

INTRODUCCIÓN A LA SUPERGRAVEDAD

LUIS GERMÁN VARONA GALÁN



Universidad de Oviedo

TRABAJO FIN DE GRADO
PCEO GRADO EN MATEMÁTICAS / GRADO EN FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE OVIEDO

2 de junio de 2024

Tutor: Dr. Adolfo Guarino Almeida

Índice general

Índice de figuras	v
Introducción	1
1. Teoría de campos relativistas	4
1.1. Transformaciones de simetría	4
1.1.1. Simetrías internas	5
1.1.2. Simetrías espacio-temporales	5
1.2. Corrientes de Noether	8
1.3. El campo escalar	9
1.3.1. Simetrías	10
1.4. El campo de Dirac	11
1.4.1. Representaciones espinoriales	11
1.4.2. Fermiones de Dirac	13
1.4.3. Simetrías	14
1.4.4. Álgebras de Clifford	16
1.5. Campos gauge	16
1.5.1. El campo de Maxwell	17
1.5.2. El campo de Yang-Mills	19
2. Teoría de la relatividad general	23
2.1. Postulados de la relatividad general	23
2.2. Entendiendo la gravedad: las ecuaciones de Einstein	25
2.3. Soluciones a las ecuaciones de Einstein: agujeros negros	30
2.4. Los frames: una formulación alternativa de la relatividad general	32
2.4.1. La conexión del espín	32
2.4.2. Espinores en relatividad general	36
2.4.3. Explorando la relatividad general como una teoría gauge	36
3. Supergravedad pura	38
3.1. El gravitino	38
3.1.1. Espacio-tiempo de Minkowski	39
3.1.2. Espacio-tiempo curvo	39

3.2.	Espinores de Majorana	42
3.3.	$\mathcal{N} = 1, D = 4$ SUSY	42
3.4.	La contribución universal de la supergravedad	44
3.4.1.	Acción y variaciones	44
3.4.2.	Superálgebra local	47
3.4.3.	Supergravedad a órdenes superiores en Ψ_μ	49
3.5.	Supergravedad y constante cosmológica	49
3.6.	$D = 11$ SUGRA	52
3.6.1.	Acción y transformaciones	52
3.6.2.	Soluciones clásicas: M2-branas y M5-branas	55
4.	Más allá de supergravedad pura	59
4.1.	$\mathcal{N} = 1, D = 4$ SUGRA acoplada a campos de materia	59
4.1.1.	Acción bosónica	59
4.1.2.	Soluciones de fondo	63
4.1.3.	Recuperando el caso de supersimetría global	64
4.2.	Una visión general de la supergravedad extendida	64
4.2.1.	El contenido de campos de la supergravedad extendida en $D = 4$	66
4.3.	Reducción dimensional: obteniendo teorías a partir de $D = 11$ SUGRA	68
4.3.1.	La teoría de Kaluza-Klein	68
4.3.2.	Reducción dimensional sobre S^1	69
4.3.3.	Reducción dimensional sobre T^7	70
4.4.	Una breve introducción a la correspondencia AdS/CFT	71
	Conclusiones	73
	A. Geometría diferencial: la clave para entender el espacio-tiempo	76
A.1.	Variedades diferenciables	76
A.1.1.	Definiciones previas	76
A.1.2.	Espacios tangente y cotangente	77
A.1.3.	Tensores: el lenguaje de la relatividad general	81
A.2.	Conexiones y curvatura	87
A.2.1.	La derivada covariante	87
A.2.2.	Los tensores de la relatividad general	89
	B. El espacio interno de los campos escalares: geometría compleja	91
B.1.	Variedades complejas	91
B.2.	Variedades de Kähler	92
B.2.1.	Curvatura	93
B.2.2.	Vectores de Killing holomorfos	94
	C. Espacios coset: el vínculo entre la geometría y el álgebra	95
C.1.	Grupos cociente	95
C.2.	Espacios coset	95

C.3. Métricas en espacios coset	97
Bibliografía	99

Índice de figuras

2.1. Agujero negro de Reissner-Nordström.	32
2.2. Espacio-tiempo de Minkowski obtenido mediante los frames.	35
3.1. Compactificación de un cilindro.	52
3.2. Agujero negro extremal de R-N con carga eléctrica en $D = 4$ y $D = 11$	58
4.1. Esquema de las diversas teorías.	65
A.1. Esquema de una carta.	77
A.2. Aplicación cambio de coordenadas.	77

Todas las figuras presentes en esta memoria han sido realizadas por el autor utilizando el editor de matemáticas online [Mathcha](#).

Introducción

Contexto histórico

La física teórica de mediados del siglo XX estaba dividida en dos grandes teorías: el *modelo estándar*, que unificaba tres de las cuatro interacciones fundamentales (la electromagnética, la débil y la fuerte), y la *teoría de la relatividad general*, que describía la interacción gravitatoria en términos de la geometría y el contenido del universo. Los experimentos demostraban la eficacia de ambas teorías por separado, por lo que se consideraban como los pilares fundamentales en la descripción del universo. Sin embargo, había un problema, el modelo estándar es una teoría cuántica, mientras que la relatividad general es clásica e incompatible con un tratamiento cuántico debido a la imposibilidad de renormalizarla. Este problema se hace más notorio en ciertas situaciones donde se requiere de ambas teorías, como es el caso de los agujeros negros. Por esta razón, desde mediados del siglo pasado, la física teórica se ha centrado en formular una teoría de *gravedad cuántica* que, para ser consistente con la relatividad general, debía contener una partícula de espín 2 encargada de mediar las interacciones gravitatorias, el aclamado *gravitón*.

El modelo estándar está formulado en el marco de las *teorías gauge*, cuyo fundamento son las *simetrías gauge*, un tipo de simetrías locales. Sin embargo, a pesar de describir de manera precisa el comportamiento de las partículas elementales y sus interacciones, el modelo estándar no proporciona una explicación para ciertos fenómenos observados en la naturaleza, como la existencia de materia oscura fría en el universo, la masa de los neutrinos o el hecho de que el universo cuente con una mucho mayor cantidad de materia que de antimateria. Surge así en 1974 la *supersimetría*, una teoría cuyo objetivo era extender el modelo estándar con la finalidad de solventar estos problemas.

Las simetrías han constituido siempre un papel esencial en la física, por ejemplo, el modelo estándar establece que las partículas fundamentales poseen una simetría gauge bajo el grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Como se deduce de su propio nombre, la supersimetría no iba a ser diferente, añadiendo así nuevas simetrías al modelo estándar. Estas simetrías no son simetrías gauge, sino que son globales, y establecen una relación directa entre bosones y fermiones, agrupándolos en parejas (bosón, fermión) denominadas supermultipletes. De esta manera, cada partícula elemental tiene su compañero supersimétrico con el que comparte ciertas propiedades.

Debido a la importancia de las teorías gauge en la física del siglo XX, resultó natural proponer una variante de la supersimetría que tratase esta nueva simetría de manera local, obteniendo así

una teoría gauge de supersimetría local. Lo realmente grandioso de esta teoría es que daba lugar de manera natural a la gravedad. Se plantea así en 1976 por Freedman, van Nieuwenhuizen y Ferrara [5], la primera teoría de *supergravedad*, la cual postulaba la existencia de un multiplete $(2, 3/2)$ formado por el gravitón y su compañero supersimétrico, el *gravitino*.

La teoría inicial de supergravedad estaba formulada en dimensión cuatro y con una única supersimetría o gravitino¹ ($\mathcal{N} = 1$), aunque poco después fueron surgiendo teorías en dimensiones mayores y con un mayor número de supersimetrías. Más concretamente, la teoría formulada en dimensión 11 resultó ser esencial pues, además de tratarse de una teoría única (no posee variantes), a partir de ella se pueden obtener el resto de teorías utilizando un procedimiento conocido como *reducción dimensional*. Además, $D = 11$ es la dimensión máxima permitida sin involucrar partículas de espín mayor que 2, las cuales no interaccionan.

Sin embargo, las teorías de supergravedad presentaban también algunos problemas, por lo que, sin dejarlas de lado por completo, se tuvo que continuar con la búsqueda de una teoría de gravedad cuántica apropiada. Se comenzó así a desarrollar la *teoría de cuerdas*, una teoría formulada en 26 dimensiones que pasa de describir las partículas como objetos puntuales a describirlas como objetos unidimensionales denominados *cuerdas*. De esta manera, las diversas partículas conocidas se corresponderían con diferentes vibraciones de una misma cuerda. A finales de siglo, tuvo lugar la primera revolución de las *teorías de supercuerdas*, las cuales incluían la supersimetría en las previas teorías de cuerdas para obtener una teoría en 10 dimensiones. Sin embargo, se trata de cinco teorías diferentes: las de tipo I, IIA y IIB y dos denominadas *heteróticas*. Las tres primeras encuentran sus límites de bajas energías² en teorías de supergravedad con $D = 10$. Motivado por esta equivalencia y con la finalidad de unificar todas estas teorías en lo que cualquier físico teórico desearía, una *teoría del todo*, Edward Witten postuló en 1995 la existencia de una teoría 11-dimensional a la que denominó *teoría M* que unificaría a todas las teorías de cuerdas y cuyo límite de bajas energías se correspondería precisamente con la teoría única de supergravedad en dimensión 11. Por estas razones, la supergravedad junto con la teoría de supercuerdas y la teoría M conforman una parte esencial de la investigación actual en el área de la física teórica.

Estructura del trabajo

El objetivo principal de este trabajo es introducir la supergravedad y plantear las teorías más destacadas de la misma. Como ya se ha mencionado, la supergravedad requiere de conceptos como la teoría de campos, la relatividad general o la supersimetría, lo que hace que sea un tema avanzado dentro de la física teórica. Por esta razón, previo a una formulación de la supergravedad, se debe proporcionar una base sobre la que sustentar las ideas y el formalismo a utilizar. El trabajo se divide en tres grandes bloques, cada uno con unos objetivos diferentes. Los dos primeros capítulos buscan sentar las bases sobre las que poder construir una teoría de supergravedad, para lo que se abordan conceptos como las teorías de campos en el espacio-tiempo

¹El número de supersimetrías de la teoría indica cuántos gravitinos hay, pues cada supersimetría transforma el gravitón en uno de ellos.

²En realidad, la acepción correcta sería no tan altas energías como en las teorías de cuerdas.

de Minkowski o la teoría de la relatividad general. Por otro lado, los dos siguientes capítulos se dedican a introducir la supergravedad y estudiar algunas de sus variantes. El último bloque estaría formado por el anexo, el cual tiene un contenido más matemático y cuyo objetivo es introducir conceptos avanzados cuya comprensión resulta esencial en algún punto del trabajo.

Cabe mencionar que, a pesar de que la supergravedad requiera de una gran cantidad de conocimientos en diversos áreas de la física teórica y las matemáticas, en este trabajo se ha tratado de construir el concepto desde el inicio, realizando así un desarrollo autocontenido. Además, el tratamiento de este trabajo es en todo momento clásico, pues no se hace uso de operadores o estados cuánticos. Se habla indistintamente de campos y de partículas, aunque se debe tener presente que las partículas se obtienen al cuantizar los campos.

Unidades

A lo largo de todo el trabajo se van a utilizar las unidades naturales $\hbar = c = 1$.

Capítulo 1

Teoría de campos relativistas

Las simetrías juegan un papel importante en la física en general y, más concretamente, en la teoría de supergravedad. Por esta razón, como primer objetivo he establecido el describir y conocer las diferentes simetrías y poder utilizarlas para obtener cantidades conservadas mediante el teorema de Noether. Además de esto, en este capítulo se hará un análisis de los campos físicos más sencillos con la finalidad de familiarizarse con las teorías de campos, que se estarán utilizando a lo largo de todo el trabajo. A la hora de estudiar los distintos sistemas, se procederá de la manera usual en física teórica, donde se presenta la acción del sistema

$$S[\psi] = \int d^D x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad (1.1)$$

y se calculan las ecuaciones del movimiento mediante el *principio de mínima acción*, que consiste en igualar a cero las variaciones de la acción: $\delta S = 0$. Cabe mencionar que en este capítulo se trabajará siempre en un espacio-tiempo de Minkowski de D dimensiones, es decir, un espacio-tiempo plano ausente de campo gravitatorio. El convenio utilizado para la métrica de Minkowski es $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1)$. Este capítulo está basado en los capítulos 1 a 4 de [6].

1.1. Transformaciones de simetría

Primero debemos entender a lo que nos referimos cuando hablamos de una simetría del sistema. Una simetría de un sistema que posee una acción dependiente de un campo¹ $S[\psi]$ se define como una transformación del campo $\psi(x) \rightarrow \psi'(x)$ que verifica que, si $\psi(x)$ es una solución a las ecuaciones del movimiento, entonces $\psi'(x)$ también lo es. En algunos casos buscaremos las simetrías como transformaciones que dejan invariante la acción, es decir, que verifican que $S[\psi] = S[\psi']$. Distinguiremos entre dos tipos de simetrías, las simetrías internas y las simetrías espacio-temporales. Dentro de estas simetrías también se puede distinguir entre continuas y discretas o globales y locales.

¹El desarrollo se hace para un campo genérico que denotaremos por ψ , no necesariamente se trata del campo escalar.

1.1.1. Simetrías internas

Las simetrías internas son las transformaciones que afectan únicamente a los campos y no al espacio-tiempo, se relacionan por tanto con los grados de libertad que pueda tener el campo de manera intrínseca. La actuación de una simetría viene dada por un grupo de Lie G^2 y su correspondiente álgebra de Lie \mathfrak{g} . Los distintos álgebras de Lie están determinados por las *constantes de estructura* f_{AB}^C que definen las relaciones de conmutación de los generadores³ $\{t_A : A = 1, \dots, \dim G\}$:

$$[t_A, t_B] = f_{AB}^C t_C, \quad (1.2)$$

las cuales, además, satisfacen la identidad de Jacobi

$$f_{AD}^E f_{BC}^D + f_{BD}^E f_{CA}^D + f_{CD}^E f_{AB}^D = 0. \quad (1.3)$$

La elección de los generadores no es única y cada una de ellas determina una representación del álgebra de Lie, es más, cada álgebra de Lie posee una infinidad de representaciones diferentes entre las que se debe elegir la adecuada en función del campo que se vaya a estudiar. En este trabajo consideraremos siempre representaciones matriciales, es decir, los elementos t_A serán matrices.

Una vez elegida la representación, un elemento cualquiera del álgebra $\Theta \in \mathfrak{g}$ vendrá dado por $\Theta = \theta^A t_A$ con $\theta^A \in \mathbb{R}$ y, a partir de él, se puede obtener un elemento del grupo como

$$U[\Theta] = e^{-\Theta} \in G. \quad (1.4)$$

Por tanto, podemos definir una simetría a partir de un grupo de Lie G como la transformación

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U[\Theta]\psi(x) = e^{-\theta^A t_A} \psi(x), \quad (1.5)$$

donde $\psi(x)$ representa el campo que estamos estudiando. Para obtener la transformación infinitesimal basta truncar la exponencial a orden uno para obtener

$$\delta\psi = -\theta^A t_A \psi. \quad (1.6)$$

1.1.2. Simetrías espacio-temporales

Las simetrías espacio-temporales son las simetrías que se obtienen al realizar transformaciones de las coordenadas que definen el espacio-tiempo. La manera de definir como actúan estas transformaciones es, a rasgos generales, similar a la anterior, aunque se deben tener en cuenta las diferencias ya que en las transformaciones espacio-temporales los generadores t_A no tienen por qué ser matrices.

²Un grupo de Lie es un grupo (algebraico) que además posee estructura de variedad diferenciable.

³Un álgebra de Lie tiene estructura de espacio vectorial, por lo que se puede encontrar una base, a cuyos elementos denominamos generadores del álgebra.

Estas transformaciones se componen de otras dos transformaciones más simples: las transformaciones de Lorentz y las traslaciones, formando así el grupo de Poincaré. Veremos cada caso por separado antes de estudiar la transformación más general.

El grupo de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz se obtienen a partir de un grupo de Lie conocido como el grupo de Lorentz $G = O(D - 1, 1)$ cuya dimensión es $\dim G = \frac{1}{2}D(D - 1)$. Los elementos del grupo se definen como las transformaciones lineales de las coordenadas que preservan la norma de Minkowski, es decir, dadas unas coordenadas x^μ , una transformación de Lorentz actúa como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.7)$$

donde Λ debe satisfacer $\Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$.

Veamos como construir un elemento del grupo de Lorentz a partir de su álgebra. Los generadores del álgebra de Lorentz se indexan siempre utilizando dos subíndices en vez de uno, es decir, la base será $\{\mathcal{M}_{[\mu\nu]} : \mu, \nu = 0, 1, \dots, D - 1\}$. En este caso tenemos D^2 generadores, aunque no todos ellos son independientes. Las siguientes restricciones nos aseguran que el número de generadores linealmente independientes coincide con la dimensión del grupo⁴:

- $\mathcal{M}_{[\mu\mu]} = 0$.
- $\mathcal{M}_{[\mu\nu]} = -\mathcal{M}_{[\nu\mu]}$.

Las relaciones de conmutación que determinan este álgebra son

$$[\mathcal{M}_{[\mu\nu]}, \mathcal{M}_{[\rho\sigma]}] = \eta_{\nu\rho} \mathcal{M}_{[\mu\sigma]} - \eta_{\mu\rho} \mathcal{M}_{[\nu\sigma]} - \eta_{\nu\sigma} \mathcal{M}_{[\mu\rho]} + \eta_{\mu\sigma} \mathcal{M}_{[\nu\rho]} \quad (1.8)$$

y un elemento cualquiera del grupo vendrá dado por

$$U[\Lambda] = e^{\frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} \mathcal{M}_{[\rho\sigma]}}, \quad (1.9)$$

donde los $\lambda^{\mu\nu}$ son números reales que verifican $\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}$. Los elementos $\mathcal{M}_{[\mu\nu]}$ son los generadores del álgebra y tienen distintas representaciones según el campo sobre el que se quiera hacer la transformación. En las secciones posteriores veremos las representaciones utilizadas en los casos más comunes, comenzando por el más sencillo, el campo escalar.

En resumen, una transformación del grupo de Lorentz actúa como

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U[\Lambda] \psi(x) = e^{\frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} \mathcal{M}_{[\rho\sigma]}} \psi(x), \quad (1.10)$$

donde la elección de los generadores $\mathcal{M}_{[\mu\nu]}$ depende del campo ψ . Veamos qué representación se utiliza en el caso más simple, es decir, cuando $U[\Lambda] = \Lambda$:

$$(\mathcal{M}_{[\rho\sigma]})^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu_\rho \eta_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\rho\nu} \implies \Lambda^\mu{}_\nu = e^{\lambda^\mu{}_\nu}. \quad (1.11)$$

⁴La dimensión del grupo y la del álgebra coinciden.

Traslaciones

Una traslación del espacio-tiempo consiste en sumarle una constante a las coordenadas iniciales:

$$x^a \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + c^{\mu}. \quad (1.12)$$

Por lo que la transformación de un campo cualquiera ψ vendrá dada por

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x - c). \quad (1.13)$$

En este caso tenemos un grupo de Lie de dimensión D cuyos generadores del álgebra son los operadores derivada parcial, resultando así en la siguiente transformación:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U[c]\psi(x) = e^{-c^{\mu}P_{\mu}}\psi(x), \quad (1.14)$$

siendo $P_{\mu} = \partial_{\mu}$.

El grupo de Poincaré

Consideramos ahora el grupo de Poincaré que, al ser la unión⁵ del grupo de Lorentz junto con el grupo de traslaciones, obtenemos un grupo de Lie de dimensión $\dim G = \frac{1}{2}D(D + 1)$ cuyos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}_{[\mu\nu]}, \mathcal{M}_{[\rho\sigma]}] &= \eta_{\nu\rho}\mathcal{M}_{[\mu\sigma]} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{M}_{[\nu\sigma]} - \eta_{\nu\sigma}\mathcal{M}_{[\mu\rho]} + \eta_{\mu\sigma}\mathcal{M}_{[\nu\rho]}, \\ [\mathcal{M}_{[\rho\sigma]}, P_{\mu}] &= P_{\rho}\eta_{\sigma\mu} - P_{\sigma}\eta_{\rho\mu}, \\ [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Una vez vista la naturaleza de las transformaciones de Lorentz y las traslaciones basta considerar una transformación que incluya a ambas para obtener la forma más general en la que actúa un transformación espacio-temporal. Consideramos un elemento del grupo de Poincaré como $U[c, \Lambda] = U[\Lambda]U[c]$, el cual proporciona la transformación

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U[c, \Lambda]\psi(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{[\rho\sigma]}}e^{-c^{\mu}P_{\mu}}\psi(x), \quad (1.16)$$

cuya variación correspondiente es

$$\delta\psi = \left(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{[\rho\sigma]} - c^{\mu}P_{\mu} \right) \psi. \quad (1.17)$$

⁵Matemáticamente, el grupo de Poincaré es el producto semidirecto del grupo de Lorentz y el grupo de traslaciones.

1.2. Corrientes de Noether

Una vez vistas las diferentes simetrías, veamos como construir cantidades conservadas a partir de ellas. El *teorema de Noether* postula que, para cada simetría continua que posee un sistema físico, se puede obtener una cantidad física conservada. Para obtener dicha cantidad conservada calcularemos primero una corriente conservada mediante el siguiente método.

Como vimos en la sección anterior, podemos expresar una variación de un campo debida a una transformación de simetría genérica como

$$\delta\psi = \epsilon^A \Delta_A \psi, \quad (1.18)$$

donde ϵ^A son constantes y los Δ_A dependen de la transformación. Puesto que la acción es invariante bajo una transformación de simetría y la acción viene dada por la integral del lagrangiano, se tiene que

$$\delta S = \int d^D x \delta\mathcal{L} = 0, \quad (1.19)$$

lo que nos indica que, bajo una transformación de simetría, la variación del lagrangiano debe ser una divergencia, es decir,

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^A \partial_\mu K^\mu_A. \quad (1.20)$$

Esta deducción se realiza a partir del teorema de Stokes, que nos indica que la integral de una divergencia en un volumen es igual a la integral sobre la frontera, en la cual se puede hacer tender a cero la función, es por esto por lo que se afirma que la integral de una divergencia se anula. Este es un resultado que se estará utilizando en lo que resta de trabajo cuando sea necesario eliminar o añadir términos dentro de una acción.

Por otro lado, la expresión explícita de la variación de un lagrangiano que depende del campo y de sus derivadas primeras viene dada por

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)} \delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} \delta\psi. \quad (1.21)$$

Si suponemos que se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} = 0, \quad (1.22)$$

se puede reescribir (1.21) para obtener

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)} \delta\psi \right] = \epsilon^A \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)} \Delta_A \psi \right]. \quad (1.23)$$

Finalmente, igualando las ecuaciones (1.20) y (1.23) se obtiene

$$\partial_\mu \left[K^\mu_A - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)} \Delta_A \psi \right] = 0, \quad (1.24)$$

lo cual nos indica que

$$J^\mu_A = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)}\Delta_A\psi + K^\mu_A \quad (1.25)$$

es la *corriente conservada* (o *corriente de Noether*) que estábamos buscando, es decir, verifica $\partial_\mu J^\mu_A = 0$ cuando se satisfacen las ecuaciones del movimiento. Se debe tener en cuenta que esta corriente no está determinada de manera exacta, sino que se pueden añadir términos cuya divergencia sea nula. Para que esto ocurra, estos términos deben ser divergencias de tensores antisimétricos, es decir, se puede realizar el cambio

$$J^\mu_A \rightarrow J^\mu_A + \partial_\rho S^{\rho\mu}_A, \quad (1.26)$$

donde $S^{\rho\mu}_A = -S^{\mu\rho}_A$ y esta nueva corriente seguirá siendo una corriente conservada. La posibilidad de poder añadir estos términos nos permite modificar la corriente conservada para que se satisfagan ciertas condiciones necesarias, ya sean de simetría⁶ o, como se verá más adelante, de invarianza gauge.

Una vez calculada la corriente de Noether, se puede obtener su *cantidad conservada* correspondiente integrando la componente temporal de la corriente en un volumen espacial V :

$$Q_A = \int_V dx^{D-1} J^0_A. \quad (1.27)$$

De esta manera, se obtiene una cantidad Q_A , directamente relacionada con la corriente J^μ_A , que se mantiene constante a lo largo del tiempo. Un ejemplo de corriente conservada es el tensor de energía momento, el cual resulta de la simetría traslacional y cuya cantidad conservada correspondiente son la energía ($A = \nu = 0$) y el momento ($A = \nu = 1, 2, \dots, D - 1$).

1.3. El campo escalar

El sistema más sencillo a estudiar en teoría de campos es el campo escalar, representado por una función real⁷ $\phi(x)$ que depende de las coordenadas del espacio-tiempo. Físicamente, un campo escalar se utiliza para representar partículas de espín nulo, como es el caso del bosón de Higgs. El objetivo de esta sección es estudiar las simetrías que posee un campo escalar y las corrientes conservadas que generan.

El sistema que se va a estudiar estará formado por un conjunto de n campos escalares reales $\phi^i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) que viven en un espacio-tiempo de Minkowski de D dimensiones con coordenadas x^μ ($\mu = 0, \dots, D - 1$). La acción que gobierna el sistema es

$$S = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \delta_{ij} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j - V(\phi^i) \right], \quad (1.28)$$

donde V es un potencial genérico dependiente de los campos. A partir de la acción se obtienen

⁶Como veremos más adelante, en relatividad general el tensor de energía momento debe ser simétrico.

⁷También puede representarse mediante una función compleja, cuyos resultados son muy similares a los del caso real. La diferencia principal es que se obtiene una simetría interna más, la del grupo $U(1)$.

las ecuaciones del movimiento

$$\square \phi^i - \frac{\partial V}{\partial \phi^i} = 0, \quad (1.29)$$

donde el d'alembertiano es $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Como ejemplo de un potencial comúnmente utilizado se tiene $V(\phi^i) = \frac{1}{2} m^2 \phi^i \phi^i$, el cual da lugar a la ecuación de Klein-Gordon:

$$\square \phi^i(x) = m^2 \phi^i(x). \quad (1.30)$$

1.3.1. Simetrías

La acción de simetría más simple consiste en realizar una “rotación” de los n campos, la cual se implementa como una simetría interna que actúa mediante el grupo especial ortogonal $SO(n)$, cuya dimensión es $\frac{1}{2}n(n-1)$. Los elementos de este grupo son matrices $n \times n$ que verifican

$$R^T R = \mathbb{1} \quad \text{y} \quad \det R = 1. \quad (1.31)$$

La expresión explícita de la transformación viene dada por

$$\phi^i(x) \rightarrow \phi'^i(x) = R^i_j \phi^j(x), \quad (1.32)$$

la cual, bajo la condición de que $\delta V = 0$, deja invariante el lagrangiano y, por tanto, la acción. Para esta simetría se está considerando un espacio en el que viven los n campos y se están haciendo rotaciones sobre ese espacio, por lo que se considerarán los generadores que determinan las rotaciones sobre los planos de dicho espacio. Para el plano determinado por los ejes ab se tiene la matriz

$$(r_{[ab]})^i_j = \delta_a^i \delta_b^j - \delta_b^i \delta_a^j, \quad (1.33)$$

cuya corriente conservada viene dada por

$$J^\mu_{[ab]} = -\partial^\mu \phi_i (r_{[ab]})^i_j \phi^j = \phi_a \partial^\mu \phi_b - \phi_b \partial^\mu \phi_a. \quad (1.34)$$

Nota. Los índices del campo ϕ^i se “suben” y se “bajan” con la delta de Kroenecker, es decir, $\phi_i = \delta_{ij} \phi^j$.

Respecto a las simetrías espacio-temporales, las transformaciones de Lorentz deben satisfacer

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (1.35)$$

para que se verifique $\phi(x) = \phi'(x')$, que es la condición de invarianza de los escalares bajo transformaciones de Lorentz. Se comprueba en este caso que, utilizando la representación dada por los operadores diferenciales

$$\mathcal{M}_{[\rho\sigma]} = L_{[\rho\sigma]} \equiv x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho \quad (1.36)$$

se obtiene la transformación buscada:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U[\Lambda]\phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x), \quad (1.37)$$

donde $U[\Lambda]$ se halló en (1.9). Añadiendo ahora las traslaciones, las variaciones infinitesimales del campo son las obtenidas en (1.17):

$$\delta\phi^i = \left(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}L_{[\rho\sigma]} - c^\mu\partial_\mu \right) \phi^i. \quad (1.38)$$

Como ya se mencionó, la corriente de Noether correspondiente a la simetría bajo traslaciones es el tensor de energía-momento, cuya expresión para el campo escalar se calcula mediante la ecuación (1.25) y viene dado por

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu\phi^i\partial_\nu\phi^i + \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}. \quad (1.39)$$

Se comprueba fácilmente que se trata de un tensor simétrico, luego no será necesario añadir términos del tipo $S^{\rho\mu}{}_A$. Por otro lado, al calcular la corriente conservada correspondiente a las transformaciones de Lorentz se obtiene el tensor antisimétrico

$$M^\mu{}_{[\rho\sigma]} = x_\rho T^\mu{}_\sigma - x_\sigma T^\mu{}_\rho, \quad (1.40)$$

el cual, efectivamente, se conserva ($\partial_\mu M^\mu{}_{[\rho\sigma]} = 0$) debido a que el tensor de energía-momento $T^\mu{}_\nu$ se conserva y es simétrico, razón por la cual $T^\mu{}_\nu$ debe ser simétrico, entre otras.

1.4. El campo de Dirac

Como se acaba de comprobar, el estudio de las partículas de espín nulo no requiere de mucho trabajo. En esta sección se introducirá una estructura más compleja: las partículas masivas de espín 1/2. En dimensión 4, estas partículas se representan mediante el campo de Dirac, un vector columna $\Psi_\alpha(x)$ de dimensión 4 cuyas entradas son funciones complejas. Matemáticamente, este campo representa una partícula que transforma bajo *representaciones espinoriales* del grupo de Lorentz. Como primer paso en el estudio de este campo veremos de qué se tratan estas representaciones espinoriales para poder entender la física que hay tras el campo de Dirac.

1.4.1. Representaciones espinoriales

Como se mencionó en la sección 1.1.2, el grupo de Lorentz posee diversas representaciones, en este caso nos centraremos en un tipo de representaciones que se basan en el hecho de que el álgebra de Lie del grupo propio⁸ de Lorentz en $D = 4$ verifica: $\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Estas representaciones se denotan mediante el par de enteros o semienteros (j, j') ⁹ y su dimensión

⁸El grupo de Lorentz, al ser un grupo de Lie, tiene estructura de variedad diferenciable y, por tanto, topológica. De esta manera, se divide en cuatro componentes conexas, una de las cuales es el grupo propio de Lorentz, que viene determinado por las matrices $\Lambda \in O(D-1, 1)$ tales que $\det \Lambda = 1$ y $\Lambda^0{}_0 \geq 1$.

⁹Siempre que $j \neq j'$, las representaciones (j, j') y (j', j) no son equivalentes. Dichas representaciones se denominan conjugadas.

es $(2j + 1)(2j' + 1)$. Así, las representaciones de dimensión menor ($dim = 2$), denominadas *representaciones fundamentales*, son $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ y es importante comenzar estudiándolas antes de continuar con las de dimensión 4.

