Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Construcciones categóricas entre espacios topológicos y estructuras algebraicas: Algunos ejemplos.

Trabajo fin de grado

Luzía Méndez Senra
Tutor: Saúl Fernández González

Mayo 2024

Índice

Introducción **1**

1. Teoría de Categorías **3**

1.1. Primeras definiciones . . . 4
1.2. Primeras estructuras abstractas . . . 6
1.2.1. Morfismos . . . 7
1.2.2. Objetos terminal e inicial . . . 8
1.2.3. Productos y ecualizadores . . . 9
1.3. Límites y colímites . . . 12
1.4. Exponenciales . . . 16
1.5. Naturalidad . . . 17
1.6. El lema de Yoneda . . . 21
1.7. Adjuntos . . . 25
1.7.1. Caracterización de las unidades . . . 28

2. Dualidades Categóricas entre espacios topológicos y estructuras algebraicas **31**

2.1. Alexandroff . . . 31
2.1.1. Espacios topológicos de Alexandroff . . . 31
2.1.2. Construcción del espacio topológico. . . . 32
2.1.3. Construcción de la relación reflexiva y transitiva. . . . 33
2.1.4. Equivalencia. . . . 34
2.2. Stone . . . 36
2.2.1. Preliminares sobre espacios topológicos de Stone . . . 36
2.2.2. Construcción del espacio topológico de Stone. . . . 38
2.2.3. Construcción del álgebra de Boole. . . . 40
2.2.4. Equivalencia. . . . 41
2.3. Priestley . . . 45
2.3.1. Dualidad de Priestley . . . 45
2.3.2. Algunas relaciones con la dualidad de Stone . . . 48

3. Topología sin puntos **49**
3.1. Preliminares 50
3.1.1. Sobre adjuntos de Galois 50
3.1.2. Espacios topológicos sobrios 51
3.2. Introducción a Locales: los funtores Lc y Sp. 53
3.2.1. Las unidades de la adjunción 57

4. Marcos Topológicos y Ortogonales **59**
4.1. Marcos ortogonales 59
4.1.1. Marcos ortogonales topológicos 61
4.1.2. Traducción de algunos conceptos topológicos 66
4.2. Marcos ortogonales discretos: topologías sobre ellos 68
4.2.1. Cerrados, abiertos, interiores y clausuras 70
4.3. Morfismos 72

Conclusiones **75**

Bibliografía **78**

Anexos **81**

A. Introducción a retículos y orden **81**
A.1. Conjuntos ordenados 81
A.1.1. Conjuntos clausurados inferior y superiormente 82
A.2. Retículos 82
A.3. Retículos y álgebras de Boole 84
A.4. Ideales y filtros 85
A.5. Maximalidad y El Lema de Zorn 86

B. Topología. **89**
B.1. Espacios topológicos y funciones continuas 89
B.1.1. Topología producto 91
B.2. Conexión, compacidad y separación. 92
B.2.1. Espacios conexos 92
B.2.2. Compacidad 92
B.2.3. Separación 93

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar una serie de *construcciones categóricas* que existen entre algunos espacios topológicos y ciertas estructuras algebraicas. Para ello, será necesario familiarizarnos con los conceptos básicos de la *teoría de categorías.* Por tanto, el primer capítulo del trabajo pretende ser una introducción a la teoría de categorías. Lo que se busca en esta parte es presentar, de forma muy reducida, lo que sería un curso básico de teoría de categorías, sin suponer ningún conocimiento previo de este tema.

En el capítulo 2 se presentarán tres "dualidades". De manera coloquial, la existencia de una dualidad, equivalencia o isomorfismo categórico, entre dos categorías puede entenderse como una forma de "traducir" entre ellas. Tomemos como ejemplo la *dualidad de Stone*, que se establece entre los llamados *espacios topológicos de Stone* y las álgebras de Boole. Esto significa que toda propiedad topológica que tengamos en un espacio de Stone; escrita en términos de topología (abiertos, cerrados, aplicaciones continuas,...), dará lugar a una propiedad algebraica en las álgebras de Boole, escrita puramente en términos algebraicos, y viceversa.

Comenzaremos con la dualidad de Alexandroff, que es en realidad un ejemplo de *isomorfismo categórico.* Mediante este isomorfismo se relacionan los conjuntos dotados de un preorden con los espacios topológicos de Alexandroff, que son aquellos en los que las intersecciones arbitrarias de abiertos están en la topología.

Después hablaremos de las dualidades de Stone y Priestley. Aunque la dualidad de Stone puede verse como un caso particular de la de Priestley, estudiamos primero la de Stone y después la de Priestley. Esto se debe por un lado a motivos históricos, pues la de Stone aparece antes, y por otro al gran impacto que la dualidad de Stone ha tenido en las matemáticas ([28]). Entre otras cosas, la dualidad de Stone es uno de los primeros ejemplos no triviales de equivalencia de categorías ([28]), y estos trabajos "inspiran" la formulación de la teoría de categorías ([33]).

Más adelante el mismo Stone generaliza su teorema de representación a retículos distributivos acotados ([47]), introduciendo los espacios *coherentes.* Esta generalización no la vamos a estudiar, en su lugar trataremos la de Priestley. La dualidad de Priestley también se da entre entre retículos acotados, pero difiere de la de Stone en cuanto a los espacios topológicos considerados. Priestley introduce en el espacio topológico un orden, dando lugar a lo que se conoce como un *espacio de Priestley* ([42]). Este trabajo lo amplía en

[41] donde se relacionan algunas propiedades del retículo con las de su *espacio dual*. En el 1975 W.H. Cornish prueba la equivalencia entre los espacios de Priestley y los espacios coherentes ([14]).

En 1974 Esakia ([20]) publica una dualidad entre álgebras de Heyting y los espacios topológicos conocidos actualmente como *de Esakia*. Se trata de un caso particular de la de Priestley, aunque fue desarrollada independientemente. No la estudiaremos aquí, pero merece la pena mencionarla por su importancia, especialmente en el área de la lógica. Esta dualidad así como algunas de sus generalizaciones puede consultarse en [8] y [21].

En el tercer capítulo estudiaremos una *adjunción*, iniciándonos en la *topología sin puntos*. Esta teoría trata de resolver la pregunta de cuándo podemos tratar un espacio topológico como el retículo de sus abiertos, ignorando el conjunto de puntos subyacente. En su historia cabe señalar los seminarios de Ehresmann en 1958 ([6] y [39]), donde se acuña el término *frame*, el nacimiento del término *locale* en [26] así como el libro de Johnstone ([28]), que todavía a día de hoy es una fuente primaria de referencia ([40]). Igual que en el caso de la teoría de categorías, lo que se busca es un primer acercamiento a la topología sin puntos, sin presuponer ningún conocimiento previo de ella.

Por último, trataremos la equivalencia entre los espacios topológicos y los *marcos ortogonales topológicos*. Esta parte es el resultado del trabajo realizado en el marco de la beca de colaboración en departamentos (2023/24) a partir de un artículo sin publicar iniciado por el profesor Saúl Fernández. Los marcos, que no son más que conjuntos con relaciones, son estucturas muy utilizadas en el área de la lógica. Tienen suma importancia a la hora de crear modelos para la lógica modal ([30]). Según la Enciclopedia de Filosofía de Stanford ([22]):

> La *lógica modal*, [...], es el estudio del comportamiento deductivo de las expresiones “es necesario que” y “es posible que”. Sin embargo, el término *lógica modal* puede ser usado más ampliamente [...][1].

En 1962 Hintikka ([24]) los usa por primera vez para representar incertidumbre.

Recientemente se han estudiado equivalencias categóricas entre marcos y distintos tipos de estructuras matemáticas que sirven de modelo para la misma lógica ([13], [4]).

Durante todo el texto se supondrán conocimientos previos de topología y teoría de retículos. Se han añadido dos anexos con definiciones y resultados necesarios sobre estos temas. Para desarrollarlos se han seguido, principalmete [15] y [10]; en el caso de retículos, y [38] para el anexo de topología. Algunas demostraciones de resultados topológicos y algebraicos que hemos considerado interesante presentar se han movido a ellos. Esto estará indicado en el texto.

[1] Traducción propia.

Capítulo 1

Teoría de Categorías

Awodey [3] define la teoría de categorías como el estudio (abstracto) de las álgebras de funciones. Su nacimiento puede ubicarse en 1945 con la publicacion del artículo de Eilenberg y Mac Lane "General theory of natural equivalences" [18], donde la teoría es formulada por primera vez. Eilenberg y Mac Lane trabajaban en topología algebraica, donde las categorías encuentran sus primeras aplicaciones.

Durante los años 50 se obtienen resultados importantes en geometría algebraica usando categorías hasta el punto de que en la actualidad esta teoría es impensable sin ellas [35]. A partir de los 60 empieza a verse su utilidad también en lógica. Fuera de las matemáticas se han descubierto muchas aplicaciones en ámbitos diversos como pueden ser la computación, la filosofía, la física o la lingüística.

Actualmente, la teoría de categorías es un área activa ([5], [12], [17]). Aunque al principio estuvieron restringidas a ciertos ámbitos de las matemáticas, a día de hoy las aplicaciones de la teoría de categorías son amplias y profundas [35].

A pesar de estar totalmente fuera de los objetivos de este trabajo hacer una discusión sobre los "fundamentos" de la teoría de categorías (o de las matemáticas en general), sí es necesario un comentario al respecto. En teoría de categorías se trata con objetos como la colección de *todos los conjuntos*. Los problemas o paradojas que este tipo de objetos generan en matemáticas han sido estudiados en teoría de conjuntos dando lugar a las teorías axiomáticas de conjuntos ([45]). En teoría de categorías se usan distintos métodos para evitar estas paradojas ([32]), lo cierto es que, para los objetivos de este trabajo, cualquier teoría de conjuntos axiomática nos funcionaría ([18]). Como se indica en [32], el mayor problema en los fundamentos de la teoría de categorías aparece cuando queremos trabajar con "categorías muy grades", y eso es algo que aquí no se prentede. Usaremos simplemente la distinción entre *clase o colección* y *conjunto*. Con colección o clase nos referiremos a lo que intuitivamente podemos entender con estas palabras, una agrupación de cosas, por conjunto nos referiremos a lo que se entiende con estas palabras en una teoría axiomática de conjuntos, por ejemplo la ZFC[1].

Esta primera parte está basada principalmente en [3], aunque algunas secciones se han seguido por [31], esto estará indicado.

1.1. Primeras definiciones

Comenzamos dando las definiciones básicas de la teoría de categorías.

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en dos colecciones:

I. Una colección de objetos $\mathbf{Ob(\mathcal{C})}$.

II. Una colección de morfismos o flechas $\mathbf{Mor(\mathcal{C})}$.

Verificando:

I. Todo morfismo tiene un *dominio* y un *codominio* que son objetos de $\mathcal{C}$. Esto se denota: $\forall f \in \mathbf{Mor(\mathcal{C})}\ \exists A, B \in \mathbf{Ob(\mathcal{C})}$ tal que $f : A \longrightarrow B$. Donde A es el dominio (*Dom(f)*) y B el codominio (*Codom(f)*) de f.

II. Para todo objeto A de $\mathcal{C}$ existe el *morfismo identidad*, 1_A: $A \longrightarrow A$.

III. Si f y g son dos morfismos de forma que el codominio de f y el dominio de g coinciden, entonces tenemos un morfismo:
$g \circ f$: *Dom(f)* $\longrightarrow$ *Codom(g)*. Y se verifica:

   a) $f : A \longrightarrow B$, entonces, $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$

   b) *Asociatividad*: Sean f, g, h morfismos con *Dom(f)*=*Codom(g)* y *Dom(g)*=*Codom(h)*, entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Notación: Dados $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, a la colección de las flechas $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathcal{C}$ la denotaremos $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ o simplemente $Hom(A, B)$.
A la operación $\circ : Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{C})$ la llamaremos *composición* y $f \circ g$ podrá denotarse simplemente fg cuando no haya riesgo de ambigüedad.

Definición 1.2. Una categoría $\mathcal{C}$ de dice *pequeña* si tanto la colección de los objetos como la de las flechas es un conjunto. En otro caso se dirá *grande*.

$\mathcal{C}$ se dirá *localmente pequeña*, si para cada par de objetos $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, $Mor(A, B)$ es un conjunto.

Definición 1.3. Un *funtor (covariante)* $\mathbf{F}$ entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, $\mathbf{F}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en dos asignaciones:

[1] Zermelo-Fraenkel junto con el axioma de elección. Para una exposición de esta teoría puede consultarse el capítulo 7 de [45].

I. $\mathbf{F}$: $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$.

II. $\mathbf{F}$: $\mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathcal{D})$.

Verificando

I. Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, entonces $\mathbf{F}f : \mathbf{F}A \longrightarrow \mathbf{F}B$.

II. $\mathbf{F}(1_A)$=$1_{\mathbf{F}A}$ para todo $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$

III. $\mathbf{F}(f \circ g)$= $(\mathbf{F}f) \circ (\mathbf{F}g)$, para todo par de morfismos f, g con $Codom(g) = Dom(f)$.

Ejemplos: Algunos ejemplos de categorías son:

I. **Set**: La categoría cuyos objetos son todos los conjuntos y morfismos las aplicaciones entre ellos, la composición que consideramos es la composición habitual de funciones y el morfismo identidad de un conjunto A es la aplicación identidad.

II. **Top**: Categoría de los espacios topológicos y aplicaciones continuas entre ellos con la composición siendo otra vez la habitual en las funciones.

III. **Pos**: Categoría cuyos objetos son los conjuntos parcialmente ordenados con las aplicaciones $f : (A, \leq_A) \longrightarrow (B, \leq_B)$ tales que $a \leq_A b \Rightarrow fa \leq_B fb$, que llamaremos *monótonas*. La composición es la habitual de las funciones.

IV. Para ver un ejemplo un poco distinto, dado un conjunto dotado de una relación R reflexiva y transitiva (A, R) podemos verlo como una categoría. Sus objetos son los elementos de A y para cada $a, a' \in A$ existe un morfismo $a \to a'$ si y solo si aRa'. En este ejemplo la composición de dos morfismos es un morfismo por la transitividad y la flecha identidad existe por reflexividad.

V. **Rel**: Sus objetos son los conjuntos y una flecha $g : A \longrightarrow B$ es un subconjunto $g \subseteq A \times B$. Es decir, un morfismo no es más que una relación.
La composición de $g : A \longrightarrow B$, $h : B \longrightarrow C$ viene dada por

$$g \circ h = \{(a, c)|\ \exists b \in B \ con \ (a, b) \in g, \ (b, c) \in h\}.$$

Veamos que efectivamente verifica la definición de categoría con los elementos identidad las diagonales $1_A = \{(a, a)$ tal que $a \in A\}$.

- Sea $g : A \longrightarrow B$, entonces
$g \circ 1_B = \{(a, b) \ tq \ existe \ b \in B \ con \ (a, b) \in g, \ (b, b) \in 1_B\} =$
$\{(a, b) \ tq \ existe \ b \in B \ con \ (a, b) \in g, \ b \in B\} = \{(a, b) \in g\}$. Análogamente $1_A \circ g = g$.
- Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ $(f \circ g) \circ h = \{(a, c) \ tq \ existe \ b \in B \ con \ (a, b) \in f,$ $(b, c) \in g\} \circ h = \{(a, d) \ tq \ existe \ c \in C \ con \ (a, c) \in f \circ g, \ (c, d) \in h\} =$
$\{(a, d) \ tal \ que \ existen \ b \in B, c \in C \ con \ (a, b) \in f, (b, c) \in g \ y \ (c, d) \in h\}$. Si desarrollamos de igual manera $h \circ (g \circ f)$ llegamos exactamente a lo mismo.

VI. **Cat** : la categoría de las categorías localmente pequeñas, con los morfismos los funtores entre ellas. Notar que **Cat** es una categoría grande, por tanto **Cat** $\notin$ **Ob**(Cat).

Definición 1.4. Dada una categoría $\mathcal{C}$ se dice *categoría opuesta de* $\mathcal{C}$ y se denota $\mathcal{C}^{op}$ a la categoría que verifica:

I. **Ob**$(\mathcal{C}^{op})$= **Ob**$(\mathcal{C})$

II. Para cada $A, B \in$ **Ob**$(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Un funtor **F**: $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ se dirá *contravariante* en $\mathcal{C}$.

Notas:

I. Es inmediato ver que $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

II. Para ver que una aplicación **F**: $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor contravariante en $\mathcal{C}$ hay que verificar que para todo $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ en $\mathcal{C}$

   a) $\mathbf{F}f : \mathbf{F}A \longrightarrow \mathbf{F}B$.

   b) $\mathbf{F}(1_A) = 1_{\mathbf{F}A}$

   c) $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}f \circ \mathbf{F}g$

III. La categoría $\mathcal{C}^{op}$ contiene exactamente la misma información que la categoría $\mathcal{C}$. Aunque resulta antiintuitivo considerar una aplicación $f : A \longrightarrow B$ como una aplicación $f^* : B \longrightarrow A$, en algunos casos las categorías opuestas resultan muy útiles. Un ejemplo de ello lo tenemos en la *topología sin puntos* que se estudiará más adelante.

IV. A la categoría opuesta de $\mathcal{C}$ también se le llama *categoría dual de* $\mathcal{C}$.

Como es habitual en matemáticas, una vez que tenemos un estructura consideramos "subestructuras", hay distintas formas de definir una subcategoría, la siguiente es la que nos ha parecido más simple y por tanto, más adecuada para un curso introductorio.

Definición 1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, *subcategoría* suya $\mathcal{D}$ es una categoría verificando que **Ob**$(\mathcal{D}) \subseteq$ **Ob**$(\mathcal{C})$ y **Mor**$(\mathcal{D}) \subseteq$ **Mor**$(\mathcal{C})$.

Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ se dice *completa* si para todo $A, B \in$ **Ob**$(\mathcal{D})$ se verifica $Hom_{\mathcal{D}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

1.2. Primeras estructuras abstractas

Para caracterizar estructuras en teoría de categorías nos centramos en como se relacionan con otros objetos y morfismos. Por ello, muchas definiciones son dadas en términos de una *propiedad universal*.

1.2.1. Morfismos

Definición 1.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \longrightarrow B$ una flecha en ella, f se dirá:

I. *Isomorfismo* si existe una flecha $g : B \longrightarrow A$ de forma que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Bajo estas condiciones g se dirá *inverso* de f y se denotará $g = f^{-1}$. A y B se dirán *isomorfos* y se denotará $A \cong B$.

II. *Epimorfismo* si para cualquier par de flechas $g, h : B \longrightarrow C$ verificando $g \circ f = h \circ f$ se tiene $g = h$.

III. *Monomorfismo* si para cualquier par de flechas $g, h : C \longrightarrow A$ verificando $f \circ g = f \circ h$ se tiene que $g = h$

Observación: Ya que los funtores conservan la composición y la flecha identidad, la imagen de un isomorfismo bajo un funtor es un isomorfismo.

Proposición 1.1. Dado un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$, su inverso es único.

Dem. Sean $h, g : B \longrightarrow A$ dos inversos de f, $h = h \circ 1_B = h \circ f \circ g = 1_A \circ g = g$. □

Proposición 1.2. Un isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo.

Dem. Sea $f : A \longrightarrow B$ tal que existe $g : B \longrightarrow A$ verificando $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$. Sean h_1, h_2 tal que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ entonces $(h_1 \circ f) \circ g = (h_2 \circ f) \circ g \Rightarrow h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g) \Rightarrow h_1 \circ 1_B = h_2 \circ 1_B \Rightarrow h_1 = h_2$. Luego f es epimorfismo.
Que es monomorfismo lo tenemos por un razonamiento análogo. □

Ejemplo: *Isomorfismos, epimorfismos y monomorfismos en* **Set**.

En **Set** un isomorfismo es una aplicación de conjuntos que tiene inverso, es decir una aplicación biyectiva.

Podemos comprobar que un epimorfismo no es más que una aplicación suprayectiva. Sea $f : A \longrightarrow B$, h, g morfismos tales que $h \circ f = g \circ f$ y f suprayectiva. Para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $fa = b$ entonces para todo $b \in B$:

$$hb = hfa = gfa = gb \Rightarrow h = g.$$

El recíproco lo haremos por reducción al absurdo: supongamos que f es un epimorfismo pero que no es suprayectiva. Si f no es suprayectiva existe algún $b \in B$ tal que para todo $a \in A$ $fa \neq b$. Definamos $h, g : B \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que $hx = 0$ para todo $x \in B$, $gx = 0$ para todo $x \in B - \{b\}$ y $gb = 1$. Es claro que $g \circ f = h \circ f$ pero $g \neq h$. Por lo que llegamos a una contradicción.

Por último, un monomorfismo es lo mismo que una aplicación inyectiva.
Si f es una aplicación inyectiva y h, g son aplicaciones que pueden componerse con f a la derecha verificando $f \circ g = f \circ h \Rightarrow f(ga) = f(ha) \Rightarrow ga = fa$ para todo $a \in A$ entonces

$g = f$.
Para ver el recíproco volvemos a proceder por reducción al absurdo, si f no fuera inyectiva, existirian en A elementos a, b tal que $fa = fb$ pero $a \neq b$. Podemos construir aplicaciones $h, g : \{0, 1\} \longrightarrow A$ tales que $f \circ g = f \circ h$ pero $g \neq h$, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} h(0) = b \\ h(1) = a. \end{cases}$$

y $gx = a$ para todo $x \in \{0, 1\}$.

Una aplicación de conjuntos es biyectiva si y solo si es inyectiva y suprayectiva, por tanto, en **Set** $f : A \longrightarrow B$ es isomorfismo si y solo si es epimorfismo y monomorfismo.

Podemos poner en el "lenguaje de las categorías" resultados conocidos de las matemáticas. Por ejemplo, veamos la versión categórica del *Axioma de elección*. El Axioma de elección es una de las equivalencias del lema de Zorn que puede consultarse en el anexo A, establece:

"Para toda colección $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$." ([45])

Definición 1.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría diremos que un epimorfismo $e : A \longrightarrow B$ *se divide* si existe un monomorfismo $s : B \longrightarrow A$ tal que $es = 1_B$.

Teorema 1.1. Son equivalentes:

I. Se verifica el Axioma de elección.

II. Todo epimorfismo en **Set** se divide.

Dem. Supongamos que se cumple el Axioma de elección y que $e : E \longrightarrow X$ es un epimorfismo, entonces tenemos la familia de conjuntos no vacía $E_x = e^{-1}(\{x\})$ para todo $x \in X$. Por el Axioma de elección existe una función $s : X \longrightarrow \bigcup_{x \in X} E_x$ tal que para todo $x \in X$: $s(x) \in E_x$. Entonces $es(x) = x \Rightarrow es = 1_X \Rightarrow e$ se divide.

Recíprocamente consideremos que todo epimorfismo se divide, sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos definimos el conjunto $A = \{(i, a) | i \in I, a \in A_i\}$ y tenemos el epimorfismo $e : A \longrightarrow I$ que a cada (i, a) le asigna i. Entonces existe un $s : I \longrightarrow A$ tal que $es = 1_I$ por lo que para cada $i \in I$ $es(i) = i \Rightarrow s(i) \in I$. □

1.2.2. Objetos terminal e inicial

Definición 1.8. En una categoría $\mathcal{C}$:

I. $0 \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ se dice *inicial* si para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $0 \longrightarrow A$.

II. $1 \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ se dice *terminal* si para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $A \longrightarrow 1$.

Ejemplos: *Objetos iniciales y terminales en la categoría* **Set**:

El conjunto vacío $\emptyset$ es un objeto inicial, ya que para todo conjuto A existe una única aplicación $\emptyset \longrightarrow A$.

Cualquier conjunto unipuntual es un objeto terminal, para cualquier conjunto no vacío A podemos definir $A \longrightarrow \{x\}$ asignando a cada $a \in A$ el elemento x.

Proposición 1.3. En una categoría $\mathcal{C}$ los objetos iniciales y terminales son únicos salvo isomorfismo.

Dem. Supongamos que A y B son dos objetos iniciales en una categoría $\mathcal{C}$. Usando que A es inicial: existe un único morfismo $f : A \longrightarrow B$ y un único morfismo $A \longrightarrow A$ que tiene que ser necesariamente 1_A. Análogamente para B por ser inicial existe un único morfismo $g : B \longrightarrow A$ y un único $1_B : B \longrightarrow B$. Ahora $f \circ g$ es un morfismo con dominio y codominio A, luego necesariamente es 1_A y de igual forma $g \circ f$ es necesariamente 1_B, por tanto f es isomorfismo.
Para objeto terminal la demostración es análoga invirtiendo la orientación de los morfismos y el orden de composición cuando sea necesario. $\square$

1.2.3. Productos y ecualizadores

Definición 1.9. Sean A, B dos objetos en una categoría $\mathcal{C}$ se define el *producto cartesiano (binario) de A y B* como un objeto $A \times B$, con dos flechas

$$\pi_A : A \times B \longrightarrow A \text{ y } \pi_B : A \times B \longrightarrow B$$

verificando que para cualquier otro objeto $C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ y flechas $f : C \longrightarrow A$, $g : C \longrightarrow B$, existe una única flecha $m : C \longrightarrow A \times B$ tal que

$$\pi_B \circ m = g \text{ y } \pi_A \circ m = f$$

O lo que es lo mismo, que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\exists! m"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

π_A y π_B se dicen *proyecciones*.

Notación: Suponiendo la situación y las notaciones de la definición anterior, podremos denotar $m : C \longrightarrow A \times B$ como $m = (f, g)$.

Ejemplos:

I. *Productos binarios en* **Set**: El producto cartesiano de dos conjuntos $A, B \in \mathbf{Set}$ es el producto cartesiano conocido $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$, con las proyecciones $\pi_A(a,b) = a$ y $\pi_B(a,b) = b$. Veamos que efectivamente verifica la definición:

   Sea C un conjunto, $f : C \longrightarrow A$, $g : C \longrightarrow B$ dos flechas, definimos $m : C \longrightarrow A \times B$ tal que $m(c) = (fc, gc)$ para todo $c \in C$. Es inmediato que $\pi_B \circ m = g$ y $\pi_A \circ m = f$. Veamos la unicidad, si $n : C \longrightarrow A \times B$ verifica $\pi_B \circ n = g$ y $\pi_A \circ n = f$ entonces para todo $c \in C$ $n(c) = (n_1 c, n_2 c)$ verifica $gc = \pi_B \circ n(c) = n_2 c$ y análogo para n_1 por tanto $n(c) = (fc, gc) = m(c) \Rightarrow n = m$.

II. *Productos binarios en* **Top**: Dados $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ dos espacios topológicos, tenemos el espacio topológico producto $(X_1 \times X_2, \tau)$ donde τ es la topología que tiene como base $\{A_1 \times A_2$ tal que $A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$ [2]. Consideramos las proyecciones: $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$ que son aplicaciones continuas sobre $(X_1 \times X_2, \tau)$. Entonces se verifica la definición de producto.

III. *Productos binarios en* **Pos**: Dados $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ consideramos

$$A \times B = \{(a,b) \text{ tal que } a \in A, b \in B\}$$

   con la relación $(a,b) \leq (a',b') \Leftrightarrow a \leq_A a'$ y $b \leq_B b'$, esto define un orden en $A \times B$ por ser $\leq_A, \leq_B$ órdenes. Tomamos las proyecciones $p_A : A \times B \longrightarrow A$, $p_B : A \times B \longrightarrow B$ como $p_A(a,b) = a$ y $p_B(a,b) = b$, están en la categoría ya que $(a,b) \leq (a',b') \Rightarrow p_A(a,b) = a \leq_A a' = p_A(a',b')$ y análogo para p_B.

   Sean $f : (C, \leq_C) \longrightarrow (A, \leq_A)$, $g : (C, \leq_B) \longrightarrow (B, \leq_B)$ dos morfismos, definimos $m : C \longrightarrow A \times B$ como $mc = (fc, gc)$ que es monótona por serlo f y g y se comprueba facilmente que es la única verficando $p_A \circ m = f$, $p_B \circ m = g$.

Proposición 1.4. Los productos en una categoría son únicos salvo isomorfismo.

Dem. Sean (P, p_1, p_2) y (Q, q_1, q_2) dos productos de A y B en una categoría $\mathcal{C}$. Por definición de producto existe un único $i : P \longrightarrow Q$ tal que $q_1 \circ i = p_1$ y $q_2 \circ i = p_2$ y análogamente un único $j : Q \longrightarrow P$ tal que $p_1 \circ j = q_1$ y $p_2 \circ j = q_2$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, shift right, "\exists! i"'] & \\
A & & B \\
& Q \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ur, "q_2"'] \arrow[uu, shift right, "\exists! j"'] &
\end{tikzcd}$$

Componiendo obtenemos $p_1 \circ j \circ i = q_1 \circ i = p_1$ y análogamente $p_2 \circ j \circ i = p_2$. De forma inmediata tenemos también $p_1 \circ 1_P = p_1$ y $p_2 \circ 1_P = p_2$. Entonces como P es un producto y tanto 1_P como $j \circ i$ verifican la condición de la propiedad universal de la definición de

[2] Como estamos en el caso finito la topología producto coincide con la topología por cajas.

producto, por unicidad $1_P = j \circ i$. De forma análoga obtenemos $i \circ j = 1_Q$ y por tanto P y Q son isomorfos. $\square$

Definición 1.10. El *producto de una colección de objetos* $\{A_i\}_{i \in I}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un objeto $\prod_{i \in I} A_i$, y una colección de proyecciones $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \longrightarrow A_j$, de forma que para todo objeto C de $\mathcal{C}$ y flechas $f_j : C \longrightarrow A_j$, existe una única flecha $f : C \longrightarrow \prod_{i \in I} A_i$ tal que $\pi_j \circ f = f_j \ \forall j \in I$.

Definición 1.11. Una categoría se dice que tiene *todos los productos finitos*, si posee objeto terminal y para cada colección finita de objetos existe su producto.

Definición 1.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $f, g : A \longrightarrow B$ dos flechas en ella, el *ecualizador de f y g* es una flecha $m : E \longrightarrow A$ tal que $f \circ m = g \circ m$ para toda flecha $n : F \longrightarrow A$ con $f \circ n = g \circ n$ existe una única $h : F \longrightarrow E$ tal que $m \circ h = n$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "m"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
F \arrow[u, dotted, "\exists! h"] \arrow[ur, "n"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.5. Dada una categoría $\mathcal{C}$

I. Los ecualizadores son únicos salvo isomorfismo.

II. Un ecualizador es siempre monomorfismo.

Dem. Sean $m : E \longrightarrow A$, $n : F \longrightarrow A$ dos ecualizadores de $f, g : A \longrightarrow B$. Por ser m ecualizador y n una flecha tal que $f \circ n = g \circ n$ tenemos que existe una única flecha $i : F \longrightarrow E$ tal que $m \circ i = n$. Analogamente existe una única flecha $j : E \longrightarrow F$ tal que $n \circ j = m$. Consideramos la flecha $i \circ j : E \longrightarrow E$ que verifica $m \circ i \circ j = n \circ j = m$ pero $m \circ 1_E = m$, luego por la propiedad universal del ecualizador $i \circ j = 1_E$, análogamente $j \circ i = 1_F$.

Sean $h_1, h_2 : C \longrightarrow E$ tal que $m \circ h_1 = m \circ h_2$ denotemos $z = m \circ h_1 = m \circ h_2 : C \longrightarrow A$. Como $f \circ m = g \circ m \Rightarrow f \circ m \circ h_1 = g \circ m \circ h_1 \Rightarrow f \circ z = g \circ z$, por propiedad universal del ecualizador existe un único $i : C \longrightarrow E$ tal que $m \circ i = z = m \circ h_1 = m \circ h_2$, por tanto $i = h_1 = h_2$ y tenemos que m es monomorfismo. $\square$

Definición 1.13. Sean A, B dos objetos en una categoría $\mathcal{C}$, el *coproducto* o *suma* de A y B es un objeto $A + B$ con un par de flechas $i_A : A \longrightarrow A + B$, $i_B : B \longrightarrow A + B$, verificando que para cada objeto C y flechas $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$ existe una única flecha $m : A + B \longrightarrow C$ tal que

$$m \circ i_A = m \circ i_B$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "\exists! m"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.6. Los coproductos en una categoría son únicos salvo isomorfismo.

Dem. La demostración es análoga a la de 1.4 cambiando producto por coproducto e invirtiendo la dirección de las flechas y el orden de composición cuando sea necesario. $\square$

Podemos otra vez generalizar a coproductos arbitrarios:

Definición 1.14. El *coproducto de una colección de objetos* $\{A_i\}_{i\in I}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un objeto $\sum_{i\in I} A_i$, y una colección de flechas $\rho_j : A_j \longrightarrow \sum_{i\in I} A_i$, de forma que para todo objeto C de $\mathcal{C}$ y flechas $f_j : A_j \longrightarrow C$, existe una única flecha $f : \sum_{i\in I} A_i \longrightarrow C$ tal que $f \circ \rho_j = f_j \ \forall j \in I$.

Definición 1.15. Sean $f, g : B \longrightarrow A$ dos flechas, el *coecualizador de f y g en $\mathcal{C}$* es un morfismo $q : A \longrightarrow Q$ tal que $q \circ f = q \circ g$ y para toda flecha $p : A \longrightarrow S$ verificando que $p \circ f = p \circ g$ existe una única flecha $u : Q \longrightarrow S$ tal que $u \circ q = p$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & Q \arrow[d, dotted, "\exists! u"] \\
& & S
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.7. Si q es un coecualizador en $\mathcal{C}$ de algún par de flechas, entoces es un epimorfismo.

Dem. Sean $h_1, h_2 : Q \longrightarrow C$ tal que $h_1 \circ q = h_2 \circ q$ denotemos a este morfismo $z : A \longrightarrow C$. Como $q \circ f = q \circ g \Rightarrow h_1 \circ q \circ f = h_2 \circ q \circ g \Rightarrow z \circ f = z \circ g$, por propiedad universal del coecualizador existe un único $i : Q \longrightarrow C$ tal que $i \circ q = z = h_1 \circ q = h_2 \circ q$, por tanto $i = h_1 = h_2$ y tenemos que q es epimorfismo. $\square$

1.3. Límites y colímites

En esta sección introduciremos los *límites* en teoría de categorías. Todas las estructuras abstractas vistas hasta ahora son casos particulares de límites o de colímites.

Definición 1.16. Sean $\mathcal{J}$ y $\mathcal{C}$ dos categorías un *diagrama de tipo $\mathcal{J}$* en $\mathcal{C}$ es un funtor

$$\mathbf{D} \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$$

A la categoría $\mathcal{J}$ la denominaremos *categoría índice*. Para cada objeto $i \in \mathcal{J}$ denotaremos D_i al objeto asignado por $\mathbf{D} \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Analogamente si $\alpha : i \longrightarrow j$ es un morfismo en $\mathcal{J}$, denotaremos D_α a $\mathbf{D}\alpha$.

Un cono en un diagrama $\mathbf{D}$ es un objeto $A \in \mathcal{C}$ junto con una colección de flechas $c_j : A \longrightarrow D_j$ de forma que para todo $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$ y para toda $\alpha : j \longrightarrow i$ se verifica $c_i = D_\alpha \circ c_j$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "c_j"'] \arrow[dr, "c_i"] & \\ D_j \arrow[rr, "D_\alpha"'] & & D_i \end{tikzcd}$$

Definición 1.17. Sea $\mathbf{D}$: $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagrama y $(A, a_j)_{j\in\mathcal{J}}$, $(B, b_j)_{j\in\mathcal{J}}$ dos conos en $\mathbf{D}$, un morfismo de conos es una flecha en $\mathcal{C}$, $f : A \longrightarrow B$ con la propiedad de que para todo $i \in \mathcal{J}$ $a_i = b_i \circ f$.
A la categoría de los conos en $\mathbf{D}$ con los morfismos de conos la denotaremos **Conos(D)**.

Dado un diagrama $\mathbf{D}$, es una mera comprobación ver que **Conos(D)** es una categoría. Ahora estamos en condiciones de definir un *límite*.

Definición 1.18. Sea $\mathbf{D}$ un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$. Un *límite en el diagrama* $\mathbf{D}$: $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ es un objeto terminal en **Conos(D)**.

