Universidad de Oviedo

Sucesiones estocásticas recursivas con ruido multiplicativo

Belén Alonso Cadavieco

Supervisado por: Juan Baz González y Raúl Pérez Fernández

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Julio de 2023

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Las sucesiones recursivas estocásticas son un tipo de sucesiones recursivas en las que parte de la relación de recurrencia involucra variables aleatorias [1]. Formalmente, se consideran dos espacios medibles, (X, B_X) y (Y, B_Y) y una secuencia aleatoria ξ_n con valores en Y. Entonces si $f : X \times Y \to X$ es una función medible, se dirá que X_n es una sucesión recursiva estocástica si se cumple:

$$X_{n+1} = f\left(X_n, \xi_n\right)$$

para todo $n \geq 0$ [2]. Este tipo de sucesiones ha sido estudiado con profundidad en la literatura, véase, por ejemplo [2, 3]. Entre sus principales aplicaciones, se encuentra su uso en teoría de colas [4, 5].

Una forma más específica de este tipo de sucesiones son aquellas que cumplen la propiedad de Markov [6]. Esta propiedad sobre sucesiones estocásticas establece que un término futuro de la sucesión depende exclusivamente del valor presente, pudiendo despreciar el resto en su cálculo. De este modo, sucesiones que cumplan esta propiedad pueden ser construidas en base a un único valor inicial.

Sin embargo, una vez traspasado este concepto a sucesiones de datos reales, dicha construcción resulta algo más compleja. Al considerar datos reales, como puede ser el caudal de un río, una variación de temperaturas o cualquier situación en la que los valores futuros partan de un estado presente, el problema se centra en hallar una sucesión que se ajuste adecuadamente. De este modo, una vez se haya obtenido este modelo, sería posible aplicarlo sobre los datos conocidos con el fin de predecir valores futuros de la serie.

En el presente estudio se analizará la utilidad de una sucesión construida elevando el valor presente a un cierto exponente b y multiplicando este término por una constante a y un ruido aleatorio ϕ. Todo ello con el fin de estudiar sus propiedades teóricas y sus posibles aplicaciones sobre datos reales.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es definir y estudiar una sucesión estocástica recursiva con un ruido multiplicativo.

Para ello en primer lugar se realizará un estudio teórico, comprobando si la sucesión considerada cumple la propiedad de Markov y obteniendo expresiones para propiedades como el momento, la varianza o la covarianza en función de la distribución del ruido multiplicativo. A partir de estos resultados, se estudiará el comportamiento asintótico de la sucesión para alguna distribución de los ruidos concreta.

Finalmente, en base a los resultados teóricos obtenidos se analizará la posibilidad de aplicar este modelo a una serie de datos reales y se comprobará si estos se ajustan a los observados.

En resumen, se tienen como objetivos principales:

- Verificar que el tipo de sucesiones estudiado cumple la propiedad de Markov.
- Hallar expresiones para la esperanza, la varianza, la covarianza y el coeficiente de correlación de Pearson en función de la distribución de los ruidos.
- Analizar el comportamiento asintótico de la sucesión para diferentes distribuciones de los ruidos.
- Aplicar los resultados sobre una serie de datos reales.

1.3. Estructura del trabajo

En base a los objetivos del trabajo, la estructura de este será la siguiente:

- En el capítulo 2 se introducirán varios conceptos básicos que estarán involucrados en análisis de capítulos posteriores, con el fin de hacer el trabajo lo más autocontenido posible y fijar la notación. Estas serán nociones tanto del campo de la probabilidad como del de la estadística. Se introducirán, por tanto, conceptos como el de variable aleatoria o el de función de distribución. De modo más concreto se considerarán distribuciones como la uniforme, la exponencial o la normal-logarítmica, que serán necesarias posteriormente. Asimismo, se introducirá la noción de independencia de variables y de conceptos como la esperanza o la varianza y alguna de sus propiedades.

  Por otro lado, se definirán conceptos primordiales para el presente estudio como el de proceso estocástico o el de propiedad de Markov.

Adicionalmente se introducirán herramientas propias de la estadística que serán empleadas en la aplicación a datos reales, como son los test de hipótesis y varios ejemplos concretos de estos.

Finalmente, se introducirán varias fórmulas y propiedades que resultarán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

- En el capítulo 3 se introducirá la sucesión que será sometida a estudio y, tras su definición, se establecerán diferentes lemas y proposiciones que permitirán determinar el cumplimiento de la propiedad de Markov.

  Por otra parte, se llevará a cabo el cálculo del momento de orden m en función de la distribución del ruido multiplicativo, extrayendo de este resultado diferentes conclusiones.

- En el capítulo 4 se analizará el comportamiento asintótico de la esperanza de la sucesión para diferentes distribuciones asociadas a los ruidos. Para ello se considerarán ruidos con distribución uniforme $[0, 2]$, con distribución exponencial (λ) y con distribución normal-logarítmica (μ, σ). En base a estos se obtendrá una expresión para la esperanza de sucesiones con este tipo de ruidos y, por simplicidad, se analizará el comportamiento asintótico de su logaritmo.

- En el capítulo 5 se aplicarán los resultados obtenidos al caso concreto de fluctuación del caudal de un río. Para ello, mediante test de hipótesis, se comprobará si el modelo estudiado es adecuado para el análisis de estos datos. Posteriormente se obtendrán intervalos de confianza asociados a los valores finales de la sucesión y se comprobará si se ajustan a los reales.

- Finalmente, en el capítulo 6, se incluirán las conclusiones.

Capítulo 2

Conceptos básicos

El fundamento de este trabajo se asienta sobre principios y definiciones de la estadística y la probabilidad, es por ello que de forma previa al estudio de los resultados aquí mencionados, conviene destacar ciertos conceptos básicos de este ámbito.

2.1. Probabilidad

En primer lugar, se definirá el espacio de trabajo en el que se sitúan todas las definiciones posteriores, dentro del marco de la probabilidad: el espacio muestral. Sin embargo, de forma previa a esta definición resulta necesario considerar el modo en el que los datos son adquiridos, es decir, el concepto de experimento aleatorio.

Definición 2.1. *[7] Un **experimento aleatorio** es un experimento en el que:*

- *Todos los posibles resultados del experimento son conocidos de antemano.*

- *Cualquier realización del experimento da lugar a un resultado que no se puede predecir con precisión de antemano.*
- *El experimento puede ser repetido bajo condiciones idénticas.*

De este modo es posible definir el concepto de espacio muestral.

Definición 2.2. *El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**.*

Dentro de un espacio muestral es posible definir el concepto de σ-álgebra.

Definición 2.3. *Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un espacio muestral Ω se denomina σ**-álgebra** si cumple las siguientes condiciones:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $A \in \mathcal{F}$ *entonces* $A^c \in \mathcal{F}$.
3. $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

A los elementos de $\mathcal{F}$ se les denomina **sucesos**. En base a las dos definiciones anteriores se define el conocido como espacio probabilizable.

Definición 2.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ tal que Ω es un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra, entonces $(\Omega, \mathcal{A})$ se denomina **espacio probabilizable**.*

Además, a este tipo de espacios se les puede asociar una aplicación conocida como medida de probabilidad.

Definición 2.5. *Una **medida de probabilidad** P asociada a un espacio probabilizable $(\Omega, \mathcal{F})$ es una aplicación P: $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \geq 0$.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$ *tal que* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$:
$P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n...) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Si se consideran estas dos últimos definiciones surge el concepto de espacio de probabilidad, sobre el cuál se trabajará.

Definición 2.6. *Un* ***espacio de probabilidad*** *es una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, donde* Ω *es un espacio muestral,* $\mathcal{F}$ *es una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *y* P *es una medida de probabilidad definida sobre* $\mathcal{F}$*.*

Sobre los espacios de probabilidad se trabaja con las variables denominadas aleatorias, que consisten en funciones medibles entre un espacio de probabilidad y la recta real.

Definición 2.7. *Una* ***variable aleatoria*** *es una función que asigna elementos de* Ω *a elementos de* $\mathbb{R}$*, esto es:* X*:* $\Omega \to \mathbb{R}$*, tal que para cualquier conjunto de Borel* $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *se cumpla:*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Es decir, la anti-imagen de B *por* X *en* $\mathbb{R}$ *es un suceso de* Ω *[1].*

Una vez definido el concepto de variable aleatoria es posible asociarle una función que exprese la probabilidad de que esta adquiera un determinado valor, esta es la función de distribución.

Definición 2.8. *Dada* X *una variable aleatoria y* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función tal que*

- F *es monótona no decreciente*

- *F es continua por la derecha, es decir:* $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$
- *Se cumple* $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$ *y* $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$

Esta función F(x), es conocida como ***función de distribución*** *de X cuando describe la probabilidad de que la variable aleatoria adquiera un valor menor o igual que x, es decir,* $F(x) = P(X \leq x)$ *.*

En base a esta definición es posible definir un tipo de variable aleatoria concreto, la **variable aleatoria continua**.

Definición 2.9. *Una variable X es una* ***variable aleatoria continua*** *si su función de distribución, F, es absolutamente continua, es decir, puede expresarse para cada* $x \in \mathbb{R}$ *como:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

para cierta función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(t) \geq 0 \; \forall \; t \in \mathbb{R}$ *y que además cumple* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$*. A dicha función f se la conoce como la* ***función de densidad de*** *X.*

Por otra parte, es necesario considerar la definición de independencia de variables, de cara a la simplificación de futuros cálculos.

Definición 2.10. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $A, B \in \mathcal{F}$ *se dice que A y B son* ***sucesos independientes*** *si y solo si:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sin embargo, existen ocasiones en las que la probabilidad de un suceso se ve condicionada por la probabilidad de otro, surge así el concepto de probabilidad condicionada.

Definición 2.11. *La definición formal de* ***probabilidad del suceso A condicionada por un suceso B****, supuesto que* $P(B) > 0$*, viene dada por:*

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A partir de esta definición es posible considerar la noción de dos sucesos condicionalmente independientes de otro.

Definición 2.12. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $A, B, C \in \mathcal{F}$*, con* $P(C) > 0$*, se dice que* A *y* B *son* ***condicionalmente independientes*** *a* C *si:*

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Del mismo modo en que se definió la independencia de sucesos es posible asignar este concepto a dos variables aleatorias.

Definición 2.13. *Dos* ***variables aleatorias*** X *e* Y *son* ***independientes*** *si los sucesos* $(X \leq x)$ *e* $(Y \leq y)$ *son independientes para cualesquiera valores reales de* x *e* y*, es decir, si se cumple la igualdad:*

$$P[(X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)] = P(X \leqslant x) \cdot P(Y \leqslant y)$$

En otros términos, unas de las principales características de las variables aleatorias son su esperanza y su varianza. En el caso de las variables aleatorias continuas, la expresión para estos parámetros puede ser obtenida a partir de su función de densidad.

Definición 2.14. *La* ***esperanza matemática*** *de una variable aleatoria continua* X *es el valor:*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx$$

Existen variables aleatorias cuya esperanza no existe, esto ocurre si la integral que la define no es convergente. Este valor de esperanza expresa una medida de la centralidad alrededor de la cual se distribuyen los valores de la variable.

Por su parte, la varianza mide la distribución de la variable aleatoria respecto al valor de la esperanza. Por tanto, esta puede definirse en función de la esperanza.

