psi}{\gamma^2 \kappa} \quad (3.99)$$

Que, exigiendo que sea estrictamente positiva, conduce a la restricción  $\psi < 1$ . Por otro lado, considerando la ecuación (3.69) se puede deducir la densidad de energía de la estrella:

$$\kappa\rho = \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{1 + 3\psi(1 + \frac{r^2}{\gamma^2})}{1 + \frac{r^2}{\gamma^2}} + 2\frac{1 + \frac{\psi r^2}{\gamma^2}}{\left(1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^2} \right) \quad (3.100)$$

De forma que la densidad de masa en el centro de la estrella es:

$$\rho_c = \frac{3(1 + \psi)}{\kappa\gamma^2} \quad (3.101)$$

Además, a partir de las expresiones halladas para la densidad y presión estelares, es posible encontrar una ecuación de estado que relacione ambas magnitudes. Esta misma es dada como sigue:

$$(\rho - \rho_c) = 5(P - P_c) + 8\frac{(P - P_c)^2}{\rho_c - P_c} \quad (3.102)$$

Esta ecuación de estado revela información sobre el comportamiento relativo entre la densidad y la presión en distintas partes de la estrella. De este modo, cerca del núcleo estelar la presión tiene una dependencia lineal con la presión, mientras que en zonas más externas dicha dependencia se vuelve cuadrática.

<sup>11</sup>El mismo resultado fue obtenido por Tolman de forma analítica.

Ahora, sabiendo el radio de la estrella dado por (3.98) y la densidad (3.100), se puede hallar la masa de la estrella  $M_*$  integrando desde el centro hasta  $R_*$  la superficie de la misma  $4\pi\rho r^2$ , dato a partir del cual lo que se puede determinar el radio de Schwarzschild. Con esto, se obtiene que la compacidad de la estrella es:

$$\mathcal{C} = \frac{1-\gamma}{3} \quad (3.103)$$

Como el valor de la compacidad ha de ser estrictamente positivo, se tiene que  $\gamma < 1$ . A su vez, de la expresión anterior también se deduce que la compacidad será menor que  $1/2$ , y con ello la estrella no sufrirá colapso gravitacional, si se cumple la condición:

$$\gamma \geq -\frac{1}{2} \implies \gamma \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right) \quad (3.104)$$

O, equivalentemente, si la constante satisface  $\gamma < -\frac{1}{2}$  la estrella se convertirá en un agujero negro.

## Capítulo 4

# Estrellas en Relatividad General. Caso $d$ -dimensional

Ahora se procederá a generalizar los resultados vistos en el capítulo 3 en el caso de tener un Universo  $d$ -dimensional, donde se recuerda que el número  $d$  hace referencia al número de dimensiones total, por lo que el número de dimensiones espaciales sería  $d - 1$  teniendo en consideración la dimensión temporal. Esta extensión de los resultados comenzará por estudiar el *agujero negro de Tangherlini*, el cual no es más que la generalización del agujero negro de Schwarzschild a dimensiones superiores. Posteriormente se tendrá un apartado en el que se hará una rederivación de la ecuación TOV, adaptada en este caso al nuevo universo, y a partir de la cual: se obtendrá una versión general del Teorema de Buchdahl, se estudiará cómo cambia la constante de proporcionalidad hallada en 3.2.2 para estrellas conformes y se llegará a la extensión de la ecuación de Tolman, volviendo a hallar las soluciones vistas en el caso 4-dimensional.

Se trabajará ahora con una generalización de la métrica (3.5), dada como sigue:

$$ds^2 = -c^2 e^{2A} dt^2 + e^{2B} dr^2 + r^2 h^{ij} dy_i dy_j \quad (4.1)$$

Donde ahora los índices corren como  $i, j \in \{1, \dots, d - 2\}$  representando  $h^{ij}$  la métrica de una  $(d - 2)$ -esfera, es decir  $dS^{d-2} = h^{ij} dy_i dy_j$ , mientras que  $A$  y  $B$  siguen siendo funciones que dependen solamente de la coordenada radial. Con respecto al tensor de energía-momento, se continuará considerando una estrella formada por un fluido perfecto y, por tanto, en las entradas del tensor no

hay ningún cambio con respecto a las dadas en (3.8).<sup>1</sup>

#### 4.1. Solución exterior: el agujero negro de Tangherlini

De nuevo, esta primera sección tratará de recrear los resultados obtenidos por *F. Tangherlini* en 1963 publicados en [27] el cual generalizó lo previamente expuesto por Schwarzschild a  $d$  dimensiones, lo que significa que se propuso hallar las soluciones a las ecuaciones de Einstein en el exterior de la estrella, es decir cuando  $T_{\mu\nu} = 0$ . Al igual que en el capítulo anterior, atendiendo a las ecuaciones de Einstein (3.1), se deberá resolver  $R_{\mu\nu} = 0$  y para ello es necesario hallar primeramente las nuevas expresiones de las entradas del tensor de Ricci para la nueva métrica (4.1) considerando las nuevas dimensiones adicionales.

Prestando atención a (4.1) es relevante mencionar que se ha escrito la métrica de esa forma en particular, primeramente para dotar a la expresión de generalidad, al no tener que escribir la métrica explícita de la  $(d - 2)$ -esfera con la que se esté trabajando, pero también porque resulta ventajoso y permite aprovechar gran parte de los cálculos hechos en el caso 4-dimensional. Con esa estructura las entradas del tensor de Ricci serán prácticamente iguales a las halladas en (3.11), salvo por la aparición de unos coeficientes  $(d - 2)$  relativos a la dimensión de la actual  $(d - 2)$ -esfera<sup>2</sup> y un término  $\hat{R}_{ij}$  que representará el tensor de Ricci de la  $(d - 2)$ -esfera. Con todo esto, se tiene:

$$\begin{cases} R_{tt} = c^2 \left[ e^{A-B} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{(d-2)}{r} e^{2(A-B)} \partial_r A \right] \\ R_{rr} = -e^{B-A} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{(d-2)}{r} \partial_r B \\ R_{ij} = \hat{R}_{ij} + [r e^{-2B} \partial_r (B - A) - (d-3) e^{-2B}] h_{ij} \end{cases} \quad (4.2)$$

Sin embargo, para continuar es necesario conocer explícitamente la expresión para  $\hat{R}_{ij}$ . Se puede obtener de forma sencilla aplicando que cuando no haya materia, habiendo entonces un espacio tiempo de Minkowski, se tendrá que  $A = B = 0$  y las entradas del tensor de Ricci serán nulas al no haber curvatura. Aplicando estas condiciones sobre las condiciones anteriores, se consigue la expresión deseada:

$$\hat{R}_{ij} = (d-3) h_{ij} \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>Salvo que ahora  $T_{ij} = P g_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d-2\}$

<sup>2</sup>Donde previamente se tenía un 2, ya que en el caso 4-dimensional la métrica  $h^{ij}$  representa la de una 2-esfera.

Sustituyendo, se encuentran las entradas del tensor de Ricci buscadas:

$$\begin{cases} R_{tt} = c^2 \left[ e^{A-B} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{(d-2)}{r} e^{2(A-B)} \partial_r A \right] \\ R_{rr} = -e^{B-A} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{(d-2)}{r} \partial_r B \\ R_{ij} = [r e^{-2B} \partial_r (B-A) + (d-3)(1 - e^{-2B})] h_{ij} \end{cases} \quad (4.4)$$

Utilizando la condición de vacío  $R_{ij} = 0$ , se llega a unas expresiones equivalentes a las dos primeras de (4.4), dadas a continuación:

$$0 = \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{(d-2)}{r} e^{A-B} \partial_r A \quad (4.5)$$

$$0 = -\partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{(d-2)}{r} e^{A-B} \partial_r B \quad (4.6)$$

Sumando ambas ecuaciones se llega a la condición  $0 = \frac{(d-2)}{r} e^{A-B} \partial_r (A+B) \equiv \partial_r (A+B) = 0$ , de donde se deduce que la suma de ambas funciones no tiene dependencia radial, por lo que se puede entender como una constante respecto a  $r$ . Mediante una redefinición temporal se puede absorber dicha constante para alcanzar así la condición  $A = -B$ , que aplicada en la expresión de  $R_{ij}$  en (4.4), y retocando la ecuación resulta:

$$r \partial_r (e^{-2B} - 1) = -(d-3)(e^{-2B} - 1) \quad (4.7)$$

Una sencilla ecuación diferencial ordinaria cuyo resultado, incluyendo una constante de integración  $C$ , es el que sigue:

$$e^{2A} = e^{-2B} = 1 - \frac{2C}{r^{d-3}} \quad (4.8)$$

Donde el valor de la constante  $C$  debe fijarse estableciendo una relación con la masa  $M_*$  de la estrella. Esta solución se conoce como el agujero negro de Tangherlini, o *solución de Schwarzschild  $d$ -dimensional*, ya que se obtiene bajo las mismas condiciones en un mundo con un número superior de dimensiones, además de tener una significativa relación con la solución de Schwarzschild original (3.19).

Repetiendo el razonamiento utilizado en la sección 3.1, considerando el límite a bajas velocidades de las geodésicas, se obtiene la siguiente expresión para el potencial de Newton:

$$\Phi = \frac{c^2}{2} (e^{2A} - 1) \implies \Phi = -c^2 \frac{C}{r^{d-3}} \quad (4.9)$$

Pero la extensión  $d$ -dimensional del mismo viene dada por:

$$\Phi = -\frac{G_{(d)} M}{(d-3)r^{(d-3)}} \quad (4.10)$$

Con lo que se llega a la expresión buscada de la constante de integración:

$$C = \frac{G_{(d)}M}{(d-3)c^2} \quad (4.11)$$

Por otro lado, es sabido que la expresión de  $G_{(d)}$  con respecto a la constante de Newton habitual  $G_N$  cambia según el número de dimensiones. Esta variación influiría en la forma de las ecuaciones de Einstein según las dimensiones consideradas por lo que, de acuerdo con lo expuesto en el apéndice C, se deriva una ecuación que relaciona ambas constantes en un caso general. Sustituyendo ahora  $G_{(d)}$  por la expresión dada en (C.14):

$$C = \frac{8\pi G_N}{c^2} \frac{M}{(d-2)V_{(d-2)}} = \frac{\kappa c^2 M}{(d-2)V_{(d-2)}} \implies M = \frac{(d-2)V_{(d-2)}C}{\kappa c^2} \quad (4.12)$$

Una vez conocida la relación entre  $C$  y la masa  $M$ , según los argumentos expuestos en la sección 3.1, igualar a cero la entrada tiempo-tiempo de la métrica devolverá la localización del horizonte de sucesos del agujero negro de Tagherlini. Para ello, basta con expresar (4.8) como:

$$e^{2A} = 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{(d-3)} \quad (4.13)$$

Donde claramente se ha definido  $r_H^{d-3} = 2C$ , y por ende la distancia del horizonte de sucesos con respecto al centro estelar es:

$$r_H^{(d-3)} = \frac{2}{d-2} \frac{\kappa c^2 M}{V_{(d-2)}} \quad (4.14)$$

Al igual que al tratar con 4 dimensiones, el radio de una estrella  $R_\star$  ha de ser mayor que el radio de Schwarzschild de un agujero negro de masa  $M = M_\star$ , la masa de la estrella en cuestión, o de otra forma la estrella colapsará en un agujero negro. Con esto, a partir de la solución (4.13) y sabiendo que  $e^{2A} = e^{-2B}$ , la métrica (4.1) resulta:

$$ds^2 = -c^2 \left[1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{(d-3)}\right] dt^2 + \left[1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{(d-3)}\right]^{-1} dr^2 + r^2 h^{ij} dy_i dy_j \quad (4.15)$$

Finalmente, como mera generalización de los conceptos tratados en la sección análoga a esta del capítulo anterior, en presencia de  $d$  dimensiones se define la compacidad de una estrella de masa  $M_\star$  y radio  $R_\star$  como sigue:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_H}{R_\star}\right)^{(d-3)} < \frac{1}{2} \quad (4.16)$$

De nuevo, pese a esta redefinición, compacidad representa cuán cerca se encuentra una estrella de colapsar sobre sí misma en un agujero negro, pudiendo así tomar valores en el intervalo  $(0, 1/2)$ .

Finalmente es importante mencionar que, cuando se realiza esta extensión dimensional, se pierde cualquier tipo de resultado sobre la unicidad del agujero negro, en contraposición al caso en 4 dimensiones donde se hizo referencia al artículo publicado por W. Israel. Esto quiere decir que en dimensiones superiores no se satisface la hipótesis de que cualquier agujero negro estático y asintóticamente plano ha de ser la solución encontrada por Tangherlini, ya que se han encontrado múltiples soluciones adicionales bajo las mismas condiciones. Un ejemplo es el caso 5-dimensional, en el que se tiene el *agujero negro de Myers-Perry*, presentado en 1986 en [28], así como la solución encontrada en 2002 por *R. Emparan y H. S. Reall* en [29]. Sin embargo sí que se recupera tal unicidad si se exige la condición adicional de que el agujero negro presente simetría esférica, de acuerdo con el artículo publicado también en 2002 por *G. W. Gibbons, D. Ida y T. Shiromizu* en [30]. Con ello se concluye que la solución de Tangherlini es la única existente en el caso de un agujero estático, asintóticamente plano y simétricamente esférico obtenido como solución en el vacío.

## 4.2. Solución interior: Generalización de la ecuación TOV

En esta sección se derivará la nueva expresión de la ecuación TOV válida en el caso d-dimensional. Posteriormente, se utilizará en los subapartados sucesivos para estudiar estrellas con distintas propiedades físicas.

