Universidad de Oviedo
Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Álgebras de Lie de dimensión finita en cuerpos algebraicamente cerrados

Sergio Sanjurjo Montero

Supervisado por:

Consuelo Martínez López

25 de Mayo de 2024

Resumen

Se presenta una introducción a la teoría de estructura y clasificación de álgebras de Lie de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados. En los tres primeros capítulos se supone además que la característica del cuerpo es 0. En el cuarto se relaja esta exigencia.

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos, como son la representación adjunta o las constantes de estructura, se definen las álgebras clásicas y se realiza una clasificación en dimensión pequeña.

En el capítulo 2 se estudian las diferentes clases de álgebras de Lie y sus propiedades: nilpotencia y el Teorema de Engel, resolubilidad y Teorema de Lie, semisimplicidad y criterios de Cartan. También se da la descomposición de Jordan-Chevalley y se presenta la forma de Killing.

En el capítulo 3 se realiza la clasificación de las álgebras de Lie simples, para lo cual se presentan las subálgebras de Cartan y sus sistemas de raíces asociados, que se clasifican a partir de sus diagramas de Dynkin, para lo que también se estudian las representaciones de $\mathfrak{sl}_2$.

En el capítulo 4 se presentan de una forma expositiva y ligera los cambios más significativos que ocurren al pasar de característica 0 a positiva. Se dan ejemplos en los que surgen nuevas álgebras o en los que las ya conocidas ganan subestructura, y se resume la clasificación, definiendo álgebras clásicas, de Cartan y de Melikian.

Palabras claves: álgebras de Lie, representación adjunta, constantes de estructura, Teorema de Engel, Teorema de Lie, forma de Killing, criterios de Cartan, clasificación, representaciones de $\mathfrak{sl}_2$, sistemas de raíces, diagramas de Dynkin, característica positiva, álgebras de Cartan, álgebras de Melikian.

Abstract

An introduction to the theory of structure and classification of finite-dimensional Lie algebras over algebraically closed fields is presented. Additionally, in the first three chapters it is assumed that the characteristic of the field is 0. This requirement is relaxed in the fourth chapter.

Chapter 1 introduces basic concepts such as adjoint representation and structure constants, classical algebras are defined, and a brief classification in small dimensions is provided.

Chapter 2 explores different classes of Lie algebras and their properties: nilpotency and the Engel Theorem, solvability and the Lie Theorem, semisimplicity and Cartan's criteria. The Jordan-Chevalley decomposition and the Killing form are also presented.

Chapter 3 presents the classification of simple Lie algebras, introducing Cartan subalgebras and their associated root systems, classified based on Dynkin diagrams. The representations of $\mathfrak{sl}_2$ are also studied for this purpose.

Chapter 4 presents in a more explanatory manner the most significant changes that occur when moving from characteristic 0 to positive characteristic. Examples are given where new algebras emerge or where already known algebras gain substructure. The classification is summarized, defining classical, Cartan, and Melikian algebras.

Keywords: Lie algebras, adjoint representation, structure constants, Engel's Theorem, Lie's Theorem, Killing form, Cartan criteria, classification, $\mathfrak{sl}_2$ representations, root systems, Dynkin diagrams, positive characteristic, Cartan algebras, Melikian algebras.

Índice

Introducción

Este texto estudia en profundidad las álgebras de Lie de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados. La condición sobre la dimensión es esencial para poder hacer un primer acercamiento al tema y dar una introducción comprensible y cercana a los estudios de grado, pues como es frecuente en las estructuras algebraicas, las circunstancias son mucho más ricas y complejas en dimensión infinita.

Exigir que el cuerpo sea algebraicamente cerrado también es una simplificación, y el siguiente paso en esta dirección consistiría en relajar esta restricción y construir álgebras de Lie sobre cuerpos que no lo son. Para ello se utilizaría información de las álgebras de Lie existentes sobre la clausura algebraica de tales cuerpos.

Además, en un principio el estudio se centra en cuerpos que tienen característica 0, pues son los que se emplean con más frecuencia y en los que el estudio es más sencillo. Sin embargo, en el último capítulo se hace una breve exposición en la que se aborda el caso de característica positiva.

El trabajo realizado no es conceptualmente original, al tratarse de un tema que se consolidó a lo largo del siglo XX, por lo que la información se recopiló a través de las referencias clásicas de Jacobson [1] y Humphreys [2], la exposición moderna de Erdmann y Wildon [3], así como a las notas de Kac [4], Tao [5] e Igusa [6], y el libro de Strade [7], que trata la característica positiva, tema mucho más moderno. A pesar de ello, el autor ha tratado de construir una exposición propia, con un toque personal y tratando de ordenar y expresar las ideas de la manera que consideró más comprensible.

El primer capítulo introduce el tema, comenzando con la definición de álgebra de Lie con su operación: el conmutador, y su relación fundamental: la identidad de Jacobi. Solo se presuponen conocimientos de un primer curso de álgebra lineal. A partir de ahí, se da toda la terminología algebraica usual a cualquier estructura y se pasa a presentar ideas más específicas al tema.

En esta línea se introduce la representación adjunta, que se basa en hacer actuar el álgebra de Lie sobre sí misma a través de su conmutador, y resulta extremadamente útil a la hora de estudiar la estructura. También se presentan las constantes de estructura y las extensiones, cuestiones aparentemente técnicas, pero que ilustran de una manera más tratable, sobre todo en ejemplos pequeños, qué es realmente un álgebra de Lie y cómo trabajar con ellas en aplicaciones prácticas.

Para terminar el capítulo se ofrecen los primeros ejemplos reales de álgebras de Lie, introduciendo las álgebras clásicas, así llamadas por aparecer de manera natural en otros contextos y ser el origen de la disciplina. Se estudian de manera superficial sus propiedades y se comienzan a dar algunos resultados de interés para ver las técnicas de demostración de la teoría. Finalmente se clasifican las álgebras de Lie de dimensión menor o igual que 3, para así tener unas buenas referencias sencillas con las que empezar a ganar intuición.

En el segundo capítulo se definen varias clases de álgebras de Lie, pues el estudio de una estructura genérica es complicado y requiere de simplificaciones que poco a poco lleven a resultados generales. En este caso, mediante las series central descendente y derivada se definen la nilpotencia y la resolubilidad, respectivamente, y con ello se pueden dar fuertes resultados al restringirse a álgebras de estos tipos. Para las álgebras nilpotentes se tiene el Teorema de Engel, que caracteriza la nilpotencia del álgebra de Lie a través de la nilpotencia de los endomorfismos de la representación adjunta, y para las resolubles el Teorema de Lie permite encontrar en las álgebras de Lie de matrices bases con matrices triangulares superiores.

Hecho esto, y pensando en la idea de las extensiones de álgebras de Lie, se definen las semisimples como las álgebras de Lie que no tienen parte resoluble, en concreto, como las que no tienen ningún ideal resoluble. Esto consigue que se pueda reconstruir un álgebra de Lie a partir de su ideal resoluble maximal, y el cociente por este ideal, que es semisimple. Además, la definición no se hace a la ligera, de manera que todo cuadra y resulta que la semisimplicidad de un álgebra de Lie equivale a que esta sea suma directa de álgebras simples, es decir, sin ideales propios. También en relación a estos conceptos se introducen la descomposición de Jordan-Chevalley, que permite descomponer elementos en su parte nilpotente y su parte semisimple, y la forma de Killing, que permite dar los criterios de Cartan para resolubilidad y semisimplicidad.

El tercer capítulo afronta uno de los problemas centrales de cualquier categoría algebraica: la descripción y clasificación de sus objetos simples. En este caso particular, nos interesa clasificar salvo isomorfismos las álgebras de Lie simples de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0. Con este objetivo se introducen las subálgebras de Cartan, que resultan tener propiedades muy ventajosas, permitiendo asociarles un sistema de raíces. Este sistema es un objeto puramente geométrico que vive en un espacio euclídeo, del cual se puede obtener mucha información con matemáticas sencillas. Para poder garantizar estas afirmaciones se estudia la teoría de representaciones de $\mathfrak{sl}_2$, que es el álgebra de Lie simple más pequeña y sirve como pieza fundamental para entender las demás.

Siguiendo hacia la clasificación, en los sistemas de raíces se definen las raíces simples, que se agrupan en un conjunto finito con propiedades muy restrictivas. Se explota este hecho para describir las raíces simples de forma sencilla como un grafo, y poco a poco se van descartando casos hasta llegar a una clasificación de los diagramas de Dynkin asociados a los sistemas de raíces. Estos diagramas se pueden dibujar en una sola hoja de papel y es probablemente la imagen más característica del tema. Se puede encontrar la descripción gráfica de esta clasificación en la Figura 3.1. Finalmente, se dan resultados que garantizan la unicidad de esta construcción y la isomorfía de las álgebras de Lie con un mismo diagrama de Dynkin asociado, y se recurre al conocimiento explícito de las álgebras de Lie simples para justificar que la clasificación de las mismas está en correspondencia 1 a 1 con la de diagramas de Dynkin.

El cuarto y último capítulo relaja la condición de característica 0, pasando al estudio de álgebras de Lie en característica positiva. Este capítulo no pretende tener la profundidad ni ser igual de autocontenido que los anteriores, siendo su intención dar una pequeña introducción comprensible al tema, permitiendo un estudio posterior y en detalle a través del libro de Strade [7] y otras fuentes de interés. Por tanto, inicialmente se comenta la situación y las variaciones que se producen con respecto al caso de característica 0.

Para ilustrar las diferencias se analizan dos pequeños ejemplos. El primero de ellos consiste en la construcción de un álgebra de Lie que no tiene análogo en característica 0, pues que se satisfaga la identidad de Jacobi depende directamente de la característica del cuerpo. El segundo se corresponde con la justificación de que un álgebra que era simple en característica 0, gana subestructura en característica 2, pasando a tener un ideal propio, y perdiendo así la simplicidad. Esta última situación se enmarca en un resultado más general.

Finalmente, se da una pequeña visión de la clasificación de álgebras simples en característica positiva p, la cual está completa para $p > 3$, y está en un estado avanzado en $p = 3$. La situación en $p = 2$ es tremendamente complicada, pues recientemente se han incluso construido algunas álgebras en esta característica a partir de superálgebras, que están mucho menos estudiadas, dando lugar a una red de desconocimiento muy amplia. En $p > 3$ la clasificación de Block–Wilson–Strade–Premet garantiza que toda álgebra de Lie simple es de tipo clásica o Cartan (o Melikian si $p = 5$). Las álgebras clásicas son las análogas a las de característica 0, que se obtienen con la construcción de una base de Chevalley cambiando los escalares desde $\mathbb{C}$ hasta el cuerpo de interés. Las de Cartan y las de Melikian tienen una construcción complicada como álgebras de derivaciones actuando sobre espacios geométricos de formas diferenciales.

Definiciones y propiedades esenciales

En este capítulo el estudio se limitará a álgebras y espacios vectoriales de dimensión finita con un cuerpo subyacente de característica 0 algebraicamente cerrado, pudiendo aludir a $\mathbb{C}$ para ejemplos concretos. No se hará referencia al cuerpo bajo el que se trabaja, siempre asumiendo estas propiedades y denotándolo F en caso de ser necesario. Muchos de los resultados son válidos en casos más generales o pueden extenderse sin complicación; sin embargo, se ha optado por perder generalidad en este aspecto en favor de la claridad de la exposición. De esta forma se desarrolla la teoría en su forma más sencilla, omitiendo confusiones y complicaciones que podrán estudiarse más adelante como generalizaciones.

1.1. Conceptos básicos

Un álgebra se obtiene definiendo una operación binaria interna bilineal en un espacio vectorial, de manera análoga a como se obtiene un anillo a partir de un grupo conmutativo. También se definen asociatividad, conmutatividad y existencia de 1 de la manera usual.

Definición 1.1.1 ***Álgebras.*** *Un espacio vectorial A junto con una operación binaria interna $A \times A \to A$, se dice álgebra si la operación es bilineal. Se denota multiplicativamente, a menudo por yuxtaposición. Un álgebra se dice asociativa y/o conmutativa si la operación cumple esas propiedades y se dice unital o con 1 si existe una identidad multiplicativa.*

Un álgebra de Lie es un tipo particular de álgebra, motivada por el conmutador multiplicativo $[x, y] = xy - yx$ en un álgebra asociativa. Formalizamos su estructura abstracta en la siguiente definición.

Definición 1.1.2 ***Álgebra de Lie.*** *Un espacio vectorial L junto con una operación binaria interna bilineal $L \times L \to L$, denotada $[x, y]$ y llamada conmutador, se dice álgebra de Lie si satisface:*

- $[x, x] = 0$ *para todo* $x \in L$.
- *Identidad de Jacobi:* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *para todo* $x, y, z \in L$.

Nota 1.1.3 *La bilinealidad y la primera propiedad implican la anticonmutatividad, esto es,* $[x, y] = -[y, x]$ *para todo* $x, y \in L$.

La siguiente proposición establece que la definición de álgebra de Lie es compatible con la motivación encontrada en los conmutadores multiplicativos de las álgebras asociativas.

Proposición 1.1.4 *Toda álgebra asociativa induce una estructura de álgebra de Lie sobre su espacio vectorial subyacente definiendo el conmutador como* $[x, y] = xy - yx$.

Demostración: Sea A el espacio vectorial subyacente al álgebra asociativa. Es claro que este conmutador es bilineal y cumple $[x, x] = 0$ para todo $x \in A$. Vamos a probar la identidad de Jacobi. Para ello, sean $x, y, z \in A$. Se cumple que:

$$\begin{aligned} -[x, [y, z]] - [z, [x, y]] &= -x[y, z] + [y, z]x - z[x, y] + [x, y]z = \\ &= -xyz + xzy + yzx - zyx - zxy + zyx + xyz - yxz = \\ &= xzy + yzx - zxy - yxz = y[z, x] - [z, x]y = [y, [z, x]] \end{aligned}$$

Así, este conmutador dota a A de estructura de álgebra de Lie. $\square$

Esta proposición nos da una forma de construir álgebras de Lie a partir de álgebras asociativas. Es sencillo ver que el conjunto de transformaciones lineales $\operatorname{End} V$ de un espacio vectorial V, dotado de la suma y el producto por escalares es un espacio vectorial. Si además le añadimos la composición se convierte en un álgebra asociativa. Lo usaremos para definir el primer ejemplo de álgebra de Lie, que jugará un rol central en lo que sigue.

Definición 1.1.5 ***Álgebra de Lie general*** $\mathfrak{gl}(V)$***.*** *El álgebra de Lie* $\mathfrak{gl}(V)$ *se obtiene por la construcción de la Proposición 1.1.4 aplicada al álgebra asociativa* $\operatorname{End} V$*, con* V *un espacio vectorial.*

Nota 1.1.6 *Al trabajar con álgebras de dimensión finita,* $\mathfrak{gl}(V)$ *puede verse como un álgebra de matrices sobre el cuerpo* F *de tamaño* $n \times n$*, con* $n = \dim V$*.*

Como decíamos, el álgebra $\mathfrak{gl}(V)$ jugará un papel fundamental en el estudio, y a posteriori esto no es de extrañar, pues uno de los resultados que probaremos más adelante es el Teorema de Ado, que establece que toda álgebra de Lie de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$.

Volviendo a las definiciones, nos interesan especialmente las transformaciones lineales de un álgebra A que actúan como una derivación, es decir, que cumplen la regla de Leibniz para el producto, pues podemos verlas como elementos de $\mathfrak{gl}(A)$, dónde el conmutador de dos derivaciones vuelve a ser una derivación.

Definición 1.1.7 ***Derivaciones.*** *El conjunto de derivaciones de un álgebra A (con producto denotado por yuxtaposición) es* $\operatorname{Der} A = \{\rho \in \operatorname{End} A \,|\, \rho(xy) = \rho(x)y + x\rho(y)\ \forall x, y \in A\}$*.*

Vamos a introducir el concepto de subálgebra de Lie, pues $\operatorname{Der} A$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(A)$.

Definición 1.1.8 ***Subálgebra.*** *Una subálgebra de un álgebra de Lie es un subespacio vectorial cerrado bajo el conmutador.*

Proposición 1.1.9 *Sea* A *un álgebra. Entonces* $\operatorname{Der} A$ *es una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{gl}(A)$*.*

Demostración: $\operatorname{Der} A$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}(A)$, pues la actuación de las derivaciones es lineal. Sean $x, y \in A$ y $\rho, \sigma \in \operatorname{Der} A$:

$$\begin{aligned}
[\rho,\sigma](xy) &= \rho(\sigma(xy)) - \sigma(\rho(xy)) = \rho(\sigma(x)y + x\sigma(y)) - \sigma(\rho(x)y + x\rho(y)) = \\
&= \rho(\sigma(x))y + \sigma(x)\rho(y) + \rho(x)\sigma(y) + x\rho(\sigma(y)) \\
&\quad - \sigma(\rho(x))y - \rho(x)\sigma(y) - \sigma(x)\rho(y) - x\sigma(\rho(y)) = \\
&= [\rho,\sigma](x)y + x[\rho,\sigma](y)
\end{aligned}$$

De forma que $[\rho, \sigma] \in \operatorname{Der} A$ y $\operatorname{Der} A$ es cerrado bajo el conmutador. $\square$

1.1.1. Terminología algebraica

En este apartado se introducen los conceptos algebraicos básicos propios de cualquier estructura, en este caso particularizados a las álgebras de Lie. Nos servirán como punto de partida para todo el estudio posterior.

Definición 1.1.10 ***Ideal.*** *Una subálgebra I de un álgebra de Lie L se dice ideal de L si $[x, y] \in I$ para todo $x \in L$, $y \in I$. El ideal 0 se dice trivial, L impropio y todos los demás propios.*

Nota 1.1.11 *La condición de ideal a izquierda y derecha son equivalentes por la antisimetría del conmutador, por lo que simplemente se habla de ideales.*

Definición 1.1.12 ***Centro.*** *El centro de un álgebra de Lie L está definido por $Z(L) = \{z \in L \,|\, [x, z] = 0 \;\forall x \in L\}$.*

Proposición 1.1.13 ***Suma de ideales.*** *Dados ideales I y J de un álgebra de Lie L, se define la suma $I + J = \{i + j \,|\, i \in I, j \in J\}$.*

Nota 1.1.14 *El centro, la suma de ideales y la intersección de ideales son ideales.*

Definición 1.1.15 ***Conmutador de ideales y álgebra derivada.*** *Dados subconjuntos I y J de un álgebra de Lie L, se define el conmutador $[I, J] = \mathrm{span}\{[i, j] \,|\, i \in I, j \in J\}$. El álgebra derivada es $L' = [L, L]$.*

Proposición 1.1.16 *El conmutador de ideales es un ideal. En particular, el álgebra derivada es un ideal.*

Demostración: Sean I y J ideales de L. Por la bilinealidad del conmutador solo es necesario comprobar que si $x \in L$, $i \in I$ y $j \in J$ entonces $[x, [i, j]] \in [I, J]$, pero aplicando la identidad de Jacobi se tiene $[x, [i, j]] = -[i, [j, x]] - [j, [x, i]]$ y por ser I y J ideales $[j, x] \in J$ y $[x, i] \in I$, de forma que $[x, [i, j]]$ es combinación lineal de conmutadores entre elementos de I y J, por lo que está en $[I, J]$. $\square$

Nota 1.1.17 *Un subespacio vectorial H de un álgebra de Lie L es subálgebra si se cumple $[H, H] \subseteq H$ y es ideal si $[L, H] \subseteq H$.*

Definición 1.1.18 ***Homomorfismo.*** *Un homomorfismo entre álgebras de Lie L y G es una aplicación lineal $\phi : L \to G$ tal que $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ para todo $x, y \in L$. Se definen monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo y automorfismo (de álgebras de Lie) de la manera usual.*

A partir de ahora siempre que usemos el término homomorfismo se entenderá que nos referimos a un homomorfismo de álgebras de Lie salvo que se especifique lo contrario.

Definición 1.1.19 ***Núcleo o kernel.*** *El núcleo de un homomorfismo* $\phi : L \to G$ *es* $\ker\phi = \{x \in L \mid \phi(x) = 0\}$.

Nota 1.1.20 *Dado un homomorfismo* $\phi : L \to G$*, la imagen* $\phi(L)$ *es una subálgebra de* G *y el núcleo* $\ker\phi$ *es un ideal de* L*.*

Proposición 1.1.21 ***Álgebra cociente.*** *Sea* I *un ideal de* L*. El álgebra de Lie cociente* L/I *es el espacio vectorial cociente con conmutador definido según* $[x+I, y+I] = [x, y] + I$ *para todo* $x, y \in L$*.*

Nota 1.1.22 *El álgebra de Lie cociente es de hecho un álgebra de Lie, gracias a la propiedad que define a los ideales.*

Definición 1.1.23 ***Álgebras abelianas.*** *Un álgebra de Lie* L *se dice abeliana si* $[x, y] = 0$ *para todo* $x, y \in L$*.*

Nota 1.1.24 *Un álgebra de Lie es abeliana si y solo si su álgebra derivada es trivial.*

Nota 1.1.25 *El centro de un álgebra de Lie es un ideal abeliano.*

Nota 1.1.26 *Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana.*

Definición 1.1.27 ***Simplicidad.*** *Un álgebra de Lie se dice simple si no es abeliana y no tiene ideales propios no triviales.*

Nota 1.1.28 *Un álgebra de Lie* L *simple tiene* $Z(L) = 0$ *y* $L' = L$*.*

Enunciamos sin demostración los clásicos teoremas de isomorfía, puesto que son una extensión sencilla de los mismos en el caso de espacios vectoriales.

Teorema 1.1.29 ***Teoremas de Isomorfía.***

1. *Sea* $\phi : L \to G$ *un homomorfismo, entonces* $L/\ker\phi$ *y* $\phi(L)$ *son isomorfos.*

2. *Sean* $I \subseteq J$ *ideales de* L*, entonces* J/I *es un ideal de* L/I *y* $(L/I)/(J/I)$ *es isomorfo a* L/J*.*

3. *Sean* I, J *ideales de* L*, entonces* $(I + J)/J$ *y* $I/(I \cap J)$ *son isomorfos.*

Corolario 1.1.30 *El isomorfismo entre $L/\ker\phi$ y $\phi(L)$ establece una correspondencia biyectiva entre las subálgebras de $L/\ker\phi$ y las subálgebras de $\phi(L)$ que contienen a L. Además, la correspondencia preserva ideales.*

Definición 1.1.31 ***Normalizador.*** *Sea L un álgebra de Lie y $K \subseteq L$. El normalizador de K en L es $N_L(K) = \{x \in L \,|\, [x,k] \in K \;\; \forall k \in K\}$.*

Proposición 1.1.32 *El normalizador de un subespacio es una subálgebra.*

Demostración: Sean L un álgebra de Lie y K un subespacio. $N_L(K)$ es subespacio por la bilinealidad del conmutador y la linealidad del subespacio K. Sean $x, y \in N_L(K)$ y $k \in K$, entonces:

$$[[x,y],k] = -[[y,k],x] - [[k,x],y] = [x,[y,k]] - [y,[x,k]] \in K$$

Así, $N_L(K)$ es subálgebra. □

Nota 1.1.33 *Toda subálgebra está contenida en su normalizador y es ideal del mismo.*

1.1.2. Representación adjunta

Con toda la terminología establecida, estamos en condiciones de introducir el concepto de representación de un álgebra de Lie, lo que intuitivamente no es más que una forma de actuar de L sobre un espacio vectorial V. Es decir, asignamos una transformación lineal de V a cada elemento de L, y esto lo hacemos de manera que se preserve la estructura, es decir, a través de un homomorfismo entre L y $\mathfrak{gl}(V)$.

Definición 1.1.34 ***Representación.*** *Sean V un espacio vectorial y L un álgebra de Lie. Una representación ρ de L en V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$. La representación es fiel si ρ es un monomorfismo.*

Las representaciones pueden presentarse de manera equivalente definiendo directamente la acción del álgebra sobre el espacio vectorial, en lugar de a través de un homomorfismo. Para formalizar esto definimos el concepto de L-módulo, con L un álgebra de Lie.

Definición 1.1.35 ***L-módulo.*** *Sean V un espacio vectorial y L un álgebra de Lie. Entonces V se dice L-módulo si hay definida una operación bilineal $L \times V \to V$ denotada $l \cdot v$ que satisface $[x,y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$ para todo $x, y \in L$ y $v \in V$.*

Nota 1.1.36 *De manera natural, una representación ρ define la acción del álgebra de Lie L sobre el espacio vectorial V dada por $x \cdot v = \rho(x)v$, de forma que V puede verse como L-módulo. Recíprocamente, a partir de la acción puede definirse el homomorfismo de la representación. Algunos autores llaman representación al L-módulo en lugar de al homomorfismo.*

Volveremos al estudio de las representaciones de álgebras de Lie más adelante; sin embargo, de momento vamos a centrarnos en una representación particular que nos servirá como herramienta en nuestro estudio. Para ello vamos a definir la transformación lineal adjunta asociada a cada elemento del álgebra de Lie.

Definición 1.1.37 ***Adjunta.*** *La adjunta de un elemento x de un álgebra de Lie L es la transformación lineal $\mathrm{ad}_x : L \to L$ definida según $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$.*

Es claro que la aplicación que hemos llamado adjunta es efectivamente una transformación lineal de L por ser el conmutador bilineal. Definiremos la representación adjunta como la que asigna a cada elemento su adjunta.

Definición 1.1.38 ***Representación adjunta.*** *La representación adjunta de un álgebra de Lie L es la aplicación $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ definida por $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}_x$.*

Es necesario comprobar que la aplicación que define la representación adjunta es de hecho una representación, es decir, un homomorfismo de álgebras de Lie.

Proposición 1.1.39 *La representación adjunta es una representación de L en L. En particular, $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ para todo $x, y \in L$.*

Demostración: Por ser el conmutador de un álgebra de Lie bilineal, es claro que ad es lineal. Además, dados $x, y, z \in L$, se cumple:

$$\mathrm{ad}_{[x,y]}(z) = [[x, y], z] = -[z, [x, y]] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z)$$

Así, $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ y ad es homomorfismo de álgebras de Lie. □

La representación adjunta nos permite ver $\mathrm{ad}\, L$ como una subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$, por lo que al trabajar en dimensión finita $\mathrm{ad}\, L$ es un álgebra de matrices. Esto nos permitirá estudiar la estructura de álgebras de Lie abstractas mediante el estudio de $\mathrm{ad}\, L$, que solo requiere herramientas de álgebra matricial. Además, podemos encontrar una relación explícita con $\operatorname{ad} L$ mediante el primer Teorema de Isomorfía si conocemos el núcleo, que claramente está formado por los elementos que conmutan con todos los demás.

Nota 1.1.40 *El núcleo de la representación adjunta es el centro. Por tanto, dada cualquier álgebra de Lie L se tiene que $L/Z(L)$ y $\operatorname{ad} L$ son isomorfas. En particular, si L tiene centro trivial es isomorfa a $\operatorname{ad} L$ y puede verse como un álgebra de matrices, subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$.*

Esta relación de cualquier álgebra de Lie con un álgebra abeliana y una de matrices (y otras relaciones más interesantes que veremos después) muestra que puede ser interesante tener un mecanismo para reconstruir la estructura de un álgebra de Lie a partir de otras más sencillas. Dedicaremos un apartado a estas construcciones; sin embargo, antes de eso, aún podemos decir algo más sobre $\operatorname{ad} L$, y es que su actuación es la de una derivación, por lo que no solo podemos verla como subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$, sino también de $\operatorname{Der} L$.