Definición 2.15. *Sea X una variable aleatoria para la que existe $E(X)$, se define su* ***varianza*** *como el valor, si existe, dado por:*

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Para el cálculo de determinadas expresiones relacionadas con estos valores de esperanza y varianza, conviene destacar alguna de las siguientes proposiciones.

Proposición 2.1. *Sea $c \in \mathbb{R}$ y X una variable aleatoria, entonces se cumple:*

$$E(cX) = cE(X)$$
$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$

Proposición 2.2. *Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, la esperanza del producto de variables es igual al producto de las esperanzas de las mismas. Es decir:*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Sin embargo, en el momento en que resulta necesario estudiar la relación entre varias variables, conviene considerar los términos conocidos como **covarianza** y **coeficiente de correlación de Pearson**. Estos dos valores involucran las relaciones entre variables, por lo que son de gran utilidad a la hora de estudiar el comportamiento de estas de manera conjunta.

Definición 2.16. *Sean X e Y dos variables aleatorias, si existe $E((X - E(X))(Y - E(Y)))$, a este término se le denomina* ***covarianza*** *entre X e Y y se denota como:*

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (2.1)$$

Este parámetro es una muestra del grado de dependencia lineal entre las variables X e Y [7].

Si se considera una normalización de la covarianza se obtiene el coeficiente de correlación de Pearson.

Definición 2.17. *[7] Sean X e Y dos variables, se define el* ***coeficiente de correlación de Pearson*** *como:*

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2}\sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}} \quad (2.2)$$

De modo que si X e Y fueran dos variables aleatorias independientes se tendría, $\rho_{X,Y} = 0 = cov(X, Y)$.

Asimismo, otra de las propiedades a considerar es el **momento de orden m**, que resultará útil en cálculos posteriores.

Definición 2.18. *[7] El* ***momento de orden*** *m de una variable aleatoria X, es el valor $E(X^m)$. Asimismo el valor $E((X - E(X))^m)$ se denomina* ***momento central de orden m****.*

En base a la definición 2.14 para la esperanza matemática es posible obtener una expresión para el momento de orden m de una variable aleatoria continua.

Proposición 2.3. *El* ***momento de orden*** *$m \in \mathbb{R}$* ***de una variable aleatoria*** *se obtiene a partir de la expresión:*

$$E(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m \cdot f(x)dx \quad (2.3)$$

Una vez definidos estos valores asociados a las variables, es necesario mencionar tres distribuciones que resultarán de utilidad en capítulos posteriores. Estas son la **distribución uniforme**, la **distribución exponencial** y la **distribución normal-logarítmica**.

Definición 2.19. *[7] La* ***distribución uniforme*** *depende de dos parámetros a,b, que determinarán un intervalo de una determinada longitud. Esta distribución se caracteriza porque la probabilidad de que las variables tomen valores dentro de un intervalo contenido en* $[a, b]$ *depende únicamente de su longitud.*

La función de distribución de una uniforme [a,b] asociada a una variable aleatoria X*, es de la forma:*

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases} \tag{2.4}$$

Mientras que el momento de orden m *está determinado por:*

$$E\left(X^n\right) = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)(b-a)} \tag{2.5}$$

para $n \in \mathbb{N}$ *.*

Definición 2.20. *[7] La* ***distribución exponencial*** *depende de un único parámetro,* λ*. Sea* X *una variable aleatoria con función de distribución exponencial, entonces su función de distribución es de la forma:*

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{2.6}$$

Mientras que el momento de orden n *está determinado por:*

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n} \tag{2.7}$$

Finalmente, de forma previa a la definición de distribución normal-logarítmica resulta imprescindible la definición de distribución normal.

Definición 2.21. *[7] La* ***distribución normal*** *es una distribución de probabilidad simétrica respecto a su media. Esta distribución depende de la media μ y de la varianza σ, siendo su función de distribución:*

$$P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{2.8}$$

Debido a la complejidad del cálculo del momento de orden m, para esta distribución se suele expresar el momento central de orden m, que dependerá de la paridad de m. Así:

- *Si m es impar, el momento central será nulo.*
- *Si m es par:*

$$E((X-\mu)^{2m}) = \frac{\sigma^{2m}}{\sqrt{2\pi}} 2^{m+1/2} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = [(2m-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1]\sigma^{2m} \tag{2.9}$$

Tomando logaritmos sobre la distribución anterior, es posible definir una de las distribuciones que serán de mayor importancia en capítulos posteriores, la **distribución normal-logarítmica**.

Definición 2.22. *[7] La* ***distribución normal-logarítmica*** *se asocia a una variable aleatoria X cuyo logaritmo sigue una distribución normal. Es decir, se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución normal-logarítmica si $Y = ln(X)$ sigue una distribución normal.*

Su función de distribución es de la forma:

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \tag{2.10}$$

Donde Φ es la función de distribución de una distribución normal con media 0 y varianza 1.

Mientras que su momento de orden n, es de la forma:

$$E\left(X^n\right) = e^{\left(\frac{n\mu + n^2\sigma^2}{2}\right)} \tag{2.11}$$

2.2. Procesos estocásticos

A continuación, considerando ya definiciones menos generales y más aplicables al caso que posteriormente se estudiará, es necesario introducir el concepto de proceso estocástico.

Definición 2.23. *Un* ***proceso estocástico*** *es un conjunto de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad dado* (Ω, F, P) *e indexadas en un conjunto T, tal que* $(X_t,\ t \in T)$.

Un proceso estocástico se suele caracterizar por el conjunto de índices, el espacio de estados en el que toman valores las variables aleatorias y las relaciones de dependencia entre las mismas. En el siguiente capítulo se estudiará un proceso estocástico concreto, fundamentado sobre la conocida como **Propiedad de Markov**.

Definición 2.24. *Una sucesión de variables aleatorias* X_n *se denomina* ***cadena de Markov en tiempo discreto*** *si, para cada* $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ *Borel-medible, se cumple:*

$$\mathbf{P}\left\{X_n \in A_n \mid X_1 \in A_1, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}\right\} = \mathbf{P}\left\{X_n \in A_n \mid X_{n-1} \in A_{n-1}\right\}$$

Esta igualdad es conocida como ***propiedad de Markov [6].***

Esta propiedad es equivalente a considerar que X_n es condicionalmente independiente a X_k con $k < n-1$ conocido el valor de X_{n-1}. Por ello, para trabajar con esta última definición, será necesario en ocasiones considerar el siguiente teorema de independencia:

Teorema 2.4. *[7] Sean* $X = (X_1, X_2, ..., X_m)$ *e* $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ *variables aleatorias independientes. Entonces la componente* X_j *de* X *(j=1,2,...,m) y la componente* Y_k *de* Y *(k=1,2,...n) son variables aleatorias independientes. Si* h *y* g *son funciones medibles de Borel, entonces* $h(X_1, X_2, ..., X_m)$ *y* $g(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ *son independientes.*

2.3. Inferencia estadística

En el ámbito de la estadística, de cara a la aplicación de lo estudiado a series de datos reales, será necesaria la realización de diferentes tests, con el fin de verificar si es posible asumir ciertas hipótesis impuestas por la definición de nuestro proceso. En base a estos se buscará el establecimiento de conclusiones útiles acerca de las muestras, interviniendo aquí la determinación de **intervalos de confianza**. Es decir, conjuntos de valores en los que se encuentre con alta probabilidad el valor real de un parámetro desconocido. Dado un vector de variables aleatorias $\mathbf{X}$ identificado como muestra, se trata de encontrar una familia de conjuntos $I(\mathbf{X})$ para un parámetro θ, tal que dado un α, generalmente pequeño, conocido como **nivel de significación**, se cumpla:

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\{\boldsymbol{\theta} \in I(\mathbf{X})\} \geq 1 - \alpha$$

.

Definición 2.25. *[7] Sea* $I(\mathbf{x}) = (\underline{\theta}(\mathbf{x}), \bar{\theta}(\mathbf{x}))$, $I(\mathbf{x})$ *se define como* ***intervalo de confianza*** *a nivel* $1 - \alpha$ *si se cumple*

$$P_\theta\{\underline{\theta}(\mathbf{X}) < \theta < \bar{\theta}(\mathbf{X})\} \geq 1 - \alpha$$

El valor $\inf_\theta P_\theta\{\underline{\theta}(\mathbf{X}) < \theta < \bar{\theta}(\mathbf{X})\}$ *se denomina* ***coeficiente de confianza*** *asociado al intervalo.*

Sin embargo, en la aplicación propuesta en el capítulo 6, será necesario comprobar que los resultados estudiados pueden ser aplicados sobre las muestras. Por todo ello, se utilizarán test de hipótesis para estudiar las condiciones necesarias. En primer lugar es necesario el concepto de hipótesis.

Definición 2.26. *Una **hipótesis** es una afirmación acerca de un parámetro o del comportamiento de una variable aleatoria. Sea Θ el conjunto de posibles distribuciones para una variable aleatoria, para los análisis posteriores, se suele considerar una hipótesis conocida como **hipóteis nula** H_0, donde $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$. También será necesaria la definición de la **hipótesis alternativa**, $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$.*

De forma previa a la definición de los test de hipótesis, que serán la herramienta que permita rechazar ciertas hipótesis es necesaria la introducción del concepto de **función test**.

Definición 2.27. *Una **función test** será una función medible Borel tal que $\varphi : \Omega \to \{0, 1\}$, donde Ω es el espacio muestral en el que se trabaja.*

En base a todas estas definiciones se puede, finalmente, establecer el concepto de **test de hipótesis**. [7]

Definición 2.28. *Una función test φ se denomina **test de la hipótesis** $H_0 : \theta \in \Theta_0$ frente a $H_1 : \theta \in \Theta_1$ con error de probabilidad α si se cumple:*

$$E_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi(\mathbf{X})) \leq \alpha \quad \textit{para todo } \theta \in \Theta_0$$

*Este test divide el espacio muestral en una parte conocida como **región crítica**, donde se rechaza H_0 y en la **región de aceptación**, donde H_0 no se rechaza.*

Para la aplicación de los test de hipótesis a diferentes muestras se compara el valor de un parámetro conocido como **estadístico de contraste**.

Definición 2.29. *Un **estadístico de contraste** será aquel valor obtenido a partir de los datos muestrales, que permite determinar si se rechaza o no la hipótesis nula. Esta determinación se lleva a cabo en función de si el estadístico adquiere valores más o menos frecuentes en función a su distribución muestral.*

Una vez se han considerado todas las definiciones previas, es posible valorar ciertos ejemplos más concretos sobre test de hipótesis, que serán utilizados en el estudio posterior:

- **Test de Shapiro-Wilk:**
  El test de Shapiro-Wilk se trata de una prueba de normalidad, es decir, determina si es razonable asumir que una serie de datos proviene de una distribución normal. Por lo tanto, presenta como hipótesis nula y alternativa:

  $$H_0\text{: La distribución es normal}$$
  $$H_1\text{: La distribución no es normal}$$

  El estadístico que emplea este test es de la forma:

  $$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

  Donde $x_{(i)}$ es, una vez ordenada de menor a mayor la muestra, el valor que ocupa la posición i-ésima , $\bar{x}$ es la media muestral y a_i se calcula como:

  $$(a_1, \ldots, a_n) = \frac{m^\top V^{-1}}{(m^\top V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}$$

  Donde $m = (m_1, \ldots, m_n)^\top$ y V son, respectivamente, los valores medios y la matriz de varianzas y covarianzas de los estadísticos ordenados de variables aleatorias e independientes muestreadas de distribuciones normales. Mientras que V es la matriz de covarianzas del estadístico de orden [8].