Representaciones fundamentales

A partir de las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

se definen los siguientes vectores cuyas entradas son matrices 2×2 (conocidas como matrices de Weyl):

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}^\mu = (-\mathbf{1}, \sigma_i), \quad \bar{\sigma}_\mu = \sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma_i). \quad (1.42)$$

De esta manera, los generadores del álgebra en las representaciones fundamentales $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ son

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu), \\ \bar{\sigma}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Fermiones de Weyl

Antes de comenzar con el estudio del campo de Dirac veremos que existen campos más simples, los campos de Weyl $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$. Estos campos transforman bajo las representaciones $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$, respectivamente, y son, por tanto, vectores columna de dimensión 2 con entradas complejas. Los campos de Weyl $\psi_L(x)$ y $\psi_R(x)$ describen partículas sin masa y con espín $\frac{1}{2}$, cada uno con una helicidad¹⁰ determinada y se denominan *fermiones de Weyl*. Inicialmente, los neutrinos eran considerados fermiones de Weyl, pues se pensaba que no tenían masa, sin embargo, tras años de experimentos se descubrió que esto no era cierto y se descartó la idea inicial. En la actualidad no se conoce la existencia de ninguna partícula fundamental que sea un fermión de Weyl.

La acción que describe el comportamiento de los fermiones de Weyl es:

$$\begin{aligned} S[\psi_L] &= - \int d^4x \, i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L, \\ S[\psi_R] &= - \int d^4x \, i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R, \end{aligned} \quad (1.44)$$

que da lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L(x) &= 0, \\ \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

¹⁰La helicidad es la proyección del espín en la dirección del movimiento.

Las transformaciones de simetría de los fermiones de Weyl se obtienen a partir de los generadores del álgebra en las representaciones fundamentales como en la ecuación 1.9:

$$\begin{aligned}\psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} \psi_L(\Lambda^{-1}x), \\ \psi_R(x) &\rightarrow \psi'_R(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}} \psi_R(\Lambda^{-1}x).\end{aligned}\tag{1.46}$$

Representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Veamos ahora cómo se construye la representación de dimensión 4, que es la que se utilizará para el campo de Dirac. Las matrices que se emplean en esta representación son aquellas que satisfacen la relación del *álgebra de Clifford* asociado al grupo de Lorentz:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}.\tag{1.47}$$

Las matrices que satisfacen el álgebra de Clifford existen para cualquier valor de D , además, siempre existe una representación bajo la cual γ^0 es anti-hermítica y γ^i ($i = 1, \dots, D - 1$) es hermítica, denominada *representación hermítica*. La representación que vamos a utilizar es una representación hermítica en $D = 4$ denominada representación de Weyl, puesto que se utilizan las matrices de Weyl. Definimos así las matrices

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\tag{1.48}$$

y los generadores del álgebra de Lorentz

$$\Sigma^{[\mu\nu]} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].\tag{1.49}$$

Nota. Por construcción de las matrices gamma y, puesto que las matrices σ^μ son vectores, se subirán y bajarán los índices de las matrices gamma de la manera usual: $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$.

En esta representación, un elemento del grupo de lorentz viene dado por

$$S[\Lambda] = e^{\frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}\Sigma_{[\mu\nu]}}\tag{1.50}$$

y satisface la identidad

$$\Lambda^\mu{}_\nu S[\Lambda]\gamma^\nu S[\Lambda]^{-1} = \gamma^\mu.\tag{1.51}$$

Puesto que γ^μ es una matriz, en realidad tiene tres índices $(\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta$. Teniendo esto en cuenta, esta identidad nos está diciendo que la matriz-vector gamma es invariante bajo transformaciones en sus tres índices al considerar el lado izquierdo de la ecuación como la matriz obtenida al transformar γ^μ .

1.4.2. Fermiones de Dirac

El campo de Dirac describe las partículas denominadas *fermiones de Dirac*, también de espín $\frac{1}{2}$, aunque estos sí que poseen masa. Además, estas partículas son diferentes a su antipartícula. En

caso contrario, se trataría de *fermiones de Majorana*, el último tipo de fermiones. De manera más precisa, al cuantizar esta teoría se obtienen los estados de los pares partícula antipartícula con misma masa y espín $1/2$. Todos los fermiones del modelo estándar son fermiones de Dirac a excepción de los neutrinos, los cuales aún no se ha confirmado si son fermiones de Dirac o de Majorana.

La acción para el campo de Dirac es

$$S[\Psi] = - \int d^4x \bar{\Psi} [\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi, \quad (1.52)$$

donde se ha introducido el adjunto de Dirac $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger i\gamma^0$ para que la acción sea invariante Lorentz. Al aplicar el principio de mínima acción se obtienen dos ecuaciones como resultado de la independencia de las variaciones de Ψ y $\bar{\Psi}$:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi &= 0, \\ \bar{\Psi}(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) &= 0, \end{aligned} \quad (1.53)$$

donde la derivada parcial $\overleftarrow{\partial}_\mu$ actúa como una derivada parcial común, pero sobre el término a su izquierda. A la primera de las ecuaciones se la conoce como la *ecuación de Dirac*.

Nota. A menudo $\gamma^\mu \partial_\mu$ se denota por $\not{\partial}$ y se denomina operador de Dirac. Podemos reescribir entonces la ecuación de Dirac como:

$$\not{\partial}\Psi(x) = m\Psi(x). \quad (1.54)$$

Aplicando de nuevo el operador de Dirac nos damos cuenta de que, por la propiedad del álgebra de Clifford (1.47), se obtiene que $\not{\partial}^2 = \square \mathbb{1}$ y, por tanto, cada una de las componentes del campo de Dirac satisface la ecuación de Klein-Gordon, teniendo así como soluciones ondas planas.

Por último, cabe mencionar que a pesar de que el campo de Weyl describe partículas sin masa y el campo de Dirac con masa, se puede construir un campo de Dirac a partir de los dos campos de Weyl como

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

dando lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L(x) &= m\psi_R(x), \\ \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) &= m\psi_L(x), \end{aligned} \quad (1.56)$$

en las cuales se acoplan ambos campos para poder describir el fermión masivo.

1.4.3. Simetrías

El grupo que genera las simetrías internas para el campo de Dirac es $U(1)$ mediante la transformación $\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{i\theta} \Psi(x)$, puesto que en la acción, la exponencial de Ψ se cancela con la

de $\bar{\Psi}$. Este grupo tiene dimensión uno, por lo que, considerando como único generador $\Delta_A = i$, la corriente conservada es el vector

$$J^\mu = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (1.57)$$

Utilizando que $(\gamma^0)^{-1} = -\gamma^0$, se tiene que la componente temporal es $J^0 = \Psi^\dagger\Psi > 0$, dando lugar a la cantidad conservada $Q = \int_V dx^3 \Psi^\dagger\Psi$, que representa la carga eléctrica contenida en el volumen V .

Al calcular el tensor de energía momento como la corriente conservada generada por la simetría traslacional se obtiene

$$T_{\mu\nu} = \bar{\Psi}\gamma_\mu\partial_\nu\Psi + \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (1.58)$$

el cual no es simétrico, por lo que se deberá modificar. Antes de aplicar el método mencionado en la sección 1.2, reescribiremos el lagrangiano de manera que la acción no se vea afectada, para lo que se hace el cambio $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{1}{2}\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)$. Reagrupando términos y utilizando el operador derivada antisimétrica

$$A\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu B = A\partial_\mu B - A\overset{\leftarrow}{\partial}_\mu B \quad (1.59)$$

la acción se reduce a

$$S[\Psi] = - \int d^4x \left(\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \right). \quad (1.60)$$

La ventaja de esta manipulación es que este nuevo lagrangiano es hermítico. El tensor de energía-momento que nos proporciona esta acción es

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu\Psi + \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{L}}, \quad (1.61)$$

el cual sigue sin ser simétrico, por lo que le añadiremos la divergencia del término antisimétrico $S_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{4}\bar{\Psi}\{\Sigma_{\rho\mu}, \gamma_\nu\}\Psi$. El tensor final obtenido es

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\bar{\Psi}\left(\gamma_\mu\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu + \gamma_\nu\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\right)\Psi + \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{L}}, \quad (1.62)$$

el cual sí que es simétrico y además se conserva en sus dos índices.

Veamos por último como actúan las simetrías del grupo de Lorentz. El campo de Dirac, al no contar con índices tensoriales, es similar en cierta manera al campo escalar, sin embargo, debido a que transforma bajo representaciones espinoriales del grupo de Lorentz, veremos que hay un término más en su transformación de simetría, más concretamente el obtenido en (1.50). De esta manera, la transformación resultante es

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = S[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}x) = e^{\frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}\Sigma_{[\mu\nu]}}\Psi(\Lambda^{-1}x). \quad (1.63)$$

Utilizando la relación (1.51) se comprueba que si $\Psi(x)$ es una solución a la ecuación de Dirac, entonces $\Psi'(x)$ también lo será. Además, al calcular su corriente conservada se obtiene la misma expresión que en (1.40).

1.4.4. Álgebras de Clifford

Antes de concluir con esta sección cabe mencionar que, aunque este desarrollo se haya hecho explícitamente para dimensión $D = 4$, el álgebra de Clifford tiene representaciones para cualquier valor de D y las ecuaciones y relaciones obtenidas serían equivalentes. Para dimensión genérica D , las matrices del álgebra en la representación utilizada tienen dimensión $2^{\lfloor D/2 \rfloor} \times 2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ ¹¹ y, por tanto, los espinores están representados por vectores de dimensión $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$.

En esta sección veremos algunas ideas y definiciones que serán de utilidad más adelante. Comenzamos definiendo los elementos del álgebra de Clifford de rango r como los productos anti-simétricos

$$\gamma^{\mu_1 \dots \mu_r} = \gamma^{[\mu_1 \dots \mu_r]}. \quad (1.64)$$

Mediante esta fórmula obtenemos la expresión explícita de los elementos de rangos dos y tres:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \\ \gamma^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu), \end{aligned} \quad (1.65)$$

y a partir de los elementos de rango dos obtenemos una representación del álgebra de Lie del grupo $SO(D-1, 1)$ tomando $\Sigma_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}$, que es la manera en la que obtuvimos los generadores (1.49). Los elementos de rango tres cobrarán importancia en la sección 3.1 junto con la definición de un nuevo campo espinorial.

1.5. Campos gauge

En la sección anterior hemos comprobado que el campo de Dirac posee una simetría interna bajo el grupo $U(1)$, el cual añade una fase al campo que deja invariante la acción. Esta simetría es una simetría global, es decir, si realizamos una transformación bajo dicho grupo, la estamos realizando de la misma manera en todos los puntos del espacio-tiempo. A raíz de esto, podemos plantearnos qué ocurre si modificamos dicha transformación para que deje de ser una transformación global y pase a ser local, es decir, que en cada punto del espacio-tiempo tengamos un cambio de fase distinto. Este planteamiento da lugar a una serie de nuevos conceptos que se deben introducir para que la teoría se mantenga invariante, entre los cuales se encuentra un campo vectorial $A_\mu(x)$, que resulta ser el campo que representa los fotones en el electromagnetismo. De esta manera, la nueva teoría que hemos obtenido no está describiendo únicamente fermiones sino que también incluye a los fotones. Esta teoría es el ejemplo más básico de una *teoría gauge* y se conoce como *electrodinámica*.

La manera de proceder descrita en el párrafo anterior no es arbitraria, tiene una base matemática que hace uso de estructuras complejas como los haces fibrados, y es de gran importancia en física teórica ya que es el fundamento sobre el que se sustenta la formulación del modelo estándar de las partículas elementales.

¹¹Dado un número $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ denota la parte entera de x .

Tenemos por tanto un tipo de teorías, denominadas teorías gauge, cuyo objetivo es modificar una simetría interna global de un sistema para que pase a actuar de manera local. A estas nuevas simetrías locales se las conoce como *simetrías gauge* y los campos que se deben introducir para mantener la invarianza se denominan *campos gauge*. Estos campos describen partículas sin masa y con espín entero (bosones, razón por la que también se los conoce como *bosones gauge*) y se necesitarán tantos como dimensión tenga el grupo que describe la simetría interna. De esta manera, una teoría gauge debe tener unos campos gauge que medien la simetría y unos campos que describan partículas con masa, los cuales sufran la simetría global inicial. Por otro lado, dentro de las teorías gauge distinguimos entre teorías gauge abelianas y no abelianas en función de si el grupo que describe la simetría interna es o no abeliano. A continuación se presentan los ejemplos más notorios para ambos casos.

1.5.1. El campo de Maxwell

Comenzamos estudiando la teoría gauge del grupo abeliano $U(1)$, la electrodinámica, mediante la cual se describe la interacción entre las partículas con carga¹² eléctrica y los fotones. Nuestro punto de partida es la simetría interna generada por el grupo $U(1)$ en el campo de Dirac. Puesto que buscamos modificar la simetría para que actúe de manera local, el parámetro θ pasará a ser una función de las coordenadas, dando lugar a la transformación

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{ieq\theta(x)}\Psi(x), \quad (1.66)$$

donde se ha añadido el parámetro $q \in \mathbb{Q}$, de modo que si e es la carga del electrón, entonces el número eq representa la carga eléctrica del campo. Bajo este cambio, se comprueba que $\Psi'(x)$ no satisface las ecuaciones del movimiento, por lo que deberán ser modificadas para mantener la invarianza. Se introduce así el *campo gauge de Maxwell* o *potencial vector* $A_\mu(x)$ como un campo vectorial cuya transformación viene dada por

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x), \quad (1.67)$$

donde e , la carga del electrón, representa la constante de acoplo electromagnética. El campo de Maxwell describe un bosón sin masa el cual juega el papel de mediador en las interacciones electromagnéticas, es decir, un fotón. Este campo cobra importancia a la hora de definir un nuevo operador, denominado *derivada covariante*:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieqA_\mu(x), \quad (1.68)$$

el cual utilizamos para escribir la versión *invariante gauge* de la ecuación de Dirac:

$$(\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi(x) = 0. \quad (1.69)$$

¹²Las interacciones mediadas por un campo tienen lugar entre partículas que posean la carga correspondiente a ese campo. En este caso, el campo de Dirac representa partículas cargadas eléctricamente.

Consideremos ahora un fotón aislado cuya evolución satisface las ecuaciones del movimiento $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ y la identidad de Bianchi

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0, \quad (1.70)$$

que en conjunto forman las ecuaciones de Maxwell en notación relativista. El tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ se obtiene a partir del cálculo del conmutador de las derivadas covariantes: $[D_\mu, D_\nu]\Psi = -ieqF_{\mu\nu}\Psi$, dando lugar al tensor antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.71)$$

Observamos que, al tomar la divergencia de las ecuaciones del movimiento: $\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$, se obtiene una relación entre las D ecuaciones, por lo que únicamente se tienen $D - 1$ ecuaciones independientes. La relación anterior se denomina identidad de Noether y surge cuando el lagrangiano presenta degeneración, es decir, cuando no se pueden obtener sus soluciones de manera exacta. En este caso, esto es debido a la simetría gauge del lagrangiano. Para solventar este problema se realiza lo que se conoce como *fixar el gauge*, que consiste en imponer una relación sobre las componentes de A_μ para eliminar la ambigüedad. Se pueden imponer diferentes relaciones sobre el campo gauge, un ejemplo es la condición de Coulomb $\partial^i A_i = 0$, la cual no es covariante. En caso de querer obtener una condición covariante, se puede utilizar la condición de Lorenz $\partial^\mu A_\mu = 0$, aunque esta no fija el gauge por completo, ya que se sigue teniendo invarianza gauge para las funciones $\theta(x)$ que verifiquen la ecuación de ondas $\square\theta(x) = 0$.

Para concluir con el campo de Maxwell, veamos cuál es la acción que describe la electrodinámica, para lo que consideraremos un sistema en el que los fotones interactúan con el campo de Dirac. Sumando ambas contribuciones a la acción se obtiene

$$S[A_\mu, \Psi] = \int d^D x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\Psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \right], \quad (1.72)$$

cuyas variaciones dan lugar a la ecuación de Dirac (1.69) (y su versión conjugada) y a la ecuación

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + ieq\bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi = 0. \quad (1.73)$$

Utilizando la corriente conservada obtenida para la simetría interna global del campo de Dirac (1.57) podemos reescribir esta ecuación como $\partial^\mu F_{\mu\nu} = -eqJ_\nu$, donde observamos que, efectivamente, las fuentes del campo electromagnético son las partículas cargadas eléctricamente descritas mediante el campo de Dirac.

Al calcular el tensor de energía-momento nos encontramos en una situación similar al campo de Dirac, donde nuestro tensor no era simétrico. Para solventar este problema se procede de manera equivalente al caso mencionado; modificando el lagrangiano y añadiendo términos del tipo $\partial^\rho S_{\rho\mu\nu}$. Como resultado se obtiene el tensor simétrico

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \Psi + \eta_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}}, \quad (1.74)$$

donde $\tilde{\mathcal{L}}$ es la versión invariante gauge del lagrangiano modificado utilizado para el campo de Dirac (1.60) más el término electromagnético $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{D}_\mu\Psi + m\bar{\Psi}\Psi. \quad (1.75)$$

1.5.2. El campo de Yang-Mills

De manera muy similar, aunque más general, al caso anterior, se tienen las teorías gauge no abelianas, cuyos grupos de simetría están determinados por las constantes de estructura de los generadores del álgebra (1.2), las cuales en el caso abeliano son simplemente nulas. Al aplicar estas teorías para generalizar el caso anterior a grupos de Lie simples y compactos se obtiene la *Teoría de Yang-Mills*.

Como primer paso, dado un grupo de Lie simple y compacto cualquiera G con generadores $\{t_A : A = 1, \dots, \dim G\}$, vamos a obtener las variaciones infinitesimales que sufren el campo de Dirac, su adjunto y un conjunto de $\dim G$ campos (no necesariamente escalares) ϕ^A . La elección de estudiar estas variaciones concretas cobrará sentido más adelante. Para los dos primeros campos vamos a considerar que transforman bajo una cierta representación R de \mathfrak{g} , por lo que formarán dos tuplas $\Psi^i, \bar{\Psi}_i$ con $i = 1, \dots, \dim R$. Además, la representación deberá ser compleja, antihermítica y con traza nula, es decir, $(t_A)^\dagger = -t_A$ y $\text{tr}(t_A) = 0$. Por otro lado, el campo ϕ^A transformará bajo una representación real conocida como *representación adjunta*, cuya dimensión es igual a la del grupo y satisface $(t_A)^B_C = f_{AC}^B$. Teniendo esto en cuenta y utilizando la ecuación (1.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= -\theta^A t_A \Psi, \\ \delta\bar{\Psi} &= \bar{\Psi} \theta^A t_A, \\ \delta\phi^A &= \theta^C f_{BC}^A \phi^B. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Nota. Se están omitiendo los índices de Ψ por simplicidad, de otra manera escribiríamos $\delta\Psi^i = -\theta^A (t_A)^i_j \Psi^j$.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el campo de Maxwell, establecemos que los parámetros sean funciones de las coordenadas $\theta^A(x)$ y que, para $A = 1, \dots, \dim G$, los campos gauge transformen como

$$\delta A_\mu^A(x) = \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^A(x) + f_{BC}^A A_\mu^B(x) \theta^C(x), \quad (1.77)$$

donde la constante de acoplo de Yang-Mills g mide la fuerza de las interacciones (es el análogo a la carga eléctrica e utilizada en caso abeliano). Continuando con el objetivo de encontrar unas ecuaciones del movimiento y una acción invariantes gauge introducimos la derivada covariante

actuando sobre los diversos campos:

$$\begin{aligned}
D_\mu \Psi^i &= (\partial_\mu + g t_A A_\mu^A) \Psi^i, \\
D_\mu \bar{\Psi}_i &= \bar{\Psi}_i (\overleftarrow{\partial}_\mu - g t_A A_\mu^A), \\
D_\mu \phi^A &= \partial_\mu \phi^A + g f_{BC}^A A_\mu^B \phi^C,
\end{aligned} \tag{1.78}$$

mediante la cual calculamos el tensor de energía momento como $[D_\mu, D_\nu] \Psi^i = g F_{\mu\nu}^A t_A \Psi^i$, obteniendo así

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C. \tag{1.79}$$

Se comprueba que se trata de un tensor antisimétrico, sin embargo, al contrario que para el caso abeliano, este tensor no es invariante gauge, lo que presenta la primera de las diferencias entre ambas teorías. Debido a esto, podemos calcular su variación bajo las transformaciones gauge:

$$\delta F_{\mu\nu}^A = \theta^C f_{BC}^A F_{\mu\nu}^A. \tag{1.80}$$

Comparándolo con la última ecuación de (1.76), observamos que el conjunto de campos $F_{\mu\nu}^A$ ($A = 1, \dots, \dim G$) transforma bajo la representación adjunta.

Por último, debemos determinar la contribución al lagrangiano del término cinético de los campos gauge A_μ^A , el cual viene dado por

$$-\frac{1}{4} K_{AB} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^B, \tag{1.81}$$

donde $K_{AB} = f_{AC}^D f_{BD}^C$ es la *métrica de Killing-Cartan*, la cual utilizamos para subir y bajar índices referidos al grupo de Lie. Para que la teoría funcione y no de lugar a energías negativas, la matriz K_{AB} debe ser definida positiva, además, buscamos también que no haya términos mezclados, por lo que resulta que $K_{AB} = \delta_{AB}$. Estas condiciones se satisfacen debido a la condición inicial de que el grupo de simetría sea simple y compacto. También es importante notar que no podemos añadir términos de masa del tipo $m \delta_{AB} A_\mu^A A^{B\mu}$ debido a que éstos no son invariantes gauge, lo que nos confirma que los bosones gauge representan partículas sin masa como ya se había comentado anteriormente.

Una vez conocidos todos los términos del lagrangiano, presentamos la acción de Yang-Mills como

$$S_{YM}[A_\mu^A, \Psi] = \int d^D x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu}_A - \bar{\Psi}_i (\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi^i \right], \tag{1.82}$$

la cual da lugar a las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned}
(\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi^i &= 0, \\
D^\mu F_{\mu\nu}^A &= -J_\nu^A.
\end{aligned} \tag{1.83}$$

donde la corriente $J_\nu^A = \eta_{\nu\mu} \delta^{AB} J_B^\mu$ se halla a partir de la versión no abeliana de (1.57): $J_A^\mu = -\bar{\Psi} \gamma^\mu t_A \Psi$, y la derivada covariante de $F_{\mu\nu}^A$ viene dada por la última ecuación de (1.78) debido a que este transforma bajo la representación adjunta.

Una vez hecho el desarrollo y puesto que la teoría de Yang-Mills busca ser una generalización de la electrodinámica, resulta interesante comprobar que, efectivamente, al tomar $G = U(1)$ y $t_A = -i$ recuperamos las expresiones presentadas en la sección anterior.

Caso $G = SU(N)$

Vamos a concluir nuestro estudio de la teoría de Yang-Mills examinando su caso más representativo, el grupo $SU(N)$. Este grupo tiene dimensión $N^2 - 1$ y está compuesto por las matrices $N \times N$ unitarias con determinante igual a 1. La representación que utilizamos para el álgebra de Lie es la denominada *representación fundamental* y es aquella en la que los generadores matriciales t_A tienen la menor menor dimensión posible, en este caso $N \times N$. Estos generadores están determinados excepto por un factor de normalización, el cual fijamos imponiendo la condición

$$\text{tr}(t_A t_B) = -\frac{1}{2} \delta_{AB}. \quad (1.84)$$

Si denotamos una matriz del grupo por $U \in SU(N)$, la matriz de la transformación gauge $U(x)$ determinará una matriz U diferente en cada punto del espacio-tiempo, obteniendo así:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow U(x)\Psi(x), \\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}(x)U^{-1}(x). \end{aligned} \quad (1.85)$$

La notación utilizada para este caso consiste en agrupar los campos en un único elemento (que será una matriz) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi^A t_A, \\ A_\mu &= A_\mu^A t_A, \end{aligned} \quad (1.86)$$

de donde se obtiene el tensor de Faraday

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^A t_A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]. \quad (1.87)$$

Las transformaciones gauge de estos nuevos campos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow U\Phi U^{-1}, \\ A_\mu &\rightarrow UA_\mu U^{-1} + \frac{1}{g}U\partial_\mu U^{-1}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Además, $F_{\mu\nu}$ transforma bajo la representación adjunta, es decir, de forma análoga al campo Φ , como ya se había comprobado. Las derivadas covariantes se obtienen a partir de (1.78) y resultan en:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &= (\partial_\mu + gA_\mu)\Psi, \\ D_\mu \bar{\Psi} &= \bar{\Psi}(\overleftarrow{\partial}_\mu - gA_\mu), \\ D_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi + g[A_\mu, \Phi]. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Finalmente, la expresión de la acción se escribe de manera muy similar a (1.82), salvo por el factor de normalización (1.84), obteniendo así:

$$S_{YM}[A_\mu, \Psi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - \bar{\Psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \right]. \quad (1.90)$$

Esta acción es la que se utiliza para describir la contribución correspondiente a las interacciones fundamentales en el modelo estándar: la interacción electromagnética, la interacción débil y la interacción fuerte. Las partículas que interaccionan son los fermiones y las cargas correspondientes a cada interacción son la carga eléctrica, el sabor y el color, respectivamente, cada una con su familia de bosones que media las interacciones: el fotón, los bosones W^+ , W^- , Z y ocho gluones. Para describir de manera simultánea las tres interacciones el modelo estándar utiliza el grupo de Lie

$$G = SU(3) \times SU(2) \times U(1), \quad (1.91)$$

donde $SU(3)$ describe la interacción fuerte y $SU(2) \times U(1)$ la electrodébil.

Capítulo 2

Teoría de la relatividad general

En el primer capítulo hemos trabajado con los campos más básicos y comunes, lo que nos ha servido para familiarizarnos con las teorías de campos formuladas en el espacio-tiempo de Minkowski. A raíz de todo este desarrollo previo, podemos hacernos una idea de cuál será el siguiente objeto de estudio: un campo tensorial $g_{\mu\nu}$, el cual represente una partícula de espín 2. Estamos hablando de nada menos que de la *teoría de la relatividad general* (RG), la teoría de campos cuyo fundamento es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el cual se identifica con el campo gravitacional.

Sin embargo, aunque esta intuición es correcta, el camino que debemos seguir para desarrollar esta teoría no es tan sencillo. La RG es una teoría que postula que la gravedad se describe en términos geométricos, es decir, no es una fuerza como se pensaba desde su descubrimiento por Newton, sino que sus efectos se deben a la geometría variable del espacio-tiempo, estableciendo así una relación entre la curvatura del espacio-tiempo (gravedad) y la materia o radiación presente en el mismo. Por ende, abandonamos el ya conocido espacio-tiempo de Minkowski para considerar uno cuya geometría sea no trivial. Para afrontar este nuevo marco teórico debemos adentrarnos en una rama de las matemáticas conocida como *geometría diferencial*, la cual será el formalismo mediante el que describiremos esta teoría. He dedicado el apéndice A para introducir todos estos conceptos matemáticos previos al estudio de la RG con el objetivo de no entorpecer el desarrollo físico del trabajo. Este capítulo, junto con el apéndice A, está basado en los capítulos 2 a 4 de [14], las clases de relatividad general impartidas por el profesor Adolfo Guarino y los capítulos 7 y 8 de [6].

2.1. Postulados de la relatividad general

Comenzaré introduciendo los principios sobre los que se sustenta la teoría. En primer lugar, el renombrado principio de equivalencia, el cual está fundamentado en la capacidad de, en un entorno¹ de cualquier punto del espacio-tiempo, poder encontrar unas coordenadas cuya métrica sea la de Minkowski a primer orden (breve formulación matemática en A.1.3).

¹Es importante remarcar que esto es únicamente posible de manera local, ya que si no el espacio-tiempo sería completamente plano.

Principio de equivalencia. Las leyes físicas descritas por un observador que se encuentra en caída libre en un campo gravitatorio son equivalentes a las que describe otro observador que se encuentra en reposo en ausencia de gravedad. De manera análoga, un observador en reposo en un campo gravitatorio describe las mismas leyes físicas que otro observador uniformemente acelerado en ausencia de gravedad.

Este principio nos indica que existe una equivalencia entre aceleración y gravedad, es decir, la trayectoria que describe una partícula que se encuentra en caída libre debido a la fuerza de la gravedad es equivalente a la que describe una partícula libre² en un espacio-tiempo curvo. Es esta relación lo que le dio a Einstein la idea de tratar la gravedad como una variación en la geometría del espacio-tiempo.

Para poder comprender mejor esta idea se puede realizar el siguiente experimento mental. Consideremos una partícula libre que viaja por el espacio-tiempo a velocidad constante (por lo que su trayectoria será una línea recta) y que, en un cierto momento, pasará cerca de un cuerpo muy masivo que genera un campo gravitatorio. Debido a la presencia del campo gravitatorio, la partícula sufrirá una fuerza externa que alterará su trayectoria y, por tanto, dejará de ser una línea recta. El principio de equivalencia nos dice que la trayectoria de esta partícula es la misma que seguiría una partícula libre al considerar el espacio-tiempo curvado debido a la presencia del objeto masivo, es decir, las “líneas rectas”³ en este espacio-tiempo curvo ya no son líneas rectas como tal, sino que son curvas denominadas *geodésicas*.

Una evidencia clara de que el espacio-tiempo es efectivamente curvo es la observación experimental del efecto que tiene la gravedad sobre la luz. Según las leyes de Newton sólo los objetos con masa sufren el efecto del campo gravitatorio, sin embargo, se ha observado que los haces de luz que recibimos en la Tierra provenientes de otros puntos del espacio siguen trayectorias afectadas por la gravedad.

Otro principio fundamental para la RG es el principio de covarianza, el cual nos dicta la manera en la que se deben escribir las ecuaciones que describen la física.

Principio de covarianza. Las leyes físicas deben ser escritas en términos de tensores. Así, dichas leyes serán equivalentes en cualquier sistema de referencia y, además, la existencia de las cantidades físicas que describen será independiente de las coordenadas.

Puesto que los tensores⁴ están definidos sobre la variedad diferenciable que representa el espacio-tiempo, su existencia es intrínseca a la variedad y, por lo tanto, independiente de las coordenadas que utilicemos. Es más, las ecuaciones descritas mediante tensores serán válidas para cualquier observador, sin importar las coordenadas que emplee dicho observador. Esto se

²Las trayectorias que describen las partículas libres en un espacio-tiempo curvo son las geodésicas. Su definición matemática se encuentra en [A.2.1](#).

³Considerando línea recta como la trayectoria que describe una partícula libre.

⁴Se puede ver su definición detallada en [A.1.3](#), de donde resultan evidentes las afirmaciones realizadas en el principio de covarianza.

debe a las propiedades de transformación que poseen los tensores bajo cambios generales de coordenadas (g.c.t. por sus siglas en inglés).

2.2. Entendiendo la gravedad: las ecuaciones de Einstein

Una vez motivada la idea sobre la que se sustenta la RG, se procederá a realizar la correspondiente deducción matemática de las ecuaciones que describen la gravedad, conocidas como *ecuaciones de Einstein*. Se hallarán las ecuaciones de movimiento en diferentes situaciones, comenzando con la más sencilla, la de un universo vacío.