Se parte de la métrica (4.1) y del tensor de energía-momento de un fluido perfecto, cuyas entradas están en (3.8). En esta derivación el punto de partida será la identidad de Bianchi, dada en (3.39), para lo que será útil escribir la forma covariante de las entradas del tensor:

$$T^{tt} = \rho e^{-2A} ; T^{rr} = P e^{-2B} ; T^{ij} = P g^{ij} \quad (4.17)$$

Los casos  $\nu = t$  y  $\nu = i$  no dan información alguna, sin embargo tomando  $\nu = r$  se obtiene:

$$0 = \partial_r(P e^{-2B}) + (\Gamma_{\mu r}^{\mu} + \Gamma_{rr}^r)T^{rr} + \Gamma_{tt}^r T^{tt} + \Gamma_{ij}^{ij} T^{ij} \quad (4.18)$$

Que, sustituyendo el valor de los coeficientes de Christoffel, da lugar a:

$$0 = \partial_r P e^{-2B} - 2P e^{-2B} \partial_r B + (\partial_r A + 2\partial_r B + \frac{d-2}{r})P e^{-2B} + \rho c^2 e^{-2B} \partial_r A - \frac{d-2}{r} P e^{-2B} \quad (4.19)$$

De donde se deduce:

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho c^2) \partial_r A \quad (4.20)$$

Que, visto que es una expresión sobre la variación de la presión con el radio estelar, será la ecuación que, una vez conocido  $\partial_r A$ , determine la ecuación TOV d-dimensional. Asimismo, ahora se utilizarán las ecuaciones de Einstein para encontrar dos relaciones que serán de utilidad más adelante. En esta línea se considera primero la igualdad  $G_{tt} = \kappa T_{tt}$  y, en consecuencia, se tiene que:

$$G_{tt} = -\kappa \rho c^2 g_{tt} \quad (4.21)$$

Pero dadas las componentes del tensor de Ricci (4.4), se puede hallar una expresión para el escalar de curvatura:

$$R = \frac{2(d-2)}{r} e^{-2B} \partial_r A + \frac{(d-2)(d-3)}{r^2} (1 - e^{-2B}) \quad (4.22)$$

A partir del cual se halla la entrada correspondiente del tensor de Einstein:

$$G_{tt} = \frac{d-2}{2r^{(d-2)}} \partial_r \left[ r^{(d-3)} (e^{2B} - 1) \right] g_{tt} \quad (4.23)$$

De manera que igualando ambas ecuaciones resulta:

$$\partial_r \left[ r^{(d-3)} (1 - e^{2B}) \right] = \frac{2\kappa c^2}{d-2} \rho r^{(d-2)} \quad (4.24)$$

La masa de la estrella d-dimensional se puede escribir en función del radio como:

$$m(r) = V_{(d-2)} \int_0^r x^{(d-2)} \rho dx \implies \rho r^{(d-2)} = \frac{m'(r)}{V_{(d-2)}} \quad (4.25)$$

Donde se recuerda que el término  $V_{(d-2)}$  hace referencia al volumen de una esfera  $(d-2)$ -dimensional. Sustituyendo esta última expresión en (4.24) y despejando el término  $e^{-2B}$ , se obtiene la igualdad que sigue:

$$e^{-2B} = 1 - \frac{2\kappa c^2}{(d-2)V_{(d-2)}} \frac{m(r)}{r^{(d-3)}} \quad (4.26)$$

Una vez hallada la relación anterior, se considera a continuación la ecuación de Einstein de acuerdo a la entrada  $rr$ , es decir  $G_{rr} = \kappa T_{rr}$ . Procediendo de forma análoga al caso  $tt$ , sustituyendo la expresión de  $T$  resulta:

$$G_{rr} = \kappa P e^{2B} \quad (4.27)$$

Calculando en este caso la entrada  $rr$  del tensor de Einstein:

$$G_{rr} = \frac{d-2}{r} \partial_r A - \frac{(d-2)(d-3)}{2r^2} (e^{2B} - 1) \quad (4.28)$$

Igualando las identidades anteriores:

$$\frac{d-2}{r} \partial_r A = e^{2B} \left[ \kappa P + \frac{(d-2)(d-3)}{2r^2} (1 - e^{2B}) \right] \quad (4.29)$$

Sustituyendo (4.26), se encuentra la última de las relaciones necesarias para la derivación de la TOV:

$$\partial_r A = \frac{(d-3)\kappa c^2}{(d-2)V_{(d-2)}r^{(d-2)}} \left[ m(r) + \frac{V_{(d-2)}r^{(d-1)}P}{d-3} \frac{1}{c^2} \right] \left( 1 - \frac{2\kappa c^2}{(d-2)V_{(d-2)}} \frac{m(r)}{r^{(d-3)}} \right)^{-1} \quad (4.30)$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en (4.20) y simplificando, se encuentra:

$$\frac{dP}{dr} = -\kappa c^4 \frac{(d-3)}{(d-2)r^{(d-2)}} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \left[ \frac{m(r)}{V_{(d-2)}} + \frac{r^{(d-1)}P}{d-3} \frac{1}{c^2} \right] \left( 1 - \frac{2\kappa c^2}{(d-2)V_{(d-2)}} \frac{m(r)}{r^{(d-3)}} \right)^{-1} \quad (4.31)$$

Que se trata de la *ecuación TOV generalizada a d-dimensiones*.

#### 4.2.1. Estrellas de Buchdahl d-dimensionales. Generalización del Teorema de Buchdahl

La generalización del concepto de estrella de Buchdahl dado en 3.2.1 es inmediato, siendo aquellas estrellas en un mundo d-dimensional que presentan una densidad de masa constante  $\rho = \rho_0$ , luego independiente de la coordenada radial. Imponiendo semejante condición y considerando la ecuación (4.25) obtenida en la deducción de la ecuación de TOV en esta misma sección, se obtiene fácilmente que la masa de la estrella varía con  $r$  como:

$$m(r) = \frac{V_{(d-2)}\rho_0}{(d-1)} r^{(d-1)} \quad (4.32)$$

Considerando ahora la relación anterior, se puede resolver la ecuación TOV (4.31). Se procederá siguiendo el mismo método que en el capítulo anterior, con lo que primeramente se realizarán los siguientes cambios de variable:

$$u = \frac{P}{\rho_0 c^2} \quad , \quad \alpha = \frac{2\kappa\rho_0 c^2}{(d-2)(d-1)} \quad (4.33)$$

Con todo esto, (4.31) resulta:

$$u' = -\frac{1}{4}(d-3)(1+u) \left[ 1 + \frac{(d-1)}{(d-3)}u \right] \frac{2\alpha r}{1-\alpha r^2} \quad (4.34)$$

Agrupando y resolviendo la ecuación diferencial resultante, se obtiene:

$$\frac{1 + \frac{(d-1)}{(d-3)}u}{1+u} = \mathcal{B} \sqrt{1-2\alpha r^2} \quad (4.35)$$

Sea entonces  $P_c$  la presión en el centro de la estrella, por ende  $u_c = P_c/(\rho_0 c^2)$ , e imponiendo la condición de contorno  $P(r=0) = P_c$  se fija el valor de la constante de integración:

$$\mathcal{B} = \frac{1 + \frac{(d-1)}{(d-3)}u_c}{1+u_c} \implies \frac{1 + \frac{(d-1)}{(d-3)}u}{1+u} = \frac{1 + \frac{(d-1)}{(d-3)}u_c}{1+u_c} \sqrt{1-2\alpha r^2} \quad (4.36)$$

Imponiendo ahora la condición de continuidad de la presión en el borde de la estrella  $P(r = R_*) = 0$ , se halla una expresión del radio estelar en función de  $u_c$ :

$$\alpha R_*^2 = \frac{4u_c [(d-3) + (d-2)u_c]}{[(d-3) + (d-1)u_c]^2} \quad (4.37)$$

Que es, al igual que el resultado derivado en el capítulo 3.2.1, una función monótonamente creciente con  $u_c$  que presenta además una cota superior. Para hallarla, basta considerar el límite  $u_c \rightarrow \infty \equiv P_c \rightarrow \infty$ . No obstante este límite de presión infinita implica el colapso gravitacional de la estrella, por lo que para ver si es posible este fenómeno se estudia la compacidad de la estrella. Teniendo en cuenta el ya demostrado hecho de que<sup>3</sup>  $\frac{1}{2}\alpha R_*^2 = \mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C}_{\text{máx}} = \lim_{P_c \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\alpha R_*^2 = \frac{2(d-2)}{(d-1)^2} \quad (4.38)$$

Fácilmente se encuentra que  $\mathcal{C}_{\text{máx}} < \frac{1}{2} \forall d \geq 4$ , por lo que se concluye que una estrella de Buchdahl  $d$ -dimensional nunca podrá colapsar en un agujero negro, extendiendo así a dimensiones superiores el resultado encontrado en el capítulo anterior.

El comportamiento de la presión en función del radio y su cambio según el número de dimensiones temporales se puede vislumbrar en el gráfico presente en la figura 4.1. Para su realización se consideró una estrella de Buchdahl, tomando como valor de densidad la densidad media del sol  $1408 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-(d-1)}$ , y como presión central fue utilizada la presión en el núcleo solar siendo ésta de  $2,477 \times 10^{16} \text{ Pa}$ , ambos datos tomados de [31]. Se decidió además utilizar para la representación la presión normalizada, de forma que el valor 1 en el eje de ordenadas representa la presión central obtenida de la referencia anteriormente mencionada. El gráfico 4.1 sirve para ilustrar y verificar la validez del modelo, obteniéndose que la presión se hace cero en el borde de la estrella. Se observa cómo el radio de la estrella va incrementando su valor al aumentar la dimensión, como se podía haber intuido atendiendo a la fórmula (4.37), y es característico que la línea de tendencia respectiva a  $d = 5$  se superpone a la relativa a  $d = 4$  debido a la pequeña diferencia entre los radios de la estrella.

#### 4.2.2. Estrellas conformes $d$ -dimensionales.

Se procede en este caso a extender el resultado referente a las estrellas formadas por materia conforme. En diferencia respecto al caso 4-dimensional, en este caso la ecuación de estado que rige el comportamiento de la materia estelar es la dada a continuación:

$$(d-1)P = \rho c^2 \quad (4.39)$$

---

<sup>3</sup>Visto en la sección 3.2.1.

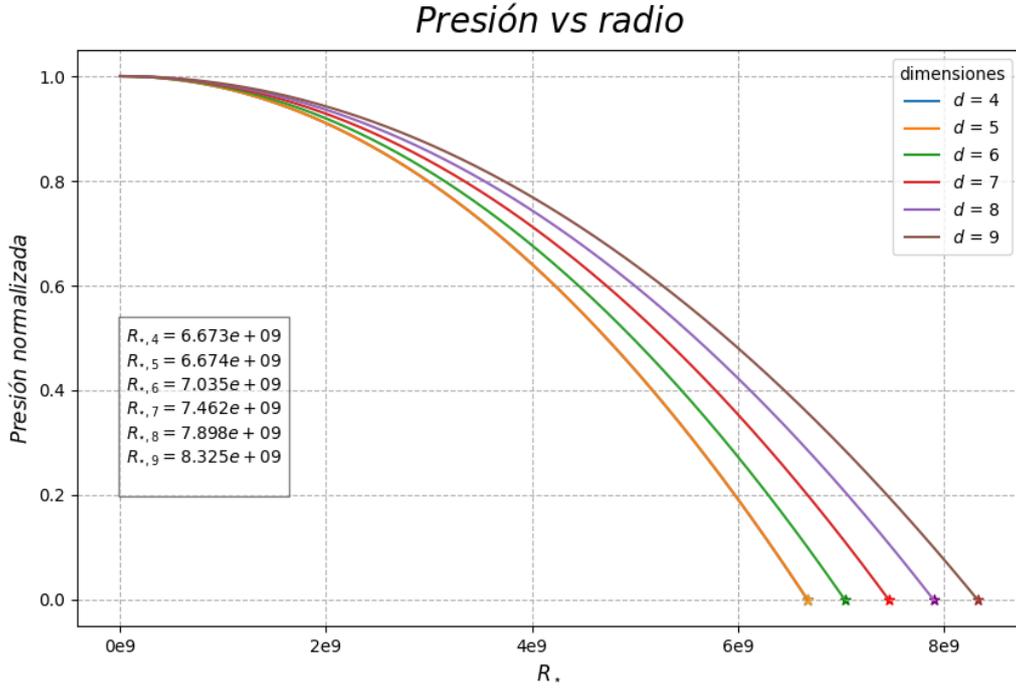


Figura 4.1: Variación de la presión en una esfera de Buchdahl según la dimensión  $d$ .

De forma análoga a lo expuesto en 3.2.2, un modelo estelar basado en esta ecuación de estado satisface:  $m \propto r^{(d-3)}$  y  $\rho \propto r^2$ . En esta línea se consideran:

$$m = \mu c^2 r^{(d-3)} \quad , \quad \rho = \frac{(d-3)\mu c^2}{V_{(d-2)} r^2} \quad (4.40)$$

Utilizando este ansatz en la ecuación TOV (4.31) y la relación entre  $P$  y  $\rho$  dada por la ecuación de estado, se obtiene una expresión para la constante de proporcionalidad:

$$\mu c^2 = \frac{2(d-1)V_{(d-2)}}{\kappa [(d-2)^2 + 3(d-2) + 4]} \quad (4.41)$$

Donde considerando  $d = 4$  se recupera el valor obtenido en el capítulo anterior. Sea ahora (4.39) una ecuación de estado genérica, de la forma:

$$P = \alpha \rho c^2 \quad (4.42)$$

Se obtiene una relación más general, válida para cualquier ecuación de estado como la anterior:

$$\mu c^2 = \frac{2\alpha(d-2)V_{(d-2)}}{\kappa [(d-3)(\alpha+1)^2 + 4\alpha]} \quad (4.43)$$

Pese a la mayor complejidad de las expresiones para la constante de proporcionalidad  $\mu c^2$  se obtiene, al igual que en el caso 4-dimensional, que la presión y la densidad de masa no se anulan para ningún valor de  $r$ . Con esto se concluye que esta materia continúa presentando un comportamiento gaseoso en dimensiones superiores, y que no será posible la existencia de estrellas de este tipo de tamaño finito.

### 4.2.3. Ecuación de Tolman d-dimensional.

Se parte de la misma observación hecha por Tolman a cerca de la isotropía del tensor de energía-momento  $T_i^i = T_r^r \quad \forall i \in \{1, \dots, d-2\}$ . En este caso al estar en una región con  $d-2$  dimensiones físicas además de la radial, se tiene que  $(d-2)P = T = r^{-2}h^{ij}T_{ij}$ , además de mantenerse  $P = T_r^r = e^{-2B}T_{rr}$ . Así se deduce:

$$(d-2)r^2e^{-2B}T_{rr} = h^{ij}T_{ij} \quad (4.44)$$

De forma análoga a lo estudiado en el caso cuatridimensional, la condición de isotropía es heredada por  $G$  a través de las ecuaciones de Einstein, deduciéndose así la existencia de soluciones que presentarán dicha característica:

$$(d-2)r^2e^{-2B}G_{rr} = h^{ij}G_{ij} \quad (4.45)$$

Que sigue siendo válido en todas las direcciones  $i, j \in \{1, \dots, d-2\}$ . Descomponiendo el tensor de Einstein según (3.2) y considerando las entradas  $g_{rr} = e^{2B}$  y  $g_{ij} = r^2h_{ij}$  correspondientes a la métrica (4.1), se obtiene:

$$2r^2e^{-2B}R_{rr} = h^{ij}R_{ij} \quad (4.46)$$

Introduciendo las correspondientes entradas del tensor de Ricci y masajeando la expresión, se llega a la expresión d-dimensional de la ecuación de Tolman:

$$0 = (d-3)\partial_r \left( \frac{e^{-2B} - 1}{r^2} \right) + \partial_r \left[ \frac{e^{-2B}\partial_r A}{r} \right] + e^{-2(B+A)}\partial_r \left[ \frac{e^{2A}\partial_r A}{r} \right] \quad (4.47)$$

Estableciendo una comparativa entre la ecuación (3.67) encontrada para  $4d$  y esta extensión dimensional, resulta notable destacar que la única variación presente es el coeficiente  $d-3$  que multiplica al primer término de la ecuación.