Proposición 1.1.41 *Sea L un álgebra de Lie. Entonces $\operatorname{ad} L$ es un ideal de $\operatorname{Der} L$.*

Demostración: Para ver que es subálgebra solo es necesario comprobar que $\operatorname{ad} L \subseteq \operatorname{Der} L$, pues sabemos que ambas son subálgebras de $\mathfrak{gl}(L)$. Así, sean $x, y, z \in L$:

$$\operatorname{ad}_x([y,z]) = [x,[y,z]] = -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] = [\operatorname{ad}_x(y), z] + [y, \operatorname{ad}_x(z)]$$

Por tanto, $\operatorname{ad}_x \in \operatorname{Der} A$ y $\operatorname{ad} L \subseteq \operatorname{Der} L$. Además, sea $\rho \in \operatorname{Der} L$, entonces:

$$[\rho, \operatorname{ad}_x](y) = \rho([x,y]) - [x, \rho(y)] = [\rho(x), y] = \operatorname{ad}_{\rho(x)}(y)$$

Así, $[\rho, \operatorname{ad}_x] = \operatorname{ad}_{\rho(x)} \in \operatorname{ad} L$ y $\operatorname{ad} L$ es ideal de $\operatorname{Der} L$. □

Como consecuencia, llamaremos a los elementos de $\operatorname{ad} L$ derivaciones internas, pues actúan según el conmutador de la propia L.

Definición 1.1.42 ***Derivaciones internas.*** *Sea L un álgebra de Lie. Los elementos de $\operatorname{ad} L$ se llaman derivaciones internas y el resto de elementos de $\operatorname{Der} L$ derivaciones externas.*

Antes de continuar vamos a introducir los automorfismos internos, definidos a través de la exponencial, que conecta las álgebras de Lie con los grupos de Lie. No indagaremos más en esta relación ni la detallaremos mucho, pero sí utilizaremos los automorfismos internos más adelante, cuando probemos que las subálgebras de Cartan siempre son conjugadas entre sí a través de estos automorfismos.

Proposición 1.1.43 *Dada un álgebra de Lie L, su conjunto de automorfismos* $\mathrm{Aut}(L)$ *es un grupo.*

Vamos a introducir la aplicación exponencial, generalizada a matrices, que utilizaremos para definir los automorfismos internos.

Definición 1.1.44 ***Exponencial.*** *Dado un espacio vectorial de matrices $\mathcal{M}$ y una matriz $M \in \mathcal{M}$ se define la aplicación exponencial como*

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Se puede comprobar la convergencia de esta aplicación en los espacios de interés dada una norma adecuada, al igual que la exponencial ordinaria converge para cualquier valor de $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1.45 *Sea L un álgebra de Lie y $x \in L$. Entonces* $\exp(\mathrm{ad}_x) \in \mathrm{Aut}(L)$.

Demostración: Una vez asumida la convergencia, tenemos una aplicación bien definida de L a L. Para probar la biyectividad basta encontrar la inversa, y esto es sencillo, pues se puede comprobar que $\log(\exp(\mathrm{ad}_x)) = \mathrm{ad}_x$, con la aplicación logaritmo definida como

$$\log(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(X-I)^k}{k}$$

donde I es la matriz identidad, y de nuevo puede justificarse apropiadamente la convergencia.

Falta así probar que la exponencial preserva el conmutador, es decir, que dados $y, z \in L$ se cumple

$$\exp(\mathrm{ad}_x)([y,z]) = [\exp(\mathrm{ad}_x)(y), \exp(\mathrm{ad}_x)(z)] \tag{1.1}$$

Esto se da gracias a que ad_x es un endomorfismo. □

Definición 1.1.46 ***Automorfismos internos.*** *El conjunto de automorfismos internos* $\mathrm{Aut}^0(L)$ *de un álgebra de Lie L es el subgrupo de* $\mathrm{Aut}(L)$ *generado por los elementos de la forma* $\exp(\mathrm{ad}_x)$*, con $x \in L$.*

Un concepto muy relacionado a la representación adjunta son las constantes de estructura del álgebra de Lie, por lo que las definiremos en el siguiente apartado.

1.1.3. Constantes de estructura

Las constantes de estructura de un álgebra de Lie dan una forma de describir el comportamiento del conmutador con una colección de escalares del cuerpo y serán útiles en lo que sigue para realizar alguna construcción. Además, en dimensión finita, podemos identificarlas con las entradas de las matrices adjuntas.

Definición 1.1.47 ***Constantes de estructura.*** *Sean L un álgebra de Lie sobre un cuerpo F y $\{e_k\}_{k=1}^n$ una base de suya. Las constantes de estructura de L asociadas a la base $\{e_k\}_{k=1}^n$ son los $f_{ij}^l \in F$ tales que $[e_i, e_j] = \sum_{l=1}^n f_{ij}^l e_l$ para todo i, j natural entre 1 y n.*

Nota 1.1.48 *La constante de estructura f_{ij}^l es el elemento l, j en la matriz coordenada de $\operatorname{ad} e_i$.*

Es claro que las constantes de estructura definen el álgebra de Lie por la bilinealidad del conmutador. Sin embargo, no todas las elecciones de constantes de estructura son válidas, pues las propiedades que ha de cumplir el conmutador de un álgebra de Lie inducen ciertas restricciones que resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.49 *Sean L un álgebra de Lie de dimensión n y denotemos como i, j, l, m cuatro índices naturales entre 1 y n. Las constantes de estructura del álgebra L satisfacen $f_{ii}^l = 0$, $f_{ij}^l + f_{ji}^l = 0$ y $\sum_{k=1}^n (f_{jl}^k f_{ik}^m + f_{li}^k f_{jk}^m + f_{ij}^k f_{lk}^m) = 0$.*

Demostración: En primer lugar, $0 = [e_i, e_i] = \sum_{k=1}^n f_{ii}^k e_k$. Por ser combinación lineal de una base, se tiene que $f_{ii}^k = 0$ para todo k natural entre 1 y n. Igualmente, $0 = [e_i, e_j] + [e_j, e_i] = \sum_{k=1}^n (f_{ij}^k + f_{ji}^k) e_k$, lo cual conlleva $f_{ij}^k + f_{ji}^k = 0$ para todo k natural entre 1 y n. Por último, la identidad de Jacobi supone:

$$0 = [e_i, [e_j, e_l]] + [e_j, [e_l, e_i]] + [e_l, [e_i, e_j]] = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n (f_{jl}^k f_{ik}^p + f_{li}^k f_{jk}^p + f_{ij}^k f_{lk}^p) e_p$$

De nuevo, por ser base, concluimos $\sum_{k=1}^n (f_{jl}^k f_{ik}^p + f_{li}^k f_{jk}^p + f_{ij}^k f_{lk}^p) = 0$ para todo p natural entre 1 y n. $\square$

Teniendo establecidas las relaciones que las constantes de estructura deben satisfacer para ser las de un álgebra de Lie, podemos construir estas álgebras a partir de las constantes y caracterizar las clases de equivalencia salvo isomorfismo a través de ellas. Lo resumimos en la siguiente nota.

Nota 1.1.50 *Sean $n \in \mathbb{N}$, F un cuerpo y $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ una base de F^n. Cualquier conjunto $\Gamma = \{f_{ij}^l\}_{i,j,l=1}^n \subseteq F$ satisfaciendo las identidades de la Proposición 1.1.49 induce una estructura de álgebra de Lie en F^n, con constantes de estructura Γ asociadas a la base B. De hecho, dos álgebras de Lie L_1 y L_2 sobre F de dimensión n son isomorfas si y solo si existen bases B_1 y B_2 de F^n tales que las constantes de estructura de L_1 asociadas a B_1 coinciden con las de L_2 asociadas a B_2.*

En consecuencia, al poder agrupar las constantes de estructura en las matrices de la representación adjunta, conocer todas las matrices adjuntas es equivalente a conocer el álgebra en su totalidad.

1.1.4. Extensiones

El objetivo de este apartado es formalizar un mecanismo que permita construir un álgebra de Lie cualquiera a partir de álgebras más sencillas, facilitando así el estudio de su estructura, pues entender un conjunto limitado de álgebras será prácticamente suficiente. Daremos el marco general de las extensiones y mostraremos un primer caso utilizando el isomorfismo entre $L/Z(L)$ y $\operatorname{ad} L$. Por ahora vamos a introducir el concepto de secuencia exacta corta, que es en realidad análogo al de ideal.

Definición 1.1.51 ***Secuencia exacta corta.*** *Una secuencia exacta corta de álgebras de Lie viene dada por tres álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo y dos homomorfismos $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$, con i inyectivo, π suprayectivo y $\ker \pi = i(H)$.*

Nota 1.1.52 *Las secuencias exactas cortas con álgebra de Lie intermedia L están en correspondencia con los ideales y cocientes de L, esto es, si H es un ideal de L entonces $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} L/H$ forma una secuencia exacta corta, y recíprocamente, si $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$ es una secuencia exacta corta entonces $i(H)$ es un ideal de L isomorfo a H y G es isomorfo a $L/i(H)$.*

Estas secuencias nos permitirán extender H con G para obtener L, que será un álgebra más complicada. Es interesante notar que está definición es acorde al caso particular que estamos usando como ejemplo, pues el centro puede usarse para construir una secuencia exacta corta.

Nota 1.1.53 *Cualquier álgebra de Lie L cumple que $Z(L) \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} \operatorname{ad} L$, con i la inclusión y π el epimorfismo canónico compuesto con el isomorfismo entre $L/\operatorname{ad} L$ y $\operatorname{ad} L$, es una secuencia exacta corta.*

Vamos a formalizar ahora el concepto de extensión que queríamos construir. Para ello vamos a construir un álgebra de Lie sobre la suma directa de los espacios vectoriales H y G y establecer un isomorfismo entre L y esta suma directa. El primer paso es ver que L y la suma directa son isomorfos como espacios vectoriales.

Proposición 1.1.54 *Sea $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$ una secuencia exacta corta. Entonces L y $H \oplus G$ son isomorfos como espacios vectoriales.*

Demostración: Dos espacios vectoriales finitamente generados son isomorfos si tienen la misma dimensión. Se tiene que $\dim H = \dim(\ker \pi)$ por las hipótesis y por el primer Teorema de isomorfía $\dim L = \dim G + \dim(\ker \pi)$, concluyendo la prueba, al ser la dimensión de la suma directa la de H más la de G. $\square$

Para definir el producto sobre esta suma directa vamos a introducir dos funciones y ciertas condiciones complicadas sobre ellas. En los casos que nos interesan será fácil comprobar que estas condiciones se cumplen.

Proposición 1.1.55 *Sean H y G álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo y A y B dos aplicaciones bilineales $A : H \times G \to H$ y $B : G \times G \to H$. Son equivalentes:*

- *La suma directa de espacios vectoriales $H \oplus G$, junto con el conmutador definido como $\big[(h_1, g_1), (h_2, g_2)\big] = \big([h_1, h_2] + A(h_1, g_2) - A(h_2, g_1) + B(g_1, g_2), [g_1, g_2]\big)$, para todos $h_1, h_2 \in H$ y $g_1, g_2 \in G$ es un álgebra de Lie.*
- *Las aplicaciones A y B satisfacen que $B(g, g) = 0$ para todo $g \in G$ y, definiendo $C : H^2 \times G^2 \to H$ como $C(h, h'; g, g') = A(h, g') - A(h', g) + B(g, g')$, se cumple para todos $h_1, h_2, h_3 \in H$ y $g_1, g_2, g_3 \in G$ que (notar que las dos últimas filas son permutaciones de índices de la primera):*

$$\begin{aligned}
&\big[h_1, C(h_2, h_3; g_2, g_3)\big] + C\big(h_1, [h_2, h_3] + C(h_2, h_3; g_2, g_3); g_1, [g_2, g_3]\big) + \\
&+ \big[h_2, C(h_3, h_1; g_3, g_1)\big] + C\big(h_2, [h_3, h_1] + C(h_3, h_1; g_3, g_1); g_2, [g_3, g_1]\big) + \\
&+ \big[h_3, C(h_1, h_2; g_1, g_2)\big] + C\big(h_3, [h_1, h_2] + C(h_1, h_2; g_1, g_2); g_3, [g_1, g_2]\big) = 0
\end{aligned}$$

Demostración: La bilinealidad del conmutador en la suma directa es equivalente a la bilinealidad de las aplicaciones A y B.

Que el conmutador de un elemento consigo mismo se anule en la suma directa es equivalente a que $B(g,g) = 0$ para todo $g \in G$, pues el resto del conmutador es automáticamente nulo.

Que se cumpla la identidad de Jacobi es equivalente a que se satisfaga la condición del segundo punto, como se puede comprobar desarrollando $\big[(h_1,g_1),[(h_2,g_2),(h_3,g_3)]\big]$, sumando las dos permutaciones de índices y teniendo en cuenta las identidades de Jacobi de los sumandos. $\square$

Definición 1.1.56 ***Extensión.*** *Sean H y G álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo y A, B dos aplicaciones como las definidas en la Proposición 1.1.55. Llamamos al álgebra de Lie definida en dicha Proposición extensión de H con G por A y B y la denotamos $H \cdot_{A,B} G$.*

En el caso de una secuencia exacta corta, para obtener el isomorfismo que buscamos entre L y $H \cdot_{A,B} G$ debemos elegir unas aplicaciones A y B concretas, que siempre tienen la misma forma y solo dependen de las constantes de estructura de L. De hecho, no hará falta comprobar las condiciones de la Proposición 1.1.55, puesto que construiremos el isomorfismo explícitamente.

Proposición 1.1.57 *Sea $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$ una secuencia exacta corta. Sean $m = \dim H$, $n = \dim G$, $\{h_i\}_{i=1}^m \subseteq H$ una base de H, $\{g_i\}_{i=1}^n \subseteq G$ una base de G, $e_j = i(h_j)$ para todo j natural entre 1 y m, $e_{m+j} \in L$ tal que $\pi(e_{m+j}) = g_j$ para todo j natural entre 1 y n y $\{f_{ij}^k\} \subseteq F$ las constantes de estructura de L asociadas a la base $\{e_i\}_{i=1}^{m+n}$. Definimos $\alpha : H \times G \to H$ y $\beta : G \times G \to H$ bilineales como $\alpha(h_i, g_j) = \sum_{s=1}^m f_{i,m+j}^s h_s$ y $\beta(g_i, g_j) = \sum_{s=1}^m f_{m+i,m+j}^s h_s$ para cualesquiera elementos de las bases dadas de H y G. Entonces α y β satisfacen las condiciones de la Proposición 1.1.55 y la extensión $H \cdot_{\alpha,\beta} G$ es isomorfa a L.*

Demostración: Por la equivalencia en la Proposición 1.1.55 basta con probar el isomorfismo para ver que se cumplen las condiciones. Así, sea ϕ el isomorfismo de espacios vectoriales $\phi : L \to H \cdot_{\alpha,\beta} G$ definido según $\phi(e_i) = (h_i, 0), \phi(e_{m+j}) = (0, g_j)$ para i natural entre 1 y m y j natural entre 1 y n. Solo es necesario comprobar que ϕ es homomorfismo de álgebras de Lie. Hay tres casos, en los que tenemos en cuenta que $i(H)$ es ideal de L y que la existencia de isomorfismos $i : H \to i(H)$ y $\pi : L/H \to G$ supone que, en las bases definidas, se puedan transferir las constantes de estructura de L a H y a G.

- Sean i y j naturales entre 1 y m:

$$\phi\big([e_i, e_j]\big) = \big([h_i, h_j], 0\big) = \big[(h_i, 0), (h_j, 0)\big] = \big[\phi(e_i), \phi(e_j)\big]$$

- Sean i y j naturales, i entre 1 y m y j entre 1 y n:

$$\phi\big([e_i, e_{m+j}]\big) = \big(\alpha(h_i, g_{m+j}), 0\big) = \big[(h_i, 0), (0, g_{m+j})\big] = \big[\phi(e_i), \phi(e_{m+j})\big]$$

- Sean i y j naturales entre 1 y n:

$$\phi([e_{m+i}, e_{m+j}]) = \big(\beta(g_i, g_j), [g_i, g_j]\big) = \big[(0, g_i), (0, g_j)\big] = [\phi(e_{m+i}), \phi(e_{m+j})]$$

$\square$

Definición 1.1.58 ***Extensión por secuencia exacta corta.*** *Sean $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$ una secuencia exacta corta y α y β como en la Proposición 1.1.57. Llamaremos a α aplicación mixta y a β aplicación externa. Denotaremos simplemente por $H \cdot G$ a la extensión $H \cdot_{\alpha,\beta} G$ y la llamaremos extensión exacta corta de H por G.*

Podemos ver que esta definición nos permite conseguir la extensión del centro con la adjunta, pues como vimos, $Z(L) \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} \operatorname{ad} L$ forma una secuencia exacta corta. Además, por ser $Z(L)$ el centro, α es idénticamente nula.

Nota 1.1.59 *Cualquier álgebra de Lie L es isomorfa a $Z(L) \cdot \operatorname{ad} L$, con aplicación mixta nula.*

Vamos ahora a construir algunas de las extensiones más sencillas, las cuales hacen fácil recuperar toda la información del álgebra completa a partir de sus partes. Estas son los productos semidirecto y directo. El producto semidirecto se construye con una representación de un álgebra en derivaciones de otra.

Proposición 1.1.60 *Sean H y G dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo y $\rho : H \to \operatorname{Der} G$ una representación de H en G cuya imagen está restringida a las derivaciones. Entonces $A(h, g) = \rho(g)(h)$ y B nula satisfacen las condiciones de la Proposición 1.1.55.*

Demostración: La bilinealidad y las condición sobre B son obvias. Para ver la condición de Jacobi sean $1, 2, 3 \in H$ y $g_1, g_2, g_3 \in G$. Denotando $\rho_i = \rho(g_i)$ para

$i = 1, 2, 3$ y usando que ρ es un homomorfismo y que ρ_1, ρ_2 y ρ_3 son derivaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
&C(2,3;g_2,g_3) = \rho_3 2 - \rho_2 3 \\
&\big[1, C(2,3;g_2,g_3)\big] + C\big(1,[2,3] + C(2,3;g_2,g_3);g_1,[g_2,g_3]\big) = \\
&\ = [1,\rho_3 2] - [1,\rho_2 3] + [\rho_1 2, 3] + [2,\rho_1 3] + \rho_2\rho_3 1 - \rho_3\rho_2 1 + \rho_1\rho_3 2 - \rho_1\rho_2 3
\end{aligned}$$

Al sumar las otras dos líneas de la expresión de la Proposición 1.1.55 se observa que los 24 sumandos se anulan de dos en dos, verificando la igualdad a cero. □

Definición 1.1.61 ***Producto semidirecto.*** *Sean H y G dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo y $\rho : H \to \operatorname{Der} G$ una representación de H en G cuya imagen está restringida a las derivaciones. Llamamos producto semidirecto de H y G por ρ a la extensión de la Proposición 1.1.60 y la denotamos $H \ltimes_\rho G$ o $H :_\rho G$. Su conmutador es $\big[(h_1, g_1), (h_2, g_2)\big] = \big([h_1, h_2] + \rho(g_2)(h_1) - \rho(g_1)(h_2), [g_1, g_2]\big)$, para todos $h_1, h_2 \in H$ y $g_1, g_2 \in G$*

El producto directo (o suma directa de álgebras de Lie) es el producto semidirecto más sencillo. Es decir, se obtiene tomando la representación trivial.

Definición 1.1.62 ***Producto directo.*** *Sean H y G dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo y 0 la representación trivial de G en H. Llamamos suma directa (como álgebras de Lie) o producto directo a $H \ltimes_0 G$ y lo denotamos simplemente por $H \oplus G$. Su conmutador es $\big[(h_1, g_1), (h_2, g_2)\big] = \big([h_1, h_2], [g_1, g_2]\big)$, para todos $h_1, h_2 \in H$ y $g_1, g_2 \in G$*

Además, los productos semidirectos se corresponden con las secuencias exactas cortas que se parten, concepto que introducimos en la siguiente definición.

Definición 1.1.63 ***Secuencia exacta escindida.*** *Decimos que una secuencia exacta corta $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$ es escindida o que se escinde si existe un homomorfismo $\tau : G \to L$ tal que $\pi \circ \tau = id_G$.*

Proposición 1.1.64 *Sean H y G dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo y L una extensión de H con G. Entonces L es isomorfa a un producto semidirecto $H \ltimes_\rho G$ si y solo si existe una secuencia exacta escindida $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$.*

Demostración: La implicación a la derecha es sencilla, pues es fácil comprobar a partir de la definición del conmutador que H es un ideal de $H \ltimes_\rho G$ y que esto induce un isomorfismo entre G y $(H \ltimes_\rho G)/H$. Por tanto, la secuencia exacta corta $H \xrightarrow{\bar{i}} H \ltimes_\rho G \xrightarrow{\bar{\pi}} (H \ltimes_\rho G)/H$ se convierte en $H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} G$ a través de los isomorfismos. Además, las secuencias se escinden con la inclusión de G en $H \ltimes_\rho G$ y a través de los isomorfismos.

Para la implicación a la izquierda es necesario ver que la secuencia exacta escindida garantiza la existencia de una representación de G en derivaciones de H. Por escindirse la secuencia sabemos que existe un homomorfismo $\tau : G \to L$ tal que $\pi \circ \tau = id_G$. Sea $j : H \to i(H)$ tal que $j(h) = i(h)$. Es claro que j puede invertirse por ser i inyectiva. A partir de aquí es un ejercicio rutinario comprobar que definiendo $\rho(g)(h) = j^{-1}\big([\tau(g), j(h)]\big)$ se tiene que ρ es una representación de G en derivaciones de H (está bien definida por ser $j(H)$ un ideal de L). $\square$

1.2. Primeros ejemplos

Gracias al trabajo anterior ya tenemos algunas álgebras de Lie con las que trabajar. En particular, conocemos $\mathfrak{gl}(V)$ para cualquier espacio vectorial V y el álgebra de Lie inducida por cualquier álgebra asociativa. Otro ejemplo familiar de álgebra de Lie es $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial. Además, tenemos mecanismos con los que obtener nuevas álgebras de Lie a partir de otras: subálgebras, cocientes, sumas, conmutadores, adjuntas, extensiones y productos semidirectos.

En esta sección introduciremos las álgebras clásicas y álgebras de Lie de dimensión menor o igual que 3 para comenzar a ver la amplia variedad de álgebras de Lie que existen y acostumbrarnos a algunos ejemplos.

1.2.1. Álgebras de Lie clásicas

Nos interesa especialmente estudiar subálgebras de $\mathfrak{gl}(V)$, pues como ya comentábamos, el Teorema de Ado garantiza que toda álgebra de Lie es isomorfa a una subálgebra suya para algún espacio vectorial V. Además, ciertas subálgebras suyas son las álgebras clásicas, que veremos en el siguiente capítulo que son simples, y una parte fundamental de la clasificación de estas. Vamos a introducir los tres tipos de subálgebras clásicas de $\mathfrak{gl}(V)$: la especial, la ortogonal y la simpléctica; pero antes de nada, dadas nuestras hipótesis, vamos a simplificar la notación.

Nota 1.2.1 *Cualquier espacio vectorial V sobre un cuerpo F de dimensión n es isomorfo a F^n y $\mathfrak{gl}(V)$ es isomorfa al álgebra de Lie de matrices $n \times n$ sobre F con respecto a una base de F^n (con conmutador multiplicativo), denotada $\mathfrak{gl}_n(F)$. Siempre considerando un cuerpo F de característica 0 algebraicamente cerrado, podremos suponer sin pérdida de generalidad que trabajamos con un espacio vectorial F^n y el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(F)$, que denotaremos simplemente $\mathfrak{gl}_n$.*

Vamos ahora a probar un sencillo resultado de álgebra lineal para definir la primera subálgebra.

Lema 1.2.2 *Sean $A, B \in \mathfrak{gl}_n$. Entonces $\operatorname{Tr}[A, B] = 0$.*

Demostración: Todas las sumas van desde 1 hasta n y los elementos de $\mathfrak{gl}_n$ escritos con subíndices denotan las entradas de las matrices. Tenemos que $\operatorname{Tr} A = \sum_i A_{ii}$ y $(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk}$ y esto conlleva $\operatorname{Tr}[A, B] = \sum_i \sum_j \big(A_{ij}B_{ji} - B_{ij}A_{ji}\big)$, que al intercambiar índices en un sumando se anula. $\square$

Antes de pasar a la definición vamos a probar un corolario de este lema que nos será útil más adelante.

Corolario 1.2.3 *Sea L un álgebra de Lie y $x \in L'$. Entonces $\operatorname{Tr} \operatorname{ad}_x = 0$.*

Demostración: Sabemos que podemos escribir x como suma de conmutadores. Por tanto, sean $y, z \in L$. Usando la Proposición 1.1.39 sobre la representación adjunta tenemos que $\operatorname{ad}_{[y,z]} = [\operatorname{ad}_y, \operatorname{ad}_z]$ y usando el Lema 1.2.2 sabemos que la traza de cualquier conmutador de matrices es nulo. Por ser la traza lineal se tiene el resultado. $\square$

El Lema 1.2.2 nos garantiza que la siguiente definición siempre nos da un álgebra de Lie, puesto que claramente será un subespacio y el lema nos garantiza que será cerrado bajo el conmutador.

Definición 1.2.4 ***Álgebra de Lie especial $\mathfrak{sl}_n$.*** *La subálgebra especial de $\mathfrak{gl}_n$ es $\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$.*

El Corolario 1.2.3 nos garantiza que dada un álgebra de Lie L de dimensión n no hay elementos de $\operatorname{ad} L$ que estén en $\mathfrak{gl}_n \setminus \mathfrak{sl}_n$.

Nota 1.2.5 *Sea L un álgebra de Lie de dimensión n. Entonces $\operatorname{ad} L$ es subálgebra de $\mathfrak{sl}_n$.*

El álgebra $\mathfrak{sl}_2$ resultará ser el álgebra simple más sencilla, y como tal juega un papel fundamental en la clasificación de las álgebras simples y sus representaciones. Comenzamos a explorarla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.6 *El conjunto $\{e, h, f\}$ dado por*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una base de $\mathfrak{sl}_2$, denominada base canónica. Por estar expresando $\mathfrak{sl}_2$ como un álgebra de matrices la aplicación identidad será denominada representación fundamental.

El conmutador de $\mathfrak{sl}_2$ cumple:

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f$$

Esto supone que la representación adjunta actúe como:

$$\operatorname{ad} e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{ad} h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \operatorname{ad} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta representación es claramente un isomorfismo entre $\mathfrak{sl}_2$ y $\operatorname{ad}(\mathfrak{sl}_2)$.

Proposición 1.2.7 *El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$ es simple.*

Demostración: Hemos visto que $\mathfrak{sl}_2$ no es abeliana, por lo que solo hay que ver que sus únicos ideales son 0 y $\mathfrak{sl}_2$. Para ello vamos a verificar que siempre que un ideal contenga un elemento no trivial será $\mathfrak{sl}_2$. Así, sea I un ideal de $\mathfrak{sl}_2$ con un elemento no trivial $x = \alpha e + \beta h + \gamma f$. En caso de que $h \in I$, por ser I ideal, utilizando que $[h, e] = 2e$ y que $[h, f] = 2f$, también $e, f \in I$, por lo que $I = \mathfrak{sl}_2$. Por tanto, basta con probar $h \in I$, pero esto es sencillo, puesto que:

- Si $\alpha = \gamma = 0$, entonces claramente $h \in I$.
- Si $\alpha \neq 0$, entonces $[[h, x], f] = 2\alpha h$ y $h \in I$.
- Si $\gamma \neq 0$, entonces $[e, [h, x]] = 2\gamma h$ y $h \in I$.

□

Decimos que $\mathfrak{sl}_2$ es el álgebra de Lie simple más sencilla porque como veremos, no hay álgebras simples de dimensión menor y $\mathfrak{sl}_2$ es la única de dimensión 3. Volviendo al caso general, la base canónica de $\mathfrak{gl}_n$ es la formada por las matrices con un 1 en una entrada y 0 en el resto. Llamemos E_{ij} a la que tiene un 1 en la fila i y la columna j. Es sencillo ver que $E_{ij} \in \mathfrak{sl}_n$ para todo $i \neq j$ y que un elemento de la diagonal se puede fijar en función del resto para dar traza nula. Así, la condición de traza nula solo disminuye en 1 el tamaño de la base.