Directamente de la definición podemos deducir que un límite tiene la siguiente propiedad universal:

Proposición 1.8. Sea $\mathbf{D}$: $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagrama de tipo $\mathcal{J}$, $(L, p_i)_{i\in\mathcal{J}}$ un límite en $\mathbf{D}$, entonces para cualquier cono $(C, c_i)_{i\in\mathcal{J}}$ en $\mathbf{D}$ existe una única flecha $u : C \longrightarrow L$ tal que para todo $i : p_i \circ u = c_i$

Dem. Consecuencia inmediata de la definición de objeto terminal. □

Como ejemplos podemos ver que algunos de los objetos anteriormente definidos son límites en alguna categoría.

Ejemplo 1: *Producto visto como límite.*
Consideramos $\mathcal{J} = \{1, 2\}$ como la categoría con dos objetos y ningún morfismo distinto de la identidad, gráficamente podemos representarla de la siguiente forma: $\bullet \quad \bullet$
Un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un funtor $\mathbf{D}$ que asigna un par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ a los índices 1 y 2. Un cono en $\mathbf{D}$ es un objeto C y un par de flechas $c_1 : C \longrightarrow A$ y $c_2 : C \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$. Un cono tiene entonces la forma: $A \xleftarrow{c_1} C \xrightarrow{c_2} B$
Veamos que un cono terminal en $\mathbf{D}$ es exactamente el producto de A y B. Sea $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ un objeto terminal en **Conos(D)**, entonces para cualquier otro cono (C, c_1, c_2) existe un único morfismo de conos $u : C \longrightarrow P$, es decir una única flecha $u : C \longrightarrow P$ en $\mathcal{C}$ tal que para todo $i \in \mathcal{J}$ $c_i = p_i \circ u$ que es efectivamente la definición de producto en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 2: *Ecualizador visto como límite.*

Consideramos ahora la categoría $\mathcal{J}$ siguiente: $\bullet \rightrightarrows \bullet$

Un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en una categoría $\mathcal{C}$ genera el mismo esquema pero con objetos y morfismos de $\mathcal{C}$

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Un cono sería un objeto $C \in \mathcal{C}$ con un par de flechas $c_A : C \longrightarrow A$, $c_B : C \longrightarrow B$ verificando $c_B = f \circ c_A$ y $c_B = g \circ c_A$ o lo que es equivalente $f \circ c_A = g \circ c_A$. Un cono terminal (E, e_A, e_B) verifica:

- Por ser cono $f \circ e_A = g \circ e_A$.
- Por ser terminal, para cualquier otro cono, es decir un objeto C en $\mathcal{C}$ verificando que existe $c_A : C \longrightarrow A$ y $f \circ c_A = g \circ c_A$, existe un único morfismo de conos $u : C \longrightarrow E$, es decir una única flecha $u : C \longrightarrow E$ en $\mathcal{C}$ tal que $c_A = e_A \circ u$ y $c_B = e_B \circ u$.

¿Puede existir una flecha cumpliendo $c_A = e_A \circ w$ pero no $c_B = e_B \circ w$?, por ser C un cono $c_B = f \circ c_A$ entonces $c_B = f \circ c_A = f \circ e_A \circ w = e_B \circ w$.

Como siempre, tenemos los conceptos “duales”:

Definición 1.19.

- Un cocono en un diagrama $\mathbf{D}$ es un objeto $A \in \mathcal{C}$ junto con una colección de flechas $c_j : D_j \longrightarrow A$ de forma que para todo $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$ y para toda $\alpha : j \longrightarrow i$ se verifica $c_j = c_i \circ D_\alpha$.
- Dados $(A, a_j)_{j \in \mathcal{J}}$, $(B, b_j)_{j \in \mathcal{J}}$ dos coconos en $\mathbf{D}$. Un morfismo de coconos es una flecha en $\mathcal{C}$, $f : A \longrightarrow B$ con la propiedad de que para todo $i \in \mathcal{J}$ $b_i = f \circ a_i$.
  A la categoría de los coconos en $\mathbf{D}$ con los morfismos de coconos la denotaremos $\mathbf{Coconos}(\mathbf{D})$.
- Un *colímite* es un objeto inicial en $\mathbf{Coconos}(\mathbf{D})$

Definición 1.20. Dada una categoría $\mathcal{C}$ diremos que *tiene todos los límites pequeños* si para cualquier categoría índice cuya colección de objetos y de morfismos sea un conjunto existe un límite. Diremos que *tiene todos los colímites pequeños* si para cualquier categoría índice cuya colección de objetos y morfismos sea un conjunto existe un colímite.

Teorema 1.2. Dada una categoría $\mathcal{C}$ son equivalentes:

I. $\mathcal{C}$ tiene todos los límites pequeños.

II. $\mathcal{C}$ tiene todos los ecualizadores y productos pequeños.

Dem. Que límites pequeños implica productos pequeños es generalizar el ejemplo del producto y ecualizadores que ya ha sido visto. Veamos que dada una categoría $\mathcal{C}$ con productos pequeños y ecualizadores podemos construir cualquier límite pequeño:

Para ello consideramos $\mathbf{D}$:$\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{J}$ es una categoría pequeña. $\prod_{i \in \mathbf{Ob}\mathcal{J}} D_i$ existe por ser $\mathcal{J}$ pequeño, con sus proyecciones $\pi_i : \prod_{i \in Ob\mathcal{J}} D_i \longrightarrow D_i$ y $\prod_{\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})} D_{Codom(\alpha)}$ con sus proyecciones $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})} D_{Codom(\alpha)} \longrightarrow D_{Codom(\alpha)}$.
Consideramos ahora ϕ, $\psi : \prod_{i \in \mathbf{Ob}\mathcal{J}} D_i \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})} D_{Codom(\alpha)}$ definidas de la forma $\pi_\alpha \circ \phi = \pi_{Codom(\alpha)}$ y $\pi_\alpha \circ \psi = D_\alpha \circ \pi_{Codom(\alpha)}$[3].

Consideramos su ecualizador, tenemos la siguiente situación:

$$E \xrightarrow{e} \prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})} D_i \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})} D_{Codom(\alpha)}.$$

Consideramos $(E, e_i)_{i \in \mathcal{J}}$ donde $e_i = \pi_i \circ e$. Sea $c : C \longrightarrow \prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})} D_i$, escribiendo $c_i = \pi_i \circ c : C \longrightarrow D_i$, esto describe un cono si y solo si para todo $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{J})$ y $\alpha : i \longrightarrow j$ $c_j = D_\alpha \circ c_i$ pero tenemos:

$$c_j = \pi_{cod(\alpha)} \circ c = \pi_\alpha \circ \phi c$$
$$D_\alpha \circ c_i = D_\alpha \circ \pi_{dom(\alpha)} \circ c = \pi_\alpha \circ \psi c$$

entonces $c_j = D_\alpha \circ c_i \Leftrightarrow \phi c = \psi c$ luego por las propiedades de ecualizador existe una única flecha $m : C \longrightarrow E$ en $\mathcal{C}$ tal que $c = e \circ m$ y m es un morfismo de conos pues para todo $i \in \mathcal{J}$ $c_i = e_i \circ m$. □

Como se indica en [3], la demostración anterior puede adaptarse facilmente para ver que existen productos de cardinalidad $\mathcal{I}$ y ecualizadores si y solo si existen límites de cardinalidad $\mathcal{I}$.

Teorema 1.3. Dada una categoría $\mathcal{C}$ son equivalentes:

I. $\mathcal{C}$ tiene todos los colímites pequeños.

II. $\mathcal{C}$ tiene todos los coecualizadores y coproductos pequeños.

Dem. Es una repetición de la demostración anterior cambiando la dirección de las flechas, el orden de composición y cada estructura por su "co-estructura". □

Definición 1.21. Un funtor $\mathbf{F}$:$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *preserva un límite de tipo* $\mathcal{J}$ si para todo límite $(L, p_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en un diagrama $\mathbf{D}$:$\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ se tiene que $(\mathbf{F}L, \mathbf{F}p_i)_{i \in \mathcal{J}}$ es un límite en $\mathbf{FD}$:$\mathcal{J} \to \mathcal{D}$.

[3] ϕ y ψ están en la categoría por definición de producto. Para cada $\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathcal{J})$, tenemos que

$$\pi_{Codom(\alpha)} : \prod_{i \in \mathbf{Ob}\mathcal{J}} D_i \longrightarrow D_{Codom(\alpha)}.$$

Por definición de producto para $\prod_\alpha D_{Codom(\alpha)}$ existe un úncio morfismo

$$\phi : \prod_{i \in \mathbf{Ob}\mathcal{J}} D_i \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathbf{Mor}(\mathcal{C})} D_{Codom(\alpha)}$$

tal que $pi_\alpha \circ \phi = \pi_{Codom(\alpha)}$. Análogo para ψ.

1.4. Exponenciales

Las *exponenciales* pueden entenderse como la noción categórica de los espacios de funciones, son además un ejemplo de estructura abstracta que no es un límite. Antes de dar la definición de exponencial, introducimos una notación:

Notación: Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos, supongamos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times A' \arrow[l, "\pi_a"'] \arrow[r, "\pi_{a'}"] & A' \arrow[d, "g"] \\ B & B \times B' \arrow[l, "\pi_b"] \arrow[r, "\pi_{b'}"'] & B' \end{tikzcd}$$

Donde π_i son las respectivas proyecciones de los productos. Entonces denotamos $f \times f'$ a la flecha $(f \circ \pi_a, f' \circ \pi_{a'}) : A \times A' \longrightarrow B \times B'$, que, si se recuerda la notación introducida a continuación de la definición 1.9, es la única flecha $m : A \times A' \longrightarrow B \times B'$ verificando que $\pi_b \circ m = f \circ \pi_a$ y $\pi_{b'} \circ m = f' \circ \pi_{a'}$.

Definición 1.22. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos. La *exponencial de dos objetos A, B en $\mathcal{C}$* es un objeto B^A con un morfismo $ev : B^A \times A \longrightarrow B$ verificando la siguiente propiedad universal:

Para todo objeto C y flecha $f : C \times A \longrightarrow B$ existe un único morfismo $\hat{f} : C \longrightarrow B^A$ tal que $ev \circ (\hat{f} \times 1_A) = f$

$$\begin{tikzcd} B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"] & B \\ C \arrow[u, "\hat{f}"'] & C \times A \arrow[u, "\hat{f} \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 1.23. Una categoría se dice *cerrada cartesianamente* y se denota *ccc* si para cada par de objetos existe su exponencial.

Ejemplos

I. *Exponenciales en* **Set**: La categoría **Set** es *ccc*. Veamos como construir la exponencial de dos objetos A y B.
Consideramos como B^A las funciones $\{g : A \longrightarrow B\}$ con la evaluación $ev(g, a) = ga$. Sea un objeto C y una flecha $f : C \times A \longrightarrow B$, consideramos $\hat{f} : C \longrightarrow B^A$ como $\hat{f}c = f(c, a)$. Entonces tenemos $ev \circ \hat{f} \times 1_A(c, a) = ev(\hat{f}c, a) = \hat{f}c(a) = f(c, a)$. La unicidad es inmediata.

II. *Exponenciales en* **Pos**: Dados $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ dos conjuntos parcialmente ordenados consideramos $B^A = \{f : A \longrightarrow B$ tal que f es monótona$\}$ y definimos el orden $f \leq g$ si y solo si $\forall a \in A$ $fa \leq_B ga$, la evaluación $ev(g, a) = ga$ y para toda $f : C \times A \longrightarrow B$, $\hat{f}c = f(c, a)$. Veamos que tanto ev como $\hat{f}$ son monótonas.

- Sean $(f,a),(f',a') \in B^A \times A$ consideramos el orden visto para productos de conjuntos parcialmente ordenados que denotaremos $\leq_\times$. $(f,a) \leq_\times (f',a') \Leftrightarrow f \leq f'$ y $a \leq_A a' \Leftrightarrow \forall \alpha \in A f\alpha \leq_B f'\alpha$ y $a \leq_A a'$. Entonces $ev(f,a) = fa \leq_B fa'$ por ser f monótona y $fa' \leq_B f'a'$, y por transitividad de $\leq_B$, $ev(f,a) = fa \leq_B f'a' = ev(f',a')$.
- Es inmediato que $\hat{f}$ es monótona ya que f lo es (es un morfismo en la categoría) y $c \leq_C c'$ implica que $(c,a) \leq_\times (c',a)$.

La unicidad de $\hat{f}$, igual que en el ejemplo anterior, es inmedita.

Proposición 1.9. Existe un isomorfismo $Hom_{\mathcal{C}}(A \times B, C) \cong Hom_{\mathcal{C}}(A, C^B)$.

Dem. Consideramos las asignaciones

$$\Phi : Hom_{\mathcal{C}}(A, C^B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A \times B, C) \qquad \Psi : Hom_{\mathcal{C}}(A \times B, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C^B)$$

$$g \longmapsto \overline{g} = ev \circ (g \times 1_B) \qquad\qquad f \longmapsto \hat{f}$$

Donde $\hat{f}$ es el único morfismo que verifica $ev \circ (\hat{f} \times 1_B) = f$ que existe para todo $f : A \times B \longrightarrow C$ por la definición de exponencial y por tanto Ψ está bien definida. Veamos que efectivamente es un isomorfismo:
$\Phi \circ \Psi f = \overline{\hat{f}} = ev \circ (\hat{f} \times 1_B) = f$
$\Psi \circ \Phi g = \hat{\overline{g}}$, donde $\hat{\overline{g}}$ es la única función tal que $\overline{g} = ev \circ (\hat{\overline{g}} \times 1_B) \Rightarrow \hat{\overline{g}} = g$. □

1.5. Naturalidad

En [18] se dice que algo es "natural" si puede ser definido para todos los objetos a la vez. Citando [31]: una 'categoría' se define para poder definir un 'funtor' y un 'funtor' se define para poder definir una *transformación natural.*

Definición 1.24. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ dos funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, una *transformación natural* $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ es una colección de morfismos $(\tau_C : \mathbf{F}C \longrightarrow \mathbf{G}C)_{C \in Ob(\mathcal{C})}$ en $\mathcal{D}$ tal que para todo $f : C \longrightarrow C'$, $\tau_{C'} \circ \mathbf{F}f = \mathbf{G}f \circ \tau_C$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}C & \xrightarrow{\tau_C} & \mathbf{G}C \\ \mathbf{F}f \big\downarrow & & \big\downarrow \mathbf{G}f \\ \mathbf{F}C' & \xrightarrow{\tau_{C'}} & \mathbf{G}C' \end{array}$$

Las transformaciones naturales no son más que morfismos entre funtores. Fijadas dos categorías, nos permite definir la categoría de sus funtores.

Definición 1.25. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Denotamos $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a la categoría cuyos objetos son los funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ y flechas las transformaciones naturales entre ellos.

Para cada objeto $\mathbf{F} \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ se tiene $1_{\mathbf{F}} = (1_{\mathbf{F}C} : \mathbf{F}C \longrightarrow \mathbf{F}C)_{C \in Ob(\mathcal{C})}$.

La composición de dos transformaciones naturales $\mathbf{F} \xrightarrow{\tau} \mathbf{G} \xrightarrow{\eta} \mathbf{H}$ viene dada por

$$(\eta \circ \tau)_C = \eta_C \circ \tau_C.$$

Efectivamente esto forma una categoría:

- La composición de dos transformaciones naturales es una transformación natural: Dados $\mathbf{F} \xrightarrow{\tau} \mathbf{G} \xrightarrow{\eta} \mathbf{H}$ $\eta \circ \tau$ será natural si $\forall f : C \longrightarrow C'$ en $\mathcal{C}$ se verifica

$$(\eta \circ \tau)_{C'} \circ \mathbf{F}f = \mathbf{H}f \circ (\eta \circ \tau)_C.$$

  Por ser τ una transformación natural y asociatividad de la composición en $\mathcal{D}$ tenemos $(\eta \circ \tau)_{C'} \circ \mathbf{F}f = \eta_{C'} \circ \tau_{C'} \circ \mathbf{F}f = \eta_{C'} \circ \mathbf{G}f \circ \tau_C$. Aplicando que η también es natural se sigue: $\eta_{C'} \circ \mathbf{G}f \circ \tau_C = \mathbf{H}f \circ \eta_C \circ \tau_C = \mathbf{H}f \circ (\eta \circ \tau)_C$.

- Que se cumplen las demás reglas de la composición es una mera comprobación que deriva de que se cumplen en $\mathcal{D}$:
  $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ entonces para todo $C \in \mathcal{C}$: $(1_{\mathbf{G}} \circ \tau)_C = 1_{\mathbf{G}C} \circ \tau_C = \tau_C \Rightarrow 1_{\mathbf{G}} \circ \tau = \tau$ y análogamente se comprueba $\tau \circ 1_{\mathbf{F}} = \tau$.
  Sean $\mathbf{F} \xrightarrow{\tau} \mathbf{G} \xrightarrow{\eta} \mathbf{H} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{J}$ para cada $C \in \mathcal{C}$: $((\epsilon \circ \eta) \circ \tau)_C = (\epsilon \circ \eta)_C \circ \tau_C = (\epsilon_C \circ \eta_C) \circ \tau_C$ y por asocitividad $(\epsilon_C \circ \eta_C) \circ \tau_C = \epsilon_C \circ (\eta_C \circ \tau_C) = \epsilon_C \circ (\eta \circ \tau)_C = (\epsilon \circ (\eta \circ \tau))_C \Rightarrow$ $(\epsilon \circ \eta) \circ \tau = \epsilon \circ (\eta \circ \tau)$.

Definición 1.26. Un *isomorfismo natural* entre dos funtores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ es una transformación natural $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ que es un isomorfismo en la categoría $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Lema 1.1. Una transformación natural es un isomorfismo si y solo si cada componente es un isomorfismo.

Dem. Sea $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ una transformación natural con $\mathbf{F}$,$\mathbf{G}$ en $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.
Supongamos que τ es un isomorfismo natural. Existe $\eta : \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F}$ tal que $\eta \circ \tau = 1_{\mathbf{F}}$ y $\tau \circ \eta = 1_{\mathbf{G}}$ y para cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos $(\eta \circ \tau)_C = \eta_C \circ \tau_C = 1_{\mathbf{F}C}$ y $(\tau \circ \eta)_C = \tau_C \circ \eta_C = 1_{\mathbf{G}C} \Rightarrow \eta_C = (\tau_C)^{-1}$.
Supongamos ahora que para cada componente $\tau_C : \mathbf{F}C \longrightarrow \mathbf{G}C$ existe $\tau_C^{-1} : \mathbf{G}C \longrightarrow \mathbf{F}C$ tal que $\tau_C^{-1} \circ \tau_C = 1_{\mathbf{F}C}$ y $\tau_C \circ \tau_C^{-1} = 1_{\mathbf{G}C}$. Definimos $\eta : \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F}$ como $\eta_C = \tau_C^{-1}$ para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$. Veamos que η es una transformación natural. Sea $f : C \longrightarrow C'$ queremos ver $\eta_{C'} \circ \mathbf{G}f = \mathbf{F}f \circ \eta_C \Leftrightarrow \tau_{C'} \circ \eta_{C'} \circ \mathbf{G}f = \tau_{C'}\mathbf{F}f \circ \eta_C \Leftrightarrow \mathbf{G}f \circ \tau_C = \tau_{C'}\mathbf{F}f \circ \eta_C\tau_C \Leftrightarrow$ $\mathbf{G}f \circ \tau_C = \tau_{C'}\mathbf{F}f$ lo que es cierto por ser τ una transformación natural. Nos queda ver que $\eta \circ \tau = 1_{\mathbf{F}}$ y $\tau \circ \eta = 1_{\ \mathbf{G}}$ pero es una comprobación inmediata. □

Definición 1.27. Dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ se dicen *isomorfas* si existen funtores $\mathbf{F}$:$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\mathbf{G}$:$\mathcal{D} \to \mathcal{C}$, tal que $\mathbf{F}\circ$ $\mathbf{G}$= $1_{\mathcal{D}}$ y $\mathbf{G}\circ$ $\mathbf{F}$= $1_{\mathcal{C}}$.

Definición 1.28. Dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ se dicen *equivalentes* y se denota $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ si existen funtores $\mathbf{F}:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\mathbf{G}:\mathcal{D} \to \mathcal{C}$, tal que $\mathbf{F}\circ\ \mathbf{G}$ es naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{D}}$ y $\mathbf{G}\circ\ \mathbf{F}$ es naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{C}}$.

En estas condiciones $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ se dicen *pseudoinversos*.

Definición 1.29. Dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ se dicen *duales* si $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^{op}$.

Definición 1.30. Sea $\mathbf{F}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías localmente pequeñas y $A, B \in \mathcal{C}$ un par de objetos. Consideremos $\mathbf{F}_{AB} : Hom(A,B) \to Hom(\mathbf{F}A,\mathbf{F}B)$ de forma que $\mathbf{F}_{AB}f = \mathbf{F}f$. Bajo estas condiciones el funtor $\mathbf{F}$ se dice

- *Fiel* si $\mathbf{F}_{AB}$ es inyectiva para cualquier par de objetos.
- *Pleno* si $\mathbf{F}_{AB}$ es suprayectiva para cualquier par de objetos.
- *Esencialmente suprayectivo en los objetos* si para cada objeto $D \in \mathcal{D}$ existe un objeto $C \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{F}C \cong D$.

Proposición 1.10. Si $\mathbf{F}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es pleno y fiel entonces $\mathbf{F}A \cong \mathbf{F}B \Leftrightarrow A \cong B$, para cualesquiera A, B objetos de $\mathcal{C}$.

Dem. Por hipótesis existe un isomorfismo $f : \mathbf{F}A \longrightarrow \mathbf{F}B$ y por tanto su inverso f^{-1}. Como $\mathbf{F}$ es pleno existen $h : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow A$ tal que $\mathbf{F}h = f$ y $\mathbf{F}g = f^{-1}$. Entonces $\mathbf{F}(h \circ g) = \mathbf{F}h \circ \mathbf{F}g = f \circ f^{-1} = 1_{\mathbf{F}B} = \mathbf{F}(1_B)$, y por ser fiel esto implica $h \circ g = 1_B$, análogamente podemos ver que $g \circ h = 1_A$, y por tanto tenemos un isomorfismo $A \cong B$. La otra implicación es conocida para cualquier funtor, no necesariamente pleno y fiel. $\square$

Notamos que en la demostración anterior hemos probado también que tanto la imagen como la preimagen de un isomorfismo por un funtor pleno y fiel es un isomorfismo.

Proposición 1.11. Sea $\mathbf{F}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor son equivalentes:

I. $\mathbf{F}$ es parte de una equivalencia de categorías.

II. $\mathbf{F}$ es pleno, fiel y esencialmente suprayectivo en los objetos.

Dem. I$\Rightarrow$ II: Si $\mathbf{F}$ es parte de una equivalencia entonces existe $\mathbf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturales $\tau : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ y $\eta : 1_{\mathcal{D}} \Rightarrow \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$.
Veamo primero que $\mathbf{F}$ es fiel: sean $\mathbf{F}f = \mathbf{F}g$ entonces necesariamente f, g tienen el mismo dominio y codominio $f, g : C \longrightarrow C'$ y los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{GF}C \arrow[d, "\mathbf{GF}f"] \\ C' \arrow[r, "\tau_{C'}"] & \mathbf{GF}C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{GF}C \arrow[d, "\mathbf{GF}g"] \\ C' \arrow[r, "\tau_{C'}"] & \mathbf{GF}C' \end{tikzcd}$$

Es decir $\tau_{C'} \circ f = \mathbf{GF}f \circ \tau_C = \mathbf{GF}g \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ g \Rightarrow \tau_{C'} \circ f = \tau_{C'} \circ g$, y como τ isomorfismo natural sabemos que $\tau_{C'}$ es un isomorfismo, luego en particular es monomorfismo $\Rightarrow f = g$ $\Rightarrow$ **F** fiel. Como **G** es parte de una equivalencia, hemos probado que también es fiel.
Veamos ahora que **F** es pleno: sea $h : \mathbf{F}C \longrightarrow \mathbf{F}C'$ en $\mathcal{D}$ queremos ver que existe f en $\mathcal{C}$ tal que $\mathbf{F}f = h$. Definimos $f : C \xrightarrow{\tau_C} \mathbf{GF}C \xrightarrow{\mathbf{G}h} \mathbf{GF}C' \xrightarrow{\tau_{C'}^{-1}} C'$ que está en $\mathcal{C}$ pues $\tau_{C'}^{-1}$ está por ser $\tau_{C'}$ un ismorfismo y la composición de flechas en $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{GF}C \arrow[d, "\mathbf{GF}f"] \\
C' \arrow[r, "\tau_{C'}"] & \mathbf{GF}C'
\end{tikzcd}$$

y por tanto $\mathbf{GF}f \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ f = \tau_{C'} \circ \tau_{C'}^{-1} \circ \mathbf{G}f \circ \tau_C \Rightarrow \mathbf{GF}f = \mathbf{G}f$ y como **G** es fiel $\mathbf{F}f = h$, luego **F** es pleno.
Por último veamos que es esencialmente suprayectivo en los objetos: dado $D \in \mathcal{D}$, como $\eta : 1_{\mathcal{D}} \Rightarrow \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ es un isomorfismo natural $\eta_D : D \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{G}D)$ es un isomorfismo con $\mathbf{G}D$ un objeto de $\mathcal{C}$.

II$\Rightarrow$I: Partiendo ahora de que **F** es pleno, fiel y esencialmente suprayectivo en los objetos queremos definir: $\mathbf{G}:\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor y dos isomorfismos naturales $\tau : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$, $\eta : 1_{\mathcal{D}} \Rightarrow \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$.
Como **F** es esencialmente suprayectivo en los objetos, para cada $D \in \mathcal{D}$ existe algún $C \in \mathcal{C}$ y una biyección $\eta_D : D \longrightarrow \mathbf{F}C$. Así para cada $D \in \mathcal{D}$ escogemos un C que verifique esto y definimos $\mathbf{G}D = C$. Ahora para toda flecha $h : D \longrightarrow D'$ en $\mathcal{D}$, consideramos $\eta_{D'} \circ h \circ \eta_D^{-1} : \mathbf{FG}D \longrightarrow \mathbf{FG}D'$. Como **F** es pleno y fiel para $\eta_{D'} \circ h \circ \eta_D^{-1}$ existe una única flecha $f : \mathbf{G}D \longrightarrow \mathbf{G}D'$ tal que $\mathbf{F}f = \eta_{D'} \circ h \circ \eta_D^{-1}$, tomamos entonces $\mathbf{G}h = f$. Veamos que **G** así definido es un funtor y que $\eta = (\eta_D)_{D \in Ob(\mathcal{D})}$ es un isomorfismo natural.

- Claramente por como lo hemos definido $\mathbf{G}h : \mathbf{G}Dom(h) \longrightarrow \mathbf{G}Codom(h)$ para toda flecha h de $\mathcal{D}$.

- $\mathbf{G}1_D$ es la única flecha $f : \mathbf{G}D \longrightarrow \mathbf{G}D$ tal que $\mathbf{F}f = \eta_D \circ 1_D \circ \eta_D^{-1} = 1_D$, entonces $\mathbf{F}\ \mathbf{G}1_D = 1_D$, como **F** es pleno y fiel esto implica que $\mathbf{G}1_D = 1_{\mathbf{F}^{-1}D}$ y por definición de **G**, $\mathbf{F}^{-1}D = \mathbf{G}D \Rightarrow \mathbf{G}1_D = 1_{\mathbf{G}D}$.

- Sean $h : D \longrightarrow D'$ y $h' : D' \longrightarrow D''$ $\mathbf{G}h' \circ h$ es la única flecha f tal que $\mathbf{F}f = \eta_{D''} \circ (h' \circ h) \circ \eta_D$. Mientras que $\mathbf{G}h$ y $\mathbf{G}h'$ son las únicas flechas g, g' respectivamente $\mathbf{F}g = \eta_{D'} \circ h \circ \eta_D^{-1}$ y $\mathbf{F}g' = \eta_{D''} \circ h' \circ \eta_{D'}^{-1}$, entonces $\mathbf{F}g' \circ \mathbf{F}g = \eta_{D''} \circ h' \circ \eta_{D'}^{-1} \circ \eta_{D'} \circ h \circ \eta_D^{-1} = \mathbf{F}f$ y por ser **F** un funtor sabemos que $\mathbf{F}(g' \circ g) = \mathbf{F}g' \circ \mathbf{F}g = \mathbf{F}f$ luego por unicidad $g' \circ g = f \Rightarrow \mathbf{G}h' \circ \mathbf{G}h = \mathbf{G}(h' \circ h)$.

- $\eta = (\eta_D)_{D \in Ob(\mathcal{D})}$ es natural de forma obvia por como hemos definido **G** y un isomorfismo por serlo cada una de sus componentes.

Nos queda solamente definir $\tau : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$ consideramos:

$$\eta_{\mathbf{F}C} : \mathbf{F}C \longrightarrow \mathbf{FGF}C$$

$\eta_{\mathbf{F}C}$ es un isomorfismo, y como $\mathbf{F}$ es pleno y fiel, su preimagen por $\mathbf{F}$ también lo es. Tomemos τ actuando en los objetos de $\mathcal{C}$ de la forma $\tau_C = \mathbf{F}^{-1}\eta_{\mathbf{F}C} : C \longrightarrow \mathbf{GF}C$ veamos que es efectivamente natural y por tanto isomorfismo ya que cada componente lo es.
Sea $f : C \longrightarrow C'$. Sabemos que para $\mathbf{F}f : \mathbf{F}C \longrightarrow \mathbf{F}C'$ se verifica:

$$\eta_{\mathbf{F}C'} \circ \mathbf{F}f = \mathbf{FGF}f \circ \eta_{\mathbf{F}C} \Leftrightarrow \mathbf{F} \circ \tau_{C'} \circ \mathbf{F}f = \mathbf{FGF}f \circ \mathbf{F} \circ \tau_C$$

y, por ser $\mathbf{F}$ un funtor, esto es equivalente a $\mathbf{F}(\tau_{C'} \circ f) = \mathbf{F}(\mathbf{GF}f \circ \tau_C)$. Por ser $\mathbf{F}$ fiel, esto implica $\tau_{C'} \circ f = \mathbf{GF}f \circ \tau_C$. Por tanto τ es efectivamente un isomorfismo natural. $\square$

El siguiente teorema no vamos a probarlo, puede consultarse en [3].

Teorema 1.4. La categoría de las categorías localmente pequeñas **Cat** con los funtores entre ellas es cerrada cartesianamente, de hecho, dadas $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías localmente pequeñas

$$\mathcal{C}^{\mathcal{D}} = \{\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C} | \mathbf{F} \text{ es un funtor } \}.$$

1.6. El lema de Yoneda

El *Lema de Yoneda* es probablemente uno de los resultados más importantes en teoría de categorías. Como se explica en [43], este lema implica que un objeto matemático general puede "representarse" como un funtor que toma valores en **Set**. El lema de Yoneda puede entenderse como un teorema de representación que generaliza el de Cayley para grupos[4].

A lo largo de esta sección supondremos categorías localmente pequeñas.

Definición 1.31. Un funtor se dirá *encaje* si es pleno, fiel e inyectivo en los objetos.

Definición 1.32. Llamamos *funtor de Yoneda* al funtor:

$$y : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$$

Llevando cada objeto $C \in \mathcal{C}$ al funtor $Hom_{\mathcal{C}}(-, C) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ que actúa de la siguiente manera:
A un objeto $A \in \mathcal{C}^{op}$ lo lleva al conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ y a una flecha $f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}^{op}$ a la aplicación:

$$yC(f) : Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$$

$$g : A \longrightarrow C \longmapsto g \circ f$$

[4] "Todo grupo es isomorfo a un subgrupo del grupo simétrico." ([44])

A cada morfismo $f : C \longrightarrow D$ en $\mathcal{C}$, y lo lleva a la transformación natural

$$Hom_{\mathcal{C}}(-, f) : Hom_{\mathcal{C}}(-, C) \Rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(-, D)$$

que para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$

$$yf(A) : Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, D)$$

$$g : A \longrightarrow C \longmapsto f \circ g$$

Comprobemos que y está bien definido y es, efectivamente, un funtor.

- Como $\mathcal{C}$ es localmente pequeña y **Cat** es *ccc* tenemos que $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \in \mathbf{Set}$ para todo $A, B \in \mathcal{C}$ y que efectivamente existe $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} = Fun(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$.
- Para cada objeto $C \in \mathcal{C}^{op}$ $yC = Hom_{\mathcal{C}}(-, C) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ tal como lo hemos definido es efectivamente un funtor:
  1. $f : A \longrightarrow B$ entonces $yCf : yCA \longrightarrow yCB$ por definición.
  2. $A \in Ob(\mathcal{C}^{op})$, entonces $yC(1_A)g = g \circ 1_A = g$ para todo $g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$, $\Rightarrow$ $yC(1_A) = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(A,C)}$.
  3. $yC(f \circ g)h = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = yC(f)h \circ g = yC(g)(yCf(h)) = (yCg \circ yCf)h \Rightarrow yC(f \circ g) = yCg \circ yCf$.
- Para cada morfismo $f : C \longrightarrow D$, yf es una transformación natural. Sea una flecha $g : A \longrightarrow A'$, yf es natural si $Hom_{\mathcal{C}}(g, D) \circ yfA = yfA' \circ Hom_{\mathcal{C}}(g, C)$. Sea entonces $h \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ tenemos:
  Por un lado $Hom_{\mathcal{C}}(g, D) \circ yfAh = Hom_{\mathcal{C}}(g, D)(f \circ h) = f \circ h \circ g$
  Por otro lado: $yfA' \circ Hom_{\mathcal{C}}(g, C)h = yfA'(h \circ g) = f \circ h \circ g$
- $y : \mathcal{C} \Rightarrow Fun(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ es efectivamente un funtor:
  1. $f : C \longrightarrow D$ entonces $yf : yC \Rightarrow yD$ por definición.
  2. Sea $A \in Ob(\mathcal{C})$, $y1_A : Hom_{\mathcal{C}}(-, A) \Rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(-, A)$ es la transformación natural que para cada $B \in Ob(\mathcal{C})$ actúa de la manera:

     $$y1_A(B) : Hom_{\mathcal{C}}(B, A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$$

     $$g \longmapsto 1_A \circ g = g$$

     en **Set** esta aplicación es la identidad del conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(B, A) = yA(B)$, es decir para cada $B \in Ob(\mathcal{C})$: $(y1_A)_C = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(B,A)} = 1_{yA(B)}$, y esta transformación es precisamente 1_{yA} en $Fun(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$.
  3. Sean $f : C \longrightarrow D, g : D \longrightarrow E$ tenemos que para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$ $y(g \circ f)(A)$ actúa de la forma :

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,E)$$

$$h : A \longrightarrow C \longmapsto g \circ f \circ h$$

y $(yg \circ yf)(A)$ lo hace igual:

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \xrightarrow{yf} Hom_{\mathcal{C}}(A,D) \xrightarrow{yg} Hom_{\mathcal{C}}(A,E)$$

$$h : A \longrightarrow C \longmapsto f \circ h \longmapsto g \circ f \circ h$$

Para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ el funtor $Hom_{\mathcal{C}}(-,C)$ es lo que se conoce como un *funtor representable* (contravariante). Siguiendo [31] un funtor $\mathbf{F}$: $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría localmente pequeña se dice *representable* (de forma covariante) si existe un par (ϕ, D) donde ϕ es una transformación natural y D un objeto de $\mathcal{C}$ de forma que

$$\phi : Hom_{\mathcal{C}}(D,-) \cong \mathbf{F}.$$

Lema 1.2. (Yoneda) Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, $\mathbf{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ un funtor y $C \in \mathcal{C}$ un objeto, entonces existe una biyección natural en C y en $\mathbf{F}$

$$Hom(yC, \mathbf{F}) \cong \mathbf{F}C$$

donde y es el funtor de Yoneda y $Hom(yC, \mathbf{F})$ son las transformaciones naturales

$$\tau : yC = Hom_{\mathcal{C}}(-,C) \Rightarrow \mathbf{F}.$$

Dem. Definimos:

$$\Phi : Hom(yC, \mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{F}C \qquad \Psi : \mathbf{F}C \longrightarrow Hom(yC, \mathbf{F})$$

$$\tau : yC \Rightarrow \mathbf{F} \longmapsto \tau_C(1_C) \qquad a \longmapsto \tau_a$$

siendo para cada objeto $B \in \mathcal{C}^{op}$ $\tau_{aB} : Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathbf{F}B$ tal que $\tau_{aB}h = \mathbf{F}h(a)$.