Ahora considerando una solución  $e^{2A}, e^{2B}$  a la ecuación de Tolman y utilizando las ecuaciones de Einstein (3.68)<sup>4</sup> con  $\Lambda = 0$ , se pueden relacionar dichas soluciones con las distintas entradas del tensor de energía-momento, con lo que se deducen las siguientes expresiones para la presión y la densidad<sup>5</sup>:

$$\kappa\rho = \frac{d-2}{2r^{d-2}} \partial_r \left[ r^{d-3} (1 - e^{-2B}) \right] \quad (4.48)$$

$$\kappa P = \frac{(d-2)(d-3)}{2r^2} (e^{-2B} - 1) + \frac{d-2}{2r} e^{-2A-2B} \partial_r e^{2A} \quad (4.49)$$

A continuación se resolverán tres de los ocho casos en los que Tolman supo resolver su ecuación de forma analítica, estando cada una asociada a una condición que simplificará (4.47). Tras haber encontrado las soluciones pertinentes, se usarán (4.48) y (4.49) para hallar las dependencias de la densidad y presión de la estrella<sup>6</sup>.

### Solución de Tolman I

De nuevo, se repite el procedimiento en dimensiones superiores en el caso de la primera solución exacta de la ecuación de Tolman, caracterizada por la condición  $A = 0$ . Entonces, de forma directa a partir de (4.47):

$$e^{-2B} = 1 + \Psi r^2 \quad (4.50)$$

Utilizando la versión de las ecuaciones de Einstein que considera una constante cosmológica no nula (3.68), se obtienen las siguientes relaciones de  $\rho$  y  $P$ :

$$\begin{cases} \kappa\rho = \frac{d-2}{2} [-\Lambda - (d-1)\Psi] \\ \kappa P = \frac{d-2}{2} [\Lambda + (d-3)\Psi] \end{cases} \quad (4.51)$$

Imponiendo que la presión y la densidad de energía sean positivas, se encuentra que la constante cosmológica debe ser de tipo De Sitter  $\Lambda > 0$  mientras que  $\Psi < 0$ . Se encuentra además una cota

<sup>4</sup>Notar que estas ecuaciones, pese a haber sido introducidas en el caso 4-dimensional, pueden ser utilizadas en la extensión d-dimensional gracias a la generalización de las mismas por medio de una correcta definición de la constante  $\kappa$  como es explicado en el apéndice C

<sup>5</sup>Equivalentemente densidad de energía o de masa, debido a la consideración:  $c = 1$ .

<sup>6</sup> Siguiendo el convenio tomado en el apartado análogo del caso en 4 dimensiones, se consideran unidades naturales de forma que  $c = 1$  con el objetivo de aligerar cálculos y simplificar las expresiones finales.

para los posibles valores de  $\Lambda$  en función de  $\Psi$  y, considerando la constante de integración como  $\Psi = -1/R^2$  se deduce:

$$-(d-3)\Psi < \Lambda < -(d-1)\Psi \iff \frac{d-3}{R^2} < \Lambda < -\frac{d-1}{R^2} \quad (4.52)$$

Que claramente en el caso  $d = 4$  se reduce al resultado hallado en el capítulo 2.

Finalmente, sustituyendo (4.51) en la métrica y procediendo de forma análoga al caso 4-dimensional, se encuentra que en este caso la métrica resulta:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2 dS^{d-1} \quad (4.53)$$

Con lo que se concluye que la generalización del denominado Universo de Einstein es una (d-1)-esfera de radio  $R$ , luego se define el *Universo de Einstein d-dimensional* a  $\mathbb{R} \times S_R^{d-1}$ .

### Solución de Tolman III

La condición de simplificación vuelve a ser tal que elimina el primer término de la ecuación de Tolman d-dimensional (4.47). Sin embargo, en dicha ecuación es el primer término el único que presenta dependencia con la dimensionalidad del mundo considerado, por lo que los resultados obtenidos serán análogos a los del caso cuadrimensional, hechos en la sección 3.2.3. Por tanto en este apartado de la extensión dimensional simplemente se generalizarán las expresiones encontradas para la presión de la densidad de energía y la presión de la estrella.

Tomando como punto de partida el ansatz asociado a la tercera solución de Tolman y la solución encontrada para  $e^{2A}$  en 3.2.3, se utilizará por analogía la notación dada por el autor en el artículo original:

$$e^{-2B} = 1 + \aleph r^2 = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad (4.54)$$

$$e^{2A} = \left( \Psi - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right)^2 \quad (4.55)$$

Haciendo uso ahora de la ecuación (4.48), se encuentra de nuevo que la densidad de energía de la estrella es constante  $\rho = \rho_0$ , y se puede fijar el valor de la constante  $\Psi$  a través de ella:

$$\aleph = \frac{2\kappa\rho_0}{(d-2)(d-1)} \equiv -\frac{1}{R^2} \quad (4.56)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (4.49) e introduciendo la coordenada  $\chi \in [0, \chi_*]$  dada por  $\chi = R \text{sen}(\chi)$ , se deduce que la presión viene dada por la relación que sigue:

$$P = -\frac{d-2}{2\kappa R^2} \frac{(d-3)\Psi - (d-1)\cos(\chi)}{\Psi - \cos(\chi)} \quad (4.57)$$

Definiendo de nuevo el radio de la estrella como  $R_\star = R \text{sen}(\chi_\star)$ , imponiendo la continuidad de la presión en el borde de la estrella en la ecuación anterior se tiene:

$$\Psi = \frac{n+1}{n-1} \cos(\chi_\star) \quad (4.58)$$

Introduciendo todas las soluciones en la métrica, se concluye que la tercera solución de Tolman d-dimensional viene dada por:

$$ds^2 = - \left[ \frac{d-1}{d-3} \cos(\chi_\star) - \cos(\chi) \right]^2 dt^2 + R^2 \left[ d\chi^2 + \text{sen}^2(\chi) dS^{d-2} \right] \quad (4.59)$$

Que claramente se reduce a la métrica (3.92) en el caso  $d = 4$ , por lo que se trata de una extensión de la métrica para el interior estelar de Schwarzschild. Para establecer una conexión entre los resultados obtenidos en esta sección y la 4.2.1 se puede notar que, cuando  $r = 0$  se tiene que  $\chi = 0$ , de manera que de la ecuación para la presión dada en (4.57) se deduce la relación siguiente:

$$\Psi = \frac{n+1}{n-1} \frac{1+u_c}{1+\frac{d-1}{d-3}u_c} \implies \cos(\chi_\star) = \frac{1+u_c}{1+\frac{d-1}{d-3}u_c} \in \left[ \frac{d-3}{d-1}, 1 \right] \quad (4.60)$$

Donde de nuevo se concluye que, análogamente a lo encontrado para el caso cuadrimensional, la solución de Tolman III nunca podrá recubrir por completo la  $(d-1)$ -esfera.

#### Solución de Tolman IV

Se parte de la ecuación de Tolman d-dimensional (4.47) haciendo la observación de que en ella en dos de los tres términos hay dos derivadas totales con respecto a la coordenada radial  $r$ , mientras que en el último no es así. De esta forma, se considera una hipótesis que simplifique la dificultad de la ecuación, que en este caso resultará por anular el último término tomando:  $e^{2A} \partial_r A = \alpha r$ . Se encuentra entonces la primera de las dos soluciones a la ecuación de Tolman, que es reescrita como a continuación:

$$e^{2A} = \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{\gamma^2} \right) \quad (4.61)$$

A partir de esta solución y teniendo en cuenta que la derivada del último término es nula, el resto se puede integrar para obtener la segunda solución:

$$e^{2B} = \frac{1 + \frac{d-2}{d-3} \frac{r^2}{\gamma^2}}{\left( 1 - \psi \frac{r^2}{\gamma^2} \right) \left( 1 + \frac{r^2}{\gamma^2} \right)} \quad (4.62)$$

Ahora, sustituyendo los resultados obtenidos en (4.49) se encuentra que la presión varía como:

$$P = \frac{d-2}{2\gamma^2\kappa} \frac{1 - (d-3)\psi - (d-1)\psi \frac{r^2}{\gamma^2}}{1 + \frac{d-2}{d-3} \frac{r^2}{\gamma^2}} \quad (4.63)$$

Sabiendo que la presión es una función que decrece con  $r$  y que su valor ha de anularse en el borde estelar para ser una función continua, a partir de la condición  $P(R_*) = 0$  se encuentra el radio de la estrella  $d$ -dimensional:

$$R_*^2 = \frac{\gamma^2}{d-1} \left[ \frac{1}{\psi} - (d-3) \right] \quad (4.64)$$

Como el factor  $d-1$  es inherentemente positivo, al requerir que el valor del radio no sea un número complejo se debe satisfacer:

$$\frac{1}{\psi} - (d-3) > 0 \implies \psi < \frac{1}{d-3} \quad (4.65)$$

Fijando por tanto una cota superior para el valor de la constante  $\psi$ .

Por otro lado, se obtiene de forma análoga una expresión para la densidad de energía:

$$\rho = \frac{d-2}{2\gamma^2\kappa} \frac{1 + (d-1)\psi \left(1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)}{1 + \frac{d-2}{d-3} \frac{r^2}{\gamma^2}} + \frac{d-2}{(d-3)\gamma^2\kappa} \frac{1 - \psi \frac{r^2}{\gamma^2}}{\left(1 + \frac{d-2}{d-3} \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^2} \quad (4.66)$$

Que de esta forma toma valores siempre positivos.

Calculando a continuación los valores de presión y densidad en el núcleo estelar como:

$$P_c = P(r=0) \implies P_c = \frac{d-2}{2\gamma^2\kappa} [1 - (d-3)\psi] \quad (4.67)$$

$$\rho_c = \rho(r=0) \implies \rho_c = \frac{(d-2)(d-1)}{2(d-3)\gamma^2\kappa} [1 - (d-3)\psi] \quad (4.68)$$

Donde es posible en este caso hallar una relación entre la densidad de energía y la presión en el centro de la estrella, dada por:

$$\rho_c = \frac{d-1}{(d-3)} P_c \quad (4.69)$$

Estableciendo una comparación entre ambas magnitudes, ya que al considerar unidades naturales las dos presentan unidades de densidad de energía, se encuentra que la presión del núcleo estelar es menor que la densidad de energía en el centro de la estrella solamente en el caso de un espacio-tiempo de 4 dimensiones, mientras que es mayor en el caso  $d > 4$ .

A partir de las magnitudes  $\rho$ ,  $\rho_c$ ,  $P$  y  $P_c$  previamente calculadas y haciendo uso del software *Maple*, desarrollando el término  $(\rho - \rho_0)c^2$  se encuentra una relación entre la presión y la densidad de energía de la estrella, es decir, la siguiente ecuación de estado:

$$\rho - \rho_c = \frac{d+1}{d-3} (P - P_c) + \frac{4(d-2)}{(d-3)^2} \frac{(P - P_c)^2}{\rho_c + P_c} \quad (4.70)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que el expuesto en 3.2.3, se sigue que la compacidad de la estrella es:

$$\mathcal{C} = \frac{1 - (d-3)\gamma}{d-1} \quad (4.71)$$

Imponiendo que la compacidad sea estrictamente positiva se sigue que  $\gamma \leq \frac{1}{d-3}$ . Por otro lado, para evitar el colapso gravitacional de la estrella, se encuentra que se debe satisfacer que  $\gamma \geq -\frac{1}{2}$ . En consecuencia, se concluye que para que la estrella sea estable el parámetro  $\gamma$  deberá encontrarse en el rango:

$$\gamma \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{d-3} \right) \quad (4.72)$$

Mientras que si el parámetro cae por debajo de la cota inferior, colapsará, transformándose así en un agujero negro.

## Capítulo 5

# Estrellas isotrópicas

En 2001 *S. Rahman* y *M. Visser* propusieron una forma alternativa a la idea de Tolman para estudiar la configuración de estrellas isotrópicas<sup>1</sup>. Para ello, en la referencia [32], consideraron un sistema coordenado 4-dimensional que ya presentase dicha condición de isotropía, con lo que la métrica resultante<sup>2</sup> generalizada es:

$$ds^2 = -e^{2X} dt^2 + e^{2Y} \left[ dr^2 + r^2 dS^{d-2} \right] \quad (5.1)$$

Siendo tanto  $X$  como  $Y$  funciones únicamente de la coordenada radial, con lo que esta métrica recibe el nombre de *métrica del sistema de coordenadas isotrópico*. De esta forma debido a la simetría esférica inducida por la métrica se tendrá para el tensor de Einstein que  $G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi}$ , pero imponiendo además la condición de isotropía resulta adicionalmente la igualdad:  $G_{rr} = G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi}$ .

Considerando el tensor de energía-momento de un fluido perfecto y la métrica anterior se tiene que, procediendo análogamente a los apartados relativos a ecuación de Tolman, en este caso la condición de isotropía resulta:

$$(d-2)r^2 R_{rr} = h^{ij} R_{ij} \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>En el artículo original, *Rahman* y *Visser* realizaron todos los cálculos que se verán a continuación para  $d = 4$ , los cuales fueron en este trabajo extendidos a  $d$  dimensiones

<sup>2</sup>Se consideran unidades naturales, es decir:  $c = 1 \implies \kappa = 8\pi G_N$  por (C.15)

A partir del cálculo de las entradas del tensor de Ricci<sup>3</sup> en esta nueva métrica:

$$\begin{cases} R_{tt} = e^{X-Y} \partial_r (e^{X-Y} \partial_r X) + \frac{d-2}{r} e^{2X-3Y} \partial_r X \partial_r (r e^Y) \\ R_{rr} = -e^{Y-X} \partial_r (e^{X-Y} \partial_r X) - \frac{d-2}{r} \partial_r (r \partial_r Y) \\ R_{ij} = -h_{ij} \left\{ e^{-X-(d-3)Y} r \partial_r \left[ e^{X+(d-4)Y} \partial_r (r e^Y) \right] + (d-3) r \partial_r Y \right\} \end{cases} \quad (5.3)$$

De su sustitución y simplificación se obtiene una nueva versión de la condición de isotropía:

$$0 = X'' + (d-2)Y'' - \frac{1}{r} [X' + (d-3)Y'] + (X')^2 - 2X'Y' - (d-2)Y' \quad (5.4)$$

Donde se ha denotado con ' la derivada con respecto a la coordenada radial. Para simplificar aún más la expresión y darle una forma más compacta se contempla el siguiente cambio de variables:

$$X = -(d-3)R, \quad Y = nV + R \quad (5.5)$$

De forma que (5.4) se reduce a:

$$(R')^2 = (d-2)(V')^2 + \frac{V}{r} - V'' \quad (5.6)$$

Una vez visto esto, Rahman y Visser comprueban la existencia de una función  $Z(r)$  que caracterice la clase entera de métricas para fluidos perfectos estáticos, lo cual permite parametrizar la nueva variable  $V$  respecto a esta nueva función como se muestra a continuación:

$$V' = \frac{2}{d-2} \frac{rZ}{1-r^2Z} \quad (5.7)$$

Con lo que se sigue:

$$R' = \pm \frac{\sqrt{\frac{2}{d-2} r Z'}}{1-r^2Z} \quad (5.8)$$

Donde el símbolo  $\pm$  deberá ser determinado mediante la imposición de alguna condición adicional. Igualmente, se encuentra que tanto para  $R$  como para  $V$  se tiene una dependencia monótonamente decreciente respecto a la coordenada radial. Las expresiones (5.7) y (5.8) son de gran importancia, ya que son las que trivializan la ecuación de Tolman dependiendo únicamente de la función generatriz  $Z$ . Con esto el problema se ha reducido a encontrar una forma explícita de esta función que satisfaga ciertas características de regularidad.

