

Universidad de Oviedo  
Trabajo de Fin de Grado en Física

# Teoría cuántica de campos, teorías conformes y aproximación de gran carga

Sergio Sanjurjo Montero

Supervisado por:

Diego Rodríguez Gómez

27 de Mayo de 2024

# Resumen

Este trabajo de fin de grado ofrece una introducción a la teoría cuántica de campos (QFT), las teorías conformes (CFT), y la aproximación de gran carga. El principal objetivo es explorar la utilidad de la expansión de gran carga en el contexto de las CFTs, por lo que se proporciona una visión ágil y basada en ejemplos de los principios fundamentales de QFT y CFT, culminando en un cálculo concreto usando la aproximación de gran carga con contribuciones originales.

El capítulo 1 abarca los fundamentos de QFT. Se inicia con el grupo de Poincaré y sus implicaciones en la estructura de la teoría, para posteriormente introducir desde el marco de la cuantización canónica los correladores, la matriz  $S$ , la fórmula de reducción LSZ y el teorema de Wick, y desde el punto de vista de la integral de caminos los diagramas de Feynman. Finalmente se ejemplifica la renormalización en las teorías  $\phi^4$  en  $4d$  y  $O(N)$  en  $6d$ .

En el capítulo 2 se tratan las CFT, explicando las diferencias en el grupo de simetría entre  $d = 2$  y  $d > 2$ . En el segundo caso se explora la cinemática y dinámica de la teoría, introduciendo la correspondencia estado-operador, la cuantización radial, las funciones a 2, 3 y 4 puntos, la OPE y la simetría de cruce.

Finalmente, el capítulo 3 se centra en la aproximación de gran carga, presentando una aproximación semiclásica al punto fijo de Wilson-Fisher en la teoría  $\phi^4$  con simetría global  $O(2)$  en  $d = 4 - \epsilon$ . Se calcula la función a dos puntos  $\langle \phi^n(x)\phi^n(0) \rangle$  tanto de manera diagramática como con un saddle-point. También se inserta un tensor energía-momento y se estudia la invarianza de escala del bulk a través de las Ward Identities.

**Palabras claves:** Teoría Cuántica de Campos, QFT, teorías conformes, CFT, aproximación de gran carga, cuantización canónica, operadores compuestos, integral de camino, renormalización, simetría conforme, OPE, crossing symmetry, Ward Identities, invarianza de escala

# Abstract

This bachelor's thesis offers an introduction to Quantum Field Theory (QFT), Conformal Field Theories (CFT), and the large charge approximation. The main objective is to explore the utility of the large charge expansion in the context of CFTs, providing a clear and example-based overview of the fundamental principles of QFT and CFT, culminating in a concrete calculation using the large charge approximation with original contributions.

Chapter 1 covers the fundamentals of QFT. It begins with the Poincaré group and its implications on the structure of the theory. Following this, the canonical quantization framework serves to introduce correlators, the S-matrix, the LSZ reduction formula and Wick's theorem, while the path integral perspective leads to Feynman diagrams. Finally, renormalization is exemplified in the  $\phi^4$  theory in  $4d$  and  $O(N)$  theory in  $6d$ .

Chapter 2 deals with CFTs, explaining the differences in the symmetry group between  $d = 2$  and  $d > 2$ . In the latter case, the kinematics and dynamics of the theory are explored, introducing the state-operator correspondence, radial quantization, 2-, 3-, and 4-point functions, the Operator Product Expansion (OPE), and crossing symmetry.

Finally, Chapter 3 focuses on the large charge approximation, presenting a semi-classical approach to the Wilson-Fisher fixed point in the  $\phi^4$  theory with global  $O(2)$  symmetry in  $d = 4 - \epsilon$ . The two-point function  $\langle \phi^n(x)\phi^n(0) \rangle$  is calculated both diagrammatically and using a saddle-point approximation. An energy-momentum tensor is also inserted, and the scale invariance of the bulk is studied through Ward Identities.

**Keywords:** Quantum Field Theory, QFT, Conformal Field Theories, CFT, large charge approximation, canonical quantization, composite operators, path integral, renormalization, conformal symmetry, OPE, crossing symmetry, Ward Identities, scale invariance.

# Índice

<b>Introducción</b>	1
<b>1. Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>6</b>
1.1. Grupo de Poincaré	6
1.1.1. Representaciones y partículas	6
1.1.2. Lagrangianos y campos clásicos	8
1.2. Propagador del campo escalar	12
1.2.1. Aplicación de la aproximación WKB	15
1.3. Tensor energía-momento del campo escalar	16
1.4. Cuantización canónica	20
1.4.1. Correladores	22
1.4.2. La matriz $S$ y la fórmula LSZ	23
1.4.3. Teorema de Wick	24
1.5. Integral de caminos	25
1.6. Diagramas y reglas de Feynman	28
1.6.1. Ejemplos en QED	30
1.7. Selección de cálculos de interés en QFT	33
1.7.1. Función a dos puntos de operadores compuestos	33
1.7.2. Spinors en 3d	37
1.7.3. Conexión de Berry	38
1.7.4. Anomalía de paridad	40
1.7.5. Teorema óptico	41
1.8. Renormalización	43
1.8.1. $\phi^4$ en 4d	44
1.8.2. $O(N)$ en 6d	48

<b>2. Teorías Conformes</b>	<b>53</b>
2.1. Transformaciones conformes . . . . .	53
2.2. Generadores infinitesimales . . . . .	57
2.3. Operadores y campos . . . . .	62
2.4. Correladores, OPE y simetría de cruce . . . . .	63
<b>3. Sector de gran carga en el punto fijo de Wilson Fisher de <math>O(2)</math></b>	<b>67</b>
3.1. Función a dos puntos $\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle$ . . . . .	68
3.1.1. Cálculo en métrica $g^{mn}(x)$ arbitraria . . . . .	71
3.2. Función a tres puntos $\langle T^{ij}(z) \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle$ . . . . .	74
3.2.1. Comprobación de las identidades de Ward . . . . .	76
3.3. $\phi^6$ en $d = 3 - \epsilon$ . . . . .	79
3.4. Estudio de la simetría de escala . . . . .	81
3.4.1. Posible corrección al propagador $\langle \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle^g$ . . . . .	84
3.4.2. Posibles términos de contacto . . . . .	88
<b>Conclusión</b> . . . . .	<b>92</b>

# Introducción

La Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés), y en concreto las Teorías Conformes (CFT) son marcos fundamentales en la física teórica moderna. Resultan esenciales en la descripción de las interacciones entre las partículas elementales y en la comprensión de las profundas simetrías de la naturaleza: el modelo estándar de la física de partículas es una QFT. Además, las teorías conformes surgen de un modo muy natural, pues cuando QFT se considera sobre un continuo resulta estar repleta de infinitos, y estos esconden una dependencia con respecto a una escala de energía. Al variar dicha escala, los parámetros de la teoría fluyen según el llamado grupo de renormalización, y los puntos fijos de este flujo son CFTs. Es por esta invarianza de escala que las CFTs modelan transiciones de fase de segundo orden y algunos objetos en teoría de cuerdas.

Este trabajo tiene como objetivo introducir los conceptos clave en el estudio de QFT y CFT, para posteriormente centrarse en la técnica de expansión de gran carga, que ha emergido en los últimos años como una herramienta muy potente para simplificar ciertos cálculos y acceder a nueva información de las teorías.

## Teoría Cuántica de Campos (QFT)

La Teoría Cuántica de Campos es un marco teórico que une los principios de la mecánica cuántica con los de la relatividad especial, llevando inevitablemente al concepto de campo como medio por el que se propaga la información a velocidad finita. A diferencia de las teorías de campos clásicas, en QFT los campos tienen propiedades que vienen de la mecánica cuántica, por lo que en lugar de funciones continuas se tratan como operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert de estados, permitiendo la creación y aniquilación de partículas. Las partículas se ven como excitaciones de dichos campos subyacentes. Por ejemplo, las excitaciones del campo electromagnético son los

fotones.

Las simetrías juegan un papel central en QFT. Según el teorema de Noether, a nivel clásico, cada simetría continua corresponde a una ley de conservación. Por ejemplo, la invariancia de las leyes físicas bajo la traslación en el tiempo conduce a la conservación de la energía. De manera similar, la simetría rotacional implica la conservación del momento angular. Este concepto se transforma a nivel cuántico, dando lugar a las identidades de Ward, pero su importancia es incluso mayor, puesto que la simetría y las leyes de transformación de los campos bajo sus transformaciones restringen fuertemente la forma que pueden tener las teorías. De hecho, la diferencia entre QFT y CFT es sencillamente el grupo de simetría: Poincaré en QFT, y su extensión al grupo conforme en CFT.

QFT es tremendamente compleja y dar una descripción exacta y completa no suele ser una opción, por lo que la teoría de perturbaciones es un ingrediente fundamental. Se utiliza para dar resultados aproximados expandiendo en un pequeño parámetro, típicamente la constante de acoplamiento. Los diagramas de Feynman proporcionan una representación visual de los términos en esta expansión, ilustrando las interacciones entre partículas y facilitando el cálculo de amplitudes de scattering y secciones eficaces.

Además, QFT tiene una particularidad, y es que gran parte de los cálculos que se realizan dan un resultado infinito: las integrales suelen diverger. La información física de las teorías está escondida como coeficientes o contribuciones finitas a estos infinitos, por lo que es tremendamente importante desarrollar un procedimiento que permita controlar estos infinitos. De ello se encarga la renormalización, que absorbe sistemáticamente los infinitos en la redefinición de algunos parámetros, para poder trabajar de manera formal con cantidades que son en realidad infinito. No es sorprendente que este procedimiento tenga que ver con la propia estructura interna del marco teórico, y un análisis cuidadoso lleva al grupo de renormalización, que permite entender cómo la escala de energía influye en las teorías, y cómo estas fluyen desde una CFT en el ultravioleta (UV) a otra CFT en el infrarrojo (IR).

## **Teorías Conformes (CFT)**

Como comentábamos, las CFTs son QFTs con un grupo de simetría extendido, que además de traslaciones, rotaciones y boosts, contiene dilataciones y transforma-

ciones conformes especiales, que preservan ángulos pero no necesariamente distancias. Esta simetría extendida impone restricciones estrictas sobre la estructura de la teoría, facilitando en muchas ocasiones los cálculos de magnitudes de interés. Además, las CFT son los puntos fijos del flujo del grupo de renormalización, siendo capaces de proporcionar información sobre otras QFTs a través de dicho flujo.

En CFT, los correladores entre operadores locales están altamente restringidos por la simetría conforme, siendo algunos de ellos determinados por completo. En esta línea, la Operator Product Expansion (OPE) es un formalismo que expresa el producto de dos operadores locales como una suma de operadores locales, y en CFT adquiere una importancia especial: los coeficientes en esta expansión, conocidos como coeficientes de estructura, codifican la información sobre la dinámica de la teoría. Estas ideas hacen que el estudio de las CFTs se realice de una forma mucho más abstracta que las de las QFTs en general, dando lugar a programas como bootstrap, que tratan de reconstruir la mayor información posible utilizando argumentos de simetría.

Más allá de su riqueza formal, las CFT desempeñan un papel vital en la descripción de los fenómenos críticos en la mecánica estadística, donde los sistemas exhiben invariancia de escala en las transiciones de fase. Además, son fundamentales en gran parte de las ideas modernas en Física Teórica, por ejemplo en la formulación de la teoría de cuerdas, puesto que una perspectiva efectiva de la teoría viene de considerar CFTs sobre el rastro que dejan las cuerdas al recorrer el espacio-tiempo (la worldsheet). También son cruciales en el contexto de la correspondencia AdS/CFT, que postula una dualidad entre una CFT definida en la frontera de un espacio Anti de Sitter (AdS) y una teoría gravitacional (cuántica) en el espacio-tiempo completo, el bulk.

## Aproximación de gran carga

La aproximación de gran carga es un enfoque novedoso en el estudio de algunas CFT, que se centra en estados u operadores con grandes números cuánticos, normalmente la carga con respecto a una simetría global  $U(1)$ . Este método suele proporcionar una aproximación semiclásica de las teorías que ofrece nuevas perspectivas y posibilidades de cálculo: al considerar estados con grandes números cuánticos la dinámica de la teoría se vuelve más manejable.

Este enfoque puede llevar a soluciones analíticas en regímenes donde los métodos

perturbativos convencionales fallan, extendiendo así el alcance de las predicciones teóricas. Esto es particularmente útil para entender fenómenos no perturbativos como el confinamiento y la ruptura espontánea de simetría.

## Estructura del trabajo

Dada la extensión de los temas que se tratan en este texto y el gran número de excepcionales referencias disponibles para su estudio, el autor ha optado por no tratar de imitarlas, y tomar un enfoque diferente, menos preciso pero más ágil. Buena parte de los conceptos se enuncian sin una derivación, o directamente se pasan por alto, para conseguir a cambio una exposición en la que se tocan un gran número de conceptos en pocas páginas, y estos se ilustran con ejemplos en los que se aplican las ideas para realizar un cálculo real.

Este formato conecta con el objetivo principal, que es explorar la utilidad de la expansión de gran carga dentro del contexto de las CFTs. Es por ello que el texto proporciona una visión general de los principios fundamentales de QFT y CFT, para posteriormente pasar a un cálculo concreto en la aproximación de gran carga (con alguna nueva contribución original), en el que se estudia un límite semiclásico del punto fijo de Wilson-Fisher en  $d = 4 - \epsilon$ .

El **Capítulo 1** presenta los aspectos fundamentales de QFT. El punto de partida es el grupo de Poincaré y las restricciones que este impone en la estructura de la teoría. Usamos lo aprendido para calcular desde una perspectiva clásica el propagador y el tensor energía-momento del campo escalar. Después pasamos a la cuantización canónica, introduciendo los correladores, la matriz  $S$ , la fórmula de reducción LSZ y el teorema de Wick, que empleamos para calcular funciones a dos puntos de operadores compuestos. Desde el otro punto de vista, introducimos la integral de caminos y los diagramas de Feynman, realizando un par de cálculos de amplitudes en QED. También exploramos brevemente las complejidades de los spinores, calculando la fase de Berry y la anomalía de paridad en  $3d$ , y por otro lado ilustramos el teorema óptico. Finalmente, presentamos la renormalización a través del ejemplo en dos teorías:  $\phi^4$  en  $4d$  y  $O(N)$  en  $6d$ .

El **Capítulo 2** introduce brevemente los conceptos fundamentales en CFT. En primer lugar, se calculan las transformaciones conformes y se encuentran sus genera-

dores infinitesimales, haciendo énfasis en las diferencias entre  $d = 2$  y  $d > 2$ . Posteriormente, centrándose en el caso  $d > 2$ , se introducen las principales ideas sobre la cinemática y dinámica de las teorías: correspondencia estado-operador, cuantización radial, funciones a 2-, 3- y 4-puntos, OPE y crossing symmetry.

El **Capítulo 3** se enfoca en la aproximación de gran carga, presentando cálculos detallados y argumentos de simetría en una aproximación semiclásica al punto fijo de Wilson-Fisher en la teoría  $\phi^4$  con simetría global  $O(2)$  en  $d = 4 - \epsilon$ . Esto ilustra las posibilidades y la utilidad del enfoque de la aproximación de gran carga para extraer nueva información de las teorías. En particular, se comienza calculando la función a dos puntos  $\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle$  para los operadores compuestos de gran carga  $n$  bajo la simetría global  $U(1)$ . Este cálculo se realiza de dos formas distintas: diagramáticamente y con una aproximación saddle-point. Una generalización a una métrica  $g^{ij}$  arbitraria permite insertar el tensor energía-momento en los correladores a través de una derivada funcional, y esto a su vez permite comprobar la verificación de las identidades de Ward. Un análisis cuidadoso de la simetría de escala conecta con la anomalía conforme en teorías con métrica curva.

# Teoría Cuántica de Campos

En determinados puntos de la discusión posterior nos restringimos a teorías en 4 dimensiones, 3 espaciales y una temporal. La generalización de los argumentos a una dimensionalidad arbitraria se realiza sin dificultad.

## 1.1. Grupo de Poincaré

El universo parece tener un conjunto de simetrías que querríamos que fueran preservadas por cualquier teoría física que describiera la realidad. Es por ello que la construcción de una Teoría Cuántica de Campos debe tener como uno de sus pilares fundamentales el grupo de Poincaré.

Las leyes físicas son las mismas independientemente de dónde, cuándo o en qué dirección miremos, por lo tanto el grupo de Poincaré debe contener las traslaciones espaciotemporales y las rotaciones espaciales. Además, dos objetos moviéndose a velocidades distintas también perciben las mismas leyes físicas, y la relatividad especial nos dice que la forma correcta de implementar esta simetría es a través de los boosts relativistas, que junto con las rotaciones espaciales forman las transformaciones de Lorentz. Así, podemos decir que el grupo de Poincaré está formado por las traslaciones espaciotemporales y las transformaciones de Lorentz. De forma más matemática, es el grupo de isometrías del espacio de Minkowski, que se suele denotar  $ISO(1, 3)$ .

### 1.1.1. Representaciones y partículas

Al incluir en nuestra teoría una formulación cuántica, se presupone que los objetos con los que se trabaja serán estados de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , que denotaremos como kets en la notación de Dirac,  $|\psi\rangle$  por ejemplo. Este espacio de Hilbert tendrá una base

$\{|\psi_i\rangle \mid i \in I\}$ , con  $I$  un conjunto de índices que puede ser finito (spin arriba y abajo), numerable (niveles de energía del oscilador armónico), o no numerable (posiciones en un continuo). También nos interesan las transformaciones lineales de este espacio, que forman un grupo que denotamos  $GL(\mathcal{H})$ .

De esta forma, dado un estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  y una transformación del grupo de Poincaré  $\mathcal{P} \in ISO(1, 3)$ , decimos que  $\mathcal{P}$  actúa sobre  $|\psi\rangle$  a través de una representación  $\rho : ISO(1, 3) \rightarrow GL(\mathcal{H})$  llevándolo a otro estado que denotamos  $\rho(\mathcal{P})|\psi\rangle$ . La función  $\rho$  debe ser un homomorfismo de grupos para poder llamarse representación, y asigna a cada elemento del grupo de Poincaré una transformación lineal del espacio de Hilbert de estados. La representación depende explícitamente del espacio de Hilbert con el que se trabaje, pues va al grupo de transformaciones lineales del mismo, que no coincide con el de otro Hilbert distinto. Es por ello que en la literatura física suele utilizarse el término representación para designar tanto el espacio de estados como la regla bajo la que transforman, haciendo incluso más énfasis en el propio espacio.

La forma de reducir los espacios de estados a sus componentes fundamentales y así construir teorías de interés es a través de las representaciones irreducibles. Decimos que una representación  $\rho : ISO(1, 3) \rightarrow GL(\mathcal{H})$  es irreducible si no existe ningún subespacio  $V \leq \mathcal{H}$  (más allá del trivial y el total) tal que  $\rho(\mathcal{P})|\psi\rangle \in V$  para todo  $\mathcal{P} \in ISO(1, 3)$  y  $|\psi\rangle \in V$ . Es decir, si no existe ningún subespacio invariante bajo la acción del grupo de Poincaré a través de la representación.

Con todo esto podríamos pensar que tenemos suficiente para describir qué entendemos como partícula desde este punto de vista y comenzar a clasificarlas. Sin embargo, nos falta una pieza más, pues los observables físicos que la teoría debería predecir son números reales, no estados. En concreto, se miden brackets de la forma  $\langle\psi|\phi\rangle$ , y estos deben ser invariantes bajo el grupo de Poincaré, de manera que se debe cumplir<sup>1</sup>:

$$\langle\psi|\rho(\mathcal{P})^\dagger\rho(\mathcal{P})|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle \quad (1.1)$$

Es decir, debemos exigir que la representación  $\rho$  satisfaga  $\rho(\mathcal{P})^\dagger\rho(\mathcal{P}) = 1$  para cualquier transformación  $\mathcal{P}$  del grupo de Poincaré. En ese caso diremos que la representación es unitaria. Ahora sí, decimos que una partícula es un conjunto de estados

---

<sup>1</sup>En realidad el observable es  $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ , por lo que también se admiten representaciones antiunitarias, con  $\rho(\mathcal{P})^\dagger\rho(\mathcal{P}) = -1$ .

(un espacio de Hilbert) que transforma bajo una representación irreducible unitaria del grupo de Poincaré. Hecho esto solo queda clasificar esta clase de representaciones.

Daremos directamente la respuesta a esta cuestión. Todas las representaciones irreducibles unitarias del grupo de Poincaré actúan sobre espacios de dimensión infinita, cuyos estados están asociados a los campos cuánticos. Existen un número infinito de estas representaciones, que se pueden identificar a través de su masa  $m$ , un real no negativo, y su spin  $J$ , un semientero no negativo. Dada una representación concreta  $\rho_{m,J}$ , el espacio de estados sobre el que actúa incluye a todos los de la forma  $|p, s\rangle$ , donde  $p$  es un 4-vector satisfaciendo  $p^2 = m^2$  (on-shell), y si  $m > 0$  entonces  $s \in \{-J, -J + 1, \dots, J - 1, J\}$ ; si  $m = 0$ , entonces  $s \in \{+, -\}$ .

### 1.1.2. Lagrangianos y campos clásicos

Para trabajar con campos (por el momento clásicos), el lagrangiano  $L$  de la mecánica clásica ordinaria se generaliza a una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  que depende de los campos y sus derivadas. La acción en este contexto es

$$S[\phi_i] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (1.2)$$

El principio de mínima acción establece que la configuración que presentarán los campos físicos son aquellas que minimizan la acción (o que en general la hacen estacionaria). Para encontrar las ecuaciones de movimiento que satisfacen este principio, se consideran variaciones en los campos  $\delta\phi_i$  tales que la de la acción sea  $\delta S = 0$ . Esto conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (1.3)$$

#### Campo escalar (spin 0)

Para un campo escalar  $\phi$  con una masa  $m$ , el lagrangiano de una teoría libre, esto es, sin interacciones, es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.4)$$

La ecuación de Euler-Lagrange aplicada a este lagrangiano resulta en la ecuación

de Klein-Gordon:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \quad (1.5)$$

donde  $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ .

### Bosones vectoriales (spin 1)

El campo vectorial asociada a las partículas de spin 1 es  $A_\mu$  y el lagrangiano correcto es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \quad (1.6)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Este lagrangiano es válido tanto para partículas masivas como sin masa. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\partial^\mu \partial_\nu A^\nu - (\partial^2 + m^2)A^\mu = 0 \quad (1.7)$$

De este tratamiento surge automáticamente un conflicto: el campo  $A_\mu$  tiene 4 componentes, pero la representación de spin 1 masiva tiene 3 polarizaciones, y la sin masa 2. La resolución está implícita. Si derivamos en la ecuación del movimiento obtenemos

$$m^2 \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (1.8)$$

por lo que en el caso  $m > 0$ , automáticamente tenemos  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , lo cual resta un grado de libertad y deja las ecuaciones del movimiento en la forma

$$(\partial^2 + m^2)A^\mu = 0 \quad (1.9)$$

El caso  $m = 0$  es más sutil, y la solución se encuentra en la invarianza gauge del lagrangiano. Esto significa que existen diferentes configuraciones del campo que llevan al mismo lagrangiano, y por tanto a la misma acción. Las transformaciones que dejan el lagrangiano invariante en el caso  $m = 0$  son

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (1.10)$$

donde  $\alpha$  es una función cualquiera que depende de la posición espacio-temporal. Se dice que el lagrangiano es invariante bajo transformaciones locales del campo. Es sencillo ver cómo está libertad en la elección de  $A_\mu$  permite eliminar 2 de los 4 grados de libertad.

## Fermiones (spin 1/2)

El lagrangiano para una partícula de espín 1/2 con masa  $m$ , como por ejemplo un electrón, se describe a través de un spinor  $\psi$  (de manera efectiva un vector complejo de 4 componentes) con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (1.11)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac y  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ . Las matrices  $\gamma^\mu$  satisfacen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange aplicadas a este lagrangiano producen la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.13)$$

Este lagrangiano también es invariante bajo ciertas transformaciones, pero esta vez de forma global, a través de las transformaciones

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \quad (1.14)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  y es claro que la contribución de esta transformación se cancela entre  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ .

Sin embargo, podríamos no quedarnos satisfechos con esto, y tomar como inspiración el campo electromagnético para exigir que esta invarianza sea también gauge local. Esto nos lleva directamente a la descripción correcta de las interacciones entre fotones y electrones.

## Electrodinámica

Si aplicamos la siguiente transformación

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (1.15)$$

al lagrangiano de Dirac obtenemos

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + i\partial_\mu\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.16)$$

de manera que no tenemos invarianza gauge.

Dado que el trozo que sobra contiene la derivada de una función  $\alpha$ , podemos aprovechar la invarianza gauge del campo electromagnético para compensarla. Si exigimos al campo  $A_\mu$  la transformación

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (1.17)$$

donde ya adelantamos que  $e$  representa la carga del electrón, entonces se cumple la siguiente regla de transformación

$$ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \rightarrow ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - i\partial_\mu\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.18)$$

Podemos compactar la notación utilizando derivadas covariantes (tienen una interpretación geométrica muy relevante que no trataremos aquí) en la forma

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.19)$$

de manera que el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.20)$$

contiene la dinámica de un campo sin masa de spin 1 y la de un campo masivo de spin 1/2 y es invariante gauge localmente. Esta exigencia ha introducido un término de interacción entre ambos campos en la forma

$$\mathcal{L} = ie\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (1.21)$$

Este lagrangiano describe correctamente la propagación e interacciones de los fotones, electrones y positrones. Es muy destacable la capacidad que tiene la simetría de guiar los argumentos matemáticos hacia las teorías físicas correctas, siendo el lagrangiano fruto de elegir las representaciones del grupo de Poincaré del spin adecuado y de imponer la simetría gauge local.