- Φ está bien definida, pues para $\tau \in Hom(yC, \mathbf{F})$, $\tau_C : Hom_{\mathcal{C}}(C,C) \longrightarrow \mathbf{F}C$ entonces $\tau_C(1_C) \in \mathbf{F}C$.
- Veamos que $\Psi a = \tau_a$ es efectivamente una transformación natural, sea $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tenemos por un lado $(\mathbf{F}f \circ \tau_{aB})h = \mathbf{F}f \circ \mathbf{F}h(a) = \mathbf{F}(h \circ f)(a)$ y por otro $(\tau_{aA} \circ yCf)(h) = \tau_{aA}(h \circ f) = \mathbf{F}(h \circ f)(a)$, luego el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
yCA \arrow[r, "\tau_{aA}"] & \mathbf{F}A \\
yCB \arrow[u, "yCf"] \arrow[r, "\tau_{aB}"] & \mathbf{F}B \arrow[u, "\mathbf{F}f"']
\end{tikzcd}$$

- Φ y Ψ son inversas una de la otra:
  $\Phi \circ \Psi(a) = \Phi(\tau_a) = \tau_{aC}(1_C) = \mathbf{F}1_C(a) = 1_{\mathbf{F}C}(a) = a$.
  $\Psi \circ \Phi(\tau) = \Psi(\tau_C(1_C))$ esto será τ si y solo si para cada $B \in Ob(\mathcal{C}^{op})$ tenemos que $(\Psi(\tau_C 1_C))_B = \tau_B$. Sea $h \in yCB = Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $(\Psi(\tau_C 1_C))_B h = \mathbf{F}h(\tau_C 1_C)$. Por ser τ una transformación natural, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} yCB & \xrightarrow{\tau_B} & \mathbf{F}B \\ {\scriptstyle yCh}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{F}h} \\ yCC & \xrightarrow{\tau_C} & \mathbf{F}C \end{array}$$

  por tanto $(\Psi(\tau_C 1_C))_B h = \mathbf{F}h(\tau_C 1_C) = \tau_B yCh(1_C) = \tau_B(1_C \circ h) = \tau_B h \Rightarrow (\Psi(\tau_C 1_C))_B = \tau_B \Rightarrow \Psi(\tau_C 1_C) = \tau$. Tenemos entonces un isomorfismo.

- La naturalidad en $\mathbf{F}$ significa que para toda transformación natural $\tau : \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom(yC, \mathbf{F}) & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{F}}} & \mathbf{F}C \\ {\scriptstyle Hom(yC,\tau)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_C} \\ Hom(yC, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{G}}} & \mathbf{G}C \end{array}$$

  Consideramos $\eta \in Hom(yC, \mathbf{F})$, $(\Phi_{\mathbf{G}} \circ Hom(yC, \tau))(\eta) = \Phi_{\mathbf{G}}(\tau \circ \eta) = (\tau \circ \eta)_C(1_C) = (\tau_C \circ \eta_C)(1_C) = \tau_C(\eta_C 1_C) = (\tau_C \circ \Phi_{\mathbf{F}})(\eta)$.

- La naturalidad en C significa que para toda flecha $h : C \longrightarrow D$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Hom(yC, \mathbf{F}) & \xrightarrow{\Phi_C} & \mathbf{F}C \\ {\scriptstyle Hom(yh,\mathbf{F})}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{F}h} \\ Hom(yD, \mathbf{F}) & \xrightarrow{\Phi_D} & \mathbf{F}D \end{array}$$

  Sea $\eta \in Hom(yD, \mathbf{F})$, $(\Phi_C \circ Hom(yh, \mathbf{F}))(\eta) = \Phi_C(\eta \circ yh) = (\eta \circ yh)_C(1_C) = \eta_C(yh_C 1_C) = \eta_C(h \circ 1_C) = \eta_C(1_D \circ h) = \eta_C(yD(h)(1_D))$. Ahora como $\eta : yD \Rightarrow \mathbf{F}$ es natural y $h : C \longrightarrow D$ tenemos $\eta_C \circ yD(h) = \mathbf{F}(h) \circ \eta_D$, luego la igualdad sigue $\eta_C(yD(h)(1_D)) = (\mathbf{F}(h) \circ \eta_D)(1_D) = (\mathbf{F}(h) \circ \Phi_D)(\eta)$. $\square$

Corolario 1.1. El funtor de Yoneda, y, es un encaje.

Dem. La inyectividad en los objetos es trivial pues,

$$yC = yD \Leftrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(-, C) = Hom_{\mathcal{C}}(-, D) \Leftrightarrow C = D.$$

Sean $C, D \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ por el lema de Yoneda sabemos que

$$Hom(yC, yD) \cong yDC = Hom_{\mathcal{C}}(C, D).$$

Este isomorfismo, tal y como se definió en el lema anterior viene inducido por y. En este caso tenemos

$$\Psi : yDC = Hom_{\mathcal{C}}(C, D) \to Hom(yC, yD)$$

$$h \longmapsto \tau_h$$

donde $\tau_{hB} : Hom(B, C) \to Hom(B, D)$ actúa de la forma $\tau_{hB} f = yDf(h) = h \circ f = yh(B)(f) \Rightarrow \tau_{hB} = yh(B) \Rightarrow \Psi h = \tau_h = yh \Rightarrow \Psi = y$. □

1.7. Adjuntos

La noción de "adjuntos" es muy antigua en áreas como la de ecuaciones diferenciales, sin embargo, no se formula explícitamente en teoría de categorías hasta 1958 por Kan ([29]). Aunque aquí no llegaremos a la profundidad suficiente como para hacer esto explícito, los *adjuntos* son una de las construcciones más importantes en teoría de categorías. Existen además muchos paralelismos entre la noción de operador adjunto[5] y la de funtor adjunto ([33]).

Para esta parte seguiremos considerando categorías localmente pequeñas.

Definición 1.33. Una *adjunción* consiste en dos funtores

$$\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathbf{G}$$

tales que para cualquier $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ existe un isomorfismo

$$\phi : Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, D) \cong Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D) : \psi$$

que es natural en C y D. En estas condiciones diremos que $\mathbf{F}$ es adjunto por la izquierda de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}$ es adjunto por la derecha de $\mathbf{F}$, y se denota $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$.

Proposición 1.12. Si $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G'}$ son adjuntos a la derecha de $\mathbf{F}$, entonces son isomorfos.

Dem. $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$ y $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G'}$ implica $Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D) \cong Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G'}D)$ para todo $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$, pero $Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D) = y\mathbf{G}D(C)$, tenemos luego $y\mathbf{G}D(C) \cong y\mathbf{G'}D(C)$ naturalmente para todo $C \in \mathcal{C}$ entonces $y\mathbf{G}D \cong y\mathbf{G'}D \Rightarrow \mathbf{G}D \cong \mathbf{G'}D$ naturalmente en D lo que implica $\mathbf{G} \cong \mathbf{G'}$. □

Definición 1.34. Sea $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathbf{G}$ una adjunción

[5] En análisis funcional, $T^* \in L(H_2, H_1)$ es adjunto de $T \in L(H_1, H_2)$ si verifican $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$ con H_1, H_2 espacios de Hilbert ([34]).

I. Se dice *unidad* a una transformación natural $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{GF}$ tal que para cada flecha $\alpha : X \longrightarrow \mathbf{G}Y$ en $\mathcal{C}$ existe una única flecha $\hat{\alpha}$:$\mathbf{F}X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{D}$ de forma que $\alpha = \mathbf{G}\hat{\alpha}\eta_X$.

II. Se dice *counidad* a una transformación natural ε :$\mathbf{FG} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ tal que para cada flecha β :$\mathbf{F}X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{D}$ existe una única flecha $\hat{\beta} : X \longrightarrow \mathbf{G}Y$ en $\mathcal{C}$ de forma que $\beta = \varepsilon_Y \mathbf{F}\hat{\beta}$.

Proposición 1.13. Dados dos funtores $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathbf{G}$, son equivalentes:

I. Existe una transformación natural $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{GF}$ tal que para cada flecha $\alpha : C \longrightarrow \mathbf{G}D$ en $\mathcal{C}$ existe una única flecha $\hat{\alpha}$:$\mathbf{F}C \longrightarrow D$ en $\mathcal{D}$ de forma que $\alpha = \mathbf{G}\hat{\alpha}\eta_C$.

II. Existe una transformación natural ε :$\mathbf{FG} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ tal que para cada flecha β :$\mathbf{F}C \longrightarrow D$ en $\mathcal{D}$ existe una única flecha $\hat{\beta} : C \longrightarrow \mathbf{G}D$ en $\mathcal{C}$ de forma que $\beta = \varepsilon_D \mathbf{F}\hat{\beta}$.

III. Para cualquier $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ existe un isomorfismo

$$\phi : Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, D) \cong Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D) : \psi$$

que es natural en C y D.

Estas condiciones se relacionan por las fórmulas

$$\eta_C = \phi 1_{\mathbf{F}C},\ \phi(g) = \mathbf{G}(g) \circ \eta_C$$
$$\varepsilon_D = \psi 1_{\mathbf{G}D},\ \psi(f) = \varepsilon_D \circ \mathbf{F}(f)$$

Dem. I$\Rightarrow$III: Definimos $\phi : Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, D) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D)$ como $\phi(g) = \mathbf{G}(g) \circ \eta_C$ que está claramente en $Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D)$ pues $\mathbf{G}(g) : \mathbf{GF}C \longrightarrow \mathbf{G}D$, $\eta_C : C \longrightarrow \mathbf{GF}C$ y la composición está en la categoría.
Como $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son localmente pequeñas ϕ es un morfismo en **Set**, así que será isomorfismo si y solo si es biyectiva.

- Suprayectividad: Sea $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D)$, entonces por I existe una única flecha $\hat{h} : \mathbf{F}C \longrightarrow D$ tal que $h = \mathbf{G}\hat{h}\eta_C = \phi(h)$.
- Inyectividad: $\phi(g) = \phi(h) \Leftrightarrow \mathbf{G}g\eta_C = \mathbf{G}h\eta_C : C \longrightarrow \mathbf{G}D$ por unicidad de la condición para η esto implica $g = h$.

Veamos ahora la naturalidad:

- La naturalidad en C implica que para todo morfismo $f : C \longrightarrow C'$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C', D) \arrow[r, "\phi_{C'}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}f, D)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C', \mathbf{G}D) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{G}D)"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, D) \arrow[r, "\phi_C"] & Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D)
\end{tikzcd}$$

Sea entonces $g : \mathbf{F}C' \longrightarrow D$:
$(Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{G}D) \circ \phi_{C'})(g) = Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{G}D)(\mathbf{G}(g) \circ \eta_{C'}) = \mathbf{G}(g) \circ \eta_{C'} \circ f$ y como η es natural:
$\eta_{C'} \circ f = \mathbf{GF}(f) \circ \eta_C$, entonces $\mathbf{G}(g) \circ \eta_{C'} \circ f = \mathbf{G}(g)\mathbf{GF}(f) \circ \eta_C = \mathbf{G}(g \circ \mathbf{F}f) \circ \eta_C = \phi_C(g \circ \mathbf{F}f) = \phi_C(Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}f, D)(g)) = (\phi_C \circ Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}f, D))(g)$.

- La naturalidad en D significa que para todo $g : D \longrightarrow D'$ en $\mathcal{D}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, D) \arrow[r, "\phi_D"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, g)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}g)"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, D') \arrow[r, "\phi_{D'}"] & Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D')
\end{tikzcd}$$

Sea $h : \mathbf{F}C \longrightarrow D$:
$(Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}g) \circ \phi_D)(h) = Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}g)(\mathbf{G}h \circ \eta_C) = \mathbf{G}g \circ \mathbf{G}h \circ \eta_C = \mathbf{G}(g \circ h) \circ \eta_C = \phi_{D'}(g \circ h) = \phi_{D'}(Hom_{\mathbf{D}}(\mathbf{F}C, g)(h))$.

III⇒I: La naturalidad en D significa que dadas $f : \mathbf{F}C \longrightarrow D$ y $g : D \longrightarrow D'$

$$(Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}g) \circ \phi)f = (\phi \circ Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, g))f \Leftrightarrow \mathbf{G}g \circ \phi(f) = \phi(g \circ f).$$

Análogamente la naturalidad en D implica que dadas $h : C \longrightarrow C'$ y $f : C' \longrightarrow \mathbf{G}D$

$$\psi(f \circ h) = \psi(f) \circ \mathbf{F}h.$$

Definimos entonces $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{GF}$ como $\eta_C = \phi(1_{\mathbf{F}C})$ para todo objeto $C \in \mathcal{C}$, veamos que efectivamente es natural.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{GF}C \arrow[d, "\mathbf{GF}f"] \\
C' \arrow[r, "\eta_{C'}"] & \mathbf{GF}C'
\end{tikzcd}$$

Dado $f : C \longrightarrow C'$, queremos ver $\eta_{C'} \circ f = \mathbf{GF}f \circ \eta_C$.
$\eta_{C'} \circ f = Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{GF}C')(\eta_{C'}) = Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{GF}C')(\phi(1_{\mathbf{F}C'})) = (Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{GF}C') \circ \phi)(1_{\mathbf{F}C'})$, notando que la naturalidad de ϕ para C implica $Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{GF}C') \circ \phi = \phi \circ Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}f, \mathbf{F}C')$, se sigue: $(Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{GF}C') \circ \phi)(1_{\mathbf{F}C'}) = \phi \circ Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}f, \mathbf{F}C')(1_{\mathbf{F}C'}) = \phi(Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}f, \mathbf{F}C')(1_{\mathbf{F}C'})) = \phi(1_{\mathbf{F}C'} \circ \mathbf{F}f) = \phi(\mathbf{F}f) = \phi(\mathbf{F}f \circ 1_{\mathbf{F}C}) = \mathbf{GF}f \circ \phi(1_{\mathbf{F}C}) = \mathbf{GF}f \circ \eta_C$.

II⇔III se tiene por un razonamiento análogo. □

Ejemplo: *Grupos libres sobre un conjunto:*

Definición 1.35. Un *grupo libre sobre un conjunto* X es un par (F, i) donde F es un grupo[6], $i : X \longrightarrow F$ una aplicación, tal que para todo grupo G y toda aplicación $f : X \longrightarrow G$ existe un único homomorfismo de grupos $g : F \longrightarrow G$ verificando $f = g \circ i$, es decir, haciendo el siguiente esquema conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\exists! g"] & G \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 1.36. A la categoría cuyos objetos son los grupos y morfismos los homomorfismos de grupos entre ellos la denotaremos **Grupos**.

Consideremos el funtor $\mathbf{U} : \mathbf{Grupos} \to \mathbf{Set}$, que a cada grupo le asocia su conjunto subyacente y a cada homomorfismo de grupos la aplicación entre conjuntos actuando de igual forma que el homomorfismo.

A este funtor se le suele llamar *funtor olvido*.

Supongamos que existe un funtor $\mathbf{F} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grupos}$ tal que $\mathbf{F} \dashv \mathbf{U}$. Entonces para cada conjunto X, grupo G y flecha $f : X \longrightarrow \mathbf{U}(G)$, es decir, aplicación $f : X \longrightarrow G$, existe una única flecha $g : \mathbf{F}(X) \longrightarrow G$ tal que $f = \mathbf{U}(g) \circ \eta_X$ donde $\eta : 1_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \mathbf{U}\ \mathbf{F}$ es la unidad de la adjunción.

Como g es una flecha en la categoría de grupos es un homomorfismo de grupos. Además, por cómo actúa el funtor olvido tenemos que $f = g \circ \eta_X$ y $\eta_X : X \longrightarrow \mathbf{F}X$. Es decir, (FX, η_X) es un grupo libre sobre el conjunto X.

1.7.1. Caracterización de las unidades

Esta última parte se ha seguido por el anexo de categorías de [40] y nos permitirá simplicar alguna demostración en el capítulo de topología sin puntos.

Mantenemos la misma notación usada hasta ahora, consideramos $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathbf{G}$ tales que $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$. Entonces existen isomorfismos

$$\phi_{C,D} : Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, D) \cong Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}D) : \psi_{C,D}$$

naturales en C y D, y $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{GF}$, $\varepsilon : \mathbf{FG} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ la unidad y counidad respectivamente.

Según esta notación y la proposición 1.13 tenemos $\eta_C = \phi_{C,\mathbf{F}C}(1_{\mathbf{F}C})$ y $\varepsilon_D = \psi_{\mathbf{G}D,D}(1_{\mathbf{G}D})$.

Además, por naturalidad de ϕ en D se tiene que para toda flecha $f : \mathbf{F}C \longrightarrow D$ y $g : D \longrightarrow D'$:

$$\mathbf{G}(g) \circ \phi_{C,D}(f) = \phi_{C,D'}(g \circ f)$$

y por naturalidad de ψ en C, para toda $f : C \longrightarrow C'$, $g : C' \longrightarrow \mathbf{G}(D)$:

$$\psi_{C',D}(g) \circ \mathbf{F}f = \psi_{C,D}(g \circ f)$$

[6]Un grupo es un conjunto dotado de una operación binaria interna $(G, \cdot)$ verificando: asociatividad, existencia de elemento neutro y existencia de inversos. ([44])

Proposición 1.14. En las condiciones anteriores, para todo $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ se tiene:

$$\varepsilon_{\mathbf{F}C} \circ \mathbf{F}(\eta_C) = 1_{\mathbf{F}C}$$
$$\mathbf{G}(\varepsilon_D) \circ \eta_{\mathbf{G}D} = 1_{\mathbf{G}D}$$

Dem. $\varepsilon_{\mathbf{F}C} \circ \mathbf{F}(\eta_C) = \psi_{\mathbf{GF}C,\mathbf{F}C}(1_{\mathbf{GF}C}) \circ \mathbf{F}(\phi_{C,\mathbf{F}C}(1_{\mathbf{F}C})) = \psi_{C,\mathbf{F}C}(1_{\mathbf{GF}C} \circ \phi_{C,\mathbf{F}C}(1_{\mathbf{F}C})) = \psi_{C,\mathbf{F}C}(\phi_{C,\mathbf{F}C}(1_{\mathbf{F}C})) = 1_{\mathbf{F}C}$ ya que $\psi_{C,\mathbf{F}C}$ es inversa de $\phi_{C,\mathbf{F}C}$.

Por el otro lado: $\mathbf{G}(\varepsilon_D) \circ \eta_{\mathbf{G}D} = \mathbf{G}(\psi_{\mathbf{G}D,D}(1_{\mathbf{G}D})) \circ \phi_{\mathbf{G}D,\mathbf{FG}D}(1_{\mathbf{FG}D}) = \phi_{\mathbf{G}D,D}(\psi_{\mathbf{G}D,D}(1_{\mathbf{G}D}) \circ 1_{\mathbf{FG}D}) = \phi_{\mathbf{G}D,D}(\psi_{\mathbf{G}D,D}(1_{\mathbf{G}D})) = 1_{\mathbf{G}D}$. □

Teorema 1.5. Existe una correspondecia biyectiva entre adjunciones

$$\phi_{-,-} : Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}-, -) \cong Hom_{\mathcal{C}}(-, \mathbf{G}-) : \psi_{-,-}$$

y pares de transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbf{GF}$ y $\varepsilon : \mathbf{FG} \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ tales que para todo $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ verificando

$$\varepsilon_{\mathbf{F}C} \circ \mathbf{F}(\eta_C) = 1_{\mathbf{F}C}$$
$$\mathbf{G}(\varepsilon_D) \circ \eta_{\mathbf{G}D} = 1_{\mathbf{G}D}$$

Dem. Por la proposición 1.13, a partir de una adjunción sabemos como definir un par de transformaciones naturales que, por 1.14, verifican las propiedades.

Sean η y ε dos transformaciones naturales verificando $\varepsilon_{\mathbf{F}C} \circ \mathbf{F}(\eta_C) = 1_{\mathbf{F}C}$ y $\mathbf{G}(\varepsilon_D) \circ \eta_{\mathbf{G}D} = 1_{\mathbf{G}D}$ para todo $C \in \mathcal{C}$ y para todo $D \in \mathcal{D}$, entonces definimos $\phi(g) = \mathbf{G}(g) \circ \eta_C$ y $\psi(f) = \varepsilon_D \circ \mathbf{F}(f)$ para todo $g : \mathbf{F}C \longrightarrow D$ y $f : C \longrightarrow \mathbf{G}D$.

- ϕ y ψ son inversas:
  - $\phi \circ \psi(f) = \phi(\varepsilon_D \circ \mathbf{F}(f)) = \mathbf{G}(\varepsilon_D \circ \mathbf{F}f) \circ \eta_C$. Como $\mathbf{G}$ es un funtor esta igualdad sigue: $\mathbf{G}(\varepsilon_D) \circ \mathbf{GF}f \circ \eta_C$, por naturalidad de η tenemos que lo anterior es igual a $\mathbf{G}(\varepsilon_D) \circ \eta_{\mathbf{G}D} \circ f = 1_{\mathbf{G}D} \circ f = f$.
  - $\psi \circ \phi(g) = \psi(\mathbf{G}(g) \circ \eta_C) = \varepsilon_D \circ \mathbf{F}(\mathbf{G}(g) \circ \eta_C) = \varepsilon_D \circ \mathbf{FG}(g) \circ \mathbf{F}(\eta_C) = g \circ \varepsilon_{\mathbf{F}C} \circ \mathbf{F}(\eta_C) = g \circ 1_{\mathbf{F}C} = g$.
- Comprobamos la naturalidad en C y D para ϕ:
  - Sea $f : C \longrightarrow C'$ y $g : \mathbf{F}C' \longrightarrow D$ entonces $\phi_{C,D} \circ Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}f, D)(g) = \phi_{C,D}(g \circ \mathbf{F}f) = \mathbf{G}(g \circ \mathbf{F}f) \circ \eta_C = \mathbf{G}(g) \circ \mathbf{GF}f \circ \eta_C = \mathbf{G}(g) \circ \eta_{C'} \circ f = \phi_{C',D}(g) \circ f = Hom_{\mathcal{C}}(f, \mathbf{G}D) \circ \phi_{C',D}(g)$.
  - Sea $g : D \longrightarrow D'$ y $f : \mathbf{F}C \longrightarrow D$ tenemos $Hom_{\mathcal{C}}(C, \mathbf{G}g) \circ \phi_{C,D}(f) = \mathbf{G}g \circ \phi_{C,D}(f) = \mathbf{G}g \circ \mathbf{G}(f) \circ \eta_C = \mathbf{G}(f \circ g) \circ \eta_C = \phi_{C,D'}(g \circ f) = \phi_{C,D'} \circ Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}C, g)(f)$.
- Ver la naturalidad para ψ es similar.

Supongamos ahora una adjunción $\phi_{-,-} : Hom_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}-,-) \cong Hom_{\mathcal{C}}(-,\mathbf{G}-) : \psi_{-,-}$, a partir de ella construímos las unidades η y ε y después obtenemos una nueva adjunción ϕ', ψ', entonces

$$\phi'(g) = \mathbf{G}(g) \circ \eta_C = \mathbf{G}(g) \circ \phi(1_{\mathbf{F}C}) = \phi(g \circ 1_{\mathbf{F}C}) = \phi(g)$$

Por tanto ψ y ψ' también coinciden.

Si partimos de dos transformaciones naturales η y ε cumpliendo las propiedades del enunciado, construímos ϕ y ψ, y volvemos a obtener las unidades η', ε' tenemos:

$$\begin{aligned} \eta'_C &= \phi(1_{\mathbf{F}C}) = \mathbf{G}(1_{\mathbf{F}C}) \circ \eta_C = 1_{\mathbf{GF}C} \circ \eta_C = \eta_C \\ \varepsilon'_D &= \psi(1_{\mathbf{G}D}) = \varepsilon_D \circ \mathbf{F}(1_{\mathbf{G}D}) = \varepsilon_D \circ 1_{\mathbf{FG}D} = \varepsilon_D. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Dualidades Categóricas entre espacios topológicos y estructuras algebraicas

Ahora que tenemos las herramientas categóricas necesarias, vamos a proceder al estudio de algunos casos particulares de dualidades categóricas. Para ello seguiremos el siguiente procedimiento. Primero nos olvidaremos de las categorías y estudiaremos de forma topológica y algebraica los espacios involucrados. Una vez establecidos los isomorfismos (homeomorfismos y homomorfismos de los retículos correspondientes), procederemos a "generalizar a la categoría". Considerando ya las categorías construiremos los funtores y las transformaciones naturales necesarias en cada caso.

2.1. Alexandroff

La primera dualidad que vamos a estudiar es la que existe entre los espacios topológicos cerrados bajo intersecciones finitas, llamados de Alexandroff, y los conjuntos con relaciones reflexivas y transitivas, es decir, dotados de un preorden. Para esta parte seguiremos [7].

Aunque están repetidas en el anexo A, vamos a introducir aquí algunas definiciones.

Definición 2.1. Sea (F, R) un conjunto con una relación y $U \subseteq F$ entonces U se dice

- *Conjunto clausurado superiormente* si $x \in U$, $y \in F$ con xRy implica $y \in U$.
- *Conjunto clausurado inferiormente* si $x \in U$, $y \in F$ con yRx implica $y \in U$.

2.1.1. Espacios topológicos de Alexandroff

Definición 2.2. Un espacio topológico (X, τ) se dice *de Alexandroff* si la intersección arbitaria de conjuntos abiertos es un abierto.

Proposición 2.1. Un espacio topológico (X,τ) es de Alexandroff si y solo si para todo $x \in X$ existe un *entorno mínimo* en el sentido de que está contenido en cualquier otro entorno.

Dem. Suponemos (X,τ) de Alexandroff y consideramos $\mathcal{V}(x)$ el conjunto de los entornos de x, veamos que $\bigcap \mathcal{V}(x)$ es un entorno y por tanto es mínimo. Para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq V$, consideramos $\mathcal{U}$ la intersección de estos abiertos y verifica:

- $\mathcal{U} \in \tau$ por ser un espacio topológico de Alexandroff.
- $\mathcal{U} \subseteq \bigcap \mathcal{V}(x)$.
- $x \in \mathcal{U}$.

$\bigcap \mathcal{V}(x)$ es efectivamente un entorno de x.
Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, consideramos la intersección $\bigcap_{i\in I} U_i$ y el conjunto

$$\mathcal{U} = \bigcup \{V | V \text{ es el entorno mínimo de } x \text{ con } x \in \textstyle\bigcap_{i\in I} U_i\}.$$

El entorno mínimo de cualquier elemento es necesariamente un abierto, por tanto $\mathcal{U} \in \tau$. Además tenemos que por definición $\bigcap_{i\in I} U_i \subseteq \mathcal{U}$ y para todo $x \in \mathcal{U}$ $x \in V$ con V el entorno mínimo de algún elemento $y \in \bigcap_{i\in I} U_i$. Si x no estuviera en $\bigcap_{i\in I} U_i$ existiría algún U_i tal que $x \notin U_i$, $y \in U_i$ y por tanto $V \cap U_i$ es un entorno de y distinto de V tal que $V \cap U_i \subset V$ lo que es una contradicción con que es el mínimo. Entonces $\mathcal{U} \subseteq \bigcap_{i\in I} U_i \Rightarrow \mathcal{U} = \bigcap_{i\in I} U_i \in \tau$. □

Observación: En caso de existir el entorno mínimo de un elemento en un espacio topológico, este entorno será necesariamente un abierto.

2.1.2. Construcción del espacio topológico.

Dado (X,R) un conjunto con una relación reflexiva y transitiva consideramos

$$\tau_R = \{A \subseteq X \text{ tal que } A \text{ es un conjunto clausurado superiormente de } X\}$$

Veamos que esto define una topología sobre X:

- $X, \emptyset$ están en τ_R.
- Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_R$ arbitrario, veamos que $\bigcup_{i\in I} U_i$ es un conjunto clausurado superiormente.
  $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ y xRy entonces $x \in U_i$ para algún $i \in I$ y xRy, como U_i clausurado superiormente $y \in U_i \Rightarrow y \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Por tanto $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_R$.
- Sean U_1, U_2 dos conjuntos clausurados superiormente $x \in U_1 \cap U_1, xRy$ entonces $x \in U_1, xRy \Rightarrow y \in U_1$ y $x \in U_2, xRy \Rightarrow y \in U_2$ por tanto $y \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2$ es un conjunto clausurado superiormente.

A lo largo de las siguientes proposiciones consideraremos siempre (X, R) un conjunto con R un preorden y (X, τ_R) el espacio topológico donde los abiertos son los conjuntos clausurados superiormente de X.

Proposición 2.2. (X, τ_R) es un espacio topológico de Alexandroff.

Dem. Sea $x \in X$ veamos que $R(x) = \{y \in X | xRy\}$ es su entorno mínimo.
Sea $y \in R(x)$ y yRz entonces xRy yRz y por transitividad xRz por tanto $z \in R(x)$, asi que $R(x)$ es un abierto. Además $x \in R(x)$ por reflexividad. $R(x)$ es un abierto que contiene a x, veamos que para cualquier otro abierto U que contenga a x, $R(x) \subseteq U$. Sea $y \in R(x)$ entonces xRy, como $x \in U$ y U es un conjunto clausurado superiormente $y \in U \Rightarrow R(x) \subseteq U$.
Para cualquier elemento de X existe su entorno mínimo $\Rightarrow$ (X, τ_R) de Alexandroff. □

Proposición 2.3. La colección de conjuntos $\{R(x)\}_{x\in X}$, donde $R(x) = \{y \in X|xRy\}$, forman una base de (X, τ_R).

Dem. Sea $x \in X$, $R(x)$ es abierto: $y \in R(x), yRz \Rightarrow xRy, yRz \Rightarrow xRz \Rightarrow z \in R(x)$.
Sea $U \in \tau_R$, entonces $U = \cup_{x\in U} R(x)$:

- $U \subseteq \cup_{x\in U} R(x)$ es inmediato pues $x \in R(x)$ para todo $x \in X$.
- Sea $y \in \cup_{x\in U} R(x)$, entonces $y \in R(x)$ para algún $x \in U \Rightarrow xRy$ para algún $x \in U$ y U clausurado superiormente $\Rightarrow y \in U$. □

2.1.3. Construcción de la relación reflexiva y transitiva.

Recíprocamente, dado un espacio topológico (X, τ) podemos construir lo que llamaremos *preorden de especialización en X* de la siguiente manera:

$$xR_\tau y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}.$$

Esto es equivalente a que $\forall U \in \tau$ con $x \in U$: $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ es decir

$$\forall U \in \tau\text{: } x \in U \Rightarrow y \in U.$$

R_τ es una relación sobre X reflexiva y transitiva:

- Para todo $x \in X$ por definición de clausura $x \in \overline{\{x\}}$.
- Si $xR_\tau y$, $yR_\tau z$ entonces por un lado $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$, $y \in U$ y por otro $\forall V \in \tau$ tal que $y \in V$, $z \in V$. Juntando ambas condiciones, $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$ tenemos que $z \in U$ y por tanto $xR_\tau z$.

Esta relación se convierte en un orden cuando (X, τ) verifica el axioma de separación T_0.

Proposición 2.4. Dado un espacio topológico (X, τ), su preorden de especialización R_τ es un orden si y solo si (X, τ) verifica el axioma de separación T_0.

Dem. Si R_τ es un orden, entonces es antisimétrica. Sean $x \neq y$ en X. Como son distintos y la relación es antisimétrica, o bien x no está relacionado con y o bien y y no está relacionado con x. Entonces $x \notin \overline{\{y\}}$ o bien $y \notin \overline{\{x\}} \Rightarrow$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o bien existe $U \in \tau$ tal que $x \notin U$ y $y \in U \Rightarrow (X, \tau)$ es T_0.

Partimos ahora de que el espacio es T_0. Sean $xR_\tau y$, $yR_\tau x$ si suponemos que $x \neq y$, o bien existen $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $y \notin U$, lo que es una contradicción con que $xR_\tau y$, o bien existe $U \in \tau$ tal que $x \notin U$, $y \in U$, lo que es una contradicción con que $yR_\tau x$. $\square$

2.1.4. Equivalencia.

Para obtener la equivalencia nos será útil estudiar como se relacionan R, R_{τ_R}, τ y τ_{R_τ}:

- $xR_{\tau_R}y$ si y solo si $x \in \overline{\{y\}} = R^{-1}(y) = \{z \in X | \exists k \in \{y\} \text{ con } zRk\} = \{z \in X | zRy\}$, por tanto $xR_{\tau_R}y \Leftrightarrow xRy$.
- $U \in \tau_{R_\tau}$ si y solo si es un conjunto clausurado superiormente de X respecto a R_τ, es decir $x \in U$ y $xR_\tau y \Rightarrow y \in U$ lo que no es más que la condición $x \in U$ y $x \in \overline{\{y\}} \Rightarrow y \in U$. Veamos que $V \in \tau$ verifica esta condición y por tanto tenemos $\tau \subseteq \tau_{R_\tau}$, sea $x \in V \in \tau$ y $x \in \overline{\{y\}} \Rightarrow V \cap \{y\} \neq \emptyset \Rightarrow y \in V$.
- En general τ_{R_τ} no está contenido en τ, cualquier topología que no sea de Alexandroff es un ejemplo de ello. Si tomamos $\mathbf{R}$ con la topología usual $\{0\} \notin \tau$ pero $\{0\} \in \tau_{R_\tau}$.

La condición necesaria y suficiente para que $\tau = \tau_{R_\tau}$ es que el espacio sea de Alexandroff:

Proposición 2.5. Un espacio topológico (X, τ) es de Alexandroff si y solo si su topología coincide con la generada por su orden de especialización, es decir $\tau = \tau_{R_\tau}$.

Dem. Sea (X, τ) un espacio topológico de Alexandroff, sabemos que $\tau \subseteq \tau_{R_\tau}$ así que solo tenemos que ver $\tau_{R_\tau} \subseteq \tau$. Para ello es suficiente con que una base de τ_{R_τ} esté contenida en τ.

Consideramos la base $\{R_{R_\tau}(x) | x \in X\}$:

Sea $x \in X$:

$$R_{R_\tau}(x) = \{y \in X | xR_\tau y\} = \{y \in X | x \in \overline{\{y\}}\} = \{y \in X | \forall U \in \tau \text{ con } x \in U,\, y \in U\}$$

entonces si $y \in R_{R_\tau}(x)$ y está en la intersección de todos los abiertos que contienen a x y si y está en la intersección de todos los abiertos que contienen a x entonces $y \in R_{R_\tau}(x) \Rightarrow R_{R_\tau}(x) = \bigcap\{U \in \tau | x \in U\}$. Como (X, τ) es de Alexandroff, esta intersección es un abierto en τ.

La otra implicación es conocida, (X, τ_R) es de Alexandroff para cualquier relación R reflexiva y transitiva, en particular (X, τ_{R_τ}) es de Alexandroff. $\square$

Tenemos ya una forma de establecer una correspondencia entre espacios topológicos de Alexandroff y conjuntos (X, R) donde R es una relación reflexiva y transitiva. Además, tenemos una correspondencia entre espacios topológicos de Alexandroff que verifican el axioma de separación T_0 y conjuntos parcialmente ordenados. Para obtener una equivalencia necesitamos ver también cómo se relacionan los morfismos.

Proposición 2.6.

- Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua entre espacios topológicos de Alexandroff, entonces f conserva el preorden de especialización.
- Recíprocamente si $f : (A, R_A) \longrightarrow (B, R_B)$ conserva el preorden, entonces f es una función continua considerando las topologías de los conjuntos clausurados superiormente.

Dem. Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua entre espacios topológicos de Alexandroff, consideramos $f : (X, R_{\tau_X}) \longrightarrow (Y, R_{\tau_Y})$ y $a, b \in X$ tal que $aR_{\tau_X}b$, tenemos que $f(a)R_{\tau_Y}f(b) \Leftrightarrow \forall U \in \tau_Y$ con $f(a) \in U$, $f(b) \in U$. Esta condición es cierta ya que para cada $U \in \tau_Y$ con $f(a) \in U$ se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau_X$ por continuidad y $a \in f^{-1}(U)$. $aR_{\tau_X}b \Rightarrow a \in \overline{\{b\}} \Rightarrow \forall V \in \tau_X$ con $a \in V$, $b \in V$ en particular para $f^{-1}(U), b \in f^{-1}(U) \Rightarrow f(b) \in U$.