Nota 1.2.8 *La dimensión de $\mathfrak{gl}_n$ es n^2 y la de $\mathfrak{sl}_n$ es $n^2 - 1$. En particular, $\mathfrak{gl}_1$ es isomorfo a F y es abeliano y $\mathfrak{sl}_1$ es trivial.*

El Lema 1.2.2 no solo aplica a los elementos de $\mathfrak{sl}_n$, sino a todo $\mathfrak{gl}_n$, por lo que podemos afirmar lo siguiente.

Nota 1.2.9 *El álgebra $\mathfrak{sl}_n$ es un ideal propio (trivial si $n = 1$) de $\mathfrak{gl}_n$ y contiene a su álgebra derivada. En particular, $\mathfrak{gl}_n$ no es simple.*

De hecho, el contenido del álgebra derivada $(\mathfrak{gl}_n)'$ en $\mathfrak{sl}_n$ también va en el otro sentido, por lo que se verifica la igualdad, pudiendo probarse a través de argumentos elementales con productos de matrices. Sin embargo, omitiremos aquí la prueba, pues el resultado será un corolario de la clasificación de álgebras simples del siguiente capítulo.

Las otras dos subálgebras que nos interesan son la ortogonal y la simpléctica. Las definimos a continuación y utilizamos los lemas para garantizar que son álgebras de Lie.

Lema 1.2.10 *Sean $A, B \in \mathfrak{gl}_n$ tal que $A + A^T = B + B^T = 0$. Entonces $[A, B] + [A, B]^T = 0$.*

Demostración: Todas las sumas van desde 1 hasta n y los elementos de $\mathfrak{gl}_n$ escritos con subíndices denotan las entradas de las matrices. Se tiene que $A_{ij} = -A_{ji}$ y lo mismo con B. Basta con probar que se cumple lo mismo para el conmutador. Pero esto es sencillo, puesto que $[A, B]_{ij} = \sum_k \left(A_{ik}B_{kj} - B_{ik}A_{kj}\right) = \sum_k \left(A_{ki}B_{jk} - B_{ki}A_{jk}\right) = [B, A]_{ji} = -[A, B]_{ji}$. □

Definición 1.2.11 ***Álgebra de Lie ortogonal*** $\mathfrak{so}_n$. *La subálgebra ortogonal de* $\mathfrak{gl}_n$ *es* $\mathfrak{so}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n \mid A + A^T = 0\}$.

El hecho de que las matrices del álgebra ortogonal sean antisimétricas supone que su traza se anule, por lo que también están en el álgebra especial.

Nota 1.2.12 *El álgebra ortogonal* $\mathfrak{so}_n$ *es subálgebra del álgebra especial* $\mathfrak{sl}_n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

La dimensión del álgebra ortogonal es sencilla de calcular, puesto que la condición fija los elementos de la diagonal en 0 y los de la región triangular inferior quedan determinados como los opuestos a los de la región triangular superior.

Nota 1.2.13 *La dimensión de* $\mathfrak{so}_n$ *es* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Nota 1.2.14 *El álgebra* $\mathfrak{so}_1$ *es trivial y* $\mathfrak{so}_2$ *tiene dimensión 1.*

Antes de pasar al álgebra simpléctica nos interesa dar otra definición de álgebra ortogonal que resulta equivalente, pues ambas están conectadas por un cambio de base y por tanto son isomorfas. Para evitar confusiones y tener claro en todo momento con respecto a que base estamos trabajando vamos a denotar a este segunda definición $\mathfrak{o}_n$. Una vez que veamos el isomorfismo utilizaremos indistintamente $\mathfrak{so}_n$, independientemente de la base, aunque será frecuente utilizar la de $\mathfrak{o}_n$.

Definición 1.2.15 ***Matrices*** S_{2n} ***y*** S_{2n+1}. *Denotamos* I_n *a la matriz identidad de tamaño* n *y definimos:*

$$S_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad S_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 1.2.16 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Sean* $A, B \in \mathfrak{gl}_{2n}$ *tal que* $S_{2n}A + A^T S_{2n} = S_{2n}B + B^T S_{2n} = 0$. *Entonces* $S_{2n}[A,B] + [A,B]^T S_{2n} = 0$.
- *Sean* $A, B \in \mathfrak{gl}_{2n+1}$ *tal que* $S_{2n+1}A + A^T S_{2n+1} = S_{2n+1}B + B^T S_{2n+1} = 0$. *Entonces* $S_{2n+1}[A,B] + [A,B]^T S_{2n+1} = 0$.

Demostración:

- Para la primera afirmación vamos a separar las matrices en bloques de tamaño n en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Con esta notación, la condición $S_{2n}A + A^T S_{2n} = 0$ es equivalente a $A_{12}, A_{21} \in \mathfrak{so}_n$ y $A_{11} + A_{22}^T = 0$, por lo que queremos ver estas condiciones para $[A, B]$.

En primer lugar, tenemos que $(AB)_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$, por lo que $[A, B]_{22} = A_{21}B_{12} - B_{21}A_{12} + A_{22}B_{22} - B_{22}A_{22}$. El mismo razonamiento nos lleva a que $[A, B]_{11}^T = B_{21}^T A_{12}^T - A_{21}^T B_{12}^T + B_{11}^T A_{11}^T - A_{11}^T B_{11}^T = [A, B]_{22}$, usando las condiciones en A y B, con lo que vemos que se cumple la primera condición.

Por otro lado, la condición $[A, B]_{12} \in \mathfrak{so}_n$ se consigue al tener $(AB)_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$ lo que implica $[A, B]_{12} = A_{11}B_{12} - B_{11}A_{12} + A_{12}B_{22} - B_{12}A_{22} = A_{22}^T B_{12}^T - B_{22}^T A_{12}^T + A_{12}^T B_{11}^T - B_{12}^T A_{11}^T = [B, A]_{12}^T = -[A, B]_{12}^T$. La otra pertenencia a $\mathfrak{so}_n$ es completamente análoga.

- Para la segunda afirmación separamos en bloques siendo los diagonales de tamaño $(1, n, n)$ en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01}^T & A_{02}^T \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Con esta notación, la condición $S_{2n+1}A + A^T S_{2n+1} = 0$ es equivalente a $A_{12}, A_{21} \in \mathfrak{so}_n$ y $A_{11} + A_{22}^T = 0$, $A_{01} + A_{20} = A_{02} + A_{10} = 0$ y $A_{00} = 0$, por lo que basta probar estas condiciones para $[A, B]$. Las de las matrices de tamaño n se prueban igual que en el punto anterior.

La condición sobre el escalar es $[A, B]_{00} = A_{01}^T B_{10} + A_{02}^T B_{20} - B_{01}^T A_{10} - B_{02}^T A_{20} = A_{20}^T B_{02} + A_{10}^T B_{01} - B_{01}^T A_{10} - B_{02}^T A_{20} = 0$.

Una de las condiciones de los vectores es $[A, B]_{01}^T = A_{01}^T B_{11} + A_{02}^T B_{21} - B_{01}^T A_{11} - B_{02}^T A_{21} = A_{20}^T B_{22}^T + A_{10}^T B_{21}^T - B_{20}^T A_{22}^T - B_{10}^T A_{21}^T = [B, A]_{20}^T = -[A, B]_{20}^T$, y la otra es completamente análoga.

$\square$

Definición 1.2.17 ***Álgebra de Lie ortogonal*** $\mathfrak{o}_n$. *Las álgebras ortogonales pueden definirse para todo subíndice natural como:*

- $\mathfrak{o}_{2n} = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n} \,|\, S_{2n}A + A^T S_{2n} = 0\}$
- $\mathfrak{o}_{2n+1} = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n+1} \,|\, S_{2n+1}A + A^T S_{2n+1} = 0\}$

Proposición 1.2.18 *Las álgebras* $\mathfrak{so}_m$ *y* $\mathfrak{o}_m$ *son isomorfas para cualquier* $m \in \mathbb{N}$.

Demostración: Vamos a probarlo en el caso par, siendo el impar completamente análogo. Así, supongamos que $m = 2n$, con $n \in \mathbb{N}$. Sea la transformación lineal $\phi : \mathfrak{gl}_{2n} \to \bar{\mathfrak{gl}}_{2n}$ definida según $\phi(A) = S_{2n}^{-1} A S_{2n}$, donde consideramos que si la base del espacio de salida es $\mathcal{B}$ la del espacio de llegada es $\mathcal{B}S_{2n}$ (utilizamos la barra para simbolizar esto). Es claro que ϕ es un isomorfismo de espacios vectoriales que cambia la base.

Es claro que ϕ es también un isomorfismo de álgebras de Lie y además, al cambiar la base del espacio de llegada mediante S_{2n}, en este, la condición $S_{2n}A + A^T S_{2n} = 0$ de $\mathfrak{o}_m$ pasa a ser $\phi(A) + \phi(A)^T = 0$ para $\bar{\mathfrak{o}}_m$, y claramente esto es lo mismo que $\phi(A + A^T) = 0$. Por tanto, $A \in \mathfrak{so}_m$ si y solo si $\phi(A) \in \bar{\mathfrak{o}}_m$. Así, podemos restringir ϕ a un isomorfismo entre $\mathfrak{so}_m$ y $\bar{\mathfrak{o}}_m$, el cual es naturalmente isomorfo a $\mathfrak{o}_m$. $\square$

Vamos ahora a introducir el álgebra simpléctica, para lo que definiremos una matriz antisimétrica y de nuevo probaremos un lema que nos garantiza que la definición es buena.

Definición 1.2.19 ***Matriz*** J_{2n}. *Denotamos* I_n *a la matriz identidad de tamaño* n *y definimos:*

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 1.2.20 *Sean* $A, B \in \mathfrak{gl}_{2n}$ *tal que* $J_{2n}A + A^T J_{2n} = J_{2n}B + B^T J_{2n} = 0$. *Entonces* $J_{2n}[A, B] + [A, B]^T J_{2n} = 0$.

Demostración: Vamos a separar las matrices en bloques de tamaño n en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Con esta notación, la condición $J_{2n}A + A^T J_{2n} = 0$ es equivalente a $A_{22} + A_{11}^T = A_{12} - A_{12}^T = A_{21} - A_{21}^T = 0$, por lo que queremos ver estas condiciones para $[A, B]$.

En primer lugar, tenemos que $(AB)_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$, por lo que $[A, B]_{22} = A_{21}B_{12} - B_{21}A_{12} + A_{22}B_{22} - B_{22}A_{22}$. El mismo razonamiento nos lleva a que $[A, B]_{11}^T = B_{21}^T A_{12}^T - A_{21}^T B_{12}^T + B_{11}^T A_{11}^T - A_{11}^T B_{11}^T = -[A, B]_{22}$, usando las condiciones en A y B, con lo que vemos que se cumple la primera condición.

Por otro lado, la segunda condición se consigue al tener $(AB)_{12} = A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$ lo que implica $[A, B]_{12} = A_{11}B_{12} - B_{11}A_{12} + A_{12}B_{22} - B_{12}A_{22} = -A_{22}^T B_{12}^T + B_{22}^T A_{12}^T - A_{12}^T B_{11}^T + B_{12}^T A_{11}^T = -[B, A]_{12}^T = [A, B]_{12}^T$. La tercera es completamente análoga. □

Definición 1.2.21 ***Álgebra de Lie simpléctica*** $\mathfrak{sp}_{2n}$. *La subálgebra simpléctica de* $\mathfrak{gl}_{2n}$ *es* $\mathfrak{sp}_{2n} = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n} \mid J_{2n}A + A^T J_{2n} = 0\}$.

En la demostración del Lema 1.2.20 hemos visto que la condición equivalente que define $\mathfrak{sp}_{2n}$ supone que uno de los bloques de tamaño n de la diagonal quede fijado por el otro, al mismo tiempo que hace que los bloques no diagonales sean simétricos. Con esto la dimensión del álgebra de Lie simpléctica es sencilla de calcular.

Nota 1.2.22 *La dimensión de* $\mathfrak{sp}_{2n}$ *es* $2n^2 + n$.

Además, la condición de que un bloque diagonal más el otro traspuesto sea la matriz nula, en particular supone que la traza se anule, por lo que estas matrices están contenidas en el álgebra especial, lo cual es compatible con los órdenes, pues $2n^2 + n \leq 4n^2 - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota 1.2.23 *El álgebra simpléctica* $\mathfrak{sp}_{2n}$ *es subálgebra del álgebra especial* $\mathfrak{sl}_{2n}$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

1.2.2. Pequeña clasificación.

En este apartado vamos a clasificar las álgebras de Lie de dimensión menor o igual que 3 y vamos a probar resultados sencillos que facilitan clasificar si la codimensión (la dimensión del cociente) del centro es menor o igual que 2.

Ya sabemos que de dimensión 0 solo existe el álgebra de Lie trivial y que en dimensión 1 cualquier álgebra de Lie es abeliana por las propiedades que se le exigen al conmutador. Además, es claro que dos álgebras de Lie abelianas de la misma dimensión son isomorfas, por lo que hay una única álgebra de Lie abeliana para cada dimensión (salvo isomorfismo).

Nota 1.2.24 *Sea L un álgebra de Lie de dimensión n. Si $Z(L) = L$ entonces L es isomorfa a la única álgebra de Lie abeliana de dimensión n, que denotaremos Ab_n.*

Nota 1.2.25 *El centro de cualquier álgebra de Lie es isomorfo a un álgebra abeliana de su dimensión, y cualquier subespacio del centro es isomorfo a un álgebra abeliana de la dimensión correspondiente.*

Además, si suponemos que la codimensión del centro es 1, tenemos que existe un elemento fuera del centro que conmuta con todos sus múltiplos (todo lo que está fuera del centro) y claramente con todo el centro, por lo que conmuta con todo el álgebra y está en el centro. Esto es una contradicción.

Nota 1.2.26 *Sea L un álgebra de Lie de dimensión n. Entonces la dimensión de $Z(L)$ no es $n-1$.*

También vamos a ver que pasa si la codimensión del centro es 2, pero antes vamos a clasificar las álgebras de Lie de dimensión 2. Para ello, es importante notar que la bilinealidad del conmutador hace que sea suficiente con definirlo sobre los elementos de una base. Esta idea es la misma que la de la Nota 1.1.50, que establecía que las constantes de estructura definían el álgebra.

Además, sabemos por la nota anterior que un álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana tiene centro trivial, de manera que el conmutador de los dos elementos de la base no puede ser nulo. Es más, en dimensión 2 la identidad de Jacobi se cumple automáticamente a partir del resto de propiedades, por lo que cualquier elección de conmutador para los dos elementos de la base es válida.

Definición 1.2.27 ***Álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2.*** *Llamamos álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana a la que, dada una base $\{e, f\}$, está definida por $[e, f] = e$ y la denotamos N_2.*

Nota 1.2.28 *El subálgebra de N_2 de base $\{e\}$ es un ideal de N_2. En particular, N_2 no es simple.*

El interés en está definición concreta reside en que en cualquier álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana se puede encontrar una base con respecto a la cual las constantes de estructura sean las de N_2. Dicho de otra forma, es posible encontrar un isomorfismo.

Proposición 1.2.29 *Toda álgebra de Lie L de dimensión 2 no abeliana es isomorfa a N_2.*

Demostración: Sea $\{a, b\}$ una base de L. La única constante de estructura no trivial será $[a, b] = \alpha a + \beta b$, con $\alpha, \beta \in F$. Sabemos que L es no abeliana, por lo que al menos uno de los escalares tiene que ser no nulo.

- Si α es nulo, entonces β no lo es, y el conjunto $\{e, f\}$, con $e = b$ y $f = -\beta^{-1}a$, es una base de L y cumple $[e, f] = e$.

- Si α no es nulo, entonces el conjunto $\{e, f\}$, con $e = [a, b]$ y $f = \alpha^{-1}b$, es una base de L y cumple $[e, f] = e$.

□

Ejemplo 1.2.30 *Las subálgebras de $\mathfrak{sl}_2$ de bases $\{e, h\}$ y $\{f, h\}$ son isomorfas entre sí, puesto que son de dimensión 2 no abelianas, y por tanto ambas isomorfas a N_2.*

El resultado anterior nos garantiza que salvo isomorfismo solo hay dos álgebras de Lie de dimensión 2: la abeliana Ab_2 y la no abeliana N_2. La Nota 1.2.28 nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 1.2.31 *No hay álgebras de Lie simples de dimensión 2.*

Por ello, podemos utilizar los productos semidirectos para construir las álgebras de dimensión 2 a partir de álgebras abelianas de dimensión 1.

Ejemplo 1.2.32 *Claramente el producto directo $Ab_1 \oplus Ab_1$ es isomorfo a Ab_2, pero la representación trivial no es la única representación de Ab_1 en derivaciones de Ab_1 que se puede construir. De hecho, si con cuerpo F concretamos las álgebras como Fx y Fy con bases respectivas $\{x\}$ e $\{y\}$ (ambas álgebras de Lie abelianas de dimensión 1), y damos el homomorfismo $\rho : Fy \to \operatorname{Der} Fx$ definido según $\rho(y) = id_{Fx}$, es sencillo comprobar que efectivamente es una representación en derivaciones.*

Así, se tiene que $Fx \ltimes_\rho Fy$ tiene base $\{(x, 0), (0, y)\}$ y conmutador $[(x, 0), (0, y)] = (\rho(y)(x), 0) = (x, 0)$, por lo que es un álgebra de dimensión 2 no abeliana y por lo tanto isomorfa a N_2. Es decir, las únicas dos álgebras de Lie de dimensión 2 se obtienen como productos semidirectos (trivial y no trivial) de dos copias de la única álgebra de Lie de dimensión 1.

No podemos hacer lo mismo en el caso de $\mathfrak{sl}_2$, a pesar de tener subálgebras isomorfas a N_2, a las que solo habría que añadirles un generador más para completar el álgebra. Esto es debido a que es un álgebra de Lie simple, y construirla como producto semidirecto supondría la existencia de un ideal no trivial. Esto refuerza la idea de que las álgebras simples son los auténticos bloques fundamentales de la teoría (además de las álgebras abelianas), pues no pueden describirse de manera natural como conformadas por otras álgebras más sencillas.

Vamos a definir otra álgebra de Lie, el álgebra de Heisenberg, denominado así por su uso en la mecánica cuántica. Esta nos servirá para introducir un resultado que clasifica para codimensión 2 del centro, y será parte de la clasificación en dimensión 3.

Definición 1.2.33 *El álgebra de Heisenberg de dimensión* $2n+1$*, denotada* H_{2n+1} *tiene base* $\{c\} \cup \{p_i, q_i\}_{i=1}^n$ *y sus únicos conmutadores no nulos son* $[p_i, q_i] = -[q_i, p_i] = c$ *para todo* i *natural entre* 1 *y* n*.*

Es claro que se cumplen las propiedades para ser álgebra de Lie, incluida la identidad de Jacobi, puesto que los conmutadores que involucran tres elementos son todos nulos. Podemos enunciar así el siguiente resultado.

Proposición 1.2.34 *Sea un álgebra de Lie* L *con dimensión* n *tal que* $Z(L)$ *tiene dimensión* $n-2$*. Entonces* L *es isomorfa a* $Ab_{n-3} \oplus H_3$ *ó a* $Ab_{n-2} \oplus N_2$

Demostración: Sean $p, q \in L \setminus Z(L)$ dos elementos linealmente independientes. El espacio vectorial H de base p, q tiene dimensión 2 y puede ser o no subálgebra de L (notar que en los argumentos posteriores las propiedades del conmutador y en particular la identidad de Jacobi no imponen ninguna restricción adicional, satisfaciéndose en todos los casos).

- Si H es subálgebra de L no puede ser abeliana, puesto que en ese caso se tendría $Z(L) = L$. Por tanto, debe ser isomorfa a N_2, y por ser el subespacio complementario el centro, se tiene que L es isomorfa a $Ab_{n-2} \oplus N_2$.

- Si H no es subálgebra de L entonces $[p, q] = c$, para algún $c \in Z(L)$. Por tanto el subespacio de base $\{p, q, c\}$ es una subálgebra isomorfa a H_3, y por ser estar el subespacio complementario contenido en el centro se tiene que L es isomorfa a $Ab_{n-3} \oplus H_3$.

□

Gracias a este resultado estamos en condiciones de clasificar las álgebras de Lie de dimensión 3. Lo haremos en función del tamaño del centro y del álgebra derivada.

Teorema 1.2.35 ***Clasificación de álgebras de Lie de dimensión 3.*** *Sea L un álgebra de Lie de dimensión 3. Entonces* $\dim Z(L) \neq 2$ *y se cumple que:*

- *Si $Z(L) = L$, entonces L es isomorfa a Ab_3.*
- *Si* $\dim Z(L) = 1$ *distinguimos dos casos:*
  - *Si $L' = Z(L)$, entonces L es isomorfa a H_3.*
  - *Si $L' \neq Z(L)$, entonces L es isomorfa a $Ab_1 \oplus N_2$*
- *Si $Z(L) = 0$, distinguimos dos casos:*
  - *Si $L' = L$, entonces L es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$.*
  - *Si $L' \neq L$, entonces L es isomorfa a un álgebra de base $\{x, y, z\}$, con $\{y, z\}$ base de L', que tiene conmutadores $[y, z] = 0$, $[x, y] = y$ y $[x, z] = y + z$ ó $[x, z] = \mu z$, con $\mu \neq 0$. Además, las álgebras de conmutadores $[x, z] = \mu z$ y $[x, z] = \nu z$ son isomorfas si y solo si $\mu = \nu$ ó $\mu = \nu^{-1}$.*

Demostración: La Nota 1.2.24 da el resultado para $Z(L) = L$, la Nota 1.2.26 descarta centro de dimensión 2, y la Proposición 1.2.34 da las únicas dos opciones en el caso de centro de dimensión 2. Además, es claro que $H_3' = Z(H_3)$, mientras que el álgebra derivada de $Ab_1 \oplus N_2$ está en la parte de N_2 y el centro en la de Ab_1. Por tanto solo queda verificar las afirmaciones para centro trivial. Supongamos así que $Z(L) = 0$.

Caso $L = L'$: Vamos a probar en primer lugar que $\mathfrak{sl}_2$ es la única álgebra con $L = L'$. Para ello, sea $x \in L$. Entonces la matriz ad_x tiene rango 2, puesto que dada una base $\{x, y, z\}$ de L, $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$ forma una base de L', lo que supone que $\mathrm{ad}_x(y)$ y $\mathrm{ad}_x(z)$ sean linealmente independientes, mientras que $\mathrm{ad}_x(x) = 0$.

Con esta información, vamos a demostrar que existe un elemento $g \in L$ tal que ad_g tiene un autovalor no nulo. Si ad_x tiene un autovalor no nulo, entonces tomamos $g = x$. En caso contrario, por tener ad_x rango 2 y 0 como único autovalor sabemos que su forma canónica de Jordan tiene ceros en la diagonal y unos encima de la diagonal. Por tanto, tomando una base de Jordan $\{x, a, b\}$, tenemos que $[x, a] = x$. Así, podemos tomar $g = a$, pues ad_a tiene como autovector a x con autovalor -1.

Tomemos así $g, e \in L$ tal que $\mathrm{ad}_g(e) = \lambda e$, con $\lambda \neq 0$. Definiendo $h = 2\lambda^{-1} g$ se cumple que $\mathrm{ad}_h(e) = 2e$. Sabemos que las matrices adjuntas tienen traza cero y que $\mathrm{ad}_h(h) = 0$, por lo que existe $d \in L$, tal que $\mathrm{ad}_h(d) = -2d$. Así, $\{e, h, d\}$ forma una base de L, con $[h, e] = 2e$ y $[h, d] = -2d$.

Falta ver qué pasa con $[e, d]$. Para ello, usando la identidad de Jacobi tenemos $[h, [e, d]] = -[e, [d, h]] - [d, [h, e]] = -2[e, d] - 2[d, e] = 0$, por lo que $[e, d] = \alpha h$, y además $\alpha \neq 0$, por ser 2 el rango de ad_e por el mismo argumento que aplicamos a x. Definiendo $f = \alpha^{-1} d$, tenemos una base $\{e, h, f\}$ con conmutadores $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ y $[e, f] = h$. Esto es suficiente para garantizar que L es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$.

Caso $L \neq L'$: Vamos a proceder por pasos.

- En primer lugar vamos a ver que la dimensión de L' es 2 por contradicción con centro trivial en los otros casos. Si L' fuera trivial, entonces el álgebra sería abeliana, lo que contradice centro trivial. Por tanto el único caso restante es $\dim L' = 1$. En este caso, sea $\{x, y, z\}$ una base de L con $z \in L'$. Esto supone que los $[x, y]$, $[x, z]$ y $[y, z]$ sean todos proporcionales a z. Además, que el centro sea trivial implica que al menos dos de los tres conmutadores tienen que ser no nulos.

  Supongamos primero que $[x, y] = 0$, entonces $[x, z]$ y $[y, z]$ son no nulos. En ese caso podemos multiplicar x e y por escalares adecuados para obtener una nueva base tal que $[x, z] = [y, z] = z$. Así, el elemento $x - y$ conmuta con x, y y z, de forma que está en el centro, pero esto es una contradicción.

  Si ahora suponemos $[x, y] \neq 0$, entonces uno de los otros dos conmutadores tiene que ser no nulo. Sea $[x, z]$ no nulo, siendo el otro caso completamente análogo. Sea $[y, z] = \gamma z$. Así, reescalando primero x para fijar $[x, z] = z$ y luego y para fijar $[x, y] = z$, obtenemos que el elemento $y - z - \gamma x$ conmuta con x, y y z, de forma que está en el centro, pero esto es una contradicción.

- Sea entonces $\{y, z\}$ una base de L'. Vamos a ver que $[y, z] = 0$, de forma que L' es isomorfa a Ab_2. Sabemos que $[y, z] = \alpha y + \beta z$. Así, trabajando en L con respecto a una base $\{x, y, z\}$ sabemos que todo conmutador tiene componente en la dirección de x nula. Así, tenemos que $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_y = \beta$ y que $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_z = -\alpha$, pero las trazas de las matrices adjuntas son 0, por lo que α y β son ambos nulos y $[y, z] = 0$.

- Supongamos que no existe $x \in L \setminus L'$ tal que ad_x es diagonalizable. Tomemos entonces un $x \in L \setminus L'$. Por trabajar en un cuerpo algebraicamente cerrado, ad_x tiene al menos un autovector no nulo $y \in L'$ con autovalor no nulo, pues en caso contrario y estaría en el centro. Así, podemos reescalar x de forma que $[x, y] = y$.

  Además, siendo $\{x, y, z\}$ una base de L, $[x, z]$ tiene que tener componente no nula en la dirección y, pues de otra forma ad_x sería diagonalizable. Reescalando z se puede fijar $[x, z] = y + \lambda z$, con $\lambda \neq 0$, por ser $\{y, z\}$ base de L'. Es más, si λ fuese distinto de 1, entonces ad_x tendría dos autovalores distintos, con lo que tendría dos autovectores linealmente independientes y sería diagonalizable. Por tanto, $\lambda = 1$ y $[x, z] = y + z$.

  La bilinealidad y los conmutadores nulos de elementos consigo mismos se tienen por definición, y la identidad de Jacobi se da automáticamente por ser L' abeliana.