## 1.2. Propagador del campo escalar

Las funciones a 2-puntos, o propagadores, son un elemento crucial de gran utilidad en QFT. Clásicamente equivalen a la función de Green asociada a las ecuaciones del movimiento de los campos, por lo que como ejemplo vamos a calcular el propagador de un campo escalar libre en signatura euclídea. Este será la solución de

$$(\nabla^2 - m^2) G(\vec{x}) = -\delta^d(\vec{x}) \quad (1.22)$$

donde  $\delta^d(\vec{x})$  es la delta de Dirac en  $d$  dimensiones, esto es

$$\delta^d(\vec{x}) = \begin{cases} \infty, & \vec{x} = 0 \\ 0, & \vec{x} \neq 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

de forma que

$$\int d^d\vec{x} F(\vec{x}) \delta^d(\vec{x}) = F(0) \quad (1.24)$$

Vamos a aprovechar la transformada de Fourier para calcular la solución a (1.22) de manera que multiplicamos por el factor exponencial e integramos para obtener

$$\int d^d\vec{x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\nabla^2 - m^2) G(\vec{x}) = -(\vec{k}^2 + m^2) \int d^d\vec{x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} G(\vec{x}) \quad (1.25)$$

donde hemos integrado por partes. En el lado derecho sencillamente tenemos

$$-\int d^d\vec{x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta^d(\vec{x}) = -1 \quad (1.26)$$

Denotando a la transformada de Fourier de  $G(x)$  como

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \int d^d\vec{x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} G(\vec{x}) \quad (1.27)$$

la ecuación se convierte en

$$-(\vec{k}^2 + m^2)\tilde{G}(\vec{k}) = -1 \iff \tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} \quad (1.28)$$

con lo que volviendo a posiciones

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2 + m^2} \quad (1.29)$$

Vamos a aprovechar ahora la relación

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty dt e^{-tx} \quad (1.30)$$

para escribir

$$\frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(\vec{k}^2 + m^2)} \quad (1.31)$$

que sustituido en la expresión de  $G(x)$  nos da

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= \int_0^\infty dt \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-t(\vec{k}^2 + m^2) - i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \\ &= \int_0^\infty dt e^{-tm^2} \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_j}{2\pi} e^{-tk_j^2 - ik_j x_j} = \\ &= \int_0^\infty dt e^{-tm^2} \prod_{j=1}^d \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x_j^2}{4t}} \right) = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{d}{2}} e^{-tm^2 - \frac{\vec{x}^2}{4t}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde hemos utilizado que la siguiente integral ( $a > 0$ ) se puede reducir a

$$\int_{-\infty}^\infty dz e^{-az^2 + bz} = \int_{-\infty}^\infty dz e^{-a(z - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a}} = \frac{e^{\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^\infty dz e^{-z^2} \quad (1.33)$$

y la gaussiana se calcula según

$$\int_{-\infty}^\infty dz e^{-z^2} = \left( \int_{\mathbb{R}^2} d^2 z e^{-|z|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \pi \int_0^\infty dr 2r e^{-r^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad (1.34)$$

Denotando a partir de ahora  $x = |\vec{x}|$  y usando la expresión integral de la función de Bessel modificada de segundo tipo

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{2} \right)^\nu \int_0^\infty dt t^{-(\nu+1)} e^{-t - \frac{z^2}{4t}} \quad (1.35)$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
G(\vec{x}) &= \frac{m^{d-2}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{d}{2}} e^{-t - \frac{(mx)^2}{4t}} = \\
&= \frac{2m^{d-2}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{2}{mx}\right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(mx) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi x}\right)^{\frac{d}{2}-1} K_{\frac{d}{2}-1}(mx)
\end{aligned} \tag{1.36}$$

donde en la primera línea hemos hecho el cambio de variable  $t \rightarrow tm^2$ .

Podemos analizar el comportamiento de este propagador en distintos regímenes. Por un lado, teniendo en cuenta que cuando  $z \rightarrow 0$  la función de Bessel se comporta según

$$K_\nu(z) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{mx}\right)^\nu, \quad z \rightarrow 0 \tag{1.37}$$

el límite sin masa  $m \rightarrow 0$  de la función de Green calculada es

$$G(\vec{x}) \sim \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi} \left(\frac{m}{2\pi x}\right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{2}{mx}\right)^{\frac{d}{2}-1} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{\frac{d}{2}} x^{d-2}}, \quad m \rightarrow 0 \tag{1.38}$$

que tiene las dimensiones correctas, puesto que en la ecuación (1.22) leemos  $[G(\vec{x})] = d - 2$ .

Por otro lado, cuando  $z \rightarrow \infty$  la función de Bessel es

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad z \rightarrow \infty \tag{1.39}$$

con lo que en el límite  $x \gg 1/m$  la función de Green es

$$G(\vec{x}) \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi x}\right)^{\frac{d}{2}-1} \sqrt{\frac{\pi}{2mx}} e^{-mx} = \frac{1}{2m} \left(\frac{m}{2\pi x}\right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-mx}, \quad x \gg \frac{1}{m} \tag{1.40}$$

Este último resultado conlleva la existencia de una distancia característica  $1/m$  debida a la masa del campo escalar, a partir de la cual la propagación se ve suprimida. El resultado análogo para bosones de spin 1 es el motivo por el que la interacción débil, que está mediada por bosones  $W$  y  $Z$ , ambos con masas muy grandes, solo opera a distancias muy pequeñas, del orden del tamaño del núcleo de los átomos.

### 1.2.1. Aplicación de la aproximación WKB

Llegados a este punto, antes de pasar a la siguiente sección, podemos ejemplificar el uso de la aproximación WKB aplicándola a la función de Green para  $x \neq 0$  y  $m \gg 1$ . Nos bastará con quedarnos a orden  $o(1)$ , de manera que solo necesitamos dos términos en la expansión

$$G(\vec{x}) = e^{mF_0(\vec{x})+F_1(\vec{x})+o(m^{-1})} \quad (1.41)$$

A partir de ahora omitimos la dependencia explícita en  $\vec{x}$ . El laplaciano es

$$\begin{aligned} \nabla^2 G &= \partial_i (m\partial_i F_0 + \partial_i F_1 + o(m^{-1})) G = \\ &= [m^2 \partial_i F_0 \partial_i F_0 + m (\nabla^2 F_0 + 2\partial_i F_0 \partial_i F_1) + o(1)] G \end{aligned} \quad (1.42)$$

Exigiendo que se satisfaga la ecuación (1.22) con  $x \neq 0$ , llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_i F_0 \partial_i F_0 = 1 \\ \nabla^2 F_0 + 2\partial_i F_0 \partial_i F_1 = 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

Es fácil ver que  $F_0 = -x$  cumple

$$\partial_i F_0 \partial_i F_0 = \frac{x_i x_i}{x x} = 1 \quad (1.44)$$

y también

$$\nabla^2 F_0 = -\partial_i \partial_i F_0 = -\partial_i \left( \frac{x_i}{x} \right) = -\frac{\partial_i x_i}{x} + \frac{x_i \partial_i x}{x^2} = -\frac{d-1}{x} \quad (1.45)$$

de manera que la segunda ecuación se convierte en

$$0 = \nabla^2 F_0 + 2\partial_i F_0 \partial_i F_1 = -\frac{d-1 + 2x_i \partial_i F_1}{x} \quad (1.46)$$

con lo que concluimos

$$x_i \partial_i F_1 = \frac{1-d}{2} \quad (1.47)$$

condición satisfecha por

$$F_1 = \frac{1-d}{2} \log x + \log C \quad (1.48)$$

Así, obtenemos la aproximación

$$G(\vec{x}) \simeq C \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-mx} \quad (1.49)$$

Tomando como constante

$$C = \frac{1}{2m} \left( \frac{m}{2\pi} \right)^{\frac{d-1}{2}} \quad (1.50)$$

reproducimos la expresión obtenida desde la solución exacta en la ecuación (1.40).

Notar que estamos introduciendo el parámetro de la expansión  $m$  en  $C$ , lo cual podría parecer problemático. Sin embargo, en el desarrollo solo intervienen las derivadas de  $F_1$  en las que  $C$  no aparece, por lo que no es relevante. Esto deriva de que la aproximación WKB es insensible al factor de normalización.

### 1.3. Tensor energía-momento del campo escalar

Vamos a trabajar en la teoría de un campo escalar en  $d$  dimensiones, introduciendo una única interacción arbitraria

$$S = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \lambda\phi^n \right] \quad (1.51)$$

El tensor de energía-momento es el generador de las transformaciones de Poincaré, y clásicamente se puede computar según

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (1.52)$$

En la teoría que nos interesa toma la forma

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial\phi)^2 + \lambda\eta^{\mu\nu}\phi^n \quad (1.53)$$

Gracias al Teorema de Noether, el tensor energía-momento es una corriente que se conserva on-shell. Podemos comprobar esto usando la ecuación de movimiento del campo escalar de la teoría

$$\partial^2\phi + n\lambda\phi^{n-1} = 0 \quad (1.54)$$

para calcular la derivada

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial^2 \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \phi \partial^\nu \partial_\mu \phi - \partial^\nu \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + n\lambda \phi^{n-1} \partial^\nu \phi = 0 \quad (1.55)$$

Podemos extraer el 4-vector momento conservado realizando la integración espacial de las componentes  $T_{\mu 0}$

$$P_\mu = \int d^{d-1}x T_{\mu 0} \quad (1.56)$$

Por otro lado, el momento canónico asociado al campo es  $\pi = \partial_0 \phi$  de manera que podemos relacionarlos según

$$\begin{aligned} P_0 &= \int d^{d-1}x \left[ \frac{1}{2} \left( \pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 \right) + \lambda \phi^n \right] \\ P_i &= \int d^{d-1}x \pi \partial_i \phi \end{aligned} \quad (1.57)$$

Notar que  $P_0$  es el hamiltoniano de la teoría, ya que se corresponde con la cantidad conservada asociada a las traslaciones temporales.

Recordamos la definición del bracket de Poisson

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \phi} \frac{\partial B}{\partial \pi} - \frac{\partial B}{\partial \phi} \frac{\partial A}{\partial \pi} \quad (1.58)$$

de manera que la acción clásica del momento sobre  $\phi$  es

$$\int d^{d-1}x \{T_{\mu 0}, \phi\} = \{P_\mu, \phi\} = -\frac{\partial P_\mu}{\partial \pi} = -\int d^{d-1}x \partial_\mu \phi \quad (1.59)$$

con lo que, como ya habíamos mencionado,  $T_{\mu 0}$  genera las traslaciones espaciotemporales del campo escalar.

La mayor parte de QFTs contienen un tensor energía-momento, y esto hace el estudio de su traza muy relevante, pues es un escalar de Lorentz, y podemos leer directamente de la definición que el tensor tiene dimensión  $d$ . Es decir, la traza  $T_\mu{}^\mu$  es una magnitud dimensional presente en prácticamente todas las teorías cuánticas de campos. Son centrales en el estudio de QFT las teorías conformes, que entre otras cosas, tienen invarianza de escala, esto es, no tienen magnitudes dimensionales. Es por ello que la condición  $T_\mu{}^\mu = 0$  es necesaria para poder tener una CFT.

En el caso del campo escalar se tiene

$$T_{\mu}{}^{\mu} = 0 = -\frac{d-2}{2}(\partial\phi)^2 + d\lambda\phi^n \quad (1.60)$$

que en general no se anula. Sin embargo, podemos ir más allá, puesto que el tensor de energía momento no es más que la corriente conservada asociada al grupo de Poincaré. Esto conlleva que podamos tunear la teoría de manera que el tensor se vea modificado por una corriente conservada off-shell. Es decir, el nuevo tensor energía-momento será

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu} \quad (1.61)$$

donde se satisface  $\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu} = 0$  off-shell, es decir, para cualquier configuración del campo satisfaciendo o no las ecuaciones del movimiento.

Una elección natural para esta nueva contribución es

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{d-1} (\eta^{\mu\nu} \partial^2 \phi^m - \partial^{\mu} \partial^{\nu} \phi^m) \quad (1.62)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . El  $d-1$  en el denominador hace que se obtenga

$$\Theta_{\mu}{}^{\mu} = \alpha \partial^2 \phi^m \quad (1.63)$$

y además se conserva puesto que

$$\partial_{\mu} (\eta^{\mu\nu} \partial^2 \phi^2 - \partial^{\mu} \partial^{\nu} \phi^2) = \partial^{\nu} \partial^2 \phi^2 - \partial^2 \partial^{\nu} \phi^2 = 0 \quad (1.64)$$

Podemos finalmente calcular la traza del nuevo tensor energía momento

$$\mathcal{T}_{\mu}{}^{\mu} = -\frac{d-2}{2}(\partial\phi)^2 + d\lambda\phi^n + \alpha\partial^2\phi^m \quad (1.65)$$

Si queremos que esta se anule necesitamos eliminar la contribución de  $(\partial\phi)^2$ , para lo que la única elección posible es  $m = 2$ . De esta manera se cumple que

$$-\frac{d-2}{2}(\partial\phi)^2 + \alpha\partial^2\phi^2 = \left(2\alpha - \frac{d-2}{2}\right) (\partial\phi)^2 + 2\alpha\phi\partial^2\phi \quad (1.66)$$

Necesitamos que se anule el coeficiente de  $(\partial\phi)^2$ , lo cual determina  $\alpha$  en términos

de la dimensión  $d$  de la teoría, resultando en la contribución<sup>2</sup>

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{d-2}{4(d-1)} (\eta^{\mu\nu} \partial^2 \phi^2 - \partial^\mu \partial^\nu \phi^2) \quad (1.67)$$

y hace que la traza sea

$$\mathcal{T}_\mu{}^\mu = \phi \left( d\lambda\phi^{n-1} + \frac{d-2}{2} \partial^2 \phi^2 \right) \quad (1.68)$$

Si ahora imponemos las ecuaciones del movimiento llegamos a

$$\mathcal{T}_\mu{}^\mu = \frac{2d - n(d-2)}{2} \lambda\phi^n \quad (1.69)$$

y se anula solo si

$$n = \frac{2d}{d-2} \quad (1.70)$$

Si exigimos que tanto la dimensión de la teoría como el exponente de la interacción sean números naturales llegamos a que solo existen tres teorías de este tipo que puedan anular la traza tensor energía-momento y por tanto aspirar a ser conformes. Para ver esto, basta notar que, dado  $d$  natural, se tiene  $d-2 < \frac{2d}{2}$  y por lo tanto la condición de que  $d-2$  divida a  $2d$  implica que  $d-2 \leq \frac{2d}{3}$ , pero esto nos lleva a  $d \leq 6$ .

Así, podemos comprobar los 6 valores de  $d$  de uno en uno, para concluir que solo funcionan los siguientes valores de  $(d, n)$ :  $(3, 6)$ ,  $(4, 4)$  y  $(6, 3)$ . De esta manera, las únicas teorías que pueden aspirar a ser conformes con acoplo débil son  $\phi^6$  en  $3d$ ,  $\phi^4$  en  $4d$  y  $\phi^3$  en  $6d$ .

Poseer invarianza de escala a nivel cuántico y con acoplo fuerte es más sutil que la simple anulación de la traza del tensor energía-momento, pero hemos obtenido tres candidatas con las que trabajar. Destacamos la aparición de  $\phi^4$  en  $d = 4$ , este es uno de los motivos por los que históricamente ha sido el juguete más estudiado en QFT.

---

<sup>2</sup>El tensor energía-momento  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  con esta contribución es exactamente el que se obtiene para la teoría de un campo escalar conforme minimalmente acoplado a una métrica  $g^{\mu\nu}$ . Explícitamente,

$$S = \int \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \xi R\phi^2 - \lambda\phi^n \right), \quad \mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = - \frac{2}{\sqrt{g(x)}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \Big|_{g=\eta}$$

y precisamente la condición necesaria para que la traza sea nula es  $\xi = \frac{d-2}{4(d-1)}$ .

## 1.4. Cuantización canónica

En esta sección vamos a utilizar el campo escalar para ejemplificar el procedimiento de la cuantización canónica. Esta nos permite pasar de una teoría clásica de campos a una cuántica, donde los campos se convierten en operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert.

Consideremos un campo escalar  $\phi$  en un espacio-tiempo de Minkowski. La acción está dada por

$$S[\phi] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (1.71)$$

y definimos el momento canónico conjugado del campo como

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi = \dot{\phi} \quad (1.72)$$

Para cuantizar el campo promovemos  $\phi$  y su momento conjugado  $\pi$  a operadores en un espacio de Hilbert, imponiendo las siguientes relaciones de conmutación (separamos las coordenadas  $x$  en espacio  $\vec{x}$  y tiempo  $t$ )

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.73)$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0 \quad (1.74)$$

Es conveniente expresar  $\phi$  en términos de sus modos de Fourier

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^{d-1} \vec{k}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left( a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} \right) \quad (1.75)$$

donde  $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  es la energía de una partícula con momento  $\vec{k}$  y se han introducido los operadores  $a_{\vec{k}}$  y  $a_{\vec{k}}^\dagger$ . De esta forma el momento conjugado  $\pi$  se expresa como

$$\pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi}(\vec{x}, t) = -i \int \frac{d^{d-1} \vec{k}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \left( a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} \right) \quad (1.76)$$

y para que se satisfagan las relaciones de conmutación de los campos, los modos  $a_{\vec{k}}^\dagger$  y  $a_{\vec{k}}$  deben satisfacer por su parte las relaciones

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \quad (1.77)$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}] = [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{p}}^\dagger] = 0 \quad (1.78)$$

Estas relaciones de conmutación sugieren que los operadores  $a_{\vec{k}}$  y  $a_{\vec{k}}^\dagger$  son respectivamente, operadores de aniquilación y creación correspondientes a cada momento  $\vec{k}$ . Para ilustrar esto mejor es útil escribir el hamiltoniano

$$H = \int d^{d-1}x \left( \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \quad (1.79)$$

que al pasar al espacio de momentos se convierte en

$$H = \int d^{d-1}k \omega_{\vec{k}} \left( a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.80)$$

Este hamiltoniano describe un conjunto de osciladores armónicos cuánticos independientes, uno por cada modo  $\vec{k}$ , lo que corrobora nuestra sospecha sobre la naturales de aniquilación y creación de los operadores.

Por ello, lo siguiente a considerar es qué crean y sobre qué. Para responder es esencial considerar el estado que es invariante bajo todo el grupo de Poincaré, o equivalentemente, el que es aniquilado por todos los operadores  $a_{\vec{k}}$ . Lo llamamos vacío y lo denotamos  $|\Omega\rangle$ . Cumple

$$\text{braket}\Omega = 1, \quad a_{\vec{k}}|\Omega\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.81)$$

Naturalmente, el siguiente paso es considerar los estados que se construyen aplicando los operadores de creación al vacío

$$|\vec{k}\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger |\Omega\rangle \quad (1.82)$$

donde el coeficiente se fija por conveniencia.

Fijándonos en la expresión del campo en términos de sus modos de Fourier, podemos afirmar que el estado  $|\vec{k}\rangle$  tiene energía  $\omega_{\vec{k}}$ , lo que corresponde a una partícula de masa  $m$  y momento  $\vec{k}$ . Por tanto, concluimos que los operadores de creación dan lugar a estados cuánticos que se comportan como partículas on-shell. Podemos crear múltiples partículas aplicando operadores en sucesión

$$|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{k}_1}} a_{\vec{k}_1}^\dagger \dots \sqrt{2\omega_{\vec{k}_n}} a_{\vec{k}_n}^\dagger |\Omega\rangle \quad (1.83)$$

### 1.4.1. Correladores

Las complicaciones comienzan cuándo queremos describir teorías con interacciones. Por ello vamos a desarrollar las herramientas con las que calcular de manera efectiva.

Veremos que los correladores o funciones a  $n$ -puntos recogen prácticamente toda la información de la teoría. Para introducirlos comenzamos con el operador de ordenación temporal  $T$ , pues es fundamental para definir productos de operadores. Resulta necesario porque en principio los operadores no conmutan entre sí, incluso el propio campo escalar libre no lo hace cuando se evalúa en distintos tiempos. Esto supone una ambigüedad que se resuelve como

$$T\{\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\} = \begin{cases} \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2) & \text{si } x_1^0 > x_2^0 \\ \mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_1(x_1) & \text{si } x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \quad (1.84)$$

donde  $x^0$  es la componente temporal de la coordenada espacio-temporal  $x$  y  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  son cualesquiera operadores de nuestra QFT. Puede reescribirse la expresión anterior como

$$T\{\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\} = \theta(x_1^0 - x_2^0)\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2) + \theta(x_2^0 - x_1^0)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_1(x_1) \quad (1.85)$$

donde  $\theta$  es la función escalón de Heaviside, definida como

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

Esto nos permite dar una extensión a más de dos campos

$$T\{\mathcal{O}_1(x_1)\dots\mathcal{O}_n(x_n)\} = \sum_{\sigma} \left[ \prod_{i=1}^{n-1} \theta(x_{\sigma(i-1)}^0 - x_{\sigma(i)}^0) \right] \mathcal{O}_1(x_{\sigma(1)})\dots\mathcal{O}_n(x_{\sigma(n)}) \quad (1.87)$$

donde la suma se realiza sobre todas las permutaciones  $\sigma$  del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Esta ordenación garantiza que todos los operadores de campo estén ordenados de acuerdo con sus tiempos, con el mayor tiempo a la izquierda y el menor tiempo a la derecha.

Utilizando este operador para resolver los problemas de ordenación podemos definir las funciones de correlación, que se definen como los valores esperados (respecto al vacío) de productos ordenados temporalmente de operadores. Por ejemplo, la función

de dos puntos entre dos operadores  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  en posiciones espacio-temporales  $x_1$  y  $x_2$  es

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2) \} | \Omega \rangle \quad (1.88)$$

En general, una función a  $n$ -puntos entre  $n$  operadores  $\mathcal{O}_i$  en posiciones  $x_i$  está dada sencillamente por

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \langle \Omega | T \{ \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \} | \Omega \rangle \quad (1.89)$$

Como veremos en la siguiente sección, estos correladores contienen toda la información necesaria para calcular las amplitudes de scattering y otras propiedades físicas de la teoría.

### 1.4.2. La matriz $S$ y la fórmula LSZ

La idea detrás de la matriz  $S$  es que las interacciones en QFT son locales (dado que la velocidad de propagación de la información es finita), y por lo tanto, si queremos describir un proceso de transición de un estado inicial  $|i\rangle$  a uno final  $|f\rangle$ , podemos hacerlo suponiendo que estos estados son asintóticamente libres, es decir, se corresponden con configuraciones de campos de una teoría libre en el límite infinito del pasado y futuro. Vamos a escribir la amplitud de scattering entre ambos estados como

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (1.90)$$

donde  $S$  es la matriz  $S$ . Para concretar, podemos considerar un hamiltoniano  $H$  que codifique la dinámica de la teoría y separarlo en sus partes libre y de interacción

$$H(t) = H_0(t) + H_I(t) \quad (1.91)$$

de manera que el operador de evolución temporal puede escribirse mediante una serie de Dyson

$$U(t, t_0) = T \exp \left( -i \int_{t_0}^t d\tau H_I(\tau) \right) \quad (1.92)$$

donde  $T$  es el operador de ordenación temporal.

Nos interesa que los estados iniciales y finales sean asintóticos, por lo que su

amplitud de scattering vendrá dada por

$$S_{fi} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \langle f | U(t_2, t_1) | i \rangle \quad (1.93)$$

de manera que podemos identificar la matriz  $S$  con

$$S = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \lim_{t_2 \rightarrow \infty} U(t_2, t_1) = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau H_I(\tau) \right) \quad (1.94)$$

El conocimiento de las funciones a  $n$ -puntos nos permite computar las amplitudes de scattering  $S_{fi}$  a través de la fórmula LSZ. Vamos a restringirnos a procesos de scattering usuales, en los que consideramos un estado inicial formado por 2 partículas. Para ejemplificar, consideramos el campo escalar y tomamos los estados

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{k}_1}} \sqrt{2\omega_{\vec{k}_2}} a_{\vec{k}_1}^\dagger(-\infty) a_{\vec{k}_2}^\dagger(-\infty) |\Omega\rangle \\ |f\rangle &= |\vec{k}_3, \dots, \vec{k}_n\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{k}_3}} \dots \sqrt{2\omega_{\vec{k}_n}} a_{\vec{k}_3}^\dagger(\infty) \dots a_{\vec{k}_n}^\dagger(\infty) |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (1.95)$$

donde se han introducido la dependencia temporal de los operadores de creación en una teoría con interacción y se ha hecho que los estados sean asintóticos.

La fórmula LSZ se escribe entonces en la forma

$$S_{fi} = \prod_{i=1}^n \left[ i \int d^d x_i e^{\pm i k_i \cdot x_i} (\partial_{x_i}^2 + m^2) \right] \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (1.96)$$

donde el  $\pm_i$  denota  $-$  si  $i = 1, 2$  y  $+$  si  $i = 3, \dots, n$ . Las componentes  $k_i^0$  están fijadas por la condición de que las partículas estén on-shell.

Podríamos pensar que la fórmula anterior no tiene sentido, puesto que estamos introduciendo la ecuación del movimiento de los campos, y por lo tanto el resultado sería nulo. Sin embargo, que la fórmula LSZ sea correcta lo que refleja es que la matriz  $S$  tiene polos asociados a las configuraciones on-shell de los campos, y de hecho lo que nos dice es que las amplitudes de scattering están codificadas como los residuos de estos polos.

### 1.4.3. Teorema de Wick

Dado que estamos trabajando con operadores de creación y aniquilación es conveniente definir el ordenado normal de un producto de operadores. Si escribimos dichos

operadores en términos de los campos, y estos en términos de sus modos de creación y destrucción, el ordenado normal consiste en mover todos los operadores de creación a la izquierda de los de aniquilación sin alterar más allá el orden en el que aparecen. De esta manera el valor esperado sobre el vacío de cualquier producto ordenado normalmente es 0. Denotamos que un producto de operadores está ordenado normalmente escribiéndolo entre un par de dos puntos.

En este contexto surge el teorema de Wick, que permite simplificar el cálculo de correladores y amplitudes en las teorías libres, pues permite reducir los productos de múltiples operadores a una suma de términos más manejables.

Además del ordenado normal necesitamos otro ingrediente: las contracciones. Definimos una contracción entre dos operadores como

$$\Delta(AB) = T\{AB\} - :AB: \quad (1.97)$$

de forma que

$$\langle \Omega | \Delta(AB) | \Omega \rangle = \langle AB \rangle \quad (1.98)$$

El teorema de Wick establece que el producto ordenado temporalmente de un número arbitrario de operadores es igual a la suma de los productos ordenados normalmente de todas las expresiones que se pueden obtener realizando contracciones entre los operadores.

Una consecuencia directa del teorema de Wick se obtiene al tomar el valor esperado en el vacío a ambos lados, dando una expresión para el correlador de los operadores.