Ecuaciones de Einstein en el vacío

Para construir una acción adecuada se deben tener en cuenta ciertos factores, siendo el primero de ellos que el diferencial de volumen que se ha de utilizar para la integral es el descrito en la ecuación A.42. Por otro lado, el lagrangiano debe ser invariante bajo cambios de coordenadas, por lo que debe ser un escalar. El escalar más simple que codifica información sobre la geometría del universo es el escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, por lo que se obtiene así la *acción de Einstein-Hilbert*

$$S_g[g] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} R. \quad (2.1)$$

Le atribuyo el subíndice “g” puesto que es la acción debida únicamente a la gravedad o geometría del universo. La constante κ se define como $\kappa^2 = 8\pi G$, siendo G la constante gravitacional de Newton. La variación de la acción es la siguiente:

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x (\delta\sqrt{-g} R + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \\ &= (\delta S_g)_1 + (\delta S_g)_2 + (\delta S_g)_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se tratará cada término por separado y, por simplicidad, se utilizarán las coordenadas del *sistema de referencia inercial local* (L.I.F. por sus siglas en inglés). De esta manera los índices μ, ν pasan a ser índices a, b ⁵. Comenzamos calculando $\delta\sqrt{-g}$ ⁶:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta g \stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab} \stackrel{(B)}{=} -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}, \quad (2.3)$$

donde se han utilizado las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (A) \quad & \delta(\det M) = \det M \cdot \text{tr}(A^{-1} \delta A). \\ (B) \quad & g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

⁵Cuando representamos los índices de un tensor con letras griegas estamos utilizando unas coordenadas cualesquiera, mientras que si los índices son latinos, quiere decir que las coordenadas utilizadas son las del L.I.F., esto es para enfatizar que estamos en un sistema de referencia plano a primer orden. Véase la descripción del L.I.F. en mayor detalle en A.1.3.

⁶Recordar que g representa el determinante de $g_{\mu\nu}$.

Así, el primer término de la acción resulta en

$$(\delta S_g)_1 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \right) R g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (2.5)$$

A continuación, calcularemos una expresión para δR_{ab} . Sabemos, de la definición del tensor de Ricci, que $R_{ab} = R^c{}_{acb}$ y además, en el L.I.F., las derivadas primeras de la métrica se anulan (mientras que las segundas no se anulan), de donde deducimos

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{db} - \partial_d \Gamma^a{}_{cb} \Rightarrow R_{ab} = \partial_c \Gamma^c{}_{ba} - \partial_b \Gamma^c{}_{ca}. \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta que en el L.I.F. se verifica $\nabla_a = \partial_a$, podemos expresar la variación del tensor de Ricci como

$$\delta R_{ab} = \nabla_c \delta \Gamma^c{}_{ba} - \nabla_b \delta \Gamma^c{}_{ca}. \quad (2.7)$$

Volviendo al segundo término de la acción:

$$(\delta S_g)_2 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[\nabla_c (g^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ba}) - \nabla_b (g^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ca}) \right], \quad (2.8)$$

donde se ha utilizado el postulado de la métrica $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ para introducir la métrica dentro de las derivadas covariantes. Observamos que ambos términos son divergencias covariantes, por lo que, por el teorema de Stokes, son términos de frontera que se anulan si consideramos que las variaciones del campo tienden a cero en el infinito (frontera).

Juntando de nuevo los términos de la acción se obtiene

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \delta g^{ab}, \quad (2.9)$$

e igualando la ecuación a cero y utilizando que, al ser una ecuación tensorial es válida para cualquier sistema de referencia (no solo el L.I.F.), obtenemos las *ecuaciones de Einstein en el vacío*⁷:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el *tensor de Einstein* definido en (A.68). Si multiplicamos esta ecuación por la inversa de la métrica $g^{\mu\nu}$, obtenemos $R = 0$ y por tanto, las ecuaciones de Einstein en el vacío se reducen a

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \quad (2.11)$$

Esta deducción matemática de las ecuaciones sirve para darnos cuenta de la utilidad del principio de covarianza, puesto que se ha realizado toda la deducción para las coordenadas del L.I.F., en las que se trabaja de manera más sencilla, y, finalmente, hemos obtenido una ecuación válida para cualesquiera coordenadas.

Cabe mencionar que, a pesar de que las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío son métricas cuyo tensor de Ricci es igual a cero, esto no implica que el tensor de Riemann deba

⁷Cabe mencionar que esta deducción basada en el principio de mínima acción no es la que realizó Einstein cuando desarrolló la teoría, sino que fue planteada tiempo después por Hilbert.

ser también nulo. Como consecuencia, observamos que a pesar de que este universo carezca de materia y de radiación, no tiene por qué ser un universo plano, sino que habrá ciertas soluciones con una geometría no trivial, además de, obviamente, la solución cuya métrica es la de Minkowski. Entre las soluciones cuya curvatura es no nula destaca la conocida métrica de Schwarzschild, la cual veremos en la próxima sección.

Gravitación y constante cosmológica

Como variación al sistema físico anterior, tenemos el caso de un universo vacío con una constante cosmológica que denotamos por Λ . La acción es

$$S_g[g] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (2.12)$$

Puesto que Λ es una constante, obtenemos de manera sencilla las variaciones de la acción a partir de los resultados obtenidos en el apartado anterior, obteniendo:

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Obtenemos así las ecuaciones del movimiento:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.14)$$

que, multiplicando por la inversa de la métrica, son equivalentes a

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}} \quad (2.15)$$

Como soluciones a esta ecuación tenemos los dos casos más destacados que describen universos maximalmente simétricos en función del signo de Λ . Para $\Lambda > 0$ tenemos los espacios *de Sitter*, utilizados para describir nuestro universo debido a la expansión acelerada del mismo, mientras que para $\Lambda < 0$ tenemos los espacios *Anti de Sitter* (AdS) que, a pesar de que sabemos que nuestro universo tiene constante cosmológica positiva, cuentan con una amplia gama de aplicaciones, entre las cuales destaca la correspondencia AdS/CFT, la cual introduciremos al final del trabajo.

Gravitación acoplada a materia (campo escalar)

A continuación, añadiremos a nuestro universo una partícula de espín $s = 0$ representada por un campo escalar ϕ y obtendremos de nuevo las ecuaciones de Einstein. Para ello, se debe sumar a la acción el término correspondiente al campo escalar en un espacio-tiempo curvo, el cual se obtiene simplemente teniendo en cuenta el nuevo diferencial de volumen e intercambiando las derivadas parciales por derivadas covariantes, obteniendo así

$$S[g, \phi] = S_g[g] + S_\phi[g, \phi] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} R + \int d^D x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.16)$$

que, al tomar variaciones, resulta en

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta S}{\delta \phi} \delta \phi = \left[\frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta S_\phi}{\delta \phi} \delta \phi. \quad (2.17)$$

El primer término lo hemos calculado en la Ecuación (2.9) y el segundo término lo relacionamos con el tensor energía-momento del campo escalar como

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} T_{\mu\nu}^\phi. \quad (2.18)$$

Por otro lado, el resultado de igualar tercer término a cero no es más que la ecuación de movimiento de un campo escalar sometido a un potencial, que, al encontrarnos en espacio-tiempo curvo, resulta en la ecuación de Klein-Gordon con las derivadas covariantizadas:

$$\square \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.19)$$

donde el d'alembertiano covariante es $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$.

La otra ecuación se corresponde con las ecuaciones de Einstein en su forma completa

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^\phi} \quad (2.20)$$

El tensor energía momento se calcula a partir de (2.18) y viene dado por

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - V(\phi) \right], \quad (2.21)$$

que, como podemos comprobar, coincide con el obtenido (1.39) si intercambiamos $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$.

Las ecuaciones de Einstein de (2.20) representan un sistema de 16 ecuaciones, sin embargo, la simetría del tensor de Einstein y la identidad de Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ provocan que únicamente sean independientes 6 ecuaciones. Por otro lado, para que las ecuaciones de Einstein sean consistentes, estas dos propiedades las tendrá que verificar también el tensor de energía-momento. La simetría se deduce trivialmente de su definición en (2.18). Para comprobar que el tensor de energía-momento se conserva vamos a calcular la variación de la acción del campo bajo cambios infinitesimales de coordenadas⁸:

$$\delta_\xi S_\phi = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} T_\phi^{\mu\nu} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta \phi} \delta_\xi \phi \right]. \quad (2.22)$$

El segundo término se anula si consideramos que se satisface la ecuación del movimiento del campo escalar y la variación de la métrica viene dada por su derivada de Lie (A.58). Además, puesto que hemos construido la acción S_ϕ para que sea invariante bajo cambios generales de coordenadas, la variación (2.22) se anula. Teniendo todo esto en cuenta y utilizando la simetría de $T_\phi^{\mu\nu}$ obtenemos:

$$\delta_\xi S_\phi = \int d^D x \sqrt{-g} T_\phi^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu = 0, \quad (2.23)$$

⁸Se estudian los cambios de coordenadas infinitesimales y las derivadas de Lie en la sección A.1.3.

que, integrando por partes y utilizando el teorema de Stokes, resulta en la siguiente ley de conservación:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi = 0, \quad (2.24)$$

la cual es la extensión covariante de la deducida en la sección 1.2.

Gravitación acoplada a radiación (campo de Maxwell)

En este caso estudiaremos las ecuaciones de movimiento que sigue un fotón en presencia de gravedad y cómo la presencia del mismo afecta a la curvatura del espacio-tiempo. Como ya vimos en el capítulo anterior, un fotón es una partícula de espín 1 que se representa mediante el campo gauge $A_\mu(x)$, luego se debe añadir a la acción el término cinético del fotón:

$$S[g, A] = S_g[g] + S_A[g, A] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} R + \int d^D x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (2.25)$$

Se debe tener en cuenta que al estar en un espacio-tiempo curvo, las derivadas del tensor de Faraday se deben covariantizar⁹:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.26)$$

aunque al tratarse de un rotacional y teniendo en cuenta que la torsión es nula, es fácil comprobar que se da la segunda igualdad.

Procediendo de igual manera que en el caso anterior se obtienen dos ecuaciones, una correspondiente al movimiento del fotón:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.27)$$

que es la versión covariante de las ecuaciones de movimiento de un fotón libre en el espacio-tiempo de Minkowski, y la otra ecuación coincide con la obtenida en (2.20):

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^A}, \quad (2.28)$$

excepto por que en este caso el tensor de energía-momento es el de un fotón, el cual viene dado por

$$T_{\mu\nu}^A = g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (2.29)$$

Si lo comparamos con el obtenido en el espacio-tiempo de Minkowski (1.74) (eliminando la contribución del campo de Dirac), observamos de nuevo que coinciden al intercambiar la métrica de Minkowski por $g_{\mu\nu}$. Su ley de conservación se deduce de manera análoga a la del campo escalar.

Comprobamos que los resultados obtenidos son muy similares a los del caso escalar, que se resumen en dos pasos: encontrar el tensor de energía-momento propio de la partícula estudiada para introducirlo en las ecuaciones de Einstein y resolver las ecuaciones del movimiento en su forma covariantizada.

⁹En este caso nos referimos a la covariantización de la derivada respecto a la conexión de Christoffel utilizada en RG, no a la covariantización de la teoría gauge del electromagnetismo.

Las ecuaciones de Einstein en su forma completa nos indican cómo afecta la gravedad a la materia o radiación presente en el universo, ya que su movimiento se ve afectado por la curvatura que genera el campo gravitacional. También nos muestran la manera en la que se genera la gravedad a partir de la materia y de la radiación, es decir, cómo la existencia de las mismas produce variaciones en la curvatura del espacio-tiempo.

2.3. Soluciones a las ecuaciones de Einstein: agujeros negros

Una vez presentadas las ecuaciones de Einstein en diferentes condiciones, pasamos a estudiar dos de las soluciones más destacadas de las mismas, ambas correspondientes a agujeros negros.

El agujero negro de Schwarzschild

Como se mencionó en la sección anterior, existen soluciones no triviales a las ecuaciones de Einstein en el vacío. En este caso presentamos el *agujero negro de Schwarzschild*, descrito por una métrica estática, isotrópica y asintóticamente plana¹⁰, la *métrica de Schwarzschild*:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.30)$$

donde $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ es la métrica de la 2-esfera y $r_S = 2GM$ es el *radio de Schwarzschild*, cuyo valor se obtiene al tomar el límite de gravedad newtoniana. Por tanto, esta métrica está determinada por un único parámetro M , que interpretamos como la masa puntual del agujero negro percibida por un observador en el infinito.

Las *singularidades* de la métrica se obtienen cuando alguna de sus componentes tiende a infinito, por lo que en este caso tenemos dos: en $r = r_S$ y en $r = 0$. No obstante, se debe tener en cuenta que estas singularidades pueden depender de las coordenadas. Para comprobar esta dependencia basta con calcular un escalar (puesto estos no dependen de las coordenadas) y evaluarlo en las singularidades. Calculamos así el *escalar de Kretschmann*

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12 \frac{r_S^2}{r^6}, \quad (2.31)$$

el cual únicamente posee una singularidad en $r = 0$. Decimos así que $r = r_S$ es una *singularidad coordenada*, es decir, es fruto de la elección de coordenadas y se podría eliminar al hacer un cambio de las mismas, mientras que la singularidad en $r = 0$ está siempre presente, por lo que recibe el nombre de *singularidad física*. La singularidad $r = r_S$ también se denomina *horizonte de sucesos* y posee la característica de que, al emitir un haz de luz en una determinada dirección hacia el agujero negro, este parecería tardar un tiempo infinito en alcanzar dicho horizonte. No obstante, en realidad la luz sí que llega al horizonte; es el observador quien percibe que la luz nunca lo alcanza, aunque esto no sea así.

¹⁰Una métrica asintóticamente plana es aquella que, en el límite $r \rightarrow \infty$, se obtiene la métrica de Minkowski.

El agujero negro de Reissner-Nordström

A continuación, veremos una solución a las ecuaciones de Einstein que nos será de utilidad más adelante a la hora de obtener soluciones de una teoría de supergravedad 11-dimensional. El *agujero negro de Reissner-Nordström* es una solución estática e isotrópica de la teoría de gravedad acoplada a un campo de Maxwell, cuyas ecuaciones del movimiento fueron obtenidas en (2.27) y (2.28). Por tanto, se trata de una extensión del agujero negro de Schwarzschild en la que se considera que posee carga eléctrica y magnética, o bien solo una de ellas. La métrica del agujero negro viene dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.32)$$

donde se ha utilizado la métrica de la 2-esfera $d\Omega_2^2$, el radio del agujero negro de Schwarzschild $r_S = 2GM$ y el radio

$$r_Q^2 = G(Q_e^2 + Q_m^2), \quad (2.33)$$

siendo M la masa del agujero negro, Q_e su carga eléctrica y Q_m su carga magnética¹¹, todas percibidas por un observador en el infinito. Por otro lado, el campo gauge de la solución es

$$A_\mu = -\left(\frac{Q_e}{r}, 0, 0, Q_m \cos\theta\right), \quad (2.34)$$

que da lugar a un tensor de Faraday cuyas componentes no nulas son las correspondientes a los campos eléctrico y magnético en la dirección radial:

$$F_{tr} = -F_{rt} = E_r = -\frac{Q_e}{r^2}, \quad F_{\theta\phi} = -B_r = Q_m \sin\theta. \quad (2.35)$$

En este caso la métrica tiene tres singularidades correspondientes a los valores

$$r = 0, \quad r_\pm = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - r_Q^2}, \quad (2.36)$$

siendo $r = 0$ una singularidad física y $r = r_-$ y $r = r_+$ dos horizontes, denominados *horizonte interior* y *horizonte exterior*, respectivamente.

A partir de la expresión de r_\pm se deduce la relación

$$GM^2 \geq Q_e^2 + Q_m^2, \quad (2.37)$$

ya que en caso contrario no se tendría horizonte, teniendo así una *singularidad desnuda* en $r = 0$, lo que no es posible según postula la *conjetura de la censura cósmica*. Sin embargo, podemos centrarnos en el caso $GM^2 = Q_e^2 + Q_m^2$, en el que los horizontes coinciden: $r_+ = r_-$, teniendo así un *agujero negro extremal de Reissner-Nordström*. Bajo esta condición podemos expresar la métrica como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_Q}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_Q}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.38)$$

¹¹Hasta el momento no se han detectado monopolos magnéticos, aunque esto no nos impide considerarlos, puesto que tienen implicaciones teóricas interesantes.

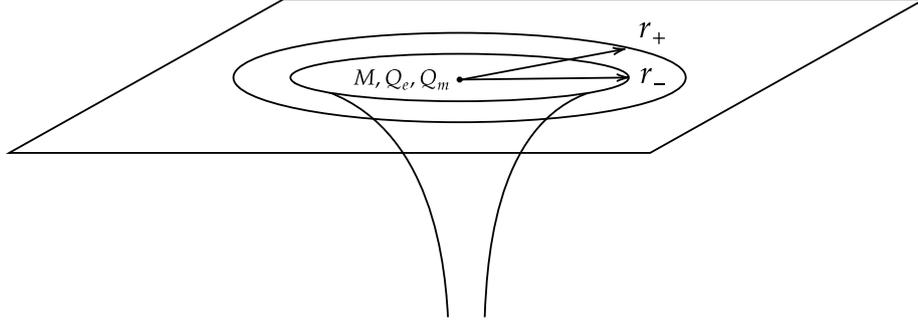


Figura 2.1: Agujero negro de Reissner-Nordström.

donde $r_Q = GM$ es el horizonte. Haciendo una traslación $r \rightarrow r - r_Q$ obtenemos

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r_Q}{r}\right)^{-2} dt^2 + \left(1 + \frac{r_Q}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_2^2), \quad (2.39)$$

teniendo por tanto el horizonte en la posición $r = 0$. Veamos qué forma tiene la métrica en un entorno muy pequeño del horizonte. Para ello, consideramos $r \rightarrow 0$, lo que implica que

$$ds^2 \sim - \left(\frac{r}{r_Q}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{r_Q}{r}\right)^2 dr^2 + r_Q^2 d\Omega_2^2. \quad (2.40)$$

Los dos primeros términos de esta métrica se agrupan para dar lugar a un espacio-tiempo AdS_2 con radio r_Q , mientras que el tercer término se corresponde con la métrica de una 2-esfera S^2 también de radio r_Q , es decir, el espacio-tiempo en un entorno del horizonte es $AdS_2 \times S^2$.

2.4. Los frames: una formulación alternativa de la relatividad general

Como hemos podido comprobar en la sección anterior, no hemos tenido ninguna dificultad a la hora de considerar bosones en RG, esto se debe a que, al tener espín entero, estas partículas se representan mediante tensores, que son las herramientas fundamentales utilizadas en RG. Sin embargo, el estudio de los fermiones en RG requiere introducir un nuevo formalismo que nos permita extender la teoría al campo de los espinores. Con este nuevo objetivo introduciremos una serie de conceptos geométricos que más adelante utilizaremos para estudiar de manera satisfactoria los fermiones en RG.

2.4.1. La conexión del espín

Los espinores son campos que transforman bajo representaciones espinoriales del grupo de Lorentz, por lo que para introducirlos en la RG debemos de alguna manera tener un espacio donde podamos realizar dichas transformaciones. La clave para poder llevar esto a cabo son los *frames* o *vielbeins* (definidos en el apartado A.1.3), mediante los cuales podemos realizar un cambio de base en el espacio tangente a la variedad en cada punto para que nuestra métrica sea la de

Minkowski. Veamos como podemos hacer esto, comenzamos recordando que los frames son unas matrices $e^a{}_\mu(x)$ que satisfacen la ecuación:

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_\mu(x) \eta_{ab} e^b{}_\nu(x)} \quad (2.41)$$

lo que, intuitivamente, podemos interpretar como que los frames son la “raíz cuadrada” de la métrica. Además, si denotamos $e \equiv \det e^a{}_\mu$, se tiene que $\sqrt{-g} = e$, por lo que podemos escribir el diferencial de volumen como $dv = d^D x e$. Las nuevas bases ortonormales de los espacios tangente y cotangente se obtienen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} e_a &= e_a{}^\mu \partial_\mu, \\ \theta^a &= e^a{}_\mu dx^\mu. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nota. Se están omitiendo las dependencias de las coordenadas (x) para abreviar la notación.

A partir de (2.42) podemos obtener las coordenadas de los vectores tangentes y cotangentes en la nueva base ortonormal como:

$$\begin{aligned} V^a &= e^a{}_\mu V^\mu, \\ V_a &= e_a{}^\mu V_\mu, \end{aligned} \quad (2.43)$$

sobre las cuales tomaremos derivadas covariantes según una nueva conexión $\omega_\mu{}^a{}_b$ a la que denominamos *conexión del espín*:

$$\begin{aligned} D_\mu V^a &= \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b, \\ D_\mu V_a &= \partial_\mu V_a - \omega_\mu{}^b{}_a V_b. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Imponiendo la condición

$$\nabla_\mu e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a{}_\nu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^a{}_\rho = 0, \quad (2.45)$$

la cual denominamos *postulado de los vielbeins*, obtenemos la relación entre la conexión del espín y los símbolos de Christoffel:

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e^a{}_\nu e_b{}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\nu - e_b{}^\nu \partial_\mu e^a{}_\nu. \quad (2.46)$$

Nota. La notación que estamos utilizando para las derivadas covariantes es la siguiente:

- D_μ denota derivadas covariantes respecto a las conexiones gauge (Yang-Mills) y respecto a la conexión del espín.
- ∇_μ agrupa las anteriores junto con las derivadas covariantes respecto al espacio-tiempo, es decir, respecto la conexión de Christoffel.

Ejemplo: $\nabla_\mu e^a{}_\nu = D_\mu e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e^a{}_\rho$.

Teniendo en cuenta que nuestra conexión satisface $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ y utilizando el postulado de los vielbeins, obtenemos que $D_\mu \eta_{ab} = 0$, de donde se deduce que la conexión del espín es antisimétrica en los índices latinos: $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$.

Por último, podemos expresar la métrica en esta nueva base y utilizar la ecuación (2.41) para obtener

$$g_{ab} = e_a^\mu g_{\mu\nu} e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad (2.47)$$

lo que nos confirma que la métrica que describe esta nueva base es la de Minkowski. De esta manera, mediante los frames hemos podido construir en cada punto de la variedad un espacio-tiempo de Minkowski, donde sabemos que los vectores transforman bajo transformaciones del grupo de Lorentz. Sin embargo, estas transformaciones de Lorentz no son las usuales, sino que tienen algo de especial: fijándonos en la ecuación (2.41) observamos que cualquier frame $e'^a{}_\mu(x)$ dado por

$$e'^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x) \quad (2.48)$$

define la misma métrica que $e^a{}_\mu(x)$, donde $\Lambda^a{}_b(x)$ es una matriz de Lorentz dependiente de las coordenadas. Por tanto, en este espacio-tiempo de Minkowski construido mediante los frames, tenemos una simetría bajo transformaciones locales de Lorentz (L.L.T.).

Índices curvos e índices planos

Tras haber introducido este nuevo formalismo, contamos con dos maneras diferentes de trabajar. Si consideramos un vector V ¹² viviendo en la variedad que representa nuestro universo, tendremos las dos siguientes posibilidades:

1. Proyectar el vector V sobre la base coordenada¹³ $\{\partial_\mu\}_{\mu=0}^{D-1}$ del espacio tangente de manera que tenga unas coordenadas V^μ que transformen bajo cambios generales de coordenadas:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (2.49)$$

2. Proyectar el vector V sobre la base ortonormal no coordenada $\{e_a\}_{\mu=0}^{D-1}$ del espacio tangente de manera que tenga unas coordenadas V^a que transformen bajo transformaciones locales de Lorentz:

$$V'^a = \Lambda^a{}_b(x) V^b, \quad (2.50)$$

En el primero de los casos tenemos a los bosones, los cuales podemos tratar de la manera usual en RG sin entrar en nuevos formalismos. Por otro lado, los fermiones serán las partículas que consideremos en el segundo caso, aunque como sabemos no son vectores V^a , sino espinores Ψ_α . Teniendo esto en cuenta, recuperamos (1.63)¹⁴ para escribir las transformaciones ¡locales! del grupo de Lorentz como:

$$\Psi(x) \rightarrow S[\Lambda] \Psi(\Lambda^{-1}x) = e^{\frac{1}{4}\lambda^{ab}(x)\gamma_{ab}} \Psi(\Lambda^{-1}x), \quad (2.51)$$

¹²Aunque estemos tomando un vector, esto se puede extrapolar a un tensor de cualquier rango.

¹³Denominamos base coordenada a aquella que construimos a partir de las coordenadas x^μ que estemos utilizando, mientras que una base no coordenada es aquella que construimos sin tener en cuenta las coordenadas, como es el caso de la base ortonormal de los frames.

¹⁴Debemos tener en cuenta que los índices que en el capítulo 1 denotábamos por letras griegas, en este caso pasan a ser letras latinas debido a que estábamos trabajando en Minkowski.

donde esta vez los parámetros λ^{ab} son dependientes de las coordenadas. De este modo, la derivada covariante que introducimos actuando sobre el campo de Dirac viene dada por:

$$D_\mu \Psi_\alpha = \partial_\mu \Psi_\alpha + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} (\gamma_{ab})_\alpha^\beta \Psi_\beta. \quad (2.52)$$

Omitiendo los índices espinoriales las derivadas covariantes del campo de Dirac y su conjugado son:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &= (\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab}) \Psi, \\ \bar{\Psi} \overleftarrow{D}_\mu &= \bar{\Psi} (\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

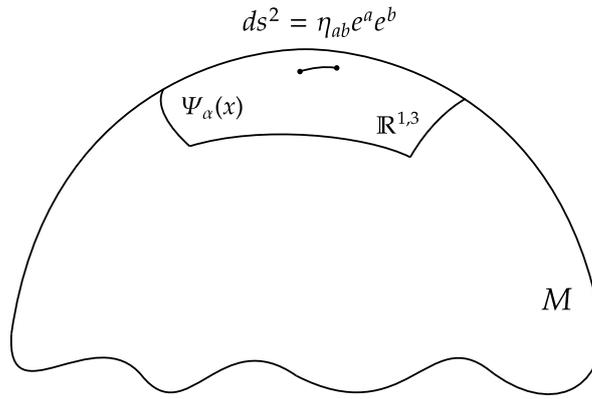


Figura 2.2: Espacio-tiempo de Minkowski obtenido mediante los frames.

Curvatura

Con las derivadas ya covariantizadas y el formalismo de los frames establecido, lo único que nos falta antes de poder escribir la acción es obtener el resto de tensores en función de los frames. Comenzando con la curvatura, obtenemos una expresión de sus componentes en esta nueva base de la misma manera que en (A.63):

$$[D_\mu, D_\nu] V^a = R_{\mu\nu}{}^a{}_b V^b, \quad (2.54)$$

dando como resultado:

$$R_{\mu\nu}{}^a{}_b = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b. \quad (2.55)$$

Para obtener el tensor de Ricci debemos contraer el primer índice con el tercero, aunque se debe tener en cuenta que uno es curvo y el otro plano, por lo que se contraen mediante los frames, resultando en: $R_{\nu b} = e_a{}^\mu R_{\mu\nu}{}^a{}_b$. Finalmente, para el escalar de Ricci contraemos los índices del tensor de Ricci obteniendo $R = e_b{}^\nu R_\nu{}^b = e_b{}^\nu \eta^{bc} R_{\nu c}$.

2.4.2. Espinores en relatividad general

Tras haber introducido esta nueva formulación de la RG, nos encontramos con las herramientas suficientes para poder dar una acción que describa la gravedad acoplada al campo de Dirac. Esta acción debe ser invariante bajo transformaciones locales de Lorentz, por lo que debe aparecer la derivada covariante (2.53) y, además, debe estar descrita en términos de los frames. Presentamos así la acción

$$S[e, \Psi] = S_g[e] + S_{1/2}[e, \Psi] = \int d^D x e \left[\frac{1}{2\kappa^2} e^{a\mu} e^{b\nu} R_{\mu\nu ab} - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \Psi \right] \quad (2.56)$$

donde para la contribución del campo de Dirac hemos partido de la acción modificada (1.60).

Nota. $e^{a\mu} = \eta^{ab} e_b{}^\mu$ y $\gamma^\mu = \gamma^a e_a{}^\mu$.

Tomando variaciones de la acción respecto a Ψ y $\bar{\Psi}$ obtenemos las ecuaciones de movimiento del campo de Dirac en un espacio-tiempo curvo, que se corresponden con la versión covariante¹⁵ de la ecuación de Dirac y su conjugada:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu D_\mu \Psi &= 0, \\ \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Por otro lado, las variaciones del campo $e^{a\mu}(x)$ dan lugar a las ecuaciones de Einstein en el caso de una partícula de espín 1/2:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \Psi, \quad (2.58)$$

donde podemos identificar, al igual que en los casos bosónicos, el tensor de energía-momento del campo de Dirac con

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \Psi, \quad (2.59)$$

que es la versión covariante y sin masa de (1.62)¹⁶. Se comprueba fácilmente que se trata de un tensor simétrico y su ley de conservación se deduce de forma análoga al caso del campo escalar.

2.4.3. Explorando la relatividad general como una teoría gauge

Antes de concluir con este capítulo sobre la teoría de la relatividad general, vamos a dar una visión alternativa de la teoría. Como se explicó en la sección 1.5, las teorías gauge son teorías que trabajan con simetrías locales, por lo que, la simetría local del grupo de Lorentz que posee la RG es, en efecto, una simetría gauge. Debido a esto, podemos concebir la RG como una teoría gauge cuyo grupo de simetría es el grupo de Lorentz y el campo gauge es la conexión del espín.

¹⁵En este caso, covariante respecto a la conexión del espín.

¹⁶No aparece el término proporcional al lagrangiano ya que estamos suponiendo que se satisfacen las ecuaciones del movimiento y, por tanto, es nulo.

Obteniendo de manera explícita la transformación de la conexión del espín:

$$\omega_{\mu}^a{}_b \rightarrow \Lambda^a{}_c \omega_{\mu}^c{}_d (\Lambda^{-1})^d{}_b + \Lambda^a{}_c \partial_{\mu} (\Lambda^{-1})^c{}_b, \quad (2.60)$$

y comparándola con la transformación del campo gauge de la teoría de Yang-Mills:

$$(A_{\mu})^a{}_b \rightarrow U^a{}_c (A_{\mu})^c{}_d (U^{-1})^d{}_b + \frac{1}{g} U^a{}_c \partial_{\mu} (U^{-1})^c{}_b, \quad (2.61)$$

observamos que son equivalentes al tomar $U = \Lambda \in SO(1, 3)$. Además, podemos comparar también el tensor de Riemann o curvatura

$$R_{\mu\nu}^a{}_b = \partial_{\mu} \omega_{\nu}^a{}_b - \partial_{\nu} \omega_{\mu}^a{}_b + \omega_{\mu}^a{}_c \omega_{\nu}^c{}_b - \omega_{\nu}^a{}_c \omega_{\mu}^c{}_b \quad (2.62)$$

con el tensor de Faraday por componentes

$$(F_{\mu\nu})^a{}_b = \partial_{\mu} (A_{\nu})^a{}_b - \partial_{\nu} (A_{\mu})^a{}_b + g (A_{\mu})^a{}_c (A_{\nu})^c{}_b - g (A_{\nu})^a{}_c (A_{\mu})^c{}_b. \quad (2.63)$$

De nuevo comprobamos que las expresiones son equivalentes utilizando los campos gauge apropiados. Como bien sabemos, la RG es una teoría puramente geométrica, ya que los tensores que utilizamos son herramientas definidas sobre el objeto matemático que representa nuestro universo, una variedad diferenciable. Por tanto, al hacer esta comparativa con las teorías gauge y observar que ambas se basan en un formalismo similar, notamos que las teorías gauge también tienen una naturaleza geométrica inherente. Mientras que la RG se fundamenta en la geometría del espacio-tiempo, entendido como una variedad diferenciable, las teorías gauge se basan en la geometría de unas estructuras conocidas como haces fibrados. En estas estructuras matemáticas también se pueden definir conceptos como la conexión y la curvatura, los cuales resultan ser los bosones gauge y el tensor de Faraday, respectivamente.