Aplicando la conservación de la energía sobre el tensor de energía-momento se deduce la ecuación de estructura de la estrella:

$$\frac{dP}{dr} = (d-3)(\rho + P)R' \quad (5.9)$$

<sup>3</sup>La obtención de las entradas del tensor para esta métrica se encuentran recopiladas en el apéndice B.4.

Para extraer una expresión explícita de  $P$  es claramente necesario tener información adicional sobre  $Z(r)$ . No obstante, tal y como indican los autores en el artículo, se encuentra que la presión puede ser relacionada con la entrada  $rr$  del tensor de Einstein a través de  $P = G_{rr}/(\kappa c^4)$ , con lo que resulta:

$$P = \frac{(d-3)}{r^{2(d-3)}(1-r^2Z)^2} e^{-2Y} \partial_r \left[ r^{2(d-2)} Z \right] \quad (5.10)$$

## 5.1. Condiciones de regularidad de un fluido.

Se comienza imponiendo que la métrica en el interior de la estrella sea regular, para lo cual según [32], es necesario imponer sobre la parametrización que  $Z(0)$  y  $Z'(0)$  sean ambos finitos. Bajo estas condiciones, la presión en el centro de la estrella  $r = 0$  es:

$$P_c = 2(d-2)(d-3) Z(0) \quad (5.11)$$

Pero esta presión ha de ser evidentemente positiva con lo que, en concreto se debe satisfacer  $Z(0) > 0$ .

Por otro lado, se busca obtener la densidad de energía en el centro estelar. De forma análoga al resultado obtenido para la presión, se encuentra la siguiente relación  $\rho = \frac{G_{tt}+3G_{rr}}{\kappa c^4} - 3P$  de la densidad de energía en función de las entradas del tensor de Einstein. Sustituyendo, la expresión anterior resulta:

$$\rho = \frac{2}{\kappa} \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{r^2 \sqrt{-\frac{2}{d-2}} r Z'}{1 - Zr^2} \right)' + \frac{2Zr \sqrt{-\frac{2}{d-2}} r Z'}{(d-2)(1 - Zr^2)^2} \right] - \frac{d-1}{d-3} P \quad (5.12)$$

Que, teniendo en cuenta los cambios de variable anteriormente definidos, se reduce a:

$$\rho = \frac{2}{\kappa} \left[ \frac{1}{r^2} (r^2 R')' + V' R' \right] - \frac{d-1}{d-3} P \quad (5.13)$$

De forma que, considerando la coordenada radial  $r = 0$ :

$$\rho_c = \frac{2}{\kappa} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{2R'(0)}{r} + R''(0) \right] - \frac{d-1}{d-3} P_c \quad (5.14)$$

Donde se ha utilizado el hecho de que  $V'(0) = 0$ . La forma de la expresión anterior en la que se hace presente el límite tiene razón de ser ya que, como la densidad en el centro estelar ha de ser finita, es necesario imponer la condición  $R'(0) = 0$  para que no diverja. Esta condición entonces se traduce en exigir que  $Z'(0) = 0$ , con lo cual:

$$\rho_c + \frac{d-1}{d-3} P_c = \frac{2}{\kappa} R''(0) \quad (5.15)$$

Que directamente da lugar a:

$$\rho_c + \frac{d-1}{d-3}P_c = \mp \frac{2}{\kappa} \sqrt{-2(d-2)Z''(0)} \quad (5.16)$$

Es claro que la función  $Z(r)$  debe cumplir que  $Z''(0) < 0$  para que la raíz sea real. Además, al tener que ser la presión y la densidad de energía estrictamente positivas, se concluye que en la definición de  $R'$  dada en (5.8) se debe tomar el signo negativo, de modo que se compense en esta última expresión y se obtenga que las cantidades anteriormente especificadas son realmente positivas. Aunando todas las condiciones obtenidas mediante la exigencia de regularidad del fluido, se concluye:

$$R' = -\frac{\sqrt{\frac{2}{d-2}rZ'}}{1-r^2Z} \quad , \quad Z(r): \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que :} \quad \begin{cases} Z(0) > 0 \\ Z'(0) = 0 \\ Z''(0) < 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

## 5.2. El agujero negro de Tangherlini

En este apartado se reobtendrá la solución vista el en capítulo 4 como el agujero negro de Tangherlini, pero en este caso partiendo de una métrica en coordenadas isotrópicas. La analogía con dicho resultado se debe a que se encuentra planteando el estudio de la solución exterior a la estrella, al igual que se hizo en el capítulo anterior en dicha sección.

A partir de la entrada tiempo-tiempo del tensor de Ricci dada en (5.3), se obtiene la entrada correspondiente al tensor de Einstein:

$$G_{tt} = -\frac{d-2}{r}e^{2(X-Y)}\partial_r(e^{-Y}\partial_r(re^Y)) - \frac{(d-2)(d-3)}{2r^2}e^{2(X-Y)}\left\{e^{-2Y}[\partial_r(re^Y)]^2 - 1\right\} \quad (5.18)$$

Que se puede simplificar para llegar a la expresión:

$$G_{tt} = -\frac{2(d-2)}{(d-3)r^n}e^{2X-\frac{d+1}{2}Y}\partial_r\left[r^{d-2}\partial_re^{\frac{d-3}{2}Y}\right] \quad (5.19)$$

Calculando la solución exterior, es decir la asociada a  $G_{tt} = 0$ , integrando y manejando términos resulta:

$$e^{2Y} = H_+^{\frac{4}{d-3}} \quad , \quad \text{donde :} \quad H_+ = 1 + \frac{\zeta}{r^{d-3}} \quad (5.20)$$

Siendo  $\zeta$  una constante que debe estar relacionada con la masa del agujero negro. Para encontrar la solución restante basta considerar la condición:

$$e^{2X-2Y}R_{tt} + R_{rr} = 0 \quad (5.21)$$

Operando con las entradas del tensor de Ricci calculadas en (5.3), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\partial_r X = \partial_r \log [1 + \partial_r Y] \quad (5.22)$$

Que, al ser resuelta, depende de una constante  $\Psi$  la cual imponiendo que la métrica sea asintóticamente plana ( $X \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ ) fija el valor de la misma a  $\Psi = 0$ . Con todo esto, se deduce:

$$e^X = 1 + \partial_r Y \quad (5.23)$$

De donde, utilizando la solución (5.20) previamente encontrada, se tiene:

$$e^{2X} = \left( \frac{H_-}{H_+} \right)^2, \text{ donde: } H_- = 1 - \frac{\zeta}{r^{d-3}} \quad (5.24)$$

Una vez determinadas completamente las soluciones, la métrica isótropa (5.1) se reduce a:

$$ds^2 = - \left( \frac{H_-}{H_+} \right)^2 dt^2 + H_+^{\frac{4}{d-3}} \left[ dr^2 + r^2 dS^{d-2} \right] \quad (5.25)$$

Con lo que queda totalmente definida la métrica del agujero negro de Tangherlini, salvo una constante  $\zeta$ . Para hallar el valor de dicha constante, se puede hacer el cambio a coordenadas de Schwarzschild, con lo que se considerará el cambio de variable dado por:

$$\frac{r^{d-3}}{\zeta} = \frac{y+1}{1-y}, \text{ con: } y = \sqrt{1 - \frac{4\zeta}{\hat{r}^{d-3}}} \quad (5.26)$$

Con lo que la métrica anterior se puede escribir bajo una función  $f(\hat{r})$ :

$$ds^2 = -f(\hat{r})dt^2 + f(\hat{r})dr^2 + \hat{r}^2 dS^{d-2}, \quad f(\hat{r}) = 1 - \frac{4\zeta}{\hat{r}^{d-3}} \quad (5.27)$$

Comparando esta métrica con la obtenida para el agujero negro de Tangherlini en 4 dimensiones (4.15), se encuentra que  $\zeta = 2C$ , siendo  $C$  la constante determinada en dicha sección. Con esto se concluye que el valor de la constante  $\zeta$  viene dado por:

$$\zeta = \frac{\kappa}{2(d-2)V_{(d-2)}} M \quad (5.28)$$

Para finalizar esta sección, se encontrará una expresión para la función  $Z(r)$  a partir de la cual se obtenga la solución de Tangherlini. Partiendo de la ecuación (5.10) para la presión, y teniendo en cuenta que la solución de Tangherlini es una solución exterior, se tiene que la presión es cero con lo cual:

$$Z(r) = \frac{\Psi}{r^{2(d-2)}} \quad (5.29)$$

Donde  $\Psi$  es una constante cuyo valor deberá ser fijado. Por otro lado, teniendo que de (5.24) se deduce  $X = \log H_- - \log H_+$ , operando y sustituyendo en (5.5) se encuentra la siguiente expresión para  $R'$ :

$$R' = -\frac{2\zeta}{r^{d-2}} \left(1 - \frac{\zeta^2}{r^{2(d-3)}}\right)^{-1} \quad (5.30)$$

Pero, utilizando la expresión de  $Z(r)$  encontrada anteriormente y sustituyéndola en la ecuación (5.8) de forma que se cumplan las condiciones de regularidad<sup>4</sup>, resulta:

$$R' = -\frac{2\sqrt{\Psi}}{r^{d-2}} \left(1 - \frac{\Psi}{r^{2(d-3)}}\right)^{-1} \quad (5.31)$$

Comparando ambas expresiones, se identifica directamente que  $\Psi = \zeta^2$ , con lo que se concluye:

$$Z(r) = \frac{\zeta^2}{r^{2(d-2)}} \quad (5.32)$$

Que es la forma explícita de  $Z(r)$  que da como resultado el agujero negro de Tangherlini, según la parametrización tomada por Rahman y Visser.

### 5.3. Clase de soluciones del tipo Rahman-Visser

Este apartado trata una de las soluciones encontradas por S. Rahman y M. Visser en el artículo [32]. En este caso, consideran como hipótesis de partida la siguiente expresión para  $Z(r)$ :

$$Z(r) = \hat{\zeta} \frac{1 - \hat{\gamma}r^2}{1 + \hat{\eta}r^2} \quad \text{tal que : } Z(0) > 0, Z''(0) < 0 \quad (5.33)$$

Donde a partir de la primera condición en el origen se obtiene que  $\hat{\zeta} > 0$  y, por otro lado, la segunda implica que  $\hat{\gamma} + \hat{\eta} > 0$ .

El método de integración directa de  $Z(r)$  para obtener las expresiones de  $R$  y  $V$ , con las que posteriormente hallar  $e^{2X}$ ,  $e^{2Y}$ , representa un verdadero ejercicio de cálculo además de dar lugar a resultados poco manejables. Alternativamente los autores optaron por considerar 3 parámetros  $\gamma, \eta$  y  $\xi$  y escribir la métrica como:

$$ds^2 = -\left(\frac{1 + \gamma r^2}{1 + \eta r^2}\right)^{-(d-3)\xi} + \left(\frac{1 + \gamma r^2}{1 + \eta r^2}\right)^{\xi - \sqrt{1+(d-2)\xi^2}} \frac{dr^2 + r^2 dS^{d-2}}{(1 + \gamma r^2)(1 + \eta r^2)} \quad (5.34)$$

Que se trata de una solución de un fluido perfecto para valores arbitrarios de los parámetros.

Esta expresión con cierta complejidad podría ser sospechosa de carecer de sentido físico, sin embargo, observa que si se toma el caso 4 dimensional ( $d = 4$ ) y se fija el valor de la constante

<sup>4</sup>Es decir, tomando el signo  $-$ .

$\xi_{Schw} = 2$  se recupera la que es conocida como *métrica interior de Schwarzschild*. Alternativamente, de fijar la constante  $\xi_{Stw} = -2$  resulta una solución conocida bajo el nombre de *métrica de Stewart*.

Dada esta métrica, utilizando las ecuaciones de Einstein para relacionar la presión y densidad de energía presentes en las entradas del tensor de energía momento y recordando la condición de isotropía sobre el tensor de Einstein se tiene:

$$P = \frac{G_{rr}}{\kappa} = \frac{G_{\theta\theta}}{\kappa} = \frac{G_{\phi\phi}}{\kappa} ; \quad \rho = \frac{G_{tt}}{\kappa} \quad (5.35)$$

Las expresiones explícitas son altamente complicadas y no requieren mención especial ya que la información relevante se encuentra en los valores en el núcleo de la estrella, por lo que no se darán sus versiones explícitas, las cuales pueden ser encontradas en el capítulo 4.5 de la referencia [32]. Así, la expresión general de la presión en el centro estelar es:

$$P_c = (d-2)(d-3)(\sqrt{1+(d-2)\xi^2} - 1)(\eta - \gamma) \quad (5.36)$$

Mientras que la de la densidad de energía del mismo:

$$\rho_c = (d-2)(d-1) \left[ \eta(\xi + 1 - \sqrt{1+(d-2)\xi^2}) - \gamma(\xi - 1 - \sqrt{1+(d-2)\xi^2}) \right] \quad (5.37)$$

### 5.3.1. Métrica de Schwarzschild generalizada para el interior estelar

Para obtener una generalización a  $d$  dimensiones de la métrica interior de Schwarzschild, hay que considerar el valor del parámetro  $\xi = 2/(d-3)$ . Con este parámetro se tiene que la potencia  $\xi - \sqrt{1+(d-2)\xi^2} = -1 \quad \forall d \in \mathbb{N}, d \geq 4$  con lo que la métrica anteriormente dada se convierte en:

$$ds^2 = - \left( \frac{1 + \gamma r^2}{1 + \eta r^2} \right)^{-2} + \left( \frac{1 + \gamma r^2}{1 + \eta r^2} \right)^{-1} \frac{dr^2 + r^2 dS^{d-2}}{(1 + \gamma r^2)(1 + \eta r^2)} \quad (5.38)$$

Operando se simplifica a la métrica:

$$ds^2 = - \left( \frac{1 + \eta r^2}{1 + \gamma r^2} \right)^2 + \frac{1}{(1 + \gamma r^2)^2} d\vec{x}_{d-1} \quad (5.39)$$

Con lo que es posible obtener una generalización de dicha métrica.