De este modo, se obtendrá una región crítica formada por aquellos valores donde el estadístico W es menor que un valor crítico de este a nivel de significación α. Es decir, la hipótesis nula será rechazada para valores pequeños del estadístico.

Este test puede ser realizado en R a partir de la función *shapiro.test()*.

- **Test de Rachas:**

  El test de Rachas es una prueba de la aleatoriedad de un variable aleatoria. Por lo que las hipótesis que se someten a contraste son:

  H_0: La muestra se produjo de forma aleatoria.

  H_1: La muestra no se produjo de forma aleatoria.

  En este caso, la aleatoriedad se refiere a que las componentes de la muestra deben ser independientes entre sí como variables aleatorias. Para ello, este test se basa en el análisis de rachas. Las rachas son conjuntos de valores similares consecutivos, generalmente se consideran dos tipos: los que se desvían por encima de la media del conjunto y los que se desvían por debajo. Así, se analiza el orden y la longitud de aparición de estas rachas, en busca de posibles secuencias que hagan sospechar acerca de una dependencia en los valores.

  El estadístico que emplea este test es:

$$Z = \frac{R - \bar{R}}{s_R}$$

  Donde R es el número de rachas observado, $\bar{R}$ es el número de rachas esperado y s_R es la desviación estándar del número de rachas. De modo que estos dos últimos parámetros se obtienen de:

$$\bar{R} = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 \qquad s_R^2 = \frac{2n_1n_2\left(2n_1n_2 - n_1 - n_2\right)}{\left(n_1+n_2\right)^2\left(n_1+n_2-1\right)}$$

Donde n_1 es el número de rachas por encima de la media y n_2 el número de rachas por debajo de la misma.[9]

La región crítica que caracteriza este test es una región de valores tanto grandes como pequeños, de modo que la hipótesis nula será rechazada en caso de que el estadístico supere un valor crítico máximo o no alcance uno mínimo, obtenidos en función del nivel de significación [10].

Este test se puede realizar sobre una muestra en R a partir de la función *runs.test()*.

2.4. Algunas fórmulas de interés

Finalmente, algunos puntos que resultarán de interés para el desarrollo de las demostraciones en capítulos posteriores son:

1. [11]Si $|a| < 1$, se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

2. [12] $\frac{x!}{e^x} \to \infty$.

3. [11](Página 538, propiedad b)) Para todo $x \in [0,1]$, $x! \geq x^x$.

4. [11] **Criterio del cociente**
   Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con términos distintos de cero. Y sea

   $$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

   - Si los valores de $0 \leq \rho < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

- Si los valores de $\rho > 1$ o $\rho = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si los valores de $\rho = 1$, la prueba no proporciona ninguna información.

A lo largo de este trabajo, se utilizará la notación de factorial ($n!$) para referirse a su extensión para todo número real que no sea entero estrictamente negativo. En particular se considerará $n! = \Gamma(n-1)$, donde Γ es la función Gamma [13].

Capítulo 3

La sucesión recursiva estocástica multiplicativa

El presente estudio se centrará en el análisis y posibles aplicaciones del siguiente concepto:

Definición 3.1. *Sean a, b,* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *y* $\phi_1, \phi_2, ...$ *variables aleatorias positivas independientes con la misma distribución. Entonces la sucesión* $X_1, X_2, ...,$ *tal que:*

$$X_n = aX_{n-1}^b \phi_n \tag{3.1}$$

es una ***sucesión recursiva estocástica multiplicativa.***

A modo de ejemplo, para comprender de forma sencilla que implica esta definición, se podría considerar un valor fijo para $x_0 = 1$, para $a = 2$ y para $b = 3$. Además de un ruido aleatorio ϕ que tome cada uno de los valores 0.5 y 1.5 con probabilidad 0.5. Con estos valores, se podrá ir obteniendo el resto de variables en función de la definición de sucesión recursiva estocástica multiplicativa. Así:

- Para X_1 habrá dos posibles valores: $X_{1,1} = 2 \cdot 1^3 \cdot 0.5 = 1$ y $X_{1,2} = 2 \cdot 1^3 \cdot 1.5 = 3$, cada uno de ellos con probabilidad 0.5.

- Para X_2 serán 4 los valores posibles, cada uno con probabilidad 0.25, estos son:

$$X_2 \in \{1, 3, 27, 81\}$$

- Para X_3 habrá 8 posibles valores, cada uno con probabilidad 0.125, estos son:

$$X_3 \in \{1, 3, 27, 81, 19683, 59049, 531441, 1594323\}$$

- Y así sucesivamente para el resto de iteraciones.

3.1. Propiedad de Markov

Este apartado se dedicará a demostrar que las sucesiones recursivas estocásticas multiplicativas cumplen la propiedad de Markov. En primer lugar, se encontrará una expresión para el término general X_n, resolviendo la relación de recurrencia.

Lema 3.1. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa, la variable X_n se puede expresar en función de las constantes x_0, a y b, además de las variables aleatorias $\phi_1, \phi_2, ...,$ del siguiente modo:*

$$X_n = x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} (\phi_i a)^{b^{(n-i)}} \tag{3.2}$$

Demostración. En primer lugar, partiendo de la propia definición de sucesión recursiva estocástica multiplicativa, se puede ver, mediante inducción:

- Se cumple para $n = 1$: Por definición, se tiene $X_1 = ax_0^b\phi_1$.

- Supuesto cierto para $n-1$, véase que se cumple para n:

  Partiendo de la hipótesis

$$X_{n-1} = x_0^{b^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} (\phi_i a)^{b^{(n-1-i)}}$$

  Por definición se tiene $X_n = aX_{n-1}^b \phi_n$, de modo que en base a la expresión anterior:

$$\begin{aligned} X_n &= a \left(x_0^{b^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} (\phi_i a)^{b^{(n-1-i)}} \right)^b \phi_n \\ &= x_0^{b^{n-1}b} \left(\prod_{i=1}^{n-1} (\phi_i a)^{b^{(n-1-i)}} \right)^b a\phi_n \\ &= x_0^{b^n} \left(\prod_{i=1}^{n} (\phi_i a)^{b^{(n-1-i)}b} \right) \end{aligned}$$

De este modo se deduce que X_n se puede escribir de la siguiente forma:

$$X_n = x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} (\phi_i a)^{b^{(n-i)}}$$

□

A continuación, se probará que la variable n-ésima es independiente de los ruidos futuros.

Lema 3.2. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión recursiva estocástica multiplicativa, entonces las variables* X_n *y* ϕ_k *son independientes si* $k > n$.

Demostración. A partir de la expresión 3.2 es posible ver que la variable aleatoria X_n es función de las variables ϕ_i, $\forall i = \{1, 2, ..., n\}$. De modo que considerando el teorema 2.4 se puede comprobar que X_n y ϕ_k son independientes si $k > n$. □

Finalmente, haciendo uso de los resultados anteriores, es posible probar la propiedad de Markov.

Proposición 3.3. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa, dada X_{n-1}, la variable X_n es independiente de X_k con $k <$ n-1. En consecuencia las sucesiones recursivas multiplicativas son de Markov.*

Demostración. Dado $X_{n-1} = \lambda$, en el lema anterior se ha visto que X_n y ϕ_k son independientes si $k > n$.

Además, por la definición de sucesión recursiva estocástica multiplicativa, se tiene:

$$X_n = a\lambda^b\phi_n$$

De modo que X_n será función únicamente de ϕ_n, es decir, efectivamente X_n es independiente de X_k con $k < n - 1$.

Entonces, la sucesión de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple la propiedad de Markov. □

3.2. Momentos

La expresión hallada en el lema 3.1 para la sucesión recursiva a estudiar permite expresar los momentos del proceso en función de los momentos del ruido introducido.

De forma general, es posible hallar una expresión para el momento de orden m $\in \mathbb{N}$ de X$_n$ en función de los momentos del ruido.

Proposición 3.4. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa, el momento de orden $m \in \mathbb{R}$ de X_n, viene determinado por la expresión:*

$$E(X_n^m) = x_0^{mb^n}\prod_{i=1}^{n} a^{mb^{n-i}} E\left(\phi_i^{mb^{n-i}}\right) \tag{3.3}$$

Demostración. Por la definición de momento de orden m se tendrá:

$$E(X_n^m) = E\left(\left(x_0^{b^n}\prod_{i=1}^{n}(\phi_i a)^{b^{(n-i)}}\right)^m\right) = E\left(x_0^{mb^n}\prod_{i=1}^{n}(\phi_i a)^{mb^{(n-i)}}\right)$$

Dado que $X_0^{mb^n}\prod_{i=1}^{n} a^{mb^{n-i}} \in \mathbb{R}$, aplicando la proposición 2.1 se tiene:

$$E(X_n^m) = x_0^{mb^n}\prod_{i=1}^{n} a^{mb^{n-i}} E\left(\prod_{i=1}^{n}\phi_i^{mb^{n-i}}\right)$$

Además, dado que $\phi_1, \phi_2, ...$ son variables aleatorias independientes, a partir de la proposicion 2.2, se obtiene la expresión:

$$E(X_n^m) = x_0^{mb^n}\prod_{i=1}^{n} a^{mb^{n-i}} E\left(\phi_i^{mb^{n-i}}\right)$$

□

Mediante el resultado anterior es posible obtener la expresión de la esperanza y varianza de las variables de la sucesión.

Corolario 3.5. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa, se cumple:*

1. ***Media:***

$$E(X_n) = x_0^{b^n}\prod_{i=1}^{n} a^{b^{n-i}} E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) \tag{3.4}$$

2. ***Varianza:***

$$Var(X_n) = x_0^{2b^n}\prod_{i=1}^{n} a^{2b^{n-i}}\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{2b^{n-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n}\left(E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)\right)^2\right] \tag{3.5}$$

Demostración. 1. Basta con tomar $m = 1$ en la expresión 3.3.

2. Por la propia definición de varianza se tiene:

$$Var(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

De modo que sustituyendo en la expresión 3.3 para $m = 2$ y considerando la expresión anterior para $E(X_n)$, se tiene:

$$\begin{aligned} Var(X_n) &= x_o^{2b^n} \prod_{i=1}^{n} a^{2b^{n-i}} E(\phi_i^{2b^{i-1}}) - \left(x_o^{b^n} \prod_{i=1}^{n} a^{b^{n-i}} E(\phi_i^{b^{n-i}}) \right)^2 \\ &= x_o^{2b^n} \prod_{i=1}^{n} a^{2b^{n-i}} \left[\prod_{i=1}^{n} E(\phi_i^{2b^{n-i}}) - \left(\prod_{i=1}^{n} E(\phi_i^{b^{n-i}}) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Por lo que la expresión para la varianza será, efectivamente:

$$Var(X_n) = x_0^{2b^n} \prod_{i=1}^{n} a^{2b^{n-i}} \left[\prod_{i=1}^{n} E(\phi_i^{2b^{n-i}}) - \prod_{i=1}^{n} \left(E(\phi_i^{b^{n-i}} \right)^2 \right]$$

□

Sin embargo, para el cálculo de la covarianza es necesaria la realización de cálculos adicionales.