## 1.5. Integral de caminos

La integral de caminos (path integral) en teoría cuántica de campos es una extensión del formalismo de Feynman para la mecánica cuántica. En este caso en lugar de sumar todas las posibles trayectorias, la suma se realiza para todas las configuraciones de los campos.

La formulación de QFT en estos términos presenta numerosas ventajas y termina siendo más efectiva. Además de ofrecer más posibilidades a la hora de calcular amplitudes y funciones de correlación, sobre todo en teorías con interacciones y con

simetría gauge, es una formulación basada en el lagrangiano, y por lo tanto es automáticamente covariante al no introducir una distinción entre espacio y tiempo como hace el hamiltoniano.

También resulta relevante por la sencillez con la que permite definir las teorías en métricas arbitrarias (estudiar QFT en espacio-tiempos curvos) e incluso acoplarlas a gravedad. Por otra parte, en ocasiones permite entender fenómenos no perturbativos que difícilmente son accesibles desde otra perspectiva.

Para un campo escalar  $\phi$  en un espacio-tiempo  $d$ -dimensional definimos

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \quad (1.99)$$

donde  $\mathcal{D}\phi$  representa que estamos sumando para todas las posibles configuraciones del campo, y  $S[\phi]$  es la acción, definida como la integral del lagrangiano

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (1.100)$$

Para calcular los correladores basta con insertar los operadores de interés en la integral de caminos

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) e^{iS[\phi]} \quad (1.101)$$

Para poder extraer los correladores de una manera sencilla se introduce una fuente externa  $J$  a la integral de caminos y se define la siguiente función de partición

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + \int d^d x J(x)\phi(x))} \quad (1.102)$$

de forma que las funciones de correlación se pueden calcular a través de derivadas funcionales

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = (i^n Z)^{-1} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}. \quad (1.103)$$

Sin embargo, en QFTs con interacciones la integral de camino (y en consecuencia la función de partición) rara vez se puede evaluar exactamente. Normalmente se realiza un desarrollo perturbativo en algún parámetro pequeño, para lo cual es necesario separar los términos de la teoría libre (la cinemática de los campos), de los términos

de interacción

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_{\text{int}}[\phi] \quad (1.104)$$

Con esta notación, denotando  $Z_0[J]$  a la función de partición de la teoría libre, podemos escribir para la teoría completa

$$Z[J] = \exp\left(-iS_{\text{int}}\left[-i\frac{\delta}{\delta J}\right]\right) Z_0[J] \quad (1.105)$$

Para ejemplificarlo vamos a considerar la teoría  $\phi^4$ , con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (1.106)$$

y función de partición

$$Z[J] = \exp\left(-i\int d^d x \frac{\lambda}{4!} \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}\right) Z_0[J] \quad (1.107)$$

Dado que tenemos una estructura de la forma  $e^{\lambda(\cdot)}$ , si  $\lambda$  es pequeño podemos realizar la expansión en serie de Taylor de la exponencial y quedarnos con una aproximación conformada por un número finito de términos. Estas contribuciones suelen representarse gráficamente mediante diagramas de Feynman, que facilitan el cálculo de las amplitudes.

Otra técnica útil para obtener una aproximación en cierto regimen es el método del punto de silla (saddle-point). Este suele denominarse límite semiclásico, por sumar una contribución de orden  $\hbar$  a la solución clásica. También puede aplicarse este método a sistemas con un gran número de grados de libertad, como en la aproximación de gran carga que tratamos más adelante.

El método consiste en aproximar la integral de camino por la contribución dominante cerca del punto donde la acción es estacionaria (mínimo o saddle-point). Para una acción  $S[\phi]$ , se considera el campo clásico  $\phi_0$  que satisface las ecuaciones del movimiento

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\phi}\right|_{\phi_0} = 0 \quad (1.108)$$

y se le añade una fluctuación cuántica de orden  $\hbar$ , que denotamos por  $\chi$

$$\phi = \phi_0 + \chi \quad (1.109)$$

Así, la acción se expresa como

$$S[\phi] = S[\phi_0] + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \chi(x) \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} \chi(y) + \mathcal{O}(\chi^3) \quad (1.110)$$

El último paso consiste en integrar las fluctuaciones  $\chi$  al orden cuadrático

$$Z_{\text{sc}} = e^{iS[\phi_0]} \int \mathcal{D}\chi \exp \left( \frac{i}{2} \int d^d x d^d y \chi(x) \left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} \chi(y) \right) \quad (1.111)$$

Por último, no entraremos en detalle, pero es importante tratar la integral de caminos con cuidado en las teorías con simetría gauge, debido a la redundancia en los grados de libertad. Normalmente se recurre al formalismo de Faddeev-Popov, que introduce unos campos ficticios que no satisfacen spin-estadística denominados ghosts.

Un ejemplo sencillo de las consecuencias que puede tener está cuestión en la integral de caminos es que la acción de la electrodinámica que describimos en la sección 1.1.2 no se puede introducir directamente, sino que debe corregirse con un término que fija el gauge. Usando el usual gauge parametrizado por  $\xi$ , la versión cuántica de la acción de la electrodinámica es

$$S_{\text{QED}} = \int d^d x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \right) \quad (1.112)$$

## 1.6. Diagramas y reglas de Feynman

Normalmente, las QFTs se tratan perturbativamente, y las diferentes contribuciones a las amplitudes de scattering se organizan gráficamente en diagramas de Feynman. Estos diagramas constan de tantas líneas exteriores como partículas iniciales y finales haya en la amplitud a calcular, y deben conectarse en un grafo conexo siguiendo las reglas que marque la teoría. Una vez identificados los diagramas relevantes, las reglas de Feynman, derivables a partir de la función de partición, convierten el diagrama en una expresión matemática.

Vamos a ejemplificar el uso de la integral de caminos para calcular las reglas de Feynman. Para ello vamos a considerar a teoría  $\phi^4$ , con acción

$$S[\phi] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \quad (1.113)$$

Ya hemos visto que podemos escribir la función de partición como

$$Z[J] = Z_0[J] - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(x)^4} + o(\lambda^2) \quad (1.114)$$

Además, la función de partición libre es una gaussiana y se puede calcular exactamente. La acción libre con una fuente se puede reescribir integrando por partes como

$$S_0[\phi, J] = \frac{1}{2} \int \phi (-\partial^2 - m^2) \phi + \int J\phi \quad (1.115)$$

de manera que denotando  $\mathcal{O} = -\partial^2 - m^2$  obtenemos

$$S_0[\phi, J] = \frac{1}{2} \int (\phi \mathcal{O} \phi + 2J\phi) \quad (1.116)$$

Si completamos el cuadrado llegamos a la siguiente expresión

$$S_0[\phi, J] = \frac{1}{2} \int [(\phi + \mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\phi + \mathcal{O}^{-1}J) - J\mathcal{O}^{-1}J] \quad (1.117)$$

por lo que haciendo una traslación en el campo  $\phi$  obtenemos

$$Z_0[J] = Z_0 \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \mathcal{O}^{-1}(x, y) J(y) \right) \quad (1.118)$$

De aquí es sencillo concluir que el propagador libre del campo escalar es

$$\Delta_F(x, y) = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 = i\mathcal{O}^{-1}(x, y) \quad (1.119)$$

e invertir el operador  $\mathcal{O}$  es sencillo pasando al espacio de momentos, obteniéndose

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.120)$$

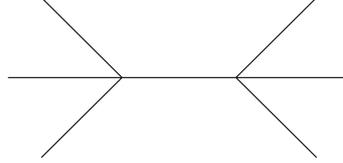
donde la parte imaginaria que se ha añadido es una prescripción que recupera la ordenación temporal al volver a posiciones (debe entenderse  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

Estamos en condiciones de calcular la función a 4-puntos (para la que podemos aprovechar el Teorema de Wick) y utilizar la fórmula LSZ. No hacemos aquí el desarrollo, pero concluimos dando las reglas de Feynman en el espacio de momentos:

- El momento se conserva en todos los vértices.
- Una línea interna (propagador) con momento  $p$  contribuye con  $\Delta_F(p)$ .

- Un vértice de interacción contribuye con  $-i\lambda$ .
- Cada loop (bucle en el grafo) contribuye con una integración  $\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$  asociada al momento que corre por el loop.

Por ejemplo, podemos ver el tree level (sin loops) de un scattering 3 a 3, que viene dado por el siguiente diagrama



cuya expresión utilizando las reglas de Feynman serían

$$i\mathcal{M} = \frac{-i\lambda^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.121)$$

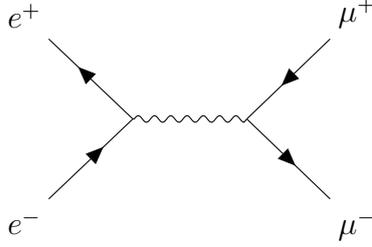
donde hemos escrito los momentos iniciales como  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ .

### 1.6.1. Ejemplos en QED

Para ejemplificar el uso de diagramas de Feynman en un caso más realista vamos a emplear QED en tree level. Recopilamos aquí las reglas relevantes (en el gauge de Feynman):

- Fermión entrante:  $u(p)$
- Fermión saliente:  $\bar{u}(p)$
- Antifermión entrante:  $\bar{v}(p)$
- Antifermión saliente:  $v(p)$
- Fotón entrante/saliente:  $\epsilon_\mu(k)$
- Vértice:  $-ie\gamma^\mu$
- Propagador de fermión:  $\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$
- Propagador de fotón:  $\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$

Vamos a calcular la amplitud no polarizada de un scattering  $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$  en un gauge con parámetro  $\xi$  genérico (por lo que el propagador del fotón se ve modificado) para ver cómo el resultado final no depende de este. El diagrama de Feynman a calcular es



Denotamos por  $p_1$  y  $p_2$  al momento de los electrones y por  $k_1$  y  $k_2$  al de los muones. El momento del fotón interno es  $q = p_1 + p_2$ . El elemento de matriz es

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i \left[ \eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]}{q^2} \bar{u}(k_1) \gamma^\nu v(k_2) \quad (1.122)$$

donde hemos omitido el  $i\epsilon$ .

Podemos emplear las ecuaciones del movimiento

$$\not{p}_1 u(p_1) = m_e u(p_1), \quad \bar{v}(p_2) \not{p}_2 = -\bar{v}(p_2) m_e \quad (1.123)$$

para ver que

$$\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) q_\mu = \bar{v}(p_2) (\not{p}_1 + \not{p}_2) u(p_1) = \bar{v}(p_2) (m_e - m_e) u(p_1) = 0 \quad (1.124)$$

con lo que el elemento de matriz no depende del parámetro de gauge y se escribe como

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(k_1) \gamma_\mu v(k_2) \quad (1.125)$$

donde hemos usado la variable de Mandelstam  $s$ . La definición de estas variables es

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad (1.126)$$

$$t = (p_1 - k_1)^2 \quad (1.127)$$

$$u = (p_1 - k_2)^2 \quad (1.128)$$

Usando las relaciones

$$\sum_{spins} u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m \quad (1.129)$$

$$\sum_{spins} v(p)\bar{v}(p) = \not{p} - m \quad (1.130)$$

$$[\bar{v}(k)\gamma^\mu u(p)]^\dagger = \bar{u}(p)\gamma^\mu v(k) \quad (1.131)$$

y teniendo en cuenta la propiedad cíclica de la traza y las propiedades de las matrices gamma en 4d

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0 \quad (1.132)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu} \quad (1.133)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] = 0 \quad (1.134)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \quad (1.135)$$

se obtiene que la amplitud inclusiva no polarizada es

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e)\gamma_\nu(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu] \text{Tr}[(\not{k}_1 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}_2 - m_\mu)\gamma^\nu] = \\ &= \frac{8e^4}{s^2} \left[ (p_1 \cdot k_2)(p_2 \cdot k_1) + (p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_2) + m_e^2 k_1 \cdot k_2 \right. \\ &\quad \left. + m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \right] = \\ &= \frac{2e^4}{s^2} \left[ 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)(s - t - u) + t^2 + u^2 \right] \end{aligned} \quad (1.136)$$

Por otro lado, vamos a calcular ahora la amplitud no polarizada de scattering de un electrón contra un núcleo estático sin spin, modelizado como una corriente  $J^\mu = Q\delta_0^\mu$ , la conocida como fórmula de Mott. Denotamos por  $p_i$  y  $p_f$  al momento inicial y final del electrón y por  $E_i$  y  $E_f$  a su energía. El elemento de matriz es

$$\mathcal{M} = -e\bar{u}(p_f)\gamma_\mu u(p_i) \frac{-iJ^\mu}{(p_f - p_i)^2} = \frac{ieQ}{2(m^2 - p_i \cdot p_f)} \bar{u}(p_f)\gamma_0 u(p_i) \quad (1.137)$$

de forma que su amplitud toma la forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^2 Q^2}{8(m^2 - p_i \cdot p_f)^2} \text{Tr} \left[ (\not{p}_i + m) \gamma^0 (\not{p}_f + m) \gamma^0 \right] = \\
&= \frac{e^2 Q^2}{2(m^2 - p_i \cdot p_f)^2} (2E_i E_f - p_i \cdot p_f + m^2) \\
&= \frac{e^2 Q^2}{2(m^2 - p_i \cdot p_f)^2} (E_i E_f - |\vec{p}_i| |\vec{p}_f| \cos \theta + m^2)
\end{aligned} \tag{1.138}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de salida del electrón respecto a la incidencia.

## 1.7. Selección de cálculos de interés en QFT

Introducidos algunos de los conceptos fundamentales de las teorías cuánticas de campos, en esta sección vamos a presentar algunos cálculos específicos para ejemplificar el uso de la teoría desarrollada en distintos contextos y llevarnos alguna lección por el camino.

Comenzamos calculando funciones a dos puntos de operadores compuestos, esto es, productos ordenados normalmente de campos evaluados en un mismo punto. Después trabajaremos con espinores en 3d para ver algunas de sus peculiaridades (conexión de Berry, anomalía de paridad), y finalmente daremos un ejemplo del teorema óptico.

### 1.7.1. Función a dos puntos de operadores compuestos

Vamos a calcular en la teoría de un campo escalar libre la función a dos puntos del operador compuesto  $\phi^2$ , definido según

$$\phi^2(x) = \lim_{y \rightarrow x} : \phi(x) \phi(y) : \tag{1.139}$$

Usamos la notación  $D_{xy}$  para el propagador  $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$  y la relación

$$: \phi(x) \phi(y) : = T \{ \phi(x) \phi(y) \} - D_{xy} \tag{1.140}$$

Así, tenemos que el producto de dos operadores toma la forma

$$\begin{aligned}
\phi^2(x)\phi^2(y) &= \lim_{(z,w) \rightarrow (x,y)} : \phi(x)\phi(z) :: \phi(y)\phi(w) : \\
&= \lim_{(z,w) \rightarrow (x,y)} (T\{\phi(x)\phi(z)\}T\{\phi(y)\phi(w)\} - D_{xz}T\{\phi(y)\phi(w)\} \\
&\quad - D_{yw}T\{\phi(x)\phi(z)\} + D_{xz}D_{yw})
\end{aligned} \tag{1.141}$$

y usando el teorema de Wick tenemos que la función a dos puntos es

$$\begin{aligned}
\langle \phi^2(x)\phi^2(y) \rangle &= \lim_{(z,w) \rightarrow (x,y)} (\langle \phi(x)\phi(z)\phi(y)\phi(w) \rangle - D_{xz}D_{yw}) = \\
&= \lim_{(z,w) \rightarrow (x,y)} (D_{xz}D_{yw} + D_{xy}D_{zw} + D_{xw}D_{yz} - D_{xz}D_{yw}) = \\
&= \lim_{(z,w) \rightarrow (x,y)} (D_{xy}D_{zw} + D_{xw}D_{yz}) = 2D_{xy}^2
\end{aligned} \tag{1.142}$$

Es posible interpretar diagramáticamente el resultado de la siguiente forma:

$$\langle \phi^2(x)\phi^2(y) \rangle = \begin{array}{c} x & y \\ \bullet & \bullet \\ \hline x & y \\ \bullet & \bullet \end{array} + \begin{array}{c} x & y \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & \diagup \\ \bullet & \bullet \\ \diagup & \diagdown \\ \bullet & \bullet \end{array} = 2D_{xy}^2 \tag{1.143}$$

de manera que el resultado extiende a

$$\langle \phi^n(x)\phi^n(y) \rangle = n! D_{xy}^n \tag{1.144}$$

ya que es la suma de todos los posibles diagramas que conectan  $n$  vértices  $x$  con  $n$  vértices  $y$  a través de  $n$  líneas.

Vamos a calcular la representación en el espacio de momentos de estas funciones a dos puntos. Para ello, usamos que la expresión en momentos es

$$\langle \phi^n(-\vec{p})\phi^n(\vec{p}) \rangle = \int d^d \vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle \phi^n(\vec{x})\phi^n(0) \rangle = n! \int d^d \vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} D_{x0}^n \tag{1.145}$$

Consideramos un campo escalar  $\phi$  sin masa en una teoría libre con signatura euclídea, de forma que el propagador  $D_{x0}$  viene dado en espacio de posiciones por la expresión calculada en la ecuación (1.38). Así, usando la notación  $x = |\vec{x}|$  para  $\vec{x}$  y también otros vectores, obtenemos

$$\langle \phi^n(-\vec{p})\phi^n(\vec{p}) \rangle = \frac{n! \Gamma(\frac{d}{2} - 1)^n}{4^n \pi^{\frac{nd}{2}}} \int d^d \vec{x} \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{x^{n(d-2)}} \tag{1.146}$$

Empleamos ahora la transformada de Fourier

$$\frac{1}{x^{2\alpha}} = \frac{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2} - \alpha)}{4^\alpha\Gamma(\alpha)} \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{k^{d-2\alpha}} \quad (1.147)$$

que sustituida en el correlador con  $\alpha = n(\frac{d}{2} - 1)$  da

$$\langle \phi^n(-\vec{p})\phi^n(\vec{p}) \rangle = \frac{n!\Gamma(\frac{d}{2} - 1)^n\Gamma(n - (n-1)\frac{d}{2})}{(4\pi)^{(n-1)\frac{d}{2}}\Gamma(n(\frac{d}{2} - 1))} \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \int d^d\vec{x} \frac{e^{i(\vec{p}-\vec{k})\cdot\vec{x}}}{k^{2n-(n-1)d}} \quad (1.148)$$

Notamos que en el lado derecho aparece la transformada de la delta de Dirac

$$(2\pi)^d \delta^d(\vec{p} - \vec{k}) = \int d^d\vec{x} e^{i(\vec{p}-\vec{k})\cdot\vec{x}} \quad (1.149)$$

de forma que las integrales se realizan trivialmente y obtenemos

$$\langle \phi^n(-\vec{p})\phi^n(\vec{p}) \rangle = \frac{n!\Gamma(\frac{d}{2} - 1)^n\Gamma(n - (n-1)\frac{d}{2})}{(4\pi)^{(n-1)\frac{d}{2}}\Gamma(n(\frac{d}{2} - 1))} \frac{1}{p^{2n-(n-1)d}} \quad (1.150)$$

La segunda  $\Gamma$  en el numerador diverge en  $d = 4$ , por lo que vamos a extraer la información de interés regularizando en  $d = 4 - \epsilon$ . Esto supone realizar la expansión en serie con  $\epsilon \rightarrow 0$ , quedándonos a primer orden en  $\epsilon$ . Este procedimiento altera la dimensión de reescalado del campo de manera implícita (relacionado con la renormalización), y una forma sencilla de recuperar esta dependencia con la escala de energía  $\mu$  es introduciéndola a mano donde sea necesaria para hacer las expresiones dimensionalmente correctas. Normalmente esto equivale a realizar una de las sustituciones siguientes, dependiendo de si se trabaja en posiciones o momentos

$$\log x^2 \rightarrow \log \mu^2 x^2, \quad \log p^2 \rightarrow \log \frac{p^2}{\mu^2} \quad (1.151)$$

Solo estamos interesados a como dependen las funciones a dos puntos de la escala, por lo que además de recoger la divergencia a orden  $o(\epsilon^{-1})$  y despreciar a orden  $o(\epsilon)$ , vamos a escribir explícitamente solo el término que acompañe a  $\log p$  a  $o(1)$ . De esta forma tenemos que

$$\langle \phi^n(-\vec{p})\phi^n(\vec{p}) \rangle = \frac{np^{2(n-2)}}{(4\pi)^{2(n-1)}} \frac{\Gamma(2 - n - \frac{(n-1)\epsilon}{2})}{p^{(n-1)\epsilon}} \quad (1.152)$$

y podemos aprovechar las propiedades de la función Gamma para escribir

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{(n-1)\epsilon}{2} - (n-2)\right) &= (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{(n-1)\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{(n-1)\epsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(n-1 + \frac{(n-1)\epsilon}{2}\right)} = \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \Gamma\left(\frac{(n-1)\epsilon}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.153)$$

donde hemos despreciado términos de orden  $o(1)$ .

Finalmente, realizando la expansión en serie en  $\epsilon$  nos queda

$$\langle \phi^n(-\vec{p}) \phi^n(\vec{p}) \rangle = \frac{(-1)^n n p^{2(n-2)}}{(n-2)!(4\pi)^{2(n-1)}} \left( \frac{2}{(n-1)\epsilon} - \log \frac{p^2}{\mu^2} \right) \quad (1.154)$$

Podemos calcular ahora la dependencia física del correlador con respecto a la escala derivando con respecto a  $\log \mu$ , de forma que<sup>3</sup>

$$\mu \frac{d}{d\mu} \langle \phi^n(-\vec{p}) \phi^n(\vec{p}) \rangle = \frac{(-1)^n 2n p^{2(n-2)}}{(n-2)!(4\pi)^{2(n-1)}} = C(n) p^{2(n-2)} \quad (1.155)$$

Volviendo al espacio de posiciones obtenemos

$$\mu \frac{d}{d\mu} \langle \phi^n(\vec{x}) \phi^n(0) \rangle = C(n) \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} p^{2(n-2)} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (1.156)$$

de forma que la dependencia con la escala viene dada por términos de contacto, expresables en términos de funciones delta y sus derivadas. Por ejemplo, en  $n = 2$  nos queda sencillamente

$$\mu \frac{d}{d\mu} \langle \phi^2(\vec{x}) \phi^2(\vec{0}) \rangle = \frac{\delta^d(\vec{x})}{8\pi^2} \quad (1.157)$$

y en  $n = 3$ , expresando la integral como

$$\int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} p^2 e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \sum_{i=1}^d \left( \int \frac{dp_i}{2\pi} p_i^2 e^{-ip_i \cdot x_i} \prod_{j \neq i} \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{-ip_j \cdot x_j} \right) \quad (1.158)$$

---

<sup>3</sup>Esta dependencia con respecto a una escala de energía estaba escondida en los infinitos, pues la teoría libre sin masa es clásicamente conforme (la esperaríamos invariante respecto a cualquier escala). Es por tanto una manifestación de una anomalía (ruptura en la teoría cuántica de una simetría global de la teoría clásica), en este caso conforme, que se presenta a través de términos de contacto. En este caso la anomalía no es universal y puede resolverse reabsorbiéndose a través de un contratérmino local (un término extra en el lagrangiano).

y notando que se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta''(x) e^{ipx} = -p^2 \quad (1.159)$$

donde se ha integrado dos veces por partes, se obtiene como resultado

$$\mu \frac{d}{d\mu} \langle \phi^3(\vec{x}) \phi^3(\vec{0}) \rangle = \frac{6}{(4\pi)^4} \sum_{i=1}^d \left( \delta''(x_i) \prod_{j \neq i} \delta(x_j) \right) \quad (1.160)$$

### 1.7.2. Spinores en 3d

Para ejemplificar la complejidad inherente a los spinores (que distan bastante de ser simples vectores) y ver cómo su forma depende mucho de la dimensión en la que vivan vamos a realizar algunos cálculos en  $d = 3$ .

En primer lugar, vamos a calcular las soluciones de la ecuación de Dirac en 3d. Recordamos que la ecuación toma la forma

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (1.161)$$

con  $\rlap{-}\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ . Las matrices gamma satisfacen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.162)$$

es decir, forman un álgebra de Clifford.

En 3d, existen representaciones irreducibles (irreps) del álgebra de Clifford bi-dimensionales. De hecho, en cualquier dimensión impar  $d = 2m + 1$ , existen 2 irreps inequivalentes de dimensión  $2^m$ .

Las matrices de Pauli son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.163)$$

y cumplen

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (1.164)$$

por lo que dos elecciones sencillas de matrices gamma que cumplen (1.162) son

$$\gamma^0 = \sigma_3, \gamma^1 = i\sigma_1, \gamma^2 = i\sigma_2 \quad (1.165)$$

$$\gamma^0 = \sigma_3, \gamma^1 = i\sigma_1, \gamma^2 = -i\sigma_2 \quad (1.166)$$

además, se puede comprobar que dan lugar a irreps inequivalentes, por lo que toda la información física de la ecuación de Dirac en 3d puede extraerse empleando tan solo estos dos conjuntos de matrices. Vamos a centrarnos en la primera irrep y comentar las diferencias que se hubieran obtenido de haber utilizado la otra.

Introduciendo en la ecuación de Dirac un ansatz  $\psi_{\pm}(x) = u(p)e^{\mp ipx}$ , donde  $u(p)$  es un spinor de dos componentes y  $p$  es un cuadrimomento on-shell de masa  $m$ , obtenemos la ecuación  $(\not{p} \mp m)u(p) = 0$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones y normalizando según  $\psi_{\pm}^* \psi_{\pm} = 1$  se obtienen soluciones:

$$\psi_+(x) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2p_0}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_1 - p_2}{m + p_0} \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad (1.167)$$

$$\psi_-(x) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2p_0}} \begin{pmatrix} -\frac{ip_1 + p_2}{m + p_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} \quad (1.168)$$

En caso de utilizar la otra irrep las soluciones hubieran sido

$$\tilde{\psi}_+(x) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2p_0}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{ip_1 + p_2}{m + p_0} \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad (1.169)$$

$$\tilde{\psi}_-(x) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2p_0}} \begin{pmatrix} -\frac{ip_1 - p_2}{m + p_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} \quad (1.170)$$

que de manera natural tienen el signo en  $p_2$  cambiado, al tener la matriz  $\gamma^2$  el signo opuesto en esta irrep.