- Supongamos en caso contrario que existe $x \in L \setminus L'$ tal que ad_x es diagonalizable. Entonces existen dos autovectores de ad_x linealmente independientes $y, z \in L'$ que forman una base de L' y tienen autovalores no nulos, pues de otra forma el centro no sería trivial. Además, x se puede reescalar de tal forma que se cumpla $[x, y] = y$ y $[x, z] = \mu z$. Tenemos así un álgebra L de base $\{x, y, z\}$ con $\{y, z\}$ base de L' y conmutadores $[x, y] = y$, $[x, z] = \mu z$ y $[y, z] = 0$, con $\mu \neq 0$.

  De nuevo, se ve que todas las condiciones para ser álgebra de Lie se satisfacen sin dificultad.

- Sea $\mu \in F$ un elemento no nulo del cuerpo F y L_μ el álgebra de Lie de base $\{x_\mu, y_\mu, z_\mu\}$, con $\{y_\mu, z_\mu\}$ base de L'_μ, que tiene conmutadores $[y_\mu, z_\mu] = 0$, $[x_\mu, y_\mu] = y_\mu$ y $[x_\mu, z_\mu] = \mu z_\mu$. Sea $\nu \in F$ no nulo y L_ν definida análogamente a L_μ. Es claro que si $\mu = \nu$ hay un isomorfismo entre L_μ y L_ν. En caso de que $\mu = \nu^{-1}$ definimos la aplicación $\phi : L_\mu \to L_\nu$ como $\phi(x_\mu) = \mu x_\nu$, $\phi(y_\mu) = z_\nu$ y $\phi(z_\mu) = y_\nu$, que extendida linealmente es claramente un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, se cumple que:

$$[\phi(y_\mu), \phi(z_\mu)] = 0 = \phi([y_\mu, z_\mu])$$
$$[\phi(x_\mu), \phi(y_\mu)] = \mu[x_\nu, z_\nu] = z_\nu = \phi(y_\mu) = \phi([x_\mu, y_\mu])$$
$$[\phi(x_\mu), \phi(z_\mu)] = \mu[x_\nu, y_\nu] = \mu y_\nu = \phi(\mu z_\mu) = \phi([x_\mu, z_\mu])$$

por lo que ϕ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

En el otro sentido, si suponemos que L_μ y L_ν son isomorfas, entonces existe un isomorfismo $\phi : L_\mu \to L_\nu$. Por ser ϕ homomorfismo, se tiene que $\phi(L'_\mu) \subseteq L'_\nu$. Además, si $a \in L'_\nu$, entonces se escribe como suma de conmutadores. Así, sean $b, c \in L_\nu$. Entonces existen $x, y \in L_\mu$ tales que $\phi(x) = b$ y $\phi(y) = c$, de forma que $\phi([x, y]) = [b, c]$. Por tanto, por linealidad, existe $z \in L'_\nu$ tal que $\phi(z) = a$. Por tanto, $\phi(L'_\mu) = L'_\nu$ y $\phi|_{L'_\mu} : L'_\mu \to L'_\nu$ es un isomorfismo.

Así, $\phi(x_\mu)$ tiene que tener una componente α en la dirección de x_ν no nula, pues en otro caso ϕ no sería suprayectiva. Sea $v \in L'_\mu$, entonces se tiene que (teniendo en cuenta que las álgebras derivadas son abelianas):

$$[\phi(x_\mu), \phi(v)] = [\alpha x_\nu, \phi(v)] = (\mathrm{ad}_{\alpha x_\nu} \circ \phi)(v)$$
$$[\phi(x_\mu), \phi(v)] = \phi([x_\mu, v]) = (\phi \circ \mathrm{ad}_{x_\mu})(v)$$

Esto supone que en L'_μ se satisfaga $\mathrm{ad}_{x_\mu} = \phi^{-1} \circ \mathrm{ad}_{\alpha x_\nu} \circ \phi$, con ϕ un isomorfismo entre L'_μ y L'_ν. Esto conlleva que $\mathrm{ad}_{\alpha x_\nu}$ y ad_μ tengan los mismos autovalores, es decir, $\{1, \mu\} = \{\alpha, \alpha\nu\}$. Esto supone que $\alpha = 1$ y $\mu = \nu$ o que $\alpha = \mu$ y $\alpha\nu = 1$, esto es, $\mu = \nu^{-1}$.

$\square$

La clasificación nos da automáticamente el siguiente corolario que ya mencionamos con anterioridad, y que además nos será útil para probar isomorfismos entre ciertas álgebras clásicas.

Corolario 1.2.36 *Salvo isomorfismo, $\mathfrak{sl}_2$ es la única álgebra de Lie simple de dimensión 3. Además, es también la única de dimensión 3 igual a su álgebra derivada.*

Ahora que tenemos esta pequeña clasificación podemos preguntarnos en que clase de isomorfía se encuentran las álgebras clásicas más pequeñas. Ya sabemos que $\mathfrak{sl}_1$ y $\mathfrak{so}_1$ son triviales, mientras que $\mathfrak{so}_2$ es isomorfa a Ab_1. Hay tres álgebras clásicas de dimensión 3: $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sp}_2$ y $\mathfrak{so}_3$, y resulta que las tres son isomorfas.

Proposición 1.2.37 *Las álgebras clásicas $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sp}_2$ y $\mathfrak{so}_3$ son isomorfas entre sí.*

Demostración: Es claro el isomorfismo de $\mathfrak{sl}_2$ y $\mathfrak{sp}_2$, puesto que por la Nota 1.2.23 la segunda es subálgebra de la primera, pero tienen la misma dimensión, por lo que coinciden. En el caso de $\mathfrak{so}_3$, gracias al Corolario 1.2.36, basta con ver que $\mathfrak{so}_3' = \mathfrak{so}_3$. Pero esto es sencillo, pues una base de $\mathfrak{so}_3$ está dada por $\{x, y, z\}$ definida según:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que los conmutadores son:

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y$$

Esto supone que la base de $\mathfrak{so}_3$ también lo sea de $\mathfrak{so}_3'$, por lo que coinciden. $\square$

También se da el isomorfismo entre $\mathfrak{sp}_4$ y $\mathfrak{so}_5$, así como entre $\mathfrak{sl}_4$ y $\mathfrak{so}_6$, aunque no lo probaremos aquí. Las demás álgebras clásicas son todas no isomorfas entre ellas, resultado que vendrá garantizado por la clasificación de álgebras simples. Antes de pasar a la siguiente sección, vamos a probar la no simplicidad de $\mathfrak{so}_4$, puesto que $\mathfrak{so}_4$, $\mathfrak{sl}_1$, $\mathfrak{so}_1$ y $\mathfrak{so}_2$, son las únicas 4 excepciones a la simplicidad de las álgebras clásicas, como también veremos en la clasificación.

Proposición 1.2.38 *El álgebra ortogonal $\mathfrak{so}_4$ no es simple. De hecho, es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$.*

Demostración: Vamos a utilizar la definición de $\mathfrak{o}_4$ (isomorfa a $\mathfrak{so}_4$). Una base de $\mathfrak{o}_4$ está dada por $\{e_1, h_1, f_1, e_2, h_2, f_2\}$, definida según:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los conmutadores no nulos son:

$$[e_1, f_1] = h_1, \quad [h_1, e_1] = 2e_1, \quad [h_1, f_1] = -2f_1$$
$$[e_2, f_2] = h_2, \quad [h_2, e_2] = 2e_2, \quad [h_2, f_2] = -2f_2$$

Así, es claro que existen dos ideales I_1 y I_2, de bases respectivas $\{e_1, h_1, f_1\}$ y $\{e_2, h_2, f_2\}$, ambos isomorfos a $\mathfrak{sl}_2$, de forma que $\mathfrak{so}_4$ es isomorfa al producto directo $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. Concluimos también que no es simple pues contiene ideales de dimensión 3. $\square$

Tipos de álgebras de Lie

En esta sección vamos a definir algunos tipos de álgebras de Lie, estudiar sus propiedades y caracterizarlos. Resumiendo lo que sigue, las álgebras de Lie nilpotentes serán caracterizadas por el Teorema de Engel, las resolubles por el Teorema de Lie y las semisimples como suma directa de simples. También introduciremos los criterios de Cartan para resolubilidad y semisimplicidad, que serán herramientas útiles en la práctica.

Las álgebras simples son las estructuralmente más ricas y en las que concentraremos nuestros esfuerzos, dedicando el siguiente capítulo a su clasificación. Esto permite, a través del Teorema de Levi (que no demostraremos aquí), describir cualquier álgebra de Lie L como el producto semidirecto de su radical $\operatorname{Rad} L$ con el cociente $L/\operatorname{Rad} L$, siendo el radical resoluble y el cociente semisimple.

2.1. Nilpotencia

La nilpotencia de un álgebra de Lie será equivalente a que las transformaciones lineales definidas por la representación adjunta sean nilpotentes, caracterización que vendrá dada por el Teorema de Engel. Esta es la idea natural que va asociada a la nilpotencia de las matrices triangulares superiores estrictas, como veremos; sin embargo, nuestro punto de partida será un enfoque más propio del álgebra, que comenzará con la definición de la serie central descendente y la nilpotencia como la estabilización nula de la misma.

Definición 2.1.1 ***Serie central descendente.*** *La serie central descendente de un álgebra de Lie L se define recursivamente por $L^0 = L$ y $L^i = [L, L^{i-1}]$.*

Definición 2.1.2 ***Nilpotencia.*** *Un álgebra de Lie L se dice nilpotente si $L^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Nota 2.1.3 *Las álgebras abelianas son nilponentes.*

Notar que el cociente de un álgebra de Lie L por su álgebra derivada L' es abeliano, pues los conmutadores de los elementos de L que representan clases de L/L' están todos en L'. Por ello, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1.4 ***Abelianización.*** *Sea L un álgebra de Lie. Llamamos abelianización de L al cociente L/L'.*

Nota 2.1.5 *La abelianización de un álgebra de Lie nilpotente es no trivial (excepto en el caso del álgebra trivial).*

Además, los cocientes de la serie central descendente tienen la forma $L^i/[L, L^i]$, y de la misma forma que en el caso de la abelianización se ve que son abelianos. Por tanto, teniendo en cuenta que todos los elementos de la serie son ideales de L es posible reconstruir con extensiones exactas cortas de álgebras abelianas.

Nota 2.1.6 *Cualquier álgebra de Lie nilpotente se puede construir a partir de un número finito de extensiones exactas cortas que no involucran ningún álgebra no abeliana ajena a la propia construcción.*

El siguiente sencillo resultado establece las implicaciones de la nilpotencia en subálgebras, cocientes y el centro.

Proposición 2.1.7 *Sea L un álgebra de Lie.*

(1) Si L es nilpotente, entonces lo son todas sus subálgebras e imágenes por homomorfismos (equivalentemente, sus cocientes).

(2) Si $L/Z(L)$ es nilpotente, entonces L también.

(3) Si L es nilpotente y no nulo, entonces su centro es no trivial.

Demostración:

(1) Por ser L nilpotente existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = 0$. Sea G subálgebra de L. Entonces G^0 es subálgebra de L^0. Supongamos que G^i es subálgebra de L^i para algún $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces por la definición de la serie central descendente se tiene que G^{i+1} es subálgebra de L^{i+1}. Así, se cumple que G^i es subálgebra de L^i para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular, G^n es subálgebra de $L^n = 0$, con lo que $G^n = 0$ y G es nilpotente.

Para imágenes homomorfas, sea $\phi : L \to H$ epimorfismo, de forma que $\phi(L) = H$. Se realiza una inducción similar a la anterior, en la que usando que ϕ es homomorfismo se prueba que $\phi(L^i) = H^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular, $\phi(L^n) = H^n$, con lo que $H^{(n)} = 0$, y H es nilpotente.

(2) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $(L/Z(L))^n = 0$, entonces $L^n \subseteq Z(L)$. Así, $L^{n+1} = [L, L^n] \subseteq [L, Z(L)] = 0$ y L es nilpotente.

(3) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = 0$ y $L^{n-1} \neq 0$, entonces $[L, L^{n-1}] = L^n = 0$ y $L^{n-1} \subseteq Z(L)$, con lo que $Z(L) \neq 0$. □

Vamos a introducir el concepto de ad-nilpotencia para poder hablar de la nilpotencia de las matrices adjuntas de una manera más clara.

Definición 2.1.8 ***Ad-nilpotencia.*** *Sean L un álgebra de Lie y $x \in L$. Si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathrm{ad}_x)^n = 0$, es decir, si ad_x es una transformación lineal nilpotente, decimos que x es ad-nilpotente.*

Dado que la serie central descendente se construye aplicando conmutadores sucesivos, que $L^n = 0$ implica que la enésima potencia de cualquier adjunto se anula, como establecemos en el siguiente resultado, que de hecho es la implicación sencilla del Teorema de Engel.

Nota 2.1.9 *Si $L^n = 0$, en particular, a partir de la definición se concluye que todo $x \in L$ es ad-nilpotente.*

Para ver que el recíproco es cierto necesitamos realizar un poco más de trabajo. En primer lugar, probamos un lema que establece que en subálgebras de $\mathfrak{gl}_n$, las matrices nilpotentes también son ad-nilpotentes.

Lema 2.1.10 *Sea $A \in \mathfrak{gl}_n$. Si A es nilpotente, entonces también es ad-nilpotente.*

Demostración: Sea $B \in \mathfrak{gl}_n$. Podemos escribir $\mathrm{ad}_A = l_A - r_A$, donde $l_A(B) = AB$ y $r_A(B) = BA$. Es claro que l_A y r_A son transformaciones lineales de $\mathfrak{gl}_n$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = 0$. Observamos que $(l_A)^m(B) = A^m B = 0$ y $(r_A)^m(B) = BA^m = 0$. Además, $[l_A, r_A](B) = ABA - ABA = 0$, por lo que conmutan. Así, aplicando la fórmula del binomio, se tiene que $(\mathrm{ad}_A)^{2m} = 0$, con lo que A es ad-nilpotente. □

Utilizando este lema podemos probar la existencia de un autovector no nulo de autovalor 0 común a todas las transformaciones lineales de un álgebra de Lie de matrices nilpotentes.

Proposición 2.1.11 *Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}_n$ no nula. Si todo elemento de L es nilpotente, entonces existe un $v \in F^n$ no nulo tal que $Av = 0$ para todo $A \in L$.*

Demostración: Supongamos que $\dim L = 1$ y sean $A \in L$ y $v \in F^n$ no nulos. Por ser A nilpotente existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m v = 0$ y $A^{m-1}v \neq 0$. Así, el vector $w = A^{m-1}v$ es no nulo tal que $Aw = 0$. Todo elemento no nulo de L es múltiplo escalar de A, con lo que hemos probado el resultado para $\dim L = 1$. Vamos a suponer que se cumple para $\dim L \leq r$, para algún $r \in \mathbb{N}$, y vamos a probar que se cumple para $\dim L = r + 1$.

Supongamos que $\dim L = r + 1$ y sea K una subálgebra propia maximal de L. Vamos a ver que K es un ideal. En primer lugar, K está formado por matrices nilpotentes, que por el Lema 2.1.10 son ad-nilpotentes (actuando sobre L, no solo sobre K). Así, por ser $\dim K < \dim L$, estamos en condiciones de aplicar la hipótesis de inducción, por lo que (abusando de la notación y permitiendo que las adjuntas actúen sobre el cociente de la manera natural) existe un elemento $B \in L \setminus K$ tal que $\mathrm{ad}_A(B + K) = 0$ para todo $A \in K$. Esto significa que $[A, B] \in K$ para todo $A \in K$, es decir, $B \in N_L(K)$, con lo que $K \subsetneqq N_L(K)$. Pero $N_L(K)$ es subálgebra y K es maximal, con lo que $N_L(K) = L$, lo que implica que K es ideal.

Por ser K ideal, L/K es un álgebra de Lie. Existe una subálgebra de L/K de dimensión 1, sin más que coger los múltiplos escalares de cualquier elemento, y la antiimagen por el epimorfismo canónico de dicha subálgebra es una subálgebra de L que contiene propiamente a K. Por ser K maximal, dicha subálgebra debe ser L, con lo que concluimos que $\dim L/K = 1$. Así, podemos escribir $L = K + FC$, con $C \in L \setminus K$.

Sea $W = \{v \in F^n \mid Av = 0 \ \forall A \in K\}$. Por la hipótesis de inducción, con $\dim K = r$, se tiene que $W \neq 0$. Además, $C(W) \subseteq W$, puesto que, dado $A \in K$ y $w \in W$, se tiene $ACw = CAw - [C, A]w = 0$, por ser K ideal. Por tanto, aplicando la hipótesis de inducción a FC como subálgebra de $\mathfrak{gl}(W)$, se tiene que existe $v \in W$ no nulo tal que $Cv = 0$. Por tanto, $Mv = 0$ para todo $M \in L$. $\square$

Finalmente, tenemos todas las herramientas necesarias para probar el Teorema de Engel y dar una caracterización de la nilpotencia elemento a elemento.

Teorema 2.1.12 ***Teorema de Engel.*** *Un álgebra de Lie L es nilpotente si y solo si todo elemento suyo es ad-nilpotente.*

Demostración: Ya hemos visto la implicación hacia la derecha, veamos la otra. Sea $L_0 = L$. Por ser todo $x \in L_0$ ad-nilpotente se tiene que $\operatorname{ad} L_0$ es un subálgebra de $\mathfrak{gl}(L_0)$ de matrices nilpotentes. Así, por la Proposición 2.1.11 existe $y \in L_0$ no nulo tal que $\operatorname{ad}_x(y) = [x, y] = 0$ para todo $x \in L_0$, es decir, $y \in Z(L_0)$. Sea $L_1 = L_0/Z(L_0)$. Sabemos que $\dim L_1 < \dim L_0$ por ser $Z(L_0) \neq 0$. Además, sean $x, y \in L_0$, $\pi : L_0 \to L_1$ el epimorfismo canónico y $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\operatorname{ad}_x)^n = 0$, entonces, por ser π homomorfismo, se cumple que $(\operatorname{ad}_{\pi(x)})^n(\pi(y)) = \pi((\operatorname{ad}_x)^n(y)) = 0$, por lo que todos los elementos de L_1 son ad-nilpotentes.

Podemos repetir este argumento, construyendo L_{i+1} a partir de L_i hasta que se llegue a un $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_n = 0$, lo cual es inevitable, puesto que la dimensión decrece estrictamente y L_0 tiene dimensión finita. Teniendo en cuenta que L_{i+1} es un cociente de L_i, aplicando la Proposición 2.1.7 (2) un número finito de veces, partiendo de L_n, que por ser nula es nilpotente, obtenemos que $L_0 = L$ es nilpotente. □

En caso de álgebras de Lie de matrices (que por el Teorema de Ado en realidad son todas), podemos acompañar al Teorema de Engel de algo más, puesto que si todas las matrices son nilpotentes hay una base que las expresa como triangulares superiores estrictas.

Proposición 2.1.13 *Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}_n$ formada por matrices nilpotentes. Entonces existe una base de F^n con respecto a la que L está formada por matrices triangulares superiores estrictas.*

Demostración: Vamos a aplicar la Proposición 2.1.11 y proceder por inducción en n, puesto que el resultado es obvio en $n = 1$. Sabemos que existe un $v \in F^n$ tal que $Av = 0$ para todo $A \in L$. Si construimos una base $\mathcal{B}$ que tenga el vector v en primer lugar, las matrices tendrán todo ceros en la primera columna. Así, restringiéndonos al subespacio de base $\mathcal{B}\setminus\{v\}$ y restringiendo las matrices adecuadamente, por la hipótesis de inducción, podemos encontrar una base de este subespacio con respecto a la que las matrices son triangulares superiores estrictas. Añadiéndole a esta base el vector v en la primera posición, tenemos una base de L que hace las matrices triangulares superiores estrictas. □

Además, es conocido que las matrices triangulares superiores estrictas son nilpotentes y forman un álgebra asociativa, por tanto, también álgebra de Lie. Así, las matrices son ad-nilpotentes y aplicando el Teorema de Engel podemos afirmar el siguiente resultado.

Corolario 2.1.14 *Cualquier álgebra de Lie de matrices triangulares superiores estrictas es nilpotente.*

2.2. Resolubilidad

Vamos ahora a desarrollar un concepto análogo a la nilpotencia, pero un poco más débil. La resolubilidad de un álgebra de Lie de matrices vendrá caracterizada por el Teorema de Lie, que afirma que las matrices son triangulares superiores con respecto a alguna base. Sin embargo, nuestro punto de partida será de nuevo el de una serie de ideales.

Definición 2.2.1 ***Serie derivada.*** *La serie derivada de un álgebra de Lie L se define recursivamente por $L^{(0)} = L$ y $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$.*

Definición 2.2.2 ***Resolubilidad.*** *Un álgebra de Lie L se dice resoluble si $L^{(n)} = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Nota 2.2.3 *A partir de las definiciones se ve que si $L^n = 0$, entonces $L^{(n)} = 0$, por lo que toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble. En particular, las álgebras abelianas son resolubles.*

Vamos a ver en primer lugar como se comporta la resolubilidad en subálgebras y cocientes.

Proposición 2.2.4 *Sea L un álgebra de Lie.*

(1) Si L es resoluble, entonces lo son todas sus subálgebras e imágenes por homomorfismos (equivalentemente, sus cocientes).

(2) Si I es un ideal resoluble de L tal que L/I es resoluble, entonces L es resoluble.

(3) Si I y J son ideales resolubles de L, entonces $I + J$ es resoluble.

Demostración:

(1) Por ser L resoluble existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^{(n)} = 0$. Sea G subálgebra de L. Entonces $G^{(0)}$ es subálgebra de $L^{(0)}$. Supongamos que $G^{(i)}$ es subálgebra de $L^{(i)}$ para algún $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces por la definición de la serie derivada se tiene que $G^{(i+1)}$ es subálgebra de $L^{(i+1)}$. Así, se cumple que $G^{(i)}$ es subálgebra de $L^{(i)}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular, $G^{(n)}$ es subálgebra de $L^{(n)} = 0$, con lo que $G^{(n)} = 0$ y G es resoluble.

Para imágenes homomorfas, sea $\phi : L \to H$ epimorfismo, de forma que $\phi(L) = H$. Se realiza una inducción similar a la anterior, en la que usando que ϕ es homomorfismo se prueba que $\phi(L^{(i)}) = H^{(i)}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular, $\phi(L^{(n)}) = H^{(n)}$, con lo que $H^{(n)} = 0$, y H es resoluble.

(2) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $(L/I)^{(n)} = I^{(m)} = 0$. Sea $\pi : L \to L/I$ el epimorfismo canónico, entonces $\pi(L) = L/I$ y razonando como en (1) obtenemos $\pi(L^{(n)}) = (L/I)^{(n)} = 0$, con lo que $L^{(n)} \subseteq \ker \pi = I$. Por tanto, $L^{(n)}$ es subálgebra de I, que es resoluble. Aplicando (1), $L^{(n)}$ es resoluble y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(L^{(n)})^{(k)} = 0$. Pero por la definición de serie derivada, $L^{(n+k)} = (L^{(n)})^{(k)} = 0$, por lo que L es resoluble.

(3) El cociente $I/(I \cap J)$ es resoluble por (1), pues es imagen homomorfa de I resoluble. Por el tercer Teorema de Isomorfía, el cociente $(I + J)/J$ es resoluble por ser isomorfo a $I/(I \cap J)$. Pero J también es resoluble, con lo que aplicando (2) se tiene que $(I + J)$ es resoluble. $\square$

Vamos a usar este resultado para probar ahora un lema que nos permitirá definir en el siguiente apartado el radical de un álgebra de Lie.

Lema 2.2.5 *Toda álgebra de Lie tiene un único ideal resoluble maximal.*

Demostración: Sean I un ideal resoluble maximal de L y J un ideal resoluble de L. Aplicando la Proposición 2.2.4 (3), tenemos que $I + J$ es resoluble, pero I es resoluble maximal y $I \subseteq I + J$, lo que supone $I = I + J$, es decir $J \subseteq I$. Usando este argumento, si K es un ideal resoluble maximal de L, se cumple $I = K$. $\square$

Vamos ahora a probar un resultado que será la clave para probar el Teorema de Lie.

Proposición 2.2.6 *Sea L una subálgebra resoluble de $\mathfrak{gl}_n$. Entonces F^n tiene un autovector no nulo común a todos los elementos de L.*

Demostración: Vamos a proceder por inducción en $d = \dim L$. El resultado es claro si $d = 1$, por lo que vamos a suponer que se cumple para todas las dimensiones menores que d.

La abelianización de L es no trivial, pues de otro modo L no sería resoluble, y es abeliana, por lo que cualquier subespacio es un ideal. Así, tomando un ideal de codimensión 1 en L/L', su antiimagen por el epimorfismo canónico es un ideal de codimensión 1 en L. Sea entonces H un ideal de L de codimensión 1 . Además, es resoluble por la Proposición 2.2.4 (1). Por inducción, existe un $v \in F^n$ que es autovector no nulo de todos los elementos de H, es decir, existe $\lambda : H \to F$ tal que $Av = \lambda(A)v$ para todo $A \in H$. Entonces sabemos que el subespacio $W = \{v \in F^n \mid Av = \lambda(A)v \ \ \forall A \in H\}$ es no trivial.

Sean $B \in L \setminus H$ y $v \in W$. Podemos entonces construir el subespacio de F^n más grande que tenga una base de la forma $\{v, Bv, \ldots, B^{m-1}v\}$ simplemente eligiendo m como el primer natural que haga $B^m v$ linealmente dependiente de los anteriores. Podemos ver que la matriz con la que actúa $A \in H$ sobre este subespacio con respecto a esta base es triangular superior. En primer lugar, es claro que $Av = \lambda(A)v$. Por ser H un ideal de L, se cumple $[A, B] \in H$ y tenemos $ABv = [A, B]v + BA(v) = \lambda([A, B])v + \lambda(A)Bv$. Supongamos por inducción que para r natural menor que $m-1$ se tiene $AB^{r-1}v = \lambda(A)B^{r-1}v + u_A$, siendo u_A combinación lineal de $\{v, Bv, \ldots, B^{r-2}v\}$. Así, podemos escribir:

$$AB^r v = [A, B]B^{r-1}v + BAB^{r-1}v = \lambda([A, B])B^{r-1}v + u_{[A,B]} + \lambda(A)B^r v + Bu_A$$

Esto prueba que la matriz de A actuando sobre la base establecida es triangular superior, con entradas diagonales $\lambda(A)$. Por tanto, $\mathrm{Tr}(A) = m\lambda(A)$ para todo $A \in H$. Pero $[A, B] \in H$ y $n\lambda([A, B]) = \mathrm{Tr}([A, B]) = 0$ por la propiedad cíclica. Así, $\lambda([A, B]) = 0$ y $ABv = \lambda(A)Bv$, por lo que $B(W) \subseteq W$.

Así, existe $w \in W$ autovector no nulo de B, puesto que si B anulara algún vector no nulo, dicho vector lo es, y en caso contrario, por la finitud de la dimensión, existiría un vector no nulo de W con dos expresiones distintas como combinación lineal de vectores de la forma $B^i v$ y a partir de ahí podríamos encontrar fácilmente un autovector no nulo. Además, cualquier elemento de L se puede escribir como suma de un elemento de H y un múltiplo de B, de forma que w es autovector no nulo común a todo L. □

Teorema 2.2.7 ***Teorema de Lie.*** *Sea L una subálgebra resoluble de $\mathfrak{gl}_n$. Entonces existe una base con respecto a la que L es un álgebra de matrices triangulares superiores.*

Demostración: Vamos a aplicar la Proposición 2.2.6 y proceder por inducción en n, puesto que el resultado es obvio en $n = 1$. Sabemos que existe un $v \in F^n$ autovector no nulo común a todo $A \in L$. Si construimos una base $\mathcal{B}$ que tenga el vector v en primer lugar, las matrices tendrán todo ceros en los elementos por debajo de la diagonal en la primera columna. Así, restringiéndonos al subespacio de base $\mathcal{B} \setminus \{v\}$ y restringiendo las matrices adecuadamente, por la hipótesis de inducción, podemos encontrar una base de este subespacio con respecto a la que las matrices son triangulares superiores. Añadiéndole a esta base el vector v en la primera posición, tenemos una base de L que hace las matrices triangulares superiores. □

El siguiente resultado es un lema que nos resultará útil para terminar de caracterizar la resolubilidad en términos de matrices triangulares superiores.