Proposición 3.6. *Sean X_n y X_m sucesiones recursivas estocásticas multiplicativas, con n,m $\in \mathbb{N}$ con n<m, la covarianza asociada a estas variables es:*

$$Cov(X_n, X_m) = A \left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}} \right) - \prod_{i=1}^{n} E(\phi_i^{b^{n-i}}) E(\phi_i^{b^{m-i}}) \right] \prod_{i=n+1}^{m} E(\phi_i^{b^{m-i}}) \tag{3.6}$$

Donde $A = x_0^{b^n+b^m} \prod_{i=1}^{n} a^{b^{n-i}+b^{m-i}} \prod_{i=n+1}^{m} a^{b^{m-i}}$.

Demostración. Por la propia definición de covarianza se tiene:

$$Cov(X_n, X_m) = E(X_n X_m) - E(X_n)E(X_m)$$

Para el término $E(X_n X_m)$ habrá que considerar la expresión de $X_n X_m$, que será:

$$\begin{aligned} X_n X_m &= \left[x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} (\phi_i a)^{b^{(n-i)}} \right] \left[x_0^{b^m} \prod_{i=1}^{m} (\phi_i a)^{b^{(m-i)}} \right] \\ &= x_0^{b^n+b^m} \prod_{i=1}^{n} (\phi_i a)^{b^{(n-i)}} \prod_{i=1}^{m} (\phi_i a)^{b^{(m-i)}} \end{aligned}$$

De modo que la esperanza de este término será de la forma:

$$E(X_nX_m) = E\left(x_0^{b^n+b^m}\prod_{i=1}^{n}(\phi_i a)^{b^{(n-i)}}\prod_{i=1}^{m}(\phi_i a)^{b^{(m-i)}}\right)$$

$$= x_0^{b^n+b^m}\prod_{i=1}^{n}a^{b^{(n-i)}}\prod_{i=1}^{m}a^{b^{(m-i)}}E\left(\prod_{i=1}^{n}\phi_i^{b^{n-i}}\prod_{i=1}^{m}\phi_i^{bm-i}\right)$$

Y, por considerar $n < m$:

$$\prod_{i=1}^{n}\phi_i^{b^{n-i}}\prod_{i=1}^{m}\phi_i^{bm-i} = \prod_{i=1}^{n}\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\prod_{i=n+1}^{m}\phi_i^{b^{m-i}}$$

De forma que finalmente se tendrá:

$$E(X_nX_m) = x_0^{b^n+b^m}\prod_{i=1}^{n}a^{b^{(n-i)}}\prod_{i=1}^{m}a^{b^{(m-i)}}E\left(\prod_{i=1}^{n}\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\prod_{i=n+1}^{m}\phi_i^{b^{m-i}}\right)$$

$$= x_0^{b^n+b^m}\prod_{i=1}^{n}a^{b^{(n-i)}+b^{(m-i)}}\prod_{i=n+1}^{m}a^{b^{(m-i)}}\prod_{i=1}^{n}E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\right)\prod_{i=n+1}^{m}E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)$$

Por otro lado, para el término $E(X_n)E(X_m)$ bastará considerar la expresión obtenida para la media, es decir:

$$E(X_n)E(X_m) = \left[x_0^{b^n}\prod_{i=1}^{n}a^{b^{n-i}}E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)\right]\left[x_0^{b^m}\prod_{i=1}^{m}a^{b^{m-i}}E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right]$$

$$= x_0^{b^n+b^m}\prod_{i=1}^{n}a^{b^{n-i}}E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)\prod_{i=1}^{m}a^{b^{m-i}}E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)$$

$$= x_0^{b^n+b^m}\prod_{i=1}^{n}a^{b^{n-i}+b^{m-i}}E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\prod_{i=n+1}^{m}a^{b^{m-i}}E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)$$

Denotando A $= x_0^{b^n+b^m}\prod_{i=1}^{n}a^{b^{n-i}+b^{m-i}}\prod_{i=n+1}^{m}a^{b^{m-i}}$

En base a los resultados anteriores se tendrá:

$$\operatorname{Cov}(X_n, X_m) = A\left[\prod_{i=1}^{n}E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\right)\prod_{i=n+1}^{m}E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right.$$

$$\left.-\prod_{i=1}^{n}E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\prod_{i=n+1}^{m}E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right]$$

$$= A\left[\prod_{i=1}^{n}E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\right)-\prod_{i=1}^{n}E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right]\prod_{i=n+1}^{m}E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)$$

$\square$

A partir de los valores de la varianza y la covarianza se podrá obtener una expresión para el coeficiente de correlación de Pearson.

Proposición 3.7. *Sean X_n y X_m sucesiones recursivas estocásticas multiplicativas, con $n,m \in \mathbb{N}$ con $n<m$, el coeficiente de correlación de Pearson asociado a estas variables es:*

$$\rho_{X_n,X_m} = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right] \prod_{i=n+1}^{m} E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)}{\sqrt{\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{2b^{n-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n}\left(E\left(\phi_i^{bn-i}\right)\right)^2\right]\left[\prod_{i=1}^{m} E\left(\phi_i^{2b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{m}\left(E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)\right)^2\right]}}$$

Demostración. En base las expresiones 3.5 y 3.6, se tendrá:

$$\begin{aligned}
\rho_{X_n,X_m} &= \frac{A\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right]}{\sqrt{x_0^{2b^n} \prod_{i=1}^{n} a^{2b^{n-i}} \left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{2b^{n-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n} \Big(E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)^2\right]}} \\
&\quad \frac{\prod_{i=n+1}^{m} E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)}{\sqrt{x_0^{2b^m} \prod_{i=1}^{m} a^{2b^{m-i}} \left[\prod_{i=1}^{m} E\left(\phi_i^{2b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{m} \Big(E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)^2\right]}} = \\
&= \frac{A\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right]}{x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} a^{b^{n-i}} \sqrt{\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{2b^{n-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n} \Big(E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)^2\right]}} \\
&\quad \frac{\prod_{i=n+1}^{m} E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)}{x_0^{b^m} \prod_{i=1}^{m} a^{b^{m-i}} \sqrt{\left[\prod_{i=1}^{m} E\left(\phi_i^{2b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{m} \Big(E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)^2\right]}}
\end{aligned}$$

En base a la definición dada para el término A:

$$A = x_0^{b^n+b^m} \prod_{i=1}^{n} a^{b^{n-i}+b^{m-i}} \prod_{i=n+1}^{m} a^{b^{m-i}}$$

se observa que este puede ser simplificado, resultando la expresión:

$$\rho_{X_n,X_m} = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}+b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)\right] \prod_{i=n+1}^{m} E\left(\phi_i^{b^{m-i}}\right)}{\sqrt{\left[\prod_{i=1}^{n} E\left(\phi_i^{2b^{n-i}}\right) - \prod_{i=1}^{n}\left(E\left(\phi_i^{bn-i}\right)\right)^2\right]\left[\prod_{i=1}^{m} E\left(\phi_i^{2b^{m-i}}\right) - \prod_{i=1}^{m}\left(E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)\right)^2\right]}}$$

□

Capítulo 4

Casos particulares para la distribución de los ruidos

En este capítulo se analizarán algunos casos en los que el ruido tenga una distribución particular, con el fin de determinar el comportamiento asintótico del proceso en función de los parámetros. Sin embargo, debido a la dificultad de calcular dicho comportamiento sobre una distribución, se estudiará sobre la esperanza del mismo.

Asimismo, para comprobar la tendencia de la sucesión $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ se analizará, por simplicidad y gracias a la monotonía de la sucesión, el logaritmo de $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

4.1. Ruido con distribución uniforme [0,2]

Al considerar una sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos con una distribución uniforme [0,2], se puede observar un cierto comportamiento asintótico en función del valor de los parámetros que intervienen, es decir, de a, b y x_0. Se tomará la uniforme $[0,2]$ a fin de no involucrar demasiados parámetros en el análisis y facilitar su ejecución y simulación. Asimismo, se ha escogido este intervalo $[0, 2]$ debido a que la media para una distribución uniforme de este tipo es igual a 1. Por lo tanto, los cálculos asociados a la esperanza de la sucesión en base a la de los ruidos se simplificarán considerablemente. Sin embargo, este estudio es aplicable también a una sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos siguiendo una distribución uniforme $[0, \theta]$. Para ello tan solo sería necesario relacionar el valor de a con el θ en función de las expresiones obtenidas.

A modo de ejemplo de estos diferentes comportamientos, en la Figura 4.1, se puede observar un comportamiento diferente a partir de la simulación de muestras con distintos parámetros a y b, produciéndose en un caso convergencia y en el otro divergencia hacia ∞.

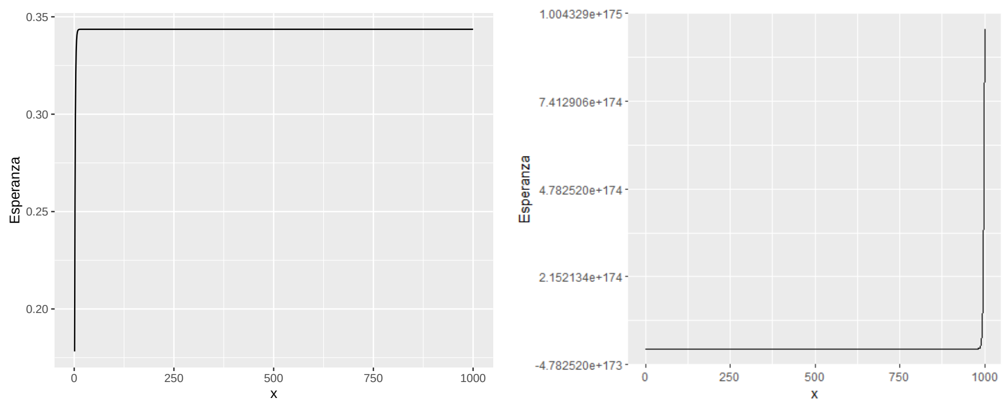


Figura 4.1: Comportamiento de muestras simuladas con $b < 1$ (izquierda) y $b = 1$, $a = 1$ (derecha), para un valor de $x_0 = 0.0775225$.

Como, por simplicidad, se va a estudiar el comportamiento de $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ conviene simplificar su expresión, considerando la expresión para el momento de orden m asociada a la distribución uniforme [0,2] de los ruidos.

Proposición 4.1. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multipli-*

cativa y sean los ruidos ϕ_i variables con una distribución uniforme [0,2], la esperanza de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de la forma:

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(2a)^{b^{n-i}}}{b^{n-i}+1} \right) \tag{4.1}$$

Demostración. Para probar este resultado, basta observar en primer lugar que, debido a la forma de la variable X_n a considerar (3.2), se tiene:

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} \left(a^{b^{n-i}} E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)\right) \tag{4.2}$$

Asimismo, dado que la función de densidad para una distribución uniforme [0,2] es $f(x) = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) = \int_0^2 \frac{\phi_i^{b^{n-i}}}{2} d\phi_i = \frac{2^{b^{n-i}}}{b^{n-i}+1}$$

De modo que considerando 4.2 se obtiene:

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{(2a)^{b^{n-i}}}{b^{n-i}+1} \right)$$

□

En base a la expresión anterior es posible obtener el logaritmo de la misma.