Capítulo 3

Supergravedad pura

Tras haber dedicado los capítulos anteriores a introducir todas las bases necesarias para la formulación de una teoría de supergravedad, se puede proceder con el desarrollo de dicha teoría. Para ello, será necesaria la introducción de un nuevo campo que resultará de vital importancia, además de unas breves nociones de espinores de Majorana y de supersimetría que servirán para motivar algunos pasos del desarrollo. Una vez definida la supergravedad, nos enfocaremos en estudiar las dos variante más sencillas de la misma. Este capítulo está basado en los capítulos 3, 5, 6, 9 y 10 de [6], los capítulos 2 y 3 de [7] y el capítulo 12 de [2].

3.1. El gravitino

A lo largo del trabajo hemos ido estudiando los diversos campos que utilizamos para representar partículas de espines 0, 1/2 y 1 en el modelo estándar y de espín 2 en relatividad general. Debido a esto, podemos preguntarnos qué ocurre con el espín 3/2: ¿no existe una partícula fundamental cuyo espín sea 3/2? Se sabe que cualquier teoría invariante Lorentz e invariante gauge que describa una partícula de espín mayor que 2 tendrá un lagrangiano trivial, es decir, no interactuará con el resto de partículas. Debido a esto, parece poco intuitivo que existan partículas de todos los espines $s \leq 2$ excepto aquella con $s = 3/2$.

Con el objetivo de dar respuesta a estas dudas y observar las posibles consecuencias que pueda tener la existencia de una partícula de espín 3/2, a la que conocemos como *gravitino*, introducimos en esta sección un nuevo campo. En el capítulo 1 vimos que las partículas de espín 1 se representan mediante campos vectoriales, mientras que las de espín 1/2 mediante campos espinoriales, de esta manera, considerando el espín 3/2 como una composición de los espines 1 y 1/2, representamos este nuevo campo mediante un vector-espinor $\Psi_{\mu\alpha}(x)$ al que, inicialmente, consideraremos sin masa.

Nota. En general omitiremos los índices espinoriales, al igual que para el campo de Dirac.

3.1.1. Espacio-tiempo de Minkowski

A continuación, trataremos de buscar una acción adecuada para este nuevo campo y, como primer paso, lo haremos en un espacio-tiempo de Minkowski para posteriormente generalizarlo a un espacio-tiempo curvo. Como cualquier acción en el espacio-tiempo de Minkowski, deberá ser invariante Lorentz. Además, al tratarse de un fermión, las derivadas deberán ser de primer orden y el lagrangiano deberá ser hermítico para que la ecuación de $\bar{\Psi}_\mu$ sea la conjugada de la de Ψ_μ . De esta manera, buscamos una acción similar a la del campo de Dirac (1.52) donde se utilizan las matrices del álgebra de Clifford, aunque, en este caso, para contraer todos los índices de la ecuación deberemos hacer uso de las matrices de rango tres descritas en (1.65). Con todos estos ingredientes, la acción resultante es la *acción de Rarita-Schwinger* [13]:

$$S_{3/2}[\Psi_\mu] = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho. \quad (3.1)$$

Se ha añadido la constante $1/2\kappa^2$ para simplificar cálculos posteriores. Las ecuaciones del movimiento obtenidas son:

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho = 0. \quad (3.2)$$

Podemos observar que, además de todas las condiciones que le hemos impuesto a la acción, esta y las ecuaciones del movimiento poseen una característica extra: una simetría bajo la siguiente transformación gauge:

$$\Psi_{\mu\alpha}(x) \rightarrow \Psi_{\mu\alpha}(x) + \partial_\mu \epsilon_\alpha(x). \quad (3.3)$$

Esta transformación resulta muy similar a la del fotón (1.67), aunque con una ligera modificación, el parámetro de la transformación, ϵ_α , ya no es un escalar, sino que se trata de un espinor $1/2$. Debido a esto, observamos que el vector-espinor $\Psi_{\mu\alpha}$ posee características tanto de los vectores como de los espinores, resultando así en un campo muy particular el cual cobrará mayor importancia a la hora de introducirlo en la relatividad general.

3.1.2. Espacio-tiempo curvo

Con los conocimientos adquiridos en el capítulo anterior a la hora de extender acciones a espacio-tiempos curvos y acoplar fermiones a la RG junto con la acción presentada en (3.1), podemos formular sin mayor dificultad una acción para el gravitino en un espacio-tiempo curvo, resultando en:

$$S_{3/2}[e, \Psi_\mu] = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho, \quad (3.4)$$

donde la derivada covariante del gravitino debería contener la conexión de Christoffel y la conexión del espín:

$$\nabla_\mu \Psi_{\nu\alpha} = \partial_\mu \Psi_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Psi_{\rho\alpha} + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} (\gamma_{ab})_\alpha^\beta \Psi_{\nu\beta}, \quad (3.5)$$

sin embargo, al estar contraída con el elemento de tercer rango del álgebra de Clifford $\gamma^{\mu\nu\rho}$, el cual es completamente antisimétrico, el término espacio-temporal que aporta el símbolo de

Christoffel se anula debido a que este es simétrico¹, es decir:

$$\gamma^{\mu\nu\rho}\nabla_\nu\Psi_\rho = \gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\Psi_\rho. \quad (3.6)$$

Por otro lado, las ecuaciones del movimiento obtenidas son la versión covariante de (3.2):

$$\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\Psi_\rho = 0. \quad (3.7)$$

Ahora, surge la cuestión de si esta acción, al igual que la del espacio-tiempo plano, exhibe una simetría ante la transformación gauge²

$$\Psi_{\mu\alpha}(x) \rightarrow \Psi_{\mu\alpha}(x) + D_\mu\epsilon_\alpha(x). \quad (3.8)$$

Para resolver esta cuestión, calcularemos la variación de la acción respecto del parámetro ϵ . Únicamente tendremos en cuenta los términos a primer orden en Ψ_μ ³. Debido a la importancia de este cálculo para el trabajo se realizará detalladamente. Comenzamos calculando

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S_{3/2} &= \frac{\delta S_{3/2}}{\delta e} \delta_\epsilon e + \frac{\delta S_{3/2}}{\delta \Psi_\mu} \delta_\epsilon \Psi_\mu + \frac{\delta S_{3/2}}{\delta \bar{\Psi}_\mu} \delta_\epsilon \bar{\Psi}_\mu \\ &= 2 \frac{\delta S_{3/2}}{\delta \bar{\Psi}_\mu} \delta_\epsilon \bar{\Psi}_\mu + o((\Psi_\mu)^3) \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e \delta_\epsilon \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \overleftarrow{D}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que el primer término es de orden mayor que uno en Ψ_μ y que las variaciones de Ψ_μ y $\bar{\Psi}_\mu$ coinciden. Integrando por partes y utilizando la antisimetría de las matrices γ obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S_{3/2} &= \frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu\rho} D_\mu D_\nu \Psi_\rho \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu\rho} \frac{1}{2} [D_\mu, D_\nu] \Psi_\rho. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A continuación, utilizamos la identidad

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab} \gamma^{ab} \Psi \quad (3.11)$$

para obtener

$$\delta_\epsilon S_{3/2} = \frac{1}{8\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{ab} R_{\mu\nu ab} \Psi_\rho. \quad (3.12)$$

¹Recordemos que la conexión del espacio-tiempo que estamos utilizando es la conexión de Levi-Civita, que tiene torsión nula y, por tanto, es simétrica (A.2.1).

²En este caso se utiliza la derivada covariante respecto a la conexión del espín, puesto que el parámetro es un espinor y el espacio-tiempo es no trivial.

³Se tienen también contribuciones de términos de orden tres en Ψ_μ que omitiremos por el momento.

Para continuar, debemos manipular el producto de las matrices gamma de rangos dos y tres, para lo que utilizamos las propiedades de las mismas. El producto de ambas matrices resulta en:

$$\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{ab} = \gamma^{\mu\nu\rho}{}_{ab} + 6\gamma^{[\mu\nu}{}_{[b}\delta^{\rho]}{}_a] + 6\gamma^{[\mu}\delta^\nu{}_{[b}\delta^{\rho]}{}_a], \quad (3.13)$$

luego, contrayendo esta expresión con el tensor de Riemann, obtenemos:

$$\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{ab}R_{\mu\nu ab} = \gamma^{\mu\nu\rho ab}R_{\mu\nu ab} + \underbrace{6R_{\mu\nu}{}^{[\rho}{}_{b}\gamma^{\mu\nu b]}}_{(2)} + \underbrace{6\gamma^{[\mu}R_{\mu\nu}{}^{\rho\nu]}}_{(3)}. \quad (3.14)$$

El primero de estos términos es cero por la primera identidad de Bianchi (A.64), ya que

$$\gamma^{\mu\nu\rho ab}R_{\mu\nu ab} = \gamma^{\mu\nu\rho ab}R_{[\mu\nu a]b} = 0. \quad (3.15)$$

Desarrollando (2) haciendo uso de las propiedades de simetría de las matrices γ y del tensor de Riemann obtenemos:

$$\begin{aligned} 6R_{\mu\nu}{}^{[\rho}{}_{b}\gamma^{\mu\nu b]} &= 2R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{b}\gamma^{\mu\nu b} + 4R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{b}\gamma^{\nu\rho b} \\ &= -2R_{[\mu\nu b]}{}^{\rho}\gamma^{\mu\nu b} + 4R_{\nu b}\gamma^{\nu\rho b} = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

que se anula pues el primer sumando se anula de nuevo por la identidad de Bianchi y el segundo por la simetría del tensor de Ricci y la antisimetría de la matriz γ . Finalmente, desarrollando (3):

$$\begin{aligned} 6\gamma^{[\mu}R_{\mu\nu}{}^{\rho\nu]} &= 4\gamma^{\mu}R_{\mu\nu}{}^{\rho\nu} + 2\gamma^{\rho}R_{\mu\nu}{}^{\nu\mu} \\ &= 4\gamma^{\mu}R_{\mu}{}^{\rho} - 2\gamma^{\rho}R \\ &= 4\gamma^{\mu}(R_{\mu}{}^{\rho} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\rho}R) \\ &= 4\gamma^{\mu}G_{\mu}{}^{\rho}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por lo que llegamos a $\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{ab}R_{\mu\nu ab} = 4\gamma^{\mu}G_{\mu}{}^{\rho}$, lo que implica que

$$\delta_{\epsilon}S_{3/2}[e, \Psi_{\mu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e G_{\mu}{}^{\nu} \bar{\epsilon} \gamma^{\mu} \Psi_{\nu}, \quad (3.18)$$

donde salta a la vista la aparición del tensor de Einstein. Nos encontramos en el punto más destacado del trabajo, pues es este cálculo el que da lugar a la idea de la supergravedad. Antes de continuar, hagamos una pequeña recapitulación del procedimiento realizado. Acabamos de introducir un nuevo campo con el cual buscamos describir el comportamiento de una partícula de espín 3/2. Para ello, hemos seguido el procedimiento rutinario al imponer condiciones a la acción y hemos observado que dicha partícula posee una simetría gauge cuyo parámetro es un espinor. Es más, al considerar un espacio-tiempo curvo y realizar variaciones de la acción, el resultado que obtenemos es proporcional al tensor de Einstein, que es el tensor obtenido al realizar variaciones a la acción de Einstein-Hilbert. Como consecuencia, resulta lógico pensar que este nuevo campo tiene una relación directa con la interacción gravitatoria. Nos encontramos

ante la idea fundamental de la supergravedad.

3.2. Espinores de Majorana

En el capítulo 1 se comentó la existencia de un tercer tipo de espinor además de los espinores de Dirac o de Weyl, cuya función es describir aquellos fermiones con la propiedad de ser su propia antipartícula. En esta sección veremos algunas propiedades que poseen estos espinores y algunas relaciones que serán de utilidad en futuros desarrollos.

Los espinores de Majorana son espinores de Dirac en dimensión D sobre los que se ha impuesto una condición extra denominada *condición de realidad*, la cual es

$$\lambda^* = B\lambda, \quad (3.19)$$

donde $B = it_0 C \gamma^0$ siendo $t_0 = \pm 1$ y C una matriz unitaria denominada *matriz de conjugación de carga*. La imposición de esta condición resulta en que los espinores de Majorana existan únicamente en dimensiones $D = 2, 3, 4 \pmod{8}$. El interés de estos campos radica en que, debido a la condición (3.19), poseen la mitad de grados de libertad que los campos de Dirac, siendo así más fundamentales. Por esta razón, los campos espinoriales desempeñan un papel esencial en las teorías de supersimetría y de supergravedad.

A pesar de que en dimensión genérica el conjugado de un espinor de Dirac se define como $\bar{\psi} = \psi^T C$, debido a la condición de realidad, el conjugado de un espinor de Majorana coincide con el adjunto de Dirac en dimensión 4, es decir:

$$\bar{\lambda} = \lambda^T C = \lambda^\dagger i \gamma^0. \quad (3.20)$$

Las relaciones más utilizadas que involucran espinores de Majorana y matrices del álgebra de Clifford son las siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \gamma^{\mu_1 \dots \mu_r} \chi &= t_r \bar{\chi} \gamma^{\mu_1 \dots \mu_r} \lambda, \\ \overline{(\gamma^{\mu_1 \dots \mu_r} \lambda)} &= t_0 t_r \bar{\lambda} \gamma^{\mu_1 \dots \mu_r}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde λ y χ son unos espinores de Majorana cualesquiera, r determina el rango de las matrices gamma (se definieron las matrices de rango r en (1.64)) y $t_r = \pm 1$ dependiendo del rango r . Los valores de t_r vienen completamente determinados por:

$$t_0 = +1, \quad t_1 = -1, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = +1, \quad t_{r+4} = t_r. \quad (3.22)$$

3.3. $\mathcal{N} = 1, D = 4$ SUSY

Antes de proseguir con el estudio del gravitino, es pertinente ofrecer una breve explicación de la *supersimetría* (SUSY), ya que servirá para contextualizar y motivar los pasos próximos del desarrollo. La supersimetría es una teoría desarrollada en el espacio-tiempo de Minkowski que

establece relaciones entre bosones y fermiones, agrupándolos en parejas denominadas *supermultipletes* o, simplemente, multipletes, los cuales determinan las transformaciones de simetría. De manera esquemática se tiene:

$$\delta_\epsilon \text{ bosón} = \text{fermión}, \quad \delta_\epsilon \text{ fermión} = \text{bosón}. \quad (3.23)$$

La idea fundamental de esta teoría es la adición de unos nuevos generadores a nuestro álgebra de Poincaré, denominados *supercargas*, para formar así un superálgebra. En general, estos nuevos generadores son una tupla de \mathcal{N} espinores \mathcal{Q}_α^i ($i = 1, \dots, \mathcal{N}$), aunque en esta descripción nos centraremos en el caso $\mathcal{N} = 1$. Es este nuevo generador \mathcal{Q}_α el que, al poseer espín $1/2$, nos permite transformar fermiones en bosones y viceversa, teniendo así una teoría supersimétrica. Esta idea se entiende mejor en el formalismo cuántico, donde las supercargas \mathcal{Q} son operadores cuánticos que actúan sobre los estados de ambas partículas:

$$\mathcal{Q}|\text{bosón}\rangle = |\text{fermión}\rangle, \quad \mathcal{Q}|\text{fermión}\rangle = |\text{bosón}\rangle. \quad (3.24)$$

Para determinar un superálgebra, al igual que para cualquier álgebra, se deben presentar las relaciones de conmutación de sus generadores que, en el caso de los generadores fermiónicos, son relaciones de anticonmutación debido a que son variables de Grassman. En la ecuación (1.15) vimos las relaciones de conmutación del álgebra de Poincaré que, junto con las relaciones

$$\begin{aligned} \{\mathcal{Q}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}^\beta\} &= -\frac{1}{2}(\gamma_\mu)_\alpha{}^\beta P^\mu \\ [M_{[\mu\nu]}, \mathcal{Q}_\alpha] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \mathcal{Q}_\beta \\ [P_\mu, \mathcal{Q}_\alpha] &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

forman el *superálgebra de Poincaré*. Otro factor relevante es que los parámetros que determinan las transformaciones de supersimetría son espinores de Majorana ϵ_α , los cuales serán constantes puesto que la teoría que estamos describiendo en esta sección es de supersimetría global.

A continuación, veremos los dos ejemplos más simples de supermultipletes:

- Multiplete quirral (ϕ, ψ_α) : Consta de un campo escalar complejo $\phi(x)$ que describe el bosón ($s = 0$) junto con un espinor de Weyl $\psi_\alpha(x)$ que representa su compañero fermiónico ($s = 1/2$) denominado *quiralino*. Tenemos así un sistema bosón-fermión descrito por la acción

$$S = \int d^4x \left[-\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \bar{\psi} \sigma^\mu \partial_\mu \psi \right]. \quad (3.26)$$

Las relaciones de transformación del multiplete son:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \psi \\ \delta_\epsilon \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \sigma^\mu \partial_\mu \phi \end{cases} \quad (3.27)$$

- Multiplete gauge (A_μ, λ_α) : Se trata de un caso similar al de la teoría gauge de Maxwell, solo que en este caso el fermión está descrito por un espinor de Majorana $\lambda_\alpha(x)$ denominado *gaugino*. La acción que describe el sistema es

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda \right], \quad (3.28)$$

donde el factor $1/2$ se debe a que los espinores de Majorana tienen la mitad de grados de libertad de los de Dirac. Además, al ser $\lambda_\alpha(x)$ un fermión de Majorana, su carga q y la de su antiparícula $-q$ coinciden, lo que implica que tiene carga nula. Por esta razón se utiliza la derivada parcial ∂_μ en lugar de la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$. Las transformaciones correspondientes son:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon A_\mu = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda \\ \delta_\epsilon \lambda = \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{cases} \quad (3.29)$$

Dejando de lado por un momento las teorías con $\mathcal{N} = 1$, cabe destacar la teoría de Yang-Mills supersimétrica con $\mathcal{N} = 4$ ⁴ ($\mathcal{N} = 4$ SYM), la cual forma parte de la formulación inicial de la correspondencia AdS/CFT como veremos en la sección 4.4.

3.4. La contribución universal de la supergravedad

3.4.1. Acción y variaciones

Ahora que contamos con una ligera noción de supersimetría, podemos abordar el problema planteado anteriormente con mayor facilidad. Habíamos planteado un sistema en el que un gravitino —que, por las razones mencionadas en la sección 3.2, consideraremos como un espinor de Majorana— se encontraba en un espacio-tiempo curvo y tratamos de determinar si existía una simetría bajo la transformación gauge

$$\delta_\epsilon \Psi_{\mu\alpha} = D_\mu \epsilon_\alpha, \quad (3.30)$$

donde el parámetro $\epsilon_\alpha(x)$ de la transformación es un espinor dependiente de las coordenadas. Como acabamos de ver en la sección anterior, las transformaciones cuyos parámetros son espinores son transformaciones de supersimetría, por lo que este es el primer indicio de que el sistema que estamos buscando está determinado por un supermultiplete, el cual debe contener al gravitino. Sin embargo, en la teoría supersimétrica vista anteriormente, los espinores eran constantes, por lo que deducimos que esta nueva teoría es de *supersimetría local*. Además, en la variación de la acción obtenida en (3.18) apareció el tensor de Einstein, lo que nos está diciendo que la gravedad va a tomar parte en esta nueva teoría. Planteamos así un sistema de interacción gravitatoria entre el gravitino y el gravitón, el cual representamos mediante un supermultiplete

⁴Este valor de \mathcal{N} es el máximo permitido en dimensión 4.

formado por un vector-espinor $\Psi_{\mu\alpha}(x)$ y los frames $e^a{}_\mu(x)$. La acción que gobierna el sistema es

$$S[e, \Psi_\mu] = S_g[e] + S_{3/2}[e, \Psi_\mu] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e \left[e^{a\mu} e^{b\nu} R_{\mu\nu ab} - \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho \right] \quad (3.31)$$

La transformación que sufre el gravitino viene dada por (3.30), mientras que para los frames debemos postular una transformación adecuada. Esta debe ser proporcional al gravitino, ya que se trata de una transformación de supersimetría y, para contraer el índice espinorial del gravitino debe aparecer un espinor conjugado, el cual será el parámetro ϵ de la transformación. Finalmente, para mantener la estructura indicial, se requiere de un término que aporte un índice plano, para lo que se utiliza la matriz γ^a . Todas estas consideraciones resultan en las siguientes transformaciones de supersimetría:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon e^a{}_\mu = c \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu \\ \delta_\epsilon \Psi_\mu = D_\mu \epsilon \end{cases} \quad (3.32)$$

donde se ha añadido una constante $c \in \mathbb{R}$ que fijaremos más adelante. Nuestro objetivo ahora es calcular las variaciones de la acción (3.31) para comprobar si realmente es invariante bajo las transformaciones de supersimetría que acabamos de postular. La contribución del término de la acción del gravitino fue calculada en (3.18), veamos ahora cuál es la variación de la acción gravitatoria. Recordemos que la acción gravitatoria formulada en términos de la métrica venía dada por

$$S_g[g] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} R, \quad (3.33)$$

y, al tomar variaciones respecto de la métrica, habíamos obtenido

$$\delta_\epsilon S_g = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta_\epsilon g^{\mu\nu}. \quad (3.34)$$

Por tanto, basta calcular $\delta_\epsilon g^{\mu\nu}$ en función de $\delta_\epsilon e^a{}_\mu$, más concretamente, en función de $\delta_\epsilon e_a{}^\mu$. Modificando ligeramente la ecuación que define los frames obtenemos

$$g^{\mu\nu} = e_a{}^\mu \eta^{ab} e_b{}^\nu, \quad (3.35)$$

que resulta en la variación

$$\delta_\epsilon g^{\mu\nu} = \delta_\epsilon e_a{}^\mu \eta^{ab} e_b{}^\nu + e_a{}^\mu \eta^{ab} \delta_\epsilon e_b{}^\nu. \quad (3.36)$$

Ahora, utilizando que $e^a{}_\mu e_a{}^\nu = \delta_\mu^\nu$, obtenemos

$$\delta_\epsilon e^a{}_\mu e_a{}^\nu + e^a{}_\mu \delta_\epsilon e_a{}^\nu = 0 \implies \delta_\epsilon e_a{}^\mu = -e_b{}^\mu e_a{}^\nu \delta_\epsilon e^a{}_\mu \implies \delta_\epsilon e_a{}^\mu = -c \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi_a, \quad (3.37)$$

que nos proporciona las variaciones de la métrica al introducir esta expresión en (3.36):

$$\delta_\epsilon g^{\mu\nu} = -c \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi^\nu - c \bar{\epsilon} \gamma^\nu \Psi^\mu. \quad (3.38)$$

Al contraer las variaciones de la métrica con el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, el cual es simétrico, se pueden sumar los dos términos, obteniendo así:

$$G_{\mu\nu}\delta_\epsilon g^{\mu\nu} = -2c G_{\mu\nu}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\Psi^\nu. \quad (3.39)$$

Introduciendo este resultado en (3.34), la variación de la acción gravitatoria respecto al parámetro de supersimetría local ϵ resulta en:

$$\delta_\epsilon S_g = -c \frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e G_{\mu\nu} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi^\nu. \quad (3.40)$$

Finalmente, juntando las contribuciones gravitatoria y del gravitino se obtiene

$$\delta_\epsilon S = \left(\frac{1}{2} - c\right) \frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e G_{\mu\nu} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi^\nu, \quad (3.41)$$

por lo que, tomando $c = 1/2$, se tiene que $\delta_\epsilon S = 0$, como queríamos obtener. Concluimos así que la acción (3.31) es invariante bajo las siguientes transformaciones de supersimetría local:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon e^a{}_\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu \\ \delta_\epsilon \Psi_\mu = D_\mu \epsilon \end{cases} \quad (3.42)$$

Tras toda esta formulación, observamos que con la simple intención de estudiar una nueva partícula, el gravitino, hemos acabado obteniendo una teoría de supersimetría local que formula la gravedad en términos de los frames y su compañero supersimétrico el gravitino.

Supergravedad. La supergravedad (SUGRA) es una extensión supersimétrica de la relatividad general en la cual se estudia el supermultiplete gravitón-gravitino, dando lugar así a una teoría de supersimetría local.

De acuerdo a las dimensiones, el contenido de campos y el número de supersimetrías consideradas, existen diversas teorías de supergravedad. En este caso nos estamos enfocando en una teoría de supergravedad con $\mathcal{N} = 1$, que indica el número de campos del gravitino utilizados. Además, nos restringimos al caso de supergravedad pura, el cual únicamente incluye al multiplete gravitatorio.

Fijémonos ahora en las condiciones que hemos impuesto indirectamente para obtener este resultado. La primera de ellas es que estamos considerando que el gravitino es un espinor de Majorana, por lo que nos estamos restringiendo a las dimensiones $D = 2, 3, 4 \pmod{8}$. No obstante, en las dimensiones restantes se podrá definir una variante de los espinores de Majorana, denominados *espinores de Majorana simplécticos*, mediante los cuales se obtendría el mismo resultado. Además, habrá algunas dimensiones en las que ninguno de estos dos espinores sean irreducibles, por lo que se utilizarán los *espinores de Majorana-Weyl* o los *espinores de Majorana-Weyl*

*simplécticos*⁵.

Por otro lado, debemos notar que la acción obtenida en (3.31) no describe completamente la supergravedad pura en estas dimensiones, sino que se deben tener en cuenta los grados de libertad de los campos, como veremos en la sección 3.6.1. Sin embargo, sí que se trata de una contribución universal que aparecerá en la acción de las teorías de supergravedad formuladas en cualquier dimensión. Únicamente en el caso $D = 4$ se tiene que la acción está completamente descrita por esta contribución. También se debe tener en cuenta que estamos omitiendo los términos de orden superior a uno en Ψ_μ , por lo que, a priori, no tendremos supergravedad a órdenes mayores. Más adelante veremos qué ocurre si consideramos los términos de órdenes superiores.

Para concluir, notemos que la solución más simple para la acción (3.31) es aquella en la que el campo del gravitino se anula y la métrica es la de Minkowski. Consideramos esta solución como la solución de fondo de la supergravedad pura con $\mathcal{N} = 1$ y $D = 4$.

3.4.2. Superálgebra local

En el apartado anterior vimos cómo una teoría que incluye al gravitino requiere que dicha teoría sea además una teoría gravitatoria. Existe una manera alternativa de llegar al mismo resultado y es mediante el álgebra supersimétrico. En una teoría física consistente basada en una serie de transformaciones de simetría determinadas por un grupo de Lie, el conmutador de dos transformaciones debe dar lugar a una tercera transformación de simetría del mismo grupo. Esto es evidente, pues según vimos en la sección 1.1, el conmutador de dos generadores de un álgebra de Lie resulta en un tercer generador del álgebra y las transformaciones de simetría de un grupo se implementan mediante dichos generadores.

Para comprobar esto, calcularemos el conmutador de dos transformaciones de supersimetría (de parámetros ϵ_1 y ϵ_2) actuando sobre los frames y haciendo uso las transformaciones definidas en (3.42). El cálculo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}]e^a{}_\mu &= \delta_{\epsilon_1} \left(\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_2 \gamma^a \Psi_\mu \right) - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_2 \gamma^a D_\mu \epsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_2 \gamma^a D_\mu \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \gamma^a D_\mu \epsilon_2) \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_2 \gamma^a D_\mu \epsilon_1 + \bar{\epsilon}_2 \overleftarrow{D}_\mu \gamma^a \epsilon_1) \\
&= \frac{1}{2} D_\mu (\bar{\epsilon}_2 \gamma^a \epsilon_1).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Nota. El término $(1 \leftrightarrow 2)$ se refiere a que dicho término es equivalente al término anterior cambiando el 1 por el 2. En (*) se ha utilizado la primera relación de (3.21).

⁵En la tabla 3.2 de [6] se pueden ver los diversos espinores irreducibles utilizados en cada dimensión.

Para continuar con el cálculo, consideramos el campo vectorial $\xi^a \equiv \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_2\gamma^a\epsilon_1$ y las transformaciones infinitesimales de coordenadas que genera:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu. \quad (3.44)$$

A continuación, obtendremos cómo varían los frames bajo este cambio de coordenadas infinitesimal teniendo en cuenta que los frames transforman como campos cotangentes. De acuerdo con las transformaciones infinitesimales de coordenadas definidas en (A.51) obtenemos:

$$\delta_\xi e^a{}_\mu = \xi^\nu \partial_\nu e^a{}_\mu + e^a{}_\nu \partial_\mu \xi^\nu. \quad (3.45)$$

Modificaremos esta ecuación utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \partial_\nu e^a{}_\mu &= \nabla_\nu e^a{}_\mu - \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\rho e^a{}_\rho, \\ \partial_\mu \xi^\nu &= \nabla_\mu \xi^\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu \xi^\rho, \end{aligned} \quad (3.46)$$

obteniendo así:

$$\begin{aligned} \delta_\xi e^a{}_\mu &= \xi^\nu \nabla_\nu e^a{}_\mu - \xi^\nu \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu + \xi^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\rho e^a{}_\rho + e^a{}_\nu \nabla_\mu \xi^\nu - e^a{}_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\nu \xi^\rho \\ &= -\xi^\nu \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu + D_\mu \xi^a, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde en la segunda igualdad se ha utilizado el postulado de los frames, la simetría de los símbolos de Christoffel (o lo que es lo mismo, que la torsión es nula) para cancelar el tercer término con el quinto y que $D_\mu \xi^a = e^a{}_\nu \nabla_\mu \xi^\nu$. Por otro lado, sabemos que los frames transforman bajo L.L.T. como

$$e^a{}_\mu(x) \rightarrow \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x), \quad (3.48)$$

que, utilizando la representación definida en (1.11), resulta en la siguiente transformación infinitesimal:

$$\delta_\lambda e^a{}_\mu = \lambda^a{}_b e^b{}_\mu. \quad (3.49)$$

De esta manera, podemos definir $\xi^\nu \omega_\nu{}^a{}_b \equiv \lambda^a{}_b$ para obtener:

$$\xi^\nu \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\mu = \delta_\lambda e^a{}_\mu. \quad (3.50)$$

Finalmente, introduciendo estos resultados en el conmutador de las transformaciones de supersimetría, tenemos que

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] e^a{}_\mu = D_\mu \xi^a = \delta_\xi e^a{}_\mu + \delta_\lambda e^a{}_\mu, \quad (3.51)$$

es decir, la transformación obtenida al realizar el conmutador de dos transformaciones infinitesimales de supersimetría local no es una tercera transformación de supersimetría, sino que es una combinación de una transformación infinitesimal de las coordenadas junto con una transformación local infinitesimal de Lorentz. Comprobamos así que una teoría de supersimetría local requiere, además de las supersimetrías, simetría bajo transformaciones generales de coordenadas y bajo transformaciones locales del grupo de Lorentz. Como comprobamos en el capítulo 2, la

teoría que implementa estas dos últimas simetrías es la relatividad general, por lo que concluimos que una teoría de supersimetría local es también una teoría gravitatoria.