### 1.7.3. Conexión de Berry

Puede ocurrir en sistemas electromagnéticos que el campo  $A_{\mu}$  sea no nulo, pero que aun así se anulen los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . En principio podríamos pensar que  $A_{\mu}$  no es físico, pues si no hay campos eléctrico y magnético la fuerza es nula y no podemos detectarlo. Normalmente esto es cierto, pero en sistemas que no son topológicamente

triviales las partículas pueden adquirir fases dependientes de su trayectoria debidas a  $A_\mu$ . Esto conlleva que experimentos de interferencia sean capaces de medir el valor del campo  $A_\mu$ . A la fase adquirida se le denomina fase de Berry.

Este fenómeno puede parecer exótico, pero vamos a ver cómo ocurre de manera natural, sin falta de obstrucciones topológicas, con los spinores en 3d. La conexión de Berry en este caso se define por

$$A_i = i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \quad (1.171)$$

la curvatura como

$$F_{12} = \frac{\partial A_1}{\partial p_2} - \frac{\partial A_2}{\partial p_1} \quad (1.172)$$

y finalmente la fase de Berry es

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int dp_1 dp_2 F_{12} \quad (1.173)$$

Después de derivar y realizar múltiples manipulaciones se obtiene, con el signo superior para la primera irrep y el inferior para la segunda, el resultado

$$A_i = x^i + \frac{p_i}{p_0} t - \frac{1}{2} \frac{p_i + (ip_1 \pm p_2)(i\delta_{1i} \mp \delta_{2i})}{mp_0 + p_0^2} \quad (1.174)$$

de forma que

$$A_1 = x + \frac{1}{p_0} \left( p_1 t \mp \frac{i}{2} \frac{p_2}{m + p_0} \right) \quad (1.175)$$

$$A_2 = y + \frac{1}{p_0} \left( p_2 t \pm \frac{i}{2} \frac{p_1}{m + p_0} \right) \quad (1.176)$$

con lo que

$$F_{12} = \pm \frac{i}{2} \frac{1}{p_0(m + p_0)} \left( \frac{p_1 + p_2}{m + p_0} - \frac{m^2 + p_0^2}{p_0^2} \right) \quad (1.177)$$

y realizando la integral en un cuadrado centrado en el origen de lado  $2\Lambda$  la fase es

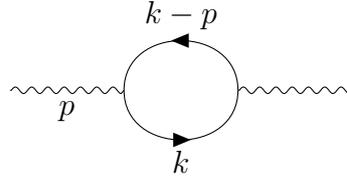
$$\begin{aligned} 2\pi\phi &= \int dp_1 dp_2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial p_2} - \frac{\partial A_2}{\partial p_1} \right) = 2\Lambda(x - y) \pm i \left( \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\Lambda dp_2}{m^2 + \Lambda^2 + p_2^2 + m\sqrt{m^2 + \Lambda^2 + p_2^2}} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{\Lambda dp_1}{m^2 + \Lambda^2 + p_1^2 + m\sqrt{m^2 + \Lambda^2 + p_1^2}} \right) = 2\Lambda(x - y) \end{aligned} \quad (1.178)$$

Esta alteración de la fase da información sobre la topología del espacio de mo-

mentos y tiene una estrecha relación con que en  $3d$  existe un término topológico de Chern-Simons, una teoría que aparece en la descripción efectiva de fermiones masivos<sup>4</sup>.

#### 1.7.4. Anomalía de paridad

Vamos a calcular el coeficiente del término proporcional a  $p_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho}$  en la autoenergía del fotón en QED en  $3d$  a 1-loop. Se va a trabajar en la irrep del álgebra de Clifford dada por (1.165). El diagrama a calcular es



que tiene como elemento de matriz

$$i\Pi^{\mu\nu} = -(-ie)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i(\not{k} - \not{p} + m)}{(k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \right] \quad (1.179)$$

Para calcular la traza es necesario conocer las propiedades de traza de las matrices gamma en  $3d$ . La traza de un número par de matrices tiene la misma forma en todas las dimensiones debido a la definición del álgebra de Clifford, la de una sola matriz se obtiene de la definición en términos de las matrices de Pauli y la de tres matrices se obtiene a partir de la relación  $\text{Tr}[\sigma_i \sigma_j \sigma_k] = 2i\varepsilon_{ijk}$ , de forma que

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0 \quad (1.180)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.181)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = -2i\varepsilon^{\mu\nu\rho} \quad (1.182)$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 2(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \quad (1.183)$$

<sup>4</sup>Chern-Simons se escribe en términos de la conexión  $A$  de un grupo gauge  $G$  como

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

y su ecuación del movimiento es  $F = 0$ , donde  $F = dA + A \wedge A$  es la curvatura. Por tanto, las soluciones clásicas son las conexiones planas (curvatura nula), que están en correspondencia con las clases de equivalencia de homomorfismos del grupo fundamental de  $M$  a  $G$ , de ahí que sea una teoría topológica.

Así, computando solo los términos que contienen una traza de tres matrices se obtiene:

$$i\Pi_\varepsilon^{\mu\nu} = 2ime^2 p_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.184)$$

Para resolver la integral usamos parámetros de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[A + (B-A)x]^2} \quad (1.185)$$

y la fórmula obtenida mediante una rotación de Wick

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \quad (1.186)$$

Teniendo en cuenta que la integral converge en  $d = 3$ , realizamos directamente el cálculo para obtener

$$\begin{aligned} i\Pi_\varepsilon^{\mu\nu} &= 2ime^2 p_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - m^2(x^2 - x + 1) + i\varepsilon]^2} = \\ &= -\frac{m}{|m|} \frac{e^2}{4\pi} p_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho} \int_0^1 dx (x^2 - x + 1)^{-\frac{1}{2}} = -\text{sgn}(m) \frac{\log 3}{4\pi} e^2 p_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho} \end{aligned} \quad (1.187)$$

En la otra irrep inequivalente, la fórmula (1.182) tiene el signo opuesto, por lo que el resultado final también. Es decir, partiendo de QED, que clásicamente tiene una simetría de paridad (la transformación  $x \rightarrow -x$  deja invariante la acción), hemos obtenido un término que cambia de signo al cambiar la paridad<sup>5</sup>.

### 1.7.5. Teorema óptico

Un resultado interesante en QFT es el Teorema óptico, pues da una relación entre una amplitud de scattering a tree level y otra con 1 loop. Este teorema (entre otras muchas pistas) nos sugiere que QFT no es una colección de ideas sueltas, si no que tiene mucha estructura y consistencia interna, aunque esta no siempre sea visible.

En lugar de escribir el teorema óptico con todos sus detalles vamos a ceñirnos a

---

<sup>5</sup>De hecho, en relación al apartado anterior, en presencia de un fermión masivo y a escalas de energía inferiores a su masa, es esta anomalía la que genera la descripción efectiva del fotón a través de un término de Chern-Simons.

ilustrar su cumplimiento en una teoría concreta. Trabajamos en

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} [(\partial\phi)^2 + (\partial\psi)^2 - M^2\phi^2 - m^2\psi^2 - \lambda\phi^2\psi] \quad (1.188)$$

y vamos a verificar el cumplimiento del teorema óptico a orden  $\lambda^2$  en el caso particular

$$\text{Im } \mathcal{M}_{\psi \rightarrow \psi} = \frac{1}{2} \int d\Pi_{\text{LIPS}} (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi - p_{\text{final}}) |\mathcal{M}_{\psi \rightarrow \phi\phi}|^2 \quad (1.189)$$

donde el factor de volumen es

$$d\Pi_{\text{LIPS}} = \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_1E_2} \quad (1.190)$$

Para la parte derecha de la ecuación, solo necesitamos calcular el diagrama de interacción en tree-level, por lo que es trivial obtener  $|\mathcal{M}_{\psi \rightarrow \phi\phi}|^2 = \lambda^2$ . Trabajamos en el centro de masas de la colisión, por lo que los cuádrimomentos son

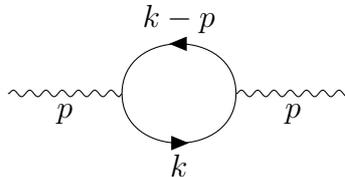
$$\begin{aligned} p_\psi &= (m, \vec{0}) \\ p_{\phi_1} &= (E_\phi, \vec{p}) \\ p_{\phi_2} &= (E_\phi, -\vec{p}) \end{aligned} \quad (1.191)$$

donde ya hemos tenido en cuenta que vamos a utilizar inmediatamente la parte espacial de la delta de Dirac de la ecuación. Así, la parte derecha de la ecuación toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int d\Omega \int_0^\infty dp \frac{p^2}{E_\phi(p)^2} \delta(m - 2E_\phi(p)) &= \frac{\lambda^2}{16\pi} \int_M^\infty dx \frac{\sqrt{x^2 - M^2}}{x} \delta(m - 2x) = \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{m^2}} \theta(m - 2M) \end{aligned} \quad (1.192)$$

donde se ha considerado  $\int d\Omega = 2\pi$  al ya haber tenido en cuenta la simetría de las partículas.

Vamos a calcular ahora la parte imaginaria del propagador del  $\psi$ , corregido a 1-loop por su interacción con  $\phi$ . El diagrama a calcular es



donde la línea curva es un  $\psi$  y la recta un  $\phi$ , y se considera que los  $\psi$  están on-shell con masa  $m$ . El elemento de matriz es (usando los parámetros de Feynman de la ecuación (1.185):

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \frac{1}{2}(i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k-p)^2 - M^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - (M^2 - m^2x(1-x)) + i\varepsilon]^2} \end{aligned} \quad (1.193)$$

Usando el método de regularización de Pauli-Villars con una escala de cutoff  $\Lambda$  se obtiene la fórmula de integración

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \Delta + i\varepsilon]^2} = -\frac{i}{16\pi^2} \log \frac{\Delta - i\varepsilon}{\Lambda^2} \quad (1.194)$$

que aplicada a este caso resulta en

$$\mathcal{M} = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \frac{M^2 - m^2x(1-x) - i\varepsilon}{\Lambda^2} \quad (1.195)$$

Observamos que si  $M^2 - m^2x(1-x) > 0$ , la integral es real y la parte imaginaria de  $\mathcal{M}$  es nula, por lo que podemos introducir un escalón a la integral y utilizar la expresión

$$\log(-A - i\varepsilon) = \log(A) - i\pi, \quad A > 0 \quad (1.196)$$

de forma que

$$\text{Im } \mathcal{M} = \frac{\lambda^2}{32\pi} \int_0^1 dx \theta(m^2x(1-x) - M^2) = \frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{m^2}} \theta(m - 2M) \quad (1.197)$$

verificando el teorema óptico.

## 1.8. Renormalización

En esta sección tratamos lo que hasta ahora habíamos escondido bajo la alfombra, y es que QFT está repleta de infinitos. Comentamos al calcular las funciones a 2-puntos de los operadores compuestos del campo a escalar en el espacio de momentos que la integral divergía, por lo que era necesario regularizar y que eso introducía una dependencia con la escala  $\mu$  en la teoría. Todas estas ideas se enmarcan en la renormalización de QFT.

No indagaremos aquí en el tratamiento general de los infinitos y su correcta renormalización, pues el tema es tremendamente denso y está lleno de matices y detalles. Nos referimos a cualquiera de las excelentes referencias de la bibliografía para ello. Sin embargo, vamos a aplicar aquí las lecciones de estas referencias para renormalizar dos teorías: la clásica  $\phi^4$  y una teoría un poco más peculiar con simetría  $O(N)$  y un límite *large N* interesante.

### 1.8.1. $\phi^4$ en $4d$

Vamos a renormalizar a 1-loop la teoría  $\phi^4$  en  $d = 4 - \varepsilon$  y vamos a calcular la dimensión anómala de  $\phi^n(x)$ . La acción es (notar que trabajamos en el euclídeo)

$$S = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{g}{4!} \phi^4 \right) \quad (1.198)$$

Vamos a considerar la versión masiva de esta teoría (tomando el límite sin masa si en algún caso es necesario), pues la masa funciona de manera natural como regulador, simplificando la renormalización, de manera que la acción pasa a ser

$$S = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{g}{4!} \phi^4 \right) \quad (1.199)$$

Introducimos constantes de renormalización  $Z_i = 1 + \delta_i$  que relacionan los campos y constantes de acoplo renormalizadas con las presentes en la acción de la teoría (denotadas a partir de ahora por un superíndice <sup>0</sup>) en la forma

$$\phi^0 = \sqrt{Z_\phi} \phi, \quad m^0 = Z_m m, \quad g^0 = Z_g \mu^{4-d} g \quad (1.200)$$

donde la escala  $\mu$  se introduce para hacer  $g$  adimensional. Además, introducimos también la notación

$$Z_1 = Z_m^2 Z_\phi, \quad Z_2 = Z_g Z_\phi^2 \quad (1.201)$$

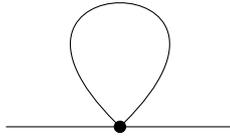
de forma que a primer orden se tienen las relaciones

$$\delta_1 = 2\delta_m + \delta_\phi, \quad \delta_2 = \delta_g + 2\delta_\phi \quad (1.202)$$

Las reglas de Feynman son:

- Propagador  $\phi\phi$ :  $\frac{1}{p^2 + m^2}$
- Vértice  $\phi^4$ :  $-\mu^\varepsilon g$
- Contratérmino  $\phi\phi$ :  $-(\delta_\phi p^2 + \delta_1 m^2)$
- Contratérmino  $\phi^4$ :  $-\mu^\varepsilon g \delta_2$

El diagrama del propagador a 1-loop es



y su elemento de matriz (usando (1.223)) es

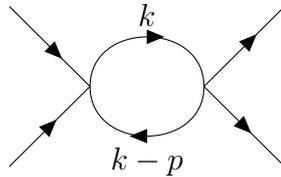
$$-\mu^\varepsilon g \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} = -\frac{gm^2}{32\pi^2} \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) + o(1) = \frac{gm^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + o(1) \quad (1.203)$$

Así, se tienen los contratérminos

$$\delta_\phi = o(g^2), \quad \delta_1 = \frac{g}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.204)$$

y la primera corrección en  $\phi$  se obtiene a 2-loops, lo que significa que la dimensión anómala de  $\phi$  aparece a 2-loops. Veremos que no es así para los operadores compuestos  $\phi^n(x)$ , con  $n > 1$ .

Uno de los diagramas de interacción  $\phi^4$  a 1-loop es



y su elemento de matriz es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu^{2\varepsilon} g^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k-p)^2} \frac{1}{k^2} = \\ & = \frac{1}{2} \mu^{2\varepsilon} g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + x(1-x)p^2]^2} = \\ & = \frac{g^2}{32\pi^2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + o(1) = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + o(1) \end{aligned} \quad (1.205)$$

Los otros dos diagramas se obtienen permutando las patas externas (diagramas de scattering  $s$ ,  $t$  y  $u$ ), y dan el mismo resultado, de forma que se multiplica el anterior por 3 y el contratérmino es

$$\delta_2 = \frac{3g}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.206)$$

Obtenemos así las correcciones a la masa y a la constante de acoplo:

$$\delta_m = \frac{\delta_1}{2} = \frac{g}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \delta_g = \delta_2 = \frac{3g}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.207)$$

La introducción de la escala  $\mu$  se realiza de forma arbitraria: es una ambigüedad en la descripción de la teoría. Por tanto, las constante de acoplo y la masa que aparecen en el lagrangiano de la teoría no pueden depender de  $\mu$ . Así, las funciones  $\beta$  de  $m$  y  $g$  se obtienen a partir de

$$0 = \mu \frac{dg^0}{d\mu} = Z_g \mu^\varepsilon g \left( \varepsilon + \frac{\mu}{Z_g} \frac{d\delta_g}{d\mu} + \frac{\beta_g}{g} \right) \quad (1.208)$$

$$0 = \mu \frac{dm_0^2}{d\mu} = Z_m^2 m^2 \left( 2 \frac{\mu}{Z_m} \frac{d\delta_m}{d\mu} + \frac{\beta_m}{m^2} \right) \quad (1.209)$$

con lo que a primer orden en  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \beta_g &= -\varepsilon g + \frac{3g^2}{16\pi^2} \\ \beta_m &= \frac{gm^2}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (1.210)$$

El flujo del grupo de renormalización se puede observar en la Figura 1.1, donde se observan la recta repulsora  $g = 0$  y los puntos fijos  $(m, g)$  trivial  $(0, 0)$  y no trivial  $(0, \frac{16\pi^2}{3}\varepsilon)$ .

Definimos la renormalización de  $\phi(x)^n$  ( $n > 1$ ) como

$$\phi_0^n(x) = Z_{\phi^n} \phi^n(x), \quad Z_{\phi^n} = 1 + \delta_{\phi^n} \quad (1.211)$$

y su dimensión anómala (a primer orden) como

$$\gamma_n = \frac{\mu}{Z_{\phi^n}} \frac{dZ_{\phi^n}}{d\mu} = \mu \frac{d\delta_{\phi^n}}{d\mu} \quad (1.212)$$

Podemos introducir al lagrangiano un término de la forma  $-\frac{1}{n!}\sigma\phi^n$ , entendiendo  $\sigma$  como un campo escalar, de forma que introducimos un nuevo vértice con constante

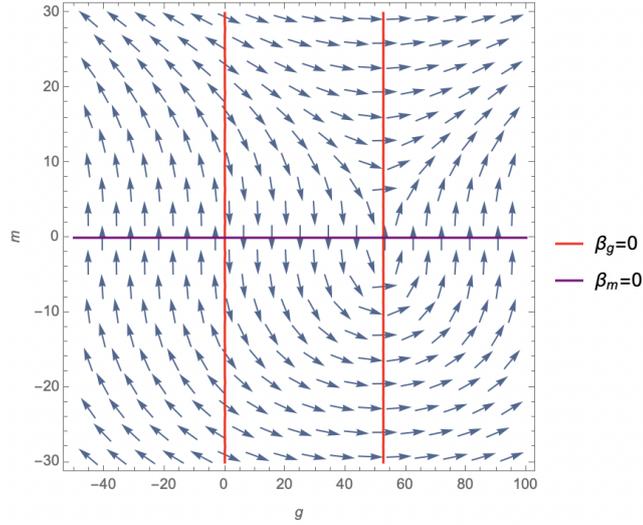
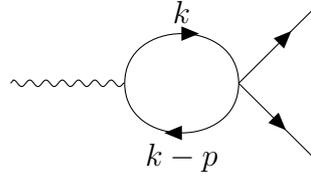


Figura 1.1: Flujo del grupo de renormalización en  $\phi^4$  con  $\varepsilon = 1$  ( $d = 3$ ).

de acoplo 1 y contratérmino  $\delta_{\phi^n}$ .

Tendríamos así en el caso  $n = 2$  el siguiente diagrama de corrección al vértice introducido con 1-loop (la línea curvada representa a  $\sigma$ ):



que tiene elemento de matriz (calculado inmediatamente por su similitud al vértice de cuatro patas ya computado):

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + o(1) \quad (1.213)$$

La generalización a  $n$  arbitrario es automática, pues simplemente hay que elegir 2 de las  $n$  patas para incluir el loop y dejar las otras  $n - 2$  libres, de forma que el elemento de matriz es

$$\mathcal{M}_n = \frac{n!}{2!(n-2)!} \mathcal{M}_2 = \frac{n(n-1)}{2} \mathcal{M}_2 = \frac{n(n-1)g}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + o(1) \quad (1.214)$$

Así, los contratérminos son

$$\delta_{\phi^n} = -\frac{n(n-1)g}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.215)$$

y la dimensión anómala (a primer orden)

$$\gamma_n = -\frac{n(n-1)}{32\pi^2} \frac{\beta_g}{\varepsilon} = \frac{n(n-1)}{32\pi^2} g \quad (1.216)$$

que en el punto fijo no trivial toma la forma

$$\gamma_n = \frac{n(n-1)}{6} \varepsilon \quad (1.217)$$

y en concreto en  $\varepsilon = 1$  ( $d = 3$ ):

$$\gamma_n = \frac{n(n-1)}{6} \quad (1.218)$$

### 1.8.2. $O(N)$ en 6d

Consideramos la teoría en  $d = 6 - \varepsilon$  dimensiones con acción

$$S = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial \vec{\phi})^2 + \frac{1}{2} (\partial \sigma)^2 + \frac{g_1}{2} \sigma \vec{\phi}^2 + \frac{g_2}{6} \sigma^3 \right) \quad (1.219)$$

con  $\vec{\phi}$  un vector  $N$ -dimensional. Es claro que por la estructura de las interacciones esta teoría tiene simetría  $O(N)$ . Vamos a calcular a primer orden las funciones  $\beta$  de  $g_1$  y  $g_2$  y los puntos fijos del grupo de renormalización.

Introducimos constantes de renormalización  $Z_i = 1 + \delta_i$  que relacionan los campos y constantes de acoplo renormalizadas con las presentes en la acción de la teoría (denotadas a partir de ahora por un superíndice <sup>0</sup>) en la forma

$$\vec{\phi}^0 = \sqrt{Z_\phi} \vec{\phi}, \quad \sigma^0 = \sqrt{Z_\sigma} \sigma, \quad g_1^0 = Z_{g_1} \mu^{\frac{6-d}{2}} g_1, \quad g_2^0 = Z_{g_2} \mu^{\frac{6-d}{2}} g_2 \quad (1.220)$$

donde la escala  $\mu$  se introduce para hacer  $g_1$  y  $g_2$  adimensionales y la normalización se realiza sobre  $\vec{\phi}$  y no sobre sus componentes para respetar la simetría interna de la teoría. Además, introducimos también la notación

$$Z_1 = Z_{g_1} Z_\phi \sqrt{Z_\Sigma}, \quad Z_2 = Z_{g_2} Z_\Sigma \sqrt{Z_\Sigma} \quad (1.221)$$

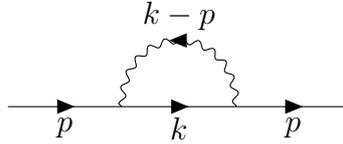
de forma que a primer orden se tienen las relaciones

$$\delta_{g_1} = \delta_1 - \delta_\phi - \frac{\delta_\sigma}{2}, \quad \delta_{g_2} = \delta_2 - \frac{3\delta_\sigma}{2} \quad (1.222)$$

Las reglas de Feynman son:

- Propagador  $\phi^I \phi^J$ :  $\frac{\delta_{IJ}}{p^2}$
- Propagador  $\sigma\sigma$ :  $\frac{1}{p^2}$
- Vértice  $\phi^I \phi^J \sigma$ :  $-\delta_{IJ} \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} g_1$
- Vértice  $\sigma\sigma\sigma$ :  $-\mu^{\frac{\varepsilon}{2}} g_2$
- Contratérmino  $\phi^I \phi^J$ :  $-\delta_{IJ} p^2 \delta_\phi$
- Contratérmino  $\sigma\sigma$ :  $-p^2 \delta_\sigma$
- Contratérmino  $\phi^I \phi^J \sigma$ :  $-\delta_{IJ} \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} g_1 \delta_1$
- Contratérmino  $\sigma\sigma\sigma$ :  $-\mu^{\frac{\varepsilon}{2}} g_2 \delta_2$

Vamos a calcular los contratérminos. Para ello, vamos a calcular en primer lugar la corrección al propagador de un  $\phi$  de cuadrimento  $p$  a través de la interacción con un  $\sigma$  virtual. El diagrama es (las líneas rectas representan  $\phi$  y las curvas  $\sigma$ )



y su elemento de matriz se obtiene usando los parámetros de Feynman y la formula de integración

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + \Delta]^\nu} = \frac{\Delta^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left( \frac{\Delta}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right) \quad (1.223)$$

de forma que es

$$\begin{aligned} \delta_{IJ} \mu^\varepsilon g_1^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k-p)^2} \frac{1}{k^2} &= \\ &= \delta_{IJ} g_1^2 \mu^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + x(1-x)p^2]^2} = \\ &= \frac{\delta_{IJ} g_1^2 p^2}{64\pi^3} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) + o(1) = \\ &= -\frac{\delta_{IJ} g_1^2 p^2}{192\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} + o(1) \end{aligned} \quad (1.224)$$

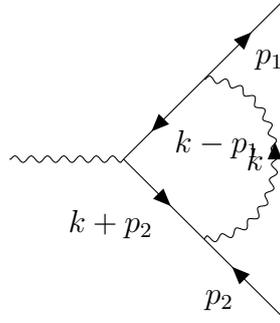
Usando la corrección al propagador del contratérmino para anular la divergencia se obtiene

$$\delta_\phi = -\frac{g_1^2}{192\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.225)$$

El cálculo de la corrección al propagador del  $\sigma$  es idéntico, salvo por que el loop puede estar formado por  $\phi$ , lo que contribuye con  $(\delta_{IJ}g_1)^2 = Ng_1^2$ , o por  $\sigma$ , lo que contribuye  $g_2^2$ . Además, ambos diagramas tienen un factor de simetría 2, de forma que el contratérmino es

$$\delta_\sigma = \frac{Ng_1^2 + g_2^2}{2} \frac{\delta_\phi}{g_1^2} = -\frac{Ng_1^2 + g_2^2}{384\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.226)$$

Vamos ahora a calcular las correcciones de los vértices a 1-loop. Uno de los diagramas para  $\phi^I\phi^J\sigma$  es



y el elemento de matriz se obtiene usando dobles parámetros de Feynman

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{[A + (B-A)x + (C-A)y]^3} \quad (1.227)$$

y la fórmula (1.223), de forma que es

$$\begin{aligned} & -\delta_{IJ}\mu^{\frac{3\varepsilon}{2}} g_1^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k-p_1)^2} \frac{1}{(k+p_2)^2} \frac{1}{k^2} = \\ & = -\delta_{IJ}\mu^{\frac{3\varepsilon}{2}} g_1^3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - (p_1^2 x^2 + p_2^2 y^2)]^3} = \\ & = -\frac{\delta_{IJ}g_1^3}{128\pi^3} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\delta_{IJ}g_1^3}{64\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} + o(1) \end{aligned} \quad (1.228)$$

Hay otro diagrama en el que el loop pasa a tener dos  $\sigma$  a la izquierda y un  $\phi$  a la derecha, de forma que el resultado es el mismo multiplicado por  $g_2/g_1$ . Así, anulando la divergencia con el contratérmino se obtiene

$$\delta_1 = -\frac{g_1^2 + g_1g_2}{64\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.229)$$

El vértice formado solo por  $\sigma$  tiene la misma estructura a 1-loop, con dicho loop formado completamente por  $\sigma$  (contribuyendo  $g_2^3$ ) o por  $\phi$  (contribuyendo  $Ng_1^3$ ), de forma que el contratérmino es

$$\delta_2 = \frac{Ng_1^3 + g_2^3}{g_2} \frac{\delta_1}{g_1^2 + g_1g_2} = -\frac{Ng_1^3g_2^{-1} + g_2^2}{64\pi^3} \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.230)$$

Recuperando a partir de los contratérminos calculados la expresión de las desviaciones asociadas a las constantes de acoplo según (1.222) tenemos

$$\delta_{g_1} = \frac{1}{\varepsilon g_1} \frac{g_1^3(N-8) + g_1g_2^2 - 12g_1^2g_2}{768\pi^3}, \quad \delta_{g_2} = \frac{1}{\varepsilon g_2} \frac{g_1^2g_2N - 4g_1^3N - 3g_2^3}{256\pi^3} \quad (1.231)$$

Las funciones  $\beta$  de las constantes de acoplo se obtienen a partir de la invarianza de escala de las constantes de la acción

$$0 = \mu \frac{dg_i^0}{d\mu} = Z_i \mu^{\frac{\varepsilon}{2}} g_i \left( \frac{\mu}{Z_i} \frac{d\delta_i}{d\mu} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{g_i} \frac{dg_i}{d\mu} \right) \quad (1.232)$$

de donde a primer orden en  $\varepsilon$

$$\beta_{g_i} = \mu \frac{dg_i}{d\mu} = -g_i \frac{\varepsilon}{2} - g_i \mu \frac{d\delta_i}{d\mu} = -g_i \frac{\varepsilon}{2} - g_i \beta_{g_1} \frac{\partial \delta_i}{\partial g_1} - g_i \beta_{g_2} \frac{\partial \delta_i}{\partial g_2} \quad (1.233)$$

con lo que finalmente

$$\begin{aligned} \beta_{g_1} &= -\frac{\varepsilon}{2} g_1 + \frac{g_1^3(N-8) + g_1g_2^2 - 12g_1^2g_2}{768\pi^3} \\ \beta_{g_2} &= -\frac{\varepsilon}{2} g_2 + \frac{g_1^2g_2N - 4g_1^3N - 3g_2^3}{256\pi^3} \end{aligned} \quad (1.234)$$

El flujo del grupo de renormalización tiene dos comportamientos diferentes, dependiendo del valor de  $N$ . El primero de ellos ocurre para  $N < 1039$ , situación en la que hay dos puntos fijos, el trivial atractor en  $(0, 0)$  y un punto de silla. Se puede observar este flujo en la Figura 1.3.