Corolario 4.2. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa y sean los ruidos ϕ_i variables con una distribución uniforme [0,2], el logaritmo de la esperanza de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de la forma:*

$$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = b^n \log(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left(b^{n-i}\log(2a) - \log(b^{n-i}+1)\right) \tag{4.3}$$

Finalmente, como ha sido mencionado, debido a la continuidad y monotonía del logaritmo, mediante el análisis de $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ será posible conocer el comportamiento asintótico de $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 4.3. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos siguiendo una distribución uniforme [0,2]. Entonces:*

- *Si $b < 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.*
- *Si $b > 1$ y*
    - $a \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}\right)^{1-\frac{1}{b}}$, *$(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ diverge hacia ∞.*
    - $a < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}\right)^{1-\frac{1}{b}}$, *$(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*
- *Si $b = 1$ y*
    - *$a > 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ diverge hacia ∞.*
    - *$a = 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.*
    - *$a < 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. En función del valor de b se tendrá:

- Si $b = 1$:

$$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = \log(x_0) + \sum_{i=1}^{n}(\log(2a) - \log(2)) = log(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\log(a)$$

De forma que surgen tres casos en función del valor de a:

- Si $a > 1$: $\lim_{n\to\infty}(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = \infty$
- Si $a = 1$: $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = \log(x_0)$
- Si $a < 1$: $\lim_{n\to\infty}(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = -\infty$

- Si $b > 1$: La expresión 4.3 se puede escribir como:

$$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{b^n\left(\log(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b^i}\log(2a)\right)\right)}_{A} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\log(b^{n-i}+1)}_{B} \tag{4.4}$$

El factor A crece más rápido que el factor B de modo que en primer lugar se analizará la convergencia de este. Si se considera, por tanto, la expresión: $b^n \left(\log(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{b^i}\log(2a)\right)\right)$, del hecho de que $b > 1$ resulta evidente que el término b^n se va a infinito conforme lo hace n. Por lo que el factor restante será el que determine el signo de la tendencia. Se analizará entonces la expresión:

$$\log(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{b^i}\log(2a)\right)$$

Pero:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{b^i}\log(2a)\right)\right) = \log(x_0) + \frac{1}{1-\frac{1}{b}}\log(2a)$$

Existirá, por tanto, un caso crítico que será aquel en el que el factor A es igual a 0, donde la convergencia vendrá determinada por B. Por lo que se tendrán tres casos diferentes, que de nuevo se podrán caracterizar en función del parámetro a:

- <u>$A > 0$:</u> Se cumple si

$$\log(x_0) + \frac{1}{1-\frac{1}{b}}\log(2a) \geq 0 \leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{b}}\log(2a) \geq \log\left(\frac{1}{x_0}\right)$$
$$\leftrightarrow \log(2a) \geq \log\left(\left(\frac{1}{x_0}\right)^{1-\frac{1}{b}}\right)$$

  Por lo que, en función de a, se tendrá $A > 0$ si:

$$a > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}\right)^{1-\frac{1}{b}}$$

  Y bajo esta condición, dado que b^n tiende a infinito, se tiene: $lim_{n\to\infty} \left(\log\left(E(X_n)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$

- $\underline{A < 0}$: De forma análoga al punto anterior, se obtiene que este caso se da bajo la condición:

$$a < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}\right)^{1-\frac{1}{b}}$$

Y en tal caso, como b^n tiende a infinito:

$$lim_{n\to\infty}\left(\log\left(E(X_n)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = -\infty$$

- $\underline{A=0}$: En base a los apartados anteriores resulta evidente que A será igual a 0 cuando se cumpla:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}\right)^{1-\frac{1}{b}}$$

En tal caso se tendrá, debido a la presencia de b^n, una indeterminación del tipo $0{\cdot}\infty$. Sin embargo, operando se puede observar una divergencia positiva. Así pues, sustituyendo este valor de a en A se tendrá:

$$\begin{aligned}
b^n\left(\log(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b^i}\log(2a)\right)\right) &= \\
= b^n\left(\log(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b^i}\log\left(\left(\frac{1}{x_0}\right)^{1-\frac{1}{b}}\right)\right)\right) &= \\
= b^n\left(l\log(x_0) - \frac{b-1}{b}\log(x_0)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b^i}\right)\right) &= \\
= b^n\left(\log(x_0) - \frac{b-1}{b}\log(x_0)\frac{1-b^{-n}}{b-1}\right) &= \\
= b^n\log(x_0)\left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^{n+1}}\right) = \log(x_0)\left(\frac{b^{n+1}-b^n+1}{b}\right)
\end{aligned}$$

Por lo que claramente $b^n \cdot A \to \infty$

- Si $b < 1$: Considerando la expresión 4.3, al tomar $b < 1$, se tiene que el primer término: $b^n\log(x_0)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$. De modo que bastará con analizar el sumatorio. Es decir, habrá que comprobar la convergencia de:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(b^{n-i} \log(2a) - \log(b^{n-i}+1)\right)$$

Pero, $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b^n}{b^i}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(b^i\right)$, de forma que para el primer término del sumatorio se da convergencia, pues:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(b^{n-i} \log(2a)\right) = \log(2a) \sum_{i=0}^{n-1} \left(b^i\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\log(2a) \sum_{i=0}^{n-1} \left(b^i\right) \right) = \frac{\log(2a)}{1-b}$$

Finalmente habrá que comprobar que ocurre con el otro término del sumatorio, es decir con:

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(\log\left(b^{n-i}+1\right)\right)$$

Para ello se verá su convergencia, esto se puede comprobar mediante comparación con otra función. De forma análoga a los pasos anteriores esta serie se puede reescribir como:

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \left(\log\left(b^{i}+1\right)\right)$$

Por otra parte, se tiene que $\log(x+1) < x$, de modo que se podrá considerar:

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \left(\log\left(b^{i}+1\right)\right) < \sum_{i=1}^{n-1} \left(b^i\right)$$

Por lo que tomando ahora el límite infinito para comprobar la convergencia, al ser $|b| < 1$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} -\sum_{i=1}^{n-1} \left(\log\left(b^{i}+1\right)\right) < \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(b^i\right) = \frac{b}{1-b}$$

Es decir, para este caso se dará convergencia.

□

Todos resultados se pueden ver resumidos en la Figura 4.2 , donde la desviación observada procede de la función corte debida al caso b >1, para un x_0 concreto (x_0=2 en el caso expuesto).

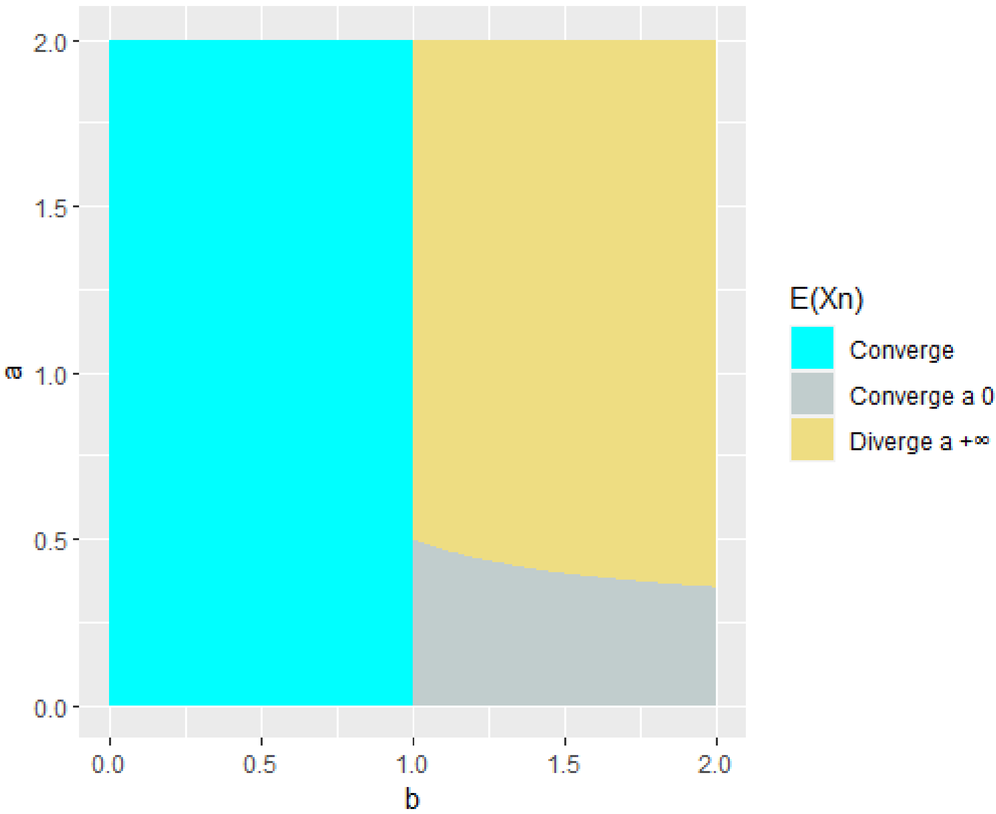


Figura 4.2: Comportamiento de $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en función de b y a para x_0=2.

4.2. Ruido con distribución exponencial (λ)

A continuación se considerará una sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos con distribución exponencial (λ). En el análisis del comportamiento asintótico de la esperanza de este tipo de sucesiones intervendrá ahora un parámetro más que en el caso anterior, el parámetro λ. Por lo tanto habrá que considerar dicho comportamiento en base al valor de a, b, x_0 y λ.

Del mismo modo que para la distribución uniforme $[0, 2]$, en la figura 4.3 se pueden observar diferentes comportamientos para muestras con ruidos de distribución exponencial simuladas a partir de diferentes valores de los parámetros.

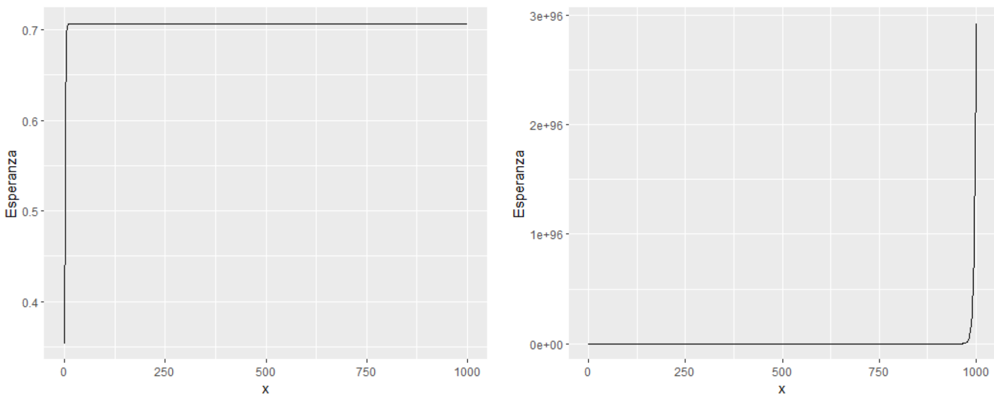


Figura 4.3: Comportamiento de muestras simuladas con $b < 1$ (izquierda) y $b = 1$, $a > \lambda$ (derecha), para $x_0 = 0.453342$ y $\lambda = 2$.

Como se va a realizar el análisis del comportamiento asintótico de la esperanza de la sucesión, conviene conocer la expresión de la misma en base a la esperanza de una distribución exponencial.

Proposición 4.4. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión recursiva estocástica multiplicativa y sean los ruidos* ϕ_i *variables con distribución exponencial* (λ)*, la esperanza de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de la forma:*

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{b^{n-i}} b^{n-i}! \right) \tag{4.5}$$

Demostración. Para obtener la expresión de la proposición basta con considerar la ecuación 3.4. De modo que, como la función de densidad de la distribución exponencial es de la forma $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, se tendrá:

$$E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) = \int_0^{\infty} \phi_i^{b^{n-i}} \lambda e^{-\lambda \phi_i} d\phi_i = \frac{b^{n-i}!}{\lambda^{b^{n-i}}}$$

Por lo tanto, sustituyendo esta expresión en 3.4 se tendrá:

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} \left(a^{b^{n-i}} \frac{b^{n-i}!}{\lambda^{b^{n-i}}}\right) = X_0^{b^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{b^{n-i}} b^{n-i}!\right)$$

$\square$

Sin embargo, de nuevo por simplicidad en los cálculos, se considerará el logaritmo de la esperanza, por lo que será necesario conocer su expresión.