Con respecto a la densidad de energía y la presión, como se ve en el apartado 4.7 de [32], las expresiones para la presión y densidad de energía resultan en este caso:

$$P = \frac{2(d-2)\gamma}{\kappa(1 + \eta r^2)} \{ \bar{\eta} - (d-2) - [(d-2)\bar{\eta} - 1]\gamma r^2 \} \quad (5.40)$$

Habiendo introducido el cambio de variable  $\bar{\eta} = \eta/\gamma$ . Además la densidad de energía de la estrella se encuentra que es constante, con valor:

$$\rho = \rho_0 = \frac{2d(d-1)\gamma}{\kappa} \quad (5.41)$$

Y que por tanto será el valor que tome en el centro de la misma. Esto puede verse como una primera pista para intuir que el resultado que se obtendrá será una estrella regida por la métrica del interior de Schwarzschild. De igual forma, la presión en el núcleo de la estrella se deduce que es:

$$P_c = \frac{2(d-2)\gamma}{\kappa} [\bar{\eta} - (d-2)] \quad (5.42)$$

Luego, imponiendo que ambas sean estrictamente positivas se deduce:

$$\gamma > 0 \quad , \quad \eta > d-2 \quad (5.43)$$

Visto que ambas son estrictamente positivas, la condición de la positividad de la presión y dada la expresión (5.42), se tiene que el límite  $\eta \rightarrow \infty$  provoca una divergencia de la presión del núcleo y por tanto el colapso gravitacional de la estrella. Además, imponiendo la continuidad de la presión en el borde de la estrella se halla el radio estelar:

$$R_\star = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\bar{\eta} - (d-2)}{(d-2)\bar{\eta} - 1} \quad (5.44)$$

Ahora se puede intentar relacionar estos resultados con los ya encontrados para la métrica interior de Schwarzschild. Para ello, será necesario definir las siguientes coordenadas:

$$\sqrt{\gamma} R = \frac{\tan(\chi/2)}{\sqrt{2}} \quad , \quad t = \frac{2}{\bar{\eta} - 1} \tau \quad , \quad \frac{\bar{\eta} + 1}{\bar{\eta} - 1} = \frac{d-1}{d-3} \cos(\chi_\star) \quad (5.45)$$

Utilizando estas coordenadas en la métrica (5.38), ésta se convierte en:

$$ds^2 = - \left[ \frac{d-1}{d-3} \cos(\chi_\star) - \cos(\chi) \right]^2 d\tau^2 + \frac{1}{4\gamma} \left[ d\chi^2 + \text{sen}^2(\chi) dS^{d-2} \right] \quad (5.46)$$

Que es básicamente la solución (4.59) encontrada al resolver el caso Tolman III en d-dimensiones, por lo que se acaba de verificar que efectivamente esa solución d-dimensional es una generalización d-dimensional de la métrica de Schwarzschild para el interior estelar.

### 5.3.2. Métrica de Stewart generalizada

Análogamente al apartado anterior, se puede obtener una generalización de la métrica de Stewart considerando el valor del parámetro  $\xi = -2/(d-3)$ . Se observa entonces que:

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \gamma r^2}{1 - \eta r^2} \right)^2 dt^2 + \frac{(1 - \eta r^2)^{4/(d-3)}}{(1 - \gamma r^2)^{2(d-1)/(d-3)}} d\vec{x}_{d-1} \quad (5.47)$$

Donde se han tomado las constantes  $\gamma, \eta$  con signo contrario con respecto a las consideradas en el apartado de Schwarzschild por conveniencia futura. Así, la relación entre constantes sería:  $\gamma_{Stw} = -\gamma_{Schw}$ ,  $\eta_{Stw} = -\eta_{Schw}$ . Las expresiones generales para la presión y densidad de energía, tomadas en este caso del capítulo 4.8 de [32], son:

$$P = \frac{2(d-2)}{\kappa} (1-\gamma r^2)^{\frac{4}{d-3}} (1-\eta r^2)^{-\frac{d+1}{d-3}} \{ (d-2)\gamma - \eta + [\gamma - (d-2)\eta]\gamma r^2 \} \quad (5.48)$$

$$\rho = \frac{2(d-2)(d-1)}{\kappa(d-3)} (1-\gamma r^2)^{\frac{4}{d-3}} (1-\eta r^2)^{-\frac{d+1}{d-3}} \{ 2\eta - (d-1)\gamma - [\gamma - (d-2)\eta]\gamma r^2 \} \quad (5.49)$$

Luego, en el centro de la estrella se tiene que la presión y la densidad de masa:

$$P_c = \frac{2(d-2)}{\kappa} [(d-2)\gamma - \eta] \quad (5.50)$$

$$\rho_c = \frac{2(d-2)(d-1)}{\kappa(d-3)} [2\eta - (d-1)\gamma] \quad (5.51)$$

Imponiendo como de costumbre las condiciones de regularidad asociadas a ambas funciones se encuentra siguiente acotación sobre  $\gamma$  en función de  $\eta$ :

$$\frac{\eta}{d-2} < \gamma < \frac{2\eta}{d-1} \quad (5.52)$$

Y, finalmente, por la continuidad de la presión en el borde de la estrella se halla que el radio de la misma es:

$$R_\star = \frac{1}{\gamma} \frac{(d-2)\gamma - \eta}{(d-2)\eta - \gamma} \quad (5.53)$$

## Capítulo 6

# Conclusiones

La primera conclusión no puede ser otra que remarcar la superioridad de utilizar la relatividad general en vez de la mecánica Newtoniana para estudiar fenómenos en los que los efectos gravitatorios predominan sobre el resto de fuerzas fundamentales. Así, como se ha podido ir viendo, el uso de cálculos más sofisticados por medio de la mecánica relativista y el tener en cuenta la geometría del espacio tiempo establece límites sobre magnitudes como el radio y masa de una estrella, en contraposición a lo que se obtenía en el caso Newtoniano.

A partir de la repetición de los resultados obtenidos por Schwarzschild, se realizó una representación gráfica tridimensional para dar una mejor comprensión de la estructura de un agujero negro de Schwarzschild y la relación entre el horizonte de sucesos y la esfera de fotones. Con la definición del concepto de compacidad se pudo establecer una comparativa sobre la compacidad de estrellas pertenecientes a distintos tipos estelares, tomando los datos de la tabla 3.1 que fueron posteriormente representados en la figura 3.2. Analizando dichos resultados se concluye que las estrellas de neutrones son aquellas que se encuentran más cercanas al colapso gravitatorio y a convertirse, por tanto, en agujeros negros, siendo las supergigantes rojas las más estables de la clasificación.

Por otro lado se obtuvo la ecuación TOV, una ecuación de estructura que permite conocer el comportamiento de la presión en distintas partes de la estrella, observándose además que se trata de una generalización de la encontrada en el caso Newtoniano al reducirse a la misma al tomar el límite clásico. A partir de este resultado se obtuvieron soluciones para estrellas con densidad de masa constante, o estrellas de Buchdahl, y con una ecuación de estado lineal, o estrellas de materia conforme. En el caso de las estrellas de Buchdahl se determinó que son intrínsecamente estables, y por tanto en ningún caso se observará el colapso de las mismas, además de encontrar que la presión en el núcleo toma un

valor finito, en contraposición al obtenido en el análisis Newtoniano. Además se mencionó el Teorema de Buchdahl, un resultado que establece una cota superior de compacidad para cualquier estrella estática con simetría esférica, por el cual no alcanzan a ser agujeros negros. Este límite, además de su importancia teórica, también nos permite hallar un rango de compacidad para el que una estrella presenta una esfera de fotones accesible. Con respecto a las llamadas estrellas de materia conforme, se dedujo que dicha materia conforme tiene un comportamiento de tipo gaseoso y busca ocupar la mayor cantidad de espacio posible, haciendo que su posible extensión sea infinita. También se halló la ecuación de Tolman y se resolvieron tres de sus 8 casos particulares, siendo el caso Tolman I en el cual se recupera la métrica conocida como el Universo de Einstein, el caso Tolman III la solución de Schwarzschild para el interior estelar, mientras que en Tolman IV se deducen las propiedades de una estrella para la cual llega a obtenerse un valor crítico de un parámetro que delimita la estabilidad o colapso gravitacional del sistema.

En cuanto a la extensión dimensional de los resultados hecha en el capítulo 3, permite ver cuánto cambian las ecuaciones al considerar dimensiones superiores y, una vez obtenidas, comprobar que éstas son consistentes y se reducen a las encontradas en el capítulo anterior. El caso del agujero negro de Tangherlini no es más que una generalización de la solución exterior de Schwarzschild, no obstante, destaca que se pierde el resultado de W. Israel sobre la unicidad de agujeros negros estáticos y asintóticamente planos. Como prueba de ello fueron mencionados los contraejemplos encontrados por Myers y Perry o R. Emparan y H.S. Reall, sin embargo, se encontró que exigiendo la condición adicional de simetría esférica para el agujero negro se recupera tal unicidad, según W. Gibbons, D. Ida y T. Shiromizu.

En el último capítulo se siguió la idea de Rahman y Visser para la descripción de estrellas estáticas con simetría esférica e isótropas, para lo que se realizó un cambio de coordenadas a un sistema que presentase dicha isotropía. Partiendo de la nueva forma de la métrica se presentó la metodología utilizada por los autores para el cálculo de soluciones explícitas por medio de la parametrización de una función  $Z(r)$ , cuya expresión varía en cada caso a resolver, pero a partir de la cual se pueden encontrar todas las soluciones para este tipo de estrellas. Se realizó el cálculo de la solución exterior, es decir, el análogo a la solución del agujero negro de Tangherlini y se obtuvo la expresión de  $Z(r)$  que da lugar a la misma. En la última sección del capítulo, se utiliza una expresión propuesta por los autores de la función generadora  $Z(r)$  para obtener una métrica generalizada dependiente de tres parámetros que permite encontrar, bajo ciertos valores de dichos parámetros, una versión generalizada de la métrica

de Schwarzschild para el interior de una estrella y la métrica de Stewart en  $d$ -dimensiones.

Finalmente, desde un punto de vista más personal, la elección de este trabajo se debió a que no quería terminar el grado sin haber aprendido nada sobre la teoría de la relatividad general. Adicionalmente, este trabajo me ha permitido trabajar y realizar cálculos sobre estructuras cosmológicas tan interesantes como estrellas y agujeros negros, las cuales siempre han llamado mi atención por su complejidad y características. Ahora, terminada esta memoria, puedo afirmar que este objetivo ha sido cumplido por encima de mis propias expectativas, habiendo pasado de no saber nada hace unos meses a nivel universitario sobre este área, a ser capaz ahora de realizar cálculos como determinar la geometría del espacio-tiempo o concluir las circunstancias bajo las cuales se produce el colapso gravitatorio. La realización del mismo me ha permitido también ponerme en el papel de la piel de un investigador, habiendo invertido numerosas horas en el proceso de lectura artículos y teniendo, en varias ocasiones, que dedicar más tiempo del debido para intentar comprender mínimamente la fugacidad de las ideas subyacentes que han llevado a tales resultados. Con esto me gustaría agradecer al lector que haya dedicado su tiempo a la lectura de esta memoria y, al igual que yo, espero que le hayan parecido interesantes los conceptos, ideas y resultados aquí tratados.

# Apéndice A

## Apéndice: Convenios

### A.1. Convenios: Relatividad General

Se usarán los convenios utilizados por el profesor J.A. Guarino Almeida en su curso de Relatividad General impartido en la Universidad de Oviedo. Sus notas se encuentran en la referencia [33].

Primeramente, respecto a la métrica, se usará el convenio mayoritariamente positivo, lo que significa que una métrica como la de Minkowski resultaría como sigue:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} . \quad (\text{A.1})$$

El segundo símbolo de Christoffel se calcula:

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] , \quad (\text{A.2})$$

Por tanto la derivada covariante viene dada por la expresión:

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda V_\lambda \xrightarrow{\nabla_\mu g_{\nu\rho}=0} \nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu V^\lambda . \quad (\text{A.3})$$

El tensor de Riemann se define como sigue:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho \equiv R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda V^\lambda \longrightarrow R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho + \Gamma_{\mu\tau}{}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}{}^\tau - \Gamma_{\nu\tau}{}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}{}^\tau . \quad (\text{A.4})$$

Luego, contrayendo el primer y el tercer índice, se obtiene que el tensor de Ricci es:

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu}{}^\lambda{}_\nu = R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda \xrightarrow{\text{Ricci scalar}} R = R_\mu{}^\mu . \quad (\text{A.5})$$

El tensor de einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad \text{y satisface } \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{A.6})$$

Y las ecuaciones de campo de Einstein se escriben:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (\text{A.7})$$

Asumiendo que las ecuaciones de Einstein (A.7) se mantienen en todas las dimensiones, tomando el límite clásico nos permite fijar:

$$G_{(d)} = \frac{8\pi}{V_{(d-2)}} \frac{d-3}{d-2} G_N , \quad (\text{A.8})$$

where  $G_{(d)}$  es la constante de Newton d-dimensional. Notar que claramente:  $[G_N] = [G_{(d)}]$ .

Una breve mención acerca de las unidades: se consideran las coordenadas  $x^\mu$  cada una con unidades de metro  $[x^\mu] = \text{m}$ . Como el elemento diferencial de línea,  $ds$ , es una distancia se tiene que:  $[ds] = \text{m}$ . Esto directamente implica que  $[g_{\mu\nu}] = 1$ . Además, como una derivada parcial con respecto a una coordenada espacial  $x^\mu$  tiene unidades  $[\partial_\mu] = \text{m}^{-1}$ , se tiene que:

$$[\Gamma_{\mu\nu}^\sigma] = \text{m}^{-1} \rightarrow [R_{\mu\nu\kappa\rho}] = \text{m}^{-2} \rightarrow [R_{\mu\nu}] = [R] = \text{m}^{-2} \rightarrow [G_{\mu\nu}] = \text{m}^{-2} . \quad (\text{A.9})$$

A partir de la Ley de Gauss, también conocido como el Teorema de la divergencia, se obtienen las unidades de la constante de Newton d-dimensional:

$$[G_N] = \text{Nm}^{d-2}/\text{g}^2 \quad \text{luego} \quad \left[ \frac{8\pi G_N}{c^4} \right] = \text{m}^{d-3}/\text{E} , \quad (\text{A.10})$$

donde E hacen referencia a las unidades de energía. De esta forma, las ecuaciones de Einstein (A.7) muestran que:

$$[T_{\mu\nu}] = \text{E}/\text{m}^{d-1} , \quad (\text{A.11})$$

Esto significa que con respecto al sistema de coordenadas dado por  $x^\mu$ , el tensor de energía-momento tiene unidades de densidad de energía en  $(d-1)$  dimensiones espaciales. Finalmente, consideremos la presión  $P$ : en 3 dimensiones físicas. La presión es la fuerza ejercida por unidad de superficie perpendicular a la fuerza , luego en un espacio-tiempo 4-dimensional sus unidades en el sistema internacional son:  $\text{N m}^{-2}$ . Pero como:  $\text{E} = \text{N} \cdot \text{m}$ , equivalentemente se tiene:  $[P] = \text{N m m}^{-3} = \text{E}/\text{m}^3$ . Extendiendo la presión a  $(d-1)$  dimensiones espaciales, entonces la superficie perpendicular a la fuerza es  $(d-2)$  espacio-dimensional, luego:

$$[P] = \text{N}/\text{m}^{d-2} = \text{E}/\text{m}^{d-1} , \quad (\text{A.12})$$

Por tanto se concluye que en  $d$  dimensiones la presión tiene unidades de densidad de energía.