El otro régimen ocurre para  $N \geq 1039$ , situación en la que además de los puntos fijos del anterior, aparecen cuatro nuevos, dos puntos de silla y dos repulsores. Se presenta el flujo en la Figura 1.3.

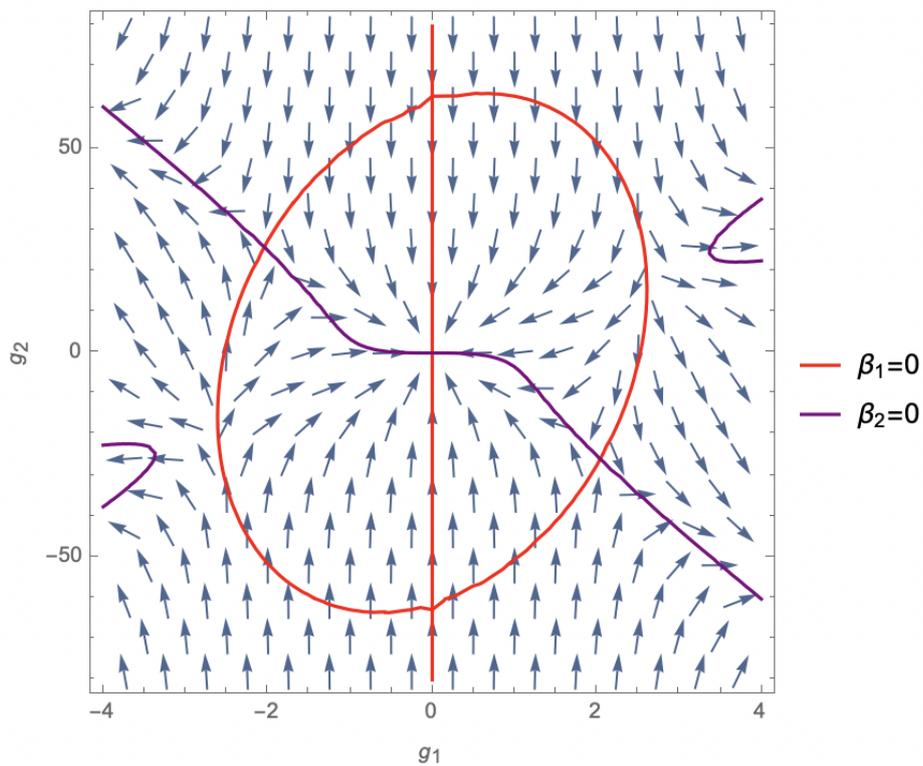


Figura 1.2: Flujo del grupo de renormalización en la teoría con  $N = 800$ ,  $\varepsilon = 1$  ( $d = 5$ ).

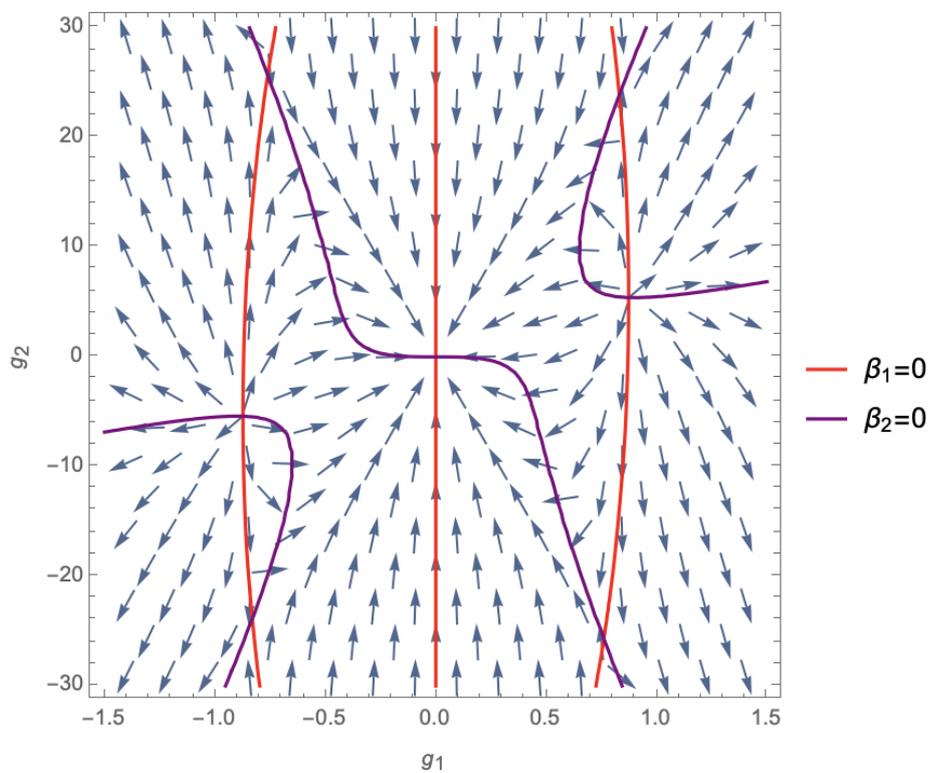


Figura 1.3: Flujo del grupo de renormalización en la teoría con  $N = 5000$ ,  $\varepsilon = 1$  ( $d = 5$ ).

# Teorías Conformes

Pasamos ahora a trabajar en una cierta clase de QFTs de interés. Estas son las teorías conformes, en las que el grupo de simetría se ve mejorado, pasando del grupo de Poincaré al grupo conforme.

La renormalización hace evidente su importancia, pues hemos visto como los infinitos esconden una dependencia con respecto a una escala de energía, y que las funciones  $\beta$  controlan esta dependencia, dando lugar a teorías que no depende de escalas en los puntos fijos del flujo asociado a estas funciones. El punto de vista wilsoniano considera una descripción efectiva a energía  $\mu$  de una teoría que tiene modos de momento mayor que  $\mu$  cuya descripción microscópica se desconoce. Desde esta perspectiva, la renormalización consiste en estudiar el flujo desde una teoría conforme en el ultravioleta (altas energías, teoría microscópica) a otra en el infrarrojo (bajas energías, descripción efectiva).

## 2.1. Transformaciones conformes

El primer paso es describir el grupo conforme, e igual que se hizo con Poincaré, sus representaciones irreducibles. Decimos que una transformación de las coordenadas es conforme si el tensor métrico cambia como

$$\eta^{\mu\nu} \rightarrow \eta'^{\mu\nu} = \Omega^2 \eta^{\mu\nu} \tag{2.1}$$

donde  $\Omega$  es una función que reescala la métrica de Minkowski localmente.

Podemos deducir la forma explícita de las transformaciones conformes infinitesi-

males en  $d$  dimensiones tomando el ansatz

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \quad (2.2)$$

y exigiendo que se cumpla  $\eta'^{\mu\nu} = \Omega^2 \eta^{\mu\nu}$  a primer orden en  $\varepsilon^{\mu}$ .

Damos primero la conclusión, y la justificamos en lo que sigue. En dimensión  $d > 2$  existen 4 tipos de transformaciones conformes infinitesimales:

- Traslaciones:  $\varepsilon_{\mu}(x) = a_{\mu}$
- Transformaciones de Lorentz:  $\varepsilon_{\mu}(x) = \omega_{\mu\nu} x^{\nu}$ ,  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$
- Dilataciones:  $\varepsilon_{\mu}(x) = \alpha x_{\mu}$
- Transformaciones conformes especiales:  $\varepsilon_{\mu}(x) = 2(b \cdot x)x_{\mu} - b_{\mu} x^2$

Las traslaciones y las transformaciones de Lorentz tienen  $\Omega^2 = 1$ : son transformaciones de Poincaré. Las dilataciones tienen  $\Omega^2 = 1 + 2\alpha$  y las transformaciones conformes especiales tienen  $\Omega(x)^2 = 1 + 4b_{\mu} x^{\mu}$ , restringiendo los posibles valores de  $\alpha$  y  $b_{\mu}$  para que  $\Omega^2$  sea positivo definido.

Vamos a ver la veracidad de estas afirmaciones. El tensor métrico se transforma como (considerando que  $\varepsilon^{\mu}$  es infinitesimal y omitiendo la dependencia de las coordenadas para mayor claridad)

$$\eta'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \eta^{\rho\sigma} = (\delta_{\rho}^{\mu} + \partial_{\rho} \varepsilon^{\mu}) (\delta_{\sigma}^{\nu} + \partial_{\sigma} \varepsilon^{\nu}) \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu} + \partial^{\nu} \varepsilon^{\mu} + \partial^{\mu} \varepsilon^{\nu}, \quad (2.3)$$

e imponiendo  $\eta'^{\mu\nu} = \Omega^2 \eta^{\mu\nu}$  llegamos a

$$\partial_{\nu} \varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} = (\Omega^2 - 1) \eta_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Tomando la traza de la última ecuación, es decir, multiplicando ambos lados por  $\eta^{\mu\nu}$ , obtenemos  $2\partial_{\mu} \varepsilon^{\mu} = d(\Omega^2 - 1)$ , lo que implica

$$\Omega^2(x) = 1 + \frac{2}{d} \partial_{\mu} \varepsilon^{\mu}(x), \quad (2.5)$$

$$\partial_{\nu} \varepsilon_{\mu} + \partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} = \frac{2}{d} \partial_{\sigma} \varepsilon^{\sigma} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Derivando (2.6) respecto a  $x^p$  y permutando índices, obtenemos las siguientes tres expresiones

$$\begin{aligned} \partial_\rho \partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon_\nu &= \frac{2}{d} \partial_\rho \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\mu\nu} \\ \partial_\nu \partial_\mu \varepsilon_\rho + \partial_\nu \partial_\rho \varepsilon_\mu &= \frac{2}{d} \partial_\nu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\rho\mu} \\ \partial_\mu \partial_\rho \varepsilon_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_\rho &= \frac{2}{d} \partial_\mu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (2.7)$$

y sumando las dos primeras y restando la tercera

$$2\partial_\rho \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial_\rho \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\rho\mu} - \partial_\mu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\nu\rho}) , \quad (2.8)$$

donde, multiplicando por  $\eta^{\rho\nu}$ , obtenemos

$$d\partial^2 \varepsilon_\mu = (2 - d) \partial_\mu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \quad (2.9)$$

Derivando ahora respecto a  $x^\nu$

$$d\partial_\nu \partial^2 \varepsilon_\mu = (2 - d) \partial_\nu \partial_\mu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma , \quad (2.10)$$

y tomando la traza multiplicando  $\eta^{\mu\nu}$

$$2(d - 1) \partial^2 \partial_\mu \varepsilon^\mu = 0 \quad (2.11)$$

Si  $d \neq 1$  llegamos a  $\partial^2 \partial_\mu \varepsilon^\mu = 0$ . Usando esto en (2.6) tras aplicar  $\partial^2$  a ambos lados

$$d\partial^2 (\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu) = 2\partial^2 \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.12)$$

y sustituyendo (2.10) en el lado izquierdo obtenemos

$$2(2 - d) \partial_\nu \partial_\mu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma = 0 \quad (2.13)$$

y usando  $d > 2$ ,  $\partial_\nu \partial_\mu \partial_\sigma \varepsilon^\sigma = 0$ . Esto implica que  $\partial_\sigma \varepsilon^\sigma$  está restringido a ser de la forma  $A + B_\mu x^\mu$ , con constantes  $A$  y  $B_\mu$ .

Recuperando (2.8) y usando esta nueva información

$$\partial_\rho \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{1}{d} (B_\rho \eta_{\mu\nu} + B_\nu \eta_{\rho\mu} - B_\mu \eta_{\nu\rho}) \implies \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\nu \varepsilon_\mu = 0 , \quad (2.14)$$

lo que significa que las transformaciones infinitesimales son de la forma  $\varepsilon_\mu = a_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + b_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho$ , donde las constantes  $a_\mu$ ,  $c_{\mu\nu}$  y  $b_{\mu\nu\rho}$  pueden tener que satisfacer restricciones adicionales. A simple vista, podemos forzar que  $b_{\mu\nu\rho}$  sea simétrico respecto a  $\nu$  y  $\rho$ , porque el producto de su parte antisimétrica y el tensor simétrico  $x^\nu x^\rho$  es 0.

Antes de verificar las restricciones, podemos usar (2.5) para calcular  $\Omega^2$  a partir de la forma general de  $\varepsilon_\mu$ . Primero,  $\partial_\mu \varepsilon^\mu = c^\mu{}_\mu + b^\mu{}_{\mu\rho}x^\rho + b^\mu{}_{\nu\mu}x^\nu$ , y usando simetría y definiendo  $d\alpha = c^\mu{}_\mu$  y  $db_\mu = b^\nu{}_{\nu\mu}$ ,  $\partial_\mu \varepsilon^\mu = d\alpha + 2db_\mu x^\mu$ , que finalmente se convierte en:

$$\Omega^2(x) = 1 + 2\alpha + 4b_\mu x^\mu \quad (2.15)$$

Ahora, volviendo a las restricciones, podemos observar  $a_\mu$ ,  $c_{\mu\nu}$  y  $b_{\mu\nu\rho}$  independientemente:

- $\varepsilon_\mu = a_\mu$ : Hasta ahora, cada ecuación involucra derivadas de la forma  $\partial_\mu \varepsilon_\nu$ , lo que significa automáticamente que esta transformación es válida, con  $\Omega^2(x) = 1$ .
- $\varepsilon_\mu = c_{\mu\nu}x^\nu$ : Usando la ecuación de primer orden (2.6) y la definición anterior de  $\alpha$ , podemos ver que este factor está restringido como  $c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu} = 2\alpha\eta_{\mu\nu}$ , lo que significa que la parte simétrica de  $c_{\mu\nu}$  es una traza y su parte antisimétrica no está restringida. Esto lleva a la descomposición  $c_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$  ( $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ), de modo que tenemos dos tipos de transformaciones:

$$\varepsilon_\mu = \alpha x_\mu, \quad \text{con } \Omega^2(x) = 1 + 2\alpha, \quad \text{y} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_\mu = \omega_{\mu\nu}x^\nu \quad (\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}), \quad \text{con } \Omega^2(x) = 1 \quad (2.17)$$

- $\varepsilon_\mu = b_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho$ : Usando la ecuación de segundo orden (2.8) y la definición anterior de  $b_\mu$ , podemos ver que este factor está restringido como (teniendo en cuenta la simetría de  $b_{\mu\nu\rho}$  respecto a  $\nu$  y  $\rho$ ):

$$4\partial_\rho c_{\mu\nu\sigma}x^\sigma = 4(\partial_\rho b_\sigma x^\sigma \eta_{\mu\nu} + \partial_\nu b_\sigma x^\sigma \eta_{\rho\mu} - \partial_\mu b_\sigma x^\sigma \eta_{\nu\rho}) \implies c_{\mu\nu\rho} = b_\rho \eta_{\mu\nu} + b_\nu \eta_{\rho\mu} - b_\mu \eta_{\nu\rho},$$

y sustituyendo de vuelta en  $\varepsilon_\mu$ :

$$\varepsilon_\mu = b_\rho \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\rho + b_\nu \eta_{\rho\mu} x^\nu x^\rho - b_\mu \eta_{\nu\rho} x^\nu x^\rho = 2(b \cdot x)x_\mu - b_\mu x^2,$$

finalmente obteniendo  $\Omega^2(x) = 1 + 4b_\mu x^\mu$ .

Para el caso de 2 dimensiones, tenemos un resultado fundamentalmente diferente debido a que (2.6) se reduce a:

$$\partial_\nu \varepsilon_\mu + \partial_\mu \varepsilon_\nu = \partial_\sigma \varepsilon^\sigma \eta_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Existe una biyección entre el conjunto de transformaciones conformes infinitesimales en dimensión  $d = 2$  y el conjunto de funciones holomorfas del plano complejo.

Podemos reescribir (2.18) como  $\partial_\nu \varepsilon^\rho \eta_{\mu\rho} + \partial_\mu \varepsilon^\rho \eta_{\nu\rho} = \partial_\rho \varepsilon^\rho \eta_{\mu\nu}$  para ver explícitamente el significado de las tres ecuaciones (una componente no es independiente debido a la simetría):

- $\mu = \nu = 0$ :  $\partial_0 \varepsilon^0 \eta_{00} + \partial_0 \varepsilon^0 \eta_{00} = (\partial_0 \varepsilon^0 + \partial_1 \varepsilon^1) \eta_{00} \implies \partial_0 \varepsilon^0 = \partial_1 \varepsilon^1$
- $\mu = 0, \nu = 1$ :  $\partial_1 \varepsilon^0 \eta_{00} + \partial_0 \varepsilon^1 \eta_{11} = 0 \implies \partial_1 \varepsilon^0 = -\frac{\eta_{11}}{\eta_{00}} \partial_0 \varepsilon^1$
- $\mu = \nu = 1$ :  $\partial_1 \varepsilon^1 \eta_{11} + \partial_1 \varepsilon^1 \eta_{11} = (\partial_0 \varepsilon^0 + \partial_1 \varepsilon^1) \eta_{11} \implies \partial_0 \varepsilon^0 = \partial_1 \varepsilon^1$

Para ver la correspondencia nos interesa considerar una métrica euclídea, de manera que haciendo la rotación de Wick obtenemos

$$\partial_0 \varepsilon^0 = \partial_1 \varepsilon^1, \quad (2.19)$$

$$\partial_1 \varepsilon^0 = -\partial_0 \varepsilon^1, \quad (2.20)$$

que son exactamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo que significa que, dada una transformación conforme en  $d = 2$  ( $\varepsilon^0(t, x), \varepsilon^1(t, x)$ ) podemos construir una función holomorfa compleja como  $f(z = it + x) = i\varepsilon^0(t, x) + \varepsilon^1(t, x)$ .

## 2.2. Generadores infinitesimales

Teniendo la forma explícita de las transformaciones infinitesimales, ahora podemos buscar los generadores de dichas transformaciones. En particular, estamos tratando de encontrar algún tensor  $G$ , que pueda ser contraído con los factores que aparecen en  $\varepsilon_\mu$  (nos referiremos a esta contracción como  $\bar{\varepsilon} \cdot G$ ) y que satisfaga

$$e^{i\bar{\varepsilon} \cdot G} x^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu + O(\varepsilon^2) \implies i\bar{\varepsilon} \cdot G x^\mu = \varepsilon^\mu \quad (2.21)$$

Vamos a empezar suponiendo que  $d > 2$ . En este caso los generadores de las transformaciones conformes infinitesimales pueden ser construidos explícitamente como operadores diferenciales en la forma:

- Traslaciones:  $P_\mu = -i\partial_\mu$ .
- Lorentz:  $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ .
- Dilatación:  $D = -ix^\mu\partial_\mu$ .
- Conformes especiales:  $K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)$

Vamos a usar (2.21) para comprobarlo:

- Traslaciones:  $ia^\mu P_\mu x^\nu = a^\nu$ , lo que automáticamente implica  $iP_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu$ , lo cual se logra si  $P_\mu = -i\partial_\mu$ .
- Lorentz:  $i\omega^\mu{}_\nu M_\mu{}^\nu x^\rho = \omega^\rho{}_\nu x^\nu$ , lo que significa que  $iM_\mu{}^\nu x^\rho = \delta_\mu^\rho x^\nu$ , lo cual se puede lograr si  $M_\mu{}^\nu = -ix^\nu\partial_\mu$ . También es importante tener en cuenta que, siendo  $\omega_{\mu\nu}$  antisimétrica, la parte simétrica de  $M_{\mu\nu}$  no contribuye a la contracción. Como consecuencia, es preferible definir  $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ , como un tensor antisimétrico.
- Dilatación:  $i\alpha Dx^\mu = \alpha x^\mu$ , donde la elección más sencilla sería  $D = -i$ . Sin embargo, queremos hacer explícita su naturaleza diferencial y su invariancia de Lorentz como un escalar. Hacemos  $D = -ix^\mu\partial_\mu$ , logrando el mismo resultado.
- Conformaciones especiales:  $ib^\mu K_\mu x^\nu = 2b^\mu x_\mu x^\nu - x^2 b^\nu$ , lo que implica  $iK_\mu x^\nu = 2x_\mu x^\nu - \delta_\mu^\nu x^2$ , lo cual se logra si  $K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)$ .

Teniendo una realización explícita de los generadores de las transformaciones conformes infinitesimales, ahora podemos calcular las relaciones de conmutación entre ellos para obtener la estructura del álgebra de Lie de la simetría conforme, abstrayéndonos de la situación física de las transformaciones del espacio-tiempo.

Esto es una simple cuestión de cálculo (teniendo en cuenta que  $[x_\mu, x_\nu] = [P_\mu, P_\nu] = 0$  y  $[x_\mu, P_\nu] = i\eta_{\mu\nu}$ ), por lo que recogemos aquí el resultado. El álgebra de Lie de las

transformaciones conformes infinitesimales en dimensiones  $d > 2$  tiene  $(d+2)(d+1)/2$  generadores con las siguientes relaciones de conmutación no nulas:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu \quad (2.22)$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu \quad (2.23)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \quad (2.24)$$

$$[P_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \quad (2.25)$$

$$[K_\rho, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \quad (2.26)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \quad (2.27)$$

El grupo conforme generado por este álgebra de Lie es isomorfo a  $SO(p+1, q+1)$ , donde  $p$  y  $q$  son, respectivamente, el número de coordenadas de tipo tiempo y de tipo espacio. Para verificar el isomorfismo se puede obtener una representación matricial de cada generador  $G$  y comprobar que  $e^{i\bar{\varepsilon}G}$  está efectivamente contenido en  $SO(p+1, q+1)$ .

Volvemos ahora al caso  $d = 2$  en el que habíamos visto que las transformaciones infinitesimales podían ser vistas como funciones holomorfas del plano complejo. Así, nos olvidamos de la notación anterior y empezar a trabajar con transformaciones del plano complejo del tipo

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \quad (2.28)$$

donde  $z$  es una variable compleja y  $f$  es una función holomorfa. Escribimos explícitamente la segunda ecuación porque es interesante ver el sistema como dos copias del plano complejo, de modo que tenemos coordenadas  $z$  que se transforman bajo funciones holomorfas  $f$  y coordenadas independientes  $\bar{z}$  que se transforman bajo funciones anti-holomorfas  $\bar{f}$ . Con esta configuración, podemos forzar en cualquier momento que  $\bar{z}$  sea el conjugado complejo de  $z$ , recuperando la estructura isomorfa de las transformaciones conformes.

Vamos a generalizar aún más nuestra construcción permitiendo que las funciones sean meromorfas en lugar de holomorfas. De esta manera, podemos usar la forma general de la expansión en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \quad \bar{f}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{a}_n \bar{z}^n \quad (2.29)$$

lo que nos permite estudiar transformaciones infinitesimales en la forma

$$z \rightarrow z + \varepsilon_n(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\varepsilon}_n(\bar{z}) \quad (2.30)$$

con  $\varepsilon_n(z) = -a_{n+1}z^{n+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_n(\bar{z}) = -\bar{a}_{n+1}\bar{z}^{n+1}$  y coeficientes infinitesimales  $a_{n+1}$  y  $\bar{a}_{n+1}$ .