Corolario 4.5. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa y sean los ruidos ϕ_i variables con una distribución exponencial (λ), el logaritmo de la esperanza de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de la forma:*

$$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = b^n \log(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(b^i \log\left(\frac{a}{\lambda}\right) + \log\left(b^i!\right)\right) \tag{4.6}$$

A partir de la expresión dada en este corolario, gracias a la continuidad y monotonía del logaritmo, se podrá analizar el comportamiento asintótico de la esperanza de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obteniendo diferentes casos para la convergencia en función de los distintos parámetros.

Proposición 4.6. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos siguiendo una distribución exponencial (λ), entonces:*

- *Si $b = 1$ y*
  - $a = \lambda$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a x_0.*
  - $a > \lambda$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge hacia ∞.*
  - $a < \lambda$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0.*

- *Si $b < 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

- *Si $b > 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.*

Demostración. La expresión 4.6 depende de 4 parámetros, a, b, x_0 y λ, por lo que habrá que analizar la convergencia de la esperanza en función de los valores de estos. En primer lugar, en función del parámetro b es posible distinguir tres casos:

- Si $b = 1$ entonces el logaritmo de la esperanza será de la forma:

  $$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = \log(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \log\left(\frac{a}{\lambda}\right)$$

  El sumatorio del logaritmo producirá divergencia hacia $\pm\infty$, en función del signo de $\log\left(\frac{a}{\lambda}\right)$, por lo que en función de a se obtienen tres nuevos casos:

  - Si $a = \lambda$, entonces $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = \log(x_0)$ y por lo tanto se da convergencia.
  - Si $a > \lambda$, entonces $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$
  - Si $a < \lambda$, entonces $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty$

- Si $b < 1$, el término $b^n \log(x_0)$ tiende a 0 por lo que bastará con considerar el sumatorio. Este se subdivide en dos sumandos

  - Para $\sum_{i=0}^{n-i} \log(b^i!)$,

    $$\sum_{i=0}^{\infty} |\log(b^i!)| \overset{b\leq 1}{=} \sum_{i=0}^{\infty} -\log(b^i!) \leq \sum_{i=0}^{\infty} -\log\left(\left(b^i\right)^{b^i}\right) =$$
    $$= \sum_{i=0}^{\infty} -b^i \log(b^i) = \sum_{i=0}^{\infty} -ib^i \log(b)$$

De modo que, aplicando el criterio del cociente a esta expresión se tendrá:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{-(i+1)b^{i+1}\log(b)}{-ib^i\log(b)} = \lim_{i\to\infty} \frac{(i+1)b}{i} = b < 1$$

De modo que $\sum_{i=0}^{\infty} \log(b^i!)$ converge absolutamente, por lo tanto converge.

- Para $\sum_{i=0}^{n-1} b^i \log\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ es claro que se da convergencia pues:

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^i \log\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \log\left(\frac{a}{\lambda}\right)\sum_{i=0}^{n-1} b^i \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{a}{\lambda}\right)\sum_{i=0}^{n-1} b^i = \log\left(\frac{a}{\lambda}\right)\frac{1}{1-b}$$

Por lo tanto, dado que todos los términos convergen, se puede concluir que para $b < 1$, $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- Si $b > 1$, se distinguen de nuevo tres casos en función del valor de a:

  - Si $a = \lambda$, entonces:

$$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = b^n \log(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \log(b^i!) \tag{4.7}$$

  Por lo tanto se tendrá, $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$

  - Si $a > \lambda$, además de los términos presentes en 4.7 será necesario considerar también el término $\sum_{i=0}^{n-1} b^i \log\left(\frac{a}{\lambda}\right)$. Sin embargo, como $a > \lambda$, se tendrá $\log\left(\frac{a}{\lambda}\right) > 0$ y, por tanto, el logaritmo de la esperanza cumplirá de nuevo: $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$

  - Si $a < \lambda$, en base a la expresión 4.6, dado que $b^n \log(x_0)$ crece más despacio que el término en el sumatorio, bastará con analizar que ocurre con dicho sumatorio, es decir, se estudiará el comportamiento de

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(b^i \log\left(\frac{a}{\lambda}\right) + \log\left(b^i!\right)\right)$$

Por lo tanto, será necesario determinar cuál es el término dominante en dicha expresión. Pero $\sum_{i=0}^{n-1} b^i \log\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \log\left(\frac{a}{\lambda}\right) \sum_{i=0}^{n-1} b^i$, tomando entonces exponenciales se obtiene:

$$e^{\sum_{i=0}^{n-1}\left(b^i \log\left(\frac{a}{\lambda}\right)+\log\left(b^i!\right)\right)} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(e^{b^i} b^i!\right)$$

Es conocido que $x!$ tiende a infinito más rápido que e^x, por lo tanto, el término en $\log\left(b^i!\right)$ será el que determine el signo de la divergencia. Dado que se está considerando el caso $b > 1$, se tiene por tanto: $\left(\log\left(E(X_n)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$.

$\square$

En la figura 4.4 se puede observar un resumen de los expresado en la anterior proposición, para unos valores de x_0 y λ fijos.

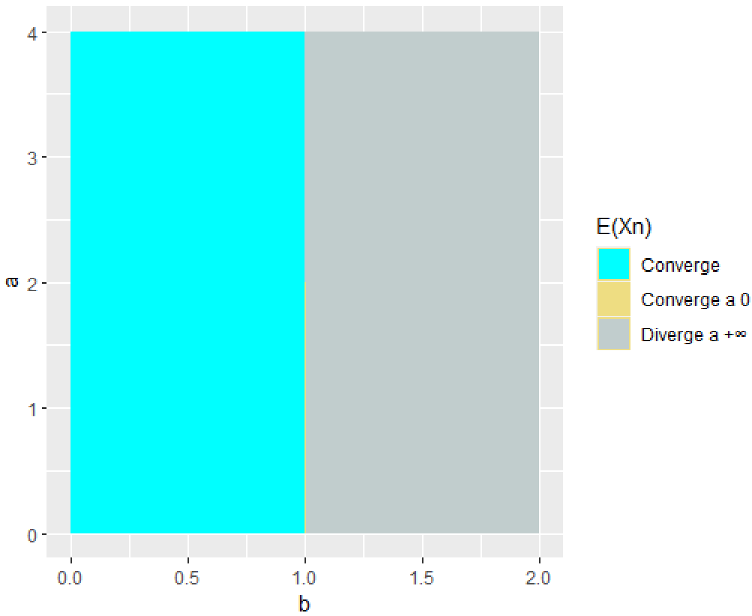


Figura 4.4: Comportamiento de $\left(E(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en función de b y a para $x_0 = \lambda = 2$.

4.3. Ruido con distribución normal-logarítmica (σ, μ)

A continuación, se considerará un caso algo más complejo, el de sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos con distribución normal-logarítmica (σ, μ). En el análisis del comportamiento asintótico de este tipo de sucesiones (o en su defecto de su esperanza), intervendrán, por tanto, cinco parámetros, a, b, x_0, μ y σ. Este caso tendrá especial importancia en el capítulo posterior al poder aplicarse sobre una serie de datos reales.

De forma análoga a lo ocurrido con los casos anteriores, en la figura 4.5 se puede observar, a modo de ejemplo, distintos comportamientos para muestras con ruidos de distribución normal-logarítmica simuladas con diferentes parámetros.

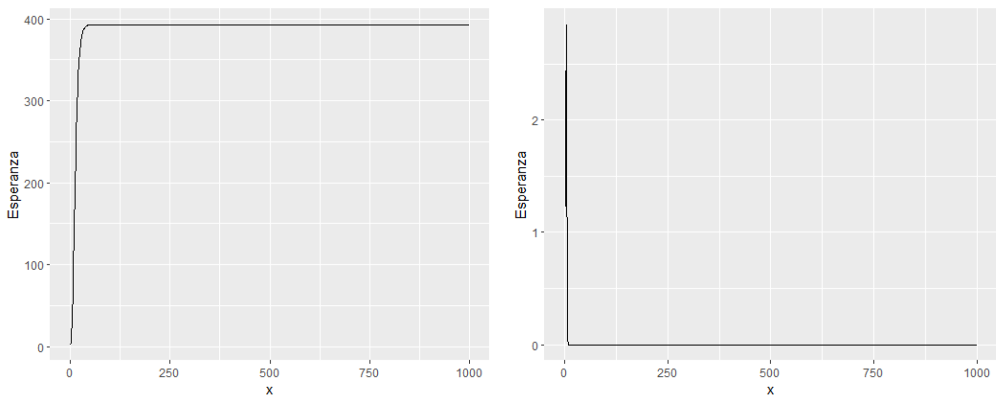


Figura 4.5: Comportamiento de muestras simuladas con $b = a = \mu = \sigma = 0.5$ y $x_0 = 1.02623$ (izquierda) y $b = 1.5$, $a = \mu = \sigma = 0.5$ y $x_0 = 0.6599443$ (derecha).

Dado que el objetivo es, por simplicidad, el estudio de la esperanza de $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$, conviene conocer su expresión en base a la esperanza de un ruido con distribución normal-logarítmica.

Proposición 4.7. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión recursiva estocástica multiplicativa y sean los ruidos* ϕ_i *variables con distribución normal-logarítmica* (σ,μ)*, entonces la esperanza de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de la forma:*

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n}\prod_{i=1}^{n}(ae^{\mu})^{b^{n-i}}\,e^{b^{(n-i)}\sigma^2} \tag{4.8}$$

Demostración. De nuevo, para probar este resultado, basta considerar que debido a la forma de la variable X_n a considerar (3.2), se tiene:

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n}\prod_{i=1}^{n}\left(a^{b^{n-i}}E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right)\right)$$

Para ruidos de distribución normal-logarítmica se tiene:

$$E(\phi_i^n) = e^{n\mu+n^2\frac{\sigma^2}{2}}$$

Por lo que se tendrá:

$$E\left(\phi_i^{b^{n-i}}\right) = e^{b^{n-i}\mu} = e^{b^{n-i}\mu+b^{(n-i)}\sigma^2}$$

Por lo que sustituyendo en 4.3 se obtiene la expresión 4.8. Así:

$$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} = x_0^{b^n}\prod_{i=1}^{n}\left(a^{b^{n-i}}e^{b^{n-i}\mu+b^{(n-i)}\sigma^2}\right) = x_0^{b^n}\prod_{i=1}^{n}(ae^{\mu})^{b^{n-i}}\,e^{b^{(n-i)}\sigma^2}$$

□

Sin embargo, por simplicidad en los cálculos, se considerará el logaritmo de la esperanza, por lo que resulta conveniente conocer su expresión.