Considérese  $u^\mu$  como el vector de cuadrivelocidad de un fluido perfecto, con:  $u_\mu u^\mu = -1$ . Se tiene entonces:

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (\rho c^2 + P) u_\mu u_\nu, \quad (\text{A.13})$$

Donde  $P$  es la presión y  $\rho$  es la densidad de masa. Obsérvese que:  $T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \rho c^2$ , que es la densidad de energía en la dirección de la velocidad del fluido.

## Apéndice B

# Apéndice: Desarrollos

Se incluyen en este apéndice los cálculos teóricos realizados a lo largo del trabajo.

### B.1. Cálculos: métrica de Schwarzschild

Se considera la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2C}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)$$

Cálculo de la entrada  $tt$  del tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{tt} &= R_{\rho t}{}^{\rho}{}_{t} = \partial_{\rho}\Gamma_{tt}{}^{\rho} - \partial_t\Gamma_{\rho t}{}^{\rho} + \Gamma_{\rho\tau}{}^{\rho}\Gamma_{tt}{}^{\tau} - \Gamma_{t\tau}{}^{\rho}\Gamma_{\rho t}{}^{\tau} \\ &= \partial_r\Gamma_{tt}{}^r + \Gamma_{\rho r}{}^{\rho}\Gamma_{tt}{}^r - 2\Gamma_{tr}{}^t\Gamma_{tt}{}^r = \partial_r\Gamma_{tt}{}^r + (\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} - 2\Gamma_{tr}{}^t)\Gamma_{tt}{}^r \end{aligned}$$

Calculando los símbolos de Christoffel para la métrica 3.20:

$$\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} = \partial_r(A - B) + \frac{2}{r} ; \quad \Gamma_{tr}{}^t = \partial_r A ; \quad \Gamma_{tt}{}^r c^2 e^{2(A-B)} \partial_r A$$

Luego:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= c^2 \left[ 2e^{2(A-B)} \partial_r(A - B) \partial_r A + e^{2(A-B)} \partial_{rr} A + e^{2(A-B)} \partial_r A \left( \partial_r(A + B) + \frac{2}{r} \right) \right] \\ &= c^2 \left[ e^{A-B} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{2}{r} e^{2(A-B)} \partial_r A \right] \end{aligned}$$

Cálculo de la entrada  $rr$  del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= R_{\rho r}{}^{\rho}{}_{r} = \partial_{\rho}\Gamma_{rr}{}^{\rho} - \partial_r\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} + \Gamma_{\rho\tau}{}^{\rho}\Gamma_{rr}{}^{\tau} - \Gamma_{r\tau}{}^{\rho}\Gamma_{\rho r}{}^{\tau} \\ &= \partial_r\Gamma_{rr}{}^r - \partial_r - \partial_r\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} + (\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} - \Gamma_{rr}{}^r)\Gamma_{rr}{}^r - \Gamma_{rt}{}^t\Gamma_{tr}{}^t - \Gamma_{r\theta}{}^{\theta}\Gamma_{\theta r}{}^{\theta} - \Gamma_{r\phi}{}^{\phi}\Gamma_{\phi r}{}^{\phi} \end{aligned}$$

Calculando de nuevo los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} = \partial_r A + \partial_r B + \frac{2}{r} ; \quad \Gamma_{r r}{}^r = \partial_r B ; \quad \Gamma_{r t}{}^t = \partial_r A ; \quad \Gamma_{t r}{}^t = \partial_r A$$

Entonces:

$$\begin{aligned} R_{r r} &= \partial_{r r} B - \partial_{r r} A - \partial_{r r} B + \frac{2}{r} + \left( \partial_r A + \frac{2}{r} \right) \partial_r B - (\partial_r A)^2 - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \\ &= -\partial_{r r} A + \left( \partial_r A + \frac{2}{r} \right) \partial_r B - (\partial_r A)^2 \\ &= -e^{B-A} \partial_r (e^{A-B} \partial_r A) + \frac{2}{r} \partial_r B \end{aligned}$$

Cálculo de la entrada  $\theta\theta$  del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= R_{\rho\theta}{}^{\rho} = \partial_{\rho} \Gamma_{\theta\theta}{}^{\rho} - \partial_{\theta} \Gamma_{\rho\theta}{}^{\rho} + \Gamma_{\rho\tau}{}^{\rho} \Gamma_{\theta\theta}{}^{\tau} - \Gamma_{\theta\tau}{}^{\rho} \Gamma_{\rho\theta}{}^{\tau} \\ &= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}{}^r - \partial_{\theta} \Gamma_{\phi\theta}{}^{\phi} + (\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} - 2\Gamma_{\theta r}{}^{\theta}) \Gamma_{\theta\theta}{}^r - \Gamma_{\theta\phi}{}^{\phi} \Gamma_{\phi\theta}{}^{\phi} \end{aligned}$$

Calculando de nuevo los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\phi\theta}{}^{\phi} = -\frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} ; \quad \Gamma_{\theta\phi}{}^{\phi} = \text{cotg}(\theta) ; \quad \Gamma_{\theta\theta}{}^r = -r e^{-2B} ; \quad \Gamma_{\theta r}{}^{\theta} = \frac{1}{r}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= -e^{-2B} + 2r e^{-2B} \partial_r B + \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} + \left( \partial_r A + \partial_B + \frac{2}{r} - \frac{2}{r} \right) (-r) e^{-2B} - \frac{\cos^2(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)} \\ &= r e^{-2B} \partial_r (B - A) + 1 - e^{-2B} \end{aligned}$$

Finalmente, la entrada  $\phi\phi$  del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= R_{\rho\phi}{}^{\rho} = \partial_{\rho} \Gamma_{\phi\phi}{}^{\rho} + \Gamma_{\rho\tau}{}^{\rho} \Gamma_{\phi\phi}{}^{\tau} - \Gamma_{\phi\tau}{}^{\rho} \Gamma_{\rho\phi}{}^{\tau} \\ &= \partial_r \Gamma_{\phi\phi}{}^r + \partial_{\theta} \Gamma_{\phi\phi}{}^{\theta} + \Gamma_{\rho r}{}^{\rho} \Gamma_{\phi\phi}{}^r + \Gamma_{\rho\theta}{}^{\rho} \Gamma_{\phi\phi}{}^{\theta} - \Gamma_{\phi r}{}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}{}^r - \Gamma_{\phi\theta}{}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}{}^{\theta} - \Gamma_{\phi\phi}{}^r \Gamma_{r\phi}{}^{\phi} - \Gamma_{\phi\phi}{}^{\theta} \Gamma_{\theta\phi}{}^{\phi} \\ &= \partial_r \Gamma_{\phi\phi}{}^r + \partial_{\theta} \Gamma_{\phi\phi}{}^{\theta} + (\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} - 2\Gamma_{\phi r}{}^{\phi}) \Gamma_{\phi\phi}{}^r + (\Gamma_{\rho\theta}{}^{\rho} - 2\Gamma_{\phi\theta}{}^{\phi}) \Gamma_{\phi\phi}{}^{\theta} \end{aligned}$$

uso del siguiente símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\phi\phi}{}^r = -r \text{sen}^2(\theta) e^{-2B} ; \quad \Gamma_{\phi\phi}{}^{\theta} = -\text{sen}\theta \cos\theta ; \quad \Gamma_{\phi\theta}{}^{\phi} = \Gamma_{\rho\theta}{}^{\rho} = \text{cotg}\theta$$

Luego se obtiene:

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= -\text{sen}^2(\theta) e^{-2B} + 2r \text{sen}^2(\theta) e^{-2B} \partial_r B - \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) \\ &\quad + \left( \partial_r A + \partial_r B + \frac{2}{r} - \frac{2}{r} \right) (-r) \text{sen}^2(\theta) e^{-2B} + (\text{cotg}\theta - 2\text{cotg}\theta) (-\text{sen}\theta) \cos\theta \\ &= -\text{sen}^2(\theta) e^{-2B} + r \text{sen}^2(\theta) e^{-2B} \partial_r (B - A) - \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) \\ &= [r e^{-2B} \partial_r (B - A) + 1 - e^{-2B}] \text{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

Luego es claro que, considerando  $h_{ij}$  la métrica de la 2-esfera, es válida la siguiente fórmula general:

$$R_{ij} = [re^{-2B}\partial_r(B - A) + 1 - e^{-2B}] h_{ij} \quad ; \quad \forall ij \in [\theta, \phi]$$

## B.2. Límite a bajas velocidades de las geodésicas

Se parte de la ecuación de las Geodésicas:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (\text{B.1})$$

En el límite a bajas velocidades, se tiene que:  $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^t}{d\tau}$ , luego la ecuación de las geodésicas se reduce a:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{tt}^\mu \frac{dx^t}{d\tau} \frac{dx^t}{d\tau} = 0$$

A partir del cálculo del símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{tt}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{tt}$$

A partir de la suposición de estar en presencia de un campo gravitacional débil, esto es que la métrica se puede expresar como la métrica de Minkowski más una perturbación:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ; \quad h_{\mu\nu} \ll 1 \quad (\text{B.2})$$

Sustituyendo esta aproximación de la métrica se tiene:

$$\Gamma_{tt}^\mu = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{tt} + O(h^2)$$

Y se obtienen 4 ecuaciones:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Analizando la primera ecuación, dada por la coordenada temporal  $x^\mu = t$ , se tiene que  $\eta^{tt} = 1$  luego:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\partial_t h_{tt} = 0$$

A partir de la hipótesis dada en el límite Newtoniano de tener una métrica estática:  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0 \implies \partial_t h_{\mu\nu} = 0$  y así:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Analizando ahora el resto de ecuaciones, dadas por las coordenadas espaciales:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{tt} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

$$\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{tt} = \frac{1}{2} \partial_i h_{tt} \quad (\text{B.4})$$

Por un lado:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{d^2 x^i}{dt^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Utilizando el resultado obtenido en la ecuación B.3 correspondiente a la coordenada temporal, se llega a la siguiente relación:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Sustituyendo este último resultado en la ecuación B.4, se obtiene:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{tt}$$

Analizando este resultado, claramente  $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = a$  la aceleración en una determinada dirección espacial.

La Ley de Newton dice que:  $a = -\frac{1}{2} \partial_i \Phi$  donde  $\Phi$  es el potencial gravitatorio. De este modo, para que concuerden la Ley de Newton y el cálculo hecho usando relatividad general es necesario que se de la igualdad:

$$h_{tt} = -\frac{2}{c^2} \Phi \quad (\text{B.5})$$

Se concluye por tanto:

$$g_{tt} \sim \eta_{tt} + h_{tt} = -1 - \frac{2}{c^2} \Phi$$

$$g_{tt} \sim -\left(1 + \frac{2}{c^2} \Phi\right)$$

### B.3. Cálculos: métrica del interior estelar

Para tratar el caso de la métrica en el interior de una estrella, es necesario considerar una versión más precisa de la misma que la usada en el apartado anterior. La métrica considerada es:

$$ds^2 = -c^2 e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N m(r)}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (\text{B.6})$$

Cálculo de la entrada  $tt$  del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= R_{\rho t}{}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{tt}{}^{\rho} + \Gamma_{\rho r}{}^{\rho}\Gamma_{tt}{}^r - \Gamma_{t\tau}{}^{\rho}\Gamma_{\rho t}{}^{\tau} \\ &= \partial_r\Gamma_{tt}{}^r + \Gamma_{\rho r}{}^{\rho}\Gamma_{tt}{}^r - \Gamma_{tt}{}^r\Gamma_{rt}{}^t - \Gamma_{tr}{}^t\Gamma_{tt}{}^r \\ &= \partial_r\Gamma_{tt}{}^r + (\Gamma_{\rho r}{}^{\rho} - 2\Gamma_{tr}{}^t)\Gamma_{tt}{}^r \\ &= \partial_r\Gamma_{tt}{}^r + (\Gamma_{rr}{}^r + \Gamma_{\theta r}{}^{\theta} + \Gamma_{\phi r}{}^{\phi} - \Gamma_{tr}{}^t)\Gamma_{tt}{}^r \end{aligned}$$

Calculando los símbolos de Christoffel para la métrica 3.33:

$$\Gamma_{rr}{}^r = \frac{G_N(m - rm)}{2G_N r m' - c^2 r^2} ; \Gamma_{tt}{}^r = \frac{c^2 r - 2G_N m}{r} \phi e^{2\phi} ; \Gamma_{rt}{}^t = \phi' ; \Gamma_{\theta r}{}^{\theta} = \Gamma_{\phi r}{}^{\phi} = \frac{1}{r}$$

Y se obtiene:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{e^{2\phi}}{r^2} [3G_N m \phi' - c^2 r^2 (\phi'' + (\phi')^2) - 2c^2 r \phi' + 2G_N r m (\phi'' + (\phi')^2) + G_N r m' \phi'] \\ &= -e^{2\phi} \left[ \phi' (3G_N m - 2rc^2 + G_N r m') + (\phi'' + (\phi')^2) \left( \frac{2G_N m}{r} - c^2 \right) \right] \\ &= e^{2\phi} \left[ (\phi'' + (\phi')^2) \left( c^2 - \frac{2G_N m}{r} \right) + \phi' \left( \frac{2rc^2 - 3G_N m - G_N r m'}{r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Cálculo de la entrada  $rr$  del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= R_{\rho r}{}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{rr}{}^{\rho} + \Gamma_{\rho r}{}^{\rho}\Gamma_{rr}{}^r - \Gamma_{r\tau}{}^{\rho}\Gamma_{\rho r}{}^{\tau} \\ &= -\partial_r\Gamma_{tr}{}^t - \partial_r\Gamma_{\theta r}{}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{\phi r}{}^{\phi} + \Gamma_{\rho r}{}^{\rho}\Gamma_{rr}{}^r - (\Gamma_{rr}{}^r)^2 - (\Gamma_{rt}{}^t)^2 - (\Gamma_{\theta r}{}^{\theta})^2 - (\Gamma_{\phi r}{}^{\phi})^2 \\ &= -\partial_r\Gamma_{tr}{}^t - \partial_r\Gamma_{\theta r}{}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{\phi r}{}^{\phi} + (\Gamma_{rt}{}^t + \Gamma_{\theta r}{}^{\theta} + \Gamma_{\phi r}{}^{\phi})\Gamma_{rr}{}^r - (\Gamma_{\theta r}{}^{\theta})^2 - (\Gamma_{\phi r}{}^{\phi})^2 \end{aligned}$$