3.4.3. Supergravedad a órdenes superiores en Ψ_μ

Hemos visto que omitiendo los términos de órdenes superiores a uno en Ψ_μ al realizar las variaciones de la acción del gravitino, esta se cancelaba con la acción gravitatoria, dando lugar a la supergravedad. Resulta lógico entonces preguntarse si a cualquier orden se tendrá el mismo resultado. La respuesta rápida es negativa, sin embargo, en dimensión $D = 4$ se puede modificar la acción y la transformación de supersimetría del gravitino para obtener supergravedad a cualquier orden en los fermiones. Estas modificaciones se presentan a continuación:

$$S_{3/2}[e, \Psi_\mu] = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e \left\{ \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho - \frac{1}{16} \left[(\bar{\Psi}^\rho \gamma^\mu \Psi^\nu) (\bar{\Psi}_\rho \gamma_\mu \Psi_\nu + 2\bar{\Psi}_\rho \gamma_\nu \Psi_\mu) - 4(\bar{\Psi}_\mu \gamma^\nu \Psi_\nu) (\bar{\Psi}^\mu \gamma^\rho \Psi_\rho) \right] \right\} \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} \delta_\epsilon e^a{}_\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu \\ \delta_\epsilon \Psi_\mu = \hat{D}_\mu \epsilon \equiv \partial_\mu \epsilon + \frac{1}{4} (\omega_\mu{}^{ab} + K_\mu{}^{ab}) \gamma_{ab} \epsilon \end{cases} \quad (3.53)$$

donde se ha definido

$$K_{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{4} (\bar{\Psi}_\mu \gamma_\rho \Psi_\nu - \bar{\Psi}_\nu \gamma_\mu \Psi_\rho + \bar{\Psi}_\rho \gamma_\nu \Psi_\mu). \quad (3.54)$$

Observamos que la nueva acción es en cierta medida más compleja que la anterior, ya que contiene varios términos de orden 4 en Ψ_μ . Además, la nueva derivada covariante \hat{D}_μ contiene un término extra $K_\mu{}^{ab}$ que interpretamos como una torsión inducida por el gravitino en lugar de por el espacio-tiempo. De aquí en adelante consideraremos supergravedad únicamente a primer orden en Ψ_μ , por lo que la acción y la derivada covariante serán las usuales.

3.5. Supergravedad y constante cosmológica

En la sección anterior se presentó la teoría de supergravedad más simple posible, formada únicamente por el supermultiplete gravitón-gravitino $(e^a{}_\mu, \Psi_\mu)$, sin embargo, se puede ir más allá realizando diversas modificaciones al sistema físico. En esta sección se planteará la extensión más simple considerando una acción gravitatoria con constante cosmológica como se hizo en (2.12). Cabe mencionar que trabajaremos con la acción universal (3.31) por lo que la dimensión utilizada será arbitraria. Para que este sistema sea compatible con la supergravedad debemos hacer unas ligeras modificaciones. La primera de ellas es definir una nueva derivada covariante

$$\hat{D}_\mu \equiv D_\mu - g\gamma_\mu \quad (3.55)$$

que actúe sobre los espinores ϵ y Ψ_μ . La acción total resultante es:

$$S[e, \Psi_\mu] = S_g[e] + S_{3/2}[e, \Psi_\mu] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^Dx e \left[R - 2\Lambda - \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \hat{D}_\nu \Psi_\rho \right]. \quad (3.56)$$

Al desarrollar la nueva derivada covariante en función de la anterior y utilizando la relación

$$\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_\nu = -(D-2)\gamma^{\mu\nu}, \quad (3.57)$$

se obtiene un término de masa para el gravitino con $m = (D-2)g$, dando lugar a la acción:

$$S[e, \Psi_\mu] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e [R - 2\Lambda - \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho - m \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \Psi_\nu] \quad (3.58)$$

Las transformaciones de supersimetría se obtienen a partir del caso $\Lambda = 0$ cambiando D_μ por \hat{D}_μ :

$$\begin{cases} \delta_\epsilon e^a{}_\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu \\ \delta_\epsilon \Psi_\mu = \hat{D}_\mu \epsilon = D_\mu \epsilon - g \gamma_\mu \epsilon \end{cases} \quad (3.59)$$

Vamos a comprobar si la acción propuesta es invariante bajo estas transformaciones. La variación de la acción gravitatoria se obtiene directamente de (2.13) utilizando el mismo argumento que en (3.39) para obtener

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S_g &= -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi^\nu \\ &= -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e G_{\mu\nu} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi^\nu - \frac{\Lambda}{2\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi_\mu. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por otro lado, denotaremos a la acción del gravitino por $S_{3/2} = S_{cin} + S_m$, donde cada término representa la contribución cinética usual y el término de masa, respectivamente. Para obtener la variación del término cinético del gravitino seguimos el mismo procedimiento que en (3.9) al omitir las contribuciones de órdenes mayor que uno en Ψ_μ :

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S_{cin} &= -\frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e \delta_\epsilon \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \int d^D x e \left(\bar{\epsilon} \overleftarrow{D}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho + g \bar{\epsilon} \gamma_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Nota. $\delta_\epsilon \bar{\Psi}_\mu = \bar{\epsilon} \overleftarrow{D}_\mu + g \bar{\epsilon} \gamma_\mu$ utilizando la segunda relación de (3.21).

El primer término es el obtenido en (3.18) y el segundo lo desarrollamos utilizando que la relación (3.57) también se verifica al invertir el orden de las matrices gamma, obteniendo así

$$\delta_\epsilon S_{cin} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x e G_{\mu\nu} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi^\nu - \frac{(D-2)g}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \gamma^{\nu\rho} D_\nu \Psi_\rho. \quad (3.62)$$

Por último, calculamos las variaciones del término de masa del gravitino:

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon S_m &= \frac{\delta S_m}{\delta e} \delta_\epsilon e + \frac{\delta S_m}{\delta \Psi_\mu} \delta_\epsilon \Psi_\mu + \frac{\delta S_m}{\delta \bar{\Psi}_\mu} \delta_\epsilon \bar{\Psi}_\mu \\
&= 2 \frac{\delta S_{3/2}}{\delta \Psi_\mu} \delta_\epsilon \Psi_\mu + o((\Psi_\mu)^3) \\
&= -\frac{m}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \delta_\epsilon \Psi_\nu \\
&= -\frac{m}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} (D_\nu \epsilon - g \gamma_\nu \epsilon) \\
&= \frac{m}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\Psi}_\mu \overleftarrow{D}_\nu \gamma^{\mu\nu} \epsilon + \frac{(D-1)mg}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\Psi}_\mu \gamma^\mu \epsilon \\
&= \frac{m}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu} D_\mu \Psi_\nu - \frac{(D-1)mg}{\kappa^2} \int d^D x e \bar{\epsilon} \gamma^\mu \Psi_\mu.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

En la penúltima igualdad se ha integrado por partes el primer término y se ha utilizado la relación $\gamma^{\mu\nu} \gamma_\nu = (D-1)\gamma^\mu$ en el segundo, mientras que en la última igualdad se ha utilizado la primera relación de la ecuación (3.21) en ambos términos además de la antisimetría de $\gamma^{\mu\nu}$ en el primero.

Tras todos estos cálculos, obtenemos que el primer término de $\delta_\epsilon S_g$ se anula con el primero de $\delta_\epsilon S_{cin}$ y que el segundo término de $\delta_\epsilon S_{cin}$ se cancela con el primero de $\delta_\epsilon S_m$, por tanto, para obtener supergravedad, el segundo término de $\delta_\epsilon S_g$ se debe anular con el segundo de $\delta_\epsilon S_m$, es decir, se debe cumplir la relación:

$$\frac{\Lambda}{2\kappa^2} = -\frac{(D-1)mg}{\kappa^2} \implies \Lambda = -2(D-1)mg. \tag{3.64}$$

Concluimos así que

$$\boxed{\Lambda = -2(D-1)(D-2)g^2} \tag{3.65}$$

Por consiguiente, la supergravedad es compatible únicamente con una constante cosmológica $\Lambda \leq 0$. Debido a esto, se pueden plantear sin ningún inconveniente teorías de supergravedad en espacio-tiempos AdS. Sin embargo, es bien sabido que nuestro universo posee una constante cosmológica positiva, por lo que, al estudiar supergravedad en el mismo, se observarán rupturas de la supersimetría.

El interés en el estudio de una constante cosmológica dentro del marco de la supergravedad, además de las razones previamente mencionadas, radica en el hecho de que los resultados obtenidos constituyen una versión simplificada de teorías más complejas, como las que abordaremos en el próximo capítulo. En términos generales, al introducir nuevas contribuciones a una teoría de supergravedad pura (como es el caso de la constante cosmológica), se observa que las derivadas covariantes deben ser modificadas en la acción y en las transformaciones de supersimetría. Asimismo, esto conlleva la aparición de un término de masa para el fermión, el cual está vinculado con esta nueva contribución de la derivada covariante.

3.6. $D = 11$ SUGRA

Tras haber estudiado la contribución universal a la supergravedad y darnos cuenta de que esta describe completamente la teoría en $D = 4$, nos centraremos en formular la teoría en una dimensión mayor, para lo que se necesitarán campos extra. Más concretamente, nos centraremos en la dimensión $D = 11$, que es la dimensión máxima sobre la que se pueden formular teorías de supergravedad.

Para razonar este límite se utiliza la *teoría de Kaluza-Klein* o *reducción dimensional*, mediante la cual se parte de una teoría D' -dimensional que será reformulada en dimensión $D < D'$ manteniendo las características principales de la misma. Este procedimiento se basa en la suposición de un universo de dimensión $D' > 4$ cuyas $D' - 4$ dimensiones no sean observables al estar compactificadas en una variedad muy reducida⁶. De esta manera, el universo estaría representado por una variedad $\mathcal{M}_{D'} = \mathcal{M}_D \times K_d$ (con $d = D' - D$), donde \mathcal{M}_D es el universo observable —por tanto, no compacto y con poca curvatura— y K_d es una variedad compacta con una extensión tan reducida que tomaría una energía desorbitada percibirla en los experimentos. Sin embargo, esto no significa que no se pueda confirmar la existencia de dicho espacio, pues este puede influir de manera indirecta sobre el universo observable.

Por ejemplo, un cilindro de radio L se puede expresar como el producto de la recta real por una circunferencia de radio L : $\mathcal{M}_2 = \mathbb{R} \times S_L^1$ y, puesto que la circunferencia es finita, se puede considerar que es muy pequeña tomando $L \rightarrow 0$. Aplicando reducción dimensional sobre el cilindro obtendríamos una teoría formulada en un espacio-tiempo representado por la recta real.

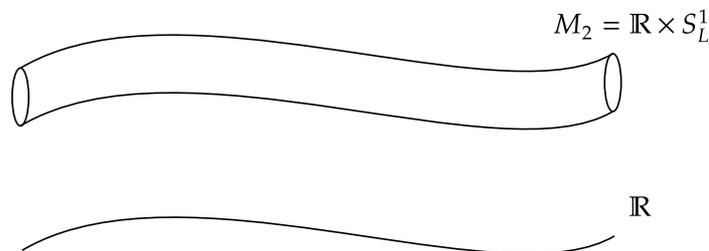


Figura 3.1: Compactificación de un cilindro.

La aplicación de este procedimiento al caso de la supergravedad se basa en que, si se considera una dimensión $D' > 11$, el número de gravitinos obtenidos al aplicar la reducción dimensional sobre un toro sería mayor que ocho, lo que da lugar a una teoría con partículas de espín $s > 2$ que, como ya se mencionó anteriormente, no posee interacciones.

3.6.1. Acción y transformaciones

En la sección 3.4 dedujimos la contribución universal a la acción que describe la supergravedad pura en dimensión $D = 2, 3, 4 \pmod{8}$. Partiendo desde ese punto, obtendremos los campos extra necesarios para describir una acción en $D = 11$.

⁶Se puede hablar de su extensión pues supondremos que la variedad es finita o periódica.

En las teorías supersimétricas los grados de libertad de los bosones y de los fermiones de un mismo multiplete deben coincidir, por lo que, en caso de que no sea así, se deberán añadir campos extra al multiplete. Además, se puede distinguir entre los dos siguientes tipos de grados de libertad:

- *on-shell*: Se obtienen al tener en cuenta las ecuaciones del movimiento. Coinciden con los estados de helicidad de la partícula.
- *off-shell*: Son aquellos que se obtienen sin imponer las ecuaciones del movimiento, por lo que son mayores que los on-shell. Coinciden con el número de componentes del campo menos el número de transformaciones gauge del mismo.

Los grados de libertad on-shell de los bosones y fermiones de un mismo multiplete deben coincidir siempre, sin embargo, los bosones suelen tener menos grados de libertad off-shell que los fermiones. Para compensar esto, se introducen campos bosónicos auxiliares en la acción, cuya contribución es puramente algebraica y no involucra derivadas.

En este caso consideraremos únicamente los grados de libertad on-shell. En dimensión D , el campo gravitacional tiene $D(D-3)/2$ y el gravitino $(D-3)2^{[(D-2)/2]}$, luego en $D=4$ ambos tienen dos grados de libertad y, por tanto, son los únicos campos que forman el multiplete. Por otro lado, en $D=11$ se tienen 44 grados de libertad para los frames y 128 para el gravitino, luego se debe introducir un campo bosónico al multiplete que cuente con los 84 grados de libertad restantes. Geométricamente, los bosones se describen mediante p -formas diferenciales $A_{\mu_1\dots\mu_p}$, las cuales tienen $\binom{D-2}{p}$ grados de libertad, por tanto, podemos describir los grados de libertad restantes mediante un bosón gauge representado por una 3-forma diferencial $A_{\mu\nu\rho}$. Se tiene por tanto que esta teoría está descrita por el multiplete

$$(e^a{}_\mu, A_{\mu\nu\rho}, \Psi_\mu). \quad (3.66)$$

A continuación, queremos postular una acción y unas transformaciones de supersimetría adecuadas para esta teoría. La acción contará con el término universal obtenido en (3.31) más otros términos debidos a la presencia del campo $A_{\mu\nu\rho}$. Primero debemos notar que, al ser una 3-forma gauge, tenemos las siguientes relaciones⁷:

$$\begin{aligned} \delta_\theta A_{\mu\nu\rho} &= 3 \partial_{[\mu} \theta_{\nu\rho]}, \\ F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4 \partial_{[\mu} A_{\nu\rho\sigma]}, \\ \partial_{[\tau} F_{\mu\nu\rho\sigma]} &= 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

que son, en coordenadas, la transformación del campo $A_{\mu\nu\rho}$ respecto al parámetro gauge $\theta_{\nu\rho}$ (que es una 2-forma), la definición del tensor de Faraday (que, en este caso es una 4-forma) y la identidad de Bianchi, respectivamente. Además, el término cinético de este campo gauge vendrá dado por

$$S_{A,cin} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{11}x e \left[-\frac{1}{4!} F^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho\sigma} \right], \quad (3.68)$$

⁷En la sección A.1.3 del apéndice se encuentra una breve explicación de las bases de esta formulación.

La acción tendrá por tanto la contribución universal obtenida en (3.31) más el término cinético (3.68) más términos extra que se deben añadir para mantener la supersimetría. Entre ellos se encuentra un término de tipo *Chern-Simons*

$$S_{CS} = -\frac{\sqrt{2}}{6\kappa^2} \int F_{(4)} \wedge F_{(4)} \wedge A_{(3)} = -\frac{\sqrt{2}}{(144\kappa)^2} \int d^{11}x \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{11}} F_{\mu_1 \dots \mu_4} F_{\mu_5 \dots \mu_8} A_{\mu_9 \mu_{10} \mu_{11}}. \quad (3.69)$$

Se trata además de un *término topológico*, lo que implica que no se ve afectado por la geometría del universo, dado que no está vinculado a la métrica. Además, al no depender de esta última, no contribuye al tensor de energía-momento, y en consecuencia, solo influye en las ecuaciones de movimiento de los campos de gauge. Por otro lado, aunque en esta acción aparezca explícitamente el campo A , esta es invariante bajo la transformación gauge definida en (3.67).

Finalmente, la acción total que gobierna el sistema es

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{11}x e \left[R - \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu(\hat{\omega}) \Psi_\rho - \frac{1}{2 \cdot 4!} F^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\sqrt{2}}{192} \bar{\Psi}_\nu \left(\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta\nu\rho} + 12\gamma^{\alpha\beta} g^{\gamma\nu} g^{\delta\rho} \right) \Psi_\rho \hat{F}_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] + S_{CS} \quad (3.70)$$

con las transformaciones de supersimetría correspondientes:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon e^a{}_\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu \\ \delta_\epsilon \Psi_\mu = D_\mu(\omega + K) \epsilon + \frac{\sqrt{2}}{288} \left(\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_\mu - 8\gamma^{\beta\gamma\delta} \delta_\mu^\alpha \right) \hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon \\ \delta_\epsilon A_{\mu\nu\rho} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \bar{\epsilon} \gamma_{[\mu\nu} \Psi_{\rho]} \end{cases} \quad (3.71)$$

Se están utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu\rho} &= -\frac{1}{4} (\bar{\Psi}_\mu \gamma_\rho \Psi_\nu - \bar{\Psi}_\nu \gamma_\mu \Psi_\rho + \bar{\Psi}_\rho \gamma_\nu \Psi_\mu), \\ \hat{\omega}_{\mu ab} &= \omega_{\mu ab} + K_{\mu ab} + \frac{1}{16} \bar{\Psi}_\nu \gamma^{\nu\rho}{}_{\mu ab} \Psi_\rho, \\ \hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma} &= F_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \bar{\Psi}_{[\mu} \gamma_{\nu\rho} \Psi_{\sigma]}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde la torsión K utilizada coincide con la obtenida en (3.54) cuando consideramos las variaciones a órdenes superiores en Ψ_μ .

La relevancia de esta teoría reside en varios aspectos. En primer lugar, en esta teoría no es posible introducir campos de materia como el multiplete quiral o el multiplete gauge, ni tampoco una constante cosmológica, lo que hace que la teoría esté fijada y no haya variantes. Por otro lado, al aplicar la reducción dimensional a esta teoría para obtener una teoría en $D = 4$, resulta que se recupera la de supergravedad con $\mathcal{N} = 8$, que es el valor máximo de gravitinos permitido en esta dimensión. Por último, otra razón que hace interesante el estudio de la supergravedad en $D = 11$

es el hecho de que esta debe ser el límite de bajas energías de la *teoría M*, una teoría actualmente desconocida cuyo objetivo es unificar las teorías de cuerdas en una teoría 11-dimensional.

3.6.2. Soluciones clásicas: M2-branas y M5-branas

Como en cualquier teoría física, al realizar variaciones a la acción, se obtienen las ecuaciones del movimiento de los diversos campos. En este caso nos centraremos en obtener unas soluciones denominadas *black p-brane solutions*, que son soluciones clásicas de las ecuaciones del movimiento interpretadas como una extensión dimensional de los agujeros negros obtenidos en relatividad general. Más concretamente, nos centraremos en las *extremal p-branes*, que son el análogo al agujero negro extremal de Reissner-Nordström definido en el último apartado de la sección 2.3.

Las *branas* son objetos utilizados en teoría de cuerdas que sirven para extender el concepto de partícula puntual, por lo que una p -brana representa un objeto $(p+1)$ -dimensional (p dimensiones espaciales y una temporal) que se propaga en el espacio-tiempo⁸. De esta manera, la presencia de una p -brana en un espacio-tiempo D -dimensional, rompe la simetría del mismo bajo el grupo de Lorentz $SO(D-1, 1)$ para dar lugar al grupo de simetría $SO(p, 1) \times SO(D-p-1)$. Esto se interpreta como una división del espacio-tiempo en dos bloques, un bloque de dimensión $p+1$ con simetría Lorentz correspondiente a las dimensiones donde vive la p -brana y otro de dimensión $D-p-1$ con simetría bajo rotaciones correspondiente a las dimensiones transversas a la p -brana. Los ejemplos más simples de espacios con estas simetrías son el espacio-tiempo de Minkowski y el espacio euclídeo, respectivamente.

Otra propiedad de las p -branas es que estas se acoplan eléctricamente o magnéticamente a n -formas definidas en el espacio-tiempo. Para entender esto centrémonos primero en el caso de una partícula puntual (0-brana) en $D=4$. Si consideramos que está cargada bajo la interacción eléctrica, estará relacionada con un campo gauge $A_{(1)}$, que es una 1-forma. Este campo da lugar a una 2-forma tensor de Faraday $F_{(2)}$ con componentes temporales⁹ F_{0i} no nulas (puesto que es de tipo eléctrico), por lo que su dual $\tilde{F}_{(2)} = \star F_{(2)}$ será de tipo magnético (con componentes espaciales F_{ij} no nulas). Si consideramos la 1-forma relacionada con este tensor, $\tilde{A}_{(1)}$, tendremos que la partícula puntual se acopla eléctricamente a la 1-forma $A_{(1)}$ y magnéticamente a la 1-forma $\tilde{A}_{(1)}$. En general, una p -brana en un espacio-tiempo D -dimensional se acoplará eléctricamente a una $(p+1)$ -forma y magnéticamente a una $(D-p-3)$ -forma. Recíprocamente, una p -forma se acopla eléctricamente a una $(p-1)$ -brana y magnéticamente a una $(D-p-3)$ -brana, por lo que en el caso $D=11$ SUGRA, el campo $A_{\mu\nu\rho}$ se acoplará eléctricamente a una 2-brana y magnéticamente a una 5-brana.

⁸Entendemos así que una partícula puntual es una 0-brana, una cuerda es una 1-brana y una membrana es una 2-brana.

⁹Los índices i, j, \dots denotan las componentes espaciales, es decir, toman valores $1, \dots, D-1$.

Espinores de Killing

Otra característica importante que impondremos a las soluciones es que sean supersimétricas, es decir, invariantes bajo las transformaciones de supersimetría. De forma esquemática las transformaciones de supersimetría se reducen a las relaciones:

$$\delta_\epsilon(\text{bosón}) = \epsilon(\text{fermión}), \quad \delta_\epsilon(\text{fermión}) = \epsilon(\text{bosón}). \quad (3.73)$$

Denotando por $(\text{bosón})_0$ y $(\text{fermión})_0$ a las soluciones, para que sean supersimétricas se debe cumplir:

$$\delta_\epsilon(\text{bosón})_0 = 0, \quad \delta_\epsilon(\text{fermión})_0 = 0. \quad (3.74)$$

La primera de ellas se verifica trivialmente pues en las soluciones clásicas los campos fermiónicos siempre se anulan, por lo que es la segunda la que contiene toda la información. A los espinores que permiten que las soluciones sean supersimétricas al satisfacer la segunda ecuación de (3.74) se les denomina *espinores de Killing*. En este caso concreto, serían aquellos que verifiquen la siguiente ecuación diferencial:

$$D_\mu(\omega + K)\epsilon + \frac{\sqrt{2}}{288} \left(\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_\mu - 8\gamma^{\beta\gamma\delta} \delta_\mu^\alpha \right) \hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon = 0. \quad (3.75)$$

Los espinores de Killing están determinados por un número finito de constantes e indican supersimetrías globales residuales en las soluciones. Podemos ver esto de forma más clara considerando un ejemplo simple: el caso de supergravedad pura con $\mathcal{N} = 1$ y $D = 4$, donde $(g_{\mu\nu})_0 = \eta_{\mu\nu}$ y $(\Psi_\mu)_0 = 0$ es la solución más simple. En este caso la condición que determina los espinores de Killing viene dada por la ecuación

$$D_\mu \epsilon = \partial_\mu \epsilon = 0, \quad (3.76)$$

donde en la segunda igualdad se ha utilizado que la conexión del espín es nula en el espacio-tiempo de Minkowski. Por tanto, los espinores de Killing de esta teoría son cuatro espinores de Majorana constantes. Como bien sabemos, los parámetros que determinan la supersimetría global son espinores de Majorana constantes, luego comprobamos así que los espinores de Killing determinan supersimetrías globales.

Volviendo al caso 11-dimensional, se tiene que la ecuación (3.75) da lugar a dos soluciones diferentes, denominadas *M2-branas* y *M5-branas*, correspondientes a 2-branas y 5-branas, respectivamente, como ya se había mencionado.

M2-branas

En este caso la solución viene dada por la métrica

$$ds^2 = H^{-2/3} ds_{M3}^2 + H^{1/3} ds_{\mathbb{R}^8}^2, \quad (3.77)$$

donde ds_{M3}^2 representa la métrica de Minkowski en las 3 dimensiones sobre las que se encuentra la brana, $ds_{\mathbb{R}^8}^2$ representa la métrica euclídea en las 8 dimensiones restantes y H es una función.

Por otro lado, la 4-forma tensor de Faraday de una M2-brana viene dada por

$$F = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dH^{-1}. \quad (3.78)$$

Se trata de un tensor de tipo eléctrico ya que las componentes temporales F_{0ijk} no se anulan.

La ecuación de los espinores de Killing (3.75) implica que la función H debe satisfacer la ecuación de Laplace en 8 dimensiones, por lo que una solución asintóticamente plana vendrá dada por la función armónica

$$H(r) = 1 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^6, \quad (3.79)$$

donde r es la coordenada radial del espacio euclídeo 8-dimensional \mathbb{R}^8 y $r_2 = 32\pi^2 N_2 l_p^6$, siendo N_2 el número de M2-branas y l_p la longitud de Planck. Se tiene por tanto una singularidad en el punto $r = 0$, que es considerado como el *horizonte* de la M2-brana. En un entorno muy cercano al horizonte ($r \rightarrow 0$) se tiene que

$$H^{1/3} \sim \left(\frac{r_2}{r}\right)^2, \quad (3.80)$$

por lo que, utilizando coordenadas esféricas para la métrica euclídea:

$$ds_{\mathbb{R}^8}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_7^2, \quad (3.81)$$

la métrica de la M2-brana viene dada por

$$ds^2 \sim \left(\frac{r}{r_2}\right)^4 ds_{M3}^2 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 dr^2 + r_2^2 d\Omega_7^2. \quad (3.82)$$

Esta métrica define un espacio-tiempo $AdS_4 \times S^7$, donde el radio de cada espacio es $r_2/2$ y r_2 , respectivamente. Podemos comprobar que se trata de una analogía del agujero negro extremal de Reissner-Nordström con carga eléctrica al comparar esta métrica con la obtenida en (2.40), donde el espacio-tiempo en un entorno del horizonte era $AdS_2 \times S^2$.

M5-branas

En el caso de la M5-brana, el tensor de Faraday viene dado por

$$F = \star(dx^0 \wedge \dots \wedge dx^5 \wedge dH^{-1}), \quad (3.83)$$

por lo que las componentes magnéticas F_{ijkl} son no nulas, siendo así un tensor de tipo magnético.

Por otro lado, la métrica es similar a la del caso anterior:

$$ds^2 = H^{-1/3} ds_{M6}^2 + H^{2/3} ds_{\mathbb{R}^5}^2, \quad (3.84)$$

donde ds_{M6}^2 representa la métrica de Minkowski en las 6 dimensiones sobre las que se encuentra la brana, $ds_{\mathbb{R}^5}^2$ representa la métrica euclídea en las 5 dimensiones restantes y H es una función que, debido a la ecuación de los espinores de Killing, satisface la ecuación de Laplace en 5

dimensiones. Se puede expresar entonces como una función

$$H(r) = 1 + \left(\frac{r_5}{r}\right)^3, \quad (3.85)$$

donde r es la coordenada radial de \mathbb{R}^5 y $r_5 = \pi^2 N_5 l_p^3$, siendo N_5 el número de M5-branas y l_p la longitud de Planck. Observamos de nuevo que se tiene una singularidad en $r = 0$, dando lugar al horizonte de la M5-brana. De manera análoga al caso anterior, al estudiar geometría del espacio-tiempo en un entorno del horizonte se obtiene

$$ds^2 \sim \left(\frac{r}{r_5}\right) ds_{M6}^2 + \left(\frac{r_5}{r}\right)^2 dr^2 + r_5^2 d\Omega_4^2, \quad (3.86)$$

que es la métrica de un espacio $AdS_7 \times S^4$, donde el radio de cada espacio es $2r_5$ y r_5 , respectivamente. En este caso nos encontramos ante la analogía del agujero negro extremal de Reissner-Nordström con carga magnética.

Hemos obtenido así dos soluciones a la teoría de supergravedad en $D = 11$ que representan analogías de agujeros negros con cargas eléctrica y magnética. Sin embargo, mientras que en relatividad general ($D = 4$), el agujero negro estaba representado por una partícula puntual con masa M y carga Q (eléctrica o magnética), en $D = 11$ SUGRA los agujeros negros se representan mediante 2-branas con carga eléctrica o 5-branas con carga magnética.

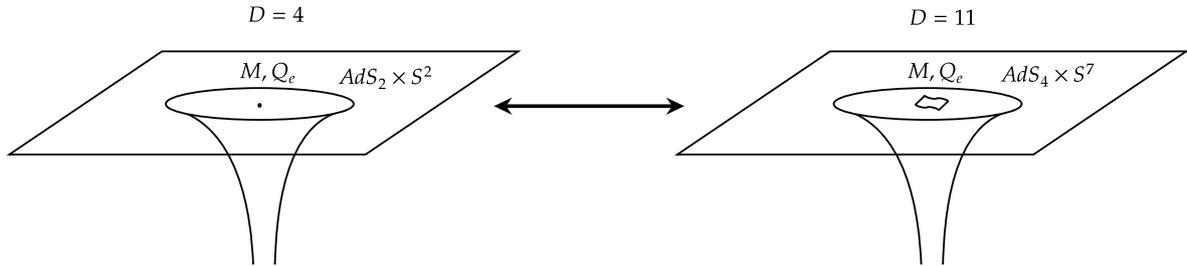


Figura 3.2: Agujero negro extremal de R-N con carga eléctrica en $D = 4$ y $D = 11$.

Capítulo 4

Más allá de supergravedad pura

En el capítulo anterior se introdujo la supergravedad y se estudiaron algunas teorías de supergravedad pura, es decir, teorías que contienen únicamente a los campos del multiplete gravitatorio $(e^a{}_\mu, \Psi_\mu)$. Para continuar con el estudio de la supergravedad, introducimos en este capítulo las teorías de supergravedad acopladas a campos de materia y las teorías de supergravedad con supersimetría extendida ($\mathcal{N} > 1$). Este capítulo está basado en los capítulos 4 a 8 y 13 y 14 de [7], los capítulos 11, 12, 18 y 23 de [6] y el capítulo 12 de [2].

4.1. $\mathcal{N} = 1, D = 4$ SUGRA acoplada a campos de materia

Comenzaremos introduciendo a la teoría de supergravedad pura en $D = 4$ del capítulo anterior los otros dos supermultipletes mencionados en la sección 3.3. Consideraremos n multipletes quirales¹ (ϕ^i, ψ^i) y $\dim G$ multipletes gauge (A_μ^A, λ^A) , representados por la teoría supersimétrica de Yang-Mills (SYM), donde $i = 1, \dots, n$ y $A = 1, \dots, \dim G$, siendo G el grupo de Lie de la teoría de Yang Mills. Ambos constituyen la materia presente en el universo y por esa razón se denominan también *multipletes de materia*.

Contando los grados de libertad on-shell de los bosones y de los fermiones se obtiene un valor de dos estados de helicidad por campo, sin embargo, al contar los grados de libertad off-shell observamos que los bosones tienen menor cantidad, lo que en nuestro caso resolveremos introduciendo dos campos bosónicos auxiliares. Las contribuciones de estos campos serán puramente algebraicas y, por tanto, estos no tendrán dinámica, determinando así el potencial escalar de la teoría, como veremos más adelante.

4.1.1. Acción bosónica

Para el planteamiento de esta sección únicamente necesitamos considerar la contribución a la acción de los campos bosónicos, aunque más adelante se hará algún comentario sobre el resto de contribuciones. Además, la deducción que haremos de la acción estará menos detallada que en

¹Se omiten los índices espinoriales.

capítulos anteriores, ya que requiere de un conocimiento profundo de la teoría de supersimetría global (el procedimiento detallado se puede encontrar en el capítulo 17 de [6]).