Corolario 4.8. *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión recursiva estocástica multiplicativa y sean los ruidos* ϕ_i *variables con una distribución normal-logarítmica* (μ,σ)*, entonces el logaritmo de la esperanza de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de la forma:*

$$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = b^n\log(x_0) + \left(\log(a)+\mu+\sigma^2\right)\sum_{i=1}^{n}b^{n-i} \tag{4.9}$$

En base al corolario anterior, gracias a la continuidad y monotonía del logaritmo, es posible conocer el comportamiento asintótico de la esperanza de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como se podrá comprobar, para ruidos con este tipo de distribución, habrá una gran cantidad de casos debido a la dependencia de cinco parámetros.

Proposición 4.9. *Sea $(X_n)_{n\in N}$ una sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos siguiendo una distribución normal-logarítmica (μ, σ), entonces:*

- *Si $b = 1$ y*
  - *Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) > 0$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.*
  - *Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) < 0$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*
  - *Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) = 0$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.*
- *Si $b > 1$ y*
  - *$x_0 < 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*
  - *$x_0 > 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.*
  - *$x_0 = 1$, se dan tres nuevos casos:*
    - *Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) > 0$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.*
    - *Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) < 0$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*
    - *Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) = 0$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.*
- *Si $b < 1$, $(E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $e^{\frac{log(a)+\mu+\sigma^2}{1-b}}$.*

Demostración. La expresión a considerar depende de cinco parámetros, μ, σ, x_0, a y b, por lo que serán varios los casos a valorar. Para la simplificación de este análisis se definirán dos términos, en base a 4.9, de modo que se considera:

$$A = b^n \log(x_0) \qquad\qquad B = \left(\log(a) + \mu + \sigma^2\right) \sum_{i=1}^{n} b^{n-i}$$

Para el análisis de los distintos casos, en primer lugar, en función del parámetro b es posible distinguir tres casos que afectarán de forma diferente al comportamiento de la sucesión:

- Si $b = 1$:

  $$(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} = log\,(x_0) + n\left(\log(a) + \mu + \sigma^2\right)$$

  De modo que se obtienen tres posibles casos:

  - Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) > 0$, $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$.
  - Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) < 0$, $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} \to -\infty$.
  - Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) = 0$, $(\log(E(X_n)))_{n\in\mathbb{N}} \to \log(x_0)$.

- Si $b > 1$: Si se considera en 4.9, es claro que:

  - Para A: El término $b^n \to \infty$, por lo tanto A tenderá a $\pm\infty$ en función del valor de x_0. Así,
    - Si $x_0 < 1$, entonces A$\to -\infty$
    - Si $x_0 > 1$, entonces A$\to \infty$
    - Si $x_0 = 1$, entonces A $= 0$
  - Para B: El término $\sum_{i=1}^{n} b^{n-i}$ también diverge hacia infinito, pues:

    $$\lim_{n\to\infty} b^n \sum_{i=1}^{n} b^{-i} = \lim_{n\to\infty} b^n \frac{1}{b-1} = \infty$$

    Por lo tanto B tenderá a $\pm\infty$ en función del valor de μ, σ y a. De modo que, al igual que para $b = 1$ se pueden definir tres casos:

- Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) > 0$, $(\log(E(X_n)))_{n \in \mathbb{N}} \to \infty$.
- Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) < 0$, $(\log(E(X_n)))_{n \in \mathbb{N}} \to -\infty$.
- Si $(\log(a) + \mu + \sigma^2) = 0$, $(\log(E(X_n)))_{n \in \mathbb{N}} \to \log(x_0)$

Pero A crece más rápido, por lo que será el término dominante, y por tanto solo habrá que considerar el análisis de B en el caso $A = 0$.

- Si $b < 1$:

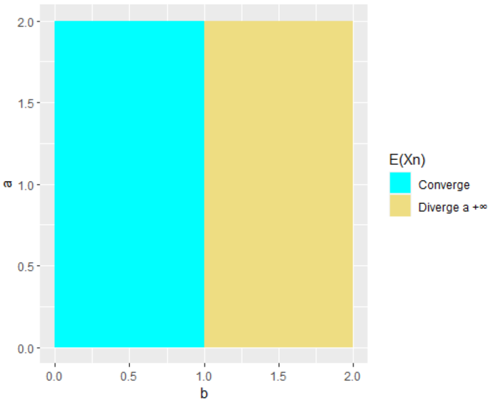
  Es claro que para este caso el término A tiende a cero. Bastará, por tanto, con analizar que ocurre para el término B. Así pues, considerando que $b < 1$, se tendrá la igualdad $\sum_{i=1}^{n} b^{n-i} = \frac{b^n - 1}{b-1}$.

  Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se tendrá: $\frac{b^n-1}{b-1} = \frac{1}{1-b}$.

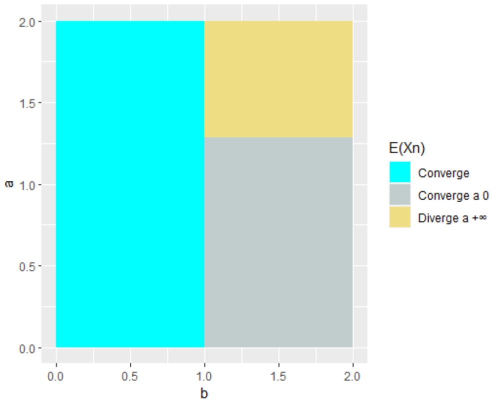
  Por lo tanto en este caso, $(\log(E(X_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\frac{log(a)+\mu+\sigma^2}{1-b}$

$\square$

En la figura 4.6, se puede observar un resumen del comportamiento de $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ para diferentes parámetros en base a lo visto en la Proposición 4.9. Así, para $\mu = \sigma = 0.5$ y $x_0 = 2$, se tienen únicamente dos casos convergencia o divergencia a ∞ (a). Sin embargo, para $\mu = -0.5$, $\sigma = 0.5$ y $x_0 = 1$, dado que se anula el término A, surgen más casos, tal y como se observa en (b).



(a) $\mu = \sigma = 0.5$ y $x_0 = 2$



(b) $\mu = -0.5$, $\sigma = 0.5$ y $x_0 = 1$

Figura 4.6: Comportamiento asintótico de $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ para distintos parámetros.

Capítulo 5

Aplicación del proceso a datos de caudal fluvial

Los resultados obtenidos en los capítulos anteriores son puramente teóricos. Sin embargo, este capítulo se centrará en un ejemplo de aplicación del tipo de procesos estudiados a datos reales.

De este modo, a partir de una muestra de datos iniciales, es posible estimar los parámetros a y b para la sucesión recursiva estocástica multiplicativa. A partir de ellos se podrá obtener una estimación de los datos futuros en función de diferentes condiciones sobre los datos iniciales, mediante simulaciones en base a la definición recursiva y establecer un intervalo de confianza para el máximo, el mínimo y la media de los resultados futuros.

Un ejemplo de aplicación de estos resultados se puede observar a partir de la serie de datos del conjunto *datasets* de R. Se probará en este caso con la serie de datos *Nile*, que se puede observar en la Tabla 5.1.

	Años	Caudal	Años	Caudal	Años	Caudal	Años	Caudal
1	1871	1120.00	1896	1220.00	1921	768.00	1946	1040.00
2	1872	1160.00	1897	1030.00	1922	845.00	1947	860.00
3	1873	963.00	1898	1100.00	1923	864.00	1948	874.00
4	1874	1210.00	1899	774.00	1924	862.00	1949	848.00
5	1875	1160.00	1900	840.00	1925	698.00	1950	890.00
6	1876	1160.00	1901	874.00	1926	845.00	1951	744.00
7	1877	813.00	1902	694.00	1927	744.00	1952	749.00
8	1878	1230.00	1903	940.00	1928	796.00	1953	838.00
9	1879	1370.00	1904	833.00	1929	1040.00	1954	1050.00
10	1880	1140.00	1905	701.00	1930	759.00	1955	918.00
11	1881	995.00	1906	916.00	1931	781.00	1956	986.00
12	1882	935.00	1907	692.00	1932	865.00	1957	797.00
13	1883	1110.00	1908	1020.00	1933	845.00	1958	923.00
14	1884	994.00	1909	1050.00	1934	944.00	1959	975.00
15	1885	1020.00	1910	969.00	1935	984.00	1960	815.00
16	1886	960.00	1911	831.00	1936	897.00	1961	1020.00
17	1887	1180.00	1912	726.00	1937	822.00	1962	906.00
18	1888	799.00	1913	456.00	1938	1010.00	1963	901.00
19	1889	958.00	1914	824.00	1939	771.00	1964	1170.00
20	1890	1140.00	1915	702.00	1940	676.00	1965	912.00
21	1891	1100.00	1916	1120.00	1941	649.00	1966	746.00
22	1892	1210.00	1917	1100.00	1942	846.00	1967	919.00
23	1893	1150.00	1918	832.00	1943	812.00	1968	718.00
24	1894	1250.00	1919	764.00	1944	742.00	1969	714.00
25	1895	1260.00	1920	821.00	1945	801.00	1970	740.00

Tabla 5.1: Datos del caudal del río Nilo (Años 1871-1970)

Esta serie de datos proporciona las medidas anuales del caudal medio del río Nilo en Aswan (Egipto), desde el año 1871 hasta el 1970. Este es un ejemplo de interés en cuanto a la predicción de valores futuros, destacando el establecimiento de un intervalo de confianza para el máximo que podría ser estudiado para la prevención de inundaciones o desbordamientos del río o, en su defecto, del mínimo, en el caso de que se puedan producir sequías.

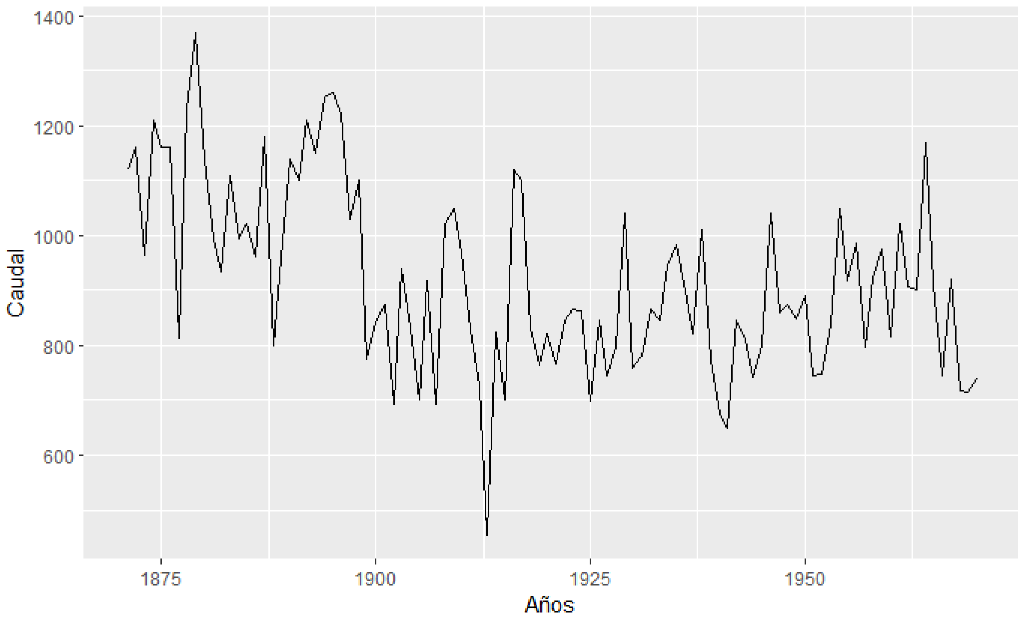


Figura 5.1: Caudal del río Nilo (Años 1871-1970).