En este caso no es necesario el cálculo de símbolos de Christoffel adicionales, por lo que:

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= -\phi'' - (\phi')^2 + \left(\phi' + \frac{2}{r}\right) \frac{G_N(m - rm')}{2G_Nrm - c^2r^2} \\
&= -\phi'' - (\phi')^2 + \frac{(2 + r\phi')G_N(m - rm')}{2G_Nr^2m - c^2r^3} \\
&= -\phi'' - (\phi')^2 + \left[\frac{(2 + r\phi')(rm' - m)}{c^2r^3}\right] \frac{G_N}{\left(1 - \frac{2G_Nm}{c^2r}\right)} \\
&= \left(1 - \frac{2G_Nm}{rc^2}\right)^{-1} \left[\frac{G_N(2 + r\phi')(rm' - m)}{c^2r^3}\right] - \phi'' - (\phi')^2
\end{aligned}$$

Cálculo de la entrada  $\theta\theta$  del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= R_{\rho\theta\theta}{}^\rho = \partial_\rho\Gamma_{\theta\theta}{}^\rho - \partial_\theta\Gamma_{\phi\theta}{}^\phi + \Gamma_{\rho r}{}^\rho\Gamma_{\theta\theta}{}^r - \Gamma_{\theta\tau}{}^\rho\Gamma_{\rho\theta}{}^\tau \\
&= \partial_r\Gamma_{\theta\theta}{}^r - \partial_\theta\Gamma_{\phi\theta}{}^\phi + (\Gamma_{rt}{}^t + \Gamma_{rr}{}^r + \Gamma_{\theta r}{}^\theta + \Gamma_{\phi r}{}^\phi)\Gamma_{\theta\theta}{}^r - 2\Gamma_{\theta\theta}{}^r\Gamma_{\theta r}{}^\theta - (\Gamma_{\theta\phi}{}^\phi)^2
\end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$\Gamma_{\phi\theta}{}^\phi = \cot g\theta \ ; \ \Gamma_{\theta\theta}{}^r = \frac{2G_Nm}{c^2} - r$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} + \left[\phi' + \frac{G_N(m - rm')}{2G_Nrm - c^2r^2} + \frac{2}{r}\right] \left(\frac{2G_Nm}{c^2} - r\right) - \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} - \frac{2}{r} \left(\frac{2G_Nm}{c^2} - r\right) \\
&= \left[\phi' + \frac{G_N(m - rm')}{2G_Nrm - c^2r^2} + \frac{2}{r}\right] \left(\frac{2G_Nm}{c^2} - r\right) - \frac{2}{r} \left(\frac{2G_Nm}{c^2} - r\right) \\
&= \phi' \left(\frac{2G_Nm}{c^2} - r\right) + \frac{G_N(m - rm')}{c^2r} \\
&= \phi' \left(\frac{2G_Nm}{c^2} - r\right) + \frac{G_Nm}{c^2r} + \frac{G_Nm'}{c^2}
\end{aligned}$$

Finalmente, para la componente  $\phi\phi$  se encuentra la siguiente relación con respecto a la entrada anterior:

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \cdot \text{sen}^2\theta$$

El escalar de Ricci resulta:

$$\begin{aligned}
R &= -2(\phi'' + (\phi)^2) \left(1 - \frac{2G_{Nm}}{rc^2}\right) + 2\frac{2G_{Nm}'}{c^2r^2} + \frac{\phi'G_N}{c^2r^2}(rm' - m) \\
&+ \frac{\phi'}{c^2r^2}(3G_{Nm} + Grm' - 2rc^2) + \frac{2\phi'}{r} \left(\frac{2G_{Nm}}{rc^2} - 1\right) \\
&= -2(\phi'' + (\phi)^2) \left(1 - \frac{2G_{Nm}}{rc^2}\right) + 2\frac{2G_{Nm}'}{c^2r^2} + \frac{\phi'}{c^2r^2}(G_{Nrm}' + 2G_{Nm} + G_{Nrm}' - 2rc^2) \\
&+ \frac{\phi'4G_{Nm}}{r^2c^2} - \frac{2\phi'}{r} \\
&= -2(\phi'' + (\phi)^2) \left(1 - \frac{2G_{Nm}}{rc^2}\right) + 2\frac{2G_{Nm}'}{c^2r^2} + \frac{\phi'}{c^2r^2}(2G_{Nrm}' + 6G_{Nm} - 4rc^2) \\
&= 2 \left[ \frac{G_{Nm}'}{c^2r^2} + \frac{\phi'}{c^2r^2}(G_{Nrm}' + 3G_{Nm} - 2rc^2) - (\phi'' + (\phi)^2) \left(1 - \frac{2G_{Nm}}{rc^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

#### B.4. Cálculos: métrica isótropa.

Se considera la métrica:

$$ds^2 = -e^{2X} dt^2 + e^{2Y} [dr^2 + r^2 dS^{d-2}] \quad (\text{B.7})$$

La entrada  $tt$  del tensor de Ricci:

$$R_{tt} = \partial_\rho \Gamma_{tt}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{tt}^\lambda - \Gamma_{t\lambda}^\rho \Gamma_{\rho t}^\lambda \quad (\text{B.8})$$

$$= \partial_r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\rho r}^\rho \Gamma_{tt}^r - 2\Gamma_{tt}^r \Gamma_{rt}^t \quad (\text{B.9})$$

$$= c^2 \left[ e^{2(X-Y)} \partial_r X \right] + c^2 e^{2(X-Y)} \partial_r \left[ \partial_r (X + (n-1)Y) + \frac{n}{r} \right] - 2c^2 e^{2(X-Y)} (\partial_r X)^2 \quad (\text{B.10})$$

Esta última expresión se puede simplificar para obtener:

$$R_{tt} = c^2 \left[ e^{X-Y} \partial_r (e^{X-Y} \partial_r X) + \frac{n}{r} e^{2X-3Y} \partial_r X \partial_r (re^Y) \right] \quad (\text{B.11})$$

Respecto a la entrada  $rr$ , se tiene:

$$R_{rr} = \partial_r \Gamma_{rr}^r - \partial_r \Gamma_{\rho r}^\rho + \Gamma_{\rho r}^\rho \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rt}^\rho \Gamma_{\rho r}^t - \Gamma_{rr}^\rho \Gamma_{\rho r}^r - \Gamma_{ri}^\rho \Gamma_{\rho r}^i \quad (\text{B.12})$$

$$= \partial_r [\Gamma_{rr}^r - \Gamma_{\rho r}^\rho] + (\Gamma_{\rho r}^\rho - \Gamma_{rr}^r) \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tr}^t - \Gamma_{ri}^j \Gamma_{rj}^i \quad (\text{B.13})$$

$$= \partial_r [\partial_r Y - \partial_r (X + (n+1)Y - \frac{n}{r})] - \partial_r Y \left[ \partial_r Y - \partial_r (X + (n+1)Y) - \frac{n}{r} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$- (\partial_r X)^2 - n \partial_r \log(re^Y) \partial_r \log(re^Y) \quad (\text{B.15})$$

Con lo que:

$$R_{rr} = -e^{Y-X} \partial_r (e^{X-Y} \partial_r X) - \frac{n}{r} \partial_r (r \partial_r Y) \quad (\text{B.16})$$

Lo cual puede ser reformulado de la siguiente forma equivalente:

$$R_{rr} = -e^{Y-X} \partial_r (e^{X-Y} \partial_r X) - \frac{n}{r} \partial_r [e^{-Y} \partial_r (re^Y)] \quad (\text{B.17})$$

Finalmente, la entrada  $ij$  del tensor de Ricci:

$$R_{ij} = \partial_\mu \Gamma_{ij}{}^\mu - \partial_i \Gamma_{\mu j}{}^\mu + \Gamma_{\mu\rho}{}^\mu \Gamma_{ij}{}^\rho - \Gamma_{i\nu}{}^\mu \Gamma_{\mu j}{}^\nu \quad (\text{B.18})$$

$$= \hat{R}_{ij} + \partial_r \Gamma_{ij}{}^r \Gamma_{\mu r}{}^\mu \Gamma_{ij}{}^r - 2\Gamma_{ri}{}^k \Gamma_{kj}{}^r \quad (\text{B.19})$$

Desarrollando los símbolos de Christoffel presentes, se encuentra:

$$R_{ij} = \hat{R}_{ij} - r \partial_r [e^{-Y} \partial_r (re^Y)] h_{ij} - r \partial_r (X + (n-1)Y) e^{-Y} \partial_r (re^Y) h_{ij} \quad (\text{B.20})$$

$$- (n-1) e^{-Y} \partial_r (re^Y) h_{ij} \quad (\text{B.21})$$

Siendo  $\hat{R}_{ij}$  la entrada  $ij$  del tensor de Ricci asociado a la (d-2)-esfera, el cual satisface:

$$\hat{R}_{ij} = (d-3)h_{ij} \quad (\text{B.22})$$

Con esto, se concluye:

$$R_{ij} = -h_{ij} \left[ e^{-X+(n-2)Y} r \partial_r \left( e^{X+(d-4)Y} \partial_r (re^Y) \right) + (d-3)r \partial_r Y \right] \quad (\text{B.23})$$

## Apéndice C

# Apéndice: Relación dimensional entre constantes de Newton

Se hará un breve estudio para hallar una relación entre las constantes de Newton en distintas dimensiones. Los razonamientos expuestos a continuación son una adaptación de los expuestos en el capítulo 8 de [18].

Primeramente la teoría de la relatividad general, en presencia de campos gravitatorios débiles y velocidades  $v \ll c$ , ha de reducirse a la *Ley de Gravitación de Newton* y por tanto las ecuaciones de campo de Einstein deben reducirse a la ecuación de Poisson:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G_N \rho \quad (\text{C.1})$$

Por otro lado, las ecuaciones de campo de Einstein considerando un universo con constante cosmológica  $\Lambda = 0$  se reducen a la expresión:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (\text{C.2})$$

Donde  $\kappa$  es la constante a hallar la cual ha de depender del número de dimensiones en los que se esté utilizando y, cómo se ha comentado anteriormente, debe estar fijada en el caso  $d = 3$  para que concuerde con la ecuación de Poisson (C.1).

Considerando el límite a bajas velocidades de la ecuación de las geodésicas y expandiendo la métrica como la métrica de Minkowski más una perturbación, como en (B.2), se halla la relación (B.5) entre la componente temporal de la perturbación y el potencial gravitatorio. Considerando en este caso la

velocidad de la luz sin estar en unidades naturales, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\Phi = -\frac{c^2}{2}h_{tt} \quad (\text{C.3})$$

Para continuar, hemos de centrar nuestra atención en el tensor de Einstein. Sabemos por la definición del tensor de Einstein, dada en la ecuación (3.2), que se escribe a partir del tensor de Ricci y del escalar de curvatura. El escalar de curvatura se calcula como la traza del tensor de Ricci, siendo éste una contracción del primer y tercer índice del tensor de Riemann. Considerando la definición del tensor de Riemann dada en (A.4), sabiendo que los coeficientes de Christoffel dependen de primeras derivadas de la métrica y teniendo en cuenta la aproximación de campo gravitatorio débil, solamente contribuirán al tensor de Riemann aquellos términos lineales en  $\Gamma$ . En esta línea se obtiene la siguiente expresión para el tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda = \frac{1}{2} (\partial_\mu\partial_\beta h_{\mu\lambda} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\beta\mu} + \partial_\nu\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\beta\nu}) \quad (\text{C.4})$$

La anterior expresión es invariante bajo transformaciones de gauge, es decir bajo pequeñas transformaciones de coordenadas, ya que como las propias coordenadas  $h$  son pequeñas de por sí al representar una perturbación no se producen cambios en la expresión (C.4) bajo este tipo de transformaciones.

Considerando ahora un nuevo tensor definido como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (\text{C.5})$$

Y a partir de la expresión (C.4), se obtiene la siguiente expresión del tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left( \square \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\rho \bar{h}_\nu{}^\rho - \partial_\nu\partial_\rho \bar{h}_\mu{}^\rho + \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\sigma \bar{h}^{\mu\nu} \right) \quad (\text{C.6})$$

Donde  $\square$  representa el *operador D'Alembertiano*, la generalización 4-dimensional del laplaciano.

Atendiendo a la ecuación anterior, claramente se simplificaría en gran medida si se diese la condición:

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{C.7})$$

Teniendo en cuenta que siempre es posible elegir un gauge que satisfaga la condición anterior, se impone bajo el nombre de *condición del gauge de Lorentz*. De esta forma, trabajando en lo que se conoce como el gauge de Lorentz, el tensor de Einstein resulta:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 \bar{h}_{\mu\nu} \quad (\text{C.8})$$

Donde se ha simplificado al uso del laplaciano aplicando la independencia temporal de la perturbación de la métrica.