Sea $f : (A, R_A) \longrightarrow (B, R_B)$ una función que conserva el preorden, la misma función vista entre los espacios topológicos $f : (A, \tau_{R_A}) \longrightarrow (B, \tau_{R_B})$ es continua si para cualquier $U \in \tau_{R_B}$, $f^{-1}(U) \in \tau_{R_A}$, es decir, si $f^{-1}(U)$ es clausurado superiormente en A respecto a R_A para todo $U \subseteq B$ clausurado superiormente respecto a R_B. Sea $a \in f^{-1}(U)$, aR_Ab, como f conserva la estructura relacional faR_Bfb y $fa \in U$, como U es clausurado superiormente con respecto a R_B, $fb \in U \Rightarrow b \in f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_{R_A}$. $\square$

Teorema 2.1. Existe una equivalencia categórica entre espacios topológicos de Alexandroff y conjuntos dotados de una relación reflexiva y transitiva.

Dem. Para hablar de equivalencia categórica debemos definir funtores. Consideramos la categoría de los espacios topológicos de Alexadroff con las aplicaciones continuas entre ellos que denotaremos **Al** y la categoría de los conjuntos dotados de una relación reflexiva y transitiva con las aplicaciones que conservan la relación, que denotamos **PreOr** y definimos el siguiente funtor:

$$\Phi : \mathbf{Al} \longrightarrow \mathbf{PreOr}$$

$$(X, \tau) \longmapsto (X, R_\tau)$$

$$x \to fx \longmapsto x \to fx$$

Sabemos ya que Φ está bien definido y es inmediato que es un funtor ya que en los morfismos actúa como la identidad.

Tenemos también el funtor

$$\begin{aligned}
\Psi : \mathbf{PreOr} &\longrightarrow \mathbf{Al} \\
(X, R) &\longmapsto (X, \tau_R) \\
x \to fx &\longmapsto x \to fx
\end{aligned}$$

En este caso se trata un isomorfismo de categorías: $\Phi \circ \Psi(X, R) = \Phi(X, \tau_R) = (X, R_{\tau_R})$ y hemos visto $R = R_{\tau_R}$ por tanto $\Phi \circ \Psi = 1_{\mathbf{PreOr}}$ y análogamente $\Psi \circ \Phi(X, \tau) = (X, \tau_{R_\tau})$ y como los espacios topológicos son de Alexandroff $\tau = \tau_{R_\tau}$. $\square$

Corolario 2.1. Existe una equivalencia categórica entre los espacios topológicos de Alexandroff que verifican el axioma T_0 con las aplicaciones continuas entre ellos y los conjuntos ordenados con las aplicaciones monótonas entre ellos.

Dem. Consideramos las subcategorías $\mathbf{OrdPar} \subseteq \mathbf{PreOr}$ de los conjuntos ordenados parcialmente y $\mathbf{AlT_0} \subseteq \mathbf{Al}$ de los espacios topológicos de Alexandroff que son T_0. Consideramos las restricciones de Φ y de Ψ a estas subcategorías. Por la proposición 2.4 tenemos una equivalencia (de hecho un isomorfismo). $\square$

2.2. Stone

La dualidad de Stone es tal vez la más famosa de las que estudiaremos. El *Teorema de Representación de Stone* publicado por primera vez en [46] establece una dualidad categórica entre las álgebras de Boole y los espacios topológicos llamados de Stone.

Hay distintas formas de establecer esta dualidad, quizás la más conocida sea a través de filtros o ideales primos como hizo Stone y se hace en [15], sin embargo aquí presentaremos la dualidad usando espacios de funciones. Ambas aproximaciones son equivalentes[1].

El apartado de preliminares sobre espacios topológicos de Stone se ha elaborado a partir de [28]. Para la dualidad seguiremos [16].

2.2.1. Preliminares sobre espacios topológicos de Stone

Definición 2.3.
- Un espacio topológico (X, τ) se dice *totalmente separado* si para dos puntos distintos existe un conjunto abierto y cerrado conteniendo a uno de ellos y no al otro.
- Un espacio topológico (X, τ) se dice *cero-dimensional* si los subconjuntos de X que son abiertos y cerrados forman una base de la topología.
- Un espacio topológico (X, τ) se dice *totalmente disconexo* si los únicos subconjuntos conexos de X son de la forma $\{x\}$ tal que $x \in X$.

[1] Una función $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$ donde A es un retículo distributivo, es un homomorfismo de retículos si y solo si $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$ y $\{a \in A \mid f(a) = 1\}$ son respectivamente un ideal primo y un filtro primo en A. ([47])

Lema 2.1. Un subespacio Y de un espacio (X, τ) totalmente disconexo es totalmente disconexo.

Dem. Sea $A \subseteq Y$ un conjunto no unipuntual, entonces $A \subseteq X$ no unipuntual $\Rightarrow$ existe una separación (U, V) de A en X entonces $(U \cap Y, V \cap Y)$ es una separación de A en Y. $\square$

Lema 2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff en el que existe una base formada por conjuntos abiertos y cerrados, entonces es totalmente separado.

Dem. Sea $x \neq y$ en X, por ser Hausdorff existen un par de abiertos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como existe una base, llamemosla $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos y cerrados, U es una unión de de conjuntos abiertos y cerrados y en particular $x \in B_x \subseteq U$ para algún $B_x \in \mathcal{B}$, claramente $y \notin B_x$, luego (X, τ) totalmente separado. $\square$

Lema 2.3. Un espacio topológico totalmente separado es totalmente disconexo.

Dem. Sea $A \subseteq X$ no unipuntual queremos ver que existe una separación de A; para ello consideramos $x, y \in A$ tales que $x \neq y$. Por ser un espacio totalmente separado existe un conjunto abierto y cerrado U tal que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que contiene a x y no a $y \Rightarrow (U, X \setminus U)$ es una separación de A. $\square$

Lema 2.4. (Espacio Topológico de Stone) Dado un espacio topológico (X, τ) son equivalentes:

I. (X, τ) es Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.

II. (X, τ) es compacto y totalmente separado.

Un espacio topológico que cumpla estas propiedades se dice de *Stone*.

Dem. I$\Rightarrow$ II: Sea (X, τ) compacto, Hausdorff y totalmente disconexo. Veamos que para todo $x \in X$, x puede ser separado de cualquier otro punto de X mediante un subconjunto abierto y cerrado.

Denotamos $C(x)$ al conjunto de los puntos de X que no pueden ser separados de x mediante un subconjunto abierto y cerrado. Lo primero que observamos es que $C(x)$ es no vacío ($x \in C(x)$) y es necesariamente cerrado: Si $y \in X \setminus C(x)$, existe un abierto y cerrado U conteniendo a y y no a x, además claramente $U \cap C(x) = \emptyset$ por tanto para todo $y \in X \setminus C(x)$ existe un abierto U con $y \in U \subseteq X \setminus C(x) \Rightarrow X \setminus C(x)$ es abierto lo que implica que $C(x)$ es cerrado.

Supongamos que $C(x)$ tiene más de un elemento, entonces como (X, τ) es totalmente disconexo podemos encontrar dos cerrados no vacíos C_1, C_2 en $C(x)$, y por tanto en X, disjuntos tales que $C(x) = C_1 \cup C_2$.

Que (X, τ) sea compacto y Hausdorff implica que es normal[2], por tanto para C_1 y C_2 dos cerrados disjuntos tenemos que existe un abierto U con $C_1 \subseteq U$ y $\overline{U} \cap C_2 = \emptyset$.

[2] La demostración de esto puede consultarse en el anexo de topología.

Consideremos la frontera de U, $frU = \overline{U} \cap (X \setminus U)$ se tiene que $frU \cap C(x) = \emptyset$ ya que C_1 es disjunto con $(X \setminus U)$ y C_2 es disjunto con $\overline{U}$. Entonces todo punto de la frontera de U puede ser separado de x mediante un abierto y cerrado, además como hay compacidad y frU es cerrado en X existe un cubrimiento finito $\{V_i\}_{i=1\ldots n}$ de frU formado por conjuntos que son abiertos y cerrados. Entonces la unión de los V_i a la que llamaremos V es un conjunto abierto y cerrado por ser unión finita de abiertos y cerrados, que contiene a frU y no contiene a x. Es claro que $V \cap C(x) = \emptyset$

Tenemos así que $U \setminus V = \overline{U} \setminus V$ (pues $\overline{U} = U \cup frU$ y $frU \subseteq V$) y por tanto es abierto y cerrado.

Hemos llegado a contradicción ya que por un lado $(U \setminus V) \cap C(x) = U \cap C(x) = C_1$ y por otro $(X \setminus (U \setminus V)) \cap C(x)$ es distinto de vacío pues $(X \setminus (U \setminus V)) = (X \setminus U) \cup V$ y $(X \setminus U) \cap C(x) = C_2$ pues $C_2 \subseteq X \setminus \overline{U} \subseteq X \setminus U$. Por tanto $C(x) = \{x\}$ lo que implica que (X, τ) es totalmente separado.

II$\Rightarrow$ I: La compacidad se tiene por hipótesis, totalmente separado implica totalmente disconexo y Hausdorff. □

Proposición 2.7. Todo espacio topológico de Stone es cero-dimensional.

Dem. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de los abiertos y cerrados en un espacio topológico de Stone (X, τ), veamos que forman una base. Sea $U \in \tau$, $x \in U$ entonces para cada $y \in X \setminus U$ por ser totalmente separado existe un abierto y cerrado V_y tal que contiene a y y no a x. Estos V_y con $y \in X \setminus U$ forman un cubrimiento por abiertos de $X \setminus U$ que es un cerrado, luego por compacidad podemos extraer un subcubrimiento finito $\{V_i\}_{i=1\ldots n}$, consideramos ahora la intersección $W_x = \bigcap_{i=1\ldots n} X \setminus V_i \subseteq U$, es un abierto y cerrado que contiene a x. Podemos hacer esto para cada $x \in U$ y claramente $U = \bigcup\{W_x | x \in U\}$ con W_x abierto y cerrado para todo x, luego los abiertos y cerrados forman una base. □

2.2.2. Construcción del espacio topológico de Stone.

Partimos de un álgebra de Boole $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ y vamos a ver cómo construir lo que llamaremos *espacio de Stone asociado a* A, $\mathcal{S}(A)$.

Para ello consideramos $\mathbf{2}^A = \{f : A \longrightarrow \mathbf{2}\}$ el espacio de las funciones de A en $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Al conjunto $\mathbf{2}$ podemos dotarlo de estructura de espacio topológico con la topología discreta y de álgebra de Boole con el orden $0 \leq 1$.

Considerando en $\mathbf{2}$ la topología discreta, como $\prod_{a \in A} \mathbf{2} \cong \mathbf{2}^A$, tenemos en $\mathbf{2}^A$ la topología producto. Este espacio es de Stone:

Para ver que es totalmente disconexo basta con encontrar una base formada por conjuntos abiertos y cerrados. Una subbase de la topología producto es de la forma

$$\mathcal{S} = \{B_i^a \mid a \in A, i \in \{0, 1\}\},$$

donde $B_i^a = \{x \in \mathbf{2}^A | x_a = i\}$. Esta subbase está formada por conjuntos que son abiertos y cerrados ya que $(B_i^a)^c = B_{\neg i}^a$. Por tanto existe una base

$$\mathcal{B} = \{B_{i_1}^{a_1} \cap \cdots \cap B_{i_n}^{a_n} | n \in \mathbf{N}, B_{i_j}^{a_j} \in \mathcal{S}\}$$

formada por abiertos y cerrados (las intersecciones finitas de abiertos y cerrados son abiertos y cerrados).

Proposición 2.8. Sea $\mathbf{2}^A$ el espacio topológico producto $\prod_{a \in A} \mathbf{2}$ donde cada espacio $\mathbf{2}$ está dotado de la topología discreta y A es un conjunto cualquiera, entonces $\mathbf{2}^A$ es compacto.

Dem. Vamos a usar el *Lema de la subbase de Alexander*[3], por el cual basta ver que de todo cubrimiento subbásico de $\mathbf{2}^A$ se puede extraer un subcubrimiento finito.

Sea $\mathcal{R}$ un recubrimiento subbásico entonces es de la forma

$$\mathcal{R} = \{B_0^a | a \in R_0\} \cup \{B_1^b | b \in R_1\}$$

donde R_0 y R_1 son subconjuntos de A.

- R_0 y R_1 tienen que ser distintos de vacío, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $R_0 = \emptyset$ y consideramos $x \in \mathbf{2}^A$ tal que $x(a) = 0$ para todo $a \in A$ entonces $x \in B_1^b$ para algún $b \in R_1$ lo que no es posible.
- Si existe algún $b \in R_0 \cap R_1$ entonces $B_0^b \cup B_1^b = \mathbf{2}^A$ es un subcubrimiento finito.
- Si $R_1 \cap R_0 = \emptyset$ existe algún $x \in \mathbf{2}^A$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{R}$, cualquiera que cumpla $x(a) = 0$ para todo $a \in R_0$ y $x(a) = 1$ para todo $a \in R_1$. Sea $y(a) = \neg x(a)$ para todo $a \in A$ entonces $y \in U_i^a$ para algún $a \in R_i \Rightarrow y(a) = i = x(a)$ lo que es una contradicción.□

Consideramos ahora $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathbf{2}^A$ el subconjunto formado por las funciones que son *homomorfismos de álgebras de Boole* de A en $\mathbf{2}$. El siguiente lema garantiza que $\mathcal{S}(A)$ es no vacío:

Lema 2.5. Sea p un elemento distinto de 0 en un retículo distributivo A, existe un homomorfismo de retículos $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que $f(p) = 1$.

Dem. Consultar anexo A. □

Veamos que $\mathcal{S}(A)$ con la topología heredada de $\mathbf{2}^A$ es también un espacio topológico de Stone.

Una función $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$ es un homomorfismo de álgebras de Boole si conserva supremos, ínfimos y complementos. Entonces $\mathcal{S}(A)$ es el siguiente subconjunto de $\mathbf{2}^A$

$$\{f \in \mathbf{2}^A | f(\neg a) = \neg f(a)\} \cap \{f \in \mathbf{2}^A | f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)\} \cap \{f \in \mathbf{2}^A | f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)\}.$$

[3] "Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\mathcal{S}$ una subbase de τ. Entonces X es compacto si y solo si de todo cubrimiento por elementos de $\mathcal{S}$ puede extraerse un subcubrimiento finito." Su demostración puede consultarse en [15].

Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto, veamos pues que este conjunto es cerrado en $\mathbf{2}^A$. Para ello necesitaremos el siguiente resultado cuya demostración puede consultarse en el anexo B: "Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas entre dos espacios topológicos, Y un espacio topológico de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x|f(x) = g(x)\}$ es cerrado."

Para cada $p \in A$ el conjunto $\{x \in \mathbf{2}^A|x(\neg p) = \neg x(p)\}$ es cerrado en $\mathbf{2}^A$ considerando las siguientes funciones continuas y aplicando el resultado anterior:

$$\begin{array}{ll} f_p : \mathbf{2}^A \longrightarrow \mathbf{2} & g_p : \mathbf{2}^A \longrightarrow \mathbf{2} \\ x \longmapsto x(\neg p) & x \longmapsto \neg x(p) \end{array}$$

Como la intersección arbitraria de cerrados es cerrado tenemos que el conjunto

$$\textstyle\bigcap_{p\in A}\{x \in \mathbf{2}^A|x(\neg p) = \neg x(p)\} = \{x \in \mathbf{2}^A|x(\neg a) = \neg x(a)\forall a \in A\}$$

es cerrado. Análogamente se puede hacer para los conjuntos $\{f \in \mathbf{2}^A|f(a\wedge b) = f(a)\wedge f(b)\}$ y $\{f \in \mathbf{2}^A|f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)\}$, definiendo las funciones:

$$\begin{array}{ll} f_{a,b} : \mathbf{2}^A \longrightarrow \mathbf{2} & g_{a,b} : \mathbf{2}^A \longrightarrow \mathbf{2} \\ x \longmapsto x(a \wedge b) & x \longmapsto x(a) \wedge x(b) \\ f'_{a,b} : \mathbf{2}^A \longrightarrow \mathbf{2} & g'_{a,b} : \mathbf{2}^A \longrightarrow \mathbf{2} \\ x \longmapsto x(a \vee b) & x \longmapsto x(a) \vee x(b) \end{array}$$

Entonces $\mathcal{S}(A)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{2}^A$ y por tanto compacto.

Como $\mathbf{2}^A$ es totalmente disconexo cualquier subespacio suyo lo es por lo que efectivamente $\mathcal{S}(A)$ es de Stone.

2.2.3. Construcción del álgebra de Boole.

Ahora partimos de un espacio topológico de Stone (X, τ) y consideramos

$$B(X) = \{U \subseteq X|U \text{ es abierto y cerrado }\}$$

$B(X)$ con la inclusión es un álgebra de Boole.

Dado un conjunto X, el conjunto de sus partes $\mathcal{P}(X)$ es un álgebra de Boole con el contenido. Para ver que $B(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un álgebra de Boole, necesitamos comprobar que es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas, complementos y que contiene a $\emptyset$ y a X. Esto es una comprobación inmediata usando la definición de topología, abiertos y cerrados.

A este álgebra la llamaremos *álgebra dual de X*.

Por último en esta sección introduciremos un concepto simple que nos servirá para probar la equivalencia.

Definición 2.4. Dado un conjunto X, un *álgebra de conjuntos* de X es un subconjunto $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ que es un subálgebra de Boole. Es decir, es cerrada bajo uniones finitas y complementos (y por tanto bajo intersecciones finitas) y contiene a $\emptyset$ y a X.
Se dice *separadora* si para cada $x, y \in X$ distintos existen conjuntos S, T en F disjuntos tales que $x \in S$, $y \in T$.

Lema 2.6. Sea (X, τ) un espacio topológico de Stone y F un álgebra de conjuntos separadora tal que $F \subseteq B(X)$. Entonces F es el álgebra dual de X.

Dem. Sea $C \in B(X)$ distinto del total y del vacío:

- Sea $x \in C$, para cada $y \in X \setminus C$ existen $T, S_y \in F$ tales que $T \cap S_y = \emptyset$ $x \in T$, $y \in S_y$. El conjunto $\{S_y | y \in X \setminus C\}$ es un cubrimiento por abiertos de $X \setminus C$ que es cerrado y por tanto compacto. Entonces existen $S_{y_1}, \ldots, S_{y_n}$ tales que $X \setminus C \subseteq S_{y_1} \cup \cdots \cup S_{y_n}$ y $x \notin S_{y_1} \cup \cdots \cup S_{y_n}$ como cada S_{y_j} está en F, el conjunto $F_x = X \setminus (S_{y_1} \cup \cdots \cup S_{y_n})$ está en F.

- Por el procedimiento anterior obtenemos un cubrimiento por abiertos de C, $\{F_x\}_{x \in C}$, verificando $(X \setminus C) \cap F_x = \emptyset$ para todo $x \in C$. Por compacidad de C podemos extraer un subcubrimiento finito $\{F_i\}_{i=1\ldots n}$, además como $F_i \cap (X \setminus C) = \emptyset$ para todo $i \Rightarrow \bigcup_{i=1\ldots n} F_i = C \in F$. □

2.2.4. Equivalencia.

Finalmente, estamos en disposición de probar el *Teorema de Representación de Stone*:

Teorema 2.2. Cada álgebra de Boole es isomorfa al álgebra dual de su espacio topológico de Stone asociado.

Dem. Sea A un álgebra de Boole y $B(\mathcal{S}(A))$ el álgebra dual de su espacio topológico de Stone asociado. Definimos $f : A \longrightarrow B(\mathcal{S}(A))$ como $f(p) = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(p) = 1\}$. Veamos que f define un isomorfismo:

- $f(p) = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(p) = 1\} = \{x \in \mathcal{S}(A) | x_p = 1\} = \{x \in \mathbf{2}^A | x_p = 1\} \cap \mathcal{S}(A)$ que es abierto en $\mathcal{S}(A)$. $f(p)^c = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(p) = 0\} = \{x \in \mathbf{2}^A | x_p = 0\} \cap \mathcal{S}(A)$ que también es abierto, luego $f(p)$ es abierto y cerrado.

- f es un homomorfismo de álgebras de Boole:

    - Preserva inversos: $f(\neg p) = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(\neg p) = 1\}$ como x es un homomorfismo la imagen de un complemento es el complemento de la imagen. El conjunto anterior es

$$\{x \in \mathcal{S}(A) | \neg x(p) = 1\} = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(p) = 0\} = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(p) \neq 1\} = \\ \{x \in \mathcal{S}(A) | x(p) = 1\}^c = (f(p))^c.$$

- Preserva supremos e ínfimos: $f(a \vee b) = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(a \vee b) = 1\}$ usando que x es un homomorfismo la imagen del supremos es el supremo de las imágenes, por tanto el conjunto anterior es

$$\{x \in \mathcal{S}(A) | x(a) \vee x(b) = 1\} = \{x \in \mathcal{S}(A) | x(a) = 1\} \cup \{x \in \mathcal{S}(A) | x(b) = 1\} = \\ f(a) \cup f(b).$$

Para ínfimos cambiar $\vee$ por $\wedge$ y $\cup$ por $\cap$.

- f es inyectiva: sea $f(a) = f(b)$ entonces $\emptyset = f(a) \cap f(b)^c = f(a \wedge \neg b)$ lo que significa que no existe ningún homomorfismo x tal que $x(a \wedge \neg b) = 1$ por el lema 2.5 esto necesariamente implica que $a \wedge \neg b = 0$ y por unicidad de los complementos en un álgebra de Boole $a = b$.

- f es suprayectiva: para ello veamos que $Imf = B(\mathcal{S}(A))$. La imagen de f es un álgebra de Boole por ser f un homomorfismo de álgebras de Boole. Además $f(p)$ es abierto y cerrado para todo $p \in A$. Por el lema 2.6 si Imf es separadora será precisamente $B(\mathcal{S}(A))$. Si $h \neq g \in \mathcal{S}(A)$, existe algún $a \in A$ tal que $h(a) \neq g(a)$ entonces solo una de ellas está en $f(a)$ mientras que la otra está en $f(a)^c$ por tanto Imf es separadora. □

Hasta aquí es lo que se explica en [16], a continuación vamos a ponerlo en el lenguaje de las categorías, es decir, definir funtores y transformaciones naturales. Para ello consideramos las categorías **Boo** y **St** de las álgebras de Boole con los homomorfismos de álgebras de Boole y de los espacios topológicos de Stone con las funciones continuas entre ellos.

Definimos el funtor **F** llevando a cada espacio topológico de Stone (X, τ) a su álgebra dual $B(X)$ y a cada $f : X \longrightarrow Y \in \mathbf{Mor(St)}$ a :

$$\mathbf{F}f : B(Y) \longrightarrow B(X)$$

$$U \longmapsto f^{-1}(U)$$

Como f es continua y U es un abierto en Y, $f^{-1}(U)$ es un abierto en X. Además $X \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U)$ que es abierto ya que U es abierto y cerrado $\Rightarrow f^{-1}(U) \in B(X)$.

$\mathbf{F}f$ está bien definida y es un homomorfismo de álgebras de Boole (se comprueba inmediatamente por las propiedades de la antiimagen: $U \subseteq V \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$; $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$).

F es un funtor contravariante:

- Si $f : A \longrightarrow B$ en **St** $\Rightarrow \mathbf{F}f : \mathbf{F}B \longrightarrow \mathbf{F}A$.

- $\mathbf{F}1_X = \mathbf{F}id_X$ que es la aplicación que a cada $U \in B(X)$ le asigna $id_X^{-1}(U) = U \Rightarrow \mathbf{F}id_X = id_{B(X)} = id_{\mathbf{F}X}$.
- Sean $g : X \longrightarrow Y$, $f : Y \longrightarrow Z$ en **St** entonces $(\mathbf{F}g \circ \mathbf{F}f)(U) = g^{-1}(f^{-1}(U)) = \{x \in X | gx \in f^{-1}(U)\} = \{x \in X | fgx \in U\} = \mathbf{F}(f \circ g)(U) \Rightarrow \mathbf{F}(f \circ g) = \mathbf{F}g \circ \mathbf{F}f$.

Definimos $\mathbf{G} : \mathbf{Boo} \to \mathbf{St}$ actuando sobre los objetos como $\mathbf{G}A = \mathcal{S}(A)$ y sobre los homomorfismos de álgebras de Boole $h : A \longrightarrow B$ como

$$\mathbf{G}h : \mathcal{S}(B) \longrightarrow \mathcal{S}(A)$$

$$x \longmapsto x \circ h$$

$\mathbf{G}h$ está bien definida porque la composición de homomorfismos de álgebras de Boole es un homomorfismo de álgebras de Boole y si $x : B \longrightarrow \mathbf{2}$ entonces $x \circ h : A \longrightarrow \mathbf{2}$. Veamos que $\mathbf{G}h$ está en **St**, es decir, que es continua. Consideramos un abierto subbásico U, que será de la forma $U = \{x \in \mathcal{S}(A) | x_a = p\}$ donde $a \in A$ y $p \in \{0, 1\}$, entonces

$$(\mathbf{G}h)^{-1}(U) = \{x \in \mathcal{S}(B) | \mathbf{G}h(x) \in U\} = \{x \in \mathcal{S}(B) | (x \circ h)_a = p\} =$$
$$\{x \in \mathcal{S}(B) | (x \circ h)(a) = p\} = \{x \in \mathcal{S}(B) | x(h(a)) = p\} = \{x \in \mathcal{S}(B) | x_{h(a)} = p\}$$

con $h(a) \in B$ y $p \in \{0, 1\}$ por tanto es un abierto en $\mathcal{S}(B)$.

$\mathbf{G}$ es un funtor contravariante:

- Si $f : A \longrightarrow B$ en **Boo**, $\mathbf{G}f : \mathbf{G}B \longrightarrow \mathbf{G}A$.
- $\mathbf{G}1_A = \mathbf{G}id_A$, $\forall x \in \mathcal{S}(A)$, $\mathbf{G}id_A(x) = x \circ id_A = x \Rightarrow \mathbf{G}id_A = id_{\mathcal{S}(A)} = id_{\mathbf{G}A}$.
- Sean $g : A \longrightarrow B$, $f : B \longrightarrow C$ en **Boo** entonces $(\mathbf{G}g \circ \mathbf{G}f)(x) = \mathbf{G}g(x \circ f) = x \circ f \circ g = \mathbf{G}(f \circ g)(x)$.

El teorema de representación nos proporciona el isomorfismo natural $\eta : 1_{\mathbf{Boo}} \Rightarrow \mathbf{F} \circ \mathbf{G}$. Comprobemos la naturalidad, dado el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{FG}A \arrow[d, "\mathbf{FG}h"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & \mathbf{FG}B \end{tikzcd}$$

Sea $p \in A$: $(\eta_B \circ h)(p) = f(h(p)) = \{x \in \mathcal{S}(B) | x(h(p)) = 1\}$.
Si vamos por el otro lado:

$$(\mathbf{GF}h \circ \eta_A)(p) = \mathbf{FG}h(f(p)) = (\mathbf{G}h)^{-1}(f(p)) = \{x \in \mathcal{S}(B) | \mathbf{G}h(x) \in f(p)\} =$$
$$\{x \in \mathcal{S}(B) | x \circ h \in \{y \in \mathcal{S}(A) | y(p) = 1\}\} = \{x \in \mathcal{S}(B) | (x \circ h)(p) = 1\}.$$

Entonces el diagrama es conmutativo.

Nos falta solo definir un isomorfismo natural $\varepsilon : 1_{\mathbf{St}} \Rightarrow \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$. Lo hacemos de la siguiente forma, dado un espacio topológico de Stone X llevamos a cada $x \in X$ a $f_x : B(X) \to \mathbf{2}$ que a cada U abierto y cerrado lo lleva a 1 si $x \in U$ y a 0 si $x \notin U$.

- f_x es un homomorfismo de álgebras de Boole para todo $x \in X$:
    - $f_x(\emptyset) = 0$ y $f_x(X) = 1$.
    - $f_x(U \cup V)$ es 1 si y solo si $x \in U$ o $x \in V$ si y solo si $f_x(U) \vee f_x(V) = 1$. Análogamente es 0 si x no está en ninguno de los dos, por tanto ambas imágenes por f_x son 0 y su supremo también.
    - $f_x(U \cap V)$ es 1 si y solo si $x \in U \cap V$ entonces $f_x(U) \wedge f_x(V) = 1$. Y es cero si y solo si $x \notin U \cap V$. x no está en alguno de los dos conjuntos y por tanto el ínfimo de $f_x(U)$ y $f_x(V)$ es cero.
    - $f_x(U) = 1 \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow x \notin U^c \Leftrightarrow f_x(U^c) = 0 = f_x(U)^c$.
- ε_X es inyectiva: $f_x = f_y \Leftrightarrow$ para todo U abierto y cerrado en X se tiene que $x \in U$ si y solo si $y \in U$. Si $x \neq y$ por ser totalmente separado existiría algún conjunto abierto y cerrado conteniendo a uno de ellos y no al otro lo que es una contradicción.
- ε_X es suprayectiva: Consideramos $f \in \mathcal{S}(B(X))$ y la siguiente intersección:

  $$\bigcap\{U \in f^{-1}(\{1\})\}.$$

  Entonces tenemos:
    - Todos los conjuntos en esta intersección son cerrados.
    - Se verifica la propiedad de la intersección finita: si $f(U) = 1$ y $f(V) = 1$ entonces $f(U \cap V) = 1 \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

  Luego por compacidad $\bigcap\{U \in f^{-1}(\{1\})\} \neq \emptyset$.

  Consideremos un $x \in \bigcap\{U \in f^{-1}(\{1\})\}$ y veamos que $\varepsilon_X(x) = f$. Si $f(U) = 1$ entonces $x \in U$ y $f_x(U) = f(U)$. Si $x \in V$ para algún $V \in f^{-1}(\{0\})$ entonces $f(V^c) = 1$ y $x \in V \cap V^c$ lo que es una contradicción.
- Como estamos en una categoría de espacios topológicos, para considerar un isomorfismo debe ser homeomorfismo. Para ello veamos que ε_X es abierta y continua.
    - Abierta: $\varepsilon_X(U) = \{f_x | x \in U\} = \{f_x | f_x(U) = 1\} = \{f | f(U) = 1\}$ que es abierto pues está en una subbase del espacio.
    - Continua: Sea U subbásico, puede ser de dos formas:
        1. $\varepsilon^{-1}(U) = \varepsilon^{-1}(\{f | f(V) = 1\}) = \{x | f_x \in U\} = \{x | f_x(V) = 1\} = V$ que es abierto por construcción.

II. En el otro caso $\varepsilon^{-1}(\{f|f(V)=0\}) = V^c$ y como V es abierto y cerrado su complemento es un abierto.

Por último, la naturalidad de ε:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathbf{GF}X \\ {\scriptstyle h}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{GF}h} \\ Y & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & \mathbf{GF}Y \end{array}$$

Por un lado $(\mathbf{GF}h \circ \varepsilon_X)(x) = \mathbf{GF}h(f_x) = f_x \circ \mathbf{F}h$ que es el homomorfismo que a cada $U \in \mathbf{B}(Y)$ lo lleva a 1 si $x \in h^{-1}(U)$ y a 0 si $x \notin h^{-1}(U)$, o lo que es lo mismo, lo lleva a 1 si $h(x) \in U$ y a 0 si $h(x) \notin U$. Este homomorfismo es exactamente $f_{h(x)} = \varepsilon_Y(h(x)) = (\varepsilon_Y \circ h)(x)$.

2.3. Priestley

2.3.1. Dualidad de Priestley

La dualidad de Priestley estudia la relación entre retículos distributivos con 0 y 1 (acotados) y ciertos espacios topológicos y ordenados que llamaremos *espacios de Priestley*. Igual que en el caso de Stone, esta dualidad puede conseguirse usando ideales primos ([15]) o homomorfismos y ambos enfoques son equivalentes. Aquí usaremos homomorfismos lo que nos permitirá "reutilizar" demostraciones hechas en el apartado anterior. Para escribir esta parte se ha seguido [42].

Definición 2.5. Un espacio topológico dotado de una relación de orden $(X, \leq, \tau)$ se dice que *satisface el Axioma de Separación de Priestley* si dados x, y tales que $y \nleq x$ existen conjuntos abiertos y cerrados U clausurado superiormente, V clausurado inferiormente tales que $y \in U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 2.6. Un espacio $(X, \leq, \tau)$ se dice de Priestley si es compacto y satisface el axioma de separación de Priestley.

Sea A un retículo distributivo con 0 y 1, consideramos el espacio de los homomorfismos de retículos acotados $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$. En este espacio definimos una topología igual que hicimos en el apartado anterior para la dualidad de Stone, es decir, consideramos la topología heredada del espacio $\mathbf{2}^A$ con la topología producto A veces del espacio topológico discreto $(\mathbf{2}, \mathcal{P}(\mathbf{2}))$. Este espacio, que por el lema 2.5 es no vacío, lo volveremos a denotar $\mathcal{S}(A)$. De forma análoga al apartado anterior podemos ver que es de Stone y por tanto compacto.

Definimos sobre $\mathcal{S}(A)$ la siguiente relación: $f \leq g \Leftrightarrow f(a) \leq g(a)\ \forall a \in A$, donde el orden en $\mathbf{2}$ es $0 \leq 1$. La comprobación de que esto define un orden en $\mathcal{S}(A)$ es bastante inmediata y se deduce de que $0 \leq 1$ es un orden en $\mathbf{2}$.

Comprobamos que tenemos un espacio topológico de Priestley: Si $f \not\leq g$ entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) \not\leq g(a)$ lo que implica $f(a) = 1$ y $g(a) = 0$. Ahora consideramos $U = \{h|h(a) = 1\}$ que es abierto y cerrado y $f \in U$, $g \in U^c$. Que U es clausurado superiormente y $U^c = \{h|h(a) = 0\}$ inferiormente es inmediato por como se define el orden:

$$h \in U, h \leq h' \Rightarrow 1 = h(a) \leq h'(a) \Rightarrow h'(a) = 1 \Rightarrow h' \in U$$

$$h \in U^c, h' \leq h \Rightarrow h'(a) \leq h(a) = 0 \Rightarrow h'(a) = 0 \Rightarrow h' \in U^c$$

Igual que en el caso de Stone llamamos a este espacio *dual de A*.

Recíprocamente, dado un espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$ definimos su retículo dual. Para ello consideramos

$$D(X) = \{U \subseteq X | U \text{ es abierto, cerrado y clausurado superiormente}\}$$

con la relación de contenido. Ver que esto define un retículo distributivo acotado se reduce a comprobar que es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas y que contiene al vacío y al total:

- El vacío y el total son, por definición de topología, abiertos y cerrados y trivialmente clausurados superiormente.
- $U, V \in D(X)$, que su intersección y unión es abierto y cerrado es conocido.

  Sea $x \in U \cap V$ y $x \leq y$. Como U, V clausurados superiormente $y \in U, y \in V \Rightarrow y \in U \cap V$.

  Sea $x \in U \cup V$ y $x \leq y$ entonces sin pérdida de generalidad, podemos suponer $x \in U$ clausurado superiormente por tanto $y \in U \Rightarrow y \in U \cup V$.

Teorema 2.3. Sea A un retículo distributivo con 0 y 1. A es isomorfo al retículo dual de su espacio de Priestley dual.

Dem. Definimos $F : A \longrightarrow D(\mathcal{S}(A))$ igual que en el caso Stone $F(a) = \{f|f(a) = 1\}$. Es claramente abierto y cerrado, si $f \in F$, $f \leq g$ entonces $1 = f(a) \leq g(a) \Rightarrow g(a) = 1 \Rightarrow g \in F(a)$, por lo que es también clausurado superiormente.

Ver que F es un homomorfismo de retículos es también una comprobación análoga a la hecha en el caso de Stone que no merece la pena repetir.