Comenzamos por el campo gauge A_μ^A , para el que consideramos la misma contribución que en (1.82) salvo por una cierta matriz simétrica $N_{AB}(\phi)$ cuyas componentes son funciones complejas dependientes del campo escalar:

$$e^{-1}\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}(\text{Re } N_{AB}) F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B}. \quad (4.1)$$

Notemos que la matriz $\text{Re } N_{AB}$ debe ser definida positiva, pues proporciona la contribución del término cinético. No obstante, esta no es la contribución total del campo gauge, sino que se debe tener en cuenta otro término resultante de considerar la teoría gauge más general posible. Tenemos entonces:

$$e^{-1}\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}(\text{Re } N_{AB}) F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B} + \frac{1}{8}e^{-1}(\text{Im } N_{AB}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^B, \quad (4.2)$$

donde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita. Observamos que la métrica no contribuye de ninguna manera a este nuevo término pues el factor e^{-1} se cancela y los tensores de Faraday están contraídos con el símbolo de Levi-Civita, por lo que se trata de un término topológico.

Por otro lado tenemos el campo escalar del multiplete quiral. En la acción del campo escalar introducida en la sección 1.3 se utilizó un término cinético del tipo $\sim \delta_{ij}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j$, sin embargo, esta no es la contribución más general a tener en cuenta. Para ello, se deben utilizar los denominados *modelos σ* , en los cuales se considera la tupla de los n campos escalares complejos ϕ^i y sus conjugados $\bar{\phi}^{\bar{i}}$ como las $2n$ coordenadas de una *variedad de Kähler*² n -dimensional y se define el término cinético como

$$e^{-1}\mathcal{L}_{\phi,cin} = -K_{i\bar{j}}D_\mu\phi^iD^\mu\bar{\phi}^{\bar{j}}, \quad (4.3)$$

donde $K_{i\bar{j}}$ es la *métrica de Kähler* de este espacio. Como toda métrica de Kähler, está determinada por una función real $\mathcal{K}(\phi, \bar{\phi})$, denominada *potencial de Kähler*, de la siguiente manera:

$$K_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\phi^i\partial\bar{\phi}^{\bar{j}}}. \quad (4.4)$$

Además, este potencial transforma bajo *transformaciones de Kähler* $\delta\mathcal{K} = \theta^A[r_A(\phi) + \bar{r}_A(\bar{\phi})]$. Veamos ahora cómo deben ser las derivadas covariantes utilizadas en (4.3). Para ello, consideraremos que el campo escalar ϕ^i está cargado bajo la interacción gauge del campo A_μ^A , por lo que su derivada covariante³ viene dada por:

$$\begin{aligned} D_\mu\phi^i &= \partial_\mu\phi^i - A_\mu^A(t_A)^i_j\phi^j \equiv \partial_\mu\phi^i - A_\mu^A k_A^i, \\ D_\mu\bar{\phi}^{\bar{i}} &= (D_\mu\phi^i)^*, \end{aligned} \quad (4.5)$$

²Se explican en mayor detalle las variedades complejas y las variedades de Kähler en el capítulo B del anexo.

³En una teoría gauge general, la derivada covariante de un campo respecto a un campo gauge viene dada por la derivada parcial del campo menos un factor que se corresponde con la variación que sufre el campo al realizar una transformación infinitesimal con parámetro de la transformación el campo gauge, es decir: $D_\mu = \partial_\mu - \delta(A_\mu^A)$.

donde se han definido los campos $k_A^i = (t_A)^i_j \phi^j$. Imponiendo que la métrica de Kähler sea invariante bajo transformaciones gauge ($\delta_\theta K_{i\bar{j}} = 0$) resulta que los campos k_A^i son vectores de Killing holomorfos. Por tanto, cuando la variedad de Kähler esté descrita por un *espacio coset*⁴ G_K/H , el grupo gauge G deberá ser un subgrupo de G_K : $G \leq G_K$.

Siguiendo el razonamiento utilizado en la sección B.2.2, existen unas funciones reales $\mathcal{P}_A(\phi, \bar{\phi})$, denominadas *potenciales de Killing*, que se relacionan con los vectores de Killing como:

$$k_A^i = -iK^{i\bar{j}}\partial_{\bar{j}}\mathcal{P}_A(\phi, \bar{\phi}) \quad (4.6)$$

y además satisfacen la siguiente ecuación:

$$r_A(\phi) = k_A^i \partial_i \mathcal{K}(\phi, \bar{\phi}) + i \mathcal{P}_A(\phi, \bar{\phi}). \quad (4.7)$$

Por otro lado, el potencial del campo escalar viene dado por

$$V(\phi, \bar{\phi}) = e^{\kappa^2 \mathcal{K}} \left(K^{i\bar{j}} \nabla_i W \nabla_{\bar{j}} \bar{W} - 3\kappa^2 |W|^2 \right) + \frac{1}{2} (\text{Re } N^{-1})^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B, \quad (4.8)$$

donde se ha utilizado el *superpotencial* $W(\phi)$, una función holomorfa arbitraria que determina la interacción. Se definen sus derivadas covariantizadas respecto a la denominada *conexión de Kähler* como:

$$\begin{aligned} \nabla_i W &= \partial_i W + \kappa^2 (\partial_i \mathcal{K}) W, \\ \nabla_{\bar{i}} \bar{W} &= \partial_{\bar{i}} \bar{W} + \kappa^2 (\partial_{\bar{i}} \mathcal{K}) \bar{W}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A partir de la expresión del potencial escalar definimos los dos siguientes campos bosónicos:

$$\begin{aligned} F_i &= e^{\frac{1}{2}\kappa^2 \mathcal{K}} \nabla_i W, \\ D_A &= \mathcal{P}_A, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y reformulamos entonces el potencial como

$$V(\phi, \bar{\phi}) = -3\kappa^2 e^{\kappa^2 \mathcal{K}} |W|^2 + K^{i\bar{j}} F_i \bar{F}_{\bar{j}} + \frac{1}{2} (\text{Re } N^{-1})^{AB} D_A D_B. \quad (4.11)$$

El primer término es una contribución negativa debida a la supergravedad, es decir, no se tiene en una teoría de supersimetría global (donde $\kappa \rightarrow 0$), mientras que el segundo y tercer término provienen de la teoría de supersimetría global (a excepción de la contribución en el F -término de la conexión de Kähler) y se corresponden con los campos bosónicos auxiliares mencionados en la introducción del capítulo.

Finalmente, teniendo en cuenta todas estas contribuciones junto con el término gravitatorio

⁴Estos espacios son de gran importancia en supergravedad, por lo que se ha dedicado el capítulo C del anexo a introducir sus fundamentos.

representado por el escalar de Ricci, obtenemos la siguiente acción para los bosones del sistema:

$$S_{bos} = \int d^4x e \left[\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{4} (\text{Re } N_{AB}) F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B} + \frac{1}{8} e^{-1} (\text{Im } N_{AB}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^B - K_{i\bar{j}} D_\mu \phi^i D^\mu \bar{\phi}^{\bar{j}} - V(\phi, \bar{\phi}) \right] \quad (4.12)$$

A continuación, presentamos las transformaciones de supersimetría que sufren los campos involucrados. Por un lado tenemos las de los bosones, las cuales no varían respecto a las transformaciones ya conocidas:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon e^a{}_\mu &= \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu, \\ \delta_\epsilon \phi^i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \psi^i, \\ \delta_\epsilon A_\mu^A &= -\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^A. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por otro lado, las transformaciones de los fermiones sí que se ven afectadas debido al superpotencial W y los campos auxiliares F_i y D_A . Cada uno de ellos contribuye al fermión correspondiente, resultando así en las siguientes transformaciones⁵:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Psi_\mu &= D_\mu \epsilon - \frac{1}{2} \kappa^2 e^{\frac{1}{2} \kappa^2 \mathcal{K}} W \gamma_\mu \epsilon, \\ \delta_\epsilon \psi^i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \sigma^\mu \partial_\mu \phi^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} F^i, \\ \delta_\epsilon \lambda^A &= \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma_* (\text{Re } N^{-1})^{AB} D_B, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde se ha utilizado el elemento de mayor rango del álgebra de Clifford $\gamma_* := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

A pesar de que no estemos considerando los términos fermiónicos, es importante destacar que, al igual que en el caso de supergravedad con constante cosmológica, el gravitino⁶ adquiere un término de masa dado por $m = \kappa^2 e^{\frac{1}{2} \kappa^2 \mathcal{K}} W$. Al comparar la nueva variación del gravitino con la del caso con constante cosmológica (3.59), identificamos $g \equiv \frac{1}{2} \kappa^2 e^{\frac{1}{2} \kappa^2 \mathcal{K}} W$ y utilizando la fórmula para la masa obtenida en la sección 3.5, $m = (D - 2)g$, observamos que, al sustituir el valor de g , coincide con la masa presentada anteriormente. Esta observación resalta la similitud entre ambas teorías de supergravedad, permitiéndonos entender el caso con constante cosmológica como una simplificación de una teoría en la que interactúan más campos supersimétricos.

Hemos desarrollado así una teoría de supergravedad acoplada a campos de materia en los que el multiplete gauge está descrito por un grupo de Lie no abeliano y bajo el cual están cargados los campos. Estas teorías se denominan *gauged supergravities* y nos estamos centrando en el caso $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$. Debemos notar que la teoría está completamente determinada por el grupo gauge G , las matrices complejas $N_{AB}(\phi)$, el superpotencial $W(\phi)$, el potencial de Kähler $\mathcal{K}(\phi, \bar{\phi})$

⁵Se están omitiendo los términos que incluyen a los fermiones Ψ_μ , ψ^i y λ^A .

⁶Con el resto de fermiones también ocurre lo mismo, aunque nos centramos en este caso por sus implicaciones con lo ya estudiado en secciones anteriores.

y los potenciales de Killing $\mathcal{P}_A(\phi, \bar{\phi})$. Además, observamos que en esta teoría las variaciones de la acción de los fermiones tienen términos extra denominados *fermion shifts*, que contribuyen también a la acción cuadráticamente mediante un potencial escalar. Finalmente, también se observan contribuciones a la acción correspondientes a términos de masa para los fermiones.

4.1.2. Soluciones de fondo

Nos centramos ahora en estudiar las soluciones de fondo del sistema, para lo que impondremos un universo homogéneo e isótropo, esto es, los campos tomarán el mismo valor en cada punto del espacio-tiempo y no contarán con direcciones preferidas. Por tanto, los campos escalares serán constantes y todos los campos espinoriales o vectoriales deberán ser nulos, pues en caso contrario especificarían una dirección privilegiada. Además, las métricas que respetan estas condiciones son las de los espacios de Minkowski, de Sitter o Anti de Sitter, es decir, los únicos espacios maximalmente simétricos⁷. Nos encontramos así ante un tipo de soluciones en las que únicamente los campos escalares y la métrica son distintos de cero.

Además de esto, queremos obtener unas soluciones supersimétricas, por lo que, denotando por $(\text{bosón})_0$ y $(\text{fermión})_0$ a las soluciones de fondo, se debe cumplir:

$$\delta_\epsilon(\text{bosón})_0 = 0, \quad \delta_\epsilon(\text{fermión})_0 = 0. \quad (4.15)$$

La primera de ellas se verifica trivialmente pues los campos fermiónicos se anulan. Para el caso de los fermiones nos fijaremos primero en las transformaciones de los campos ψ^i y λ^A de (4.14). El primer término de cada transformación se anula pues el campo escalar es constante y el campo A_μ^A es nulo luego $F_{\mu\nu}^A$ también. Por tanto, para que se verifique la segunda condición de (4.15) se deben anular los campos bosónicos auxiliares F_i y D_A . En caso contrario se tendría una ruptura espontánea de la supersimetría.

Respecto a las variaciones del gravitino, se debe verificar la ecuación de los espinores de Killing del sistema:

$$D_\mu \epsilon - \frac{1}{2} \kappa^2 e^{\frac{1}{2} \kappa^2 \mathcal{K}} W \gamma_\mu \epsilon = 0. \quad (4.16)$$

Por otro lado, bajo las restricciones de unas soluciones de fondo homogéneas, isotrópicas y supersimétricas, se obtiene que el potencial escalar viene dado por

$$V(\phi, \bar{\phi}) = -3\kappa^2 e^{\kappa^2 \mathcal{K}} |W|^2 \leq 0, \quad (4.17)$$

que es menor o igual que cero según si el gravitino tiene masa o no, respectivamente (esto se debe a que la masa del gravitino es proporcional a W). Obtenemos así una teoría de supergravedad con constante cosmológica negativa o nula, que resulta en un espacio-tiempo Anti de Sitter o Minkowski. Por tanto, en una teoría $\mathcal{N} = 1, D = 4$ de gauged supergravity la solución de fondo es AdS o Minkowski. Para el caso AdS, obtenemos la relación entre la masa y la constante

⁷Los espacios maximalmente simétricos son los espacios homogéneos e isótropos. En el contexto de la geometría diferencial, son aquellos que poseen el máximo número de vectores de Killing que, para una variedad n -dimensional, es $n(n+1)/2$.

cosmológica Λ reescribiendo la ecuación (3.65):

$$\Lambda = -3m^2 \Rightarrow m^2 = -\frac{1}{3}\Lambda. \quad (4.18)$$

Tomando $\Lambda/\kappa^2 = V$, se obtiene $m = \kappa^2 e^{\frac{1}{2}\kappa^2 \mathcal{K}} W$, mismo valor que el comentado en la sección anterior, por lo que todos estos razonamientos concuerdan entre sí.

En caso de observar una ruptura espontánea de la supersimetría ($F_i \neq 0$), el gravitino adquiriría masa mediante un proceso análogo al mecanismo de Higgs denominado *supermecanismo de Higgs*. En este proceso, el gravitino se “come” los grados de libertad del *Goldstino* ψ_i (el análogo fermiónico al bosón de Goldstone en el mecanismo de Higgs) y así obtiene los grados de libertad suficientes para describir un gravitino masivo.

4.1.3. Recuperando el caso de supersimetría global

Por último, resulta interesante mencionar que, al “apagar” la gravedad ($\kappa \rightarrow 0$) en esta teoría de gauged supergravity, se recupera una teoría gauge con supersimetría global. Para ello, se deben realizar los cambios $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ y $\Psi_\mu \rightarrow 0$, que implican que $F_i \rightarrow \partial_i W$ y $D_A \rightarrow D_A$. De esta manera, obtenemos el potencial escalar utilizado en supersimetría global:

$$V(\phi, \bar{\phi}) = K^{i\bar{j}} F_i \bar{F}_{\bar{j}} + \frac{1}{2} (\text{Re } N^{-1})^{AB} D_A D_B, \quad (4.19)$$

el cual es positivo⁸ siempre que F_i o D_A sean no nulos. En este caso, se mantiene la supersimetría si, y solo si, $V = 0$ ya que, en caso de que $V > 0$, necesariamente alguno de los campos auxiliares sería no nulo, resultando así en una ruptura de la supersimetría.

4.2. Una visión general de la supergravedad extendida

Hasta este momento nos hemos dedicado a estudiar teorías de supergravedad con $\mathcal{N} = 1$, es decir, con un único gravitino, y nos hemos centrado en las dimensiones $D = 4$ y $D = 11$ por ser las más destacadas. Sin embargo, existen teorías de supergravedad en dimensiones $5 \leq D \leq 10$ y con $2 \leq \mathcal{N} \leq 8$ gravitinos, denominando a estas últimas teorías de *supergravedad extendida*, aunque no cualquier combinación de D y \mathcal{N} es válida. En la tabla 4.1 se puede ver de manera esquemática la estructura de las diversas teorías⁹.

En la casilla superior se encuentra el número de generadores fermiónicos del álgebra (supercargas), indicando el número de supersimetrías que posee la teoría. Cada entrada de la tabla indica la existencia de una teoría con la dimensión y número de supersimetrías indicadas, indicando en cada caso el valor de \mathcal{N} de la teoría. En $D = 11$ la teoría es única y tiene un valor de $\mathcal{N} = 1$, luego se utiliza una M para referirse a que dicha teoría es la base de la teoría M, mientras que en $D = 10$ se tienen tres tipos de teorías: de tipo IIA, IIB o I (las dos primeras con $\mathcal{N} = 2$ y la última con $\mathcal{N} = 1$), cada una relacionada con su correspondiente teoría de cuerdas. Además,

⁸Recordemos que las matrices $K_{i\bar{j}}$ y $\text{Re } N_{AB}$ son definidas positivas ya que forman parte de las contribuciones cinéticas de los campos ϕ y A_μ , respectivamente.

⁹Se trata de una versión simplificada de la tabla 12.2 de [6].

D	32	24	20	16	12	8	4
11	M						
10	IIA IIB			I, \circ			
9	$\mathcal{N} = 2$			$\mathcal{N} = 1, \circ$			
8	$\mathcal{N} = 2$			$\mathcal{N} = 1, \circ$			
7	$\mathcal{N} = 4$			$\mathcal{N} = 2, \circ$			
6	$\mathcal{N} = 4$	$\mathcal{N} = 3$		$\mathcal{N} = 2, \circ, \diamond$		$\mathcal{N} = 1, \circ, \star, \diamond$	
5	$\mathcal{N} = 8$	$\mathcal{N} = 6$		$\mathcal{N} = 4, \circ$		$\mathcal{N} = 2, \circ, \star$	
4	$\mathcal{N} = 8$	$\mathcal{N} = 6$	$\mathcal{N} = 5$	$\mathcal{N} = 4, \circ$	$\mathcal{N} = 3, \circ$	$\mathcal{N} = 2, \circ, \star$	$\mathcal{N} = 1, \circ, \star$

Tabla 4.1: Resumen de las teorías de supergravedad.

dentro de una misma columna, se pueden obtener las teorías inferiores mediante reducción dimensional, separando los dos tipos en $D = 10$, pues al aplicar reducción dimensional en $D = 11$ se obtiene la teoría de supergravedad de tipo IIA. Finalmente, al aplicar reducción dimensional a estas teorías hasta dimensión $D = 4$, se obtiene la teoría maximal de $\mathcal{N} = 8$, como ya se había mencionado en la sección 3.6. En la figura 4.1 se encuentra un esquema de cómo se relacionan las teorías con 32 supercargas entre ellas y con las teorías de cuerdas. No se ha incorporado en la tabla ninguna teoría con $\mathcal{N} = 7$, ya que su contenido de campos es idéntico al de $\mathcal{N} = 8$. De hecho, cualquier intento de desarrollar una teoría con $\mathcal{N} = 7$ termina siendo equivalente a una teoría con $\mathcal{N} = 8$.

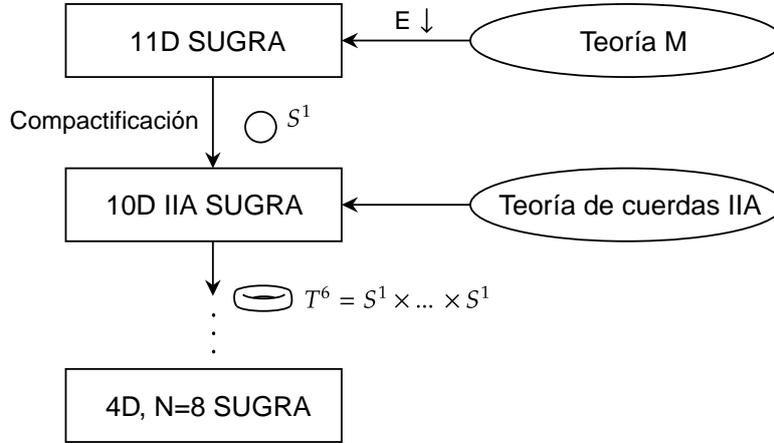


Figura 4.1: Esquema de las diversas teorías.

Centrémonos ahora en el contenido de campos que puede tener cada teoría. Como ya sabemos, además del multiplete gravitatorio existen los multipletes gauge y quiral, aunque también existe uno similar a este último denominado *hipermultiplete* y un multiplete conteniendo 2-formas denominado *multiplete tensorial*. Tenemos el siguiente resumen sobre los que pueden existir en cada teoría, indicando en cada caso el valor máximo del espín que pueden tener las partículas del multiplete:

1. Multiplete gravitatorio ($s_{\text{máx}} = 2$): contiene al gravitón y a los \mathcal{N} gravitinos, además de otros campos que pueda requerir la teoría, como en el caso de la supergravedad en $D = 11$.

2. Multiplete gauge ($s_{\text{máx}} = 1$): según la teoría contiene un bosón gauge ($s = 1$), uno o más gauginos ($s = 1/2$) y puede contener escalares. Puede ser un único multiplete o tratarse de $\dim G$ multipletes, donde G es el grupo gauge que describe las interacciones. Existe únicamente cuando se tienen 16 o menos supercargas. En la tabla 4.1 se indica con un símbolo \circ .
3. Multiplete quirral o hipermultiplete ($s_{\text{máx}} = 1/2$): el multiplete quirral está formado por un campo escalar y un fermión y existe para $\mathcal{N} = 1$, mientras que el hipermultiplete está formado por 4 escalares y 2 fermiones y existe para $\mathcal{N} = 2$. En caso de que en la teoría haya $\dim G$ multipletes gauge descritos por el grupo gauge G , los campos del multiplete quirral o hipermultiplete pueden estar cargados bajo este grupo. Ambos existen únicamente cuando hay 8 o menos supercargas. En la tabla 4.1 se indica con un símbolo \star .
4. Multiplete tensorial ($s_{\text{máx}} = 2$): contiene 2-formas $T_{\mu\nu}$. En la tabla 4.1 se indica con un símbolo \diamond .

A cualquier multiplete que no contenga al gravitón se le denomina *multiplete de materia*.

4.2.1. El contenido de campos de la supergravedad extendida en $D = 4$

Veamos de manera breve el contenido y la estructura de las teorías de supergravedad extendida más estudiadas en dimensión 4, que son aquellas que tienen valores $\mathcal{N} = 2, 4$ y 8. De manera general, el multiplete gravitatorio será del tipo

$$(e^a{}_\mu, \Psi_\mu^{i=1, \dots, \mathcal{N}}, \text{“campos extra”}). \quad (4.20)$$

$\mathcal{N} = 2, D = 4$ SUGRA

Como ya se ha visto, esta teoría tiene 8 supercargas y admite un multiplete gauge y un hipermultiplete. Consideramos un conjunto de $n = \dim G$ multipletes gauge (siendo G el grupo gauge bajo el que transforman) y n_H hipermultipletes. Veamos el contenido de cada uno:

- Multiplete gravitatorio: $(e^a{}_\mu, A_\mu, \Psi_\mu^{1,2})$
siendo A_μ el campo extra que se debe añadir y que denominamos *gravifotón*.
- Multipletes gauge: $(A_\mu, z, \lambda_{1,2})^A \equiv (A_\mu^A, z^A, \lambda_{1,2}^A)$
donde z^A son campos escalares complejos, $\lambda_{1,2}^A$ espinores de Majorana y $A = 1, \dots, n$. Como se vio en la sección anterior, los n campos escalares forman un espacio interno que es una variedad de Kähler, aunque en este caso es más restrictiva y se denomina *special Kähler manifold*.
- Hipermultipletes: $(q_{1, \dots, 4}, \zeta_{1,2})^i \equiv (q^X, \zeta^{\mathcal{A}})$
donde q^X son campos escalares reales, $\zeta^{\mathcal{A}}$ espinores de Majorana, $i = 1, \dots, n_H$, $X = 1, \dots, 4n_H$ y $\mathcal{A} = 1, \dots, 2n_H$. De la misma manera que en el multiplete gauge, los campos escalares forman una variedad de Kähler, en este caso diferente a la anterior, denominada *hyper-Kähler manifold* o *quaternionic-Kähler manifold*.

Se tiene por tanto que la variedad que forman los escalares de esta teoría es el producto

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{SK} \times \mathcal{M}_{QK}, \quad (4.21)$$

donde \mathcal{M}_{SK} es una variedad special Kähler y \mathcal{M}_{QK} es una variedad quaternionic-Kähler.

$\mathcal{N} = 4, D = 4$ SUGRA

En este caso se tienen 16 supercargas, luego únicamente se pueden añadir multipletes gauge. Consideramos un conjunto de $n = \dim G$ multipletes gauge siendo G el grupo gauge de las transformaciones. El contenido de campos es el siguiente:

- Multiplete gravitatorio: $(e^a_\mu, A_\mu^{1,\dots,6}, \tau, \Psi_\mu^{1,\dots,4}, \psi^{1,\dots,4})$
los campos extra en este caso son seis vectores $A_\mu^{1,\dots,6}$, un campo escalar complejo τ y cuatro fermiones $\psi^{1,\dots,4}$. Además, el campo escalar τ junto con su complejo conjugado $\bar{\tau}$ conforman una variedad de Kähler de dimensión 1 (2 dimensiones reales) que además se trata de un espacio coset, el espacio $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$.
- Multipletes gauge: $(A_\mu, \phi_{1,\dots,6}, \lambda_{1,\dots,4})^A \equiv (A_\mu^A, \phi^X, \lambda^I)$
donde ϕ^X son campos escalares reales, λ^I espinores de Majorana, $A = 1, \dots, n$, $X = 1, \dots, 6n$ e $I = 1, \dots, 4n$. En este caso, la variedad que forma el espacio interno de los campos escalares es también un espacio coset, el espacio $SO(6, n)/SO(6) \times SO(n)$.

De esta manera, la variedad del espacio interno del conjunto de todos los escalares de esta teoría es el producto

$$\mathcal{M} = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{SO(2)} \times \frac{SO(6, n)}{SO(6) \times SO(n)}. \quad (4.22)$$

Se verifica que en cualquier teoría de supergravedad con $\mathcal{N} > 2$ el conjunto de los campos escalares de la teoría forma un espacio coset.

$\mathcal{N} = 8, D = 4$ SUGRA

Finalmente, el caso maximal, en el cual únicamente se tiene el multiplete gravitatorio

$$(e^a_\mu, A_\mu^{1,\dots,28}, \phi^{1,\dots,70}, \Psi_\mu^{1,\dots,8}, \psi^{1,\dots,56}), \quad (4.23)$$

donde los campos extra son 28 campos vectoriales $A_\mu^{1,\dots,28}$, 70 campos escalares reales $\phi^{1,\dots,70}$ y 56 fermiones $\psi^{1,\dots,56}$. El espacio coset que forman los campos escalares de esta teoría es

$$\mathcal{M} = \frac{E_{7(7)}}{SU(8)}. \quad (4.24)$$

4.3. Reducción dimensional: obteniendo teorías a partir de $D = 11$ SUGRA

Ahora que conocemos el contenido de campos de la teoría maximal $\mathcal{N} = 8, D = 4$, resulta interesante comprobar cómo, al aplicar reducción dimensional a la teoría 11-dimensional, se recuperan estos campos. Para ello, hagamos primero una breve introducción a la teoría de Kaluza-Klein.

4.3.1. La teoría de Kaluza-Klein

Esta teoría ya se introdujo al inicio de la sección 3.6, por lo que ahora nos centraremos en estudiar cómo se aplica. Supongamos que tenemos una teoría formulada en un espacio-tiempo representado por una variedad $(D + 1)$ -dimensional \mathcal{M}_{D+1} y que queremos reformularla en dimensión D al suponer que una de las dimensiones está compactificada en una circunferencia de radio L , esto es:

$$\mathcal{M}_{D+1} = \mathcal{M}_D \times S_L^1. \quad (4.25)$$

Un ejemplo sencillo: el campo escalar

Consideramos el ejemplo más simple en el que la teoría contiene únicamente un campo escalar no masivo ϕ en un espacio-tiempo de Minkowski de $D + 1$ dimensiones. Las ecuaciones del movimiento son por tanto las siguientes:

$$\square_{D+1} \phi = 0. \quad (4.26)$$

Nota. \square_{D+1} se refiere al d'alembertiano en $D + 1$ dimensiones.

Denotando por (x^0, \dots, x^{D-1}, y) a las coordenadas y utilizando que la coordenada y debe ser periódica se puede expandir el campo ϕ en serie de Fourier para obtener:

$$\phi(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k(x) e^{i \frac{k}{L} y}. \quad (4.27)$$

Introduciendo esta expresión en las ecuaciones del movimiento se obtiene:

$$\left[\square_D - \frac{k^2}{L^2} \right] \phi_k = 0, \quad (4.28)$$

que es la ecuación correspondiente a un campo escalar masivo en un espacio-tiempo de D dimensiones. Por tanto, partiendo de una teoría en dimensión $D + 1$ con un campo escalar no masivo $\phi(x, y)$, hemos obtenido un conjunto infinito de campos escalares $\phi_k(x)$ en D dimensiones cada uno con masa $m_k = |k|/L$. El conjunto de todos estos escalares se dice que es una *torre de modos masiva* o *torre de Kaluza-Klein*. Estamos suponiendo que la dimensión correspondiente a S^1 es no observable, luego tendremos $L \rightarrow 0$, lo que implica que, siempre que $k \neq 0$, la masa m_k es muy grande y, por tanto, se requerirían energías enormes para detectar estos modos masivos. Por esta razón, el único modo que se considera es el modo con $k = 0$, denominado *modo ligero*.

De esta manera, pasamos de tener un campo $\phi(x, y)$ dependiente de las $D + 1$ coordenadas de la variedad \mathcal{M}_{D+1} a tener un campo $\phi_0(x)$ dependiente únicamente de las D coordenadas de la variedad \mathcal{M}_D .

La teoría original de Kaluza-Klein

En la teoría propuesta por Kaluza y Klein se aplicaba este procedimiento a la relatividad general en 5 dimensiones, a partir de la cual se obtenía una teoría de la relatividad en 4 dimensiones acoplada a un fotón y un campo escalar. Para ello, se supone que la métrica en 5 dimensiones g_{MN} se descompone en una métrica en 4 dimensiones $g_{\mu\nu}$, un campo vectorial A_μ y un campo escalar ϕ denominado *dilatón*. Veamos brevemente¹⁰ el procedimiento para reducir una teoría gravitatoria en $D + 1$ dimensiones a una en D . Para ello, se considera que la métrica en $D + 1$ dimensiones se puede expresar como

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha\phi}g_{\mu\nu} + e^{2\beta\phi}A_\mu A_\nu & e^{2\beta\phi}A_\mu \\ e^{2\beta\phi}A_\nu & e^{2\beta\phi} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

dando lugar al elemento de línea

$$ds_{D+1}^2 = e^{2\alpha\phi}ds_D^2 + e^{2\beta\phi}(dx^D + A_\mu dx^\mu)(dx^D + A_\nu dx^\nu). \quad (4.30)$$

Nota. Los índices M, N, \dots se refieren las $D + 1$ dimensiones del espacio-tiempo, mientras que μ, ν, \dots se refieren a las D dimensiones no compactas.

Bajo esta suposición, la acción

$$S_{D+1} = \frac{1}{2\kappa_{D+1}^2} \int d^D x \sqrt{-g} g^{MN} R_{MN} \quad (4.31)$$

se reduce a

$$S_{D+1} = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} e^{-(D-1)\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (4.32)$$

con $\kappa_D^2 = \kappa_{D+1}^2/2\pi L$, que es la acción de un fotón y un escalar en relatividad general. Los valores obtenidos para α y β son

$$\alpha^2 = \frac{1}{2(D-2)(D-1)}, \quad \beta = -(D-2)\alpha. \quad (4.33)$$

4.3.2. Reducción dimensional sobre S^1

Generalizando el procedimiento anterior a cualquier teoría se obtiene la reducción dimensional mencionada en la sección 3.6. Veamos entonces qué campos obtenemos al reducir la teoría $D + 1 = 11$ SUGRA sobre una circunferencia S^1 . Recordemos que el contenido de campos de

¹⁰El cálculo explícito se puede encontrar en el capítulo 8 de [7].

esta teoría es el multiplete

$$(g_{MN}, A_{MNP}, \Psi_M). \quad (4.34)$$

Nota. Consideramos que las coordenadas son $x^M = (x^0, \dots, x^{D-1}, x^D) = (x^\mu, x^D)$.