Lema 2.2.8 *El conmutador de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior estricta.*

Demostración: Sean $A, B \in \mathfrak{gl}_n$ triangulares superiores. Vamos a denotar las entradas con subíndices y vamos a calcular la diagonal del conmutador. Sea i un natural entre 1 y n. Entonces:

$$[A, B]_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \left(A_{ij}B_{ji} - B_{ij}A_{ji}\right)$$

Hay que notar que por ser las matrices triangulares superiores $A_{ij} = 0$ si $i > j$. Por tanto, en el sumatorio, cuando $j < i$ se anularán A_{ij} y B_{ij}, y cuando $j > i$ se anularán B_{ji} y A_{ji}. Así, solo sobreviven los sumandos con $j = i$ y entonces $[A, B]_{ii} =$

$A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii} = 0$. Es claro que las entradas por debajo de la diagonal siguen siendo nulas, por lo que se tiene el resultado. $\square$

Corolario 2.2.9 *Un álgebra de Lie L es resoluble si y solo si L' es nilpotente.*

Demostración: La dirección hacia la izquierda es clara, puesto que si L' es nilpotente, entonces es resoluble, y la abelianización L/L' es abeliana y por tanto resoluble. Aplicando 2.2.4 (2), L es resoluble.

Para probarlo hacia la derecha explotamos el Teorema de Lie. La representación adjunta es un homomorfismo, por lo que aplicando 2.2.4 (1), $\operatorname{ad} L$ es resoluble. Por tanto, por el Teorema de Lie se puede representar como matrices triangulares superiores. Así, por el Lema 2.2.8, $(\operatorname{ad} L)'$ es una subálgebra de matrices triangulares superiores estrictas y por el Corolario 2.1.14 es nilpotente. Por ser ad un homomorfismo esto se traduce en que $\operatorname{ad} L'$ sea nilpotente. Así, un elemento de la serie central descendente de L' está en el núcleo de ad, es decir, en $Z(L)$. Por tanto, L' es nilpotente. $\square$

Además, esto nos permite dar el recíproco del Teorema de Lie. Sabemos que las matrices triangulares superiores forman un álgebra asociativa, y por tanto una de Lie. Así, el Lema 2.2.8 nos garantiza que su álgebra derivada es una subálgebra del álgebra de las triangulares superiores estrictas (de hecho es exactamente esta), por lo que aplicando el Corolario 2.1.14 es nilpotente.

Nota 2.2.10 *Las álgebras de Lie de matrices triangulares superiores son resolubles.*

2.3. Semisimplicidad

Nuestro objetivo en este apartado es introducir la semisimplicidad, dejando sus caracterizaciones para más adelante. Sin embargo, como adelanto, las álgebras de Lie semisimples son las que pueden describirse como suma directa de álgebras de Lie simples. Esta no será nuestra definición de partida, pues comenzaremos con el radical, que podemos definir gracias al Lema 2.2.5.

Definición 2.3.1 ***Radical.*** *El radical de un álgebra de Lie L es su único ideal resoluble maximal. Se denota* $\operatorname{Rad} L$.

Definición 2.3.2 ***Semisimplicidad.*** *Un álgebra de Lie L se dice semisimple si su radical es trivial. Equivalentemente, si su único ideal resoluble es el trivial. No se considera semisimple el álgebra de Lie trivial.*

Se puede dar una definición equivalente con ideales abelianos en lugar de con resolubles. Lo vemos en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.3 *Un álgebra de Lie L es semisimple si y solo si su único ideal abeliano es el trivial.*

Demostración: Si L es semisimple no tiene ideales resolubles no triviales, y cualquier ideal abeliano es resoluble, por lo que tampoco tiene ideales abelianos no triviales.

Recíprocamente, supongamos que L tiene un ideal resoluble I no trivial. Entonces la serie derivada de I termina en 0 y su último ideal no trivial es abeliano. Dicho ideal también lo es de L, por lo que L tiene un ideal abeliano no trivial, lo que es una contradicción. Por tanto, el radical es trivial y L es semisimple. □

Además, la semisimplicidad está presente en el cociente por el radical $L/\operatorname{Rad} L$ de cualquier álgebra de Lie. Esto se debe a que si el cociente no fuera semisimple existiría un ideal resoluble no trivial en el mismo, cuya antiimagen por el epimorfismo canónico sería resoluble en L por la Proposición 2.2.4 (2) y contendría a $\operatorname{Rad} L$. Esto es una contradicción por ser el radical el resoluble maximal.

Nota 2.3.4 *Sea L un álgebra de Lie. El cociente $L/\operatorname{Rad} L$ es semisimple.*

Este hecho nos permite describir cualquier álgebra de Lie como una extensión exacta corta de un álgebra resoluble por una semisimple. Pero la cosa no queda ahí, pues el Teorema de Levi que probaremos más adelante garantiza que esta extensión se parte, de forma que cualquier álgebra de Lie es producto semidirecto de una resoluble y una semisimple.

Como observación evidente y deseable, un álgebra simple no tiene ideales propios, por tanto tampoco ideales resolubles propios.

Nota 2.3.5 *Toda álgebra de Lie simple es semisimple.*

Podemos notar también que un álgebra de Lie semisimple no puede tener centro no trivial, puesto que $[Z(L), Z(L)] = 0$, es decir, el centro es resoluble.

Nota 2.3.6 *El centro de un álgebra de Lie semisimple es trivial.*

Además, habíamos apuntado en la Nota 1.1.40 que $L/Z(L)$ y $\operatorname{ad} L$ son isomorfos. Por tanto, en el caso de las álgebras semisimples tenemos automáticamente una versión sencilla del Teorema de Ado.

Nota 2.3.7 *Cualquier álgebra de Lie semisimple L es isomorfa a su adjunta* $\operatorname{ad} L$. *En particular, cualquier álgebra de Lie semisimple puede verse como un álgebra de matrices.*

Para poder dar las otras dos caracterizaciones de la semisimplicidad necesitamos introducir ciertas herramientas. Lo hacemos en los siguientes apartados.

2.4. Descomposición de Jordan-Chevalley

Vamos a introducir la descomposición de Jordan-Chevalley de cualquier transformación lineal $x \in \operatorname{End} V$. Esencialmente consiste en describir cualquier transformación lineal como la suma de una semisimple y una nilpotente que conmutan entre ellas.

Definición 2.4.1 ***Transformación lineal semisimple.*** *Sea V un espacio vectorial sobre F. Una transformación lineal $x \in \operatorname{End} V$ se dice semisimple si las raíces de su polinomio mínimo son todas distintas. Equivalentemente, siendo F algebraicamente cerrado, si x es diagonalizable.*

Definición 2.4.2 ***Descomposición de Jordan-Chevalley.*** *Sea V un espacio vectorial y $x \in \operatorname{End} V$. Se dice descomposición de Jordan-Chevalley a $x = s + n$, con $s, n \in \operatorname{End} V$, s semisimple, n nilpotente y $[s, n] = 0$. Se llaman parte semisimple y parte nilpotente de x a s y n respectivamente.*

Resulta que esta descomposición existe, es única y tiene buenas propiedades. Lo resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.3 *Sean V un espacio vectorial sobre F y $x \in \operatorname{End} V$. Entonces:*

(1) Existe una única descomposición de Jordan-Chevalley $x = x_s + x_n$.

(2) Existen polinomios $p, q \in F[X]$ sin término independiente tales que $x = p(x) + q(x)$ es una descomposición de Jordan-Chevalley.

(3) Las partes semisimple y nilpotente de x conmutan con cualquier endomorfismo que conmute con x.

(4) Sean A y B subespacios de V tales que $A \subseteq B \subseteq V$. Si $x(B) \subseteq A$, entonces $x_s(B) \subseteq A$ y $x_n(B) \subseteq A$.

Demostración:

(1) La existencia es clara, puesto que la forma canónica de Jordan de x es una matriz triangular superior. Por tanto, en la base de Jordan, x se representa por una matriz triangular superior y podemos descomponerla en su diagonal y su triangulo superior. Sean así x_s y x_n las transformaciones lineales asociadas a estas matrices con respecto a la base de Jordan. Es claro que $x = x_s + x_n$ y que x_s es semisimple y x_n nilpotente. Es inmediato probar que $[x_s, x_n] = 0$, puesto que las matrices que las representan en la base de Jordan conmutan por argumentos similares a los utilizados en la demostración del Lema 2.2.8.

Para la unicidad supongamos que $x = x_s + x_n = s + n$ son dos descomposiciones de Jordan-Chevalley. Vamos a utilizar (2), por lo que debemos asegurarnos de que no empleamos la unicidad en (2). Por (2), sabemos que s conmuta con x_s y que n conmuta con x_n. Además, podemos escribir $x_s - s = n - x_n$. La suma de dos transformaciones lineales nilpotentes que conmutan es nilpotente aplicando la fórmula del binomio, por lo que $n - x_n$ es nilpotente. Igualmente, dos transformaciones lineales diagonalizables que conmutan son diagonalizables simultáneamente, por lo que $x_s - s$ es semisimple. La única transformación lineal semisimple y nilpotente es la nula, por lo que $s = x_s$ y $n = x_n$.

(2) Sean $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ los m autovalores distintos de x, con multiplicidades $\{m_i\}_{i=1}^m$. Entonces podemos descomponer $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, con $V_i = \ker(x - \lambda_i \, id)^{m_i}$.

Podemos utilizar el Teorema Chino de los restos en el anillo $F[X]$ para encontrar un polinomio $p \in F[X]$ tal que se satisfagan las congruencias:

$$p(X) \equiv 0 \pmod{X} \text{ si } \lambda_i \neq 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$
$$p(X) \equiv \lambda_i \pmod{(X - \lambda_i \, id)^{m_i}} \;\; \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

Así, $p(x)$ actúa multiplicando por λ_i en cada V_i, lo que supone que sea semisimple. Claramente, el polinomio $q(X) = X - p(X)$ cumple que $q(x)$ es nilpotente y que

$[p(x), q(x)] = 0$. Así, $x = p(x) + q(x)$ es una descomposición de Jordan-Chevalley en polinomios sin término constante por la congruencia con 0 módulo X.

(3) El resultado es un corolario inmediato de (1) y (2), pues las partes semisimple y nilpotente se pueden expresar en términos de polinomios en x, conmutando con x, y esa es la única descomposición posible. Además, cualquier transformación lineal que conmute con x lo hace con polinomios en x.

(4) El mismo argumento del punto anterior, sumado a que si $x(B) \subseteq A$ entonces $p(x)(B) \subseteq A$ para cualquier polinomio $p \in F[X]$, prueba el resultado.

$\square$

Se puede ver que la representación adjunta preserva la descomposición. Lo probamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.4 *Sea $x = x_s + x_n$ la descomposición de Jordan-Chevalley de un elemento $x \in \mathfrak{gl}_n$. Entonces se tiene la descomposición de Jordan-Chevalley $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$ en $\mathrm{ad}\,\mathfrak{gl}_n$.*

Demostración: Por ser ad un homomorfismo es claro que se da la igualdad y que ad_{x_s} y ad_{x_n} conmutan. También sabemos que una transformación lineal nilpotente es ad-nilpotente por el Lema 2.1.10, por lo que ad_{x_n} es nilpotente. Por último, representemos x_s por la matriz diagonal de entradas λ_k. Haciendo actuar ad_{x_s} sobre la matriz E de entradas nulas salvo un 1 en la posición (i, j) obtenemos $\mathrm{ad}_{x_s}(E) = [x_s, E] = (\lambda_i - \lambda_j)E$. Las matrices de la forma descrita forman una base de $\mathfrak{gl}_n$ y ad_{x_s} actúa diagonalmente sobre ella, por lo que es semisimple. $\square$

Finalmente, en caso de álgebras de Lie L semisimples (más concretamente en álgebras de centro trivial), sabemos que L es isomorfa a $\mathrm{ad}\,L$ y por tanto podemos verla como un álgebra de matrices. Sin falta de tener una expresión explícita en matrices, este isomorfismo nos proporciona una descomposición de Jordan-Chevalley en cualquier álgebra semisimple.

Nota 2.4.5 *Sean L un álgebra de Lie semisimple y $x \in L$. Sabemos que $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{ad}\,L$ es un isomorfismo. Por tanto, existen únicos $x_s, x_n \in L$ tales que $x = x_s + x_n$ de forma que $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de ad_x. La Proposición*

2.4.4 nos garantiza que si L es un álgebra de matrices $x = x_s + x_n$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de x. Notar que x es ad-nilpotente si y solo si $x = x_n$. De la misma forma, diremos que x es ad-semisimple si $x = x_s$.

2.5. Criterios de Cartan

Vamos ahora a aprovechar la descomposición de Jordan-Chevalley para dar los criterios de Cartan, en términos de la forma de Killing, que utilizarán la traza como herramienta fundamental. Comenzamos con la definición de forma de Killing y algunas de sus propiedades.

Definición 2.5.1 ***Forma de Killing.*** *La forma de Killing de un álgebra de Lie L sobre F es la aplicación $B : L \times L \to F$ definida según $K(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$.*

La forma de Killing cumple propiedades deseables, gracias a la propiedad cíclica de la traza y su linealidad, pues es claro que es una forma bilineal simétrica. Además, cumple que es invariante, y su no degeneración estará ligada a la semisimplicidad del álgebra.

Definición 2.5.2 ***Propiedades de formas bilineales.*** *Sea una forma bilineal simétrica B definida en un álgebra de Lie L. Se dice que B es:*

- *Invariante si $B([x, y], z) = B(x, [y, z])$ para todo $x, y, z \in L$.*
- *No degenerada si $B(x, y) = 0$ para todo $y \in L$ implica $x = 0$.*

Proposición 2.5.3 *La forma de Killing es una forma bilineal invariante.*

Demostración: Sean x, y y z elementos de un álgebra de Lie L. Entonces aplicando la propiedad cíclica de la traza y que ad es un homomorfismo se tiene:

$$K([x, y], z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_z) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_z) = K(x, [y, z])$$

Así, se cumple la propiedad requerida. □

Podemos utilizar ahora la forma de Killing para caracterizar la resolubilidad y la semisimplicidad, pero antes necesitamos un lema.

Lema 2.5.4 *Sea L una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n$. Si $\mathrm{Tr}(AB) = 0$ para todo $A, B \in L$, entonces L es resoluble.*

Demostración: Basta con probar que todo $C \in L'$ es nilpotente, pues en ese caso todo $C \in L'$ es ad-nilpotente, por el Teorema de Engel L' es nilpotente y por el Corolario 2.2.9 L es resoluble. Sea así $C \in L'$ y $C = D + N$ su descomposición de Jordan-Chevalley con respecto a una base de Jordan. El objetivo es probar que $D = 0$, pues así C será nilpotente.

Sean $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ las entradas de la diagonal de D y $V = \operatorname{span}_Q\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ un subespacio de F, visto como espacio vectorial sobre su cuerpo primo Q. Probar que el dual V^* es trivial supone que $D = 0$. Sean $f : V \to Q$ lineal y D_f la matriz diagonal de entradas $f(\lambda_i)$. Argumentando igual que en la demostración de la Proposición 2.4.4 se ve que con respecto al elemento E con entradas nulas salvo un 1 en la posición (i, j) se tiene $\operatorname{ad}_D(E) = (\lambda_i - \lambda_j)E$ y que $\operatorname{ad}_{D_f}(E) = f(\lambda_i - \lambda_j)E$.

Esto supone que empleando interpolación de Lagrange se pueda encontrar un polinomio $r \in F[X]$ tal que $\operatorname{ad}_{D_f} = r(\operatorname{ad}_D)$. Además, ad_D es la parte semisimple de ad_C por la Proposición 2.4.4, por lo que se expresa como un polinomio en términos de ad_C. Así, ad_{D_f} se expresa como un polinomio en términos de ad_C y por tanto $\operatorname{ad}_{D_f}(L) \subseteq L$, pero esto es todo lo que necesitamos.

Tenemos por un lado que $\operatorname{Tr}(D_f C) = \sum_{i=1}^d f(\lambda_i)\lambda_i \in V$ y por otro que $C \in L'$, por lo que puede expresarse como suma de conmutadores de elementos en L. Así, sean $A, B \in L$. Con un razonamiento análogo al de la Proposición 2.5.3 se tiene que $\operatorname{Tr}(D_f[A, B]) = \operatorname{Tr}([D_f, A]B) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{D_f}(A)B) = 0$ por hipótesis al estar $\operatorname{ad}_{D_f}(A) \in L$. Esto supone que $\sum_{i=1}^d f(\lambda_i)\lambda_i = 0$, pero aplicando f obtenemos $\sum_{i=1}^d f(\lambda_i)^2 = 0$ en el cuerpo primo Q. Esto implica que $f(\lambda_i)$ se anula para todo i, es decir, que $f = 0$. Por tanto, $V^* = 0$ y se concluye que L es resoluble. □

Teorema 2.5.5 ***Criterio de Cartan para resolubilidad.*** *Un álgebra de Lie L es resoluble si y solo si $K(x, y) = 0$ para todo $x \in L'$, $y \in L$.*

Demostración: La prueba hacia la derecha es sencilla gracias a los Teoremas de Engel y Lie y el Corolario 2.2.9. Sabemos que $\operatorname{ad} L$ es resoluble por ser imagen homomorfa de L y que $\operatorname{ad} L'$ es nilpotente por ser imagen homomorfa de L'. Así, los elementos de $\operatorname{ad} L$ son matrices triangulares superiores y los de $\operatorname{ad} L'$ triangulares superiores estrictas. Razonando igual que en la demostración del Lema 2.2.8 concluimos que si $x \in L'$ e $y \in L$, entonces $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$ es triangular superior estricta y por lo tanto su traza se anula. Es decir, $K(x, y) = 0$.

El lema anterior trivializa la prueba hacia la izquierda, puesto que si se cumple la condición del enunciado, entonces el Lema 2.5.4 aplica al álgebra $\operatorname{ad} L'$, por lo que es resoluble. Esto hace que L' sea resoluble, lo que claramente conlleva la resolubilidad de L. □

Teorema 2.5.6 ***Criterio de Cartan para semisimplicidad.*** *Un álgebra de Lie es semisimple si y solo si su forma de Killing es no degenerada.*

Demostración: Para la prueba hacia la derecha vamos a ver que si la forma de Killing es degenerada podemos encontrar un ideal resoluble no trivial. Sea L un álgebra de Lie y K su forma de Killing. Es claro que $H = \{x \in L \,|\, K(x, y) = 0 \;\; \forall y \in L\}$ es no trivial por ser K degenerada. Además, $K(x, y) = 0$ para todo $x \in H$, $y \in H'$, por lo que por el criterio de Cartan para resolubilidad H es resoluble. Finalmente, sean $x \in H$, $y, z \in L$. Entonces $K([x, y], z) = K(x, [y, z]) = 0$, por la invarianza de la forma de Cartan. Así, H es un ideal resoluble no trivial de L y L no es semisimple.

Para demostrarlo hacia la izquierda vamos a ver que todos los ideales abelianos de un álgebra de Lie L son triviales si su forma de Killing K es no degenerada. Utilizando la Proposición 2.3.3 esto prueba la semisimplicidad de L. Sea I un ideal abeliano de L y sean $x \in I$, $y \in L$. Si probamos que $K(x, y) = 0$ entonces $x = 0$ y hemos terminado. Pero por ser I ideal abeliano de L se cumple que $\operatorname{ad}_y(L) \subseteq L$, $\operatorname{ad}_x(L) \subseteq I$, $\operatorname{ad}_y(I) \subseteq I$ y $\operatorname{ad}_x(I) \subseteq 0$. Es decir, $(\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y)^2 = 0$ y $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$ es nilpotente. Esto supone que se escriba como una matriz triangular superior estricta y por tanto que su traza sea cero, es decir, $K(x, y) = 0$. □

Finalmente, el siguiente teorema caracteriza la semisimplicidad en la forma más natural: como suma directa de álgebras simples. Para probarlo vamos a usar un lema.

Lema 2.5.7 *Sean L un álgebra de Lie semisimple y H un ideal de L. Entonces existe otro ideal G de L tal que $L = H \oplus G$ como espacios vectoriales y tal que L es isomorfa al producto directo $H \oplus G$.*

Demostración: Sea K la forma de Killing de L. Así, el subespacio ortogonal a H según K es $G = H^{\perp} = \{x \in L \mid K(x, y) = 0 \;\; \forall y \in H\}$ y cumple $L = H + G$. Además, el criterio de Cartan para resolubilidad garantiza que $H \cap G$ es resoluble, por lo que la semisimplicidad de L garantiza que la intersección es trivial. Por tanto $L = H \oplus G$ como espacios vectoriales.

Además, sea $x \in G$, $y \in L$, $z \in H$. Entonces por la invariancia de K y por ser H ideal se tiene $K([x, y], z) = K(x, [y, z]) = 0$, con lo que $[x, y] \in G$ y G es ideal. Finalmente, teniendo en cuenta que H y G son ideales con $H \cap G = 0$, es claro que $[H, G] = 0$. Por tanto L es isomorfa al producto directo $H \oplus G$. $\square$

Teorema 2.5.8 *Un álgebra de Lie L es semisimple si y solo si es isomorfa a la suma directa de un número finito de álgebras de Lie simples.*

Demostración: Hacia la izquierda basta con probarlo para la suma directa de dos álgebras simples, pues el resultado general se da automáticamente por inducción. Así, supongamos que L es isomorfa a la suma directa $H \oplus G$. Vamos a denotar a los elementos (h, g) de $H \oplus G$ simplemente por $h + g$, identificándolos con elementos de L a través de un isomorfismo, y vamos a identificar también los sumandos directos H y G con los ideales simples de L que les asigne dicho isomorfismo.

Así, sea $x \in L$ tal que $K(x, y) = 0$ para todo $y \in L$. Por la bilinealidad de K, esto es equivalente a que $K(x, g) = K(x, h) = 0$ para todo $g \in G$ y para todo $h \in H$. Podemos descomponer $x = x_g + x_h$, con $x_g \in G$ y $x_h \in H$. Sean $a \in H$ y $b \in G$, entonces $\mathrm{ad}_{x_g}(\mathrm{ad}_h(a + b)) = [x_g, [h, a]] + [x_g, [h, b]] = 0$, con lo que $\mathrm{ad}_{x_g} \mathrm{ad}_h = 0$ y $K(x_g, h) = 0$. Así, $K(x_h, h) = 0$, y por el criterio de Cartan para semisimplicidad aplicado a H concluimos que K restringida a H es no degenerada y $x_h = 0$. Análogamente concluimos que $x_g = 0$. Por tanto, $x = 0$, K es no degenerada y el criterio de Cartan nos garantiza la semisimplicidad de L.

El recíproco lo hacemos por inducción en la dimensión de L. Si L es de dimensión 1 se cumple trivialmente así que supongamos que se cumple para todas las dimensiones menores que n y sea $\dim L = n$. Sea H un ideal no trivial minimal de L. Si $H = L$ hemos terminado, por lo que podemos suponer que $\dim H < n$. Entonces, por el Lema 2.5.7, L es isomorfa a la suma directa $H \oplus H^\perp$. Además, H es simple, pues es minimal y por ser un sumando directo sus ideales lo son también de L. Usando el mismo argumento concluimos que $H^\perp$ es semisimple, pues cualquier radical resoluble suyo lo sería también de L. Por hipótesis de inducción $H^\perp$ es isomorfo a una suma directa finita de álgebras de Lie simples, y al ser L isomorfa a la suma directa $H \oplus H^\perp$ con H simple hemos terminado. □

El siguiente capítulo se dedicará a la clasificación de las álgebras de Lie simples, dando automáticamente la clasificación de las álgebras de Lie semisimples gracias a este resultado.

Clasificación de álgebras simples

El objetivo de este capítulo es la clasificación salvo isomorfismo de todas las posibles álgebras de Lie simples sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0. Para conseguirlo se estudiarán las subálgebras de Cartan, que nos permitirán asociar un sistema de raíces a cada álgebra de Lie. Estudiando las propiedades geométricas de estos sistemas seremos capaces de clasificarlos en forma de grafos, mediante los diagramas de Dynkin. Hecho esto será necesario garantizar mediante resultados de unicidad e isomorfía que la clasificación en diagramas de Dynkin se puede convertir en una de álgebras de Lie.

3.1. Subálgebras de Cartan

El punto de partida es el estudio de unas subálgebras específicas, que veremos que están presentes en cualquier álgebra de Lie simple y que nos servirán para definir las raíces.

Definición 3.1.1 ***Subálgebra de Cartan.*** *Sea L un álgebra de Lie. Decimos que una subálgebra suya H es de Cartan si es nilpotente e igual a su normalizador, esto es, $N(H) = H$.*

Definición 3.1.2 ***Espacio nulo generalizado.*** *Sea L un álgebra de Lie y $x \in L$. El espacio nulo generalizado de x en L es*

$$L_0^x = \{v \in L \mid \ \exists n \in \mathbb{N} \ t.q. \ \mathrm{ad}_x^n v = 0\} \tag{3.1}$$

Notar que L_0^x siempre tiene al menos dimensión 1, puesto que $\mathrm{ad}_x x = 0$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.3 ***Elemento regular.*** *Sea L un álgebra de Lie y H una subálgebra. Decimos que $x \in H$ es (L, H)-regular si L_0^x es de dimensión mínima entre los espacios* *nulos generalizados asociados a elementos de H. Llamaremos simplemente regulares a los elementos (L, L)-regulares.*

Por definición, para cualquier par álgebra-subálgebra (L, H) siempre existe un elemento (L, H)-regular. En particular, en cualquier álgebra de Lie siempre hay al menos un elemento regular. Esto nos permite asignar un natural de forma única a cada álgebra de Lie.

Definición 3.1.4 ***Rango.*** *Sea L un álgebra de Lie. Decimos que el rango de L es la dimensión de L_0^x para cualquier elemento regular $x \in L$.*

Con esto podemos garantizar la existencia de subálgebras de Cartan.

Proposición 3.1.5 *Sea L un álgebra de Lie y $x \in L$ regular. Entonces L_0^x es subálgebra de Cartan.*

Demostración: Supongamos que L_0^x no es nilpotente. Tomemos un elemento regular de L_0^x, es decir, un $y \in L_0^x$ tal que $(L_0^x)_0^y$ es de dimensión mínima entre los subespacios nulos generalizados de L_0^x. Si $(L_0^x)_0^y$ coincidiera con L_0^x, entonces por la minimalidad todos los elementos de L_0^x serían ad-nilpotentes y por el Teorema de Engel sería nilpotente. Así, suponemos que $(L_0^x)_0^y$ está propiamente contenido en L_0^x, lo que implica que y no es ad-nilpotente sobre L_0^x. Además, x e y están en la misma clase de equivalencia del cociente L/L_0^x, por lo que su acción adjunta sobre el mismo es idéntica. Con ambas restricciones concluimos que L_0^y es subespacio propio de L_0^x. Por tanto, L_0^x no es de dimensión mínima, contradiciendo la regularidad de x. Concluimos que L_0^x es nilpotente.

Sea $y \in N(L_0^x)$, entonces $\operatorname{ad}_x y = [x, y] \in L_0^x$. Por tanto, $\exists v \in L_0^x$ tal que $\operatorname{ad}_x^n v = 0$ y $\operatorname{ad}_x y = v$. Así, $\operatorname{ad}_x^{n+1} y = 0$ y $y \in L_0^x$. Concluimos que L_0^x es igual a su normalizador.
□

Podemos ampliar la definición de subespacio nulo generalizado a un subconjunto $H \subseteq L$, simplemente tomando $L_0^H = \bigcap_{x \in H} L_0^x$. Esto nos permite dar un resultado en la dirección contraria.