Podemos encontrar generadores usando la ecuación (2.21). En particular, estamos tratando de encontrar  $l_n$  tal que  $l_n z = -z^{n+1}$ , donde hemos omitido los coeficientes numéricos por conveniencia. Claramente, los generadores son

$$L_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad \bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \quad (2.31)$$

Vamos a calcular los conmutadores de los generadores del lado holomorfo:

$$\begin{aligned} L_m L_n &= z^{m+1}\partial_z(z^{n+1}\partial_z) = (n+1)z^{m+n+1}\partial_z + z^{m+n+2}\partial_z^2 \implies \\ &\implies [L_m, L_n] = (n-m)z^{m+n+1}\partial_z = (m-n)L_{m+n} \end{aligned} \quad (2.32)$$

La parte antiholomorfa es análoga, dando como resultado exactamente el mismo conmutador y es claro que  $[L_m, \bar{L}_n] = 0$ . De esta manera podemos afirmar que el álgebra de Lie de las transformaciones holomorfas y antiholomorfas en  $\mathbb{C} \times \bar{\mathbb{C}}$  es  $\mathcal{A} \oplus \bar{\mathcal{A}}$ , donde tanto  $\mathcal{A}$  como  $\bar{\mathcal{A}}$  son isomorfas al álgebra de Witt y conmutan entre sí. El álgebra de Witt tiene base  $\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  y relaciones de conmutación

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \quad (2.33)$$

A continuación vamos a probar un resultado crucial para la cuantización de las teorías conformes en  $2d$ : la única extensión central del álgebra de Witt (esto es, la adición no trivial de un generador que conmute con el resto) es el álgebra de Virasoro, con base  $\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbf{1}\}$  y relaciones ( $c \in \mathbb{R}$  es la carga central)

$$\begin{aligned} [\mathbf{1}, L_n] &= 0 \\ [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n-1)n(n+1)\delta_{n+m,0}\mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Vamos a denotar el conmutador del álgebra de Witt como  $[\cdot, \cdot]_w$ , y el conmutador del álgebra de Virasoro como  $[\cdot, \cdot]$ . El álgebra de Virasoro  $\mathcal{V}$ , siendo una extensión central

del álgebra de Witt  $\mathcal{A}$ , va a tener la forma  $\mathcal{V} = \mathcal{A} \oplus c \mathbb{1}$ , con carga central  $c$ , y relaciones

$$\begin{aligned} [\mathbb{1}, L_n] &= 0 \\ [L_n, L_m] &= [L_n, L_m]_w + f(L_n, L_m) c \mathbb{1} \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde  $f$  es una función a determinar.

Debido a las propiedades de los conmutadores,  $f$  debe ser bilineal y antisimétrica  $f(L_n, L_m) = -f(L_m, L_n)$ , y satisfacer la siguiente identidad de tipo Jacobi

$$f(L_n, [L_m, L_p]_w) + f(L_p, [L_n, L_m]_w) + f(L_m, [L_p, L_n]_w) = 0. \quad (2.36)$$

Usando estas propiedades llegamos a:

$$\begin{aligned} f(L_0, [L_m, L_n]_w) + f(L_n, [L_0, L_m]_w) + f(L_m, [L_n, L_0]_w) &= \\ = (n - m)f(L_0, L_{m+n}) + (m + n)f(L_m, L_n) &= 0 \implies \\ \implies f(L_m, L_n) = \frac{n - m}{m + n} f(L_0, L_{m+n}), \quad \text{si } m + n \neq 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Empleando esta información podemos construir para cualquier  $k \neq 0$  una nueva función

$$g(L_k) = \frac{f(L_0, L_k)}{k} \quad (2.38)$$

de modo que  $f(L_m, L_n) = -g([L_m, L_n])$  para cualesquiera  $m + n \neq 0$ .

También definimos

$$g(L_0) = -\frac{f(L_1, L_{-1})}{2} \quad (2.39)$$

con lo que podemos definir para cualquier  $n$  y  $m$  la función  $h(L_n, L_m) = f(L_n, L_m) + g([L_n, L_m])$ .

De la definición de  $h$  obtenemos automáticamente que  $h(L_n, L_m) = 0$  siempre que  $m + n \neq 0$ , de modo que

$$h(L_n, L_m) = h(L_n, L_{-n}) \delta_{m+n, 0} \quad (2.40)$$

Además,  $h(L_n, L_{-n})$  puede determinarse por inducción, dando el resultado

$$h(L_n, L_{-n}) = \lambda(n - 1)n(n + 1) \quad (2.41)$$

donde  $\lambda$  es una constante arbitraria.

El último paso (que es puramente algebraico y no probamos aquí) consiste en ver que si en la definición del álgebra (2.35) se reemplaza  $f$  por  $h$ , se obtiene un álgebra isomorfa, de manera que (absorbiendo  $\lambda$  en la definición de  $c$ ) se obtiene el álgebra de Virasoro.

### 2.3. Operadores y campos

Las CFTs se estudian de una manera mucho más abstracta que las QFTs genéricas debido a las restricciones impuestas por la simetrías. Vamos a exponer las principales ideas, sin entrar en excesivo detalle ni en derivaciones, y restringiéndonos al caso  $d > 2$ .

En primer lugar, se definen los operadores primarios como aquellos que transforman de manera sencilla bajo las transformaciones conformes. En concreto, un operador primario  $\mathcal{O}(x)$  de dimensión conforme  $\Delta$  y spin  $s$  está definido por las siguientes relaciones de conmutación

$$[D, \mathcal{O}(x)] = (\Delta + x \cdot \partial)\mathcal{O}(x) \quad (2.42)$$

$$[P_\mu, \mathcal{O}(x)] = \partial_\mu \mathcal{O}(x) \quad (2.43)$$

$$[K_\mu, \mathcal{O}(x)] = (x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x \cdot \partial + 2x_\mu \Delta)\mathcal{O}(x) \quad (2.44)$$

$$[M_{\mu\nu}, \mathcal{O}(x)] = (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + S_{\mu\nu})\mathcal{O}(x) \quad (2.45)$$

donde  $S_{\mu\nu}$  está asociado al spin interno del operador.

Los operadores secundarios se obtienen actuando con los generadores de transformaciones conformes sobre los operadores primarios.

Además, en las CFTs los operadores locales  $\mathcal{O}(x)$  están intrínsecamente relacionados con los estados del espacio de Hilbert de la teoría. A esta relación se le denomina correspondencia operador-estado. Dado un operador  $\mathcal{O}(x)$  podemos asociarle un estado

$$|\mathcal{O}\rangle = \mathcal{O}(0)|0\rangle \quad (2.46)$$

donde  $|0\rangle$  es el vacío de la teoría (el estado que es invariante bajo todo el grupo conforme). Este estado  $|\mathcal{O}\rangle$  se interpreta como el creado por la inserción del operador  $\mathcal{O}$  en el origen.

Dada la invariancia traslacional, podemos generalizar esto para un punto  $x$  arbi-

trario:

$$|\mathcal{O}(x)\rangle = \mathcal{O}(x)|0\rangle \quad (2.47)$$

El proceso puede invertirse. Dado un estado, es posible identificarlo con la inserción de un operador local en algún punto del espacio-tiempo.

Esta idea puede entenderse matizarse mejor mediante la cuantización radial: aprovechando la invariancia conforme puede transformarse el problema en el espacio-tiempo usual a uno en el que la coordenada temporal se identifica con una coordenada radial y las espaciales con sus asociadas coordenadas angulares.

De esta forma el operador de dilatación  $D$ , que se encarga de las transformaciones que escalan las coordenadas, pasa a ser el análogo al generador de las traslaciones temporales en QFT ordinaria, ya que su actuación

$$Dx^\mu = \lambda x^\mu \quad (2.48)$$

se convierte en términos de la coordenada radial  $r$  en

$$Dr = \lambda r \quad (2.49)$$

y decíamos que la coordenada radial se identificaba con el tiempo en el espacio-tiempo de Minkowski. Es por esto que  $D$  cumple el rol del hamiltoniano, y en lugar de etiquetar los estados por su energía, lo hacemos a través de su dimensión conforme  $\Delta$ , esto es, el autovalor con respecto al que escalan bajo la actuación de  $D$ , específicamente

$$D|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle \quad (2.50)$$

Desde este punto de vista, dado un estado  $|\mathcal{O}\rangle$  preparado sobre la esfera  $S^{d-1}$ , puede evolucionarse con  $D$  hasta que el radio tienda a 0, y de esa forma identificarse con la inserción de un operador local en el origen, definiendo así el operador  $\mathcal{O}(0)$ .

## 2.4. Correladores, OPE y simetría de cruce

Los correladores de las CFTs están muy restringidos por la simetría. De hecho, si hablamos de operadores escalares (sin spin), las funciones a 2- y 3-puntos están completamente determinadas por la dimensión conforme de los operadores (a falta de

constantes de normalización y estructura).

La función a 2-puntos para dos operadores escalares primarios  $\mathcal{O}_i$  de dimensiones escalares  $\Delta_i$  está dada por

$$\langle \mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(y) \rangle = \frac{\mathcal{N}_{ij}}{|x-y|^{2\Delta_i}} \delta_{ij} \quad (2.51)$$

donde  $\mathcal{N}_{ij}$  es una constante que depende de la normalización de los operadores.

Que la dependencia en posiciones se reduzca a  $|x-y|$  es sencillamente consecuencia de la simetría Poincaré, pero la proporcionalidad específica viene determinada por la simetría conforme. Esto se debe a que si realizamos una transformación de escala  $x \rightarrow \lambda x$ , la distancia  $|x-y|$  escala como  $\lambda|x-y|$ , y la función de correlación se transforma como

$$\langle \mathcal{O}_i(\lambda x) \mathcal{O}_j(\lambda y) \rangle = \lambda^{-2\Delta_i} \langle \mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(y) \rangle \quad (2.52)$$

lo cual es consistente con las dimensiones conformes de los operadores y la actuación del generador de las dilataciones  $D$ .

Si consideramos operadores con spin, el correlador incluye estructuras tensoriales adicionales. Explícitamente, para un operador con spin  $s$  tenemos

$$\langle \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_s}(x) \mathcal{O}_{\nu_1 \dots \nu_s}(y) \rangle = \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{O}} I_{\mu_1 \dots \mu_s, \nu_1 \dots \nu_s}(x-y)}{|x-y|^{2\Delta+s}} \quad (2.53)$$

donde  $I_{\mu_1 \dots \mu_s, \nu_1 \dots \nu_s}(x-y)$  es una estructura tensorial que depende de la separación  $(x-y)$  y respeta las simetrías del espín del operador.

De la misma forma, dados tres operadores primarios  $\mathcal{O}_i$  con dimensiones  $\Delta_i$ , la función a 3-puntos toma la forma

$$\langle \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(y) \mathcal{O}_3(z) \rangle = \frac{C_{123}}{|x-y|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} |y-z|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} |z-x|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} \quad (2.54)$$

donde  $C_{ijk}$  son los coeficientes de estructura de la teoría. Son constantes fundamentales que caracterizan la teoría y determinan la amplitud de las interacciones.

Estos coeficientes están muy relacionados con la expansión del producto de operadores (operator product expansion, OPE), que es una herramienta fundamental en el estudio de las CFTs, pues permite expresar el producto de dos operadores locales como

una suma de operadores locales, dotando al álgebra de operadores de estructura<sup>1</sup>.

Formalmente escribimos la OPE entre dos operadores locales  $\mathcal{O}_i(x)$  y  $\mathcal{O}_j(y)$  (cuando la separación entre  $x$  e  $y$  tiende a 0) como

$$\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(y) \sim \sum_k C_{ij}^k(x-y)\mathcal{O}_k(y) \quad (2.55)$$

donde  $C_{ijk}(x-y)$  son los coeficientes de la OPE, que dependen de la separación  $x-y$  y  $\mathcal{O}_k(y)$  son otros operadores locales de la teoría.

Los coeficientes de la OPE  $C_{ij}^k(x-y)$  contienen información sobre las dimensiones escalares de los operadores y la estructura conforme de la teoría. En concreto, para operadores escalares primarios los coeficientes tienen la forma

$$C_{ijk}(x-y) = \frac{C_{ijk}}{|x-y|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}} \quad (2.56)$$

donde  $C_{ijk}$  son los coeficientes de estructura.

La OPE es útil para estudiar correladores, simplificándolos en términos de funciones a menos puntos. El ejemplo más sencillo consiste en considerar una función a 3-puntos  $\langle \mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(y)\mathcal{O}_k(z) \rangle$  y Usando la OPE, podemos expandir el producto de  $\mathcal{O}_i(x)$  y  $\mathcal{O}_j(y)$  alrededor del punto  $y$ . El correlador se convierte así en una suma de funciones a 2-puntos

$$\langle \mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(y)\mathcal{O}_k(z) \rangle \sim \sum_l C_{ijl}(x-y)\langle \mathcal{O}_l(y)\mathcal{O}_k(z) \rangle \quad (2.57)$$

La funciones a cuatro puntos adquieren cierta libertad, pero se puede expresar de forma compacta en términos de los ratios  $u$  y  $v$

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \quad (2.58)$$

donde  $x_{ij} = x_i - x_j$ . Estos ratios son invariantes bajo transformaciones conformes y capturan toda la información sobre las 4 posiciones que no es borrada bajo transformaciones.

Dados cuatro operadores primarios escalares  $\mathcal{O}_i$  con dimensiones  $\Delta_i$ , la función

---

<sup>1</sup>También se utiliza en QFT. Las teorías cuánticas de campos (o parte de ellas) pueden entenderse desde un punto de vista abstracto, como una teoría algebraica de operadores. Los campos y sus derivadas serían elementos de un álgebra y la OPE sería la regla de multiplicación de la misma. En CFT la simetría conforme establece restricciones sobre la forma que puede tener este producto, y por tanto simplifica la OPE.

a 4-puntos toma la forma

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4) \rangle = \frac{G(u, v)}{(x_{12}^2)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}(x_{34}^2)^{\frac{\Delta_3+\Delta_4}{2}}} \quad (2.59)$$

donde  $G(u, v)$  es una función que solo depende de los ratios  $u$  y  $v$ .

La simetría adicional de las CFTs se manifiesta también a través de la simetría de cruce (crossing symmetry), que es el hecho de las funciones a 4-puntos deben ser invariantes bajo las permutaciones de los puntos de inserción. Esto da lugar a las siguientes ecuaciones de simetría

$$G(u, v) = G\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) = v^{\Delta_i+\Delta_j} G(v, u) \quad (2.60)$$

que restringen severamente la forma de  $G(u, v)$ .

# Sector de gran carga en el punto fijo de Wilson Fisher de $O(2)$

Consideramos la teoría de  $N$  campos escalares con simetría global  $O(N)$  en  $d = 4 - \epsilon$  con acción

$$S = \int d^{4-\epsilon}x \left( \frac{1}{2} |\partial\phi|^2 - \frac{m^2}{2} |\phi|^2 - \frac{g}{16} |\phi|^4 \right) \quad (3.1)$$

Calculamos en (1.210) que esta teoría en el caso  $N = 1$  tiene un punto fijo de Wilson-Fisher en  $m = 0$  y

$$g_{\text{WF}} = \frac{16}{4!} \frac{16\pi^2}{3} \epsilon = \frac{32\pi^2}{9} \epsilon = \frac{32\pi^2}{N+8} \epsilon \quad (3.2)$$

Realizando el cálculo análogo en  $N$  arbitrario es sencillo comprobar que la fórmula anterior se cumple para cualquier  $N$ , no solo para  $N = 1$ .

Además, de nuevo en  $O(1)$  habíamos comprobado en (1.216) que la dimensión anómala de  $\phi^n$  iba como  $\gamma_{\phi^n} \sim gn^2$ . Esto sigue cumpliéndose en  $O(N)$  arbitrario, y esto sugiere la existencia de un límite doble al estilo 't Hooft

$$g \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \lambda = gn = \text{cte} \quad (3.3)$$

Vamos a trabajar en la teoría  $O(2)$  en el límite sin masa, explícitamente en

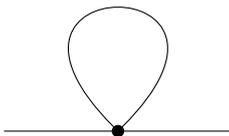
$$S = \int d^{4-\epsilon}x \left( \partial\phi\partial\bar{\phi} - \frac{g}{4} (\phi\bar{\phi})^2 \right) \quad (3.4)$$

Nos interesa calcular correladores a dos puntos de la forma  $\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^m(0) \rangle$ . Estos operadores tienen simetría  $U(1)$ , y llevan asociada una carga  $n$  y  $m$ , por lo que son automáticamente ortogonales para  $n \neq m$ .

### 3.1. Función a dos puntos $\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle$

El primer método es diagramático, pues gracias al límite es posible determinar los diagramas dominantes y resumarlos.

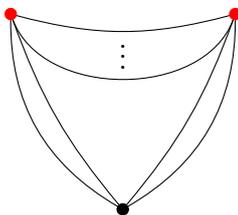
En primer lugar, notamos que el diagrama de burbuja



se anula, puesto que tiene dimensión 2 y ninguna dependencia de momentos exteriores, de manera que debería ser proporcional a  $m^2$ , que en la teoría crítica es 0. Esto implica que podemos ignorar cualquier diagrama en el que aparezca una burbuja.

Como  $g \rightarrow 0$ , vamos a estudiar los diagramas orden a orden empezando por  $o(g)$ , puesto que a orden  $o(1)$  simplemente tenemos los dos puntos de inserción conectados por  $n$  propagadores  $\phi \bar{\phi}$ .

A orden  $g$ , el diagrama a considerar es el siguiente:



Observamos que simplemente se ha insertado una interacción  $\phi^2 \bar{\phi}^2$  tomando dos propagadores desde la inserción izquierda y dos desde la derecha. A este orden no hay más posibilidades. Notar que el factor de simetría del diagrama es  $n! \frac{n!}{k!}$ , donde  $k$  es el número de propagadores sin interacción, en este caso  $k = n - 2$ , de manera que el factor es  $n! n(n - 1)$ .

Pensemos ahora en  $o(g^2)$ . Existen cuatro diagramas, dependiendo de la forma en la que se conecten los propagadores con las dos interacciones. Sin embargo, basta razonar que en el límite  $n \rightarrow \infty$  dominará el diagrama que tenga un menor  $k$ , es decir, el que más propagadores vea involucrados en las interacciones. Es sencillo argumentar que este valor de  $k$  es  $n - 4$ , y que hay un único diagrama que lo satisface, siendo este el que ya vimos para orden  $o(g)$ , con la estructura del vértice inferior apareciendo dos veces en lugar de una.

Este argumento generaliza a  $o(g^m)$ , siendo el único diagrama dominante el que reproduce la estructura inferior  $m$  veces, con un valor  $k = n - 2m$ .

Vamos a denotar por  $K_m$  a la expresión del diagrama dominante de orden  $o(g^m)$  obviando factores de interacción y simetría. Así, en el espacio de configuración podemos escribir

$$K_m = G(0, x)^n \left( \frac{1}{G(0, x)^2} \int d^4 z G(0, z)^2 G(z, x)^2 \right)^m \quad (3.5)$$

de manera que podemos escribir  $K_m = G(0, x)^n \mathcal{K}^m$ , donde denotamos

$$\mathcal{K} = \frac{1}{G(0, x)^2} \int d^4 z G(0, z)^2 G(z, x)^2 \quad (3.6)$$

Con todo, podemos escribir explícitamente el correlador sumando todos los diagramas dominantes

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = n! \sum_{m=0}^{n/2} (-ig)^m \frac{1}{4^m m!} \frac{n!}{(n-2m)!} K_m \quad (3.7)$$

Los factores de simetría son los siguientes:

- $(n!)^2$  por la permutación de los  $n$  correladores a cada lado.
- $1/(n-2m)!$  por la equivalencia al intercambiar los propagadores sin interacción.
- $1/(2^m)^2$  por la equivalencia al intercambiar los pares de propagadores que conectan a un vértice de interacción.
- $1/m!$  por la equivalencia al intercambiar entre sí los vértices de interacción.

Usando la fórmula de Stirling

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1 \quad (3.8)$$

se comprueba que en el límite  $n \rightarrow \infty$  se satisface

$$\frac{n!}{(n-2m)!} \simeq n^{2m} \quad (3.9)$$

de manera que podemos escribir el correlador en la forma

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{-in\lambda\mathcal{K}}{4} \right)^m = \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 e^{-i\frac{n\lambda}{4}\mathcal{K}} \quad (3.10)$$

donde hemos escrito el correlador de la teoría libre que trivialmente es

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 = n! G(0, x)^n \quad (3.11)$$

Ya calculamos en (1.38) que el propagador del campo escalar en la teoría crítica sin masa es

$$G(y, z) = \frac{1}{4\pi^2(y-z)^2} \quad (3.12)$$

de manera que sustituyendo en  $\mathcal{K}$  obtenemos la siguiente expresión integral (tras rotar a signatura euclídea)

$$\mathcal{K} = \frac{-ix^4}{16\pi^4} \int \frac{d^4z}{z^4(x-z)^4} \quad (3.13)$$

Para regularizar la integral y extraer la divergencia logarítmica vamos a integrar por partes tras usar que en  $d = 4$

$$\frac{1}{z^4} = -\frac{1}{4} \partial^2 \left( \frac{\log z^2 \Lambda^2}{z^2} \right) \quad (3.14)$$

Para comprobar esta fórmula basta notar que dada una función  $f$  que solo depende de  $z^2$  se cumple (notar que  $\partial z^2 = 2z$  y que  $\partial \cdot z = 4$  en  $d = 4$ )

$$\partial^2 f = 2\partial \cdot (zf') = 4(2f' + z^2 f'') \quad (3.15)$$

y además, en el caso que nos interesa

$$f = \frac{\log z^2 \Lambda^2}{z^2}, \quad f' = \frac{1 - \log z^2 \Lambda^2}{z^4}, \quad z^2 f'' = -\frac{1}{z^4} - 2f' \quad (3.16)$$

De esta forma podemos expresar

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \frac{d^4z}{z^4(x-z)^4} = -\frac{1}{4} \int d^4z \frac{1}{(x-z)^4} \partial^2 \left( \frac{\log z^2 \Lambda^2}{z^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4z \partial^2 \left( \frac{1}{(x-z)^4} \right) \frac{\log z^2 \Lambda^2}{z^2} = -2 \int d^4z \frac{\log z^2 \Lambda^2}{z^2(x-z)^6} \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde hemos tenido en cuenta que la fórmula (3.15) también aplica a funciones que solo dependen de  $(x-z)^2$ .

La divergencia logarítmica de la última integral es la asociada a  $z = 0$ . El desarrollo análogo puede hacerse también para extraer la divergencia de  $z = x$ , obteniéndose el mismo resultado, de manera que basta con calcular el coeficiente del logaritmo en  $I_0$

y multiplicarlo por dos.

Reescribiendo en polares se obtiene

$$\begin{aligned} I_0 &= -8\pi \int_0^\infty dz z \log z^2 \Lambda^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(z^2 + x^2 - 2xz \cos \theta)^3} = \\ &= -8\pi^2 \int_0^\infty dz \frac{z \log z^2 \Lambda^2}{|x^2 - z^2|^3} \end{aligned} \quad (3.18)$$

de donde podemos extraer la divergencia en  $z = 0$  notando que el límite en  $z \rightarrow 0$  de la primitiva es

$$-8\pi^2 \left( -\lim_{z \rightarrow 0} \int dz \frac{z \log z^2 \Lambda^2}{|x^2 - z^2|^3} \right) = \frac{\pi^2 \log x^2 \Lambda^2}{x^4} + o(1) \quad (3.19)$$

Así, teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores obtenemos

$$\mathcal{K} = \frac{-ix^4 2\pi^2 \log x^2 \Lambda^2}{16\pi^4 x^4} + o(1) = \frac{-i}{8\pi^2} \log x^2 \Lambda^2 + o(1) \quad (3.20)$$

y finalmente podemos escribir el correlador como

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 e^{-\frac{n\lambda}{32\pi^2} \log x^2 \Lambda^2} = \frac{1}{(4\pi^2)^{2n} x^{2\Delta_{\phi^n}}} \quad (3.21)$$

de donde extraemos que el operador  $\phi^n$  adquiere la dimensión anómala

$$\Delta_{\phi^n} = n \left( 1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \right) \quad (3.22)$$

Se ha omitido la escala de energía  $\Lambda$ , pues simplemente refleja el cambio en la dimensionalidad del operador al pasar de la teoría libre a la teoría con interacción. Esto se puede entender recuperando la escala en los correladores y trabajando de manera adimensional

$$\left\langle \frac{\phi^n(x) \bar{\phi}^n(0)}{\Lambda^{\Delta_{\phi^n}} \Lambda^{\Delta_{\phi^n}}} \right\rangle = \left\langle \frac{\phi^n(x) \bar{\phi}^n(0)}{\Lambda^n \Lambda^n} \right\rangle_0 e^{-\frac{n\lambda}{32\pi^2} \log x^2 \Lambda^2} = \frac{1}{(4\pi^2)^{2n} x^{2\Delta_{\phi^n}} \Lambda^{2\Delta_{\phi^n}}} \quad (3.23)$$

### 3.1.1. Cálculo en métrica $g^{mn}(x)$ arbitraria

Vamos a generalizar ahora el cálculo anterior a una geometría espacio-temporal arbitraria con métrica euclídea  $g^{mn}$ . Esto nos permitirá más adelante considerar inserciones del tensor energía-momento sin más que tomando una derivada funcional

respecto de la métrica. De esta forma, la teoría tiene ahora acción euclídea

$$S^g = \int \sqrt{g} \left[ g^{mn} \partial_m \bar{\phi} \partial_n \phi + \xi R \bar{\phi} \phi + \frac{g}{4} (\bar{\phi} \phi)^2 \right] \quad (3.24)$$

Se toma  $\xi$  tal que la teoría con acoplo  $g$  sea conforme. El escalar de Ricci viene dado por

$$R = -g^{mn} [\Gamma_{mn}^i \Gamma_{ik}^k - \Gamma_{mk}^i \Gamma_{ni}^k] - \partial_n [g^{mn} \Gamma_{mk}^k - g^{mk} \Gamma_{mk}^n] \quad (3.25)$$

donde los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} + \partial_m g_{kl}) \quad (3.26)$$

Utilizando la integral de caminos podemos escribir

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle^g = \frac{1}{Z} \int \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) e^{-S^g} \quad (3.27)$$

de manera que podemos reescribir el correlador como

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle^g = \frac{1}{Z} \int e^{-S_{\text{eff}}^g} \quad (3.28)$$

donde empleamos una acción efectiva en la que añadimos la contribución de los operadores restando  $\log \phi^n(x)$  y  $\log \bar{\phi}^n(0)$ . Teniendo en cuenta que podemos utilizar la delta de Dirac para escribir la identidad  $f(y) = f(x) \delta(x - y)$  obtenemos

$$S_{\text{eff}}^g = \int \sqrt{g} \left[ g^{mn} \partial_m \bar{\phi} \partial_n \phi + \xi R \bar{\phi} \phi + \frac{g}{4} (\bar{\phi} \phi)^2 - n \frac{\delta_0}{\sqrt{g(0)}} \log \bar{\phi} - n \frac{\delta_x}{\sqrt{g(x)}} \log \phi \right] \quad (3.29)$$

donde hemos denotado por  $\delta_y$  a la delta de Dirac que se anula en todos los puntos distintos de  $y$ .