F inyectiva: $F(a) = F(b)$ si y solo si para todo homomorfismo $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$ se cumple

$$f(a) = 1 \Leftrightarrow f(b) = 1.$$

Supongamos que $a \neq b$ entonces o bien $a \not\leq b$ o bien $b \not\leq a$ y en un retículo distributivo esto implica que existe un ideal primo I conteniendo a uno de ellos y no al otro[4]. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in I$, $b \notin I$, entonces la aplicación $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$ que lleva

[4]Este resultado está demostrado en el anexo A.

a todo elemento de I al 0, y a todo elemento que no está en I al 1 es un homomorfismo de retículos[5]. Claramente $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$, lo que contradice la hipótesis $F(a) = F(b)$ por tanto, necesariamente $a = b$.

F suprayectiva: Sea U un conjunto clausurado superiormente, abierto y cerrado en $\mathcal{S}(A)$. Queremos ver que $U = F(a)$ para algún $a \in A$. Podemos excluír los casos en que U es el total o el vacío ya que $F(1) = \mathcal{S}(A)$ y $F(0) = \emptyset$.
Si $f \in U$ y $g \in \mathcal{S}(A) \setminus U$ entonces $f \not\leq g$ y existe $a \in A$ tal que $f(a) = 1$ y $g(a) = 0 \Rightarrow f \in F(a)$ $g \in \mathcal{S}(A) \setminus F(a)$. Si hacemos los mismo para cada $g \in \mathcal{S}(A) \setminus U$ obtenemos un cubrimiento por abiertos de $\mathcal{S}(A) \setminus U$ que es un cerrado. Por compacidad podemos extraer un subcubrimiento finito de $\mathcal{S}(A) \setminus U$. Denotemos $\mathcal{S}(A) \setminus F(a) = S(a)$ y a este subcubrimiento finito $S(a_1), \ldots, S(a_m)$.
Definimos $R(f) = F(a_1) \cup \cdots \cup F(a_m) = F(a_1 \vee \cdots \vee a_m)$ cuya intersección con $\mathcal{S}(A) \setminus U$ es vacía y tenemos que $U = \bigcup_{f \in U} R(f)$. Otra vez, como U es cerrado y $R(f)$ un cubrimiento por abiertos, podemos extraer un subcubrimiento finito. Entonces existen $b_1 \ldots b_n$ tales que $U = F(b_1) \cup \cdots \cup F(b_n) = F(b_1 \vee \cdots \vee b_n)$. □

Dualmente todo espacio de Priestley $(X, \leq, \tau)$ es isomorfo a $\mathcal{S}(D(X))$ como conjunto ordenado y espacio topológico. Para ello definimos $\mathbf{G} : X \longrightarrow \mathcal{S}(D(X))$ que a cada x lo lleva a f_x tal que $f_x(U) = 1$ si $x \in U$ y $f_x(U) = 0$ si $x \notin U$ para todo $U \subseteq X$ abierto y cerrado clausurado superiormente. Ver que f_x es un homomorfismo de retículos es una comprobación análoga a la hecha en el caso de Stone que no merece la pena repetir.

Ver que $\mathbf{G}$ es inyectiva, suprayectiva y un homeomorfismos también es análogo al caso de Stone. Para la inyectividad simplemente notamos que el axioma de separación de Priestley claramente implica separación total.

Solo tenemos que ver que conserva el orden: sea $x \leq y$, entonces para todo $U \in D(X)$ si $x \notin U$ trivialmente $f_x(U) \leq f_y(U)$, si $x \in U, x \leq y$ como U es clausurado superiormente $y \in U \Rightarrow f_x(U) \leq f_y(U) = 1$.

Igual que en los casos anteriores para establecer una dualidad categórica tenemos que hablar de morfismos. Sea $f : A_1 \longrightarrow A_2$ un homomorfimos de retículos acotados consideramos $\mathcal{S}f : \mathcal{S}(A_2) \longrightarrow \mathcal{S}(A_1)$ que a cada $x \in \mathcal{S}(A_2)$ lo lleva a $x \circ f$, esto define una aplicación continua (análogo al caso de Stone) y que conserva el orden:

$$\text{si } x \leq y \Rightarrow x(a) \leq y(a) \forall a \in A_2 \text{ en particular } x(f(b)) \leq y(f(b)) \forall b \in A_1 \Rightarrow x \circ f \leq y \circ f.$$

Para una aplicación continua conservando el orden entre dos espacios de Priestley $f : X \longrightarrow Y$ definimos $Df : DY \longrightarrow DX$ que a cada U abierto, cerrado y clausurado superiormente lo lleva a $f^{-1}(U)$. Sabemos que si U es abierto y cerrado y f continua $f^{-1}(U)$ es abierto y cerrado, además como f conserva el orden y U es clausurado superiormente entonces $f^{-1}(U)$ es clausurado superiormente:

$$x \in f^{-1}(U), x \leq y \Rightarrow f(x) \in U, f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(y) \in U \Rightarrow y \in f^{-1}(U).$$

[5] Ver anexo A, la demostración del lema A.4

Así que Df está bien definida y es un homomorfismo de retículos por las propiedades de la imagen inversa.

Por último tenemos que comprobar la naturalidad, aquí las transformaciones naturales vienen dada por F y $\mathbf{G}$. Como están definidas igual que en la dualidad de Stone, la comprobación de la naturalidad también será totalmente análoga.

2.3.2. Algunas relaciones con la dualidad de Stone

Proposición 2.9. Sea $(X, \leq, \tau)$ un espacio de Priestley, entonces (X, τ) es de Stone.

Dem. (X, τ) es compacto por definición y si $x \neq y$ o bien $x \nleq y$ o $y \nleq x$, en cualquier caso, tenemos que (X, τ) es totalmente separado como consecuencia directa del axioma de separación de Priestley. □

En algunos textos ([9]) puede encontrarse la siguiente definición equivalente de espacio de Priestley:

Definición 2.7. Un espacio $(X, \leq, \tau)$ es de Priestley si y solo si (X, τ) es de Stone y verifica:

Si $x \nleq y$ existe $U \subseteq X$ abierto y cerrado, clausurado superiormente tal que $x \in U$, $y \notin U$.

De hecho la dualidad de Stone puede obtenerse como un caso particular de la de Priestley. Si en $(X, \leq, \tau)$ consideramos el orden trivial $x \leq x \Leftrightarrow x = x$, todos los conjuntos son clausurados superiormente entonces, $D(X) = \{U \subseteq X | U \text{ abierto y cerrado}\}$.

Capítulo 3

Topología sin puntos

Este capítulo surge del estudio de [40], en él veremos como es posible "reconstruir" ciertos tipos de espacios topológicos a partir del retículo de sus abiertos.

Antes de comenzar, ampliaremos un poco el contenido histórico expuesto en la introducción, para lo que seguiremos [27]. Johnstone ([27]) bautiza a Stone como el "bisabuelo" de la topología sin puntos, afirmando que [46] y [47] sentaron las bases del estudio de la topología usando teoría de retículos. Como un primer acercamiento al estudio de la topología sin mencionar los puntos destaca los trabajos de McKinsey y Tarski ([37] y [36]).

El nacimiento como tal lo sitúa en 1957, y aunque la idea no puede atribuirse a un único autor o grupo de investigadores, cabe destacar el ya mencionado papel de Ehresmann y sus seguidores ([6],[39]). El cambio fundamental de esta época respecto a los trabajos anteriores reside en que comienzan a considerarse los morfismos en los "espacios topológicos sin puntos". Por tanto, pueden verse dentro de una categoría.

El siguiente punto de inflexión se produce en 1972 con el trabajo de Ishbell ([26]). En él, se adopta la palabra *locale* y el tratamiento contravariante. Además, se hace la observación de que en cierto sentido los locales "se comportan mejor" que los espacios topológicos. Un ejemplo de esto es la preservación de propiedades topológicas bajo productos.

Otro hito importante en la historia de la topología sin puntos es la publicación de [28] en 1982, que a día de hoy sigue siendo uno de los principales libros de referencia en el campo. Desde entonces la topología sin puntos ha seguido, y sigue ([25],[2]), desarrollandose y ampliándose.

En este capítulo pretendemos a dar una pequeña introducción a ella, sin presuponer ningún conocimiento previo. Para ello necesitaremos los *adjuntos de Galois* y algunas de sus propiedades. Así que, antes de entrar en el estudio de la topología sin puntos como tal, se ha incluido una pequeña sección sobre ello. También introduciremos los *espacios topológicos sobrios.*

Consideraremos conocido que dado un espacio topológico (X, τ) el retículo de los abiertos con la relación de contenido es siempre un retículo completo que denotaremos $\Omega(X)$. En este retículo, el supremo de un conjunto arbitrario de abiertos es su unión, y el ínfimo es el interior de su intersección.

3.1. Preliminares

3.1.1. Sobre adjuntos de Galois

Los adjuntos de Galois pueden verse como una generalización de la *conexión de Galois* ([1]) para subgrupos y subcuerpos. Se llaman así en honor a Evariste Galois ([19]).

Definición 3.1. Sean X, Y conjuntos ordenados, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ aplicaciones monótonas se dice que *f es adjunta de Galois a la izquierda de g* y *g es adjunta de Galois a la derecha de f* si $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ $f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$.

Proposición 3.1. Si $g : Y \longrightarrow X$ tiene adjunta de Galois a la izquierda (derecha) es única.

Dem. Sean f, f' dos adjuntas de Galois a la izquierda de g, entonces para todo $x \in X$ $f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y) \Leftrightarrow f'(x) \leq y$ entonces $f(x) \leq y \Leftrightarrow f'(x) \leq y$, si $f(x) = y \Rightarrow f(x) \leq y, y \leq f(x) \Leftrightarrow f'(x) \leq y, y \leq f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = y$. □

Teorema 3.1. Sean $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow X$ aplicaciones monótonas. Entonces f y g son adjuntos de Galois si y solo si $f(g(y)) \leq y$ y $x \leq g(f(x))$ para todo $y \in Y$, $x \in X$.

Dem. De izquierda a derecha: Si $g(y) \in X$ entonces $f(g(y)) \leq y$ si y solo si $g(y) \leq g(y)$ que es claro. Si $f(x) \in Y$ entonces $x \leq g(f(x))$ si y solo si $f(x) \leq f(x)$, que es claro.
De derecha a izquierda: sea $x \in X$, $y \in Y$, $f(x) \leq y$. Por monotonía $g(f(x)) \leq g(y)$ $\Rightarrow x \leq g(y)$. Análogamente, si partimos de que $x \leq g(y)$, por monotonía $f(x) \leq f(g(y)) \Rightarrow f(x) \leq y$. □

Corolario 3.1. Si f, g son adjuntos de Galois $f = fgf$ y $g = gfg$.

Teorema 3.2. Los adjuntos de Galois a la izquierda preservan supremos y los adjuntos de Galois a la derecha preservan ínfimos.

Dem. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ tal que f adjunta a la izquierda de g, veamos que f conserva supremos. Sea $M \subseteq X$ y $s = supM$. $f(s)$ es una cota superior de $f(M)$ por monotonía. Sea y otra cota superior de $f(M)$, entonces para todo $m \in M$, $f(m) \leq y$ entonces $m \leq g(y)$ asi que $g(y)$ es una cota superior de M por tanto $s \leq g(y) \Rightarrow f(s) \leq y$. Dualmente, si $i = infM$ con $M \subseteq Y$ entonces $g(i)$ es una cota inferior de $g(M)$ y para x otra cota inferior de $g(M)$ tenemos que $f(x)$ va a ser una cota inferior de M en Y y por tanto $f(x) \leq i \Rightarrow x \leq g(i)$. □

Teorema 3.3. Si X, Y son retículos completos una aplicación monótona $f : X \longrightarrow Y$ es un adjunto a la izquierda (derecha) si y solo si conserva supremos (ínfimos).

Dem. Si f es un adjunto a la izquierda de alguna función g conserva supremos por el teorema anterior. Supongamos que f conserva supremos. Entonces definimos $g : Y \longrightarrow X$ como $g(y) = sup\{x|f(x) \leq y\}$ veamos que f es adjunta a la izquierda de g:

$f(x) \leq y \Rightarrow x \leq g(y)$, reciprocamente si $x \leq g(y) = sup\{z|f(z) \leq y\}$ y como f preserva supremos $f(x) \leq sup\{f(z)|f(z) \leq y\} \leq y$.

Para adjunto a la derecha se hace de forma análoga. □

Notación: Dada una función f, en caso de que tenga adjuntas, denotaremos a su adjunta a la derecha f_* y a su adjunta a la izquierda f^*.

Lema 3.1. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Dem. Veamos que tienen la misma adjunta a la derecha

$$x \leq (g^* \circ f^*)(y) \Leftrightarrow x \leq g^*(f^*(y)) \Leftrightarrow g(x) \leq f^*(y) \Leftrightarrow f(g(x)) \leq y \Leftrightarrow (f \circ g)(x) \leq y$$

Entonces $(g^* \circ f^*)_* = f \circ g = ((f \circ g)^*)_*$ y por unicidad de los adjuntos $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.□

Realmente, en los adjuntos de Galois, tenemos un ejemplo de adjunción categórica entre órdenes ([43]).

3.1.2. Espacios topológicos sobrios

Definición 3.2. Un espacio topológico (X, τ) se dice *sobrio* si es T_0 y para cualquier conjunto A verificando la propiedad:

$$U \cap V \subseteq A \Rightarrow U \subseteq A \text{ o } V \subseteq A$$

donde U y V son abiertos, A es de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$ con $x \in X$.

En general, cualquier conjunto de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$ verifica la propiedad de la definición anterior. Un conjunto que verifique la propiedad de la definición anterior se dice *ínfimo-irreducible.*

Proposición 3.2. Todo espacio topológico Hausdorff es sobrio.

Dem. Sea (X, τ) Hausdorff y $U \neq X$ un ínfimo-irreducible. Por ser Hausdorff $\overline{\{x\}} = \{x\}$ para todo $x \in X$, entonces queremos ver que U es de la forma $X \setminus \{x\}$. Supongamos que existen $x_1 \neq x_2$ con $x_1, x_2 \notin U$. Entonces por Hausdorff existen abiertos U_1, U_2 disjuntos con $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y se tiene que $U = U \cup \emptyset = U \cup (U_1 \cap U_2) = (U \cup U_1) \cap (U \cup U_2)$ pero ni $U \cup U_1$ ni $U \cup U_2$ están contenidos en U lo que es una contradicción con que sea ínfimo-irreducible. □

Podemos dar una caracterización de un espacio sobrio en función de los *filtros completamente primos* en el retículo $\Omega(X)$.

Definición 3.3. Un *filtro completamente primo* en un retículo L es un subconjunto propio $F \subseteq L$ tal que es un filtro y para cualquier $\{a_i\}_{i \in J} \subseteq L$: si $\bigvee_{i \in J} a_i \in F \Rightarrow a_i \in F$ para algún $i \in J$.

Introducimos aquí el siguiente lema que será de utilidad más adelante.

Lema 3.2. Sean M, L retículos completos, $h : L \longrightarrow M$ una aplicación que conserva el orden verificando:

- $h(0) = 0$
- $h(1) = 1$
- $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$
- $h(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} h(a_i)$

entonces $h^{-1}(F)$ es un filtro completamente primo en L para F cualquier filtro completamente primo en M.

Dem. $h^{-1}(F)$ es no vacío ya que $h(1) = 1$ y es propio por $h(0) = 0$. Veamos que cumple las condiciones de filtro completamente primo:

- $a, b \in h^{-1}(F)$ entonces $h(a), h(b) \in F \Rightarrow h(a) \cap h(b) = h(a \cap b) \in F \Rightarrow a \cap b \in h^{-1}(F)$.
- $a \in h^{-1}(F), a \leq b \Rightarrow h(a) \in F, h(a) \leq h(b) \Rightarrow h(b) \in F \Rightarrow b \in h^{-1}(F)$.
- $\bigvee a_i \in h^{-1}(F) \Rightarrow h(\bigvee a_i) = \bigvee h(a_i) \in F \Rightarrow \exists h(a_i) \in F \Rightarrow a_i \in h^{-1}(a_i)$. $\square$

Proposición 3.3. Sea (X, τ) un espacio topológico T_0. (X, τ) es sobrio si y solo si los filtros completamente primos en $\Omega(X)$ son de la forma $\mathcal{U}(x) = \{U \in \tau | x \in U\}$ con $x \in X$.

Dem. Sea (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{U}(x) = \{U \in \tau | x \in U\}$ veamos que para cualquier espacio topológico, sin necesidad de asumir que es sobrio, esto es un filtro completamente primo en $\Omega(X)$.

- $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(x)$.
- $U \in \mathcal{U}(x), U \subseteq V \Rightarrow x \in U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$.
- $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I | x \in U_i \Rightarrow U_i \in \mathcal{U}(x)$.

Ahora supongamos (X, τ) sobrio y $\mathcal{F}$ un filtro completamente primo en $\Omega(X)$. Definimos $W = \bigcup\{U \in \Omega(X) | U \notin \mathcal{F}\}$. Entonces:

- $W \notin \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ completamente primo. En particular $W \neq X$.
- Si $U_1 \cap U_2 \subseteq W$, entonces $U_1 \cap U_2 \notin \mathcal{F}$ y por filtro, al menos uno de ellos no está en $\mathcal{F}$ y por tanto al menos uno de ellos está contenido en W.

Por lo anterior tenemos que W es un ínfimo-irreducible y esto implica que es de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$. Hemos llegado a:

$$U \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow U \subseteq W = X \setminus \overline{\{x\}} \Leftrightarrow x \notin U.$$

Por tanto $\mathcal{F} = \{U | x \in U\} = \mathcal{U}(x)$.

Para la otra implicación, partimos de que los filtros completamente primos en $\Omega(X)$ son de la forma $\mathcal{U}(x)$, supongamos por reducción al absurdo que (X, τ) no es sobrio, como es T_0 y no es sobrio tiene que existir algún W abierto ínfimo-irreducible que no es de la forma $X \setminus \overline{\{x\}}$.

Definimos $\mathcal{F} = \{U \in \Omega(X) | U \nsubseteq W\}$

Veamos que $\mathcal{F}$ es un filtro primo

- $U, V \in \mathcal{F} \Rightarrow U \cap V \nsubseteq W \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{F}$.
- $U \in \mathcal{F}$, $U \subseteq V \Rightarrow$ para todo $u \in U \Rightarrow u \in V, u \notin W \Rightarrow V \nsubseteq W \Rightarrow V \in \mathcal{F}$.
- $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \nsubseteq W \Rightarrow \exists u \in \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que $u \notin W \Rightarrow \exists i \in I$ tal que $u \in U_i$, $u \notin W \Rightarrow U_i \nsubseteq W \Rightarrow U_i \in \mathcal{F}$.

Pero $\mathcal{F}$ no es de de la forma $\mathcal{U}(x)$, de hecho, para que $\mathcal{F}$ sea de esta forma para algún x tiene que pasar $U \nsubseteq W \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow U \nsubseteq X \setminus \overline{\{x\}}$. $\square$

3.2. Introducción a Locales: los funtores Lc y Sp.

El objetivo es definir un retículo que "imite" al de los abiertos de un espacio topológico. En la literatura se ha llamado *frame* a esta estructura, aquí lo traduciremos como "retículo topológico".

Definición 3.4. Un *retículo topológico* L es un retículo completo distributivo donde se satisface la ley

$$(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i \in I}(a_i \wedge b) \text{ para todo } a_i, b \in L.$$

Como era de esperar, se cumple:

El retículo de los abiertos de un espacio topológico es un retículo topológico.

Definición 3.5. Un *homomorfismo de retículos topológicos* es una aplicación $h : L \longrightarrow M$ donde L, M son retículos topológicos, que conserva supremos arbitrarios e intersecciones finitas.

Nota: En particular un homomorfismo de retículos topológicos conserva el 0 y el 1.

Para la categoría que forman los retículos topológicos con sus homomorfismos mantendremos la notación habitual **Frm**.

Definición 3.6. Un retículo topológico L se dice *espacial* si es isomorfo a $\Omega(X)$ para algún espacio topológico (X, τ).

Podemos definir un funtor Ω : **Top** $\to$ **Frm** que a cada espacio topológico lo lleve al retículo de sus abiertos, sobre las funciones continuas actuará de forma contravariante:

$$\text{Si } f : X \longrightarrow Y \text{ entonces para todo } U \in \Omega(Y)\text{: } \Omega f(U) = f^{-1}(U).$$

Como existen retículos topológicos que no son espaciales, no tendremos una dualidad, si no una adjunción. En este caso, nos interesa tener funtores covariantes, para ello consideramos la categoría opuesta $\mathbf{Frm}^{op}$ que denotaremos **Loc** y a sus objetos (que son los retículos topológicos) los llamaremos *locales*.

*¿Cómo interpretar un morfismo en **Loc**?*

Por definición un morfismo en **Loc** $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de retículos topológicos $f : Y \longrightarrow X$. Resulta muy poco intuitivo entender los morfismos de esta forma.

Sin embargo, en este caso podemos servirnos de los adjuntos de Galois para interpretar los morfismos en **Loc**. Cada morfismo en **Frm** es una aplicación monótona entre retículos completos que conserva supremos arbitrarios, por tanto tiene asociado de forma única un adjunto de Galois a la derecha. Esto nos permite pensar en los morfismos de **Loc** como estos adjuntos, es decir, si $f : X \longrightarrow Y$ en **Frm**, podemos interpretar f en **Loc** como la única función $f_* : Y \longrightarrow X$ que es adjunta de Galois a la derecha de f. Como consecuencia de esto los *morfismos de locales* preservan ínfimos arbitrarios.

Tenemos entonces un funtor covariante:

$$\begin{aligned} Lc : \mathbf{Top} &\longrightarrow \mathbf{Loc} \\ (X, \tau) &\longmapsto \Omega(X) \\ f : X \to Y &\longmapsto \Omega(f)_* \end{aligned}$$

Para hacer el camino contrario tenemos que ver como asignar a cada locale un espacio topológico al que llamaremos *espectro*:

Definición 3.7. Dado un locale L su *espectro* es el espacio topológico

$$Sp(L) = (\{\textit{filtros completamente primos de } L\}, \{\Sigma_a | a \in L\})$$

donde $\Sigma_a = \{F \text{ filtro completamente primo } | a \in F\}$

Proposición 3.4. Para todo locale L su espectro es un espacio topológico sobrio.

Dem. Comencemos comprobando que $Sp(L)$ es efectivamente un espacio topológico:

- Como todo filtro contiene al 1 y ningún filtro propio contiene al 0 se tiene $\Sigma_0 = \emptyset$ y Σ_1 es el conjunto de todos los filtros completamente primos. Por tanto, el total y el vacío están en la topología.

- Para todo par de abiertos Σ_a y Σ_b con $a, b \in L$ tenemos $\Sigma_{a \wedge b} = \Sigma_a \cap \Sigma_b$, pues si a y b están en un filtro F $a \wedge b$ está en el filtro, y si $a \wedge b$ está en un filtro F como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b \Rightarrow a, b \in F$.

- $\Sigma_{\bigvee a_i} = \bigcup \Sigma_{a_i}$: Si $\bigvee a_i \in F$, siendo F un filtro completamente primo, existe i tal que $a_i \in F \Rightarrow F \in \bigcup \Sigma_{a_i}$. Y si existe $a_{i_0} \in F$ entonces $a_{i_0} \leq \bigvee a_i \Rightarrow F \in \Sigma_{\bigvee a_i}$.

Es T_0 porque si dos filtros completamente primos H, F son distintos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $a \in F \setminus H$ entonces $F \in \Sigma_a$ y $H \notin \Sigma_a$. Veamos ahora la sobriedad. $Sp(L)$ será sobrio si y solo si los filtros completamente primos de $\Omega(Sp(L))$ son de la forma $\mathcal{U}(F)$ con F un filtro completamente primo en L. Consideramos $\mathcal{H}$ un filtro completamente primo de $\Omega(Sp(L))$ y definimos $F = \{a | \Sigma_a \in \mathcal{H}\}$. F es un filtro completamente primo en L pues es la antiimagen por $\phi : a \mapsto \Sigma_a$ (que conserva ínfimos finitos y supremos arbitrarios) de un filtro completamente primo.

Si $\Sigma_a \in \mathcal{H}$ entonces $a \in F \Rightarrow F \in \Sigma_a \Rightarrow \Sigma_a \in \mathcal{U}(F)$. Recíprocamente si $\Sigma_a \in \mathcal{U}(F) \Rightarrow F \in \Sigma_a \Rightarrow a \in F \Rightarrow \Sigma_a \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{U}(F)$ y por tanto $Sp(L)$ es sobrio. □

Sobre los puntos en un locale:

Hay distintas formas de interpretar los puntos en un locale, si nuestro objetivo es, en los casos que se pueda, recuperar un espacio topológico a partir del retículo de sus abiertos, observando la definición anterior, tiene sentido definir un *punto en un locale* L como un filtro completamente primo $F \subseteq L$.

Por otra parte, en el capítulo anterior de este trabajo hemos visto los puntos como homomorfismos de ciertos retículos. Para la topología sin puntos puede hacerse también esta interpretación ([28]). Un punto en un espacio topológico $x \in X$ puede verse como una aplicación continua $\{x\} \to X$. Entonces un punto en un locale A puede verse como un morfismo de locales $\Omega(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\} \to A$, o, lo que es lo mismo, un homomorfismo de retículos topológicos $A \to \mathbf{2}$.

Consideramos ahora $f : L \longrightarrow M$ un morfismo de locales y le asignamos una función continua entre sus espectros:

$$Sp(f) : Sp(L) \longrightarrow Sp(M)$$

$$F \longmapsto (f^*)^{-1}(F)$$

Como f^* es un homomorfismo de retículos topológicos, la preimagen de un filtro completamente primo por f^* es un filtro completamente primo, luego la aplicación anterior está bien definida.

Lema 3.3. $(Sp(f))^{-1}(\Sigma_a) = \Sigma_{f^*a}$ y por tanto $Sp(f)$ es una aplicación continua.

Dem. $(Sp(f))^{-1}(\Sigma_a) = \{F | Sp(f)(F) \in \Sigma_a\} = \{F | (f^*)^{-1}(F) \in \Sigma_a\} = \{F | a \in (f^*)^{-1}(F)\} = \{F | f^*(a) \in F\} = \Sigma_{f^*a}$. □

Sp define un funtor:

- $Sp(id_L) = id_{Sp(L)}$.

- $Sp(f \circ g)(F) = ((f \circ g)^*)^{-1}(F) = (g^* \circ f^*)^{-1}(F) = \{x | g^*(f^*(x)) \in F\} = \{x | f^* \in (g^*)^{-1}(F)\} = (f^*)^{-1}((g^*)^{-1}(F)) = (f^*)^{-1}Sp(g)(F) = (Sp(f) \circ Sp(g))(F)$.

Hemos llegado a dos funtores:

$$Lc : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc} \text{ y } Sp : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$$

Nuestro próximo objetivo es ver que son adjuntos, para ello vamos a estudiar las *unidades*[1] de la adjunción.

Por un lado, tenemos un morfismo de retículos topológicos $\phi_L : L \to Lc(Sp(L))$ que actúa de la forma $a \mapsto \Sigma_a$ y su adjunto de Galois a la derecha $(\phi_L)_* = \sigma_L : Lc(Sp(L)) \to L$, que es un morfismo de locales.

$\sigma : LcSp \Rightarrow Id_{\mathbf{Loc}}$ es una transformación natural, sea $h : L \longrightarrow M$ consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} LcSp(L) \arrow[r, "\sigma_L"] \arrow[d, "LcSp(h)"'] & L \arrow[d, "h"] \\ LcSp(M) \arrow[r, "\sigma_M"] & M \end{tikzcd}$$

Por unicidad de los adjuntos:

$$\sigma_M \circ LcSp(h) = h \circ \sigma_L \Leftrightarrow (\sigma_M \circ LcSp(h))^* = (h \circ \sigma_L)^*.$$

Sea $a \in M$: $(\sigma_M \circ LcSp(h))^*(a) = LcSp(h)^*(\phi_M a) = \Omega(Sp(h))(\Sigma_a) = \{F | a \in Sp(h)(F)\} = \{F | a \in (h^*)^{-1}(F)\} = \{F | h^*(a) \in F\} = \Sigma_{h^*a} = \phi_L(h^*a) = \sigma_L^* h^* a = (h \circ \sigma_L)^*(a)$.

Consideramos ahora un espacio topológico X y la aplicación $\lambda_X : X \to SpLc(X)$ actuando de la forma $\lambda_X(x) = \mathcal{U}(x) = \{U \in \Omega(X) | x \in U\}$

λ_X es continua: cada abierto en $SpLc(X)$ es de la forma Σ_U con $U \in \Omega(X)$. $\lambda_X^{-1}(\Sigma_U) = \{x \in X | \lambda_X(x) \in \Sigma_U\} = \{x \in X | \mathcal{U}(x) \in \Sigma_U\} = \{x \in X | U \in \mathcal{U}(x)\} = \{x \in X | x \in U\} = U \in \Omega(X)$.

λ es natural, sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos $(SpLc(f) \circ \lambda_X)(x) = SpLc(x)(\mathcal{U}(x)) = (\Omega(f))^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \{U | f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)\} = \{U | x \in f^{-1}(U)\} = \{U | f(x) \in U\} = \lambda_Y(f(x)) = (\lambda_Y \circ f)(x)$.

Teorema 3.4. Existe una adjunción $Lc : \mathbf{Top} \leftrightarrows \mathbf{Loc} : Sp$ donde σ es la counidad y λ la unidad.

Dem. Por el teorema 1.5 basta con ver que $Sp(\sigma_L) \circ \lambda_{SpL} = Id_{SpL}$ y $\sigma_{Lc(X)} \circ Lc(\lambda_X) = Id_{LcX}$ para todo locale L y espacio topológico X.

Sea L un locale, $F \in Sp(L)$: $(Sp(\sigma_L) \circ \lambda_{SpL})(F) = Sp(\sigma_L)(\mathcal{U}(F)) = (\sigma_L^*)^{-1}(\mathcal{U}(F)) = (\phi_L)^{-1}(\mathcal{U}(F)) = \{a \in L | \Sigma_a \in \mathcal{U}(F)\} = \{a \in L | F \in \Sigma_a\} = \{a \in L | a \in F\} = F$.

Para un espacio topológico X: $(\sigma_{Lc(X)} \circ Lc(\lambda_X))^*(U) = (Lc(\lambda_X)^* \circ \phi_{Lc(X)})(U) = (\lambda_X)^{-1}(\Sigma_U) = \{x \in X | \mathcal{U}(x) \in \Sigma_U\} = \{x \in X | U \in \mathcal{U}(x)\} = \{x \in X | x \in U\} = U$. $\square$

[1] Con unidades nos referimos a lo que hemos llamado anteriormente unidad y counidad.

3.2.1. Las unidades de la adjunción

En esta parte vamos a estudiar un poco más en detalle algunas propiedades de σ y λ.

Lema 3.4. Cada σ_L es inyectiva.

Dem. La aplicación $\phi_L : L \longrightarrow Lc(Sp(L))$ es suprayectiva (por construcción del espacio topológico). Por ser adjuntos de Galois tenemos $\phi_L\sigma_L\phi_L = \phi_L$ como ϕ_L suprayectiva podemos cancelar y $\phi_L\sigma_L = id \Rightarrow \sigma_L$ es inyectiva. □

La siguiente proposición ilustra la relación que existe entre la espacialidad y la counidad σ.

Proposición 3.5. Dado un locale L son equivalentes:

I. L es espacial.

II. $\sigma_L : Lc(Sp(L)) \longrightarrow L$ es un isomorfismo de retículos completos.

III. $\sigma_L^* : L \longrightarrow Lc(Sp(L))$ es un isomorfismo de retículos completos.

IV. σ_L es epimorfismo.

V. σ_L^* monomorfismo.

Dem. Es inmediato que II implica I y IV y que III implica V.

Además, por el lema anterior si se cumple IV σ_L es un isomorfismo y su inverso debe ser σ_L^*. Por tanto se cumplen II, III y V. Análogamente si asumimos cierto V se cumplen II, III y IV.

Solo nos falta comprobar que I⇒II: pero si existe un isomorfismo $h : L \longrightarrow Lc(X)$ para algún espacio topológico X entonces, por naturalidad, $\sigma_L = h^{-1}\sigma_{Lc(X)}LcSp(h)$ es un isomorfismo. □

Como consecuencia de la proposición anterior, un retículo es espacial si y solo si es isomorfo al retículo generado por su propio espectro.

Proposición 3.6. Sea X un espacio topológico son equivalentes:

I. X es sobrio.

II. $\lambda_X : X \longrightarrow SpLc(X)$ es biyectiva.

III. $\lambda_X : X \longrightarrow SpLc(X)$ es un homeomorfismo.

Dem. I⇒II: Si X es sobrio, todo filtro primo de $\Omega(X) = Lc(X)$ es de la forma $\mathcal{U}(x)$ con $x \in X$, por tanto tenemos la suprayectividad. Por ser T_0: $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y) \Leftrightarrow x = y$, así que tenemos la inyectividad.

II⇒ III: Sabemos que λ_X es siempre continua, veamos que además es abierta:

$$\lambda_X(U) = \{\mathcal{U}(x) | x \in U\} = \{\mathcal{U}(x) | U \in \mathcal{U}(x)\} = \Sigma_U.$$

III⇒I: Si son homeomorfos como $SpLc(X)$ es sobrio X tiene que ser sobrio. □

Proposición 3.7. Sean X e Y dos espacios topológicos sobrios. Las funciones continuas $h : X \longrightarrow Y$ están en correspondencia biyectiva con los morfismos de retículos topológicos $f : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$ y por tanto con los de locales.

Dem. Sea $f : \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$ un morfismo de retículos topológicos, para cada $x \in \Omega(X)$ consideramos $\mathcal{U}(x)$ y tenemos que $f^{-1}(\mathcal{U}(x))$ es un filtro completamente primo en $\Omega(Y)$, entonces existe algún $y \in Y$ tal que $\mathcal{U}(y) = f^{-1}(\mathcal{U}(x))$. El punto y está determinado de forma única por ser los espacios T_0. Así podemos definir $h(x) = y$. Entonces tenemos:

$$x \in f(U) \Leftrightarrow f(U) \in \mathcal{U}(x) \Leftrightarrow U \in f^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}(h(x)) \Leftrightarrow h(x) \in U \Leftrightarrow x \in h^{-1}(U)$$

Entonces h es continua y f es exactamente $\Omega(h)$. $\square$

Corolario 3.2. La adjunción anterior determina una equivalencia entre las subcategorías **Sob** de los espacios topológicos sobrios y **SLoc** de los locales espaciales.

Capítulo 4

Marcos Topológicos y Ortogonales

Esta última parte cuenta con resultados inéditos fruto del trabajo realizado con el profesor Saúl Fernández González en el marco de la beca de colaboración en departamentos. Como texto fundamental de partida se ha utilizado [23].

En este capítulo estudiamos los marcos, en específico los topológicos, llegando a un teorema de representación. A continuación "traducimos" algunos conceptos topológicos a los marcos y definimos el concepto de topología sobre un marco. Finalmente, exponemos de forma explícita la dualidad categórica entre los marcos ortogonales topológicos y los espacios topológicos, usando, para ello, funciones que conservan la veracidad de las fórmulas entre modelos de la lógica. Una aplicación $f : M_1 \to M_2$ entre dos modelos conserva la veracidad de las fórmulas, si para toda fórmula φ cierta en M_2, su antiimagen mediante f es cierta en M_1.

Este tipo de dualidades son útiles en la lógica, ya que ponen en común los modelos de la lógica modal estándar (los marcos) y los modelos espaciales (espacios topológicos) ([7]).

4.1. Marcos ortogonales

Definición 4.1. Un *marco* es un conjunto X equipado de una o más relaciones binarias R_i.

Definición 4.2. Un marco equipado con dos relaciones (X, R_1, R_2) se dice *ortogonal* si existen relaciones de equivalencia $\equiv_1$, $\equiv_2$ tales que $R_1 \subseteq \equiv_1$, $R_2 \subseteq \equiv_2$ y $\equiv_1 \cap \equiv_2 = Id_X$.