Proposición 3.1.6 *Sea L un álgebra de Lie y H una subálgebra de Cartan. Entonces $H = L_0^H$.*

Demostración: Por ser H Cartan es nilpotente y $H \subseteq L_0^H$. Además, si suponemos que $H \neq L_0^H$, entonces el cociente L_0^H/H es no trivial. Los elementos de H son ad-nilpotentes sobre H y sobre L_0^H, por lo que existe $G \in L_0^H/H$ no trivial tal que $\mathrm{ad}_H\, G \subseteq H$. Así, existe $y \in G$ tal que $y \in N(H) \setminus H$, contradiciendo que H es Cartan. □

Podemos ir un paso más allá, pues el resultado anterior se puede refinar utilizando los elementos regulares de la subálgebra de Cartan. Antes necesitamos un lema.

Lema 3.1.7 *Sean $X, Y \in \mathfrak{gl}(V)$, con V un espacio vectorial de dimensión n finita sobre un cuerpo F de característica 0 algebraicamente cerrado. Para cada $t \in F$, denotemos $Z_t = X + tY$. Entonces el conjunto $\{z \in F \mid Z_t$ no es automorfismo$\}$ es finito o todo F.*

Demostración: Sea $t \in F$. Podemos considerar el polinomio característico del endomorfismo Z_t y escribirlo en la forma $p_t(X) = \det(Z_t - X)$. Este polinomio será de grado n y tendrá como coeficientes polinomios en t de grado menor o igual que n. Explícitamente:

$$p_t(X) = (-1)^n X^n + \sum_{i=1}^{n} q_i(t) X^{n-i}$$

Así, podemos concluir que $\det(Z_t) = p_t(0) = q_n(t)$, y por el Teorema Fundamental del Álgebra o existen como mucho un número finito de elementos $t \in F$ que anulen el determinante o el polinomio q_n es nulo y todo elemento de F anula el determinante. Si el determinante es nulo entonces Z_t no es automorfismo. Basta notar que F es infinito para concluir. □

Proposición 3.1.8 *Sea L un álgebra de Lie y H una subálgebra de Cartan. Entonces $H = L_0^x$ para cualquier elemento (L, H)-regular $x \in H$.*

Demostración: Sean $x, y \in H$, con x un elemento (L, H)-regular. Consideremos $X = \mathrm{ad}_x$ y $Y = \mathrm{ad}_y$ actuando sobre L/L_0^x, por tanto como endomorfismos en $\mathfrak{gl}(L/L_0^x)$. Aplicando el lema anterior y notando que $Z_0 = X$ es automorfismo por definición de L_0^x concluimos que solo hay solo un número finito de valores de $t \in F$ que hacen que Z_t no sea automorfismo, en concreto, las raíces del q_n asociado a Z_t. Denotemos por C a dicho conjunto. Así, sea $t \in F \setminus C$. Se cumple que Z_t es un automorfismo de L/L_0^x, y por lo tanto $L_0^{x+ty} \subseteq L_0^x$. Por la (L,H)-regularidad de este último se concluye que $L_0^{x+ty} = L_0^x$, de manera que $x+ty$ es ad-nilpotente sobre L_0^x. Por ser x ad-nilpotente sobre L_0^x, y ser C finito se concluye que la ad-nilpotencia de $x+ty$ sobre L_0^x se extiende también a los valores $t \in C$. Así, en particular, $x+y$ es ad-nilpotente sobre L_0^x para todo $y \in H$, concluyendo que $L_0^x \subseteq L_0^H$. Finalmente, sabemos por la proposición anterior que $L_0^H = H$ y por definición $L_0^H \subseteq L_0^x$. □

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente corolario.

Corolario 3.1.9 *Una subálgebra de Cartan H de un álgebra de Lie L es el subespacio nulo generalizado de los elementos (L,H)-regulares y tiene dimensión mayor o igual que el rango de L.*

Finalmente probaremos un resultado central para la clasificación. Para ello vamos a introducir antes algunas nociones propias de la geometría algebraica para poder aprovechar las propiedades de la topología de Zariski.

Definición 3.1.10 ***Topología de Zariski.*** *Sea F un cuerpo de característica 0 algebraicamente cerrado. La topología de Zariski en F^n es la que tiene como conjuntos cerrados aquellos de la forma $V(S) = \{x \in F^n \mid f(x) = 0\ \forall f \in S\}$ donde S es cualquier subconjunto $S \subseteq F[x_1, \ldots, x_n]$.*

Se puede comprobar que la topología de Zariski es efectivamente una topología, y nos interesa utilizarla porque los elementos regulares se corresponden con un Zariski abierto (el complementario del anulador del determinante a través de la representación adjunta). Damos un resultado sobre esta topología sin demostración.

Proposición 3.1.11 *Todo subconjunto abierto no vacío en la topología de Zariski es denso con respecto a la topología usual de F^n.*

Proposición 3.1.12 *Sea L un álgebra de Lie y H una subálgebra de Cartan. Entonces H es conjugado de L_0^x por algún automorfismo interno para cualquier elemento regular x. En particular, las álgebras de Cartan son conjugadas entre ellas por automorfismos internos.*

Demostración: Denotemos $S = \{y \in H \mid H = L_0^y\}$. Notar que S está formado por los elementos (L,H)-regulares, y que estos son precisamente los elementos de H que en la representación adjunta tienen determinante no nulo. Por tanto, dado que el determinante es un polinomio sobre F, podemos afirmar que S es el complementario del anulador de un polinomio, por lo que es Zariski abierto. Además, es usualmente denso en H por la proposición anterior. Sea T el subconjunto de L de elementos que son conjugados a algún $y \in S$. Notemos que dado un $y \in S$ se tiene que H y $\mathrm{ad}_y L$ generan L, puesto que $H = L_0^y$. Así, aplicando el Teorema de la aplicación inversa a la aplicación $\psi(t) = \exp(t\,\mathrm{ad}_y)$, que es diferenciable en t y tiene derivada $\psi'(0) = \mathrm{ad}_y$ podemos afirmar que existe un entorno de y que está contenido en T. Como S es denso y Zariski abierto, concluimos que T es Zariski denso y por tanto contiene al conjunto de elementos regulares de L, que al igual que justificamos para S en H, es Zariski abierto usualmente denso en L. Es decir, los elementos (L, H)-regulares son conjugados por automorfismos internos a los regulares. Naturalmente, si un automorfismo interno lleva $y \in H$ (L, H)-regular a $x \in L$ regular, entonces lleva $L_0^y = H$ a L_0^x, que por construcción es un Cartan. Como todos los Cartan tienen esa forma concluimos que dos Cartan siempre son conjugados por un automorfismo interno. $\square$

Finalmente, podemos resumir la sección en una versión mejorada del corolario anterior.

Corolario 3.1.13 *Las subálgebras de Cartan de un álgebra de Lie L son subespacios nulos generalizados de los elementos regulares de L y son conjugadas entre sí, por tanto isomorfas y con dimensión igual que el rango de L.*

3.1.1. Descomposición de Cartan en espacios de raíces

En este apartado vamos a ver propiedades de las subálgebras de Cartan en el caso semisimple. Esto nos permitirá descomponer cualquier álgebra de Lie semisimple como suma directa de ciertos espacios vectoriales de interés. Antes de nada vamos a recordar la definición de espacio vectorial dual para poder introducir los espacios de pesos.

Definición 3.1.14 ***Espacio dual.*** *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre F. Su espacio dual es $V^* = \{\lambda : V \to F \mid \lambda \text{ lineal } \}$.*

Nota 3.1.15 *El espacio dual V^* es un espacio vectorial de la misma dimensión que V. En particular, V y V^* son isomorfos.*

Definición 3.1.16 ***Espacios de pesos.*** *Sea L un álgebra de Lie, H una subálgebra suya y $\lambda \in H^*$. El espacio de peso λ generalizado de H en L es*

$$L_\lambda^H = \{v \in L \mid \exists n \in \mathbb{N} \ t.q. \ [\mathrm{ad}_h - \lambda(h)]^n v = 0 \ \ \forall h \in H\} \tag{3.2}$$

El espacio de peso λ (no generalizado) es $L_\lambda^{1,H} = \{v \in L \mid \mathrm{ad}_h v = \lambda(h)v \ \forall h \in H\}$.

Con estas definiciones tenemos el lenguaje necesario para dar dos resultados que tendrán como corolario la descomposición que nos interesa.

Proposición 3.1.17 *Sea L un álgebra de Lie semisimple y H una subálgebra de Cartan. Entonces H es abeliana y la forma de Killing es no degenerada en H.*

Demostración: Al ser H Cartan es nilpotente y por tanto resoluble. Así, el Teorema de Lie permite encontrar una base de $\mathrm{ad}\, H$ de matrices triangulares superiores. Usando ese hecho, es sencillo descomponer $L = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(H)} L_\lambda^H$, siendo $\sigma(H) \subseteq H^*$ finito. Además, usando la identidad de Jacobi, $[L_\lambda^H, L_\mu^H] \subseteq L_{\lambda+\mu}^H$. Así, siendo K la forma de Killing, se obtiene al tomar trazas $K(L_0^H, \bigoplus_{\lambda \in \sigma(H)\setminus\{0\}} L_\lambda^H) = 0$. Teniendo en cuenta que L es semisimple, K es no degenerada en L, y por la K-ortogonalidad de L_0^H con los otros sumandos directos, también es no degenerada en $L_0^H = H$.

Finalmente, por ser $\mathrm{ad}\, H$ de triangulares superiores, $\mathrm{ad}\, H'$ es de triangulares superiores estrictas, de manera que $K(H', H) = 0$. Como K es no degenerada en H, $H' = 0$ y H es abeliana. $\square$

Proposición 3.1.18 *Sea L un álgebra de Lie semisimple y H una subálgebra de Cartan. Entonces todo $x \in H$ es ad-semisimple.*

Demostración: Sea $x = x_n + x_s \in H$. Por ser H abeliana, $\mathrm{ad}_x H = 0$, y por tanto también $\mathrm{ad}_{x_n} H = 0$. Así, $x_n \in N(H) = H$. De esta forma, siendo $y \in H$, se tiene que ad_y y ad_{x_n} conmutan y por ser el segundo nilpotente se tiene que $\mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_{x_n}$ es nilpotente y así, al tomar trazas $K(y, x_n) = 0$. Por ser K no degenerada en H, $x_n = 0$ y $x = x_s$. $\square$

Podemos finalmente definir el conjunto de raíces y dar la descomposición de Cartan.

Definición 3.1.19 ***Conjunto de raíces.*** *Sea L un álgebra de Lie semisimple y H una subálgebra de Cartan. El conjunto de raíces de H en L es:*

$$\Phi = \{\alpha \in H^* \setminus \{0\} \mid \dim L_\alpha^{1,H} > 0\} \tag{3.3}$$

A partir de ahora, en el contexto de una subálgebra de Cartan H y su conjunto de raíces asociado Φ, escribiremos simplemente L_α para referirnos al $L_\alpha^{1,H}$ de una raíz $\alpha \in \Phi$.

Teorema 3.1.20 ***Descomposición de Cartan.*** *Sea L un álgebra de Lie semisimple, H una subálgebra de Cartan y Φ el conjunto de raíces de H en L. Entonces Φ es finito y se tiene la siguiente descomposición como suma directa de espacios vectoriales:*

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

Demostración: Sabemos que $H = L_0^H$, y por ser H abeliana y estar formada por elementos semisimples se concluye automáticamente la descomposición. □

3.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}_2$

Para poder ver la relación entre las álgebras de Lie semisimples y los sistemas de raíces que introduciremos en el siguiente apartado necesitamos primero adentrarnos en la teoría de representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$, pues es la pieza fundamental que sirve como base para entender álgebras más complicadas.

Recordamos que $\mathfrak{sl}_2$ es un álgebra de Lie de dimensión 3, cuya base podemos denotar por $\{H, X, Y\}$, con conmutadores:

$$[H, X] = 2X, \ \ [H, Y] = -2Y, \ \ [X, Y] = H$$

Notar que la subálgebra de base $\{H\}$ es de Cartan, pues es abeliana y coincide con su normalizador.

En primer lugar, vamos a ver que ciertos operadores diferenciales actuando sobre el anillo de polinomios $F[x, y]$ forman un álgebra $\mathfrak{sl}_2$. Estos son:

$$\hat{H} = x\partial_x - y\partial_y, \ \ \hat{X} = x\partial_y, \ \ \hat{Y} = y\partial_x$$

Sus conmutadores son:

$$
\begin{aligned}
[\hat{H},\hat{X}] &= [x\partial_x, x\partial_y] - [y\partial_y, x\partial_y] = x[\partial_x(x\partial_y) - \partial_y(x\partial_x)] - y\partial_y(x\partial_y) + x\partial_y(y\partial_y) = \\
&= x\partial_y + x^2\partial^2_{xy} - x^2\partial^2_{yx} - yx\partial^2_{yy} + x\partial_y + xy\partial^2_{yy} = 2x\partial_y = 2\hat{X} \\
[\hat{H},\hat{Y}] &= [x\partial_x, y\partial_x] - [y\partial_y, y\partial_x] = x\partial_x(y\partial_x) - y\partial_x(x\partial_x) - y\partial_y(y\partial_x) + y\partial_x(y\partial_y) = \\
&= xy\partial^2_{xx} - y\partial_x - yx\partial^2_{xx} - y\partial_x - y^2\partial^2_{yx} + y^2\partial^2_{xy} = -2y\partial_x = -2\hat{Y} \\
[\hat{X},\hat{Y}] &= [x\partial_y, y\partial_x] = x\partial_y(y\partial_x) - y\partial_x(x\partial_y) = x\partial_x + xy\partial^2_{yx} - y\partial_y - yx\partial^2_{xy} = \\
&= x\partial_x - y\partial_y = \hat{H}
\end{aligned}
$$

Estos operadores actúan de manera natural sobre el anillo de polinomios homogéneos de grado n en dos variables x e y, de manera que podemos definir una familia infinita de representaciones de $\mathfrak{sl}_2$.

Definición 3.2.1 *Sea $F_n[x,y]$ el anillo de polinomios con coeficientes en F, homogéneos de grado n, en dos variables x e y. Denotaremos $\sigma_n : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(F_n[x,y])$ a la siguiente representación:*

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(H)(x^i y^{n-i}) &= (2i-n)x^i y^{n-i} \\
\sigma_n(X)(x^i y^{n-i}) &= (n-i)x^{i+1} y^{n-i-1} \\
\sigma_n(Y)(x^i y^{n-i}) &= i x^{i-1} y^{n-i+1}
\end{aligned}
$$

donde $i = 0, \ldots, n$, y estamos tomando $x^{-1} = x^{n+1} = y^{-1} = y^{n+1} = 0$.

Notar además que las representaciones σ_n son irreducibles, puesto que no existe ningún subespacio vectorial propio invariante por la acción de $\mathfrak{sl}_2$. Concluimos este apartado caracterizando todas las representaciones de $\mathfrak{sl}_2$ como suma directa de las irreducibles σ_n.

Definición 3.2.2 *Sean $\rho_1 : L \to \mathfrak{gl}(V_1)$ y $\rho_2 : L \to \mathfrak{gl}(V_2)$. La suma directa es $\rho_1 \oplus \rho_2 : L \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$, dada por $(\rho_1 \oplus \rho_2)(v_1, v_2) = (\rho_1(v_1), \rho_2(v_2))$. Se dice que ρ_1 y ρ_2 son isomorfas si existe un isomorfismo $\phi : V_1 \to V_2$ tal que $\phi \circ \rho_1(x) = \rho_2(x) \circ \phi$ para todo $x \in L$.*

Teorema 3.2.3 *Sea V un espacio vectorial. Cualquier representación $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(V)$ es isomorfa a la suma directa de un número finito de representaciones de tipo σ_n.*

Demostración: Por inducción vamos a asumir que V es no trivial y que el resultado es cierto para espacios vectoriales de menor dimensión que V.

Sabemos que H es elemento de una subálgebra de Cartan, por lo que es semisimple, a partir de lo que se comprueba sin dificultad que $\rho(H)$ lo es también. Así, es diagonalizable y se puede descomponer V en los autoespacios V_λ^H asociados a los autovalores $\lambda \in \sigma(H)$ de $\rho(H)$. Esto es,

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(H)} V_\lambda^H$$

Las relaciones de conmutación de $\mathfrak{sl}_2$ nos dan las fórmulas:

$$\begin{aligned}\rho(X)V_\lambda^H &\subseteq V_{\lambda+2}^h\\ \rho(Y)V_\lambda^H &\subseteq V_{\lambda-2}^h\end{aligned}$$

El conjunto de autovalores $\sigma(H)$ es finito, por lo que existe un autovalor $\mu \in \sigma(H)$ tal que $\mu + 2 \notin \sigma(H)$, de forma que $\rho(X)V_\mu^H = 0$. A este autovalor se le llama peso máximo. A este espacio podemos aplicarle reiteradamente $\rho(Y)$ para descender en peso, y de nuevo por la finitud de $\sigma(H)$ en algún punto se debe cumplir $\rho(Y)^k V_\mu^H{=}0$, lo que supone $\rho(X)\rho(Y)^k V_\mu^H = 0$. Vamos a encontrar una fórmula en función de k para esta expresión. Sea $v \in V_\mu^H$, entonces:

$$\begin{aligned}\rho(X)\rho(Y)v &= \rho(Y)\rho(X)v + \rho(H)v = \mu v\\ \rho(X)\rho(Y)^2 v &= \mu\rho(Y)v + (\mu-2)\rho(Y)v = [\mu + (\mu-2)]\rho(Y)v\\ \rho(X)\rho(Y)^{k+1}v &= \sum_{m=0}^{k}(\mu-2m)\rho(Y)^k v\end{aligned}$$

como se comprueba fácilmente por inducción. Así, se tiene que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\sum_{m=0}^{n}(\mu-2m) = 0$. Esto es, $(n+1)\mu = 2\sum_{m=0}^{n} m = n(n+1)$ y $\mu = n \in \mathbb{N}$.

Definamos así $W = \bigoplus_{m=0}^{n} \rho(Y)^m V_n^H$. Es claro que la acción de $\mathfrak{sl}_2$ lo mantiene invariante. También podemos definir $U = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(H)} U_\lambda^H$, con U_λ^H el subespacio de V_λ^H formado por los elementos que nunca son elevados a V_n^H, esto es:

$$U_\lambda^H = \left\{v \in V_\lambda^H \mid \rho(X)^k v \notin V_n^H \setminus \{0\}\ \forall k \in \mathbb{N}\right\}$$

Por definición, U es también invariante bajo $\mathfrak{sl}_2$, pero además $W \cap U = 0$ y $W \cup U = V$. Esto supone que la representación ρ se exprese como suma directa de ρ_U y ρ_W, correctamente restringidas a los espacios vectoriales U y W respectivamente. De esta forma, hemos terminado salvo si $W = V$, caso en el que se puede descomponer V_n^H en subespacios de dimensión 1 y aplicar los argumentos a cada uno de ellos, por lo que solo es necesario estudiar el caso en el que V_n^H es unidimensional. Pero entonces V es isomorfo a $F_n[x, y]$ y sin más que tomando un elemento de V_n^H e identificándolo con x^n se deduce que ρ es isomorfa a σ_n. □

3.3. Sistemas de raíces.

Hasta ahora hemos trabajado con un cuerpo F algebraicamente cerrado de característica 0 arbitrario. Todo lo que sigue a continuación es aplicable a este caso, pero a partir de ahora vamos a restringirnos a $\mathbb{C}$ para no oscurecer la exposición con detalles técnicos en los que restringimos escalares al cuerpo primo $\mathbb{Q}$ para luego extenderlos de nuevo a $\mathbb{C}$. Así, los espacios vectoriales y álgebras de Lie se considerarán sobre $\mathbb{C}$.

En esta sección vamos a dar la definición geométrica de sistema de raíces y a probar que el conjunto de raíces asociada a una subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie semisimple es, como su nombre parece indicar, un sistema de raíces. Esto nos permitirá clasificar álgebras de Lie a partir de la geometría de sus sistemas de raíces.

Definición 3.3.1 ***Espacio euclídeo.*** *Un espacio euclídeo E es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ dotado de un producto interno $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, esto es, una forma bilineal simétrica y definida positiva.*

Definición 3.3.2 ***Sistema de raíces.*** *Sea E un espacio euclídeo con producto interno denotado por $(\cdot,\cdot)$. Un sistema de raíces Φ en E es un subconjunto finito suyo, cuyos elementos se denominan raíces, que satisface:*

(1) $0 \notin \Phi$.

(2) Si $\alpha \in \Phi$, entonces Φ es simétrico con respecto al hiperplano ortogonal a α. En particular, $-\alpha \in \Phi$.

(3) Si $\alpha \in \Phi$, entonces sus únicos múltiplos en Φ son α y $-\alpha$.

(4) Si $\alpha, \beta \in \Phi$, entonces $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

(5) Φ es un sistema generador de E.

Además, decimos que Φ es irreducible si no existen U y V subespacios propios de E tales que $(U, V) = 0$ y $\Phi \subset U \cup V$. Diremos que dos sistemas de raíces son *equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales que respeta el producto interno y se restringe a una biyección entre ellos.*

Teorema 3.3.3 *Sea L un álgebra de Lie semisimple, H una subálgebra de Cartan y Φ el conjunto de raíces de H en L. Entonces Φ es un sistema de raíces de H^*, considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con el producto interno dado por el dual a la forma de Killing K. Si además L es simple, entonces Φ es irreducible.*

Demostración: El 0 no está en Φ por definición. (1)

Por la identidad de Jacobi se verifica que $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$, de manera que $K(L_\alpha, L_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$. Así, por la no degeneración de K, si L_α es no trivial, también lo es $L_{-\alpha}$, y por tanto si $\alpha \in \Phi$, también $-\alpha \in \Phi$.

Si Φ no generara H^*, entonces existiría un $x \in H$ no nulo tal que $\Phi(x) = 0$. Esto supone que $\mathrm{ad}_x L_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \Phi$, y por la descomposición de Cartan, al ser H abeliana, se tiene que $x \in Z(L)$, lo cual contradice la semisimplicidad. (5)

Por ser K dual al producto interno y no degenerada en H, se tiene que para cada $\alpha \in \Phi$ existe $t_\alpha \in H$ tal que $K(t_\alpha, x) = \alpha(x)\ \forall x \in H$. Usando esto y tomando $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ y $z \in L_0$ tenemos:

$$K([x,y],z) = K(y,[z,x]) = K(y,\alpha(z)x) = \alpha(K(x,y)z) = K(K(x,y)t_\alpha, z)$$

concluyendo que $[x,y] = K(x,y)t_\alpha$ para $x \in L_\alpha$ y $y \in L_{-\alpha}$.

Por ser K no degenerada en L, existen $X_\alpha \in L_\alpha$ y $Y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tal que $K(X_\alpha, Y_\alpha) \neq 0$. Supongamos que $\alpha(t_\alpha) = 0$. Entonces

$$[[X_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] = K(X_\alpha, Y_\alpha)[t_\alpha, X_\alpha] = K(X_\alpha, Y_\alpha)\alpha(t_\alpha)X_\alpha = 0$$

y $[X_\alpha, Y_\alpha]$ conmuta con X_α. Análogamente conmuta con Y_α. Así, $\{\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{Y_\alpha}\}$ generan una subálgebra resoluble, y por el Teorema de Lie se pueden escribir como matrices triangulares superiores, de manera que $\mathrm{ad}_{[X_\alpha, Y_\alpha]}$ es triangular superior estricta, lo que hace a t_α ad-nilpotente. Sin embargo, sabemos que por ser H Cartan en L semisimple, t_α es semisimple, lo que contradice que t_α sea no nulo. Así, $\alpha(t_\alpha)$ es no nulo.

Reescalando X_α y Y_α como sea necesario hacemos que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)} t_\alpha$. De esta forma tenemos $\alpha(H_\alpha) = 2$ y $\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$ genera una subálgebra $\mathfrak{sl}_2$. Notar que la representación adjunta actuando sobre los espacios L_λ eleva y desciende en α al actuar con X y con Y respectivamente, mientras que en el apartado anterior cuando estudiábamos en abstracto las representaciones de $\mathfrak{sl}_2$ se elevaba y descendía en 2. Por tanto, para hacer coherente la descripción, aquí el espacio de peso n será $V_{n\alpha/2}$.

Así, podemos definir una representación $\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}\left(\cup_{n\in S_\alpha} L_{n\alpha/2}\right)$, siendo

$$S_\alpha = \{n \in \mathbb{R} \mid n\alpha/2 \in \Phi \cup \{0\}\}$$

y donde la acción es la dada por la adjunta. De la clasificación de representaciones de $\mathfrak{sl}_2$ concluimos automáticamente que $S_\alpha \subseteq \mathbb{Z}$. Además, podemos dividir el espacio de peso máximo en subespacios unidimensionales y aplicando $\rho(Y_\alpha)$ reiteradamente generar espacios disjuntos sobre los que $\mathfrak{sl}_2$ actúa con una de las representaciones irreducibles σ_n. Cualquier σ_n, con n par tendrá un elemento en L_α y al actuar sobre él con $\sigma_n(Y_\alpha)$ obtenemos que su elemento en L_0 es múltiplo de H_α. Por tanto, por ser los espacios disjuntos solo puede haber una representación con n par, y esta es σ_2, pues el subespacio generado por $\{H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha\}$ es obviamente invariante bajo $\mathfrak{sl}_2$.

De esta forma, los únicos múltiplos pares de $\alpha/2$ en Φ son α y $-\alpha$. Es más, los múltiplos impares también quedan descartados, pues en caso de que hubiera alguno, descendiendo o elevando, $\alpha/2$ estaría en Φ, lo cual es imposible, pues repitiendo los argumentos anteriores partiendo de la raíz $\alpha/2$ en lugar de α concluiríamos que los únicos múltiplos pares de $\alpha/4$ en Φ son $\alpha/2$ y $-\alpha/2$, descartando α, que está en Φ por definición. Así, los únicos múltiplos de α en Φ son α y $-\alpha$. (3)

Sea ahora $\gamma \in \Phi$ ortogonal a α, esto es $(\alpha, \gamma) = 0$. Se puede construir una representación análoga a la anterior, esta vez actuando sobre $\cup_{n\in S_{\alpha,\gamma}} L_{\gamma+n\alpha/2}$, siendo

$$S_{\alpha,\gamma} = \{n \in \mathbb{R} \mid \gamma + n\alpha/2 \in \Phi \cup \{0\}\}$$

De nuevo de la clasificación de representaciones de $\mathfrak{sl}_2$ concluimos que

$$S_{\alpha,\gamma} = \{m - 2k \mid k = 0, 1, \ldots, m\}$$

para algún natural $m \in \mathbb{N}$. Así, en Φ solo están las sumas de la forma $\gamma + (m-2k)\alpha/2$, con $k = 0, 1, \ldots, m$, de donde inmediatamente se concluye que Φ es simétrico respecto al hiperplano ortogonal a α. (2)

Solo falta notar que de lo anterior se deduce que cualquier raíz $\beta \in \Phi$ se puede escribir en la forma $\beta = \gamma + (m-2k)\alpha/2$, con k entero para algún $\gamma \in \Phi$ ortogonal a α. Así, se obtiene (4):

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = (m-2k) \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, supongamos que Φ no es irreducible, de forma que existen U y V subespacios propios ortogonales de H^* recubriendo Φ. Podemos identificar V con un subespacio propio $\tilde{V}$ de H a partir del isomorfismo entre H y H^* dado por el producto interno, de manera que el espacio

$$\tilde{V} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cap V} L_\alpha$$

es un ideal propio, puesto que hay elementos en $\tilde{U}$ que no están en él y se tienen las relaciones $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$ y $[x,y] = K(x,y)t_\alpha$ para raíces α y β y elementos $x \in L_\alpha$ y $y \in L_{-\alpha}$ (notar que $\alpha \in V$ se corresponde vía isomorfismo con t_α). Así, L no es simple.