Tomamos el siguiente reescalado del campo y de la constante de acoplo

$$\phi = \sqrt{n} \psi, \quad gn = \lambda \quad (3.30)$$

obteniendo la acción efectiva

$$S_{\text{eff}}^g = n \left( -\log n + \int \sqrt{g} \left[ g^{mn} \partial_m \bar{\psi} \partial_n \psi + \xi R \bar{\psi} \psi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda}{4} (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{\delta_0}{\sqrt{g(0)}} \log \bar{\psi} - \frac{\delta_x}{\sqrt{g(x)}} \log \psi \right] \right) \quad (3.31)$$

Vamos a considerar de nuevo el límite de tipo 't Hooft  $g \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  manteniendo  $\lambda$  fijo. De esta forma, dado que el correlador tiene la forma  $\int e^{-n(\cdot)}$ , podemos aplicar la aproximación del punto de silla para dar un resultado en este régimen. Además, consideramos que  $\lambda$  es pequeño y podemos realizar un análisis perturbativo, en el que a primer orden despreciamos el término de interacción. Así, podemos escribir las ecuaciones del movimiento aproximadas

$$\bar{\psi}(\partial_g^2 - \xi R)\psi = -\frac{\delta_0}{\sqrt{g(0)}}, \quad \psi(\partial_g^2 - \xi R)\bar{\psi} = -\frac{\delta_x}{\sqrt{g(x)}} \quad (3.32)$$

donde  $\partial_g^2$  es el laplaciano en la métrica  $g$ .

Si suponemos conocida la función de Green  $G^g(x, y)$ , solución de

$$(\partial_g^2 - \xi R)G^g(x, y) = -\frac{\delta(x - y)}{\sqrt{g(x)}} \quad (3.33)$$

entonces podemos escribir a través de ella las soluciones de las ecuaciones de movimiento

$$\psi(y) = -\frac{G^g(0, y)}{\sqrt{G^g(0, x)}}, \quad \bar{\psi}(y) = -\frac{G^g(y, x)}{\sqrt{G^g(0, x)}} \quad (3.34)$$

ya que entonces se tiene

$$\bar{\psi}(y)(\partial_g^2 - \xi R)\psi(y) = -\frac{\delta(y)}{\sqrt{g(0)}} \frac{G^g(y, x)}{G^g(0, x)} = -\frac{\delta(y)}{\sqrt{g(0)}} \quad (3.35)$$

y análogamente para la otra ecuación.

Sustituyendo en la expresión de la acción efectiva, teniendo en cuenta que  $\delta_0 \log \bar{\psi} = \delta_x \log \psi = \frac{1}{2} \log G^g(0, x)$  y que bajo la integral  $\sqrt{g}(g^{mn} \partial_m \bar{\psi} \partial_n \psi + \xi R \bar{\psi} \psi)$  coincide con  $-\sqrt{g} \bar{\psi}(\partial_g^2 - \xi R)\psi$ , obtenemos el resultado

$$S_{\text{eff}}^{sc} = -n \left( \log n - 1 + \log G^g(0, x) - \frac{\lambda}{4} \mathcal{K}^g \right) \quad (3.36)$$

donde el superíndice *sc* indica que consideramos la acción semiclásica y definimos

$$\mathcal{K}^g = \frac{1}{G^g(0, x)^2} \int \sqrt{g}(G_0^g)^2 (G_x^g)^2 \quad (3.37)$$

donde hemos denotado por  $G_y^g$  a la función  $G^g(\cdot, y)$ , y la integración es directamente euclídea.

Recordamos la aproximación de Stirling  $\log n! = n \log n - n + o(\log n)$ , de manera que en la aproximación del punto de silla escribimos

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle^g = \frac{1}{Z} \int e^{-S_{\text{eff}}} \simeq \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0^g e^{-\frac{n\lambda}{4} \mathcal{K}^g} \quad (3.38)$$

donde hemos escrito el correlador de la teoría libre ( $\lambda = 0$ ), que es sencillamente

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0^g = n! G^g(0, x)^n \quad (3.39)$$

Tras tener en cuenta los factores asociados a la rotación de Wick desde una signatura espacio-temporal a una euclídea, observamos exactamente la misma estructura que en el cálculo diagramático realizado en el espacio tiempo plano. De hecho recuperamos el resultado al tomar  $g = \delta$  y tener en cuenta que  $\mathcal{K} = -i\mathcal{K}^\delta$ , por la rotación de Wick del primero.

### 3.2. Función a tres puntos $\langle T^{ij}(z) \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle$

Gracias a haber considerado una métrica arbitraria podemos obtener una inserción del tensor energía-momento en la integral de caminos derivando con respecto a la métrica

$$-2 \frac{\delta}{\delta g_{ij}(z)} \left( \frac{1}{Z} \int e^{-S^g} \right) \Big|_{g=\delta} = \frac{1}{Z} \int T^{ij}(z) e^{-S^\delta} \quad (3.40)$$

donde hemos omitido el factor  $\sqrt{g}$  en el denominador al ser 1 cuando se fija  $g = \delta$ .

De esta forma obtenemos que el correlador con el tensor energía-momento en la teoría con un espacio-tiempo plano se puede escribir como

$$\langle T^{ij}(z) \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = -2 \frac{\delta}{\delta g_{ij}(z)} \left( \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle^g \right) \Big|_{g=\delta} \quad (3.41)$$

En primer lugar, notar que

$$\langle \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle_0^g = G^g(0, x) \quad (3.42)$$

y por lo tanto la derivada funcional de la función de Green inserta el tensor energía-momento

$$\langle T^{ij}(z) \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle_0 = -2 \left. \frac{\delta G^g(0, x)}{\delta g_{ij}(z)} \right|_{g=\delta} \quad (3.43)$$

Por otra parte, por ahora vamos a denotar a la derivada funcional de  $\mathcal{K}$  como

$$D^{ij}(z, x, 0) = -2 \left. \frac{\delta \mathcal{K}^g(0, x)}{\delta g_{ij}(z)} \right|_{g=\delta} \quad (3.44)$$

A partir de ahora siempre que se omita la  $g$  como subíndice o superíndice en cualquiera de las expresiones que estábamos manejando significará que  $g = \delta$ .

En la teoría libre obtenemos

$$\begin{aligned} \langle T^{ij}(z) \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 &= -2 \frac{\delta}{\delta g_{ij}(z)} \left( \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0^g \right) \Big|_{g=\delta} = \\ &= n \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 \frac{\langle T^{ij}(z) \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle_0}{G(0, x)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

de manera que podemos escribir la relación

$$\mathcal{M}_{n,0}^{ij}(z, x, 0) = n \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x, 0) \quad (3.46)$$

donde hemos denotado

$$\mathcal{M}_m^{ij}(z, x, 0) = \frac{\langle T^{ij}(z) \phi^m(x) \bar{\phi}^m(0) \rangle}{\langle \phi^m(x) \bar{\phi}^m(0) \rangle} \quad (3.47)$$

y añadido el subíndice 0 para indicar que nos referimos a la teoría libre.

Comentamos con anterioridad como (en la métrica plana) el diagrama de burbuja se anula al estar trabajando en la teoría crítica en la que  $m^2 = 0$ . Sin embargo, el propagador de la teoría con interacción obtiene correcciones al renormalizar de orden  $\epsilon^2 \sim g^2 = \lambda^2/n^4$ . Podríamos pensar que al estar derivando con respecto a la métrica este propagador para obtener el correlador  $\langle T^{ij}(z) \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle$  este también tendrá la primera corrección a un orden alto en la expansión en  $n \rightarrow \infty$ . Sin embargo, lo que se deriva son los propagadores en una métrica arbitraria y aquí la situación puede ser

distinta (el escalar de Ricci tiene dimensión 2 y en cierto sentido actúa como una masa, dando nuevas autocorrecciones). Veremos como no ser cautelosos con esto (por ahora) nos pasará factura.

Hecha esta pequeña discusión pasamos ahora a la teoría con interacción

$$\begin{aligned}
\langle T^{ij}(z)\phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle &= -2\frac{\delta}{\delta g_{ij}(z)} \left( \langle \phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle_0^g e^{-\frac{n\lambda}{4}\mathcal{K}^g} \right) \Big|_{g=\delta} = \\
&= \left( \langle T^{ij}(z)\phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle_0 - \frac{n\lambda}{4}D^{ij}(z,x,0)\langle \phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle_0 \right) e^{-\frac{n\lambda}{4}\mathcal{K}} = \\
&= \langle \phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle \left( \mathcal{M}_{n,0}^{ij}(z,x,0) - \frac{n\lambda}{4}D^{ij}(z,x,0) \right)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

de manera que encontramos la relación

$$\mathcal{M}_n^{ij}(z,x,0) = n \left( \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z,x,0) - \frac{\lambda}{4}D^{ij}(z,x,0) \right) \tag{3.49}$$

Podemos continuar expresando  $D^{ij}$  en términos de los correladores introduciendo la expresión explícita de  $\mathcal{K}^g$  y aplicando la derivada funcional. Obtenemos

$$\begin{aligned}
D^{ij}(z,x,0) &= -2\mathcal{K}\mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z,x,0) - \delta^{ij}\frac{G(0,z)^2G(z,x)^2}{G(0,x)^2} + \\
&+ \frac{2}{G(0,x)^2} \int d^4y \left( \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z,x,y) + \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z,y,0) \right) G(0,y)^2G(y,x)^2
\end{aligned} \tag{3.50}$$

donde hemos usado que

$$\frac{\delta g}{\delta g_{ij}(z)} = gg^{ij}\delta_z \tag{3.51}$$

Así, nos queda el resultado completo

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_n^{ij}(z,x,0) &= n \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{K} \right) \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z,x,0) + \frac{\lambda}{2}\frac{1}{G(0,x)^2} \left( \frac{\delta^{ij}}{2}G(0,z)^2G(z,x)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int d^4y \left( \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z,x,y) + \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z,y,0) \right) G(0,y)^2G(y,x)^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

### 3.2.1. Comprobación de las identidades de Ward

Es interesante comprobar si el resultado obtenido satisface las identidades de Ward asociadas a las simetrías del grupo conforme. Para ello vamos a suponer que  $\mathcal{M}_{1,0}^{ij}$  las satisface, al ser el ratio de correladores de la teoría libre.

En primer lugar comprobaremos la identidad de Ward asociada a la simetría de

escala. Suponemos que se cumple en la teoría libre

$$\delta_{ij}\mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x_1, x_2) = \Delta_\phi^0[\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] = [\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] \quad (3.53)$$

donde  $\Delta_\phi^0 = 1$  es la dimensión libre de  $\phi$ .

Con esto es fácil ver que se cumple también dicha identidad de Ward para los operadores de gran carga en la teoría libre

$$\delta_{ij}\mathcal{M}_{n,0}^{ij}(z, x_1, x_2) = \Delta_{\phi^n}^0[\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] \quad (3.54)$$

donde  $\Delta_{\phi^n}^0 = n$  es la dimensión libre de  $\phi^n$ .

Debería cumplirse en la teoría con interacción que

$$\delta_{ij}\mathcal{M}_n^{ij}(z, x_1, x_2) \stackrel{?}{=} \Delta_{\phi^n}[\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] = n \left( 1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \right) [\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] \quad (3.55)$$

Computando explícitamente obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\mathcal{M}_n^{ij}(z, x_1, x_2) &= n \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{2}\mathcal{K} \right) [\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{G(x_1, x_2)^2} \left( 2G(x_1, z)^2 G(z, x_2)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int d^4y [\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2) + 2\delta(z - y)] G(x_1, y)^2 G(y, x_2)^2 \right) \right] = \\ &= n[\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Podemos ver que no se cumple la identidad de Ward. Recuperamos la parte libre de la dimensión de  $\phi^n$ , pero la parte anómala no aparece.

Veamos antes que ocurre con la identidad de Ward asociada a las traslaciones, que aceptamos en la teoría libre en la forma

$$\begin{aligned} \partial_i^z \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x_1, x_2) &= \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log \langle \phi(x_1) \bar{\phi}(x_2) \rangle_0 = \\ &= \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log G(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.57)$$

donde hemos denotado

$$\mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) = \delta(z - x_1) \partial_{x_1}^j + \delta(z - x_2) \partial_{x_2}^j \quad (3.58)$$

Automáticamente se satisface para los operadores de gran carga en la teoría libre,

puesto que

$$\partial_i^z \mathcal{M}_{n,0}^{ij}(z, x_1, x_2) = n \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log \langle \phi(x_1) \bar{\phi}(x_2) \rangle_0 = \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log \langle \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle_0 \quad (3.59)$$

al ser  $\langle \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle_0$  idéntico a  $\langle \phi(x_1) \bar{\phi}(x_2) \rangle_0^n$  salvo un factor  $n!$  que no contribuye al derivar.

Debería cumplirse en la teoría con interacción que

$$\begin{aligned} \partial_i^z \mathcal{M}_n^{ij}(z, x_1, x_2) &\stackrel{?}{=} \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log \langle \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle = \\ &= n \left( \partial_i^z \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x_1, x_2) - \frac{\lambda}{4} \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \mathcal{K} \right) = \\ &= n \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \mathcal{K} \right) \partial_i^z \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x_1, x_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{G(x_1, x_2)^2} \int d^4 y G(x_1, y)^2 G(y, x_2)^2 \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log[G(x_1, y)G(y, x_2)] \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por un lado obtenemos

$$\frac{1}{2} \partial_z^j [G(x_1, z)^2 G(z, x_2)^2] = G(x_1, z)^2 G(z, x_2)^2 \partial_z^j \log [G(z, x_1)G(z, x_2)] \quad (3.61)$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \partial_z^j (\mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x_1, y) + \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, y, x_2)) &= \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log[G(x_1, y)G(y, x_2)] + \\ &+ \delta(z - y) \partial_y^j \log [G(y, x_1)G(y, x_2)] \end{aligned} \quad (3.62)$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} \partial_z^j \int d^4 y (\mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x_1, y) + \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, y, x_2)) G(x_1, y)^2 G(y, x_2)^2 &= \\ = \int d^4 y G(x_1, y)^2 G(y, x_2)^2 \mathcal{D}^j(z, x_1, x_2) \log[G(x_1, y)G(y, x_2)] + \\ \frac{1}{2} \partial_z^j [G(x_1, z)^2 G(z, x_2)^2] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Juntándolo todo concluimos que se satisface exactamente la identidad de Ward de traslación.

### 3.3. $\phi^6$ en $d = 3 - \epsilon$

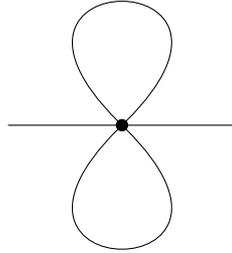
Todos los argumentos anteriores se han realizado para  $\phi^4$   $O(2)$  en  $d = 4 - \epsilon$ . Se pueden realizar de manera análoga en su hermana  $\phi^6$   $O(2)$  en  $d = 3 - \epsilon$  con acción

$$S = \int d^{3-\epsilon}x \left( \partial\phi\partial\bar{\phi} - \frac{g}{36}(\phi\bar{\phi})^3 \right) \quad (3.64)$$

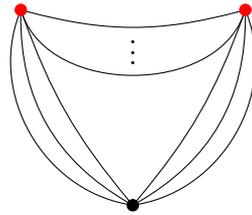
El límite que vamos a estudiar es

$$g \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \lambda = gn^2 = \text{cte} \quad (3.65)$$

Notar en primer lugar que la doble burbuja



se anula por la ausencia de escala en la teoría. Así, el diagrama dominante a  $o(g)$  en este caso es



y la estructura de propagadores del dominante a orden  $o(g^m)$  puede escribirse

$$K_m = G(0, x)^n \left( \frac{1}{G(0, x)^3} \int d^3z G(0, z)^3 G(z, x)^3 \right)^m \quad (3.66)$$

de manera que podemos escribir  $K_m = G(0, x)^n \mathcal{K}^m$ , donde denotamos

$$\mathcal{K} = \frac{1}{G(0, x)^3} \int d^3z G(0, z)^3 G(z, x)^3 \quad (3.67)$$

Y así, tras introducir los factores de simetría y de los vértices podemos escribir

explícitamente el correlador en la forma

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = n! \sum_{m=0}^{n/2} (-ig)^m \frac{1}{36^m m!} \frac{n!}{(n-3m)!} K_m = \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 e^{-i \frac{n\lambda}{36} \mathcal{K}} \quad (3.68)$$

El cálculo de  $\mathcal{K}$  puede realizarse utilizando esta vez la expresión

$$\frac{1}{z^3} = -\frac{1}{2} \partial^2 \left( \frac{2 + \log z^2 \Lambda^2}{z} \right) \quad (3.69)$$

y teniendo en cuenta que el propagador es

$$G(y, z) = \frac{1}{4\pi |y - z|} \quad (3.70)$$

de forma que (omitiendo los módulos) se obtiene

$$\mathcal{K} = \frac{-ix^3}{64\pi^3} \int d^3z \frac{1}{z^3 (y-z)^3} = \frac{-i}{8\pi^2} \log x^2 \Lambda^2 + o(1) \quad (3.71)$$

y concluimos

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0 e^{-\frac{n\lambda}{248\pi^2} \log x^2 \Lambda^2} = \frac{1}{(4\pi)^{2n} x^{2\Delta_{\phi^n}}} \quad (3.72)$$

donde

$$\Delta_{\phi^n} = n \left( 1 + \frac{\lambda}{248\pi^2} \right) \quad (3.73)$$

El cálculo en una métrica euclídea arbitraria se realiza con la acción

$$S^g = \int \sqrt{g} \left[ g^{mn} \partial_m \bar{\phi} \partial_n \phi + \xi R \bar{\phi} \phi + \frac{g}{36} (\bar{\phi} \phi)^3 \right] \quad (3.74)$$

y realizando el mismo procedimiento que en  $\phi^4$  con las sustituciones

$$\phi = \sqrt{n} \psi, \quad gn^2 = \lambda \quad (3.75)$$

llegamos a

$$S_{\text{eff}}^{\text{sc}} = -n \left( \log n - 1 + \log G^g(0, x) - \frac{\lambda}{36} \mathcal{K}^g \right) \quad (3.76)$$

donde

$$\mathcal{K}^g = \frac{1}{G^g(0, x)^3} \int \sqrt{g} (G_0^g)^3 (G_x^g)^3 \quad (3.77)$$

y la aproximación del punto de silla nos lleva a

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle^g = \langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0^g e^{-\frac{n\lambda}{36} \mathcal{K}^g} \quad (3.78)$$

con el correlador libre

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle_0^g = n! G^g(0, x)^n \quad (3.79)$$

Tenemos la misma estructura que en  $\phi^4$ , por lo que es sencillo argumentar que se cumplen las relaciones

$$\mathcal{M}_{n,0}^{ij}(z, x, 0) = n \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x, 0) \quad (3.80)$$

$$\mathcal{M}_n^{ij}(z, x, 0) = n \left( \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x, 0) - \frac{\lambda}{36} D^{ij}(z, x, 0) \right) \quad (3.81)$$

donde

$$\begin{aligned} D^{ij}(z, x, 0) = & -3\mathcal{K} \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x, 0) - \delta^{ij} \frac{G(0, z)^3 G(z, x)^3}{G(0, x)^3} + \\ & + \frac{3}{G(0, x)^3} \int d^4 y \left( \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x, y) + \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, y, 0) \right) G(0, y)^3 G(y, x)^3 \end{aligned} \quad (3.82)$$

de forma que obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^{ij}(z, x, 0) = & n \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{12} \mathcal{K} \right) \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x, 0) + \frac{\lambda}{12} \frac{1}{G(0, x)^3} \left( \frac{\delta^{ij}}{3} G(0, z)^3 G(z, x)^3 \right. \right. \\ & \left. \left. - \int d^4 y \left( \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, x, y) + \mathcal{M}_{1,0}^{ij}(z, y, 0) \right) G(0, y)^3 G(y, x)^3 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.83)$$

### 3.4. Estudio de la simetría de escala

Volviendo a  $\phi^4$ , en esta sección vamos a hacer un análisis más cuidadoso de la simetría conforme de la teoría y de la identidad de Ward asociada a la invarianza de escala, dando varias ideas sobre la posible justificación e interpretación del no cumplimiento de la identidad a través del método que hemos desarrollado. Este es un trabajo novedoso y en progreso, por lo que aun no se ha llegado a una conclusión concreta.

En primer lugar, hay que ser cautelosos en la dimensión en la que se regulariza la teoría, puesto que el punto fijo de Wilson Fisher está presente solo en  $d = 4 - \epsilon$  cuando  $g \sim \epsilon$  con una proporcionalidad concreta, que depende del valor de  $N$  en  $O(N)$  y de los convenios escogidos al escribir la acción de la teoría.

Además, estamos considerando el límite doble en el que  $g \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  mante-

niendo  $\lambda = gn$  constante. Esto implica que también  $\epsilon \rightarrow 0$ . Sin embargo, considerar directamente la teoría en  $d = 4$  es un error, pues entonces la teoría conforme es la libre, e introducir la interacción rompe la simetría. Para ser más claros (entendiendo que siempre que aparezca una  $g$  la sustituimos por  $g = \lambda/n$ ), regularizando en  $d = 4 - \epsilon$  podríamos estar tentados de despreciar los términos proporcionales a  $\epsilon$ , pero lo que deberíamos hacer es utilizar  $\epsilon \sim \lambda/n$  y despreciarlo solo si no es dominante en la expansión en  $n$ .

Dado que la aparición de otro término a primer orden puede ser sutil, vamos a realizar primero un análisis general. Comenzamos suponiendo la forma de la expresión de los correladores de interés para ver a dónde nos lleva la identidad de Ward. En el caso del propagador suponemos que en la teoría plana tenemos

$$\langle \phi \bar{\phi} \rangle = G_{12} \exp(-\gamma_\phi \log x_{12}^2 \Lambda^2) \quad (3.84)$$

donde para mantener una notación sencilla, hemos omitido las dependencias de  $\phi$  en  $x_1$  y de  $\bar{\phi}$  en  $x_2$  y denotamos  $G_{12} = G(x_1, x_2)$  al propagador libre,  $\gamma_\phi$  a la dimensión anómala de  $\phi$  y  $x_{12} = |x_1 - x_2|$ .

En la teoría en un espacio tiempo arbitrario escribimos

$$\langle \phi \bar{\phi} \rangle^g = G_{12}^g e^{-[\mathcal{A}^g + o(n^{-1})]} \quad (3.85)$$

donde las  $\mathcal{A}^g$  es una función de los puntos de inserción  $x_1$  y  $x_2$  que solo depende de  $\lambda$ , es decir, es  $o(1)$  en la expansión en  $n$ .

La consistencia entre las dos expresiones anteriores implica la relación

$$\mathcal{A}^\delta + o(n^{-1}) = \gamma_\phi \log x_{12}^2 \Lambda^2 \quad (3.86)$$

En este punto podemos hacer uso de que  $\gamma_\phi \sim \epsilon^2 \sim \lambda^2/n^2$ . Es decir, la dimensión anómala de  $\phi$  es  $o(n^{-2})$ , lo que supone que  $\mathcal{A}^\delta = 0$ . Es importante destacar que esto no significa que  $\mathcal{A}^g$  sea nulo en general.

Vamos a escribir ahora los correladores para los operadores compuestos. En la métrica plana tenemos

$$\langle \phi^n \bar{\phi}^n \rangle = n! G_{12}^n \exp(-\gamma_{\phi^n} \log x_{12}^2 \Lambda^2) \quad (3.87)$$

y en una arbitraria

$$\langle \phi^n \bar{\phi}^n \rangle^g = n! (G_{12}^g)^n e^{-n[\mathcal{B}^g + o(n^{-1})]} \quad (3.88)$$

donde empleamos una función  $\mathcal{B}^g$  de los puntos de inserción  $x_1$  y  $x_2$  que es  $o(1)$  en la expansión en  $n$ . Ya sabemos por el límite semiclásico que

$$\mathcal{B}^g = \frac{\lambda}{4} \mathcal{K}^g + o(\lambda^2) \quad (3.89)$$

En lo sucesivo omitiremos las contribuciones de orden  $o(n^{-1})$ .

Con esta notación las identidad de Ward para la inserción en la función a 2 puntos puede escribirse simplemente como

$$\langle T\phi\bar{\phi} \rangle = (1 + \gamma_\phi)(\delta_{z_1} + \delta_{z_2})\langle \phi\bar{\phi} \rangle \quad (3.90)$$

y en el correlador de los operadores compuestos

$$\langle T\phi^n \bar{\phi}^n \rangle = (n + \gamma_{\phi^n})(\delta_{z_1} + \delta_{z_2})\langle \phi^n \bar{\phi}^n \rangle \quad (3.91)$$

donde hemos denotado a las deltas de Dirac como  $\delta_{z_i} = \delta(z - x_i)$ , y  $T$  denota la traza del tensor energía-momento evaluada en  $z$ .