Obtendremos los nuevos campos a partir de estos considerándolos como campos en dimensiones menores. Por ejemplo, de manera similar al ejemplo anterior, la métrica en 11 dimensiones g_{MN} da lugar a una métrica en 10 dimensiones $g_{\mu\nu}$, a un campo vectorial $g_{\mu D} \equiv A_\mu$ y a un campo escalar $g_{DD} \equiv \phi$. Por otro lado, la 3-forma A_{MNP} da lugar a una 3-forma $A_{\mu\nu\rho}$ y a una 2-forma $A_{\mu\nu D} \equiv B_{\mu\nu}$ (no proporciona una 2-forma ni un escalar debido a sus propiedades de antisimetría). Finalmente, para el gravitino $\Psi_{M\alpha}$ se debe tener en cuenta también su estructura espinorial. Para ello, recordemos¹¹ que en las dimensiones 10 y 11 los espinores de Majorana tienen 32 componentes, sin embargo, mientras que en 11 dimensiones un espinor con 32 componentes es irreducible, en 10 dimensiones no es así, sino que la representación más fundamental es de 16 componentes. Teniendo esto en cuenta, el vector-espinor $\Psi_{\mu\alpha}$ que emerge de $\Psi_{M\alpha}$ se puede considerar como dos espinores irreducibles Ψ_μ^1, Ψ_μ^2 , por lo que la teoría en dimensión 10 tiene $\mathcal{N} = 2$. Además, el gravitino en 11 dimensiones también da lugar a un fermión $\Psi_{D\alpha} \equiv \psi_\alpha$. En resumen, el contenido de campos de la teoría en 10 dimensiones obtenida de aplicar reducción dimensional a la teoría en 11 es

$$(g_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu}, A_\mu, \phi, \Psi_\mu^{1,2}, \psi). \quad (4.35)$$

La teoría obtenida, como ya vimos en la tabla 4.1, se denomina *supergravedad de tipo IIA*. Existe otra teoría con $\mathcal{N} = 2$ y $D = 10$, la *supergravedad de tipo IIB*, cuyo contenido de campos se obtiene al intercambiar la 3-forma y el vector de la anterior por una 4-forma, una 2-forma y un escalar. De manera general, se dice que las teorías de supergravedad de tipo II están descritas por los campos

$$(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi, C_{(p)}, \Psi_\mu^{1,2}, \psi), \quad (4.36)$$

donde $C_{(p)}$ es una p -forma tal que $p = 1, 3$ para las de tipo IIA y $p = 0, 2, 4$ para las de tipo IIB.

4.3.3. Reducción dimensional sobre T^7

Aplicando el procedimiento anterior 7 veces a la teoría 11-dimensional se dice que la teoría se está compactificando sobre un 7-toro $T^7 = S^1 \times \dots \times S^1$. Por tanto, la teoría obtenida tendrá dimensión 4, veamos su contenido de campos.

Nota. En este caso consideramos las coordenadas $x^M = (x^\mu, x^i)$ con $\mu = 0, \dots, 3$ e $i = 4, \dots, 10$.

La métrica g_{MN} da lugar a una métrica $g_{\mu\nu}$, a 7 vectores $g_{\mu i}$ y a 28 escalares g_{ij} (son 49 componentes, pero debido a la simetría de la métrica solo 28 son independientes). Para la 3-forma A_{MNP} es algo más complejo ya que se deben tener en cuenta ciertos factores. El primero es que la 3-forma $A_{\mu\nu\rho}$ no tiene grados de libertad en dimensión 4, luego no se considera. Por otro lado, el número de vectores $A_{\mu ij}$ viene dado por el número combinatorio $\binom{7}{2} = 21$ debido a la antisimetría de A_{MNP} y, de la misma manera, se tienen $\binom{7}{3} = 35$ escalares A_{ijk} . Por último, se

¹¹Se vio la dimensión de los espinores en la sección 1.4.4.

debe tener en cuenta que cada 2-forma $A_{\mu\nu i}$ tiene los mismos grados de libertad que un escalar debido a la dualidad de Hodge¹² de las teorías en $D = 4$, comportándose así como 7 escalares.

Para terminar, los espinores en dimensión 4 tienen 4 componentes, luego las 32 componentes del gravitino Ψ_M pasan a ser 8 gravitinos Ψ_μ y $32 \cdot 7/4 = 56$ fermiones Ψ_i . Considerando todos los campos mencionados se tiene un total de una métrica, 28 vectores, 70 escalares, 8 gravitinos y 56 fermiones, que es exactamente el contenido de campos de la teoría maximal $\mathcal{N} = 8$, $D = 4$.

Como comentario final, se debe tener en cuenta que las teorías obtenidas a partir de la reducción dimensional sobre un toro de la teoría 11-dimensional son siempre ungauged supergravities¹³, pues el toro tiene una geometría trivial, es decir, tiene curvatura nula. En el caso de aplicar la reducción dimensional sobre una variedad con una geometría no trivial, como es el caso de la esfera, sí que se podrían obtener gauged supergravities.

4.4. Una breve introducción a la correspondencia AdS/CFT

Para concluir con el trabajo, se hará mención a uno de los campos más activos de la investigación actual en física teórica: la *correspondencia AdS/CFT*, también conocida como *holografía* o *dualidad gauge/gravedad*. En su versión más simple, esta correspondencia establece una relación entre las soluciones a teorías de supergravedad clásica que poseen un factor AdS y las *teorías de campos conformes* (CFT). Para entender esto debemos saber que una teoría de campos conformes es una teoría cuántica de campos que posee una simetría bajo *transformaciones conformes*, que son aquellas transformaciones que dejan invariantes los ángulos. De esta manera, se están relacionando dos teorías completamente diferentes ya que por un lado tenemos una teoría clásica de gravedad, es decir, una teoría formulada en un espacio-tiempo curvo, mientras que por el otro tenemos una teoría cuántica de campos formulada en un espacio-tiempo plano, como es el caso de la teoría supersimétrica de Yang-Mills. De manera más precisa tenemos la siguiente definición.

Correspondencia AdS/CFT. Las soluciones del tipo $AdS_{d+1} \times K$, siendo K una variedad compacta, de una teoría de supergravedad clásica, son duales a una teoría de campos conformes en d dimensiones (CFT_d).

Por tanto, las soluciones correspondientes a las M2-branas y M5-branas vistas en la subsección 3.6.2, que en un entorno del horizonte eran $AdS_4 \times S^7$ y $AdS_7 \times S^4$, son duales a teorías CFT_3 y CFT_6 , respectivamente. No obstante, la formulación inicial¹⁴ de la correspondencia no se realizó para el caso de $D = 11$ SUGRA, sino que se basó en soluciones de la teoría $D = 10$ SUGRA de tipo IIB. De manera similar al caso 11-dimensional, se obtienen soluciones a esta

¹²En dimensión 4 una 2-forma determina un tensor de Faraday que es una 3-forma, por lo que su dual, el cual contiene los mismos grados de libertad, es una 1-forma y, por tanto, proviene de una 0-forma, es decir, de un escalar. Por esta razón, en dimensión 4, una 2-forma tiene los mismos grados de libertad que un escalar.

¹³Al contrario que las gauged supergravities, el grupo gauge es abeliano y las derivadas de los campos escalares no están covariantizadas.

¹⁴La correspondencia AdS/CFT fue propuesta por Juan M. Maldacena en [10], el paper más citado a día de hoy en el campo de la física teórica.

teoría correspondientes a p -branas, en este caso denominadas Dp -branas, puesto que provienen de considerarlas como las condiciones de contorno Dirichlet de las cuerdas utilizadas en teorías de cuerdas. La principal diferencia entre las soluciones es la presencia de un dilatón ϕ , aunque este es constante en el caso que vamos a estudiar.

Recordemos que el contenido de campos de $D = 10$ SUGRA IIB es el descrito en (4.36), por lo que tendremos soluciones en las que las p -formas se acoplan eléctricamente a D1-branas y D3-branas, siendo esta última en la que nos vamos a centrar. La métrica en un entorno del horizonte de una D3-brana es

$$ds^2 \sim \left(\frac{r}{r_3}\right)^2 ds_{M4}^2 + \left(\frac{r_3}{r}\right)^2 dr^2 + r_3^2 d\Omega_5^2, \quad (4.37)$$

que es la de un espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$ en el que ambos espacios tienen radio r_3 . De esta manera, se tiene la siguiente correspondencia.

Correspondencia AdS/CFT inicial. Las soluciones correspondientes a un conjunto de N D3-branas en un entorno del horizonte y tomando N grande son duales a una teoría supersimétrica de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$ en dimensión 4 y con grupo gauge $SU(N)$:

$$\begin{array}{l} \text{D3-branas en SUGRA IIB} \\ AdS_5 \times S^5 \end{array} \quad \equiv \quad \mathcal{N} = 4, \text{ SYM}_4, SU(N) \quad (4.38)$$

Tras la formulación inicial de la correspondencia se han ido estudiando numerosas variantes de la misma, entre las cuales está el caso de la M2-brana ($AdS_4 \times S^7$), que es dual a una teoría de campos conformes en dimensión 3 denominada *ABJM* [1].

La importancia de esta correspondencia reside en el hecho de que posee una relación de proporcionalidad inversa en las constantes de acoplo, esto es, si la interacción gravitatoria es débil o fuerte, la constante de acoplo de la teoría cuántica de campos correspondiente será grande o pequeña, respectivamente. De esta manera, soluciones clásicas a teorías gravitatorias con baja interacción nos permiten obtener soluciones a teorías cuánticas de campos con constantes de acoplo grandes, lo que sería imposible de otra manera al no poder utilizar teoría de perturbaciones. Por otro lado, soluciones a una teoría cuántica de campos perturbativa dan lugar a soluciones gravitatorias con una fuerte interacción gravitatoria, lo que tiene una gran complejidad en el marco de las teorías de gravedad.

Conclusiones

Este trabajo se ha enfocado en desarrollar el concepto de supergravedad basándose en el nivel de conocimientos de un grado en física. Por ende, han sido necesarios dos capítulos puramente introductorios sobre los que sustentan el resto del trabajo. En el primero de ellos, se ha comenzado formalizando una idea que se utiliza de manera recurrente en el grado aunque sin entrar en su trasfondo, las simetrías. Debido a la importancia de las mismas en este trabajo y en la física teórica en general, ha resultado esencial entender cómo actúan. Además, se ha hecho un repaso de las teorías de campos más comunes que ha servido para establecer la notación y el procedimiento general del trabajo. Las teorías gauge es otro concepto introducido en el mismo capítulo y su comprensión es necesaria, pues constituyen otro pilar esencial para este trabajo.

El segundo capítulo se ha dedicado a la teoría de la relatividad general, otro de los fundamentos de la supergravedad. En él hemos podido comprender la profunda idea que la subyace: la gravedad no es más que una curvatura en el espacio-tiempo generada por la materia presente en el mismo. Tras apreciar la simplicidad y belleza de las ecuaciones de Einstein, hemos introducido el formalismo de los frames, que es el utilizado en supergravedad.

El gravitino y la supersimetría conforman las piezas restantes necesarias para construir el puzle de la supergravedad, por lo que en el tercer capítulo se ha podido establecer un primer contacto con la misma. Hemos visto cómo el cálculo variacional y el álgebra supersimétrico constituyen dos maneras diferentes de comprobar que una teoría de supersimetría local requiere de gravedad. Tras obtener la contribución universal a la acción de la supergravedad, hemos podido estudiar la variante con constante cosmológica, dándonos cuenta de que la solución más simple en este caso es un espacio-tiempo AdS. También hemos estudiado la supergravedad en $D = 11$, una teoría única a la que no se pueden acoplar más campos y a partir de la cual se pueden obtener el resto de teorías de ungauged supergravities aplicando reducción dimensional. Además, hemos presentado las soluciones de esta teoría correspondientes a las M2-branas y M5-branas, que representan una generalización del agujero negro de Reissner-Nordström en 11 dimensiones. Cabe destacar que la supergravedad en $D = 11$ junto con las M2-branas y las M5-branas conforman la base de la teoría M.

Al inicio del cuarto capítulo se ha introducido una teoría más compleja por su alto contenido de campos, se trata de la teoría de $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ SUGRA acoplada a campos de materia. En esta teoría, además del multiplete gravitatorio, tenemos también un conjunto de multipletes quirales y otro de multipletes gauge, siendo así el primer ejemplo propuesto de una teoría de

gauged supergravity. Por la complejidad de la teoría y el tratamiento que se ha hecho de la misma, no ha sido necesario estudiar la contribución fermiónica, aunque se ha destacado que los fermiones cuentan con términos de masa. Parte de la importancia del estudio de esta teoría reside en el hecho de que ha servido para estudiar el espacio interno de los campos que, como hemos visto, es una variedad de Kähler. Además, hemos observado ciertas similitudes con el caso de supergravedad pura con constante cosmológica, aún más al considerar las soluciones de fondo, las cuales han resultado ser también AdS. Por último, cabe destacar que la teoría de $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ SUGRA acoplada a campos de materia es la base sobre la que se formula la *supergravedad minimal* (mSUGRA) [11], una teoría que busca extender el modelo estándar para incorporar la supergravedad.

Tras esto, hemos seguido adentrándonos en el resto de teorías de supergravedad al introducir las teorías de supergravedad extendida, pudiendo relacionarlas con el resto mediante la tabla 4.1. Esta tabla ha resultado ser de gran utilidad pues nos permite conocer el contenido general de campos y las teorías relacionadas mediante la reducción dimensional. Más concretamente, hemos estudiado el contenido explícito de los campos para las teorías de supergravedad extendida más importantes en $D = 4$: $\mathcal{N} = 2$, 4 y 8, pudiendo comprobar la importancia de los espacios cociente en las mismas. También hemos visto de manera general cómo, mediante la reducción dimensional, la teoría 11-dimensional da lugar a la teoría 10-dimensional de tipo IIA y a la teoría de supergravedad maximal en dimensión 4, pudiendo así entender cómo se realiza este procedimiento, el cual es de gran importancia en la física teórica actual debido a la dimensión empleada en las teorías de cuerdas. Por último, se ha introducido la idea que subyace a la correspondencia AdS/CFT, pudiendo entenderla de manera general a partir del análisis de las soluciones de $D = 11$ SUGRA realizado en el capítulo anterior.

A lo largo del trabajo hemos aprendido una serie de conceptos e ideas fundamentales para el desarrollo de las teorías físicas. Destacan principalmente las siguientes:

1. Las simetrías están implementadas a través de grupos de Lie.
2. Las teorías gauge se basan en simetrías locales de los campos, implementadas a través de los campos gauge y la curvatura o tensor de Faraday.
3. La gravedad se debe entender como una curvatura del espacio-tiempo.
4. La supergravedad es una teoría de supersimetría local.
5. La teoría de supergravedad en dimensión 11 es una teoría única y, por tanto, una firme candidata para ser el límite de bajas energías de una teoría del todo, la teoría M.

Para concluir, cabe mencionar las posibles extensiones con las que podría contar este trabajo. De manera natural, se podría continuar profundizando más en los conceptos introducidos en el último capítulo, como es el caso de las teorías de supergravedad extendida, la reducción dimensional o la correspondencia AdS/CFT. Otra posibilidad sería adentrarse en el formalismo cuántico mediante el estudio de las teorías de cuerdas y observar cómo se recupera la supergravedad al tomar el límite de bajas energías de las mismas. En conclusión, este trabajo sienta las

bases para investigaciones avanzadas en física teórica, las cuales espero abordar en profundidad en un futuro cercano.

Apéndice A

Geometría diferencial: la clave para entender el espacio-tiempo

En relatividad general (RG) se considera que el espacio-tiempo es una variedad lorentziana y se estudia cómo varían sus propiedades geométricas debido a la gravedad. Las variedades son el objeto principal de estudio de la geometría diferencial, por lo que, para poder entender la RG, se debe estudiar primero la teoría matemática de dichas estructuras. Otra herramienta fundamental para la RG son los tensores, de los que se debe saber qué son y cómo se comportan, ya que serán la base del lenguaje con el que describiremos todas las ecuaciones. Esta sección del apéndice estará dedicada a realizar una síntesis de todos estos conceptos que se requieren para describir la teoría de la relatividad general.

A.1. Variedades diferenciables

Se comienza realizando una introducción a la teoría matemática de las variedades diferenciables, para lo que se darán una serie de definiciones y propiedades básicas.

A.1.1. Definiciones previas

Nuestro primer objetivo es, a partir de un cierto conjunto M , poder darle unas coordenadas en \mathbb{R}^n a cada punto de dicho conjunto. Estas coordenadas serán las que nos ayuden a trabajar sobre conjuntos arbitrarios de manera análoga a como lo hacemos en el espacio euclídeo.

Definición A.1. Dado un conjunto M , se define una *carta* de M como un par (U, ϕ) tal que $\phi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación biyectiva y $\phi(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n .

Nota. Para abreviar, en algunos casos me referiré a una carta simplemente como la aplicación ϕ .

Esta aplicación nos da unas coordenadas $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ para cada $p \in U$, que, generalmente, abreviaremos por $x^\mu(p)$. Puede que necesitemos más de una carta para poder dar coordenadas a todos los puntos del conjunto M , en cuyo caso se debe verificar que las cartas cuyos dominios intersecan sean compatibles.

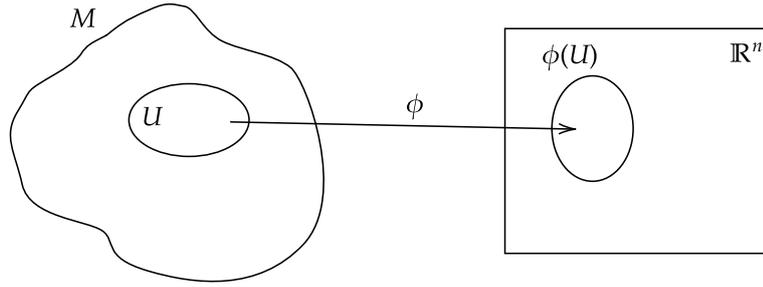


Figura A.1: Esquema de una carta.

Definición A.2. Una *variedad diferenciable* n-dimensional es un espacio topológico Hausdorff tal que:

1. Es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , es decir, $\forall p \in M \exists (U, \phi)$ una carta de M , siendo U un abierto con $x \in U$, tal que $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ es un homeomorfismo.
2. Dados U, V dos abiertos tales que $U \cap V \neq \emptyset$, las cartas correspondientes $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ y $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ deben verificar que la aplicación

$$\varphi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V), \tag{A.1}$$

denominada *cambio de coordenadas*, es un difeomorfismo (biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable).

El conjunto de todas las cartas de la variedad se denomina *atlas*.

Nota. En general nos referiremos a una variedad diferenciable n-dimensional simplemente como variedad.

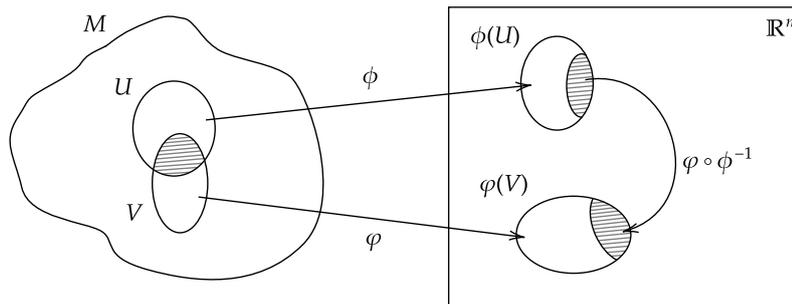


Figura A.2: Aplicación cambio de coordenadas.

A.1.2. Espacios tangente y cotangente

El próximo objetivo es definir el espacio tangente a una variedad en cada punto. Para ello buscaremos un conjunto con estructura de espacio vectorial que se pueda construir a partir de las propiedades de las variedades diferenciables.

Aplicaciones entre variedades diferenciables

El primer paso consiste en analizar las aplicaciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Para poder estudiarlas de manera análoga a como lo hacemos en el espacio euclídeo se debe hacer uso de las cartas, por lo que se define la aplicación

$$F := f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{A.2})$$

siendo (U, ϕ) una carta de M . A partir de F se pueden definir las derivadas parciales de f y su diferenciabilidad. Por tanto, diremos que f es *diferenciable* si F es diferenciable y se definirán sus *derivadas parciales* como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right|_p := \left. \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right|_{\phi(p)} = \left. \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} \right|_{\phi(p)}. \quad (\text{A.3})$$

Esta cantidad depende claramente de las coordenadas x^μ , por lo que, para construir el espacio tangente, trataremos de buscar elementos que no cuenten con esta dependencia.

Espacio tangente

Nota. Denotaremos por $C^\infty(M)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición A.3. Dado $p \in M$, se define un *vector tangente a M en p* como una aplicación $V_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M)$, verifica las siguientes propiedades:

- (1) $V_p(\alpha f + \beta g) = \alpha V_p(f) + \beta V_p(g)$ (\mathbb{R} -linealidad).
- (2) $V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$ (regla de Leibniz).

El conjunto formado por todos los vectores tangentes a M en p tiene estructura de espacio vectorial real. Denominaremos a dicho conjunto *espacio tangente a M en p* y se denotará por $T_p M$.

Se verifica que las derivadas parciales

$$\partial_\mu|_p := \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

constituyen una base del espacio tangente, por lo que deducimos que la dimensión de $T_p M$ es la misma que la de la variedad diferenciable y que además podemos expresar cualquier vector tangente $V_p \in T_p M$ como

$$V_p = (V_p)^\mu \partial_\mu|_p. \quad (\text{A.5})$$

Campos vectoriales

A continuación, haremos una generalización de los vectores tangentes en un punto a objetos que actúen sobre toda la variedad diferenciable M , es decir, buscamos campos de vectores. La siguiente definición nos ayudará a desarrollar esta idea.

Definición A.4. Se define el *fibrado tangente* de una variedad diferenciable M , denotado por

TM , como el conjunto formado por la unión disjunta de todos los espacios tangentes a la variedad en cada punto, es decir,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M. \quad (\text{A.6})$$

Nota. Para abreviar la notación generalmente nos referiremos a un elemento de TM simplemente como V_p .

Definición A.5. Se define un *campo vectorial* sobre M como una aplicación que a cada punto de la variedad le asigna un vector tangente a la variedad en ese punto:

$$\begin{aligned} V : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto V_p, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Además, debe verificar que, para toda función $f \in C^\infty(M)$, la aplicación

$$\begin{aligned} Vf : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (Vf)(p) := V_p(f) = (V_p)^\mu \left. \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right|_p \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

sea diferenciable. De esta manera, un campo vectorial V también es una aplicación

$$\begin{aligned} V : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto Vf. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

El conjunto de todos los campos vectoriales sobre una variedad M tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} y se denota por $\mathfrak{X}(M)$.

Dada una carta (U, ϕ) de M con coordenadas x^μ , podemos expandir un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$ en el abierto U como

$$V = V^\mu \partial_\mu. \quad (\text{A.10})$$

Se debe tener en cuenta que, en este caso, las componentes V^μ son elementos de $C^\infty(M)$. Además, es evidente que las derivadas parciales $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ dependen de las coordenadas, luego en otras coordenadas tendremos otros coeficientes V^μ . Dada (U', ϕ') otra carta de M con $U \cap U' \neq \emptyset$ y coordenadas x'^μ , obtenemos las nuevas derivadas parciales a partir de la regla de la cadena como:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu. \quad (\text{A.11})$$

Por otro lado, utilizando que el campo vectorial es independiente de las coordenadas ($V' = V$), se deduce que

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (\text{A.12})$$

Una transformación de este tipo se denomina *cambio general de coordenadas* (g.c.t. por sus siglas en inglés).

El bracket de Lie

Al multiplicar dos campos vectoriales no se obtiene un tercer campo vectorial, sin embargo, se puede definir una operación entre campos vectoriales que sí resulta ser uno de ellos. Esta idea se formaliza en la siguiente definición.

Definición A.6. Dados dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define el *bracket de Lie* o *conmutador* como la siguiente operación:

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (\text{A.13})$$

Se verifica que el bracket de Lie $[X, Y]$ es un campo vectorial.

Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, el bracket de Lie satisface las siguientes propiedades:

- Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$.
- Bilinealidad: dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se verifica:
 $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$.
 $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$.
- Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Se deduce entonces que $\mathfrak{X}(M)$ junto con la operación $[\cdot, \cdot]$ tiene estructura de *Álgebra de Lie*.

El espacio dual

A partir del espacio tangente podemos definir un nuevo espacio vectorial como sigue.

Definición A.7. Un *vector dual*, *vector cotangente* o *vector covariante* es una aplicación lineal $\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. El conjunto de todos los vectores duales constituye un espacio vectorial que se denomina *espacio dual*.

De forma análoga a como hicimos con los campos vectoriales podemos definir un *campo dual* o *1-forma* ω como una aplicación que a cada punto de la variedad le asocia un vector dual. Esta aplicación actuará sobre campos vectoriales como $\omega : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$. El conjunto formado por todos los campos duales se denota por $\Lambda^1(M)$ y cumple que, dadas x^μ unas coordenadas en M , podemos expandir de manera local un elemento $\omega \in \Lambda^1(M)$ como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \quad (\text{A.14})$$

Por tanto, se cumple:

$$\omega(V) = V(\omega) = \omega_\mu V^\nu dx^\mu \partial_\nu = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu. \quad (\text{A.15})$$

Las reglas de transformación resultantes son las siguientes:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (\text{A.16})$$

$$\omega'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \omega^{\nu}. \quad (\text{A.17})$$

A.1.3. Tensores: el lenguaje de la relatividad general

Una vez definidos los vectores tangentes y cotangentes se puede proceder con un concepto que generaliza a dos los anteriores. Se trata de los tensores, que se podrían considerar como los elementos más relevantes en RG ya que aparecerán en todas las ecuaciones.

Definición A.8. Un *tensor de rango* (k, l) se define como una aplicación multilinear

$$T_p : \overbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}^k \times \overbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}^l \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.18})$$

Comprobamos que un vector tangente es un tensor $(1, 0)$ mientras que un vector dual es un tensor $(0, 1)$. Podemos definir también un *campo tensorial* como una aplicación T que a cada punto de la variedad le asocia un tensor T_p . Por tanto, podemos expresar un campo tensorial T y sus componentes como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}, \quad (\text{A.19})$$

$$T(dx^{\nu_1}, \dots, dx^{\nu_k}; \partial_{\mu_1}, \dots, \partial_{\mu_l}) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (\text{A.20})$$

Sus componentes transforman bajo g.c.t. de la siguiente manera:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\rho_k}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\rho_1 \dots \rho_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l}. \quad (\text{A.21})$$

En este punto comprobamos que cobra sentido el tratamiento de índices que se ha estado haciendo hasta ahora, ya que se reduce simplemente a que las componentes de un tensor transforman sus entradas correspondientes a superíndices como vectores tangentes, mientras que las componentes correspondientes a subíndices transforman como vectores duales.

Nota. En general se denominará tensor a las componentes de un campo tensorial con el objetivo de abreviar la notación.

Operaciones y propiedades de los tensores

Se pueden definir las siguientes operaciones que involucran uno o más tensores.

Dados dos tensores T, S de rangos (k, l) y (r, s) , respectivamente, se define el *producto tensorial* $T \otimes S$ como un tensor de rango $(k + r, l + s)$ de componentes

$$(T \otimes S)^{\mu_1 \dots \mu_k \rho_1 \dots \rho_r}_{\nu_1 \dots \nu_l \sigma_1 \dots \sigma_s} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} S^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}. \quad (\text{A.22})$$

Una propiedad de los tensores es que se pueden *contraer* dos de sus índices para formar un nuevo tensor de rango $(k-1, l-1)$. Por ejemplo, para un tensor $(2, 2)$, se obtendría

$$T^{\mu\nu}{}_{\nu\rho} = S^{\mu}{}_{\rho}. \quad (\text{A.23})$$

Un tensor es *simétrico* en dos de sus índices si al intercambiar esos índices se obtiene el mismo tensor. Equivalentemente, se define un tensor *antisimétrico* como un tensor en el que al intercambiar dos de sus índices obtenemos el tensor cambiado de signo. A partir de estas definiciones surgen otras dos operaciones importantes. Dado un tensor cualquiera, podemos *simetrizarlo* o *antisimetrizarlo* para obtener un tensor simétrico o antisimétrico a partir de él. Por ejemplo, dado un tensor cualquiera $T^{\mu\nu}$, sus tensores simétrico y antisimétrico son, respectivamente:

$$\begin{aligned} T^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}), \\ T^{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Un caso algo más complejo sería, por ejemplo:

$$T^{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{3!}(T^{\mu\nu\rho} - T^{\nu\mu\rho} + T^{\nu\rho\mu} - T^{\rho\nu\mu} + T^{\rho\mu\nu} - T^{\mu\rho\nu}) \quad (\text{A.25})$$

El tensor métrico

Definición A.9. Se define la *métrica* o *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$ como un tensor $(0, 2)$ simétrico y no singular, esto es

- $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
- $\det(g_{\mu\nu}(p)) \neq 0 \quad \forall p \in M$.

En la variedad $M = \mathbb{R}^{1,3}$ la métrica de Minkowski η_{ab} es un tensor métrico. Para diferenciar de este caso especial del resto, en una variedad cualquiera la métrica se denota por $g_{\mu\nu}$.

La métrica define un *producto escalar* entre dos campos vectoriales considerando

$$g(V, W) = g_{\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu}. \quad (\text{A.26})$$

Como resultado, se puede definir la *norma* de un campo vectorial como

$$\|V\|^2 = g(V, V) = g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}. \quad (\text{A.27})$$

Esto nos hace distinguir entre tres tipos de campos vectoriales.

- $\|V\|^2 > 0$: de tipo tiempo.
- $\|V\|^2 < 0$: de tipo espacio.
- $\|V\|^2 = 0$: de tipo luz o nulos.

A partir de la métrica se obtiene también el elemento de línea

$$\|dx\|^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2. \quad (\text{A.28})$$

Como consecuencia de la no singularidad se puede definir la inversa de la métrica, que denotaremos por $g^{\mu\nu}$ y verificará

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho. \quad (\text{A.29})$$

Gracias a estos dos tensores se puede realizar una operación sobre otros tensores conocida como “bajar o subir índices”. Por ejemplo, dado un tensor T de rango $(2, 2)$, se pueden realizar las siguientes operaciones:

- $g_{\mu\nu} T^{\nu\rho}{}_{\sigma\lambda} = T_{\mu\sigma\lambda}{}^\rho$.
- $g^{\mu\nu} T^{\rho\sigma}{}_{\nu\lambda} = T^{\rho\sigma\mu}{}_\lambda$.

Sistema de referencia inercial local

Puesto que la métrica es una matriz no singular y simétrica, podemos expresarla como

$$g = e\eta e^t, \quad (\text{A.30})$$

siendo η una matriz diagonal de entradas ± 1 y $e \in O(n)$. Cuando la métrica sea tal que $\eta = \mathbb{I}$, se tendrá una *variedad riemanniana*, mientras que si η es la métrica de Minkowski, se tendrá una *variedad lorentziana* o *pseudo-riemanniana*, que son las que se consideran en la teoría de la relatividad general.

Este resultado es válido de manera local, por lo que, podemos asegurar que en cada punto $p \in M$, la métrica se puede expresar en un entorno de dicho punto como

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu(x) \eta_{ab} \quad \text{con} \quad g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.31})$$

Las componentes $e^a{}_\mu(x)$ se denominan *vielbeins* o *frames* y nos dan la misma información que la métrica, es decir, se puede usar tanto uno como otro para describir la geometría de la variedad.