□

De la demostración anterior nos interesa remarcar como definición el concepto de coraíz.

Definición 3.3.4 *Sea L un álgebra de Lie semisimple, H una subálgebra de Cartan, $\alpha \in \Phi$ una raíz de H en L y K la forma de Killing. Definimos la coraíz $H_\alpha \in H$ como el elemento:*

$$H_\alpha = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)} t_\alpha$$

siendo t_α el elemento de H que satisface $K(t_\alpha, x) = \alpha(x)\ \forall x \in H$.

3.4. Clasificación de los sistemas de raíces

En la sección anterior comentábamos que trabajaríamos en $\mathbb{C}$, y sin embargo, las definiciones introducidas establecen los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Esto se resuelve sin dificultad notando que, dado que Φ es un sistema de raíces, existe un subconjunto suyo que es base de $\mathbb{C}^n$, cuyos productos internos son todos reales. Esto supone que Φ esté contenido en el $\mathbb{R}$-span de dicha base, y por tanto sin pérdida de generalidad podemos trabajar con sistemas de raíces en $\mathbb{R}$.

En primer lugar vamos a ver que la propiedad (4) de los sistemas de raíces restringe mucho los ángulos que pueden formar las raíces entre ellas.

Lema 3.4.1 *Sea Φ un sistema de raíces y $\alpha, \beta \in \Phi$. Denotemos por $\theta_{\alpha,\beta}$ el ángulo que forman y por d_α y d_β sus longitudes, respectivamente. Entonces se da uno de los siguientes casos:*

- *α y β son ortogonales ($\theta_{\alpha,\beta} = \pi/2$).*
- *$d_\alpha = d_\beta$ y $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/3, 2\pi/3$.*
- *$d_\alpha = \sqrt{2}d_\beta$ y $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/4, 3\pi/4$.*
- *$d_\alpha = \sqrt{3}d_\beta$ y $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/6, 5\pi/6$.*
- *$\beta = \pm\alpha$ ($\theta_{\alpha,\beta} = 0, \pi$).*

Demostración: Notar que por la propiedad (4) se tiene

$$4\cos^2\theta_{\alpha,\beta} = 4\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\frac{(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$$

y por tanto $\cos^2\theta_{\alpha,\beta} \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$, lo cual nos lleva a que los ángulos listados arriba son las únicas posibilidades. En el caso ortogonal no hay nada más que probar, y en el caso paralelo se concluye automáticamente que $\beta = \pm\alpha$, pues estas son las únicas raíces paralelas a α.

Falta comprobar la relación entre las longitudes, pero esto es sencillo, pues $k = 4cos^2\theta_{\alpha,\beta} = mn$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, de manera que si $k = 1, 2, 3$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m = 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = \pm 1$. Así,

$$k = 4\cos^2\theta_{\alpha,\beta} = \left(2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\right)^2 \frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)} = m^2 d_\alpha^2/d_\beta^2 \implies d_\alpha = \sqrt{k}d_\beta$$

□

Corolario 3.4.2 *Sea Φ un sistema de raíces y $\alpha, \beta \in \Phi$. Entonces si $\theta_{\alpha,\beta} \in (0, \pi/2)$, se tiene que $\alpha - \beta \in \Phi$. Equivalentemente, si $\alpha - \beta \notin \Phi$, entonces $\theta_{\alpha,\beta} \in (\pi/2, \pi)$.*

Demostración: Analicemos el caso $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/3$, los otros dos casos se justifican con argumentos geométricos análogos.

Si $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/3$, entonces la longitud de α y de β es la misma, de forma que junto con $\alpha - \beta$ forman un triangulo equilátero. Así, notamos que $\alpha - \beta$ es la imagen simétrica de β con respecto a la reflexión respecto al hiperplano ortogonal a α, que por (2) está en Φ. □

3.4.1. Raíces simples

Podemos aprovechar estas propiedades de los sistemas de raíces para clasificarlos, lo cual haremos reduciéndolos a las raíces simples, que veremos más adelante que determinan unívocamente el sistema.

Definición 3.4.3 ***Elemento regular***. *Se dice que un elemento $h \in \mathbb{R}$ es regular con respecto a un sistema de raíces Φ si no es ortogonal a ninguna de las raíces.*

Podemos utilizar alguno de estos elementos, que claramente existen, para separar Φ en la parte que apunta en el sentido de h y la parte que no.

Definición 3.4.4 ***Raíz simple***. *Sea Φ un sistema de raíces y h un elemento regular. Se llaman raíces positivas a los elementos de $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, h) > 0\}$, y raíces negativas a las de $\Phi^- = \Phi \setminus \Phi^+$. Los raíces positivas que no se escriben como suma de otras dos raíces positivas se dicen simples.*

Utilizando el corolario anterior es claro que las raíces simples de un sistema de raíces solo pueden formar ángulos que midan $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ o $5\pi/6$. Además, es fácil ver que son linealmente independientes.

Proposición 3.4.5 *Las raíces simples asociadas a un elemento regular de un sistema de raíces son linealmente independientes.*

Demostración: Si las raíces simples $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ formaran un sistema linealmente dependiente, entonces se tendría

$$\sum_{i \in A} a_i \alpha_i = \sum_{i \in B} b_i \alpha_i$$

para algunos coeficientes c_i y d_i positivos y algunos subconjuntos $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ disjuntos.

Como los ángulos entre todas las raíces simples son obtusos se cumple que

$$0 \leq (\sum_{i \in A} a_i \alpha_i, \sum_{i \in B} b_i \alpha_i) \leq 0$$

de forma que $\sum_{i \in A} a_i \alpha_i = 0$, lo cual no es posible al ser todos los coeficientes positivos y las raíces simples estar todas en un semiespacio positivo. $\square$

Supongamos a partir de ahora que el álgebra de Lie es simple, y por tanto, el sistema de raíces irreducible. En este caso, podemos descartar que las raíces simples se dividan en dos subconjuntos ortogonales, pues en ese caso se podría extender la división a todo el sistema de raíces, contradiciendo la irreducibilidad.

Nota 3.4.6 *Las raíces simples de un sistema de raíces no pueden agruparse en subconjuntos ortogonales no vacíos.*

Antes de continuar estudiando las raíces simples vamos a abstraer sus propiedades en el concepto de configuración admisible, para así poder realizar el estudio posterior de manera más simple.

Definición 3.4.7 *Una configuración admisible en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores unitarios $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ cumpliendo:*

- *Con respecto a un elemento $h \in \mathbb{R}^n$, todos cumplen $(\alpha_i, h) > 0$.*
- *Los ángulos entre los vectores son $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ o $5\pi/6$.*

Diremos que la configuración es irreducible si no se puede descomponer en dos subconjuntos ortogonales.

Nota 3.4.8 *El conjunto de vectores unitarios en la dirección de las raíces simples forma una configuración admisible. Además, esta es irreducible si el sistema de raíces del que provienen las raíces simples lo es.*

Nota 3.4.9 *La demostración de la independecia lineal de las raíces simples aplica de igual manera a las configuraciones admisibles, por lo que simpre son conjuntos de vectores libres.*

3.4.2. Grafos de Coxeter

Vamos a definir el grafo de Coxeter asociado a una configuración admisible, el cual contiene de una manera simplificada y tratable toda la información de la configuración. Más tarde lo mejoraremos ligeramente al diagrama de Dynkin, que contiene toda la información de las raíces simples de un sistema de raíces.

Definición 3.4.10 ***Grafo de Coxeter***. *El grafo de Coxeter asociado a una configuración admisible irreducible $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es el grafo de vértices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, con los vértices α_i y α_j conectados por una arista de multiplicidad $4\cos^2\theta_{\alpha_i,\alpha_j}$.*

Nota 3.4.11 *Las raíces simples ortogonales entre sí no están conectadas por ninguna arista. En concreto, la irreducibilidad del sistema de raíces equivale a la conexión del grafo de Coxeter asociado.*

Vamos ahora a probar unos lemas que limitan la forma que puede tener el grafo de Coxeter.

Lema 3.4.12 *El grafo de Coxeter es acíclico, es decir, es un árbol.*

Demostración: Supongamos que existe un ciclo de vértices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Denotemos $\alpha_{n+1} = \alpha_1$. Al estar los vértices α_i y α_{i+1} conectados sabemos que forman un ángulo mayor o igual que $2\pi/3$, de forma que $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \leq 1/2$. Cualquier otro producto interno entre vectores distintos es no positivo, por ser los ángulos entre los vectores obtusos. Además, los vectores están por definición normalizados a 1. De esta forma se obtiene que

$$0 \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} [(\alpha_i, \alpha_i) + 2(\alpha_i, \alpha_{i+1})] \leq 0$$

Esto contradice la independencia lineal de la configuración admisible. $\square$

Lema 3.4.13 *Los vértices del grafo de Coxeter tienen grado de incidencia menor o igual que 3.*

Demostración: Sea α_0 un vértice conectado a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Los ángulos entre los vectores son tales que la multiplicidad de la arista conectando α_0 con α_i viene dada por la sencilla fórmula $m_i = 4(\alpha_0, \alpha_i)^2 \geq 1$. Además, la desigualdad de Bessel, junto con la independencia lineal de los vectores, nos garantiza que

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_0, \alpha_i)^2 < ||\alpha_0||^2 = 1$$

De esta forma obtenemos que el grado de incidencia de α_0 es $\sum_{i=1}^{n} m_i < 4$. $\square$

Lema 3.4.14 *Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una configuración admisible con α_i y α_j conectados por una única arista, entonces el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\alpha_i + \alpha_j\} \setminus \{\alpha_i, \alpha_j\}$ también lo es. Además, el grafo de Coxeter de esta segunda configuración se obtiene fusionando los vértices α_i y α_j en uno solo.*

Demostración: Denotemos por α_1 y α_2 a los vértices conectados por una única arista que vamos a fusionar. Para ver que la configuración sigue siendo admisible lo único que tenemos que comprobar es que $\alpha_1+\alpha_2$ es unitario y que el ángulo que forma con el resto de vértices sigue siendo válido. Lo primero se cumple puesto que su norma al cuadrado vale $1+1+2(-1/2)$, al ser α_1 y α_2 unitarios y formar un ángulo de $2\pi/3$. Lo segundo se cumple dado que

$$\cos\theta_{\alpha_1+\alpha_2,\beta} = (\alpha_1+\alpha_2,\beta) = \cos\theta_{\alpha_1,\beta} + \cos\theta_{\alpha_2,\beta}$$

, sin más que tener en cuenta que uno de los dos cosenos del lado izquierdo tiene que ser nulo, pues en otro caso se tendría un ciclo. □

Todos estos resultados reducen los posibles grafos de Coxeter a una lista muy reducida. Recomendamos echar un vistazo a la Figura 3.1, en la que se presenta gráficamente la clasificación con la que concluimos este apartado, para así tener una visión intuitiva de lo que sigue.

Corolario 3.4.15 *El grafo de Coxeter tiene que ser de alguno de los siguientes tipos:*

- A_n*: Una única cadena de n vértices con aristas simples.*
- BCF_n*: Una única cadena de n vértices con una arista doble y el resto simples.*
- DE_n*: n vértices en total con un único vértice con grado de incidencia tres y todas las aristas simples.*
- G_2*: Dos vértices unidos por una arista triple.*

Demostración: Partimos de que el grafo de Coxeter es conexo. Supongamos que hay una arista triple. Esto implica que los dos vértices que conecta tienen grado de incidencia 3, y por lo tanto no pueden conectarse con ningún otro. Así, el grafo es G_2.

Supongamos ahora que hay una arista doble conectando dos vértices. Por la limitación en el grado de incidencia, estos dos vértices solo pueden estar conectados a otros por una arista simple. Además, la posibilidad de fusionar vértices conectados por aristas simples descarta la posibilidad de que exista otra arista doble o un vértice con grado de incidencia 3, pues eliminando todas las aristas simples intermedias se llegaría a un vértice con grado de incidencia 4. Así, el grafo es BCF_n.

Supongamos que hay un vértice triple, entonces por los mismos argumentos, no puede haber otro o una arista doble, de forma que el grafo es DE_n.

Finalmente, si no se da ninguno de los casos anteriores solo queda una cadena de aristas simples, y el grafo es A_n. □

Para terminar solo tenemos que descartar algunos casos que no son posibles manualmente.

Proposición 3.4.16 *El grafo de Coxeter no puede contener ninguno de los subgrafos siguientes:*

(1) Una cadena de cuatro aristas con una arista interior doble.

(2) Un vértice con grado de incidencia 3 del que salen cadenas de longitud 2, 2 y 2.

(3) Un vértice con grado de incidencia 3 del que salen cadenas de longitud 1, 2 y 5.

(4) Un vértice con grado de incidencia 3 del que salen cadenas de longitud 1, 3 y 3.

Demostración: Los subgrafos se descartarán por no ser los vectores subyacentes linealmente independientes. En el caso (1) esto se comprobará directamente utilizando la arista doble como separación. En los casos (2), (3) y (4) se elegirán vectores cautelosamente para que se sature la desigualdad de Bessel asociada al vértice con grado de incidencia 3.

(1) Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ una configuración admisible de vectores ordenada de manera que forman una cadena conectada por aristas simples, salvo entre α_2 y α_3 que es doble. Definamos $u = \alpha_1 + 2\alpha_2$ y $v = 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5$. De esta forma obtenemos $(u, u) = 1 + 4 + 2(2)(-1/2) = 3$, $(v, v) = 9 + 4 + 1 + 2(6 + 6)(-1/2) = 6$ y $(u, v) = 6(-1/\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$. Obtenemos así que $\cos\theta_{u,v} = -1$, contradiciendo la independencia lineal de la configuración admisible.

(2) Sean (α_1, α_2, x), (β_1, β_2, x) y (γ_1, γ_2, x) tres cadenas conectadas por aristas simples que se unen en el vértice x con grado de incidencia 3. Definiendo $u = (\alpha_1 + 2\alpha_2)/\sqrt{3}$, $v = (\beta_1 + 2\beta_2)/\sqrt{3}$ y $w = (\gamma_1 + 2\gamma_2)/\sqrt{3}$, se cumple que los tres vectores son unitarios y que el producto interno de cada uno de ellos con x vale $-1/\sqrt{3}$. Por tanto se satura la desigualdad de Bessel, contradiciendo la independencia lineal de la configuración admisible.

(3) Sean (α_1, x), (β_1, β_2, x) y $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, x)$ tres cadenas conectadas por aristas simples que se unen en el vértice x con grado de incidencia 3. Se comprueba que $u = \alpha_1$, $v = (\beta_1 + 2\beta_2)/\sqrt{3}$ y $w = (\gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\gamma_3 + 4\gamma_4 + 5\gamma_5)/\sqrt{15}$ son unitarios y saturan la desigualdad de Bessel de x, contradiciendo la independencia lineal de la configuración admisible.

(4) Sean (α_1, x), $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, x)$ y $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, x)$ tres cadenas conectadas por aristas simples que se unen en el vértice x con grado de incidencia 3. Se comprueba que $u = \alpha_1$, $v = (\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3)/\sqrt{6}$ y $w = (\gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\gamma_3)/\sqrt{6}$ son unitarios y saturan la desigualdad de Bessel de x, contradiciendo la independencia lineal de la configuración admisible.

$\square$

Gracias a estas nuevas limitaciones podemos mejorar el corolario anterior, obteniendo finalmente la siguiente clasificación de grafos de Coxeter.

Corolario 3.4.17 *El grafo de Coxeter es alguno de los siguientes:*

- A_n: *Una única cadena de* $n \geq 1$ *vértices con aristas simples.*
- BC_n: *Una única cadena de* $n \geq 2$ *vértices con una arista doble en un extremo y el resto simples.*
- D_n: *Un único vértice con grado de incidencia tres del que salen cadenas de aristas simples con longitudes 1, 1 y* $n-3$, *para* $n \geq 4$.
- E_n: *Un único vértice con grado de incidencia tres del que salen cadenas de aristas simples con longitudes 1, 2 y* $n-4$, *para* $n = 6, 7, 8$.
- F_4: *Una cadena de cuatro vértices, con la arista interior doble y las de los extremos simples.*
- G_2: *Dos vértices unidos por una arista triple.*

Demostración: Las limitaciones inferiores hechas en el natural n solo evitan que se repita el mismo grafo con distintos nombres, como se puede comprobar sin dificultad. Los casos A_n y G_2 no sufren cambios.

El caso BCF_n contiene una arista doble, por lo que se ve afectado por (1). Así, lo dividimos en dos casos: si la arista doble está en un extremos tenemos el caso BC_n;

si la arista doble está en el interior la cadena tiene que tener obligatoriamente cuatro vértices, por lo que obtenemos F_4.

El caso DE_n contiene un vértice con grado de incidencia 3, por lo que se ve afectado por (2), (3) y (4). En primer lugar, (2) obliga a que una de las cadenas tenga longitud 1. Si la siguiente más pequeña también tiene longitud 1, entonces estamos en el caso D_n; si en su lugar tiene longitud 2, entonces estamos en el caso E_n, donde n no puede ser mayor que 8 por (3); no puede tener longitud mayor que 2 por (4). $\square$

3.4.3. Diagramas de Dynkin

Para terminar nos falta añadir una pieza de información que el grafo de Coxeter no recoge. Vimos con anterioridad que las aristas dobles y triples se corresponden con vectores que no miden lo mismo. Por tanto hay una asimetría entre ellos que el grafo de Coxeter no recoge. Es por ello que introducimos el diagrama de Dynkin, que añade a las aristas dobles y triples del grafo de Coxeter una flecha que apunta desde la raíz larga a la corta.

Definición 3.4.18 ***Diagrama de Dynkin***. *El diagrama de Dynkin asociado a las raíces simples de un sistema de raíces es el grafo dirigido obtenido al tomar el grafo de Coxeter asociado a dichas raíces simples y añadirle a sus aristas dobles y triples una flecha que apunta desde la raíz con mayor longitud a la raíz con menor longitud.*

Los diagramas de Dynkin están totalmente clasificados por todo el trabajo anterior, como recogemos en el siguiente teorema. La Figura 3.1 ilustra todos los posibles diagramas de Dynkin.

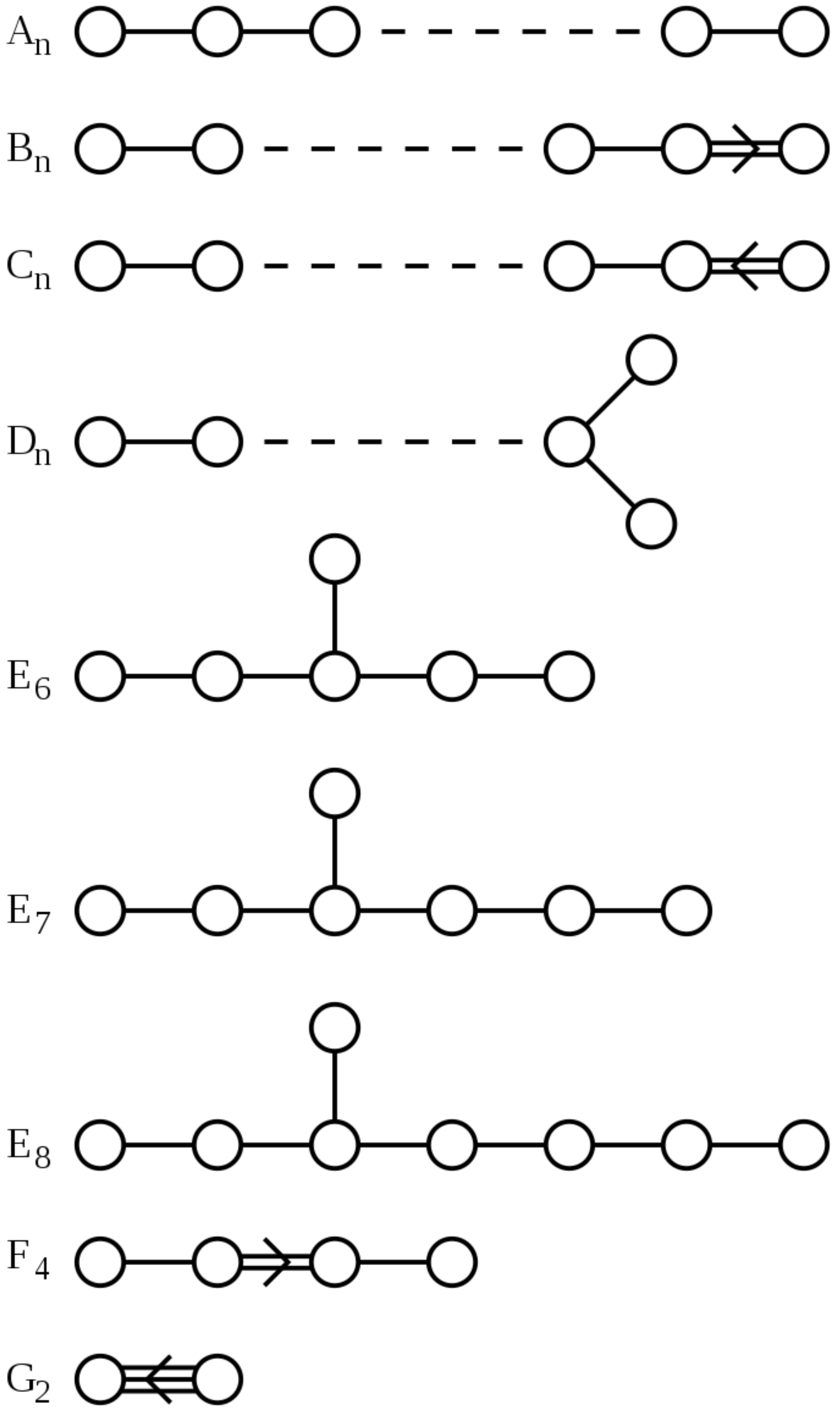

Figura 3.1: Clasificación de diagramas de Dynkin. [8]

Teorema 3.4.19 *El diagrama de Dynkin es alguno de los siguientes:*

- A_n*: Una única cadena de* $n \geq 1$ *vértices con aristas simples.*
- B_n*: Una única cadena de* $n \geq 2$ *vértices con una arista doble en un extremo, con su flecha apuntando hacia el exterior, y el resto simples.*
- C_n*: Una única cadena de* $n \geq 3$ *vértices con una arista doble en un extremo, con su flecha apuntando hacia el resto de la cadena, y el resto simples.*
- D_n*: Un único vértice con grado de incidencia tres del que salen cadenas de aristas simples con longitudes 1, 1 y* $n-3$*, para* $n \geq 4$.
- E_n*: Un único vértice con grado de incidencia tres del que salen cadenas de aristas simples con longitudes 1, 2 y* $n-4$*, para* $n = 6, 7, 8$.
- F_4*: Una cadena de cuatro vértices, con la arista interior doble y las de los extremos simples.*
- G_2*: 2 vértices unidos por una arista triple.*

Demostración: En los casos F_4 y G_2 la orientación de la arista no es relevante por la simetría presente en el grafo. El caso BC_n naturalmente se divide en dos en función de la dirección que tome la arista doble. La limitación en el valor $n = 2$ en C_n se debe a que B_2 y C_2 son el mismo grafo. De nuevo, no es importante en que extremo se coloca la arista doble, pues el grafo es el mismo. Notar que si el diagrama es el mismo las raíces simples de las que provienen tienen las mismas relaciones entre ellas. $\square$

3.5. Unicidad e isomorfía

En esta sección vamos a elevar la clasificación de los diagramas de Dynkin del apartado anterior a una clasificación de álgebras de Lie simples.

En primer lugar vamos a ver que el diagrama de Dynkin asociado a las raíces simples no depende del elemento regular que se escoja, y por tanto está unívocamente determinado por el sistema de raíces. Para ello vamos a introducir el grupo de Weyl.

Definición 3.5.1 ***Reflexiones***. *Sea* Φ *un sistema de raíces. Definimos la reflexión con respecto a una raíz* $\alpha \in \Phi$ *como el automorfismo* $s_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, enviando cada raíz a su imagen simétrica con respecto al hiperplano ortogonal a* α.

Definición 3.5.2 ***Grupo de Weyl***. *Sea Φ un sistema de raíces, definimos su grupo de Weyl W como el grupo generado por todas las reflexiones s_α, con $\alpha \in \Phi$.*

Nota 3.5.3 *Es sencillo comprobar que el grupo de Weyl es efectivamente un grupo, y además, actúa fielmente sobre el conjunto finito Φ, por lo que es finito.*

Proposición 3.5.4 *Diferentes elecciones de elemento regular para un mismo sistema de raíces llevan al mismo diagrama de Dynkin.*

Demostración: La prueba consiste en ver que, dado un elemento h regular con respecto a un sistema de raíces Φ y cualquier raíz $\alpha \in \Phi$, existe un elemento del grupo de Weyl que lleva α a una raíz simple con respecto a h. De esta forma, por estar formado el grupo de Weyl por automorfismos que preservan el sistema de raíces y los productos internos, independientemente de la elección de elemento regular siempre se conseguirá el mismo diagrama de Dynkin.

Tomemos así un h regular, y sea α una raíz simple. Entonces $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ y, dada β otra raíz simple, $s_\alpha(\beta) = \beta + m\alpha$ para algún $m > 0$. De esta forma, s_α mapea las raíces positivas en raíces positivas (salvo α), y como es una involución se tiene

$$s_\alpha(\Phi^+) = \Phi^+ \cup \{-\alpha\} \setminus \{\alpha\}$$

Así, si definimos el elemento

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$$

se cumple que $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$. Definamos también $W_h \subseteq W$ como el subgrupo generado por las raíces simples respecto a h y sea h' otro elemento regular. Tomemos el elemento $w \in W_h$ que maximice el producto interno $(w(h'), \rho)$. De esta forma, conseguimos que el ángulo entre $w(h')$ y α sea agudo, dado que se tiene la condición $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ y Φ es base de $\mathbb{R}^n$. Notando que cualquier raíz es simple con respecto a algún elemento regular, simplemente tomándolo lo suficientemente ortogonal, la condición de ángulo agudo anterior permite convertir cualquier raíz en raíz simple con respecto a h a través de un elemento de W_h. $\square$

Damos también un sencillo corolario que caracteriza el grupo de Weyl a partir de las raíces simples.

Corolario 3.5.5 *El grupo de Weyl está generado por un conjunto cualquiera de raíces simples del sistema de raíces.*

Demostración: Sea β una raíz y h un elemento regular. Sabemos que existe $w \in W_h$ tal que $\alpha = w(\beta)$ es raíz simple con respecto a h. Por tanto, $s_\beta = s_\omega s_\alpha s_\omega \in W_h$. Así, $W = W_h$. □

El siguiente paso consiste en justificar que el sistema de raíces asociado a un álgebra de Lie simple no depende de la subálgebra de Cartan que se elija. Así, el diagrama de Dynkin está unívocamente determinado por el álgebra de Lie.

Proposición 3.5.6 *El sistema de raíces asociado a un álgebra de Lie simple es único salvo equivalencia.*

Demostración: Sabemos que las subálgebras de Cartan del álgebra de Lie son conjugadas entre sí por automorfismos internos. Por lo tanto son isomorfos entre sí, y la construcción del sistema de raíces y así su grafo de Coxeter y diagrama de Dynkin son independientes de la elección de Cartan. □

En la dirección contraria basta con garantizar que dos álgebras de Lie que tengan el mismo diagrama de Dynkin son isomorfas. Para ello vamos a aprovechar el Teorema de la gráfica cerrada en la categoría de álgebras de Lie, que enunciamos sin demostración por ser el resultado el análogo del conocido en espacios vectoriales o grupos.