Para continuar vamos a definir la siguiente notación compacta

$$\mathcal{D}(\cdot) = -2\delta_{ij} \frac{\delta(\cdot)}{\delta g_{ij}(z)} \Big|_{g=\delta} \quad (3.92)$$

de manera que

$$\langle T\phi\bar{\phi} \rangle = \mathcal{D}\langle \phi\bar{\phi} \rangle^g, \quad \langle T\phi^n \bar{\phi}^n \rangle = \mathcal{D}\langle \phi^n \bar{\phi}^n \rangle^g \quad (3.93)$$

Calculando la derivada funcional de la función a dos puntos obtenemos

$$\mathcal{D}\langle \phi\bar{\phi} \rangle^g = \langle \phi\bar{\phi} \rangle [\mathcal{D}(\log G_{12}^g) - \mathcal{D}(\mathcal{A}^g)] \quad (3.94)$$

y usando la identidad de Ward podemos extraer la siguiente expresión

$$\mathcal{D}(\log G_{12}^g) = (1 + \gamma_\phi)(\delta_{z_1} + \delta_{z_2}) + \mathcal{D}(\mathcal{A}^g) \quad (3.95)$$

Calculando ahora en el correlador con los operadores compuestos y sustituyendo

la anterior identidad

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\langle\phi^n\bar{\phi}^n\rangle^g &= n\langle\phi^n\bar{\phi}^n\rangle[\mathcal{D}(\log G^g) - \mathcal{D}(\mathcal{B}^g)] = \\ &= n\langle\phi^n\bar{\phi}^n\rangle[(1 + \gamma_\phi)(\delta_{z_1} + \delta_{z_2}) + \mathcal{D}(\mathcal{A}^g - \mathcal{B}^g)] \end{aligned} \quad (3.96)$$

con lo que podemos emplear la identidad de Ward para expresar

$$(\gamma_{\phi^n} - n\gamma_\phi)(\delta_{z_1} + \delta_{z_2}) = n\mathcal{D}(\mathcal{A}^g - \mathcal{B}^g) \quad (3.97)$$

Esta relación se satisface en cualquier teoría cuyos correladores vengas dados por expresiones de la forma (3.85) y (3.88) y que satisfaga las identidades de Ward asociadas a la simetría de escala (3.90) y (3.91).

Particularizando ahora a nuestro caso, podemos aprovecharnos de la expansión en  $n$  (usando  $\epsilon \sim g = \lambda/n$ ) para extraer información de la expresión anterior. Notando que  $\gamma_{\phi^n}$  es  $o(n)$  y que  $\gamma_\phi$  es  $o(n^{-2})$ , inmediatamente podemos concluir que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^g - \mathcal{B}^g) = \frac{\lambda}{32\pi^2}(\delta_{z_1} + \delta_{z_2}) + o(\lambda^2) \quad (3.98)$$

Una posible resolución al dilema de la identidad de Ward de escala viene entonces de que en el desarrollo de las anteriores secciones no estábamos considerando la existencia de  $\mathcal{A}^g$ , debido a que no tiene análogo plano por ser  $\mathcal{A}^\delta = 0$ . Esto supondría la existencia de una corrección al propagador en teorías con métrica curva, que a pesar de anularse en la teoría plana, es relevante para que se satisfaga la identidad de Ward de escala. Esto puede parecer un poco extraño, y quizás no sea correcto, pero de todas formas vamos a calcular cuál sería esta contribución.

### 3.4.1. Posible corrección al propagador $\langle\phi(x)\bar{\phi}(0)\rangle^g$

Vamos a aprovechar la simetría conforme de la teoría plana para calcular cuál debería ser la corrección  $\mathcal{A}^g$  al propagador  $\langle\phi(x)\bar{\phi}(0)\rangle^g$  en el límite doble.

Utilizamos que en la teoría plana los correladores a dos y tres puntos están fijados

por la simetría para escribir

$$\langle \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle = \mathcal{N}_\phi x^{-2\Delta_\phi} \quad (3.99)$$

$$\langle \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = \mathcal{N}_{\phi^n} x^{-2\Delta_{\phi^n}} \quad (3.100)$$

$$\langle T^{ij}(z) \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle = C_{T\phi\bar{\phi}} x^{-2\Delta_\phi} W^{ij}(z, x, 0) \quad (3.101)$$

$$\langle T^{ij}(z) \phi^n(x) \bar{\phi}^n(0) \rangle = C_{T\phi^n\bar{\phi}^n} x^{-2\Delta_{\phi^n}} W^{ij}(z, x, 0) \quad (3.102)$$

donde  $W^{ij}(z, x, 0)$  solo depende de los puntos de inserción y de la dimensión de la teoría. No es necesario especificar la forma de los factores de normalización  $\mathcal{N}_\phi$  y  $\mathcal{N}_{\phi^n}$ .

Si será necesario computar los coeficientes de las funciones a 3 puntos, cosa que podemos hacer en general aprovechando la siguiente forma de la identidad de Ward para una transformación infinitesimal  $\epsilon$  y una región acotada  $B$

$$\begin{aligned} \int_{z \in \partial B} d^{d-1} S_i(z) \epsilon_j(z) [\langle T^{ij}(z) \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_m(x_m) \rangle^g - \langle T^{ij}(z) \rangle^g \langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_m(x_m) \rangle^g] = \\ = - \sum_{x_k \in B} \left[ \epsilon^i(x_k) \partial_i^{x_k} + \frac{\Delta_k}{d} \nabla_i \epsilon^i(x_k) \right] \langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_m(x_m) \rangle^g \end{aligned} \quad (3.103)$$

que restringiendo a  $g = \delta$ ,  $B$  la bola de centro 0 y radio  $r < |x|$ ,  $\epsilon^i(z) = \lambda z^i$  una dilatación infinitesimal y los operadores  $\mathcal{O}(x)$  y  $\bar{\mathcal{O}}(0)$  se convierte en

$$\frac{1}{r} \int_{|z|=r} d^{d-1} z z_i z_j \langle T^{ij}(z) \mathcal{O}(x) \bar{\mathcal{O}}(0) \rangle = -\frac{\Delta_{\mathcal{O}}}{d} \langle \mathcal{O}(x) \bar{\mathcal{O}}(0) \rangle \quad (3.104)$$

Gracias a que la simetría de escala fija las funciones a dos y tres puntos podemos escribir

$$C_{T\mathcal{O}\bar{\mathcal{O}}} \int_{|z|=r} d^{d-1} z z_i z_j W^{ij}(z, x, 0) = -\frac{r}{d} \mathcal{N}_{\mathcal{O}} \Delta_{\mathcal{O}} \quad (3.105)$$

que se tiene que cumplir para cualquier elección de  $r < |x|$ , por lo que podemos hacer  $r \rightarrow 0$ , límite en el que a primer orden se tiene

$$z_i z_j W^{ij}(z, x, 0) \sim \frac{d-1}{d} r^{2-d}, \quad |z| = r \rightarrow 0 \quad (3.106)$$

con lo que la integral es trivial y saca un factor  $r^{d-1} S_{d-1}$ , donde el área de la esfera  $S^{d-1}$  es

$$S_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (3.107)$$

Así, el coeficiente nos queda

$$C_{T\mathcal{O}\bar{\mathcal{O}}} = -\frac{\mathcal{N}_{\mathcal{O}}\Delta_{\mathcal{O}}}{d-1} \frac{1}{S_{d-1}} \quad (3.108)$$

Gracias a esto podemos escribir

$$\frac{\langle T^{ij}(z)\phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle}{\langle \phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle} = -\frac{\Delta_{\phi}}{d-1} \frac{W^{ij}(z,x,0)}{S_{d-1}} \quad (3.109)$$

$$\frac{\langle T^{ij}(z)\phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle}{\langle \phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle} = -\frac{\Delta_{\phi^n}}{d-1} \frac{W^{ij}(z,x,0)}{S_{d-1}} \quad (3.110)$$

y concluir

$$\frac{\langle T^{ij}(z)\phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle}{\langle \phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle} = \frac{\Delta_{\phi^n}}{\Delta_{\phi}} \frac{\langle T^{ij}(z)\phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle}{\langle \phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle} \quad (3.111)$$

Si ahora confiamos en el cálculo semiclásico que realizamos anteriormente, podemos escribir (omitiendo a partir de ahora la dependencia en los puntos de inserción)

$$\langle \phi^n \bar{\phi}^n \rangle^g = n! (G^g)^n e^{-\frac{n\lambda}{4} \mathcal{K}^g} \quad (3.112)$$

donde la expansión en  $n \rightarrow \infty$  en la exponencial solo es fiable hasta  $o(1)$ .

Utilizando la notación compacta

$$\mathcal{D}^{ij}(\cdot) = -2 \frac{\delta(\cdot)}{\delta g_{ij}(z)} \Big|_{g=\delta} \quad (3.113)$$

podemos calcular

$$\langle T^{ij} \phi^n \bar{\phi}^n \rangle = \mathcal{D}^{ij} \langle \phi^n \bar{\phi}^n \rangle^g = n \langle \phi^n \bar{\phi}^n \rangle \left[ \mathcal{D}^{ij}(\log G^g) - \frac{\lambda}{4} \mathcal{D}^{ij}(\mathcal{K}^g) \right] \quad (3.114)$$

y usando (3.111) recuperar

$$\mathcal{D}^{ij} \langle \phi \bar{\phi} \rangle^g = \langle T^{ij} \phi \bar{\phi} \rangle = \frac{n\Delta_{\phi}}{\Delta_{\phi^n}} \langle \phi \bar{\phi} \rangle \left[ \mathcal{D}^{ij}(\log G^g) - \frac{\lambda}{4} \mathcal{D}^{ij}(\mathcal{K}^g) \right] \quad (3.115)$$

Recordando ahora que  $\Delta_{\phi} = 1 + o(n^{-2})$  y que

$$\Delta_{\phi^n} = n \left( 1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \right) + o(1) \quad (3.116)$$

obtenemos

$$\frac{n\Delta_{\phi}}{\Delta_{\phi^n}} = \left( 1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \right)^{-1} + o(n^{-1}) \quad (3.117)$$

de forma que podemos escribir

$$\mathcal{D}^{ij} \langle \phi \bar{\phi} \rangle^g = \frac{\langle \phi \bar{\phi} \rangle}{1 + \frac{\lambda}{32\pi^2}} \left[ \mathcal{D}^{ij}(\log G^g) - \frac{\lambda}{4} \mathcal{D}^{ij}(\mathcal{K}^g) \right] \quad (3.118)$$

donde hemos despreciado las contribuciones de orden  $o(n^{-1})$ . Para ser consistentes con lo anterior deberíamos quedarnos a primer orden en  $\lambda$ , por lo que el denominador se expande y despreciando  $o(\lambda^2)$  resulta

$$\mathcal{D}^{ij} \langle \phi \bar{\phi} \rangle^g = \langle \phi \bar{\phi} \rangle \left[ \mathcal{D}^{ij}(\log G^g) - \frac{\lambda}{4} \mathcal{D}^{ij}(\mathcal{K}^g) - \frac{\lambda}{32\pi^2} \mathcal{D}^{ij}(\log G^g) \right] \quad (3.119)$$

Podemos recuperar este resultado si admitimos la siguiente forma del correlador en la métrica arbitraria

$$\langle \phi \bar{\phi} \rangle^g = G^g \exp \left( -\frac{\lambda}{4} \mathcal{K}^g - \frac{\lambda}{32\pi^2} \log(\alpha G^g) \right) \quad (3.120)$$

donde  $\alpha$  es independiente de  $g$  y desaparece al derivar.

En términos de la notación de la sección anterior, este resultado se corresponde con

$$\mathcal{A}^g = \frac{\lambda}{4} \mathcal{K}^g + \frac{\lambda}{32\pi^2} \log(\alpha G^g) + o(\lambda^2) = \mathcal{B}^g + \frac{\lambda}{32\pi^2} \log(\alpha G^g) + o(\lambda^2) \quad (3.121)$$

de manera que obtenemos

$$\mathcal{A}^g - \mathcal{B}^g = \frac{\lambda}{32\pi^2} \log(\alpha G^g) + o(\lambda^2) \quad (3.122)$$

y la identidad de Ward de escala, expresada en la sección anterior mediante (3.98) se satisface a orden  $o(\lambda)$  si

$$\mathcal{D}(\log G^g) = \delta_{z1} + \delta_{z2} + o(\lambda) \quad (3.123)$$

lo cual se satisface por (3.95) al notar que  $\gamma_\phi \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y que  $\mathcal{A}^g$  es  $o(\lambda)$ .

Recordamos también que en la sección anterior razonamos que  $A_1^\delta = 0$ . Podemos utilizar esta condición para determinar  $\alpha$ , ya que conocemos la forma explícita de  $G$  y  $\mathcal{K}$  en la métrica plana. Obtenemos

$$0 = \mathcal{K} + \frac{1}{8\pi^2} \log(\alpha G) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \log x^2 \Lambda^2 + \log \left( \frac{\alpha}{4\pi^2 x^2} \right) \right] \quad (3.124)$$

por lo que basta con tomar

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} \quad (3.125)$$

El propagador dependiente de la métrica nos quedaría bajo estas hipótesis en la forma

$$\langle \phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle^g = G^g(x, 0) \exp \left[ -\frac{\lambda}{4} \mathcal{K}^g(x, 0) - \frac{\lambda}{32\pi^2} \log \left( \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} G^g(x, 0) \right) \right] \quad (3.126)$$

Para poner en contexto el resultado recordamos que estamos considerando la teoría con acción euclídea

$$S^g = \int \sqrt{g} \left[ g^{mn} \partial_m \bar{\phi} \partial_n \phi + \xi R \bar{\phi} \phi + \frac{g}{4} (\bar{\phi} \phi)^2 \right] \quad (3.127)$$

bajo el límite doble  $n \rightarrow \infty$ ,  $g \rightarrow 0$  con  $\lambda = gn$  constante. Hemos definido

$$\mathcal{K}^g = \frac{1}{G^g(x, 0)^2} \int d^d y \sqrt{g(y)} G^g(x, y)^2 G^g(y, 0)^2 \quad (3.128)$$

donde  $G^g(x, y)$  es solución de

$$(\partial_g^2 - \xi R) G^g(x, y) = -\frac{\delta(x-y)}{\sqrt{g(x)}} \quad (3.129)$$

### 3.4.2. Posibles términos de contacto

La resolución del apartado anterior puede no ser correcta, pues podríamos argumentar heurísticamente que en el límite doble el propagador del campo escalar no debería recibir correcciones de orden  $o(\lambda)$ , estemos trabajando en la teoría plana o en una métrica  $g^{ij}$ , debido a que están suprimidas por  $n$ . Son los correladores de los operadores de gran carga los que (precisamente por tener una carga comparable a  $n$ ) reciben estas correcciones.

Esto nos lleva a buscar alternativas, y una que ha aparecido más veces en la literatura es la de una anomalía conforme que se manifiesta a través de términos de contacto. En todo el desarrollo previo se ha considerado que los correladores solo tenían contribuciones con soporte en todo el espacio de configuración, pues solo estas se recuperan a través de la aproximación del punto de silla y la derivación funcional. Sin embargo, en ocasiones la simetría conforme depende de contribuciones que tienen su

soporte restringido a regiones restringidas del espacio de configuración, normalmente a través de la presencia de deltas de Dirac. Estos términos pueden denominarse locales, de contacto o seagull, dependiendo del contexto.

Vamos a ver como las funciones a 3-puntos que estamos considerando admiten este tipo de contribuciones, y como su adición resuelve la ruptura de la identidad de Ward conforme.

Pensando en esta identidad, la estructura de deltas que nos interesaría en el término de contacto es

$$\langle \mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle [\delta(x_1 - x_2) + \delta(x_1 - x_3)] \quad (3.130)$$

y está contribución se puede recuperar en el formalismo de la integral de camino derivando con respecto a las fuentes  $J^i$  si se añaden a la acción los términos

$$S_J = \sum_{i=1}^3 \int J^i \mathcal{O}_i - c \int J^1 (J^2 \mathcal{O}_2 + J^3 \mathcal{O}_3) \quad (3.131)$$

donde  $c$  es un coeficiente arbitrario, ya que de esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{\delta^3 \int e^{-S_J}}{\delta J^1(x_1)\delta J^2(x_2)\delta J^3(x_3)} &= \langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle + \\ &+ c \langle \mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle [\delta(x_1 - x_2) + \delta(x_1 - x_3)] \end{aligned} \quad (3.132)$$

es decir, recuperamos lo que usualmente llamamos función a 3-puntos más una contribución de la forma que necesitamos.

Para que este procedimiento sea válido necesitamos que la dimensionalidad de los integrandos que hemos añadido sea  $d$ . Evidentemente tenemos que  $\Delta_{J^i} + \Delta_{\mathcal{O}_i} = d$ , lo que hace que la segunda contribución lleve a  $\Delta_{J^1} = 0$ , es decir,  $\Delta_{\mathcal{O}_1} = d$ .

En nuestro caso,  $\mathcal{O}_1$  se corresponde con el tensor energía-momento, que efectivamente tiene dimensión  $d$ , lo que nos da un motivo para tomar en serio la adición de términos con deltas.

Vamos a sumar otra perspectiva con la que ganar más confianza. Añadamos ahora los términos

$$S'_J = \sum_{i=1}^3 \int J^i \mathcal{O}_i - \int J^1 (c_3 J^2 \mathcal{O}_3 + c_2 J^3 \mathcal{O}_2) \quad (3.133)$$

de forma que derivando funcionalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
-\frac{\delta^3 \int e^{-S'_J}}{\delta J^1(x_1) \delta J^2(x_2) \delta J^3(x_3)} &= \langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle + \\
&+ \frac{c_3 \mathcal{N}_3}{(x_2 - x_3)^{\Delta_{\mathcal{O}_3}}} \delta(x_1 - x_2) + \\
&+ \frac{c_2 \mathcal{N}_2}{(x_2 - x_3)^{\Delta_{\mathcal{O}_2}}} \delta(x_1 - x_3)
\end{aligned} \tag{3.134}$$

donde hemos usado que las funciones a 2-puntos de  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3$  están fijadas por la simetría conforme salvo factores de normalización  $\mathcal{N}_2$  y  $\mathcal{N}_3$ .

Realizando el mismo análisis dimensional que antes obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{J^1} - \Delta_{\mathcal{O}_2} + \Delta_{\mathcal{O}_3} &= 0 \\
\Delta_{J^1} - \Delta_{\mathcal{O}_3} + \Delta_{\mathcal{O}_2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.135}$$

de donde concluimos otra vez que  $\Delta_{J^1} = 0$ , pero ahora además la consistencia requiere  $\Delta_{\mathcal{O}_2} = \Delta_{\mathcal{O}_3}$ . Esto conlleva (con una elección adecuada de  $c_2$  y  $c_3$ ) que el correlador obtenido a partir de  $S'_J$  sea el mismo que a partir de  $S_J$ .

En términos de la función a 3-puntos que estamos estudiando en el límite doble,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3$  se corresponden con  $\phi^n$  y  $\bar{\phi}^n$ , de manera que las dimensiones coinciden, y tenemos aun más motivación para considerar la contribución del término con deltas.

Si retomamos ahora el cálculo que hicimos para comprobar la identidad de Ward conforme en (3.56), y denotamos a la función a 3-puntos que calculamos en (3.52) con un subíndice  $c$ , tenemos que

$$\delta_{ij} \langle T^{ij}(z) \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle_c = n [\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] \langle \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle \tag{3.136}$$

mientras que la identidad de Ward incluye la dimensión anómala

$$\delta_{ij} \langle T^{ij}(z) \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle = (n + \gamma_{\phi^n}) [\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] \langle \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle \tag{3.137}$$

Podemos satisfacer esta relación si añadimos a la función a 3-puntos una contribución como las que hemos estudiado en esta sección

$$\begin{aligned}
\langle T^{ij}(z) \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle &= \langle T^{ij}(z) \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle_c + \\
&+ \gamma_{\phi^n} [\delta(z - x_1) + \delta(z - x_2)] \langle \phi^n(x_1) \bar{\phi}^n(x_2) \rangle
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Es necesario seguir trabajando en esta dirección para obtener una resolución e interpretación satisfactoria, pero en principio esta anomalía conforme puede reabsorberse a través de un contratérmino local en el lagrangiano. Esto hace que se pueda reescribir la teoría de forma que sea explícitamente conforme, sin necesidad de una adición artificial de términos de contacto en algunos correladores. Sería interesante ver como se comporta este contratérmino bajo el límite doble y en otros contextos.

# Conclusión

Este trabajo ofrece una introducción a las ideas fundamentales de Teoría Cuántica de Campos (QFT) y Teorías Conformes (CFT), con un enfoque particular en la expansión de gran carga. Esta arroja luz sobre cómo las simetrías de las teorías pueden aprovecharse para obtener nuevas perspectivas y métodos de cálculo.

En esta línea, el trabajo presenta un cálculo original de la función a tres puntos  $\langle T^{ij}(z)\phi^n(x)\bar{\phi}^n(0) \rangle$  en el límite semiclásico  $g \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  con  $gn$  constante de la teoría  $\phi^4$  con simetría global  $O(2)$  en punto fijo de Wilson-Fisher de  $d = 4 - \epsilon$ . La expansión de gran carga permite obtener estos correladores, que son inaccesibles mediante técnicas perturbativas estándar. Además, la posibilidad de insertar el tensor energía-momento conecta directamente con la estructura interna de la teoría, dando lugar a comprobaciones no triviales de la simetría conforme y sus anomalías. Un análisis más detallado y cuidadoso podría revelar de una forma más profunda el comportamiento de la teoría cuántica bajo este límite doble, dando nueva información sobre teorías conformes.

Por otro lado, es relevante la incorporación de correcciones de orden superior en la expansión de gran carga. Refinando las aproximaciones e incorporando correcciones más detalladas, los estudios futuros podrían mejorar significativamente la precisión de las predicciones y proporcionar perspectivas más detalladas sobre el comportamiento de los puntos críticos de los sistemas físicos. Otra generalización natural es extender el cálculo a los denominados correladores no extremales. También es prometedora la aplicación de la expansión de gran carga a otros grupos de simetría más allá de  $O(2)$ . Investigar modelos con diferentes simetrías podría revelar nuevos fenómenos universales y profundizar nuestra comprensión en la interconexión existente entre el grupo conforme y el resto de simetrías globales de la teoría.

La metodología general de la aproximación de gran carga tiene una gran aplicabilidad y cabe preguntarse las implicaciones que tendría en otras teorías y campos,

por ejemplo en el contexto de la cosmología del universo temprano o en el estudio de agujeros negros. La aproximación de gran carga es capaz de describir efectos no perturbativos, por lo que encontrar un marco adecuado para su uso podría dar una comprensión más profunda de fenómenos como el confinamiento, los solitones y las instantones.

Conectar la perspectiva de teorías de campos en la lattice y las simulaciones numéricas con la expansión de gran carga podría ser otra dirección fructífera de investigación. Quizás sea una vía por la que seguir refinando nuestra comprensión de QCD. También podría extenderse para explorar conexiones con la gravedad cuántica y la holografía. Entender cómo operan las expansiones de gran carga en el contexto de la correspondencia AdS/CFT u otras dualidades holográficas podría terminar ofreciendo nuevas perspectivas sobre la naturaleza del espacio-tiempo y la gravedad.

# Bibliografía

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*.  
Westview Press, 1995.
- [2] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*.  
Princeton University Press, 2003.
- [3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations*.  
Cambridge University Press, 1995.
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 2: Modern Applications*.  
Cambridge University Press, 1996.
- [5] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*.  
Oxford University Press, 2005.
- [6] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*.  
Cambridge University Press, 2007.
- [7] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*.  
Cambridge University Press, 2013.
- [8] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*.  
Addison-Wesley, 1990.
- [9] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*.  
Springer, 1996.
- [10] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*.  
Cambridge University Press, 1985.
- [11] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*.  
Cambridge University Press, 2014.

- [12] M. A. Shifman, *Advanced Topics in Quantum Field Theory: A Lecture Course*. Cambridge University Press, 2012.
- [13] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1992.
- [14] D. Z. Freedman and A. V. Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [15] A. Cappelli, C. D'Antoni, and R. Tateo, *The Stress-Energy Tensor Revisited*. Physics Reports, 1987.
- [16] G. Arias-Tamargo, D. Rodriguez-Gomez, and J. G. Russo, *The large charge limit of scalar field theories and the Wilson-Fisher fixed point at  $\epsilon = 0$* . arXiv:1908.11347, 2020.
- [17] G. Arias-Tamargo, D. Rodriguez-Gomez, and J. G. Russo, *Correlation functions in scalar field theory at large charge*. arXiv:1912.01623v2, 2020.
- [18] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 1985.
- [19] P. D. Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*. Springer, 1997.
- [20] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory*. Springer, 2009.
- [21] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*. Institute for Theoretical Physics, 1988.
- [22] D. Sénéchal, *An Introduction to Conformal Field Theory*. Springer, 1997.
- [23] D. Friedan, A. M. Polyakov, and L. Brink, *Conformal Invariance and String Theory*. North-Holland, 1987.
- [24] S. Rychkov, *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in  $D \geq 3$  Dimensions*.

- arXiv:1601.05000, 2016.
- [25] M. Meineri and J. Penedones, *Conformal Field Theory and Gravity EPLF Doctoral Course*.  
epfl.ch/labs/fsl/wp-content/uploads/2022/05/CFTandGravity.pdf, 2019.
- [26] A. Kapustin and V. A. Fateev, *Introduction to Conformal Field Theory*.  
arXiv:1403.1467, 2014.
- [27] G. W. Moore, *Introduction to Conformal Field Theory: Lecture Notes*.  
hep-th/0106003, 2006.
- [28] J. Erdmenger and H. Osborn, *Conserved Currents and the Energy Momentum Tensor in Conformally Invariant Theories for General Dimensions*.  
hep-th/9605009v2, 1996.
- [29] A. P. H. Osborn, *Implications of Conformal Invariance in Field Theories for General Dimensions*.  
hep-th/9307010v2, 1993.
- [30] G. Mussardo, *Statistical Field Theory: An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*.  
Oxford University Press, 2009.
- [31] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*.  
Cambridge University Press, 1996.
- [32] I. R. Klebanov and D. T. Son, *Conformal Field Theory in Condensed Matter Physics*.  
Cambridge University Press, 2014.
- [33] H. Osborn, *Lectures on Conformal Field Theories in more than two dimensions*.  
Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 2019.
- [34] D. Simmons-Duffin, *TASI Lectures on the Conformal Bootstrap*.  
arXiv:1602.07982, 2016.
- [35] L. Alvarez-Gaume, D. Orlando, and S. Reffert, *Selected Topics in the Large Quantum Number Expansion*.  
arXiv:2008.03308, 2021.

- [36] G. Cuomo, *The OPE meets semiclassics*.  
arXiv:2103.01331v2, 2021.
- [37] Y. Nakayama, *Conformal Contact Terms and Semi-Local Terms*.  
arXiv:1906.07914v2, 2019.
- [38] A. Schwimmer and S. Theisen, *Moduli Anomalies and Local Terms in the Operator Product Expansion*.  
arXiv:1805.04202, 2018.
- [39] G. Badel, G. Cuomo, A. Monin, and R. Rattazzi, *The Epsilon Expansion Meets Semiclassics*.  
arXiv:1909.01269, 2019.