Consideramos ahora la inversa de la transformación hecha en (C.5) en un universo  $d$ -dimensional:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \quad (\text{C.9})$$

Ahora al estar considerando el límite Newtoniano, esto es un entorno de bajas velocidades, se tiene que las componentes del tensor energía-momento están jerarquizadas por la siguiente relación:  $T_{tt} \gg T_{ti} \gg T_{ij}$  luego considerando (C.8) y (C.2) es traduce en:  $\bar{h}_{tt} \gg \bar{h}_{ti} \gg \bar{h}_{ij}$ . A partir de esta aproximación, la traza es  $\bar{h} = \eta^{tt} \bar{h}_{tt} = -\bar{h}_{tt}$  y sustituyendo en (C.9) se tiene:

$$h_{tt} = \frac{d-3}{d-2} \bar{h}_{tt} \implies \bar{h}_{tt} = \frac{d-2}{d-3} h_{tt} = -\frac{2}{c^2} \frac{d-2}{d-3} \Phi \quad (\text{C.10})$$

Donde en la última igualdad se ha utilizado la ecuación (C.3) para introducir el potencial de Newton. Recordando que la componente tiempo-tiempo del tensor de energía-momento es  $T_{tt} = c^2 \rho$ , siendo  $\rho$  la densidad de masa, y sustituyendo la expresión (C.10) para  $\bar{h}$  resulta:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = \kappa c^4 \frac{d-3}{d-2} \rho \quad (\text{C.11})$$

Considerando la ecuación de Poisson en  $d$  dimensiones, es decir una extensión dimensional de la ecuación (C.1):

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = V_{(n)} G_{(d)} \rho(\vec{x}) \quad (\text{C.12})$$

Comparando (C.11) y (C.12) se obtiene una expresión para la constante  $\kappa$ , que viene dada por:

$$\kappa = \frac{d-2}{d-3} \frac{V_{(n)} G_{(d)}}{c^4} \quad (\text{C.13})$$

Sin embargo a simple vista se ve que de tener la constante  $\kappa$  esta forma, las ecuaciones de Einstein cambiarían su expresión dependiendo de la dimensión, ya que los términos  $V_{(n)} G_{(d)}$  presentan expresiones distintas atendiendo a la dimensión considerada. Este problema se evita definiendo la expresión de la constante de newton  $d$ -dimensional como:

$$G_{(d)} = \frac{d-3}{d-2} \frac{8\pi}{V_{(n)}} G_N \quad (\text{C.14})$$

De forma que es posible considerar una expresión universal de  $\kappa$ , dada por:

$$\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4} \quad (\text{C.15})$$

## Apéndice D

# Apéndice: Derivación del volumen de una esfera d-dimensional

El punto de partida es la observación de que, en  $\mathbb{R}^2$  se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\vec{x}^2} d^2x = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 \quad (\text{D.1})$$

Considerando el cambio de variable a coordenadas polares de la integral en dos dimensiones, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\vec{x}^2} d^2x = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -\pi e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \pi \quad (\text{D.2})$$

Así, comparando esta igualdad con la dada por la ecuación (D.1) se encuentra que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{D.3})$$

Al hacer el cambio a coordenadas polares, el cambio equivalente en términos de métrica es:

$$ds_{\mathbb{R}^2}^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \quad (\text{D.4})$$

De esta forma la coordenada  $\phi$  parametriza todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  que se encuentran a una distancia  $\rho$  del origen. Esto es equivalente a decir que la coordenada angular parametriza el subespacio dado por la siguiente condición de ligadura:

$$\vec{x}^2 = \rho^2 \quad (\text{D.5})$$

La cual es la ecuación de un círculo de radio  $\rho$ . No obstante, el parámetro  $\rho$  se vuelve irrelevante una vez que se satisface que  $\rho > 0$ , por lo que no se pierde generalidad al considerar el círculo de radio unidad, cuya circunferencia tiene una longitud de  $2\pi$ .

Tratemos ahora de generalizarlo a esferas d-dimensionales: una d-esfera de radio  $r$  es el subespacio de  $\mathbb{R}^{d+1}$  caracterizado por la condición:

$$\vec{x}^2 = r^2 \quad (\text{D.6})$$

Por d-esfera se entenderá una d-esfera de radio  $r = 1$ , denotando al subespacio correspondiente  $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ , es decir:

$$\mathbb{R}^{d+1} \supset S^d = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \vec{x} \cdot \vec{x} = 1 \right\} \quad (\text{D.7})$$

Con la anterior definición, un círculo sería una 1-esfera  $S^1$ , mientras que lo que comúnmente denominamos como un esfera sería una 2-esfera  $S^2$ .

La métrica del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{d+1}$  se puede expresar entonces como:

$$ds_{\mathbb{R}^{d+1}}^2 = dr^2 + r^2 h_{ij} dy^i dy^j \quad (\text{D.8})$$

Donde las coordenadas  $y^i$ ,  $i \in 1, \dots, d$  son aquellas que parametrizan la esfera  $S^d$ , siendo  $h_{ij}$  la métrica sobre dicha esfera. Aplicando la ecuación (D.8) a los ejemplos cotidianos anteriormente mencionados se tiene:

**1-esfera:** Se identifica que

$$h_{ij} dy^i dy^j = d\phi^2 \quad (\text{D.9})$$

La longitud de la circunferencia de  $S^1$  es:

$$\int d\phi = \int \sqrt{h} d\phi = 2\pi \quad (\text{D.10})$$

**2-esfera:** La métrica de  $\mathbb{R}^3$  es:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2) \quad (\text{D.11})$$

Con lo que la métrica de la 2-esfera:

$$h_{ij} dy^i dy^j = d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \quad (\text{D.12})$$

Y el área de la 2-esfera es el ángulo sólido:

$$\int_{S^2} \sqrt{h} d^2 y = \int \text{sen}(\theta) d\theta d\phi = 4\pi \quad (\text{D.13})$$

Así, en general el volumen de una d-esfera se define como sigue:

$$V_{(d)} = \int d^d y \sqrt{h} \quad (\text{D.14})$$

Una pregunta interesante sería si es posible calcular dicho volumen sin la necesidad de introducir ángulos, ya que como bien es sabido las intuiciones geométricas desaparecen por encima de las 3 dimensiones. La respuesta es que sí es posible, extendiendo la derivación de la integral a una gaussiana a más dimensiones.

Se considera entonces la integral de la siguiente gaussiana en  $\mathbb{R}^{d+1}$ :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} d^{d+1}x e^{-\vec{x}^2} = \prod_{i=1}^{d+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2} dx_i = \pi^{\frac{d+1}{2}} \quad (\text{D.15})$$

Introduciendo un cambio de variable a coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^{d+1}$  se tiene que la métrica coincide con la dada en (D.8). Además, teniendo en cuenta que el determinante de la métrica euclídea satisface que  $\sqrt{g} = 1$ :

$$\int d^{d+1}x = \int d^d y \sqrt{h} r^d e^{-r^2} dr \quad (\text{D.16})$$

De forma que se puede sustituir el miembro de la izquierda de la ecuación (D.15), resultando:

$$\int d^d y \sqrt{h} r^d e^{-r^2} dr = \pi^{\frac{d+1}{2}} \quad (\text{D.17})$$

Como el integrando no depende de  $y$ , y utilizando la definición del volumen de una esfera d-dimensional (D.14), se observa:

$$\pi^{\frac{d+1}{2}} = V_{(d)} \int_0^{\infty} r^d e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} V_{(d)} \int_0^{\infty} y^{\frac{d-1}{2}} e^{-y} dy \quad (\text{D.18})$$

Recordando ahora la definición de la *función Gamma de Euler*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{D.19})$$

Se halla que:

$$\pi^{\frac{d+1}{2}} = \frac{1}{2} V_{(d)} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \quad (\text{D.20})$$

Luego, se concluye que el volumen de una d-esfera es:

$$V_{(d)} = 2 \frac{\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \quad (\text{D.21})$$

Con esto, se puede estudiar la variación del volumen de una esfera de radio unitario con respecto a la dimensión  $d$ :

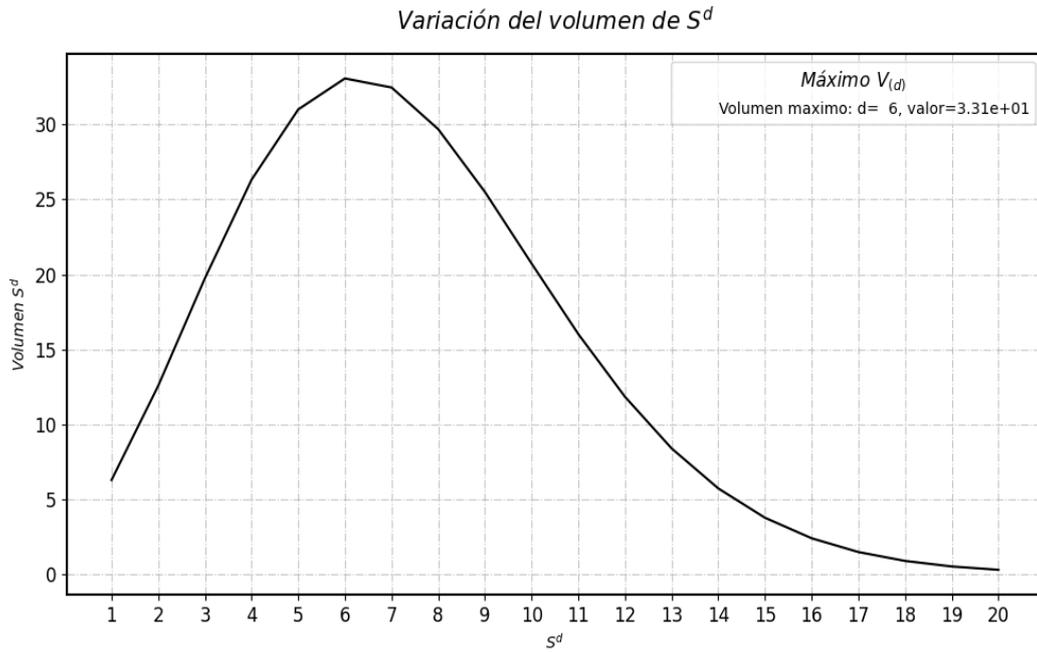


Figura D.1: Producción propia de un gráfico que muestra la variación del volumen de una esfera d-dimensional.

Donde se concluye que que el volumen máximo de la misma se alcanza para una 6-esfera, presente en un espacio de 7 dimensiones espaciales, siendo el valor<sup>1</sup> de éste de 33,1.

---

<sup>1</sup>Notar por la expresión (D.21) que se trata de un valor adimensional.

## Apéndice E

# Apéndice: Enunciado del Teorema de Gauss

A continuación se enunciará el teorema de Gauss en  $d$  dimensiones, el cual ha sido tomado de la referencia [34].

### **Teorema 1** *Teorema de Gauss, versión $d$ -dimensional*

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto abierto y acotado y supongamos que su frontera,  $\partial\Omega$ , es una curva diferenciable y continua. Sea  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  un campo vectorial diferenciable y continuo. Entonces:

$$\int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x) dS(x) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} F(x) dx \quad (\text{E.1})$$

donde  $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  representa el vector normal unitario a la frontera  $\partial\Omega$ .

# Bibliografía

- [1] W. Israel, *Event horizons in static vacuum space-times*, *Physical review* **164** (1967) 1776.
- [2] D. Williams, “Sun Fact Sheet.” NASA Goddard Space Flight Center, July, 2013.
- [3] M. Emilio, J.R. Kuhn, R.I. Bush and I.F. Scholl, *Measuring the solar radius from space during the 2003 and 2006 mercury transits*, *The Astrophysical Journal* **750** (2012) 135.
- [4] H.E. Bond, G.H. Schaefer, R.L. Gilliland, J.B. Holberg, B.D. Mason, I.W. Lindenblad et al., *The sirius system and its astrophysical puzzles: Hubble space telescope and ground-based astrometry*, *The Astrophysical Journal* **840** (2017) 70.
- [5] J.B. Holberg, M. Barstow, F. Bruhweiler, A. Cruise and A. Penny, *Sirius b: A new, more accurate view*, *The Astrophysical Journal* **497** (1998) 935.
- [6] W.M. Farr, B.J. Pope, G.R. Davies, T.S. North, T.R. White, J.W. Barrett et al., *Aldebaran b’s temperate past uncovered in planet search data*, *The Astrophysical Journal Letters* **865** (2018) L20.
- [7] L. Piau, P. Kervella, S. Dib and P. Hauschildt, *Surface convection and red-giant radius measurements*, *Astronomy & Astrophysics* **526** (2011) A100.
- [8] M. Joyce, S.-C. Leung, L. Molnár, M. Ireland, C. Kobayashi and K. Nomoto, *Standing on the shoulders of giants: New mass and distance estimates for betelgeuse through combined evolutionary, asteroseismic, and hydrodynamic simulations with mesa*, *The Astrophysical Journal* **902** (2020) 63.
- [9] M. Mittag, K.-P. Schröder, V. Perdelwitz, D. Jack and J. Schmitt, *Chromospheric activity and photospheric variation of  $\alpha$  ori during the great dimming event in 2020*, *Astronomy & Astrophysics* **669** (2023) A9.

- [10] M. Shultz, G. Wade, V. Petit, J. Grunhut, C. Neiner, D. Hanes et al., *An observational evaluation of magnetic confinement in the winds of ba supergiants*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **438** (2014) 1114.
- [11] E. Moravveji, E.F. Guinan, M. Shultz, M.H. Williamson and A. Moya, *Asteroseismology of the nearby sn-ii progenitor: Rigel. i. the most high-precision photometry and radial velocity monitoring*, *The Astrophysical Journal* **747** (2012) 108.
- [12] J. Antoniadis, P.C. Freire, N. Wex, T.M. Tauris, R.S. Lynch, M.H. Van Kerkwijk et al., *A massive pulsar in a compact relativistic binary*, *Science* **340** (2013) 1233232.
- [13] X.-F. Zhao, *On the moment of inertia of psr j0348+0432*, *Chinese Journal of Physics* **54** (2016) 839–844.
- [14] L. Matthews, M. Marengo, N. Evans and G. Bono, *New evidence for mass loss from  $\delta$  cephei from h i 21 cm line observations*, *The Astrophysical Journal* **744** (2011) 53.
- [15] P. Kervella, F. Thévenin and C. Lovis, *Proxima’s orbit around  $\alpha$  centauri*, *Astronomy & Astrophysics* **598** (2017) L7.
- [16] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *On massive neutron cores*, *Physical Review* **55** (1939) 374.
- [17] S. Chandrasekhar, *The maximum mass of ideal white dwarfs*, *Astrophysical Journal* **74** (1931) 81.
- [18] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge university press (2022).
- [19] G. Birkhoff, *Relativity and modern physics*, Harvard University Press (1923) .
- [20] H.A. Buchdahl, *General relativistic fluid spheres*, *Physical Review* **116** (1959) 1027.
- [21] R.C. Tolman, *Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid*, *Physical Review* **55** (1939) 364.
- [22] H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl and A. Sommerfeld, *The principle of relativity: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, Courier Corporation (1952).

- [23] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, *Proceedings of the national academy of sciences* **15** (1929) 168.
- [24] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro et al., *Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae*, *The Astrophysical Journal* **517** (1999) 565.
- [25] B.P. Schmidt, N.B. Suntzeff, M. Phillips, R.A. Schommer, A. Clocchiatti, R.P. Kirshner et al., *The high- $z$  supernova search: measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type ia supernovae*, *The Astrophysical Journal* **507** (1998) 46.
- [26] W. de Sitter, *Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. third paper*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 78, p. 3-28* **78** (1917) 3.
- [27] F. Tangherlini, *Black holes in higher dimensions*, *Il Nuovo Cimento* **27** (1963) 636.
- [28] R.C. Myers and M.J. Perry, *Black holes in higher dimensional space-times*, *Annals of Physics* **172** (1986) 304.
- [29] R. Emparan and H.S. Reall, *A rotating black hole in five dimensions*, *Physical Review Letters* **88** (2002) 101101.
- [30] G.W. Gibbons, D. Ida and T. Shiromizu, *Uniqueness and non-uniqueness of static black holes in higher dimensions*, *Physical Review D* **66** (2002) 044010.
- [31] NASA, *Sun fact sheet*, 2023.
- [32] S. Rahman and M. Visser, *Spacetime geometry of static fluid spheres*, *Classical and Quantum Gravity* **19** (2001) 935.
- [33] J. Guarino, "Curvature, gravity and einstein field equations." Notas de la asignatura de Relatividad General proporcionadas en la Universidad de Oviedo, [4° curso], 2023.
- [34] G.G. Casas and J.V. Valdés, *Modelos Matemáticos* (2023-2024).