Diremos que dos relaciones $\equiv_1, \equiv_2$ definidas sobre un conjunto X son *ortogonales* si $\equiv_1 \cap \equiv_2 = Id_X$.

Definición 4.3. Un *espacio de subconjuntos* es un par (X, τ) donde X es un conjunto y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$.

En particular un espacio topológico es un espacio de subconjuntos.

Definición 4.4. Un *marco ortogonal de subconjuntos* es un marco $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ verificando:

I. $\leq$ es un orden y $\sim$ una relación de equivalencia.

II. $(\sim \circ \leq) \subseteq (\leq \circ \sim)$.

Además existe una relación de equivalencia $\equiv$ tal que $\leq \subseteq \equiv$ y

III. $\sim \cap \equiv = Id_{\mathcal{O}}$.

IV. Si $a'(\equiv \circ \sim)b$ para todo $a' \sim a$ entonces $a(\leq \circ \sim)b$.

La definición anterior presenta ciertos aspectos problemáticos ya que $\equiv$ no es necesariamente única.

Para solucionar esto podemos tomar $\equiv$ como primitiva observando que:

Proposición 4.1. En un marco de subconjuntos ortogonal $a \leq b \Leftrightarrow a \equiv b$ y para todo $a' \sim a$, $a'(\equiv \circ \sim)b$.

Dem. Si $a \leq b$ entonces $a \equiv b$ y para todo $a' \sim a$, $a' \sim a \leq b \Rightarrow a'(\leq \circ \sim)b \Rightarrow a'(\equiv \circ \sim)b$.

Supongamos ahora que $a \equiv b$ y para todo $a' \sim a$, $a'(\equiv \circ \sim)b$, en particular $a(\equiv \circ \sim)b$ entonces existe c tal que $a \leq c \sim b \Rightarrow b \equiv a \leq c \sim b \Rightarrow c \equiv b$ y $c \sim b$. Luego, por ortogonalidad, $b = c \Rightarrow a \leq b$. $\square$

Definición 4.5. Un *marco ortogonal de subconjuntos* es un marco $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ donde $\equiv, \sim$ son dos relaciones de equivalencia que satisfacen:

I. $\equiv \cap \sim = Id_{\mathcal{O}}$.

II. Si $a'(\equiv \circ \sim)b'$ y $b'(\equiv \circ \sim)a'$ para todos $a' \sim a$ y $b' \sim b$ entonces $a \sim b$.

Vamos a comprobar que ambas definiciones son equivalentes:

Sea $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ un marco ortogonal de subconjuntos cumpliendo la definición 4.4. Tenemos dos relaciones de equivalencia $\equiv$ y $\sim$ verificando $\equiv \cap \sim = Id_{\mathcal{O}}$ por definición. Supongamos que $a'(\equiv \circ \sim)b'$ y $b'(\equiv \circ \sim)a'$ para todos $a' \sim a$ y $b' \sim b$. Esto implica $a(\leq \circ \sim)b$ y $b(\leq \circ \sim)a \Rightarrow$ existen c, c' tales que $a \leq c \sim b \leq c' \sim a$. Como $(\sim \circ \leq) \subseteq (\leq \circ \sim)$ existe un x tal que $c \leq x \sim c'$. Por tanto $x \leq c \leq a \Rightarrow x \equiv a$ y $x \sim c' \sim a \Rightarrow a = x$ por ortogonalidad. Pero si $a = x$ $a \leq c \leq x = a \Rightarrow a = c \sim b \Rightarrow a \sim b$.

Recíprocamente consideramos $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ verificando la segunda definición y definimos $\leq$ como en la proposición 4.1, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia y $\leq$ es un orden:

- Para todo $a \in \mathcal{O}$, $a \equiv a$ y para todo $a' \sim a$ $a' \equiv a' \sim a \Rightarrow a \leq a$.
- Si $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a \equiv b$ y $a'(\equiv \circ \sim)b'$ y $b'(\equiv \circ \sim)a'$ para todos $a' \sim a$ y $b' \sim b$ $\Rightarrow a \sim b \Rightarrow a = b$.
- Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \equiv b \equiv c$ y para todo $a' \sim a$: $a'(\equiv \circ \sim)b \Rightarrow$ existe un $b' \sim b$ tal que $a' \equiv b' \sim b$ y como $b \leq c$ existe c' tal que $b' \equiv c' \sim c$ por lo que $a' \equiv b' \equiv c' \sim c \Rightarrow a'(\equiv \circ \sim)c$ para todo $a' \sim a \Rightarrow a \leq c$.

Sea $a(\sim \circ \leq)b$ existe c tal que $a \sim c \leq b$ y por definición de $\leq$ como $a \sim c$ existe un b' tal que $a \equiv b' \sim b$. Comprobemos que $a \leq b'$: si $a' \sim a \sim c$ existe algún b'' tal que $a' \equiv b'' \sim b \sim b'$ y entonces $a'(\equiv \circ \sim)b'$ para todo $a' \sim a$ y $b' \equiv a \Rightarrow a \leq b' \sim b$.

$\leq \subseteq \equiv$ por definición y $\sim \cap \equiv = Id_{\mathcal{O}}$.

Finalmente si $a'(\equiv \circ \sim)b$ para todo $a' \sim a$ entonces en particular para $a \sim a$ existe c tal que $a \equiv c \sim b$. Veamos que $a \leq c$: Si $a' \sim a$ entonces $a'(\equiv \circ \sim)b \sim c \Rightarrow a \leq c \sim b$. Por tanto las dos definiciones son equivalentes.

Dado un espacio de subconjuntos (X, τ) podemos construir lo que llamaremos su *marco ortogonal asociado* de dos formas. En ambas definimos $\mathcal{O} = \{(x, U) | x \in U \in \tau\}$

- Usando una relación de equivalencia y una de orden:
  - $(x, U) \sim (y, V) \Leftrightarrow U = V$
  - $(x, U) \leq (y, V) \Leftrightarrow x = y$ y $U \subseteq V$
- Usando dos relaciones de equivalencia:
  - $(x, U) \sim (y, V) \Leftrightarrow U = V$
  - $(x, U) \equiv (y, V) \Leftrightarrow x = y$

Podemos también obtener un espacio de subconjuntos a partir de un marco:
Sea $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco. Consideramos $X_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}/\equiv$. Para cada $\widetilde{\pi} \in \mathcal{O}/\sim$ definimos

$$U_{\widetilde{\pi}} = \{\overline{\sigma} \in X_{\mathcal{O}} | \overline{\sigma} \cap \widetilde{\pi} \neq \emptyset\}.$$

Llamamos $\tau_{\mathcal{O}} = \{U_{\widetilde{\pi}} | \pi \in \mathcal{O}/\sim\} \cup \{\emptyset\}$ y obtenemos el espacio de subconjuntos $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$.

Notación: Siempre que usemos la notación $\overline{a}$ entenderemos que se trata de un elemento del conjunto cociente $\mathcal{O}/\equiv$ y $\widetilde{a}$ del conjunto conciente $\mathcal{O}/\sim$.

Algunas observaciones:

I. Debido a la ortogonalidad para cada $\overline{\sigma} \in \mathcal{O}/\equiv$, $\widetilde{\pi} \in \mathcal{O}/\sim$ hay como mucho un elemento en $\overline{\sigma} \cap \widetilde{\pi}$.

II. En un marco ortogonal de subconjuntos $\overline{b} \in U_{\widetilde{a}} \Leftrightarrow b(\equiv \circ \sim)a$.

4.1.1. Marcos ortogonales topológicos

Nos preguntamos ahora cuáles son los marcos ortogonales de subconjuntos que se corresponden con los espacios topológicos y, otra vez, tenemos dos definiciones según si tomamos como primitiva $\equiv$ o $\leq$.

Definición 4.6. Un *marco ortogonal topológico* es un marco ortogonal de subconjuntos $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ que además verifica:

I. $(\geq \circ \leq) = \equiv$ (donde $\equiv$ es la relación de la definición 4.4).

II. Para todo $A \subseteq \mathcal{O}$ no vacío existe una clase de equivalencia $\widetilde{b} \in \mathcal{O}/\sim$ tal que

   a) Para todo $a \in A$ y para todo $b \in \widetilde{b}$: $a(\leq \circ \sim)b$

   b) Para todo $b \in \widetilde{b}$ existe $a \in A$ tal que $a(\sim \circ \leq)b$.

Definición 4.7. Un *marco ortogonal topológico* es un marco ortogonal de subconjuntos $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ que además satisface:

I. Si $a \equiv b$ existe $c \in \mathcal{O}$ tal que $c \equiv a \equiv b$ y para todo $c' \sim c$, $c'(\equiv \circ \sim)a$ y $c'(\equiv \circ \sim)b$.

II. Para todo $A \subseteq \mathcal{O}$ no vacío y cerrado bajo $\sim$ existe un $b \in \mathcal{O}$ tal que

   a) Para todo $a \in A$: $a(\equiv \circ \sim)b$

   b) Para todo $b' \sim b$ existe $a' \in A$ tal que $a' \equiv b'$.

Comprobamos la equivalencia de ambas definiciones:

Def 4.6 $\Rightarrow$ Def 4.7:

Si $a \equiv b$ entonces $a \geq c \leq b$ para algún $c \in \mathcal{O} \Rightarrow a \equiv b \equiv c$ y para todo $c' \sim c$: $c'(\equiv \circ \sim)a$ y $c'(\equiv \circ \sim)b$.

Si $A \subseteq \mathcal{O}$ no vacío y cerrado bajo $\sim$, existe una clase de equivalencia $\widetilde{b}$ verificando a) y b) de la primera definición. Sea $b \in \widetilde{b}$ se tiene:

- Para todo $a \in A$: $a(\leq \circ \sim)b \Rightarrow a(\equiv \circ \sim)b$.
- Para todo $b' \sim b$, $b' \in \widetilde{b}$ por tanto existe $a \in A$ tal que $a \sim a' \leq b'$ y por ser A cerrado bajo $\sim$, $a' \in A$ verifica $a' \equiv b'$.

Def 4.7 $\Rightarrow$ Def 4.6:

Definimos $\leq$ igual que en la proposición 4.1.

Si $a \geq c \leq b$ entonces $a \equiv c \equiv b \Rightarrow (\geq \circ \leq) \subseteq \equiv$.

Si $a \equiv b$ existe un $c \in \mathcal{O}$ tal que $c \equiv a \equiv b$ y para todo $c' \sim c$, $c'(\equiv \circ \sim)a$ y $c'(\equiv \circ \sim)b \Rightarrow a \geq c \leq b$.

Sea $A \subseteq \mathcal{O}$ distinto de vacío, considero $\widetilde{A} = \{a' \sim a | a \in A\}$ que es cerrado bajo $\sim$ y existe un b tal que se cumple a) y b) de la segunda definición. Consideramos la clase de equivalencia de b, $\widetilde{b}$:

- Sea $a \in A$ entonces $a \in \widetilde{A}$ y para todo $a' \sim a$ tenemos $a' \in \widetilde{A}$. Luego $a'(\equiv \circ \sim)b \Rightarrow a(\leq \circ \sim)b \Rightarrow a(\leq \circ \sim)b'$ para todo $b' \in \widetilde{b}$.
- Sea $b' \in \widetilde{b}$ entonces $b' \sim b$, existe $a' \in \widetilde{A}$ tal que $a' \equiv b' \Rightarrow$ existe $a \in A$ tal que $a \sim a' \equiv b'$. Para todo $a'' \sim a'$ como $a'' \in \widetilde{A}$ y $b' \in \widetilde{b} \Rightarrow a''(\equiv \circ \sim)b' \Rightarrow a' \leq b' \Rightarrow a(\sim \circ \leq)b'$.

En el caso de los marcos ortogonales topológicos, la definición usando $\leq$ deja de ser problemática ya que la relación de equivalencia $\equiv$ ahora está definida de forma única a partir de $\leq$.

A continuación veamos una serie de "propiedades" de estas estructuras.

Lema 4.1. En un marco topológico ortogonal $(\leq \circ \geq) = (\geq \circ \leq)$.

Dem. Sabemos que $(\geq \circ \leq) = \equiv$. Veamos que $(\leq \circ \geq)$ también es igual a $\equiv$. Si $a(\leq \circ \geq)b$ como $\leq \subseteq \equiv \Rightarrow a \equiv b$. Sean $a \equiv b$, consideramos $\widetilde{c}$ la clase de equivalencia que verifica II a) y II b) de la definición 4.6. Entonces existen $c, c' \in \widetilde{c}$ tales que $a \leq c \sim c' \geq b \Rightarrow c \equiv a \equiv b \equiv c' \Rightarrow c = c'$ por ortogonalidad y entonces $a \leq c \geq b \Rightarrow \equiv \subseteq (\leq \circ \geq)$. $\square$

Lema 4.2. Si R es una relación reflexiva y transitiva verificando que $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R$ entonces $R \circ R^{-1}$ es la menor relación de equivalencia que contiene a R.

Dem. Si aRb entonces $aRbR^{-1}b$ ya que si R reflexiva R^{-1} tambien lo es.

Veamos que $R \circ R^{-1}$ es de equivalencia:

- $aRaR^{-1}a \Rightarrow a(R \circ R^{-1})a$ para todo a.
- $a(R \circ R^{-1})b$ entonces existe c tal que $aRcR^{-1}b$ y por tanto $cR^{-1}a$ y bRc entonces $b(R \circ R^{-1})a$.
- Si $a(R \circ R^{-1})b$ y $b(R \circ R^{-1})c$ entonces $aR \circ R^{-1} \circ R \circ R^{-1}c \Rightarrow aR \circ R \circ R^{-1} \circ R^{-1}c$ y por transitividad tenemos "idempotencia" ($aRcRb \Rightarrow aRb$) así que $a(R \circ R^{-1})c$.

Sea $\equiv$ otra relación de equivalencia conteniendo a R, si $a(R \circ R^{-1})b$ tenemos que $aRcR^{-1}b$ entonces aRc y $cRb \Rightarrow a \equiv c \equiv b \Rightarrow a \equiv b$ por tanto $R \circ R^{-1} \subseteq \equiv$. $\square$

Entonces en un marco topológico ortogonal $\equiv$ es la menor relación de equivalencia que contiene a $\leq$.

Lema 4.3. En un marco ortogonal de subconjuntos se verifica

I. $U_{\widetilde{a}} \subseteq U_{\widetilde{b}} \Leftrightarrow a(\leq \circ \sim)b$.

II. Si $a(\leq \circ \sim)b$ y $b(\leq \circ \sim)a$ entonces $a \sim b$.

III. $U_{\widetilde{a}} = U_{\widetilde{b}} \Leftrightarrow a \sim b$.

Dem. I. Supongamos $U_{\widetilde{a}} \subseteq U_{\widetilde{b}}$ y $a' \sim a$ entonces $a' \equiv a' \sim a \Rightarrow a' \in U_{\widetilde{a}} \subseteq U_{\widetilde{b}}$ por lo que $a'(\equiv \circ \sim)b$. Por definición de marco ortogonal de subconjuntos esto implica $a(\leq \circ \sim)b$. Supongamos ahora que existe b' tal que $a \leq b' \sim b$. Sea $\overline{\alpha} \in U_{\widetilde{a}}$ entonces existe c tal que $\alpha \equiv c \sim a$ y como $a \leq b'$ y $c \sim a$ tenemos $\alpha \equiv c(\equiv \circ \sim)b' \sim b \Rightarrow \alpha(\equiv \circ \sim)b \Rightarrow \overline{\alpha} \in U_{\widetilde{b}}$.

II. Supongamos que existen c, c' tales que $a \leq c \sim b \leq c' \sim a$. Como $(\sim \circ \leq) \subseteq (\leq \circ \sim)$ existe b' tal que $a \leq c \leq b' \sim c' \sim a$ entonces $b' \equiv a$ y $b' \sim a \Rightarrow b' = a \Rightarrow a \leq c \leq b' = a \Rightarrow c = a \Rightarrow a \sim b$.

III. Es inmediato por lo anterior (notar que si $a \sim b$ entonces $a \leq a \sim b$). $\square$

Proposición 4.2. En un marco topológico ortogonal $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$, para cada subconjunto $A \neq \emptyset$ de $\mathcal{O}$ la clase de equivalencia $\widetilde{b}$ verificando

I. Para todo $a \in A$ y para todo $b \in \widetilde{b}$: $a(\leq \circ \sim)b$.

II. Para todo $b \in \widetilde{b}$ existe $a \in A$ tal que $b(\leq \circ \sim)a$.

es única.

Dem. Sea $A \neq \emptyset$, $\widetilde{b}$ y $\widetilde{c}$ dos clases de equivalencia verificando I y II, para ver que son iguales basta probar $b(\leq \circ \sim)c$ y $c(\leq \circ \sim)b$.

Sea $b' \sim b$ existe $a \in A$ tal que $b' \leq \circ \sim a$ entonces existe a' tal que $b \leq a' \sim a$. Como $a \in A$ $a(\leq \circ \sim)c \Rightarrow a' \sim a(\leq \circ \sim)c \Rightarrow a' \leq \circ \sim c$, por tanto existe $c' \sim c$ tal que $b' \equiv a' \leq c' \sim c \Rightarrow b'(\equiv \circ \sim)c$ para cualquier $b' \sim b \Rightarrow b(\leq \circ \sim)c$.

Para $c(\leq \circ \sim)b$ es el mismo razonamiento cambiando los papeles que juegan b y c. $\square$

Corolario 4.1. En un marco topológico ortogonal cada clase de equivalencia $\overline{\sigma}$ tiene máximo vía la relación $\leq$.

Dem. Sea el marco $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$, consideramos $\widetilde{X}$ la clase de equivalencia que cumple

I. Para todo $a \in A$ y para todo $b \in \widetilde{b}$: $a(\leq \circ \sim)b$.

II. Para todo $b \in \widetilde{b}$ existe $a \in A$ tal que $b(\leq \circ \sim)a$.

Tomando $A = \mathcal{O}$. Sea $\overline{a} \in \mathcal{O}/\equiv$, $a \in \mathcal{O}$ por tanto existe $x \in \widetilde{X}$ tal que $a \leq x$. Sea $b \equiv a$, $b \in \mathcal{O}$ y $x \in \widetilde{X} \Rightarrow b(\leq \circ \sim)x \Rightarrow$ existe $x' \sim x$ tal que $b \leq x' \sim x$ entonces $x' \equiv b \equiv a \equiv x \Rightarrow x = x'$ y por tanto x es un máximo de $\overline{a}$.

Considerando otra $\equiv$-clase de equivalencia podemos encontrar su máximo en $\widetilde{X}$, por tanto los máximos están relacionados por $\sim$. $\square$

Proposición 4.3. Sea $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco ortogonal de subconjuntos tal que $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es un espacio topológico, entonces $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ es un marco ortogonal topológico.

Dem. Sean $a \equiv b$ en $\mathcal{O} \Rightarrow a \equiv b \sim b \Rightarrow \overline{a} \in U_{\widetilde{b}} \Rightarrow U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}} \neq \emptyset \Rightarrow$ existe un $c \in \mathcal{O}$ tal que $U_{\widetilde{c}} = U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$ este c verifica $c(\leq \circ \sim)a$ y $c(\leq \circ \sim)b \Rightarrow$ para todo $c' \sim c$: $c'(\equiv \circ \sim)a$ y $c'(\equiv \circ \sim)b$.

Sea $A \subseteq \mathcal{O}$ no vacío y cerrado bajo $\sim$ entonces por ser $\tau_{\mathcal{O}}$ una topología existe $b \in \mathcal{O}/\sim$ tal que $\bigcup\{U_{\widetilde{a}} | a \in A\} = U_{\widetilde{b}} \Rightarrow$ para todo $a \in A$ $\overline{a} \in U_{\widetilde{b}} \Rightarrow a(\equiv \circ \sim)b$, y para todo $b' \sim b \Rightarrow \overline{b'} \in U_{\widetilde{b}} \Rightarrow \overline{b'} \in U_{\widetilde{a}}$ para algún $a \in A \Rightarrow b' \equiv a' \sim a$ para algún $a \in A$ y como A cerrado bajo $\sim \Rightarrow a' \in A$. $\square$

Proposición 4.4. Si $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ es un marco ortogonal topológico el espacio $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es un espacio topológico.

Dem. El vacío está en $\tau_{\mathcal{O}}$ por construcción y para ver que está $X_{\mathcal{O}}$ consideramos $\widetilde{o}$ la $\sim$-clase de equivalencia conteniendo a todos los máximos de cada $\equiv$-clase de equivalencia. Entonces para cada $\overline{\sigma} \in X_{\mathcal{O}}$ $\sigma \leq x' \sim o$ siendo x' el máximo de $\overline{\sigma} \Rightarrow \sigma \equiv x' \sim o$ esto implica $\overline{\sigma} \in U_{\widetilde{o}} \Rightarrow U_{\widetilde{o}} = X_{\mathcal{O}} \in \tau_{\mathcal{O}}$.

Sean $U_{\widetilde{a}}, U_{\widetilde{b}} \in \tau_{\mathcal{O}}$, consideramos $A = \{c \in \mathcal{O} | c(\leq \circ \sim)a$ y $c(\leq \circ \sim)b\}$. Si $U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$ es el vacío ya está en $\tau_{\mathcal{O}}$ y si es distinto de vacío, existe $\overline{p}$ tal que $a \sim a' \equiv p \equiv b' \sim b$ y como $\equiv = (\geq \circ \leq)$ existe c tal que $a \sim a' \geq c \leq b' \sim b \Rightarrow c \in A \neq \emptyset$. Como A es no vacío y $\sim$-cerrado, pues $(\sim \circ \leq) \subseteq (\leq \circ \sim)$, existe $x \in \mathcal{O}$ tal que verifica que para todo $c \in A$ y $c(\equiv \circ \sim)x$ y que para todo $x' \sim x$ existe un $c \in A$ tal que $c \equiv x'$. Veamos que $U_{\widetilde{x}}$ es exactamente $U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$.

Si $\overline{p} \in U_{\widetilde{x}}$ existe $x' \in \widetilde{x}$ tal que $p \equiv x'$ y existe un $d \in A$ tal que $x' \sim d$ y además para todo $d' \sim d$ $d' \in A \Rightarrow d'(\equiv \circ \sim)x \sim x' \Rightarrow d \leq x'$. Además por definición de A existen a', b' tales que $d \leq a' \sim a$ y $d \leq b' \sim b$. Tenemos entonces

$$p \equiv x' \geq d \leq a' \sim a \text{ y } p \equiv x' \geq d \leq b' \sim b$$

Entonces $p \equiv a' \sim a \Rightarrow \overline{p} \cap \widetilde{a} \neq \emptyset$ y $\overline{p} \cap \widetilde{b} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$.

Para el otro contenido, si $\overline{p} \in U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$ existen a' y b' tales que $a \sim a' \equiv p \equiv b' \sim b$ y como $\equiv = (\geq \circ \leq)$ entonces existe d tal que $a \sim a' \geq d \leq b' \sim b \Rightarrow d \in A \Rightarrow$ existe $x' \sim x$ tal que $d \leq x'$ y $p \equiv d \leq x' \Rightarrow x' \equiv p \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{x}}$.

Por último veamos que las uniones arbitrarias de elementos de $\tau_{\mathcal{O}}$ pertenecen a $\tau_{\mathcal{O}}$. Sea $\Lambda \in \mathcal{O}/\sim$ una familia arbitraria de clases de equivalencia y $A = \bigcup \Lambda = \{a \in \mathcal{O} | a \in \alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda\}$. Consideramos $\widetilde{x}$ la clase de equivalencia verificando II a) y II b) de la definición 4.6 y tenemos :

Si $\overline{p} \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha}$ entonces $p \equiv a$ para algún $a \in \alpha \in \Lambda$ y como $a \in A$ $a \leq x'$ para algún $x' \in \widetilde{x} \Rightarrow p \equiv x' \sim x \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{x}}$.

Si $\overline{p} \in U_{\widetilde{x}}$, entonces $p \equiv x' \sim x$ y existe algún $a \in A$ tal que $x' \leq a' \sim a \Rightarrow p \equiv a' \sim a \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{a}} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha}$. □

Terminamos esta sección con un teorema de “representación”.

Teorema 4.1. Si $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ es un marco ortogonal topológico entonces $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es un espacio topológico cuyo marco ortogonal asociado es isomorfo a $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$.

Dem. Denotamos $(\mathcal{O}_{X_{\mathcal{O}}}, \leq_{X_{\mathcal{O}}}, \sim_{\tau_{\mathcal{O}}})$ al marco ortogonal asociado a $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$. Hemos observado que un par $(\overline{a}, U_{\widetilde{b}})$ pertenece a $\mathcal{O}_{x_{\mathcal{O}}}$ si y solo si la intersección $\overline{a} \cap \widetilde{b}$ es unipuntual. Para cada $(\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) \in \mathcal{O}_{x_{\mathcal{O}}}$ denotamos $x_{[a,b]}$ al único elemento de $\mathcal{O}$ en esa intersección y definimos la función

$$f : \mathcal{O}_{X_{\mathcal{O}}} \longrightarrow \mathcal{O}$$

$$(\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) \longmapsto x_{[a,b]}$$

f es inyectiva ya que dos clases de equivalencia distintas son disjuntas y sobreyectiva pues para todo $x \in \mathcal{O}, x = f(\overline{x}, U_{\widetilde{x}})$.

f y f^{-1} coservan las relaciones:

- $(\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) \leq_{X_{\mathcal{O}}} (\overline{c}, U_{\widetilde{d}})$ si y solo si $\overline{a} = \overline{c}$ y $U_{\widetilde{b}} \subseteq U_{\widetilde{d}}$ si y solo si $a \equiv c$ y $b(\leq \circ \sim)d$. Entonces $a \equiv x_{[a,b]} \sim b \leq \circ \sim d \Rightarrow$ existe t tal que $x_{[a,b]} \leq t \sim d$. Entonces $t \equiv x_{[a,b]} \equiv a \equiv c$ y $t \sim d \Rightarrow t \in \overline{c} \cap \widetilde{d} \Rightarrow t = x_{[c,d]} \Rightarrow x_{[a,b]} \leq x_{[c,d]}$. Recíprocamente si $x_{[a,b]} \leq x_{[c,d]}$ entonces son $\equiv$-equivalentes por lo que $a \equiv c$ y para todo $b' \sim x_{[a,b]} \sim b$ $b'(\equiv \circ \sim)x_{[c,d]} \sim d \Rightarrow b(\leq \circ \sim)d \Rightarrow (\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) \leq_{X_{\mathcal{O}}} (\overline{c}, U_{\widetilde{d}})$

- $(\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) \sim_{\tau_{\mathcal{O}}} (\overline{c}, U_{\widetilde{d}})$ si y solo si $U_{\widetilde{b}} = U_{\widetilde{d}}$ si y solo si $d \sim b$ si y solo si $x_{[a,b]} \sim x_{[c,d]}$. □

4.1.2. Traducción de algunos conceptos topológicos

Dado un marco ortogonal topológico estudiamos como algunas nociones topológicas usuales pueden "traducirse" a él.

Definición 4.8. Diremos que un marco topológico ortogonal $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ es...

- T_0 si para todo $a, b \in \mathcal{O}$ tales que $\neg(a \equiv b)$ existe $c \in \mathcal{O}$ tal que o bien $a(\equiv \circ \sim)c$ y $\neg(b(\equiv \circ \sim)c)$ o bien $b(\equiv \circ \sim)c$ y $\neg(a(\equiv \circ \sim)c)$.

- T_1 si para todo $a, b \in \mathcal{O}$ tales que $\neg(a \equiv b)$ existe $c \in \mathcal{O}$ tal que $a(\equiv \circ \sim)c$ y $\neg(b(\equiv \circ \sim)c)$.

- T_2 si para todo $a, b \in \mathcal{O}$ tales que $\neg(a \equiv b)$ existen $c, d \in \mathcal{O}$ tales que $a \equiv c$, $b \equiv d$ y para todos $c' \sim c$ y $d' \sim d$ $\neg(c' \equiv d')$.

Proposición 4.5. Un marco topológico ortogonal es T_0 (respectivamente T_1, T_2) si y solo si su espacio topológico asociado es T_0 (respectivamente T_1, T_2).

Dem. Vamos a hacerlo únicamente para el caso T_0, las otras demostraciones son similares.

Sea $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco topológico ortogonal T_0 y $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ su espacio topológico asociado. Sean $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in X_{\mathcal{O}}$ con $\overline{\alpha} \neq \overline{\beta}$, consideramos $a \in \overline{\alpha}, b \in \overline{\beta}$, entonces $\neg(a \equiv b)$ y por estar en un marco T_0, existe un c tal que o bien $a(\equiv \circ \sim)c$ y $\neg(b(\equiv \circ \sim)c)$ o bien $b(\equiv \circ \sim)c$ y $\neg(a(\equiv \circ \sim)c)$ entonces o bien $\overline{\alpha} \in U_{\widetilde{c}}$ y $\overline{\beta} \notin U_{\widetilde{b}}$ o bien lo contrario ($\overline{\alpha} \notin U_{\widetilde{c}}$ y $\overline{\beta} \in U_{\widetilde{b}}$) $\Rightarrow (X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es T_0.

Si $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es T_0, consideramos $a, b \in \mathcal{O}$ tales que $\neg(a \equiv b)$ y por tanto $\overline{a} \neq \overline{b} \Rightarrow$ existe un abierto $U \in \tau_{\mathcal{O}}$ tal que o bien $a \in U, b \notin U$ o bien $a \notin U, b \in U$. Si $U \in \tau_{\mathcal{O}}$ existe $c \in \mathcal{O}$ tal que $U = U_{\widetilde{c}}$ y este c verifica que o bien $a(\equiv \circ \sim)c$ y $\neg(b(\equiv \circ \sim)c)$ o bien $\neg(a(\equiv \circ \sim)c)$ y $b(\equiv \circ \sim)c \Rightarrow$ el marco es T_0. □

Definición 4.9. Diremos que un marco ortogonal topológico verifica el axioma T_d si para todo $a \in \mathcal{O}$ existen $b, c \in \mathcal{O}$ tales que $a(\equiv \circ \sim)b$, $\neg(a(\equiv \circ \sim)c)$ y se verifica:

- $c(\leq \circ \sim)b$

- Si $\neg(x \equiv a)$ y $x(\equiv \circ \sim)b$ entonces $x(\equiv \circ \sim)c$

Proposición 4.6. Un marco topológico ortogonal es T_d si y solo si su espacio topológico asociado es T_d.

Dem. Sea $(\mathcal{O}, \sim, \equiv)$ un marco topológico ortogonal y $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ su espacio topológico asociado. Si $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es T_d, por definición, para todo $\overline{a} \in X_{\mathcal{O}}$ existe $U \in \tau_{\mathcal{O}}$ con $\overline{a} \in U$ y $U \setminus \{\overline{a}\} \in \tau_{\mathcal{O}}$. Sea $a \in \mathcal{O}$, entonces existen $U_{\widetilde{b}}, U_{\widetilde{c}} \in \tau_{\mathcal{O}}$ tales que $\overline{a} \in U_{\widetilde{b}}$ y $U_{\widetilde{c}} = U_{\widetilde{b}} \setminus \{\overline{a}\}$. Entonces $a(\equiv \circ \sim)b$ y $\neg(a(\equiv \circ \sim)c)$. Además:

- $U_{\widetilde{c}} \subseteq U_{\widetilde{b}} \Rightarrow c(\leq \circ \sim)b$.
- Para todo $\overline{x} \neq \overline{a}$ en $U_{\widetilde{b}}$, $\overline{x}$ está en $U_{\widetilde{c}}$, por tanto si $\neg(x \equiv a)$ y $x(\equiv \circ \sim)b$ entonces $x(\equiv \circ \sim)c$.

Recíprocamente, si $(\mathcal{O}, \sim, \equiv)$ es un marco T_d y $\overline{a} \in X_{\mathcal{O}}$. Entonces existen $b, c \in \mathcal{O}$ cumpliendo la definición de marco T_d. Por un lado $a(\equiv \circ \sim)b$ y $\neg(a(\equiv \circ \sim)b)$, por tanto $\overline{a} \in U_{\widetilde{b}}$ y $\overline{a} \notin U_{\widetilde{c}}$. Además como $c(\leq \circ \sim)b$ tenemos que $U_{\widetilde{c}} \subseteq U_{\widetilde{b}}$. Para todo $\overline{x} \in U_{\widetilde{b}}$, si $\overline{x} \neq \overline{a}$ se tiene $\neg(x \equiv a)$ y $x(\equiv \circ \sim)b$. Por ser el marco T_d, $x(\equiv \circ \sim)c \Rightarrow \overline{x} \in U_{\widetilde{c}}$. Entonces $U_{\widetilde{b}} \setminus \{\overline{a}\} = U_{\widetilde{c}}$. □

Definición 4.10. Diremos que un marco topológico ortogonal $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ es de Alexandroff si para todo $A \subseteq \mathcal{O}$ no vacío existe $b \in \mathcal{O}$ tal que $b(\leq \circ \sim)a$ para todo $a \in A$.

Proposición 4.7. Un marco topológico ortogonal es Alexadroff si y solo si su espacio topológico asociado es Alexandroff.

Dem. Sea $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ un marco topológico ortogonal y $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ su espacio asociado. Supongamos que $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ es Alexandroff. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \tau_{\mathcal{O}}$ una colección de abiertos arbitraria. Como cada abierto se identifica con una $\sim$-clase de equivalencia (excepto el vacío, pero si alguno de ellos es vacío la intersección también lo es y está en la topología), podemos considerar $\Lambda \subseteq \mathcal{O}/\sim$. Definimos $A = \{a \in \mathcal{O} | a \in \alpha \in \Lambda\}$ y por ser un marco de Alexandroff existe $b \in \mathcal{O}$ tal que $b(\leq \circ \sim)a$ para todo $a \in A$. Definimos $B = \{b \in \mathcal{O} | b(\leq \circ \sim)a$ para todo $a \in A\}$ que es no vacío y consideramos la clase de equivalencia $\widetilde{x}$ que verifica

I. Para todo $b \in B$ y para todo $x \in \widetilde{x}$: $b(\leq \circ \sim)x$.

II. Para todo $x \in \widetilde{x}$ existe $b \in B$ tal que $x(\leq \circ \sim)b$.

Entonces $U_{\widetilde{x}} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. [1]

Recíprocamente si $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es de Alexandroff y $A \subseteq \mathcal{O}$ no vacío. Definimos

$$\Lambda = \{\widetilde{a} | a \in A\}$$

y existe b tal que $U_{\widetilde{b}} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ y para todo $a \in A : U_{\widetilde{b}} \subseteq U_{\widetilde{a}} \Rightarrow b(\leq \circ \sim)a$. □

Definición 4.11. Un marco topológico ortogonal $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ es disconexo si existen dos elementos a, b que no son $\sim$-equivalentes tales que para todo $c \in \mathcal{O}$ o bien $c(\equiv \circ \sim)a$ o bien $c(\equiv \circ \sim)b$.

[1] La demostración se hace por doble contenido, adaptando la parte de la demostración de 4.4 donde se veía que la intersección finita de abiertos en $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ era un abierto.

Proposición 4.8. Un marco topológico ortogonal es disconexo si y solo si su espacio topológico asociado es disconexo.

Dem. Sea $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco topológico ortogonal disconexo, a, b verificando la definición. Como a, b no son $\sim$-equivalentes $U_{\widetilde{a}} \neq U_{\widetilde{b}}$. Además como para todo $c \in \mathcal{O}$ o bien $c(\equiv \circ \sim)a$ o bien $c(\equiv \circ \sim)b$ tenemos que son complementarios, por tanto $X_{\mathcal{O}}$ es disconexo.

Por otro lado si $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ es disconexo existen un par de abiertos disjuntos U, V tales que $U \cup V = X_{\mathcal{O}}$ es decir, existen $a, b \in \mathcal{O}$ tales que $U_{\widetilde{a}}$ y $U_{\widetilde{b}}$ son disjuntos y su unión es el total. Estos elementos a, b verifican la definición de marco topológico ortogonal disconexo.□

Definición 4.12. Un marco topológico ortogonal $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ se dirá compacto si para todo $I \subseteq \mathcal{O}$ verificando

$$\forall a \in \mathcal{O} \text{ existe } i \in I \text{ tal que } a(\equiv \circ \sim)i$$

existe un $J \subseteq I$ tal que J es finito y $\forall a \in \mathcal{O}$ existe $j \in J$ tal que $a(\equiv \circ \sim)j$.