Lema 3.5.7 ***Teorema de la gráfica cerrada***. *Sean L y G álgebras de Lie. Entonces $\phi : L \to G$ es homomorfismo de álgebras de Lie si y solo si la gráfica $\Sigma_\phi = \{(x, \phi(x)) \in L \times G \mid x \in L\}$ es subálgebra de $L \times G$.*

Proposición 3.5.8 *Dos álgebras de Lie simples que tengan asociado el mismo diagrama de Dynkin son isomorfas.*

Demostración: Sean L y L' dos álgebras de Lie simples. Tener asociado el mismo diagrama equivale a que sus sistemas de raíces sean equivalentes y por tanto, por la construcción de los mismos, que exista un isomorfismo de espacios vectoriales que respeta el producto interno entre H y H', subálgebras de Cartan de L y L', respectivamente. El objetivo es elevar este isomorfismo a uno de álgebras de Lie entre L y L'. Identificaremos H y H' vía isomorfismo, de manera que los consideraremos iguales.

Tomemos un elemento regular en $H = H'$ con respecto al que definir raíces simples. Para cada α raíz simple, tomamos $X_\alpha \in L_\alpha$ y $Y_\alpha \in L_{-\alpha}$ no nulos de forma que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$, con H_α la coraíz. Tomamos X'_α y Y'_α análogamente sustituyendo L por L'. Sea K la subálgebra de $L \oplus L'$ generada por todos los elementos $\tilde{X}_\alpha = (X_\alpha, X'_\alpha)$ y $\tilde{Y}_\alpha = (Y_\alpha, Y'_\alpha)$ asociados a raíces simples. Como el conjunto de todos los elementos X_α e Y_α generan L, la proyección de K en L es suprayectiva. Análogamente es suprayectiva la proyección de K en L'.

En lo que sigue vamos a justificar que K es una gráfica. Hecho esto, por el Teorema de la gráfica cerrada $K = \Sigma_\phi = \{(x, \phi(x) \mid x \in L\}$, con $\phi : L \to L'$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Por ser la proyección de K en L' suprayectiva, es claro que ϕ es epimorfismo. Además, dado que $[\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha] = \tilde{H}_\alpha = (H_\alpha, H'_\alpha)$, la restricción de ϕ a H es la identidad (vía el isomorfismo entre H y H'), por lo que la gráfica ha de ser inyectiva en su totalidad, dando un isomorfismo entre L y L'.

Veamos que K es gráfica. Tomemos una raíz β tal que $\alpha + \beta$ no es raíz para ninguna raíz positiva α. Tomemos J un subespacio unidimensional de $L_\beta \oplus L'_\beta$ tal que J no esté contenido en $L_\beta \oplus 0$ ó en $0 \oplus L'_\beta$. Sea G el subespacio de $L \oplus L'$ generado por L y la acción adjunta de todos los $\tilde{Y}_\alpha$. Entonces G contiene a L y no está contenido en $L_\beta \oplus 0$ ó en $0 \oplus L'_\beta$. Además, por actuar solo con operadores que descienden, L es la única parte de $L_\beta \oplus L'_\beta$ que está en G, y por lo tanto $G \neq L \oplus L'$.

G es cerrado bajo la acción de los $\tilde{Y}_\alpha$ por definición, pero es sencillo ver que también lo es bajo los $\tilde{X}_\alpha$. Esto se debe a que:

- $[\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\gamma] = 0$ cuando $\alpha \neq \gamma$, pues por ser raíces simples sabemos que $\alpha - \gamma$ no es raíz.
- $\mathrm{ad}_{\tilde{X}_\alpha} \mathrm{ad}_{\tilde{Y}_\alpha} = \mathrm{ad}_{[\tilde{X}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha]} = \mathrm{ad}_{\tilde{H}_\alpha}$, por lo que al actuar con $\tilde{X}_\alpha$ sobre elementos descendidos por $\tilde{Y}_\alpha$ se recupera un elemento del subespacio previo a aplicar $\tilde{Y}_\alpha$.
- $\mathrm{ad}_{\tilde{X}_\alpha} J = 0$, por la definición de β.

Así, se cumple que $[K, G] \subseteq G$, de manera que la proyección de G sobre L es un ideal, por lo que tiene que ser 0 o L, pero como G no está contenido en $0 \oplus L'$, obligatoriamente proyecta a L. Análogamente, la proyección de G sobre L' es L'. De la misma forma, también es un ideal de $L \oplus 0$ la intersección de G con $L \oplus 0$, por lo que tiene que ser trivial o $L \oplus 0$. En el segundo caso, que la proyección de G sobre L' sea L' supone que $G = L \oplus L'$, caso que ya habíamos descartado. Por tanto la intersección de G con $L \oplus 0$ es trivial, y análogamente también la intersección con $0 \oplus L'$. Con todo, G es una gráfica, la cual no puede ser ideal de $L \oplus L'$, por la simplicidad de los factores, con lo que $K \neq L \oplus L'$. Como K es una subálgebra propia de $L \oplus L'$, que proyecta totalmente en sus dos sumandos, razonando igual que antes se concluye que es una gráfica. $\square$

Con todo lo visto, la única duda que queda por responder es si hay algún diagrama de Dynkin que no se obtenga a partir de ningún álgebra de Lie. La respuesta a esta pregunta es negativa, y a pesar de que se puede justificar de manera general con un método de construcción del álgebra a partir del diagrama, preferimos omitir estos argumentos dado que los diagramas A_n, B_n, C_n y D_n se obtienen a partir de las álgebras clásicas ya presentadas, y para E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2 se conocen expresiones explícitas de las 5 álgebras de Lie simples llamadas excepcionales. Así, basta con computar el diagrama de Dynkin de cada una de ellas para comprobar la afirmación.

Proposición 3.5.9 *Dado cualquier diagrama de Dynkin, existe un álgebra de Lie simple con un diagrama de Dynkin asociado equivalente.*

Con todo lo visto tenemos suficiente para concluir que las clasificaciones están en correspondencia 1 a 1.

Corolario 3.5.10 *Las clases de isomorfía de álgebras de Lie simples se corresponden 1 a 1 con las clases de equivalencia de sistemas de raíces irreducibles.*

Demostración: Dado un álgebra de Lie simple, podemos elegir una subálgebra de Cartan (que siempre existe) y construir su sistema de raíces asociado de manera unívoca. El sistema de raíces obtenido es independiente de la elección de subálgebra de Cartan. Elegimos ahora un elemento regular con respecto al sistema de raíces (que de nuevo siempre existe) y calculamos sus raíces simples asociadas, que determinan unívocamente un diagrama de Dynkin, el cual es independiente de la elección de elemento regular. De esta forma cada álgebra de Lie simple tiene asociado un único diagrama de Dynkin.

Si dos álgebras de Lie tienen asociado el mismo diagrama, esto supone que tengan asociados sistemas de raíces equivalentes, lo que nos garantiza que son isomorfas.

Finalmente, el conocimiento explícito de las álgebras de Lie simple nos garantiza que todo diagrama de Dynkin es asociado a algún algebra de Lie simple. □

Así, concluimos el capítulo con el resultado central.

Teorema 3.5.11 ***Clasificación de álgebras de Lie simples.*** *Toda álgebra de Lie simple sobre un cuerpo de característica 0 algebraicamente cerrado es isomorfa a una de las siguientes (todas no isomorfas entre sí):*

- $A_n = \mathfrak{sl}_{n+1}$, *con* $n \geq 1$.
- $B_n = \mathfrak{so}_{2n+1}$, *con* $n \geq 2$.
- $C_n = \mathfrak{sp}_{2n}$, *con* $n \geq 3$.
- $D_n = \mathfrak{so}_{2n}$, *con* $n \geq 4$.
- *Las álgebras excepcionales* E_6, E_7, E_8, F_4 *y* G_2, *de las cuales se obtiene el diagrama de Dynkin con el mismo nombre.*

Nota 3.5.12 *Toda álgebra de Lie semisimple es suma directa de álgebras de Lie simples, por lo que la clasificación de las semisimples se obtiene a partir de la de las simples.*

Álgebras de Lie en característica positiva

En este capítulo se pretende dar una visión general del estudio de álgebras de Lie en característica positiva ($p > 0$ primo), manteniendo las hipótesis de dimensión finita y cuerpo algebraicamente cerrado. Se darán pinceladas de la clasificación de las álgebras simples, mostrando cómo obtener las análogas en característica p a las que ya se conocen en característica 0, y construyendo algunas que no tienen análogo en característica 0. También se introducirán algunos conceptos y técnicas esenciales en el estudio de estas álgebras.

Al contrario que los capítulos anteriores, este no pretende ser autocontenido ni dar la demostración de los resultados presentados. Debe tomarse como una introducción ligera de la que sacar las ideas esenciales del tema. Para una exposición completa, densa y exhaustiva nos referimos al libro *Simple Lie Algebras over Fields of Positive Characteristic* de H. Strade [7].

4.1. Comentarios y ejemplos

Al trabajar en característica positiva las propiedades que deben satisfacerse para ser álgebra de Lie son menos restrictivas, pues las identidades requeridas podrían no darse en característica 0, pero sí al reducir módulo p. Esto supone que puedan aparecer nuevas álgebras de Lie que no tienen un análogo en característica 0, y que algunas que sí lo tienen pasen a tener una subestructura más rica. Introducimos a continuación dos ejemplos sencillos de estas situaciones.

En primer lugar vamos a ver un álgebra de Lie que cumple la identidad de Jacobi debido a que la característica del cuerpo en el que se trabaja es positiva. Supondremos que $p > 3$ para obviar los casos en los que si existiría un análogo de característica 0.

Definición 4.1.1 ***Álgebra de Witt.*** *Sea F un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p > 3$. Dada una base $\{e_i\}_{i=-1}^{p-2}$ de F^p, se define el álgebra de Witt en característica p a partir del conmutador:*

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & si \ -1 \leq i+j \leq p-2 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Se puede comprobar que el álgebra de Witt es un álgebra de Lie simple. Sin embargo, la identidad de Jacobi se cumple por ser F de característica p. Calculemos los siguientes conmutadores para mostrarlo:

$$[e_1, [e_{p-2}, e_{-1}]] = (1-p)[e_1, e_{p-3}] = (1-p)(p-4)e_{p-2}$$
$$[e_{p-2}, [e_{-1}, e_1]] = 2[e_{p-2}, e_0] = 2(2-p)e_{p-2}$$
$$[e_{-1}, [e_1, e_{p-2}]] = 0$$

Entonces la identidad de Jacobi entre estos tres elementos se cumple solo si $(1-p)(p-4) + 2(2-p) = 0$. En característica p es claro que se da la igualdad. Sin embargo, en general se tendría que cumplir $p(3-p) = 0$. Así, cualquier álgebra de dimensión finita con una construcción análoga sobre un cuerpo de característica 0 no sería de Lie.

El segundo ejemplo muestra cómo un álgebra de Lie puede tener una subestructura más rica en característica positiva que su análoga de característica 0. Para ello vamos a considerar el ejemplo más sencillo.

Proposición 4.1.2 *El álgebra de Lie A_1 no es simple en característica $p = 2$.*

Demostración: A_1 se corresponde con $\mathfrak{sl}_2$, que sobre un cuerpo F de característica $p = 2$ podemos considerar como F^3 con base $\{e, f, h\}$ y conmutadores $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e = 0$ y $[h, f] = -2f = 0$. Así, es claro que Fh es un ideal de A_1, por lo que no es simple. □

Este pequeño ejemplo se convierte en un resultado mucho más general, que enunciamos sin demostración en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3 *El álgebra de Lie A_l no es simple en característica p para cualquier $l \equiv -1 \ (mod\ p)$.*

Comentaremos después cuando describamos las álgebras clásicas como esta es la única excepción y como puede solventarse.

4.2. Generalidades de la clasificación

Como hemos visto en la sección anterior, la característica positiva del cuerpo subyacente hace que emerja subestructura y álgebras totalmente nuevas. Por ello, la clasificación de las álgebras simples se divide en dos partes:

- Formalizar un mecanismo que construya las álgebras en característica positiva análogas a las simples ya conocidas en característica 0. A estas álgebras se las conoce como álgebras clásicas de Chevalley, a pesar de que se incluyen también las que en característica 0 se denominan como excepcionales. Hecho esto solo resta distinguir entre las que ganan subestructura, y pierden de esta forma su simplicidad, y las que no.

- Caracterizar cuáles son las álgebras simples sin análogo en característica 0 para cada característica $p > 0$. Esta es la tarea más complicada. La clasificación solo está completa para $p > 3$, siendo la conclusión que todas las álgebras no clásicas son de tipo Cartan, excepto en $p = 5$, en cuyo caso también existen de tipo Melikian. La clasificación en $p = 3$ está razonablemente al alcance de ser completada, mientras que la tarea en $p = 2$ resulta demasiado complicada para tales aspiraciones.

El resumen de la clasificación en $p > 3$ es el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1 ***Block–Wilson–Strade–Premet***. *Cualquier álgebra de Lie simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado en característica* $p > 3$ *es clásica o de Cartan (o de Melikian en* $p = 5$*).*

4.2.1. Álgebras clásicas de Chevalley

En esta sección vamos a construir las álgebras análogas a las que ya conocemos en característica 0. Para ello se necesita obtener la base de Chevalley de las álgebras simples.

Teorema 4.2.2 ***Base de Chevalley***. *Sea L un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ y Φ su sistema de raíces, con raíces simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Entonces existe una base $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi\} \cup \{h_i \mid i = 1, \ldots, l\}$ de L tal que:*

(1) $[h_i, h_j] = 0$, $i, j = 1, \ldots, l$.

(2) $[h_i, x_\alpha] = (\alpha, \alpha_i)x_\alpha$, $\alpha \in \Phi$, $i = 1, \ldots, l$.

(3) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$, *que es una combinación lineal de los h_i con coeficientes enteros.*

(4) Sean α y β dos raíces linealmente independientes. Si $\beta + \alpha \notin \Phi$, entonces $[x_\alpha, x_\beta] = 0$, y si $\beta + \alpha \in \Phi$, entonces $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$, siendo r el mayor natural tal que $\beta - r\alpha$ es raíz.

Las propiedades aritméticas del sistema de raíces hacen que se puedan restringir los escalares a $\mathbb{Z}$ de una manera directa. Esto es, el $\mathbb{Z}$-span de la base de Chevalley, con los mismos conmutadores, forma un "álgebra de Lie" sobre $\mathbb{Z}$ (abusando la notación, pues $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo, pero entendiéndose que se satisfacen las mismas relaciones sobre el anillo). Denotemos $L_\mathbb{Z}$ a esta estructura y sea F un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces $L_F = F \otimes_\mathbb{Z} L_\mathbb{Z}$ es un álgebra de Lie. El producto tensorial sobre $\mathbb{Z}$ tiene una definición algebraica abstracta, pero para nuestros propósitos basta con describirlo como la siguiente construcción:

- En característica 0, se extienden los escalares con los que se trabaja desde $\mathbb{Z}$ hasta $\mathbb{Q}$. En característica p se reducen los escalares de $\mathbb{Z}$ módulo p, obteniéndose así escalares en $\mathbb{Z}_p$.

- El cuerpo F es una extensión del cuerpo primo $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{Z}_p$, de manera que se extienden los escalares desde el cuerpo primo hasta F.

De esta forma obtenemos una familia de álgebras de Lie en cualquier característica. Sin embargo, estas pueden ganar subestructura y no ser simples. El caso que comentábamos anteriormente es el único en el que esto ocurre, y puede remediarse sin más que tomar el cociente por su centro.

Teorema 4.2.3 *Sea L un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ y sea F un cuerpo algebraicamente cerrado con característica p. Entonces L_F es un álgebra de Lie simple sobre F, salvo si L es isomorfa a A_l, con $l \equiv -1 \pmod p$, caso en el que $Z(L_F) = F(\sum_{i=1}^{l} ih_i)$ y $L_F/Z(L_F)$ es álgebra de Lie simple.*

4.2.2. Álgebras de Cartan

Para introducir estas álgebras vamos a considerar un natural $m \in \mathbb{N}$ (en toda esta sección consideramos que el 0 está dentro de los naturales) y definir el álgebra $O(m)$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado F como la que tiene base $\{x^{(\alpha)} \mid \alpha \in \mathbb{N}^m\}$ y producto dado por

$$x^{(\alpha)}x^{(\beta)} = \binom{\alpha}{\beta} x^{(\alpha+\beta)}$$

donde el número combinatorio se define como el producto de números combinatorios elemento a elemento, esto es, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, entonces

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{m} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$$

Para cada tupla $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, consideramos la subálgebra $O(m, \underline{n})$ generada por los $x^{(\alpha)}$ tales que, siendo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, se cumple $\alpha_i < p^{n_i}$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Las álgebras de Lie simples de tipo Cartan se construirán como derivaciones de estos conjuntos.

Sea así una derivación $D \in \operatorname{Der} O(m)$. Denotemos a las siguientes tuplas $\epsilon_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im})$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Diremos que D es especial si se cumple para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$:

$$D(x^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{m} x^{(\alpha-\epsilon_i)} D(x^{(\epsilon_i)})$$

donde se considera que $x^{(\beta)} = 0$ si $\beta \notin \mathbb{N}^m$.

Denotaremos $W(m)$ al conjunto de todas las derivaciones especiales de $O(m)$. Una base de $W(m)$ está dada por las derivadas parciales ∂_i, $i = 1, \ldots, m$, definidas según $\partial_i(x^{(\alpha)}) = x^{(\alpha-\epsilon_i)}$. Finalmente, denotamos $W(m, \underline{n})$ al subconjunto de $W(m)$ que se obtiene como el $O(m, \underline{n})$-span de las derivadas parciales.

Para terminar la construcción solo es necesario restringirse a algunas derivaciones concretas. Una forma sencilla de hacer esto es notando que $W(m)$ puede actuar sobre objetos geométricos y utilizar las siguientes formas diferenciales:

$$\omega_S = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m, \quad m \geq 3$$
$$\omega_H = \sum_{i=1}^{r} dx_i \wedge dx_{r+i}, \quad m = 2r \geq 2$$
$$\omega_K = dx_{2r+1} + \sum_{i=1}^{r} (x_i dx_{r+i} - x_{r+i} dx_i), \quad m = 2r + 1 \geq 3$$

Estas formas, llamadas respectivamente especial, hamiltoniana y de contacto, permiten definir las siguientes familias de álgebras de Lie:

$$S(m) = \{D \in W(m) \mid D(\omega_S) = 0\}$$
$$CS(m) = \{D \in W(m) \mid D(\omega_S) \in F\omega_S\}$$
$$H(m) = \{D \in W(m) \mid D(\omega_H) = 0\}$$
$$CH(m) = \{D \in W(m) \mid D(\omega_H) \in F\omega_H\}$$
$$K(m) = \{D \in W(m) \mid D(\omega_K) = O(m)\omega_K\}$$

Con ellas, denotando el conjunto de símbolos $\mathcal{X} = \{S, CS, H, CH, K\}$, podemos definir las subálgebras $X(m; \underline{n}) = X(m) \cap W(m; \underline{n})$ para cualquier $X \in \mathcal{X}$.

Se denota por $X(m; \underline{n})^{(\infty)}$ a la subálgebra en la que se estabiliza la serie derivada de $X(m; \underline{n})$. Estas son las álgebras de Lie simples de tipo Cartan graduadas. Las álgebras de Lie de tipo Cartan en general son deformaciones filtradas de las graduadas. Vamos a introducir este concepto.

Definición 4.2.4 ***Álgebra graduada***. *Sea L un álgebra de Lie. Se dice que L es graduada si $L = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} L_m$, con $[L_m, L_n] \subseteq L_{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Definición 4.2.5 ***Álgebra filtrada***. *Sea L un álgebra de Lie. Se dice que L es filtrada si existe una colección de subespacios L_m, con $m \in \mathbb{N}$ tal que $L_m \subseteq L_n$ para todo $m \leq n$ y $[L_m, L_n] \subseteq L_{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.*

Definición 4.2.6 *Sea L un álgebra de Lie filtrada tal que $L = \bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$. El álgebra de Lie graduada asociada a L es $gr(L) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} L_{m+1}/L_m$.*

Definición 4.2.7 ***Deformación filtrada***. *Sea L un álgebra de Lie graduada. Se dice que un álgebra de Lie filtrada G es una deformación filtrada de L si $gr(G) = L$.*

4.2.3. Álgebras de Melikian

En característica 5 hay una familia adicional de álgebras simples. Se denominan álgebras de Melikian y son

$$\mathcal{M}(n_1, n_2) = O(2; \underline{n}) \oplus W(2; \underline{n}) \oplus W(2; \underline{n})^*$$

donde $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ y $W(2; \underline{n})^*$ es una copia de $W(2; \underline{n})$. Denotaremos por E^* al elemento correspondiente a $E \in W(2; \underline{n})$ en la copia $W(2; \underline{n})^*$.

Los conmutadores son:

$$\begin{aligned}
[D, E^*] &= [D, E]^* + 2\operatorname{div}(D)E^* \\
[D, f] &= D(f) - 2\operatorname{div}(D)f \\
[f_1\partial_1^* + f_2\partial_2^*, g_1\partial_1^* + g_2\partial_2^*] &= f_1g_2 - f_2g_1 \\
[f, E^*] &= fE \\
[f, g] &= 2\left(g\partial_2 f - f\partial_2 g\right)\partial_1^* + 2\left(f\partial_1 g - g\partial_1 f\right)\partial_2^*
\end{aligned}$$

donde $D, E \in W(2; \underline{n})$ y $f, g \in O(2; \underline{n})$.

Conclusión

La exposición realizada introduce el estudio de las álgebras de Lie de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0. El tema no se incluye en el currículum del grado de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, por lo que se ha construido desde la base, partiendo de las mismas ideas con las que se desarrolla el estudio de los grupos y los espacios vectoriales. Además, por ser un campo estudiado profundamente en el siglo XX, se ha recopilado la información a través de las estupendas referencias clásicas, junto con alguna perspectiva moderna en formato de curso.

En concreto, se han introducido conceptos esenciales como la representación adjunta o las constantes de estructura, junto con algunos ejemplos iniciales, para después explorar la nilpotencia, resolubilidad y semisimplicidad. Se ha abordado la clasificación de las álgebras de Lie simples utilizando subálgebras de Cartan, sistemas de raíces y diagramas de Dynkin, destacando la unicidad de la construcción. Finalmente, en el último capítulo se ha examinado la característica positiva, haciendo visibles las diferencias con el caso de característica 0 a través de ejemplos ilustrativos y una visión general de la clasificación en distintas características.

Esta relajación de las hipótesis complica tremendamente el estudio, y aun hoy la propia clasificación en característica 2 y 3 es un campo de investigación abierto. Existe otra multitud de caminos por los que seguir explorando áreas colindantes a las aquí tratadas (sin olvidarnos de que aun quedan resultados de estructura más avanzados que no han sido tratados en este texto). El camino más natural es retirar también las otras hipótesis: construir álgebras de Lie sobre cuerpos no algebraicamente cerrados, basándose en álgebras de Lie existentes sobre la clausura algebraica de tales cuerpos, o en dimensión infinita, donde el panorama es mucho más variado y probar resultados generales se hace mucho más laborioso.

También existe la posibilidad de retirar la anticonmutatividad y la identidad de

Jacobi, y pasar a estudiar álgebras que satisfacen otras relaciones. Las más destacadas y estudiadas en el álgebra no asociativa son las álgebras de Jordan y las álgebras alternativas. Las de Jordan son en cierto sentido análogas a las de Lie, dado que el producto en las de Lie está dado por un conmutador, y en las de Jordan por un anticonmutador (+ en lugar de -). Aunque esto no es siempre así: toda álgebra de Lie puede verse como un álgebra de matrices con el producto dado por el conmutador, pero no toda álgebra de Jordan cumple el análogo con el anticonmutador. Existen las conocidas como álgebras de Jordan excepcionales, que se salen de la regla y no pueden construirse de esta manera.

Esto sirve para ilustrar la importancia de los pequeños detalles en las Matemáticas, y como estos tienen relevancia más allá de meras curiosidades, pues yéndonos al campo de la Física, una de las piezas fundamentales de la Mecánica Cuántica son los conmutadores y anticonmutadores. Mirándolo con cierto cuidado puede entenderse que los operadores que se emplean forman un álgebra de Jordan con el producto dado por un anticonmutador. Pero el estudio detallado de estas álgebras revela que existen las excepcionales, que no vienen dadas por un anticonmutador. Así, se plantea la idea de realizar una "generalización" de la Mecánica Cuántica, al estudiarla sobre un álgebra de Jordan excepcional, en lugar de una dada por un anticonmutador. Esto puede funcionar mejor o peor, y reflejar la realidad o no, pero la propia existencia de la idea depende de un análisis cauteloso de las estructuras algebraicas presentes en las teorías físicas.

Otra campo colindante es el de las representaciones. Aquí simplemente hemos introducido el concepto y dado un breve vistazo a las de $\mathfrak{sl}_2$, pero hay mucho más por ver. Es una parte indispensable a la hora de estudiar cualquier estructura algebraica, y un cambio de perspectiva que revela mucho sobre la misma: en lugar de pensar en qué forma a mi objeto matemático, voy a pensar en cómo actúa sobre otros objetos. De nuevo, la Física se ha beneficiado tremendamente de este punto de vista, pues la definición moderna de cada tipo de partícula, como el electrón o el fotón, no es más que una representación irreducible de un álgebra de Lie concreta (obviando los detalles).

Por último, si hablamos de álgebras de Lie, algo que va completamente de la mano y que no podemos olvidar son los grupos de Lie. Son una estructura algebraica que es al mismo tiempo grupo y variedad diferenciable, siendo ambos compatibles (la aplicación producto es diferenciable, etc.). Ambas estructuras están intrínsecamente ligadas, pues en el espacio tangente a la identidad de un grupo de Lie existe un álgebra de Lie de manera muy natural, y la exponenciación de los elementos de la misma recupera la componente conexa de la identidad del grupo de Lie. Estas ideas también se entrelazan con la Física Moderna, pues ya en 1915 la Relatividad General introdujo de manera irreversible la Geometría Diferencial, pero con el desarrollo posterior de las Teorías Cuánticas de Campos, quedo claro que los grupos de Lie eran un ingrediente fundamental para describir el contenido del Universo. Y más que eso, pues sirven como guía para descubrir nuevas ideas. Un ejemplo es tomar una teoría que describa únicamente electrones y exigirle que sea invariante bajo la acción de un cierto grupo de Lie. Siendo cauteloso se concluye que la única opción consistente es que la teoría pase a describir a través de la conexión del grupo de Lie a otro tipo de partícula, los fotones, y que la forma de actuar de los mismos sobre los electrones permita interpretar a estos últimos como cargados eléctricamente.

Bibliografía

[1] N. Jacobson, *Lie algebras.*
Dover Publications, 1962.

[2] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.*
Springer Verlag, 1972.

[3] K. Erdmann and M. J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras.*
Springer Verlag, 2006.

[4] V. Kac, *Introduction to Lie Algebras.*
MIT Mathematics 18.745: `math.mit.edu/classes/18.745/Notes`, 2010, consultado en julio de 2023.

[5] T. Tao, *Notes on the classification of complex Lie algebras.*
`terrytao.wordpress.com`, 2013, consultado en julio de 2023.

[6] K. Igusa, *Lie algebras.*
`people.brandeis.edu/~igusa/Math223aF11`, 2011, consultado en diciembre de 2023.

[7] H. Strade, *Simple Lie Algebras over Fields of Positive Characteristic.*
de Gruyter Expositions in Mathematics, Volume 38, 2004.

[8] R. A. Nonenmacher, *Fuente de la imagen de la Figura 1, CC BY-SA 4.0.*
Wikimedia Commons, `creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0`, recuperado en diciembre de 2023.