Haciendo uso de los vielbeins podemos definir nuevas bases para los espacios tangente y cotangente, que se denotarán por e_a y θ^a , respectivamente. Se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_a &= e_a{}^\mu \partial_\mu, \\ \theta^a &= e^a{}_\mu dx^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

siendo $e_a{}^\mu$ la inversa traspuesta de $e^a{}_\mu$, es decir, $e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta_b^a$ y $e^a{}_\mu e_a{}^\nu = \delta_\mu^\nu$. Estas nuevas bases son ortogonales puesto que

$$e_a \cdot e_b = g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \eta_{ab}. \quad (\text{A.33})$$

Además, podemos comprobar fácilmente que son bases duales mediante el cálculo:

$$\theta^a(e_b) = e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta_b^a. \quad (\text{A.34})$$

Los vielbeins no se utilizan en la formulación básica de la relatividad general ya que no ofrecen ninguna ventaja respecto a la métrica, sin embargo, su uso es imprescindible a la hora de estudiar partículas fermiónicas en presencia de gravedad.

Se pueden encontrar unas coordenadas ξ^a que, de manera local, verifiquen $d\xi^a = \theta^a$. A este conjunto de coordenadas junto con sus bases correspondientes para los planos tangente y cotangente se les denomina *sistema de referencia inercial local* (L.I.F. por sus siglas en inglés) y es el correspondiente a un observador que se encuentra en caída libre. Esta es la formulación matemática del **Principio de Equivalencia** descrito en el capítulo 2.

En estas nuevas coordenadas se verifica las siguientes propiedades:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + o(\xi^2) \implies \partial_\rho g_{\mu\nu}(p) = 0, \quad \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}(p) \neq 0. \quad (\text{A.35})$$

Finalmente, si reescribimos el elemento de línea en función de la nueva base del espacio cotangente obtenemos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} \theta^a \theta^b, \quad (\text{A.36})$$

lo que nos indica que en un entorno de cada punto podemos encontrar unas coordenadas ξ^a mediante las cuales podemos trabajar de manera local como lo haríamos en el espacio-tiempo de Minkowski.

Formas diferenciales

Otro tipo de tensor que resultará de utilidad son las *p-formas diferenciales*, que se definen como un tensor $(0, p)$ completamente antisimétrico. El conjunto de todas las *p*-formas diferenciales se denota por $\Lambda^p(M)$. Hasta ahora hemos tratado con 0-formas (funciones) y 1-formas (campos duales).

Dadas $A \in \Lambda^p(M)$ y $B \in \Lambda^q(M)$ se puede definir el *producto exterior* de ellas como la $(p+q)$ -forma

$$(\omega \wedge \eta)_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\nu_1 \dots \nu_q]}. \quad (\text{A.37})$$

Se puede obtener así una base local del espacio $\Lambda^p(M)$ como $\{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}\}$. Además, a partir de esta operación definimos la *derivada exterior* de una *p*-forma cualquiera $\omega \in \Lambda^p(M)$ como la $(p+1)$ -forma

$$(d\omega)_{\mu\nu_1 \dots \nu_p} = (p+1) \partial_{[\mu} \omega_{\nu_1 \dots \nu_p]}. \quad (\text{A.38})$$

Diremos que una *p*-forma es *cerrada* si $d\omega = 0$ y diremos que es *exacta* si existe una $(p-1)$ -forma η tal que $d\eta = \omega$. Además, por las propiedades de la derivada parcial, se verifica siempre que $d(d\omega) = 0$.

Densidades tensoriales

En ciertas ocasiones, nos encontraremos con objetos que aparentan ser tensores, pero en realidad no lo son, ya que transforman como tensores salvo por un factor adicional. Definimos así una *densidad tensorial* como un objeto que transforma como un tensor, excepto por un factor que es una potencia del determinante del jacobiano del cambio de coordenadas. El exponente de esta potencia representa el peso (w) de la densidad tensorial. A continuación, se presentan algunos ejemplos destacados de densidades tensoriales.

1. El determinante de $g_{\mu\nu}$ ($w = -2$):

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g. \quad (\text{A.39})$$

2. El símbolo Levi-Civita ($w = -1$):

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{A.40})$$

3. El diferencial de volumen ($w = 1$):

$$d^D x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^D x. \quad (\text{A.41})$$

Fijándonos en el caso 3, nos damos cuenta de que debemos definir un nuevo elemento de volumen, pues este no es invariante bajo g.c.t. De esta manera, en geometría diferencial se define el elemento de volumen como

$$dv = d^D x \sqrt{\pm g}, \quad (\text{A.42})$$

donde se toma el signo positivo para variedades riemannianas y el negativo para lorentzianas. Si este elemento de volumen existe sobre toda la variedad se dice que esta es *orientable*.

Nota. $d^D x$ representa $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D$.

Operador estrella de Hodge

En una variedad orientable y con métrica se puede definir una operación

$$\star : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{n-p}(M) \quad (\text{A.43})$$

tal que, dada $\omega \in \Lambda^p(M)$, se tiene que

$$(\star\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \sqrt{\pm g} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{n-p} \nu_1 \dots \nu_p} \omega^{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (\text{A.44})$$

Esta aplicación se denomina *operador estrella de Hodge* y permite definir un producto interno simétrico en $\Lambda^p(M)$ de la siguiente manera:

$$(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge \star \eta. \quad (\text{A.45})$$

En una formulación geométrica del electromagnetismo se asume que el fotón es una 1-forma A sobre la variedad y se obtiene el tensor de Faraday como

$$F = dA. \quad (\text{A.46})$$

Por tanto, utilizando que el operador derivada exterior verifica que $d^2 = 0$, las transformaciones gauge de A vienen dadas por una 0-forma (función) de manera que

$$A \rightarrow A' = A + d\theta. \quad (\text{A.47})$$

Además, por la definición de F , se tiene que F satisface la identidad de Bianchi

$$dF = 0. \quad (\text{A.48})$$

Finalmente, la acción del sistema es

$$S = -\frac{1}{2}(F, F) = -\frac{1}{2} \int_M F \wedge \star F = -\frac{1}{4} \int_M d^D x \sqrt{\pm g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (\text{A.49})$$

Esta idea se puede generalizar a campos gauge más generales descritos por p -formas, en cuyos casos el tensor de Faraday sería una $(p+1)$ -forma y el parámetro gauge una $(p-1)$ -forma.

Cambios de coordenadas infinitesimales

Hemos visto cómo varían los campos al hacer cambios de coordenadas, sin embargo, resulta útil estudiar el caso en el que estos cambios de coordenadas son infinitesimales, es decir, son de la forma:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (\text{A.50})$$

con $\xi^\mu(x) \ll 1$. Las variaciones infinitesimales producidas por estas transformaciones de coordenadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \phi &= \xi^\mu \partial_\mu \phi \equiv \mathcal{L}_\xi \phi, \\ \delta_\xi V^\mu &= \xi^\rho \partial_\rho V^\mu - V^\rho \partial_\rho \xi^\mu = [\xi, V]^\mu \equiv \mathcal{L}_\xi V^\mu, \\ \delta_\xi \omega_\mu &= \xi^\rho \partial_\rho \omega_\mu + \omega_\rho \partial_\mu \xi^\rho \equiv \mathcal{L}_\xi \omega_\mu, \\ \delta_\xi T^\mu{}_\nu &= \xi^\rho \partial_\rho T^\mu{}_\nu - T^\rho{}_\nu \partial_\rho \xi^\mu + T^\mu{}_\rho \partial_\mu \xi^\rho \equiv \mathcal{L}_\xi T^\mu{}_\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

donde se ha definido el operador *derivada de Lie* \mathcal{L}_ξ a lo largo del campo ξ^μ . Podemos observar que para el caso del vector contravariante V^μ la derivada de Lie coincide con las componentes del Bracket de Lie $[\xi, V]$. La métrica es un caso especial en el que se puede reescribir su derivada

de Lie como

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv \delta_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (\text{A.52})$$

Vectores de Killing

Como consecuencia de la definición anterior surgen un tipo de vectores que ofrecen ciertas características sobre la métrica. Se dice que un campo vectorial $k(x)$ es un *vector de Killing* de una métrica $g_{\mu\nu}$ si la transformación infinitesimal $x^\mu \rightarrow x^\mu + k^\mu$ deja invariante la métrica, es decir, si verifica la *ecuación de Killing*:

$$\delta_k g_{\mu\nu} = \nabla_\mu k_\nu - \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (\text{A.53})$$

A.2. Conexiones y curvatura

Esta sección se dedicará a introducir el resto de conceptos matemáticos necesarios para desarrollar la relatividad general. Comenzamos introduciendo la idea de derivada covariante.

A.2.1. La derivada covariante

Al definir el producto tensorial se omitió un caso especial en el que el producto tensorial no resulta ser un tensor. Este es el caso de las derivadas parciales actuando sobre otro tensor, que, se puede comprobar que no transforma como un tensor. Como consecuencia, se debe encontrar un operador diferencial similar la derivada parcial, que, al aplicarlo sobre otros tensores, mantenga la estructura de tensor. Se define entonces la *derivada covariante* ∇_μ como un operador diferencial que actúa sobre un tensor (k, l) para dar otro tensor $(k, l+1)$. Le exigiremos que sea un operador lineal que satisfaga la regla de Leibniz y que verifique $\nabla_\mu f = \partial_\mu f$, $\forall f \in C^\infty(M)$. Dados $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Lambda^1(M)$, el operador ∇_μ obtenido actúa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V^\nu &= \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho, \\ \nabla_\mu \omega_\nu &= \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho, \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho \in C^\infty(M)$. De manera más general, actúa sobre un tensor (k, l) como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\rho_1 \dots \rho_l} &= \partial_\mu T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\rho_1 \dots \rho_l} \\ &+ \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu_1} T^{\lambda \dots \nu_k}_{\rho_1 \dots \rho_l} + \dots + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu_k} T^{\nu_1 \dots \lambda}_{\rho_1 \dots \rho_l} \\ &- \Gamma_{\mu\rho_1}^\lambda T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\lambda \dots \rho_l} - \dots - \Gamma_{\mu\rho_l}^\lambda T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\rho_1 \dots \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Definiendo $\nabla_\mu \equiv \nabla_{\partial_\mu}$, se puede extender la idea de derivada direccional como $\nabla_X = X^\mu \nabla_\mu$ siendo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se puede considerar que ∇ es un operador que actúa sobre dos vectores para dar otro vector: $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$. Visto así, el operador ∇ se conoce como *conexión* de la variedad diferenciable M y los elementos $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ se denominan *componentes de la conexión*.

La torsión y la conexión de Levi-Civita

A partir de la derivada covariante se construye un tensor $(1, 2)$ conocido como *torsión*. Se define como

$$T(\omega; X, Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \Rightarrow T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} = 2\Gamma^\rho_{[\mu\nu]}. \quad (\text{A.56})$$

Nota. Es importante resaltar que las componentes $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ no son tensores, aunque sí se pueden construir tensores a partir de ellas, como es el caso de la torsión.

En relatividad general impondremos que la torsión sea nula, por lo que las componentes de la conexión serán simétricas en sus dos subíndices: $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$. Imponiendo también el *postulado de la métrica*: $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, obtenemos, mediante el *teorema fundamental de la geometría riemanniana*, que la conexión resultante es única. Esta conexión se denomina *conexión de Levi-Civita* y sus componentes, denominadas *símbolos de Christoffel*, se obtienen a partir de la métrica como

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.57})$$

Haciendo uso del postulado de la métrica y de la simetría de las componentes de la conexión obtenemos la siguiente expresión para la derivada de Lie de la métrica:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (\text{A.58})$$

la cual resultará útil al estudiar las variaciones de la acción bajo transformaciones infinitesimales de las coordenadas.

Transporte paralelo y geodésicas

Dados un vector $V \in \mathfrak{X}(M)$ y una curva $\gamma(\lambda)$, se dice que se ha hecho un *transporte paralelo* de V a lo largo de γ si la derivada covariante a lo largo de la curva es nula, es decir, se verifica la ecuación

$$\frac{D}{D\lambda} V^\mu = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu V^\mu = 0 \iff \nabla_{\dot{x}} V = 0. \quad (\text{A.59})$$

A partir de esta idea definimos una *geodésica* como una curva que hace un transporte paralelo de su propio vector tangente¹. Esta idea se representa en la siguiente ecuación, la cual se denomina *ecuación geodésica*:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \iff \nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0. \quad (\text{A.60})$$

La interpretación geométrica del transporte paralelo consiste en imaginar una curva en la que el vector se mantiene constante a lo largo de la misma. Por otra parte, las geodésicas son las curvas que minimizan o maximizan el elemento de línea. En el contexto de la relatividad general, dichas curvas representan las trayectorias que siguen las partículas libres.

¹El vector tangente a una curva $x^\mu(\lambda)$ es $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$.

A.2.2. Los tensores de la relatividad general

A partir del concepto de transporte paralelo, es posible formalizar la noción de curvatura, considerándola como la variación que sufre un vector al ser transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada. En el espacio euclídeo resulta evidente que al transportar paralelamente un vector sobre una curva cerrada se obtiene el mismo vector, sin embargo, esto no será así en general.

El tensor de Riemann

Comenzamos introduciendo un tensor que formalizará la idea de curvatura mencionada en el párrafo anterior. Se define el *tensor de Riemann* R como un tensor de rango $(1, 3)$ tal que

$$R(\omega; X, Y, Z) = \omega (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) , \quad (\text{A.61})$$

que en componentes se reduce a

$$R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda . \quad (\text{A.62})$$

Otra manera de obtener las componentes del tensor de Riemann es mediante el cálculo del conmutador de las derivadas covariantes actuando sobre un vector:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma V^\sigma . \quad (\text{A.63})$$

Bajando el primer índice del tensor de Riemann se comprueba que satisface las siguientes propiedades:

- Simetría: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$.
- Antisimetría: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$.
- Ciclicidad: $R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$.
- Identidades de Bianchi:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\nu\rho\mu\sigma} &= 0 \\ \nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

El tensor de Ricci

Tomando la traza sobre el primer y el tercer índice del tensor de Riemann obtenemos un nuevo tensor conocido como *tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = R_{\rho\mu}{}^\rho{}_\nu = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} . \quad (\text{A.65})$$

Por la propiedad de simetría del tensor de Riemann resulta evidente que el tensor de Ricci es un tensor simétrico, es decir, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

El escalar de Ricci

Se puede tomar de nuevo la traza, en este caso del tensor de Ricci, para obtener un escalar, conocido como *escalar de Ricci* o *escalar de curvatura*:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.66})$$

El tensor de Einstein

A partir de la identidad de Bianchi del tensor de Riemann se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R, \quad (\text{A.67})$$

la cual motiva la introducción de un nuevo tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.68})$$

conocido como *tensor de Einstein*, cuya divergencia covariante será nula:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.69})$$

El hecho de que su divergencia covariante sea nula es esencial para que las ecuaciones de Einstein sean consistentes, pues en ellas se iguala este tensor al tensor de energía momento, el cual es covariantemente conservado.

Apéndice B

El espacio interno de los campos escalares: geometría compleja

En este capítulo, basado en los capítulos 2 y 3 de [8] y el capítulo 13 de [6], se presenta una extensión de las variedades diferenciables descritas en el capítulo anterior al ámbito de los números complejos. La principal aplicación de las variedades complejas se encuentra en los campos escalares utilizados en supersimetría, los cuales pueden considerarse como cartas de una variedad compleja que además será una variedad de Kähler.

B.1. Variedades complejas

La principal característica de una variedad diferenciable M es la posibilidad de, localmente, poder proporcionar unas coordenadas (un conjunto de $\dim M$ funciones reales $x^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$) a cada punto del conjunto de manera que los cambios de coordenadas sean difeomorfismos. De esta manera, para extender este concepto al campo de los números complejos se ofrece la siguiente definición.

Definición B.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Se define una *carta holomorfa* de M como un par (U, ψ) tal que $\psi : U \subseteq M \rightarrow \psi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo.

Definición B.2. Un *atlas holomorfo* en una variedad diferenciable M de dimensión $2n$ es un conjunto de cartas complejas de M $\{(U_i, \psi_i) : i \in I\}$ tales que

- (1) $\cup_{i \in I} U_i = M$.
- (2) $\forall i, j \in I$ tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se cumple que

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1}) : \psi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^n \quad (\text{B.1})$$

es una aplicación holomorfa. Las cartas que verifican esta propiedad se denominan *cartas compatibles*.

Definición B.3. Una *variedad compleja* de dimensión n es una variedad diferenciable (real) de dimensión $2n$ que posee un atlas holomorfo maximal, es decir, un atlas que contiene a todas las cartas complejas compatibles.

Observamos así que una variedad compleja no es más que intercambiar \mathbb{R}^n por \mathbb{C}^n y difeomorfismo por holomorfa. De esta manera, dadas unas coordenadas reales x^i ($i = 1, \dots, 2n$) de una variedad compleja podemos definir las coordenadas complejas

$$\left. \begin{aligned} z^\alpha &= x^\alpha + ix^{\alpha+n} \\ \bar{z}^{\bar{\alpha}} &= \overline{z^\alpha} \end{aligned} \right\} \alpha = 1, \dots, n. \quad (\text{B.2})$$

Definiendo $z^a = (z^1, \dots, z^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)$ tenemos un conjunto de $2n$ coordenadas complejas. Los vectores en las nuevas coordenadas vienen dados por la relación usual:

$$V^a = \frac{\partial z^a}{\partial x^i} V^i. \quad (\text{B.3})$$

Además, una métrica expresada en estas coordenadas verificará: $g_{\alpha\bar{\beta}} = \bar{g}_{\alpha\beta}$ y $g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$.

B.2. Variedades de Kähler

Veamos ahora la generalización de las variedades riemannianas al añadir una métrica a las variedades complejas.

Definición B.4. Una *variedad casi compleja* es una variedad diferenciable que posee un endomorfismo $J : TM \rightarrow TM$ tal que $J^2 = -id$.

Se verifica que cualquier variedad compleja es también una variedad casi compleja, luego siempre se puede definir una aplicación J en una variedad compleja. Se definen las componentes de J en las coordenadas reales como

$$J \frac{\partial}{\partial x^i} = J_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (\text{B.4})$$

siendo $J_i^j J_j^k = -\delta_i^k$. Por otro lado, en las coordenadas complejas (B.2) se tiene que

$$J = \begin{pmatrix} i\delta_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & -i\delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Definición B.5. Sea M una variedad compleja. Una métrica riemanniana g se dice que es una *métrica hermítica* si verifica: $g(V, W) = g(JV, JW) \forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

En coordenadas esta definición se traduce a que g verifique:

$$J_i^k g_{kl} J_j^l = g_{ij}, \quad (\text{B.6})$$

que, en las coordenadas complejas, es equivalente a escribir $g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$. Por tanto, el elemento

de línea de una métrica hermítica en coordenadas complejas viene dado por

$$ds^2 = 2g_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha d\bar{z}^\beta. \quad (\text{B.7})$$

Definición B.6. Se define la *forma fundamental* de una métrica hermítica como la aplicación

$$\omega(V, W) \equiv -g(JV, W) \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(M). \quad (\text{B.8})$$

Escribamos la forma fundamental en las coordenadas reales como

$$\omega = -J_i^k g_{kj} dx^i dx^j = -J_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.9})$$

mientras que en las coordenadas complejas tenemos que

$$\omega = -2ig_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha d\bar{z}^\beta, \quad (\text{B.10})$$

de donde deducimos que se trata de una 2-forma real, es decir, $\omega = \bar{\omega}$.

Definición B.7. Una variedad compleja con una métrica hermítica g se dice que es una *variedad de Kähler* si su forma fundamental verifica: $d\omega = 0$.

Esta condición equivale a, en coordenadas complejas, escribir

$$\partial_\gamma g_{\alpha\bar{\beta}} - \partial_\alpha g_{\gamma\bar{\beta}} = 0, \quad (\text{B.11})$$

de donde se deduce que, localmente, la métrica de una variedad de Kähler verifica:

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K}(z, \bar{z}), \quad (\text{B.12})$$

donde se ha definido el *potencial de Kähler* $\mathcal{K}(z, \bar{z})$. Este potencial está determinado excepto por un término $\delta\mathcal{K} = r(z) + \bar{r}(\bar{z})$, que define las denominadas *transformaciones de Kähler*.

B.2.1. Curvatura

Veamos ahora qué forma tienen los tensores de Riemann y de Ricci. Para ello, comenzamos calculando los símbolos de Christoffel, de los que gran parte son cero debido a las condiciones impuestas, los términos no nulos son los siguientes:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = g^{\gamma\bar{\delta}} \partial_\alpha g_{\beta\bar{\delta}}, \quad \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = g^{\delta\bar{\gamma}} \partial_{\bar{\alpha}} g_{\delta\bar{\beta}}. \quad (\text{B.13})$$

De manera similar, también se anulan ciertas componentes del tensor de Riemann, escribiendo únicamente las que no son cero tenemos:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar{\beta}}^{\gamma\bar{\delta}} &= -\partial_{\bar{\beta}} \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma, \\ R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} &= \partial_\gamma \partial_{\bar{\delta}} g_{\alpha\bar{\beta}} - g^{\eta\bar{\epsilon}} \partial_\gamma g_{\alpha\bar{\epsilon}} \partial_{\bar{\delta}} g_{\eta\bar{\beta}}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

y las componentes relacionadas:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar{\beta}}{}^{\gamma}{}_{\delta} &= R_{\bar{\beta}\alpha}{}^{\gamma}{}_{\delta} = -\overline{R_{\beta\bar{\alpha}}{}^{\bar{\gamma}}{}_{\bar{\delta}}} = \overline{R_{\bar{\alpha}\beta}{}^{\bar{\gamma}}{}_{\bar{\delta}}}, \\ R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} &= -R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\delta}\gamma} = -R_{\bar{\beta}\alpha\gamma\bar{\delta}} = R_{\bar{\beta}\alpha\bar{\delta}\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, calculamos las componentes no nulas del tensor de Ricci como

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\bar{\beta}\alpha} = g^{\bar{\gamma}\delta} R_{\alpha\bar{\gamma}\bar{\beta}\delta} = -\partial_{\alpha}\partial_{\bar{\beta}}(\log \det g). \quad (\text{B.16})$$

B.2.2. Vectores de Killing holomorfos

Para concluir con este capítulo, veremos qué nuevas características tienen los vectores de Killing de una variedad de Kähler. Exigiremos a estos vectores $k^i(x)$ que, además de la definición de los vectores de Killing en las variedades reales (A.53), verifiquen:

$$\delta_k J_i^j = 0, \quad (\text{B.17})$$

que en coordenadas complejas implica que los vectores de Killing k^{α} sólo dependen de las coordenadas z^{β} y no de $\bar{z}^{\bar{\beta}}$. Estas condiciones junto con la propiedad $d\omega = 0$ y el lema de Poincaré resultan en que existen funciones reales $\mathcal{P}(z, \bar{z})$, denominadas *potenciales de Killing*, verificando:

$$k^{\alpha}(z) = -ig^{\alpha\bar{\beta}}\partial_{\bar{\beta}}\mathcal{P}(z, \bar{z}). \quad (\text{B.18})$$

de donde se deduce que

$$\nabla_{\alpha}\partial_{\bar{\beta}}\mathcal{P}(z, \bar{z}) = 0. \quad (\text{B.19})$$

De esta manera, podemos encontrar vectores de Killing en una variedad de Kähler buscando funciones reales que satisfagan esta ecuación. Por el contrario, si conocemos los vectores de Killing, podemos hallar los potenciales de Killing como

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}) = i[k^{\alpha}\partial_{\alpha}\mathcal{K}(z, \bar{z}) - r(z)], \quad (\text{B.20})$$

siendo $\delta\mathcal{K} = r(z) + \bar{r}(\bar{z})$.

Apéndice C

Espacios coset: el vínculo entre la geometría y el álgebra

En las teorías de supergravedad los campos escalares conforman un espacio interno que tiene estructura de variedad de Kähler. Además, en general, dichos espacios estarán descritos mediante lo que en matemáticas se denomina espacios cociente, que es el tema que se va a abordar en este capítulo del anexo. Este capítulo está basado en el capítulo 21 de [9] y el capítulo 4 de [7].

C.1. Grupos cociente

Comenzamos proporcionando unas definiciones básicas que, posteriormente, darán lugar a la idea de espacio cociente.

Definición C.1. Dado G un grupo, $H \triangleleft G$ un subgrupo normal suyo y $x, y \in G$, se define la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff y^{-1}x \in H. \quad (\text{C.1})$$

A partir de esta relación, se define la *clase de equivalencia* o *coset* de un elemento $x \in G$ como

$$[x] \equiv xH = \{xh : h \in H\}. \quad (\text{C.2})$$

Definición C.2. Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G . Se define el *grupo cociente* de G módulo H como el grupo formado por las clases de equivalencia:

$$G/H = \{[x] : x \in G\}. \quad (\text{C.3})$$

C.2. Espacios coset

A continuación vemos de manera informal los conceptos restantes que se requieren para tener un espacio coset. El desarrollo completo se puede encontrar en [9].

En una variedad M con una métrica g se definen las *isometrías* de g como aquellos difeomorfismos¹ $f : M \rightarrow M$ que dejan invariante la métrica. Se verifica además que el conjunto de todas las isometrías de una métrica forma un grupo denominado *grupo de isometrías* de la variedad M . Por ejemplo, el grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski es el grupo de Poincaré, mientras que el grupo de isometrías de S^2 está formado por las rotaciones en el espacio, es decir, es $SO(3)$.

Además, el grupo de isometrías posee un subgrupo denominado *grupo de isotropía* formado por aquellas aplicaciones que dejan los puntos invariantes. Por ejemplo, el grupo de isotropía de S^2 es $SO(2)$ ya que, fijado un punto p en la esfera, las rotaciones en $2D$ realizadas sobre el plano perpendicular a la recta que une el centro de la esfera con el punto p deja invariante dicho punto.

Definición C.3. Sean M una variedad y G un grupo de Lie. Se define una *acción diferenciable* de G sobre M como una aplicación

$$\begin{aligned} \Theta : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto \theta_g(p) \end{aligned} \tag{C.4}$$

tal que

1. $\theta_g : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo.
2. $\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$.
3. $\theta_e = Id : M \rightarrow M$.²

Definición C.4. Sean M una variedad, G un grupo de Lie y Θ una acción diferenciable. Se dice que M es un *espacio homogéneo* si

$$\forall p, q \in M \quad \exists g \in G \text{ tal que } \theta_g(p) = q. \tag{C.5}$$

Con estas definiciones se tiene que el grupo cociente G/H de un grupo de Lie G módulo su subgrupo de isotropía H tiene estructura de espacio homogéneo y lo denominaremos *espacio coset*.

Denotando por \mathfrak{g} y \mathfrak{h} a los álgebras de Lie de G y H , respectivamente, utilizando la *descomposición de Cartan* se tiene que existe un álgebra de Lie \mathfrak{m} tal que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}. \tag{C.6}$$

De esta manera, podemos considerar los siguientes generadores de \mathfrak{g} :

$$\underbrace{\{h_1, \dots, h_{\dim H}\}}_{\in \mathfrak{h}}, \underbrace{\{m_1, \dots, m_{\dim G - \dim H}\}}_{\in \mathfrak{m}} \tag{C.7}$$

¹Una aplicación entre variedades $f : M \rightarrow N$ se dice que es un difeomorfismo si es biyectiva, diferenciable y su inversa es también diferenciable.

²El elemento $e \in G$ denota el elemento neutro del grupo.

que verifican las siguientes propiedades:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}. \quad (\text{C.8})$$

La segunda y tercera propiedad se deben a que estamos trabajando con *espacios reductivos* y *simétricos*, respectivamente.

C.3. Métricas en espacios coset

Veamos ahora cómo podemos obtener la métrica de un espacio coset $M \equiv G/H$ a partir de esta información. Comenzamos construyendo un elemento cualquiera del espacio coset, para ello consideramos como representante de la clase el elemento

$$L = e^{\phi^i m_i} \in \exp(\mathfrak{m}) \quad (\text{C.9})$$

donde ϕ^i son unas coordenadas de la variedad. Construimos la 1-forma de Cartan $\Omega \in \mathfrak{g}$ definiendo sus coordenadas como

$$\Omega_i = L^{-1} \partial_i L \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial \phi^i} \right), \quad (\text{C.10})$$

que verifican:

$$\Omega_i = Q_i + P_i, \quad \text{con } Q \in \mathfrak{h} \text{ y } P \in \mathfrak{m}. \quad (\text{C.11})$$

Además, se cumple que Q_i transforma como una conexión, luego se puede definir derivada covariante correspondiente actuando sobre L como

$$D_i L = \partial_i L - L Q_i, \quad (\text{C.12})$$

de donde se deduce:

$$L^{-1} D_i L = L^{-1} \partial_i L - L^{-1} L Q_i = P_i. \quad (\text{C.13})$$

Finalmente, la métrica se puede obtener mediante la ecuación:

$$ds^2(\phi) = K_{ij} d\phi^i d\phi^j = \text{tr}(P_i P^i). \quad (\text{C.14})$$

Por tanto, en un modelo σ en el que se tiene un conjunto de campos escalares complejos ϕ^i formando un espacio coset G/H , el término cinético del lagrangiano viene dado por:

$$e^{-1} \mathcal{L}_{cin} = -K_{i\bar{j}} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{j}} = -\text{tr}(P_\mu P^\mu), \quad (\text{C.15})$$

donde

$$P_\mu = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} P_i, \quad (\text{C.16})$$

siendo x^μ las coordenadas del espacio-tiempo. Además, si ψ es otro campo de la teoría que transforma bajo el grupo H , la derivada covariante (C.12) actúa también sobre él como:

$$D_i\psi = \partial_i\psi + Q_i\psi. \tag{C.17}$$

Bibliografía

- [1] Aharony, O., Bergman, O., Jafferis, D. L. y Maldacena, J. (2008). *N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/0806.1218>.
- [2] Becker, K., Becker, M. y Schwarz, J. (2007). *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press.
- [3] Brickell, F. y Clark, R.S. (1970). *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company.
- [4] Carroll, S.M. (1997). *Lecture Notes on General Relativity*. University of California.
- [5] Freedman, D.Z., van Nieuwenhuizen, P. y Ferrara, S. (1976). Progress toward a theory of supergravity. *Phys. Rev. D*, *13*(12), 3214-3218. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.3214>.
- [6] Freedman D.Z. y van Proeyen, A. (2012). *Supergravity*. Cambridge University Press.
- [7] Guarino, J.A. (15 de mayo de 2023) *Supergravity, dualities and flux compactifications*. Recuperado el 2 de junio de 2024 de <https://www.adolfoguarino.com/notes.html>.
- [8] Huybrechts, D. *Complex Geometry. An introduction*. Springer.
- [9] Lee, J.M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*, 2^a ed. Springer.
- [10] Maldacena, J. (1999). The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, *38*, 1113-1133. <https://doi.org/10.1023/A:1026654312961>.
- [11] Martin, S. P. (2016). *A Supersymmetry Primer*. arXiv. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356v7>.
- [12] Nastase, H. (2012). *Introduction to supergravity*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1112.3502v3>.
- [13] Rarita, W. y Schwinger, J.(1941). On a theory of particles with half integral spin. *Phys. Rev.*, *60*(1), 61-61. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.60.61>.

- [14] Tong, D. (2019) *Lectures on General Relativity*. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html>.
- [15] Tong, D. (2006) *Lectures on Quantum Field Theory*. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>.
- [16] Tong, D. (2019) *Lectures on the Standard Model*. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/standardmodel.html>.
- [17] Trigiante, M. (2022). *Gauged Supergravities*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1609.09745>.
- [18] Viña, A. (2023). *Notas sobre Geometría*. Universidad de Oviedo.
- [19] de Wit, B., Laenen, E. y Smith, J. (2016). *Field Theory in Particle Physics*. North Holland.