Proposición 4.9. Un marco topológico ortogonal es compacto si y solo si su espacio topológico asociado es compacto.

Dem. Suponer que $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ es compacto y consideramos $\{U_{\widetilde{i}}\}$ con $i \in I \subseteq \mathcal{O}$ un cubrimiento por abiertos de $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$. Entonces para todo $\overline{a} \in X_{\mathcal{O}}$ existe algún $i \in I$ tal que $\overline{a} \in U_{\widetilde{i}} \Rightarrow a(\equiv \circ \sim)i$. Por ser el marco compacto existe un $J \subseteq I$ finito tal que $\forall a \in \mathcal{O}$ existe $j \in J$ tal que $a(\equiv \circ \sim)j$, y por tanto $\{U_{\widetilde{j}}\}_{j \in J}$ es un subcubrimiento finito $\Rightarrow (X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ compacto.

Recíprocamente, suponemos $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ compacto y consideramos $I \subseteq \mathcal{O}$ verificando $\forall a \in \mathcal{O}$ existe $i \in I$ tal que $a(\equiv \circ \sim)i$ entonces $\{U_{\widetilde{i}}\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de $(X_{\mathcal{O}}, \tau_{\mathcal{O}})$ por lo que existe un subcubrimiento finito $\{U_{\widetilde{j}}\}_{j \in J}$ con $J \subseteq I$ finito y por tanto para todo $a \in \mathcal{O}$ existe $j \in J$ tal que $a(\equiv \circ \sim)j$. □

4.2. Marcos ortogonales discretos: topologías sobre ellos

A continuación nos preguntamos qué pasa cuando la topología que consideramos es la discreta. En este caso, podremos definir una *topología sobre el marco*.

Proposición 4.10. Dado un marco topológico ortogonal $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ son equivalentes:

I. Para todo $a \in \mathcal{O}$ existe $a' \in \mathcal{O}$ tal que $a \equiv b \Leftrightarrow b(\equiv \circ \sim)a'$ para todo $b \in \mathcal{O}$.

II. Para todo $a \in \mathcal{O}$ existe $a' \equiv a$ tal que $\widetilde{a'} = \{a'\}$.

Dem. I $\Rightarrow$ II: Sea $a \in \mathcal{O}$, y a' tal que verfica I. Entonces como $a' \equiv a' \sim a' \Rightarrow a' \equiv a$. Sea $b \sim a'$ entonces $b \equiv b \sim a' \Rightarrow b \equiv a \equiv a' \Rightarrow b = a'$.

II $\Rightarrow$ I: Sea $a \in \mathcal{O}$, y a' tal que verfica II. Si $b \equiv a \equiv a' \Rightarrow b \equiv a' \sim a'$. Si $b(\equiv \circ \sim)a' \Rightarrow b \equiv a' \equiv a$ pues $\widetilde{a'} = \{a'\}$.

Definición 4.13. Un marco topológico ortogonal que cumpla una (y por tanto todas) de las propiedades anteriores se dirá *marco ortogonal discreto.*

Proposición 4.11. Dado un marco ortogonal discreto $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ se verifica $\tau_{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(X_{\mathcal{O}})$.

Dem. Sabemos que $\tau_{\mathcal{O}}$ es una topología, será la discreta si y solo si todos los conjuntos unipuntuales están en la topología. Para todo $\overline{\sigma} \in X_{\mathcal{O}}$ consideramos un representante $\sigma \in \mathcal{O}$ y existe σ' tal que $\sigma' \equiv \sigma$ y $\widetilde{\sigma'} = \{\sigma'\}$. Si $\overline{a} \in U_{\widetilde{\sigma'}} \Leftrightarrow a(\equiv \circ \sim)\sigma' \Leftrightarrow a \equiv \sigma' \equiv \sigma$, entonces $U_{\widetilde{\sigma'}} = \{\overline{\sigma}\} \in \tau_{\mathcal{O}}$. □

Proposición 4.12. El marco ortogonal asociado a un espacio topológico discreto es discreto.

Dem. Sea (X, τ) un espacio topológico discreto y $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ su marco ortogonal asociado, $(x, U) \in \mathcal{O}$ como $\tau = \mathcal{P}(X)$ tenemos $(x, \{x\}) \in \mathcal{O}$ que verifica $(x, U) \equiv (x, \{x\})$ y $(y, V) \sim (x, \{x\}) \Leftrightarrow V = \{x\}$ y necesariamente $y = x$, asi que la $\sim$-clase de equivalencia de $(x, \{x\})$ solo lo contiene a él mismo. □

Veamos ahora cómo podemos caracterizar una topología sobre un marco ortogonal discreto:

Definición 4.14. Dado un marco ortogonal discreto $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$, y un subconjunto $T \subseteq \mathcal{O}$ llamaremos a T *topología sobre* $\mathcal{O}$ si verifica:

I. T es cerrada para $\sim$.

II. Existe un $o \in T$ tal que para todo $a \in \mathcal{O}$: $a(\equiv \circ \sim)o$.

III. Para todo $a, b \in T$ con $a \equiv b$ existe $c \in T$ tal que para todo $c' \sim c$: $c'(\equiv \circ \sim)a$ y $c'(\equiv \circ \sim)b$.

IV. Para todo $A \subseteq T$ no vacío cerrado bajo $\sim$ existe $b \in T$ tal que $a(\equiv \circ \sim)b$ para todo $a \in A$ y para todo $b' \sim b$ existe un $a' \in A$ tal que $a' \equiv b'$

Proposición 4.13. Si $T \subseteq \mathcal{O}$ es una topología definida sobre un marco ortogonal discreto entonces $\tau_T = \{U_{\widetilde{a}} | a \in T\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre $X_{\mathcal{O}}$.

Dem.

- El vacío está en τ_T por construcción. Consideramos un $o \in T$ verificando II de la definición anterior. Para todo $\overline{a} \in X_{\mathcal{O}}$, $a(\equiv \circ \sim)o \Rightarrow \overline{a} \in U_{\widetilde{o}}$. Por tanto $X_{\mathcal{O}} = U_{\widetilde{o}} \in \tau_T$.

- Sean $U_{\widetilde{a}}, U_{\widetilde{b}} \in \tau_T$. Si su intersección es vacía está en τ_T. Si es no vacía, existe un $\overline{\sigma}$ tal que $\sigma(\equiv \circ \sim)a$ y $\sigma(\equiv \circ \sim)b$ entonces existen $a' \sim a$ y $b' \sim b$ (y por tanto $a', b' \in T$) tales que $a' \equiv b'$ y por la propiedad III existe $c \in T$ tal que para todo $c \sim c$ $c'(\equiv \circ \sim)a' \sim a$ y $c'(\equiv \circ \sim)b' \sim b \Rightarrow a(\sim \circ \geq)c(\leq \circ \sim b)$. Consideramos el conjunto $A = \{c \in T | c(\leq \circ \sim)a \text{ y } c(\leq \circ \sim)b\}$, este conjunto está contenido en T, es cerrado bajo $\sim$ y es no vacío $\Rightarrow$ existe un $x \in T$ tal que $c(\equiv \circ \sim)x$ para todo $c \in A$ y para todo $x' \sim x$ existe $c' \in A$ tal que $x' \equiv c'$. Entonces $U_{\widetilde{x}} = U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$:

- $U_{\widetilde{x}} \subseteq U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$: $\overline{p} \in U_{\widetilde{x}} \Rightarrow$ existe un $x' \sim x$ tal que $p \equiv x'$ y además existe un $c \in A$ tal que $c \equiv x'$. Como $c \in A$ existen a', b' tales que $a \sim a' \geq c \leq b' \sim b \Rightarrow p \equiv a' \sim a$ y $p \equiv b' \sim b \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$.
- $U_{\widetilde{x}} \supseteq U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}}$: $\overline{p} \in U_{\widetilde{a}} \cap U_{\widetilde{b}} \Rightarrow a \sim a' \equiv p \equiv b' \sim b \Rightarrow a \sim a' \geq p' \leq b' \sim b$ entonces $p' \equiv p$ y $p' \in A \Rightarrow p \equiv p'(\equiv \circ \sim)x \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{x}}$.

- Por último veamos que la unión arbitraria de abiertos de τ_T está en τ_T. Sean $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_T$. Si todos los U_i son vacíos la unión es el vacío y está en τ_T. Si alguno de ellos es no vacío existe $\Lambda \subseteq T/\sim$ distinto de vacío tal que $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Definimos $A = \{a \in T | a \in \alpha \in \Lambda\}$, que es no vacío y cerrado bajo $\sim$, consideramos $x \in T$ verificando IV de la definición de topología sobre un marco, entonces $U_{\widetilde{x}} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$:
  - $U_{\widetilde{x}} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$: $\overline{p} \in U_{\widetilde{x}} \Rightarrow$ existe un $x' \sim x$ tal que $p \equiv x'$ y además existe un $a \in A$ tal que $a \equiv x' \Rightarrow p \equiv a \sim a$ para algún $a \in A \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{a}} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.
  - $U_{\widetilde{x}} \supseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$: $\overline{p} \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \Rightarrow \overline{p} \in U_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$ entonces existe $a \in \alpha$ tal que $p \equiv a(\equiv \circ \sim)x \Rightarrow \overline{p} \in U_{\widetilde{x}}$. □

Proposición 4.14. Sea (X, τ) un espacio topológico entonces $T = \{(x, U) | x \in U \in \tau\}$ es una topología sobre el marco ortogonal discreto asociado a $(X, \mathcal{P}(X))$.

Dem. Consideramos $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ el marco ortogonal discreto asociado a $(X, \mathcal{P}(X))$, claramente $T \subseteq \mathcal{O}$.

I: Sea $(x, U) \in T$ y $(x, U) \sim (y, V)$ entonces $U = V \in \tau \Rightarrow (y, V) \in T$.

II: Como $X \in \tau$ sea $x \in X \Rightarrow (x, X) \in T$, para cualquier $(y, V) \in \mathcal{O}$ se tiene $(y, V) \equiv (y, X) \sim (x, X)$.

III: Sea $(x, U) \equiv (y, V)$ en T entonces $x = y$ y por tanto $U \cap V \neq \emptyset$ y $U \cap V \in \tau$ por ser una topología, entonces $(x, U \cap V) \in T$ y verifica que para todo $(x', U \cap V) \sim (x, U \cap V)$ $(x', U \cap V) \equiv (x', U) \sim (x, U)$ y $(x', U \cap V) \equiv (x', V) \sim (y, V)$.

IV: Finalmente si $\{(x_i, U_i)\}_{i\in I} \subseteq T$ cerrado bajo $\sim$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$ por ser una topología. Sea $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, consideramos $(x, \bigcup_{i\in I} U_i) \in T$ y verifica:

- Para todo (x_i, U_i) con $i \in I$ $(x_i, U_i) \equiv (x_i, \bigcup_{i\in I} U_i) \sim (x, \bigcup_{i\in I} U_i)$.
- Para todo $(y, V) \sim (x, \bigcup_{i\in I} U_i) \Rightarrow V = \bigcup_{i\in I} U_i$ y existe $j \in I$ tal que $y \in U_j$.

Entonces como $\{(x_i, U_i)\}_{i\in I}$ cerrado bajo $\sim$ y $(x_j, U_j) \sim (y, U_j)$ tenemos $(y, U_j) \in \{(x_i, U_i)\}_{i\in I}$ con $(y, V) \equiv (y, U_j)$. □

4.2.1. Cerrados, abiertos, interiores y clausuras

Una vez definida una topología sobre un marco ortogonal discreto, podemos ver cómo se caracterizarían elementos importantes en topología. La mayoría de demostraciones de esta parte han sido omitidas ya que son, en prácticamente todos los casos, comprobaciones sencillas una vez que se está familiarizado con el trabajo en estos marcos.

Consideramos $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco topológico discreto y T una topología sobre él, e introducimos las siguientes definiciones.

Definición 4.15. Sea $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco topológico discreto y T una topología sobre él un elemento $a \in \mathcal{O}$ se dirá

- *Abierto respecto a* T si $a \in T$.
- *Cerrado respecto a* T si existe algún $b \in T$ verificando que para todo $x \in \mathcal{O}$ o bien $x(\equiv \circ \sim)a$ o bien $x(\equiv \circ \sim)b$ pero nunca se dan las dos condiciones a la vez. En este caso diremos que b es un complemento de a.

Definición 4.16. Sea $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco topológico discreto, T una topología sobre él. Consideramos un elemento $a \in \mathcal{O}$ y diremos que

- $t \in T$ es un *interior de a respecto a* T si $t(\leq \circ \sim)a$ y para todo $u \in T$ tal que $u(\leq \circ \sim)a$ se tiene $u(\leq \circ \sim)t$.
- $c \in \mathcal{O}$ es una *clausura de a respecto a* T si c es cerrado respecto a T, $a(\leq \circ \sim)c$ y para todo $u \in \mathcal{O}$ cerrado respecto a T tal que $a(\leq \circ \sim)u$ se tiene $c(\leq \circ \sim)u$.

A continuación daremos una serie de propiedades que nos darán cierta "unicidad" respecto a $\sim$-clase.

En adelante consideraremos $(\mathcal{O}, \equiv, \sim)$ un marco ortogonal discreto y T una topología sobre él.

Proposición 4.15. Sea $c \in \mathcal{O}$ un elemento cerrado respecto a T entonces

- c' cerrado respecto a T para todo $c' \sim c$.
- Si $a \in T$ es un complemento de c entonces a' es un complemento de c para todo $a' \sim a$

Proposición 4.16. Sea $a \in \mathcal{O}$

- Si $t \in T$ es un interior de a entonces t' es interior de a para todo $t' \sim t$ y t es interior de a' para todo $a' \sim a$.
- Si c es una clausura de a entonces c' es una clausura de a para todo $c' \sim c$ y c es una clausura de a' para todo $a' \sim a$.

Por último justificamos los nombres para los elementos anteriormente definidos.

Proposición 4.17. Sea T una topología definida sobre un marco $(\mathcal{O}, \leq, \sim)$ ortogonal discreto. Entonces:

- $c \in \mathcal{O}$ es cerrado respecto a T si y solo si $U_{\tilde{c}}$ es cerrado en $(X_{\mathcal{O}}, \tau_T)$.
- $t \in T$ es el interior de un elemento $a \in \mathcal{O}$ si y solo si $U_{\tilde{t}}$ es el interior de $U_{\tilde{a}}$ en $(X_{\mathcal{O}}, \tau_T)$.
- $c \in \mathcal{O}$ es la clausura de un elemento $a \in \mathcal{O}$ si y solo si $U_{\tilde{c}}$ es la clausura de $U_{\tilde{a}}$ en $(X_{\mathcal{O}}, \tau_T)$.

4.3. Morfismos

Si nuestro objetivo es establecer una equivalencia categórica debemos pensar en los morfismos. Para ello vamos a considerar las siguientes categorias:

$\mathbf{Top}^{Int}$ la categoría de los espacios topológicos con las funciones interiores y **MOT** la categoría de los marcos ortogonales topológicos con los *p-morfismos* ([11]). La justificación de tomar p-morfismos se encuentra en la lógica. Los marcos son estructuras que se usan mucho en este campo, así como lo p-morfismos. En [7] se prueba la existencia de una correspondencia biyectiva entre las funciones interiores y los p-morfismos.

Definición 4.17. Una función entre espacios topológicos se dice *interior* si es abierta y continua.

Definición 4.18. Sea $f : (A, R) \longrightarrow (B, R')$ se dice *p-morfismo* si

- $aRb \Rightarrow f(a)R'f(b)$.
- $f(a)R'b \Rightarrow$ existe $u \in A$ tal que $f(u) = b$ y aRu.

Introducimos la siguiente definición:

Definición 4.19. Sea $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ una aplicación entre marcos topológicos ortogonales, diremos que f es un *p-morfismo de marcos* si es un p-morfismo respecto a las relaciones $\sim$ y $\equiv$.

Vamos a tener que imponer además una condición más sobre nuestros morfismos:

Definición 4.20. Diremos que una aplicación $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ entre marcos topológicos ortogonales es *suprayectiva respecto a* $\equiv$ si:

$$\forall b \in \mathcal{O}' \exists a \in \mathcal{O} : f(a) \equiv b.$$

De igual forma diremos que es *suprayectiva respecto a* $\sim$ si

$$\forall b \in \mathcal{O}' \exists a \in \mathcal{O} : f(a) \sim b.$$

Consideramos p-morfismos suprayectivos respecto a $\equiv$, veamos cómo se relacionan con las funciones entre espacios topológicos.

Si $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ es un p-morfismo de marcos suprayectivo respecto a $\equiv$ definimos la asignación:

$$\mathbf{G}f : X_{\mathcal{O}} \longrightarrow X_{\mathcal{O}'}$$

$$\overline{\sigma} \longmapsto \overline{f(\sigma)}$$

$\mathbf{G}f$ está bien definida por ser f un p-morfismo, si $\overline{\sigma} = \overline{\alpha} \Rightarrow \sigma \equiv \alpha \Rightarrow f(\sigma) \equiv f(\alpha) \Rightarrow \overline{f(\sigma)} = \overline{f(\alpha)}$. Además define una función interior entre los espacios topológicos:

- Sea $U_{\widetilde{a}} \in \tau_{\mathcal{O}}$ entonces $\mathbf{G}f(U_{\widetilde{a}}) = \{\overline{f(\sigma)} | \overline{\sigma} \in U_{\widetilde{a}}\} = \{\overline{f(\sigma)} | \sigma(\equiv \circ \sim)a\}$. Claramente tenemos $\mathbf{G}f(U_{\widetilde{a}}) \subseteq U_{\widetilde{f(a)}}$.
  Para el otro contenido: si $\overline{b} \in U_{\widetilde{f(a)}}$ existe c tal que $b \equiv c \sim f(a)$ y por p-morfismo existe $c' \sim a$ tal que $f(c') = c$ y existe $u \equiv c'$ tal que $f(u) = b$ entonces $\overline{b} = \overline{f(u)}$ con $u \equiv c' \sim a \Rightarrow \mathbf{G}f(U_{\widetilde{a}}) = U_{\widetilde{f(a)}} \in \tau_{\mathcal{O}'}$.

- Veamos la continuidad: Sea $U_{\widetilde{b}} \in \tau_{\mathcal{O}'}$:

$$(\mathbf{G}f)^{-1}(U_{\widetilde{b}}) = \{\overline{a} | \overline{f(a)} \in U_{\widetilde{b}}\} = \{\overline{a} | f(a)(\equiv \circ \sim)b\}.$$

  Si $\overline{a} \in (\mathbf{G}f)^{-1}(U_{\widetilde{b}})$ existe c tal que $f(a) \equiv c \sim b$. Aplicando que f es un p-morfismo, existen u y v tales que $a \equiv u \sim v$, $f(u) = c$ y $f(v) = b$. Entonces tenemos que $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ y $\overline{a} \in U_{\widetilde{v}}$ para algún $v \in f^{-1}(\{b\}) \Rightarrow \overline{a} \in \bigcup\{U_{\widetilde{v}} | v \in f^{-1}(\{b\})\}$.

  Sea $\overline{a} \in \bigcup\{U_{\widetilde{v}} | v \in f^{-1}(\{b\})\}$ en consecuencia existe algún v con $f(v) = b$ tal que $a \equiv c \sim v \Rightarrow f(a) \equiv f(c) \sim f(v) = b \Rightarrow \overline{f(a)} \in U_{\widetilde{b}} \Rightarrow \overline{a} \in (\mathbf{G}f)^{-1}(U_{\widetilde{b}})$. Finalmente tenemos $(\mathbf{G}f)^{-1}(U_{\widetilde{b}}) = \bigcup\{U_{\widetilde{v}} | v \in f^{-1}(\{b\})\} \in \tau_{\mathcal{O}}$ y la asignación es continua.

$\mathbf{G}f$ es suprayectiva. Sea $\overline{b} \in X_{\mathcal{O}'}$, entonces $b \in \mathcal{O}'$ y como f es suprayectiva respecto a $\equiv$ existe $a \in \mathcal{O}$ tal que $f(a) \sim b \Rightarrow \mathbf{G}f(\overline{a}) = \overline{f(a)} = \overline{b}$.

Recíprocamente, consideramos $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua, abierta y suprayectiva entre espacios topológicos. Sobre los marcos ortogonales asociados definimos la siguiente aplicación:

$$\mathbf{F}f : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

$$(x, U) \longmapsto (f(x), f(U))$$

Esta aplicación está bien definida ya que como f es abierta $f(U) \in \tau_Y$ y claramente si $x \in U$ tenemos $f(x) \in f(U)$.

Veamos que es un p-morfismo de marcos:

- Respecto a $\sim$:
  - $(x, U) \sim (y, V) \Rightarrow U = V \Rightarrow f(U) = f(V) \Rightarrow (f(x), f(U)) \sim (f(y), f(V))$.
  - $(f(x), f(U)) \sim (y, V) \Rightarrow f(U) = V$, como $y \in V = f(U)$ existe algún $y' \in U$ tal que $f(y') = y$, consideramos (y', U) y verifica $(f(y'), f(U)) = (y, V)$ y $(x, U) \sim (y', U)$.
- Respecto a $\equiv$
  - $(x, U) \equiv (y, V) \Rightarrow x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow (f(x), f(U)) \equiv (f(y), f(V))$.
  - $(f(x), f(U)) \equiv (y, V) \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$ que está en la topología por ser f continua entonces $(x, U) \equiv (x, f^{-1}(V))$ con $(f(x), f(f^{-1}(V))) = (y, V)$ ya que al ser f un epimorfismo $ff^{-1}(V) = V$.

Por último podemos comprobar la suprayectividad respecto a $\equiv$. Si $(y, V) \in \mathcal{O}_Y$, como f es suprayectiva existe $x \in \mathcal{O}_X$ tal que $f(x) = y$ y por tanto $\mathbf{F}f(x, X) \equiv (y, V)$.

Observación: En cierto modo podemos decir que la continuidad "depende" de la relación $\sim$ y que que la función sea abierta "depende" de $\equiv$, en el siguiente sentido:

- Lo único que necesitamos para que $\mathbf{F}f$ sea un p-morfismo respecto a $\sim$ es que esté bien definida, y, para ello, es necesario que f sea abierta.
- Aunque es cierto que necesitamos que f sea abierta para que esté bien definida, para que $\mathbf{F}f$ sea un p-morfismo respecto a $\equiv$ no lo usamos directamente, si no que necesitamos la continuidad y la suprayectividad.

Llegamos así a la equivalencia:

Teorema 4.2. Existe una equivalencia categórica entre la subcategoría de **MOT** considerando los morfismos suprayectivos respecto a $\equiv$ y la subcategoría de $\mathbf{Top}^{Int}$ considerando las aplicaciones suprayectivas.

Dem. Llegados a este punto es claro como vamos a definir los funtores:

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbf{Top}^{Int} & \longrightarrow & \mathbf{MOT} \\ (X, \tau) & \longmapsto & (\mathcal{O}_X, \equiv_X, \sim_\tau) \\ x \to fx & \longmapsto & (x, U) \to (fx, fU) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{G} : \mathbf{MOT} & \longrightarrow & \mathbf{Top}^{Int} \\ (\mathcal{O}, \equiv, \sim) & \longmapsto & (X_\mathcal{O}, \tau_\mathcal{O}) \\ a \to ha & \longmapsto & \overline{\sigma} \to \overline{h(\sigma)} \end{array}$$

y las transformaciones naturales:

$$\begin{array}{rcl} \eta_\mathcal{O} : \mathcal{O}_{X_\mathcal{O}} & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ (\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) & \longmapsto & x_{[a,b]} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varepsilon_X : (X, \tau) & \longrightarrow & (X_{\mathcal{O}_X, \tau_{\mathcal{O}_X}}) \\ x & \longmapsto & \overline{(x, X)} \end{array}$$

Ya hemos visto que $\eta_\mathcal{O}$ es un isomorfismo y tanto ella como su inversa conservan $\equiv$ y $\sim$, esto claramente implica que tanto ella como su inversa son p-morfismos y como son suprayectivas son suprayectivas respecto a ambas relaciones.

ε_X también se comprueba fácilmente que es un homeomorfismo y por tanto un isomorfismo en $\mathbf{Top}^{Int}$. Ya que $\varepsilon_X(U) = U_{\widetilde{(x,U)}}$ para todo $U \in \tau$ y $\varepsilon_X^{-1}(U_{\widetilde{(x,U)}}) = U$. La biyectividad es inmediata por construcción.

Lo único que falta ver es la naturalidad de los siguientes esquemas:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X_\mathcal{O}} \arrow[r, "\eta_\mathcal{O}"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{O} \arrow[d, "\mathbf{FG}h"] \\ \mathcal{H}_{X_\mathcal{H}} \arrow[r, "\eta_\mathcal{H}"] & \mathcal{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "f"'] & X_{\mathcal{O}_X} \arrow[d, "\mathbf{GF}f"] \\ Y \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y_{\mathcal{O}_Y} \end{tikzcd}$$

Para el primero tenemos por un lado $h \circ \eta_{\mathcal{O}}(\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) = h(x_{[a,b]})$, y por el otro lado: $\eta_{\mathcal{H}} \circ \mathbf{FG}h(\overline{a}, U_{\widetilde{b}}) = \eta_{\mathcal{H}}(\mathbf{G}h(\overline{a}), \mathbf{G}h(U_{\widetilde{b}})) = \eta_{\mathcal{H}}(\overline{h(a)}, U_{\widetilde{h(b)}}) = x_{[h(a),h(b)]}$. Ahora $x_{[h(a),h(b)]}$ es el único elemento en la intersección $\overline{h(a)} \cap \widetilde{h(b)}$ y como h es un p-morfismo y $x_{[a,b]} \in \overline{a} \cap \widetilde{b} \Rightarrow h(x_{[a,b]}) \in \overline{h(a)} \cap \widetilde{h(b)} \Rightarrow h(x_{[a,b]}) = x_{[h(a),h(b)]}$.

Para el segundo esquema tenemos: $\varepsilon_Y \circ f(x) = \overline{(f(x), Y)}$ y $\mathbf{GF}f \circ \varepsilon_X(x) = \mathbf{GF}f(\overline{(x, X)}) = \overline{\mathbf{F}f(x, X)} = \overline{(f(x), f(X))}$ y como $f(x) = f(x) \Rightarrow (f(x), Y) \equiv (f(x), f(X)) \Rightarrow \overline{(f(x), Y)} = \overline{(f(x), f(X))}$. $\square$

Como se adelantó al principio de este capítulo, estas funciones son, precisamente, las que coservan la veracidad de las fórmulas. Es decir, si tenemos dos modelos relacionales (marcos) M_1, M_2, una aplicación conserva la veracidad de las fórmulas si y solo es un p-morfismo suprayectivo. Si estos modelos son espaciales (espacios topológicos), una aplicación que conserve la veracidad de las fórmulas entre ellos debe ser interior y suprayectiva. Esto aparece en los trabajos de van Benthem y Bezhanishvili, pero sin un lenguaje categórico, es decir, sin mostrar explícitamente los funtores y transformaciones naturales.

Conclusiones

Finalmente, vamos a dedicar esta última parte del trabajo a resumir lo que hemos hecho, así como señalar lo que podría ampliarse, haberse hecho distinto o queda abierto.

Haría falta un trabajo entero, o más bien un libro, para dar una introducción completa y rigurosa a la teoría de categorías. Sin embargo, consideramos que el capítulo 1 del trabajo, donde llegamos a probar un resultado tan importante como el lema de Yoneda, nos permite un primer acercamiento a las técnicas y conceptos que se usan en teoría de categorías. Sin haber entrado realmente en profundidad, el nivel alcanzado es más que suficiente para entender las construcciones de los capítulos siguientes.

En el capítulo 2 hemos presentado una serie de construcciones categóricas entre distintos espacios topológicos y estructuras algebraicas. En esta parte hemos probado los teoremas de representación de Stone y Priestley, lo que ha implicado un estudio algebraico y topológico de las estructuras involucradas. También hemos construido explícitamente funtores y transformaciones naturales. Esto nos ha permitido entender mejor algunos de los conceptos introducidos en el capítulo anterior, familiarizándonos un poco más con la teoría de categorías.

Para un enfoque más algebraico podríamos haber optado por realizar las dualidades de Stone y Priestley con filtros o ideales. Sin embargo, nos pareció que los espacios de funciones daban un carácter más multidisciplinar al trabajo, además nos permitió introducir la topología producto.

En cuanto a cosas que podrían haberse ampliado, sería interesante un estudio de la dualidad de Esakia. Pues, aunque como se ha indicado, es un caso particular de la de Priestley, tiene su interés, entre otras cosas, por el estudio de las álgebras de Heyting. Sería interesante presentar esta dualidad a través de espacios de funciones, pues es algo que no hemos encontrado en la literatura. Además, a día de hoy, existen numerosas generalizaciones de estos teoremas y nuevas dualidades que se suelen llamar *"Stone-type"*. Nosotros nos hemos ceñido a las más "clásicas", pero una forma de ampliar el trabajo podría ser introducir algunas de estas generalizaciones y nuevas dualidades, así como algunas de sus aplicaciones.

Al igual que pasaba en el primer capítulo, haría falta una mayor extensión de la que cabía en este trabajo para realmente introducirnos en la topología sin puntos. Sin embargo, el primer paso para estudiar todas las consecuencias y aplicaciones de la topología sin puntos es la construcción de la adjunción entre *Loc* y *Sp*, que sí hemos demostrado. El capítulo 3 nos ha permitido introducir dos ejemplos de adjunciones categóricas, explícitamente, la que existe entre los funtores *Loc* y *Sp*, e ímplicitamente, las que establecen los adjuntos de Galois.

Por último, en el capítulo 4 hemos obtenido una serie de resultados relacionados con los marcos topológicos ortogonales, algunos de ellos inéditos. Cabe destacar, que hemos sido capaces de obtener explícitamente la equivalencia categórica entre marcos ortogonales topológicos y espacios topológicos, ya que, aunque estaba presente en la literatura, nunca se había hecho explícita en un lenguaje categórico.

Quedan todavía cuestiones abiertas. Entre otras cosas, la duda de si es posible definir los funtores de alguna otra forma, en la que podamos eliminar el requisito de suprayectividad.

En resumen, este trabajo nos ha permitido adentrarnos en el mundo de las categorías, especialmente en su carácter "unificador". Gracias a él, obtenemos una visión más global de las matemáticas en la que estructuras clásicamente estudiadas de forma separada y que pueden parecer tan distintas como los espacios topológicos y los retículos se convierten en la misma cosa. A través de la formulación categórica podemos "traducir" y ver como propiedades distintas en distintas áreas son, de alguna forma, lo mismo.

Bibliografía

[1] E. Artin. “Galois Theory”. En: *Notre Dam Mathematical Lectures 2*. London: University of Notre Dam Press, 1985.

[2] A.B. Avilez y J. Picado. “Uniform continuity of pointfree real functions via farness and related Galois connections.” En: *Algebra Univers* 83.39 (2022).

[3] S. Awodey. *Category Theory*. New York: Oxford University Press, Segunda edición, 2010.

[4] P. Balbiani y S. Fernández González. “Indexed Frames and Hybrid Logics”. En: *International Conference on Advances in Modal Logic (AiML 2020)*. University of Helsinki, 2020, págs. 56-72.

[5] L. Bartoli y O. Caramello. “On morphisms of relative toposes”. En: 2023. URL: `https://arxiv.org/pdf/2310.20691`.

[6] J. Benabou. “Treillis locaux et paratopologies”. En: Séminaire de topologie et géométrie différentielle, 1958.

[7] J. van Benthem y G. Bezhanishvili. “Modal logics of space”. En: *Handbook of spatial logics*. Springer, 2007, págs. 217-298.

[8] G. Bezhanishvili. *Leo Esakia on duality in modal and intuitionistic logics*. Outstandind contributions to logic 4. Springer, 2014.

[9] N. Bezhanishvili. “Lattices of intermediate and cylindric modal logics”. En: ILLC Disertation Series . Amsterdam: ILLC-publications, 2006.

[10] G. Birkhoff. *Lattice Theory Revised Edition*. American Mathematical Society, 1948.

[11] P. Blackburn, M. de Rijke e Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2001.

[12] A. S. Cigoli et al. “Fibred categorical theory of obstruction and classification of morphisms”. En: 2021. URL: `https://arxiv.org/pdf/2104.06362`.

[13] R. Ciuni y E. Lorini. “Comparing semantics for temporal STIT logic”. En: *Logique et Analyse, 61 (243)*. 2018, págs. 299-339.

[14] W. H. Cornish. “On H. Priestley’s dual of the category of bounded distributive lattices”. En: *Matematički Vesnik* (1975), págs. 329-332.

[15] B. A. Davey y H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order.* 2.ª ed. Cambridge University Press, 2002.

[16] M. Dirks. "The Stone Representation Theorem for Boolean Algebras". En: 2011. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15914182.

[17] A. Duvieusart, S. Mantovani y A. Montoli. "Non-pointed abelian categories". En: 2022. URL: https://air.unimi.it/retrieve/098d15ca-8ee9-45ad-b316-9f90ea67c76d/non-pointed%20abelianness%20revised.pdf.

[18] S. Eilenberg y S. Mac Lane. "General theory of natural equivalences". En: *Transactions of the American Mathematical Society 58*. 1945, págs. 231-294.

[19] M. Erné et al. "A Primer on Galois Connections". En: *Annals of the New York Academy of Sciences* 704 (1993).

[20] L. Esakia. "Topological Kripke Models". En: *Soviet Mathematics Doklady* 15 (1974), págs. 147-151.

[21] L. Esakia et al. *Heyting Algebras: Duality Theory.* Springer Publishing Company, Incorporated, 2019.

[22] J. Garson. *"Modal Logic", The Standford Encyclopedia of Philosophy.* (Spring 2024 Edition). URL: https://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/logic-modal (visitado 18-05-2024).

[23] S. Fernández González. "Logic for Social Networks: Asynchronous Announcements in Orthogonal Structures". En: Library e information sciences. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2021.

[24] J. Hintikka. *Knowledge and belief. An introduction to the logic of the two notions.* Ithaca, New York: Cornell University Press, 1962.

[25] J. Gutiérrez García I. Arrieta y J. Picado. "Frame presentations of compact hedgehogs and their properties". En: *Quaestiones Mathematicae* 46.2 (2023), págs. 207-242.

[26] J. R. Isbell. "Atomless Parts of Spaces." En: *Mathematica Scandinavica* 31 (1972), págs. 5-32.

[27] P. T. Johnstone. "Elements of the History of Locale Theory". En: *Handbook of the history of general topology. Volume 3.* Springer science + business media, B. V., 2001, págs. 835-851.

[28] P.T. Johnstone. *Stone Spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1982.

[29] D. M. Kan. "Adjoint Functors". En: vol. 87. 1958, págs. 294-329.

[30] S. A. Kripke. "Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Propositional Calculi". En: *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9.5-6 (1963), págs. 67-96.

[31] S. Mac Lane. En: *Categories for the Working Mathematician.* New York: Springer New York, Segunda edición 1978.

[32] S. Mac Lane. “Foundations for categories and sets”. En: *Category Theory, Homology Theory and their Applications II.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1969, págs. 146-164.

[33] S. Mac Lane. “The Influence of M. H. Stone on the Origins of Category Theory”. En: *Functional Analysis and Related Fields.* Springer-Verlag, 1970, págs. 228-235.

[34] A.V. López y P.A. Ezquerra. *Un Curso de análisis funcional: teoría y problemas.* Antonio Vera López, 1997.

[35] J.P. Marquis. *From a Geometrical point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory.* Logic, Epistemology and the Unity of Science 14. Springer, 2009.

[36] J. C. C. McKinsey y A. Tarski. “On Closed Elements in Closure Algebras”. En: *Annals of Mathematics* 47 (1946), pág. 122.

[37] J. C. C. McKinsey y A. Tarski. “The Algebra of Topology”. En: *Annals of Mathematics* 45 (1944), pág. 141.

[38] J. R. Munkres. *Topología.* Madrid: Prentice Hall, Segunda edición 2002.

[39] D. Papert y S. Papert. “Sur les treillis des ouverts et les paratopologies”. En: Séminaire de topologie et géométrie différentielle, 1958.

[40] J. Picado y A. Pultr. *Frames and Locales: Topology without points.* Frontiers in Mathematics. Springer Basel, 2011.

[41] H. A. Priestley. “Ordered Topological Spaces and the Representation of Distributive Lattices”. En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3 (1972), págs. 507-530.

[42] H. A. Priestley. “Representation of Distributive Lattices by means of ordered Stone Spaces”. En: *Bulletin of The London Mathematical Society* 2 (1970), págs. 186-190.

[43] E. Riehl. *Category Theory in Context.* Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017.

[44] J. J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups.* Graduate texts in mathematics. Springer, 1965.

[45] R. R. Stoll. *Set Theory and Logic.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.

[46] M. H. Stone. “The theory of representations for Boolean algebras”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 40 (1936), págs. 37-111.

[47] M. H. Stone. “Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics”. En: Časopis Pěst. Math.,67, 1938, págs. 1-25.

Anexo A

Introducción a retículos y orden

Antes de comenzar y unicamente por hacer el trabajo lo más autocontenido posible introducimos las siguientes definiciones.

Definición A.1. Dado un conjunto A no vacío, una relación binaria definida sobre A es un subconjunto $R \subseteq A \times A$. $(a, b) \in R$ se denotará aRb.

Definición A.2. Una relación R definida sobre un conjunto A se dice:

- *Reflexiva* si para todo $a \in A$ aRa.
- *Transitiva* si aRb, bRc implica aRc para todos $a, b, c \in A$.
- *Simétrica* si $aRb \Rightarrow bRa$.
- *Antisimétrica* si $aRb, bRa \Rightarrow a = b$.

Una relación se dice *de equivalencia* si es reflexiva, transitiva y simétrica.

A.1. Conjuntos ordenados

Definición A.3. Sea A un conjunto, un *orden* en A es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Al par del conjunto junto con la relación lo llamamos *conjunto ordenado.*

Definición A.4. Un subconjunto $A \subseteq F$ donde $(F, \leq)$ es un conjunto ordenado se dice *cadena* si todo elemento de A es comparable, es decir, para todo $a, b \in A$ o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$.

Definición A.5. Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ donde A, B son conjuntos ordenados se dice:

- *Monótona*: si $a \leq b$ en A implica $f(a) \leq f(b)$ en B.
- *Inmersión*: si $a \leq b$ en $A \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$ en B.

- *Isomorfismo (de conjuntos ordenados)*: si es una inmersión y es suprayectiva.

Proposición A.1. I. La composición de aplicaciones monótonas es una aplicación monótona.

II. Si $F : A \longrightarrow B$ es una inmersión entonces F es inyectiva y $F(A) \cong A$.

Introducimos ahora algunos elementos notables en un conjunto ordenado:

Definición A.6. *Máximo y mínimo*: Dado un conjunto ordenado $(A, \leq)$, en caso de existir elementos $\top$, $\bot \in A$ tales que $a \leq \top$ y $\bot \leq a$ para todo $a \in A$ estos se llaman *máximo* y *mínimo* respectivamente.

Definición A.7. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado un elemento $a \in A$ se dice *maximal* si $a \leq b \Rightarrow b = a$, y se dice *minimal* si $b \leq a \Rightarrow b = a$.

A.1.1. Conjuntos clausurados inferior y superiormente

Definición A.8. Sea $(F, \leq)$ un conjunto ordenado y $U \subseteq F$ entonces U se dice

- *Conjunto clausurado superiormente* si $x \in U$, $y \in F$ con $x \leq y$ implica $y \in U$.
- *Conjunto clausurado inferiormente* si $x \in U$, $y \in F$ con $y \leq x$ implica $y \in U$.

Usaremos esta definición tambien para relaciones en general, no necesariamente ordenes. Así, si (F, R) es un conjunto F dotado de una relación R, diremos que $U \subseteq F$ es clausurado superiormente si $x \in U$, $y \in F$ y xRy implica $y \in U$ y se dirá clausurado inferiormente si $x \in U$, $y \in F$ y yRx implica $y \in U$.

Proposición A.2. Un subconjunto U de un conjunto ordenado $(F, \leq)$ es clausurado superiormente si y solo si U^c es clausurado inferiormente.

A.2. Retículos

Definición A.9. Dado un conjunto ordenado $(F, \leq)$ y un subconjunto $S \subseteq F$ se dice:

- *Cota superior* de S en F a un elemento $c \in F$ tal que $s \leq c$ para todo $s \in S$.
- *Cota inferior* de S en F a un elemento $l \in F$ tal que $l \leq s$ para todo $s \in S$.
- Un elemento $x \in F$ se dice *supremo de S* y se denota $supS$ o $\bigvee S$ si $s \leq x$ para todo $s \in S$ y si $c \in F$ verifica $s \leq c$ para todo $s \in S$ entonces $x \leq c$.
- Un elemento $i \in F$ se dice *ínfimo de S* y se denota $\bigwedge S$ o $infS$ si $i \leq s$ para todo $s \in S$ y si $c \in F$ verifica $c \leq s$ para todo $s \in S$ entonces $c \leq i$.
- Si $S = \{a, b\}$ el supremo y en ínfimo se denotarán respectivamente $a \vee b$ y $a \wedge b$.

Notación: Sea $(F, \leq)$ un conjunto ordenado, $S \subseteq F$ denotamos

$$\uparrow S = \{x \in F | \exists s \in S \text{ con } s \leq x\}$$
$$\downarrow S = \{x \in F | \exists s \in S \text{ con } x \leq s\}.$$

Definición A.10. Sea L un conjunto ordenado se dice

- *Retículo* si para todo $a, b \in L$ existen $a \vee b$ y $a \wedge b$.
- *Retículo completo* si para todo $S \subseteq L$ existen $\bigvee S$ y $\bigwedge S$.

Un retículo puede definirse también algebraicamente de la siguiente forma:

Definición A.11. Un retículo es un conjunto L dotado de dos operaciones binarias internas $\vee$ y $\wedge$ que satisfacen:

- Asociatividad: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ y $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- Conmutatividad: $a \vee b = b \vee a$ y $a \wedge b = b \wedge a$
- Idempotencia: $a \vee a = a$ y $a \wedge a = a$
- Absorción: $a \vee (a \wedge b) = a$ y $a \wedge (a \vee b) = a$

Nota: Para ver que las dos definiciones son equivalentes se define el orden

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Definición A.12. Sea L un retículo, un subconjunto $H \subseteq L$ se dice *subretículo de* L si también es un retículo con el mismo orden de L.

Proposición A.3. Sea L un retículo, $a, b \in L$ son equivalentes:

I. $a \leq b$

II. $a \vee b = b$

III. $a \wedge b = a$

Definición A.13. Un retículo se dice *acotado* si tiene $\perp$ y $\top$, además se suele denotar $\perp = 0$ y $\top = 1$.

Definición A.14. Sea una función $f : L \longrightarrow H$ donde L y H son retículos de dirá *homomorfismo de retículos* si conserva supremos e ínfimos, es decir, para todo $a, b \in L$ se tiene $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

f se dirá *isomorfismo de retículos* si además es biyectiva.

Cuando L y H sean acotados consideraremos f un homomorfismo si y solo si es un homomorfismos de retículos y conserva el 0 y el 1.

Proposición A.4. Todo homomorfismo de retículos conserva el orden.

Proposición A.5. El inverso de un isomorfismo de retículos es un homomorfismo de retículos (y por tanto isomorfismo).

Definición A.15. Sea L un retículo se dice *distributivo* si para todos $a, b, c \in L$ satisface

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Proposición A.6. Todo subretículo de un retículo distributivo es distributivo.

A.3. Retículos y álgebras de Boole

Un álgebra de Boole es un retículo distributivo con una estructura adicional que "imita" la complementación en el conjunto de partes de un conjunto.

Definición A.16. Sea L un retículo con 0 y 1, $a \in L$ decimos que b es un *complemento de* a si $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$.

Un retículo donde todo elemento tenga complemento se dirá *complementado*.

A partir de ahora, mientras no se diga lo contrario, consideraremos retículos acotados.

Proposición A.7. En un retículo distributivo en caso de existir el complemento de un elemento a es único.

Definición A.17. Un retículo L se dice de Boole si es distributivo, acotado y complementado.

Otra vez, si consideramos un punto de vista más algebraico tenemos una definición equivalente:

Definición A.18. Un *álgebra de Boole* es una estructura $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ tal que

i. $(B, \wedge, \vee)$ es un retículo distributivo.

ii. $a \wedge 1 = a$ y $a \vee 0 = a$ para todo $a \in B$.

iii. $\neg a \wedge a = 0$ y $\neg a \vee a = 1$ para todo $a \in B$.

A continuación se listan una serie de propiedades que se cumplen en las álgebras de Boole.

Lema A.1. Sea B un álgebra de Boole, entonces para todos $a, b \in B$:

i. $\neg 0 = 1$ y $\neg 1 = 0$

ii. $\neg(\neg a) = a$

iii. Se cumplen las *leyes de de Morgan:* $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ y $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

iv. $a \wedge \neg b = 0$ si y solo si $a \leq b$.

Lema A.2. Sea $f : B \longrightarrow C$ un homomorfismo de retículos entre álgebras de Boole son equivalentes

I. $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

II. $f(\neg a) = \neg f(a)$ para todo $a \in B$

Definición A.19. Una función entre álgebras de Boole $f : B \longrightarrow C$ se dirá *homomorfismo de álgebras de Boole* si es un homomorfismo de retículos y cumple alguna (y por tanto todas) de las condiciones del lema anterior.

A.4. Ideales y filtros

Definición A.20. Sea L un retículo

- $J \subseteq L$ se dice *ideal* si $J \neq \emptyset$, $\forall a, b \in J$ $a \vee b \in J$ y $a \in L$ $b \in J$ con $a \leq b$ implica $a \in J$.
- Un ideal J se dice *propio* si es distinto del total, *primo* si $a \wedge b \in J \Rightarrow a \in J$ óo $b \in J$ y *maximal* si para todo ideal propio I con $J \subseteq I$ se tiene $I = J$.
- $G \subseteq L$ se dice *filtro* si $G \neq \emptyset$, $\forall a, b \in G$ $a \wedge b \in G$ y $a \in L$ $b \in G$ con $b \leq a$ implica $a \in G$.
- Un filtro G se dice *propio* si es distinto del total, *primo* si $a \vee b \in G \Rightarrow a \in G$ o $b \in G$ y *maximal* si para todo filtro propio F con $G \subseteq F$ se tiene $F = G$.

Lema A.3. Dado un retículo L y $A \subseteq L$ distinto del vacío. Llamamos *ideal generado por* A a:

$$I_A = \downarrow \{a_1 \vee \cdots \vee a_n | n \in \mathbf{N}, a_1, \ldots, a_n \in A\} =$$
$$\{x \in L | \exists n \in \mathbf{N}, a_1, \ldots, a_n \in A : x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}$$

I_A es el menor ideal que contiene a A.

El menor filtro que contiene a un subconjunto $A \neq \emptyset$ de un retículo L es de la forma $\uparrow \{a_1 \wedge \cdots \wedge a_n | n \in \mathbf{N}, a_1, \ldots, a_n \in A\} = \{x \in L | \exists n \in \mathbf{N}, a_1, \ldots, a_n \in A : a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq x\}$.

Proposición A.8. Sea L un retículo, $J \subseteq L$ es un filtro primo si y solo si $L \setminus J$ es un ideal primo.

Teorema A.1. En un álgebra de Boole B son equivalentes

I. I es un ideal maximal.

II. I es un ideal primo.

III. $\forall a \in B$: $a \in I \Leftrightarrow \neg a \notin I$.

Dem. I $\Rightarrow$ II: Sea I maximal en B y $a \wedge b \in I$.

Si $a \in I \Rightarrow$ se verifica la condición de primo. Supongamos que $a \notin I$, en este caso, para que I sea primo debe cumplirse $b \in I$. Consideramos $J = \downarrow \{a \vee c | c \in I\}$. J es un ideal y contiene a a y a I:

- Para cualquier $c \in I$, $a \leq a \vee c$ entonces $a \in J$. Y para cualquier $i \in I$, $i \leq a \vee i \Rightarrow I \subseteq J$.

- $b, c \in J$ entonces existen $d, e \in I$ tales que $b \leq a \vee d$ y $c \leq a \vee e$ por tanto tenemos $b \vee c \leq a \vee d \vee a \vee e = a \vee (d \vee e)$ con $d \vee e \in I$ por ideal $\Rightarrow b \vee c \in J$.

- $b \in B$, $c \in J$ con $b \leq c \leq a \vee i$ para algun $i \in I \Rightarrow b \in J$.

Como J es un ideal que contiene a I estrictamente ($a \in J$, $a \notin I$) e I es maximal $J = B$. Por tanto $1 \in J \Rightarrow 1 = a \vee i$ para algún $i \in I$ entonces $b \vee i = 1 \wedge (b \vee i) = (a \vee i) \wedge (b \vee i) = (a \wedge b) \vee i \in I$ y como $b \leq b \vee i \in I \Rightarrow b \in I$.

II $\Rightarrow$ III: Para todo $a \in B$ tenemos $a \wedge \neg a = 0 \in I$. Por ser primo o bien a o bien $\neg a$ están en I. Si estuvieran ambos $a \vee \neg a = 1 \in I \Rightarrow \forall b \in B, b \leq 1 \Rightarrow b \in L \Rightarrow I = B$ lo que es una contradicción con que sea propio.

III$\Rightarrow$ I: Sea J un ideal que contiene propiamente a I, entonces existe $a \in J \setminus I$ y como $a \notin I \Rightarrow \neg a \in I$ por tanto $a, \neg a \in J$ que es un ideal $\Rightarrow a \vee \neg a = 1 \in J \Rightarrow J = B$. Luego efectivamente I maximal. □

A.5. Maximalidad y El Lema de Zorn

Para estudiar la existencia de elementos maximales en los retículos vamos a necesitar el Lema de Zorn. Lo introducimos a continuación con alguna de sus equivalencias.

Teorema A.2. Son equivalentes:

I. Axioma de elección: Para toda colección $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.

II. Lema de Zorn: Sea $P \neq \emptyset$ un conjunto ordenado donde toda cadena tiene cota superior, entonces P tiene algún elemento maximal.

III. Sea P un conjunto parcialmente ordenado, toda cadena de P está contenida en una cadena maximal.

La demostración al teorema anterior puede consularse en [45].

Teorema A.3. Si aceptamos el lema de Zorn se verifican:

I. Dado un ideal propio J de un álgebra de Boole B existe un ideal primo I tal que $J \subseteq I$.

II. Sea L un retículo distributivo, $J \subseteq L$ un ideal y $G \subseteq L$ un filtro verificando $J \cap G = \emptyset$ entonces existe un ideal primo I tal que $J \subseteq I$, $G \subseteq L \setminus I$.

Dem. I: Sea B un álgebra de Boole y $J \subseteq B$ un ideal propio. Consideramos el conjunto $\varepsilon = \{I \in \mathcal{I}(B) | I \neq B, J \subseteq I\}$ que está ordenado con la inclusión. $J \in \varepsilon \neq \emptyset$. Consideramos una cadena en ε, $\{K_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, veamos que tiene cota superior en ε. Sea $K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$.

Si $K = B$ entonces $1 \in K \Rightarrow 1 \in K_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda \Rightarrow K_\lambda = B$ lo que es una contradicción. Entonces $K \neq B$ y claramente $J \subseteq K$. Falta ver que K es un ideal. Sean $a, b \in K \Rightarrow a \in K_\lambda$, $b \in K_\mu$ para algunos $\lambda, \mu \in \Lambda$, como es una cadena o bien $K_\lambda \subseteq K_\mu$ o bien $K_\mu \subseteq K_\lambda$. Ambos casos son análogos, asi que supongamos sin pérdida de generalidad que se dá el primero. Entonces $a, b \in K_\mu \Rightarrow a \vee b \in K_\mu \subseteq K$. Sea $a \in B$, $b \in K$ con $a \leq b$ entonces $b \in K_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda \Rightarrow a \in K_\lambda \subseteq K \Rightarrow K \in \varepsilon$ y es una cota superior para la cadena.

Por tanto ε es un conjunto ordenado donde toda cadena tiene cota superior y existe $I \in \varepsilon$ maximal en ε. Esto implica maximal en B, ya que si $I \subset K$ estrictamente $K \notin \varepsilon$ pero $J \subseteq K \Rightarrow K = B$. Por estar en un álgebra de Boole I es primo.

II: Consideramos $J, G \subseteq L$ verificando las hipótesis del enunciado. Definimos el conjunto $\varepsilon = \{K \in \mathcal{I}(L) | J \subseteq K, K \cap G = \emptyset\}$. ε es no vacío ya que $J \in \varepsilon$. Consideramos una cadena $\{K_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ y veamos que $K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ está en ε. Que es un ideal que contiene a J se prueba igual que en la parte anterior. Veamos que $K \cap G = \emptyset$, si no lo fuera $\exists x \in K \cap G \Rightarrow \exists K_\lambda$ tal que $x \in K_\lambda \cap G$ lo que es una contradicción. Entonces existen elementos maximales en ε. Sea I un elemento maximal, queda probar que es primo.

Supongamos que $a \wedge b \in I$ pero $a, b \in L \setminus I$. Consideramos el ideal $I_a = \downarrow \{a \vee c | c \in I\}$, que hemos visto que es un ideal que contiene propiamente a I, por tanto no puede estar en $\varepsilon \Rightarrow G \cap I_a \neq \emptyset$. Entonces existen $x \in G$ y $c_a \in I$ tal que $x \leq a \vee c_a \Rightarrow a \vee c_a \in G$. Análogamente podemos encontrar c_b tal que $b \vee c_b \in G$.

Entonces tenemos por un lado $(a \wedge b) \vee (c_a \vee c_b) \in I$ por ideal y $(a \wedge b) \vee (c_a \vee c_b) = (a \vee (c_a \vee c_b)) \wedge (b \vee (c_a \vee c_b)) = ((a \vee c_a) \vee c_b) \wedge ((b \vee c_b) \vee c_a) \in G$ ya que $(a \vee c_a) \leq (a \vee c_a) \vee c_b$ y $(b \vee c_b) \leq (b \vee c_b) \vee c_a$ entonces por filtro ambos están en G y los ínfimos de elementos de G están en G. Pero esto es una contradicción ya que $I \cap G = \emptyset \Rightarrow I$ primo. $\square$

Notar que en el caso II de teorema anterior, $L \setminus I$ es un filtro primo.

Definición A.21. Sea L un retículo definimos $\eta : L \to \mathcal{I}_p(L)$ como

$$\eta(a) = X_a = \{w \in \mathcal{I}_p(L) | a \notin w\}$$

La aplicación de la definición anterior es un homomorfismo de retículos.

Teorema A.4. Sea L un retículo son equivalentes

I. L es distributivo.

II. Dados $J \subseteq L$ un ideal y $G \subseteq L$ un filtro verificando $J \cap G = \emptyset$ entonces existe un ideal primo I tal que $J \subseteq I$, $G \subseteq L \setminus I$.

III. Si $a \not\leq b$ existe un ideal primo I tal que $a \notin I$, $b \in I$.

IV. η es un encaje.

Dem. I $\Rightarrow$ II: Es el teorema anterior.

II $\Rightarrow$ III: Consideramos $\downarrow b$ y $\uparrow a$. $\downarrow b$ es un ideal y $\uparrow a$ un filtro. Si $x \in \downarrow b \cap \uparrow a$ entonces $a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq b$ lo que es una contradicción, por tanto $\downarrow b \cap \uparrow a = \emptyset$. Aplicamos II y obtenemos el ideal buscado.

III $\Rightarrow$ IV: Como es un homomorfismo de retículos será un encaje si es inyectiva. Sea $\eta(a) = \eta(b) \Rightarrow$ todo ideal primo que no contiene a a no contiene a b y viceversa. Si $a \neq b$ o bien $a \nleq b$ o bien $b \nleq a$ y en cualquier caso existiría un filtro primo conteniendo a uno de ellos y no al otro, lo que es una contradicción $\Rightarrow a = b$.

IV $\Rightarrow$ I: Si η es un encaje, $L \cong \eta(L) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}_p(L))$, como un retículo de conjuntos es distributivo, cualquier subretículo suyo lo es $\Rightarrow L$ distributivo. □

Teorema A.5. Sea B un álgebra de Boole, entonces

I. Dado un ideal propio existe un ideal maximal que lo contiene.

II. Si $a \neq b$ existe un ideal maximal que contiene solo a uno de ellos.

III. η es una inmersión de álgebras de Boole.

Dem. I: Ya probado aceptando el lema de Zorn.

II: Sea $a \neq b$, sin pérdida de generalidad suponemos $a \nleq b$ esto implica que $\neg a \vee b \neq 1$. Consideramos $\downarrow (\neg a \vee b)$ que es un ideal propio, entonces está contenido en uno maximal que contiene a b pero no a a ya que $\neg a \in \downarrow (\neg a \vee b)$.

III: La inyectividad se deduce de II de forma análoga al teorema anterior. $\eta(1) = \mathcal{I}_p(B)$, ya que ningún ideal primo contiene al 1, y $\eta(0) = \emptyset$, ya que todo ideal contiene al 0. Como es un homomorfismo de retículos que conserva 0 y 1 es un homomorfismo de álgebras de Boole. □

Lema A.4. Sea p un elemento distinto de 0 en un retículo distributivo A, existe un homomorfismo de retículos $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que $f(p) = 1$.

Dem. Como $p \neq 0 \Rightarrow p \nleq 0 \Rightarrow$ existe un ideal primo I tal que $p \notin I$, $0 \in I$. Consideramos la aplicación $f : A \longrightarrow \mathbf{2}$ que actua de forma que $f(a) = 1$ si $a \notin I$ y $f(a) = 0$ si $a \in I$. f es un homomorfismo de retículos:

- $0 \in I \Rightarrow f(0) = 0$, $1 \notin I$ (I primo y por tanto propio) $\Rightarrow f(1) = 1$.

- $f(a \vee b)$ es 0 si $a \vee b \in I$ entonces como $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$ por ideal tenemos que $a, b \in I \Rightarrow f(a) \vee f(b) = 0$. Si $f(a \vee b) = 1 \Rightarrow a \vee b \notin I \Rightarrow a$ o b no están en I (I es un filtro $a', b' \in I \Rightarrow a' \vee b' \in I$) $\Rightarrow f(a) \vee f(b) = 1$.

- $f(a \wedge b) = 0 \Rightarrow a \wedge b \in I$ y por ser primo a o b están en $I \Rightarrow f(a) \wedge f(b) = 0$. Si $f(a \wedge b) = 1 \Rightarrow a \wedge b \notin I \Rightarrow a$ y b no pueden estar en I (si alguno lo estuviera con $a \wedge b$ es menor o igual que cualquiera de ellos lo estaría tambien) $\Rightarrow f(a) \wedge f(b) = 1$.

Por tanto f es un homomorfismo de retículos acotados y claramente $f(p) = 1$. □

Anexo B

Topología.

B.1. Espacios topológicos y funciones continuas

Definición B.1. Un *espacio topológico* es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una *topología sobre* X, es decir, es una colección de subconjuntos de X que verifica:

- $X, \emptyset \in \tau$.
- $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$.
- $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

A los elementos de τ los llamamos *abiertos de la topología.*

En particular, si consideramos $\tau = \mathcal{P}(X)$, $(X, \mathcal{P}(X))$ es una topología y se llama *topología discreta sobre* X.

Definición B.2. Dadas τ y τ' dos topologías definidas sobre un mismo conjunto X diremos que τ *es más fina que* τ' y τ' *es más gruesa que* τ si $\tau' \subseteq \tau$.

Definición B.3. Sea (X, τ) un espacio topológico, $C \subseteq X$ se dice *cerrado* si existe $U \in \tau$ tal que $X \setminus U = C$.

Proposición B.1. Dado un espacio topológico (X, τ) se cumplen las siguientes condiciones:

- X y $\emptyset$ son cerrados.
- Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.
- Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

Definición B.4. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ llamamos *interior de* A al mayor abierto contenido en A y *clausura de* A al menor cerrado que contiene a A.

Definición B.5. Un espacio topológico (X, τ) se dice *Hausdorff* si para todo $x \neq y \in X$ existen abiertos disjuntos U, V con $x \in U$, $y \in V$.

Definición B.6. Sea (X,τ) un espacio topológico $x \in X$, un conjunto $V \subseteq X$ se dice *entorno de x* si existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq V$.

Definición B.7. Sea X un conjunto, una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *base para una topología* sobre X si verifica

- Para cada $x \in X$ existe algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
- Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, si existe $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface esas dos condiciones se define la topología generada por la base $\mathcal{B}$ como

$$\tau = \{U | \forall x \in U \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subseteq U\} =$$
$$\{U | U \text{ es unión arbitraria de elementos de } \mathcal{B}\}.$$

También podemos considerar a partir de un espacio topológico una base que lo genera.

Definición B.8. Sea (X,τ) un espacio topológico, una colección de conjuntos $\mathcal{B} \subseteq \tau$ verificando que para todo $U \in \tau$ existe una colección $\{B_i\}_{i \in I}$ tal que $U = \cup_{i \in I} B_i$ es una base cuya topología generada es igual a τ. Esta condición es equivalente a:

$$\forall x \in U \in \tau \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq U.$$

Definición B.9. Dada una colección $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup \mathcal{S} = X$, entonces la *topología generada por la subbase* $\mathcal{S}$ se define como la colección τ de las uniones arbitrarias de intersecciónes finitas de elementos de $\mathcal{S}$. En estas condiciones $\mathcal{S}$ se dice *subbase* de τ y a los elementos de $\mathcal{S}$ se los llama *subbásicos*.

Si $\mathcal{S}$ es una subbase de τ entonces el conjunto

$$\mathcal{B} = \{S_1 \cap \cdots \cap S_n | n \in \mathbf{N}, S_i \in \mathcal{S}\}$$

es una base de τ.

Definición B.10. Sea (X,τ) un espacio topológico, $\mathcal{S} \subseteq \tau$ se dice *subbase* de la topología si todo abierto puede escribirse como producto arbitrario de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

La topología generada por una base (subbase) es la menor topología que contiene a los elementos de esa base (subbase). Por tanto, si tenemos una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ generada por la base $\mathcal{B}$, y otra topología τ, $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$ si y solo si $B \in \tau$ para todo $B \in \mathcal{B}$ (análogo para subbase).

Definición B.11. Una función $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ entre dos espacios topológicos se dice *continua* si para todo $U \in \tau_Y$, la preimagen por f de U es un abierto en X, es decir $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

Si la topología en Y estuviera generada por una base $\mathcal{B}$. Entonces para todo $U \in \tau_Y$: $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$ y $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Por tanto

$$f^{-1}(U) \text{ es abierto si cada conjunto } f^{-1}(B_i) \text{ es abierto.}$$

Análogamente si está dada por una subbase $\mathcal{S}$, para probar la continuidad de f será suficiente con demostrar que la imagen inversa de cada elemento subbásico es un abierto en X.

Definición B.12. Una función $f : X \to Y$ donde X, Y son espacios topológicos se dice *homeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son continuas.

Definición B.13. Una función $f : X \longrightarrow Y$ donde X, Y son espacios topológicos se dice *abierta* si la imagen por f de cualquier abierto de X es un abierto de Y.

Proposición B.2. Una función $f : X \longrightarrow Y$ biyectiva donde X, Y son espacios topológicos es un homeomorfismo si y solo si es abierta y continua.

Definición B.14. (Topología heredada) Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subseteq X$. Entonces el conjunto

$$\{U \cap Y | U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y. A esta topología la llamaremos *topología de subespacio* o *topología heredada de X en Y*.

Lema B.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subseteq X$ y $\mathcal{B}$ una base de τ entonces

$$\{B \cap Y | B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de la topología heredada de X en Y.

B.1.1. Topología producto

Definición B.15. Sea J un conjunto de índices, X un conjunto, una $J-$*upla* de elementos de X es una función $x : J \to X$. Si $\alpha \in J$ a menudo se denota $x(\alpha) = x_\alpha$ y se dice *α-ésima coordenada*. La función x suele denotarse $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$.

El conjunto de todas las $J-$uplas de elementos de X se denota X^J.

Definición B.16. Sea una familia de conjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, se define el *producto cartesiano de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$* como las funciones $x : J \to \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ tales que $x(\alpha) \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in J$ y se denota $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$.

Cuando todos los A_α son iguales a un conjunto X tenemos $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha = X^J$.

En estas condiciones, dada $\alpha \in J$ se llama *proyección α-ésima* a la aplicación

$$\pi_\alpha : \prod_{\beta \in J} A_\beta \longrightarrow A_\alpha$$

tal que $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ para todo $x \in \prod_{\beta \in J} A_\beta$

Definición B.17. Dado un conjunto de espacios topológicos (X_i, τ_i) definimos sobre $\prod_{i\in I} X_i$ *topología por cajas* como la que tiene como base los conjuntos de la forma $\prod_{i\in I} U_i$ con $U_i \in X_i$ para todo $i \in I$.

Definición B.18. (Topología producto) Dado un conjunto de espacios topológicos (X_i, τ_i) definimos sobre $\prod_{i\in I} X_i$ la *topología producto* como la más gruesa que hace continuas todas las proyecciones. Esta topología tiene como subbase al conjunto $\bigcup_{i\in I}\{\pi^{-1}(U_i)|U_i \in \tau_i\}$.

Cuando el número de espacios topológicos involucrados es finito la topología por cajas y la topología producto coinciden.

Teorema B.1. Si cada espacio topológico X_i con $i \in I$ es Hausdorff entonces el espacio topológico $\prod X_i$ considerando la topología producto es Hausdorff.

Teorema B.2. Sean A, $\{X_i\}_{i\in I}$ espacios topológicos, $f : A \longrightarrow \prod X_i$ dada por la ecuación $f(a) = (f_i(a))_{i\in I}$ donde $f_i : A \to X_i$ para todo $i \in I$. Si consideramos sobre $\prod X_i$ la topología producto se tiene que f es continua si y solo si f_i es continua para todo $i \in I$.

B.2. Conexión, compacidad y separación.

B.2.1. Espacios conexos

Definición B.19. Sea (X, τ) un espacio topológico, una *separación* de X son un par de abiertos (U, V) disjuntos, no triviales cuya unión es X.

El espacio (X, τ) se dice *conexo* si no existe ninguna separación de X.

Lema B.2. Un subespacio $Y \subseteq X$ de un espacio topológico (X, τ) es conexo con la topología heredada de X si y solo si no existe ningún par A, B de conjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es Y y ninguno de ellos contiene puntos límite del otro.

B.2.2. Compacidad

Definición B.20. Sea (X, τ) un espacio topológico, $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección de subconjuntos de X se dice *cubrimiento por abiertos de* X si verifica:

- $U_i \in \tau$ para todo $i \in I$.
- $\bigcup_{i\in I} U_i = X$.

Además $\{V_j\}_{j\in J} \subseteq \{U_i\}_{i\in I}$ se dice *subcubrimiento de* $\{U_i\}_{i\in I}$ si es también un cubrimiento por abiertos de X.

Definición B.21. Un espacio topológico (X, τ) se dice *compacto* si de todo cubrimiento por abiertos de X se puede extraer un subcubrimiento finito.

Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice compacto si de cualquier cubrimiento por abiertos de Y se puede extraer un subcubrimiento finito.

Proposición B.3. Cada subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

Dem. Sea (X, τ) un espacio topológico compacto, $Y \subseteq X$ un subconjunto cerrado y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de Y, entonces $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus Y\}$ es un cubrimiento por abiertos de $X \Rightarrow$ se puede extraer un subcubrimiento finito $\{V_1, \ldots, V_n\}$ y pueden darse dos casos:

- Si $X \setminus Y \notin \{V_1, \ldots, V_n\} \Rightarrow \{V_1, \ldots, V_n\}$ es un subcubrimiento finito de $\{U_i\}_{i \in I}$ que cubre a $X \Rightarrow$ cubre a Y.
- Si $X \setminus Y = V_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$ consideramos $\{V_1, \ldots, V_n\} \setminus \{X \setminus Y\} \subseteq \{U_i\}_{i \in I}$ que es necesariamente un subcubrimiento finito de Y.

Definición B.22. Una colección de conjuntos $\mathcal{C}$ se dice que tiene la *propiedad de la intersección finita* si cada colección finita de conjuntos de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía.

Proposición B.4. Sea (X, τ) un espacio topológico, son equivalentes:

- (X, τ) es compacto.
- Toda colección de cerrados $\mathcal{C}$ verificando la propiedad de la intersección finita cumple $\bigcap \{C | C \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$.

Proposición B.5. Lema de la subbase de Alexander Sea $\mathcal{S}$ una subbase del espacio topológico (X, τ) si todo cubrimiento subbásico $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ con $\bigcup \mathcal{R} = X$ admite un subcubrimiento finito, entonces (X, τ) es compacto.

Teorema B.3. Tychonoff: El producto arbitrario de espacios compactos es compacto con respecto a la topología producto.

B.2.3. Separación

Definición B.23. *Axiomas de separación*: Dado un espacio topológico (X, τ) decimos que cumple el *axioma de separación* o que es...

- T_0 si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $U \in \tau$ con o bien $x \in U, y \notin U$ o bien $x \notin U, y \in U$.
- T_d si para todo $x \in X$ existe $U \in \tau$ con $x \in U$ y $U \setminus \{x\} \in \tau$.
- T_1 si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $U \in \tau$ con $x \in U$, $y \notin U$
- T_2 si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ con $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- *Regular* si para cada $x \in X$, $C \subseteq X$ un cerrado verificando $x \notin C$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $C \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- *Normal* si para cada par de cerrados $D, C \subseteq X$ con $D \cap C = \emptyset$ existen $U, V \in \tau$ tales que $C \subseteq V$, $D \subseteq U$ y $U \cap V = \emptyset$.

Afirmar que un espacio topológico es Hausdorff es lo mismo que decir que cumple el axioma de separación T_2. La definición de T_d ha sido tomada de [40].

Proposición B.6. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff y el producto arbitrario de espacios de Hausdorff es Hausdorff.

Proposición B.7. Hausdorff y compacto implica normal.

Dem. Sea (X, τ) un espacio topológico que es Hausdorff y compacto, $D, C \subseteq X$ dos cerrados con intersección vacía. Si alguno de ellos es el vacío tomamos los abiertos $X, \emptyset$ y se cumple la definición de normal. Si ninguno de ellos es vacío. Fijamos un $d \in D$ y para cada $x \in C$ existen abiertos U_x, V_x cuya intersección es vacía tales que $C \subseteq \bigcup V_x$ y $d \in U_x$ para todo x. Como C es cerrado y X compacto, C es compacto y podemos extraer un subcubrimiento finito $V_1, \ldots, V_n$. Entonces $V_d = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ y $U_d = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ son dos abiertos tales que $U_d \cap V = \emptyset$, $d \in U_d$ y $C \subseteq V_d$. Para cada $a \in D$ podemos repetir el proceso y obtenemos $\{U_a\}$ un cubrimiento por abiertos de D. Como D es cerrado podemos extraer un subcubrimiento finito de forma que $U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$ y $V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$ son abiertos disjuntos que contienen a D y a C respectivamente. $\square$

Lema B.3. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas entre espacios topológicos, Y un espacio topológico Hausdorff entonces el conjunto $\{x | f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Dem. $\{x | f(x) = g(x)\}$ es cerrado si y solo si su complementario es abierto. Sea $y \in X$ tal que $f(y) \neq g(y)$, como Y es Hausdorff existen abiertos U, V tales que $U \cap V = \emptyset$, $f(y) \in U$ y $g(y) \in V$. Entonces $y \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ que es un abierto en X por ser f, g continuas y para todo $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in U$, $g(x) \in V \Rightarrow f(x) \neq g(x)$ así que $x \in \{x | f(x) = g(x)\}^c$. Para todo $y \in \{x | f(x) = g(x)\}^c$ existe un abierto W tal que $y \in W \subseteq \{x | f(x) = g(x)\}^c \Rightarrow \{x | f(x) = g(x)\}^c$ es abierto en X. $\square$