En primer lugar, se toman los 70 primeros años para estimar los parámetros a y b adecuados para la expresión de la sucesión recursiva estocástica multiplicativa. Los 30 últimos años se reservarán para comprobar si esta estimación produce una buena aproximación de lo sucedido posteriormente.

Para ello, en primer lugar se ha realizado la estimación de dichos parámetros a y b. Esto se hace de manera numérica a partir de la función *optim* implementada en R, minimizando la expresión:

$$\sum_{k=1}^{n}(a \cdot X_{k-1}^{b} - X_k)^2 \tag{5.1}$$

Donde n es el 70 % de la longitud de la serie de datos original.

Los resultados obtenidos de esta parametrización son de **$\hat{a}$=26.16553** para a y de **$\hat{b}$=0.5233133** para b.

Con estos valores es posible obtener los ruidos de la serie, en base a la propia definición de sucesión recursiva estocástica multiplicativa. Es decir mediante la expresión:

$$\hat{\Phi}_n = \frac{X_n}{\hat{a}X_{n-1}^{\hat{b}}} \tag{5.2}$$

Donde X_n y X_{n-1} serán los valores de la serie real de datos.

Además al considerar la definición de sucesión recursiva estocástica multiplicativa, por hipótesis se considera la independencia de los ruidos, por lo que conviene realizar un test de aleatoriedad para saber si es posible aplicar los resultados estudiados. Para ello se realiza el test de rachas, comprobando así si se pueden considerar condiciones de aleatoriedad. Esto se realiza definiendo una variable factor que asigne un valor a aquellos ruidos menores que la mediana y otro a los mayores. Aplicando a esto la función *runs.test* del paquete *tseries* se obtiene un p-valor de **0.2742**. Al considerar un nivel de significación de 0.05 y dado el p-valor obtenido, como este es mayor que el nivel de significación, no se rechaza la hipótesis de aleatoriedad, por lo que efectivamente es razonable asumir la independencia de los ruidos obtenidos.

Posteriormente, es necesario comprobar si existe alguna distribución conocida asociada a dichos ruidos. En este caso, se considera la distribución normal-logarítmica. Para corroborar que la elección de esta distribución es válida, se realiza un test de Shapiro-Wilk sobre el logaritmo de la serie de ruidos, obteniendo un p-valor de **0.191**. Se trabaja con un nivel de significación de 0.05, por lo que al obtener dicho p-valor, como este no es menor que 0.05, no se rechaza la hipótesis de normalidad. Por ello, al tratarse del logaritmo de los ruidos, es razonable asumir la log-normalidad.

Por lo tanto, se concluye que se puede asumir la independencia y log-normalidad de los ruidos. Por lo que los datos de la muestra están bajo las condiciones planteadas en la definición de una sucesión recursiva estocástica multiplicativa con ruidos de distribución normal-logarítmica (caso estudiado teóricamente en la sección 4.3).

Con el objetivo de comparar los posibles resultados obtenidos a partir de la introducción de ruidos aleatorios con distribución normal-logarítmica con los datos reales, se realiza una simulación de 10^5 series, en base a la expresión recursiva, para los 30 últimos años. Tomando los máximos de estas series, se puede realizar un intervalo de confianza con nivel de confianza del 95 % asociado a los valores del máximo más cercanos a cero, suponiendo que las estimaciones a y b son iguales a los valores poblacionales. El resultado obtenido es $(-\infty, \mathbf{1653}]$. Por tanto, el límite superior del intervalo es mayor que el observado en la serie (**1170**), por lo que todos los valores de la serie original se encontrarán dentro del intervalo de confianza. [Figura 5.2]

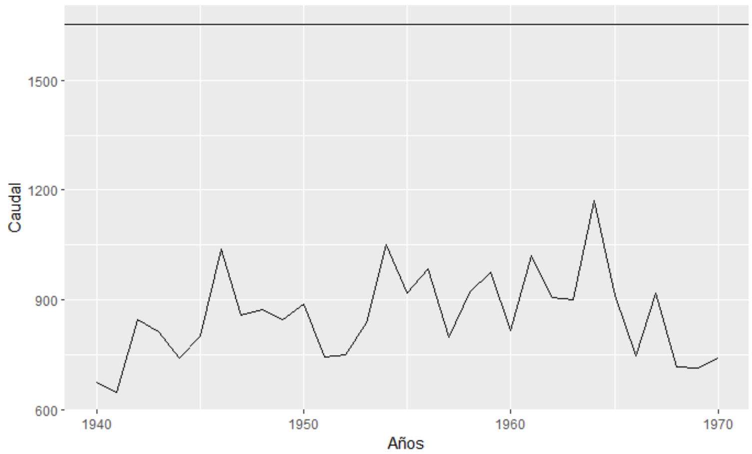


Figura 5.2: Intervalo de confianza para el máximo en el 30 % final de los datos.

Sin embargo, este intervalo de confianza depende del número de valores (en este caso años) considerado, de modo que aumenta cuantos más valores se consideren, con una aparente estabilización cuanto mayor es la cantidad de tiempos considerados. [Figura 5.3]

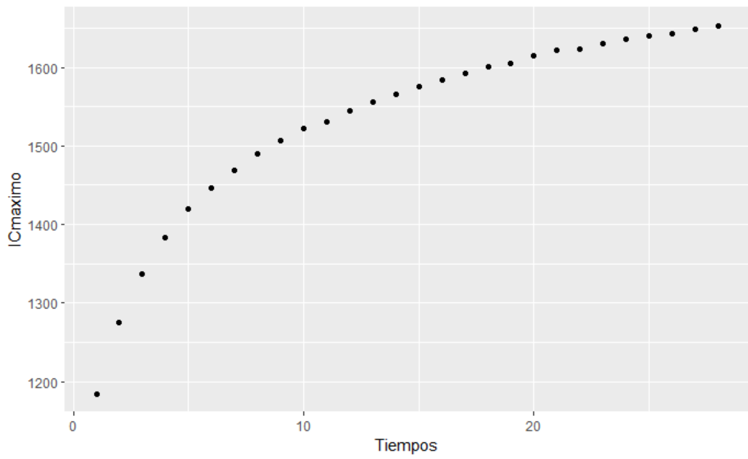


Figura 5.3: Dependencia del intervalo de confianza para el máximo con el número de tiempos considerados.

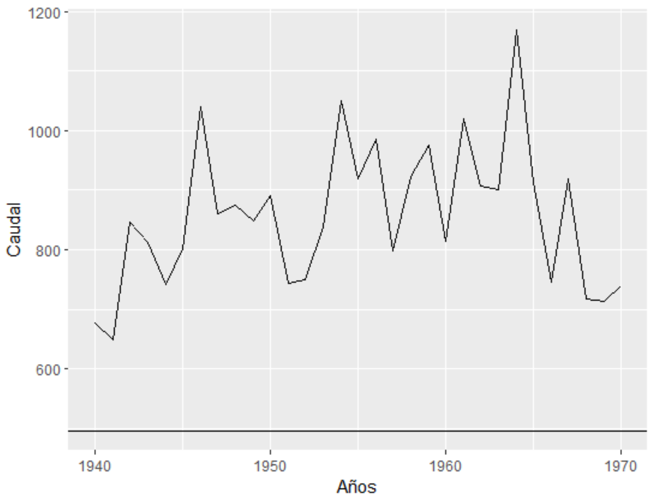


Figura 5.4: Intervalo de confianza para el mínimo en el 30 % final de los datos.

Asimismo, si se consideran los mínimos de la serie, es posible realizar un nuevo intervalo de confianza. Se obtiene así un intervalo para la cola superior, tal y como se muestra en la Figura 5.4, de $[\mathbf{496.0638}, \infty)$. Además, el mínimo real de los datos es **649**, por lo que todos los valores de la muestra están dentro del intervalo de confianza.

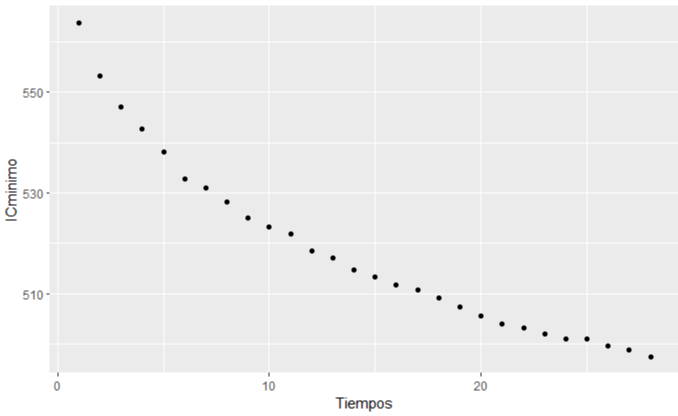


Figura 5.5: Dependencia del intervalo de confianza para el mínimo con el número de tiempos considerados.

Como cabría esperar, este intervalo de confianza depende también del número de valores (años) considerado.[Figura 5.5]

Finalmente, considerando que estamos en las condiciones de la sección 4.3 y dado que el parámetro b es menor que 1, aplicando la proposición 4.9 se espera una convergencia de la esperanza. Si se establece un intervalo de confianza centrado para la media, se puede ver que efectivamente se da cierta tendencia a la estabilización conforme se aumenta el número de años considerados. [Figura 5.6]

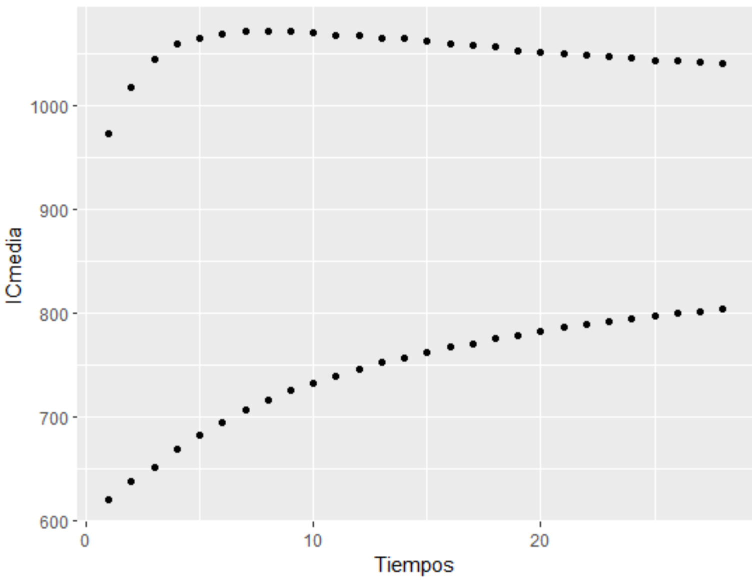


Figura 5.6: Intervalo de Confianza para la media.

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo se ha centrado en el estudio de una sucesión recursiva estocástica multiplicativa de la forma

$$X_n = aX_{n-1}^b \phi_n \, .$$

Este tipo de sucesiones se caracterizan fundamentalmente por la distribución de los ruidos multiplicativos. Independientemente de la distribución del ruido multiplicativo, se ha podido probar de forma general que estas sucesiones cumplen la propiedad de Markov. A su vez se han obtenido también expresiones para el momento de orden m y para la varianza, covarianza y coeficiente de correlación de Pearson.

A continuación, se ha realizado un estudio detallado del comportamiento asintótico de la media para ruidos con distribución uniforme [0,2], con distribución exponencial (λ) y con distribución normal-logarítmica (μ, σ). De este análisis se puede extraer, como conclusión, que para valores $b < 1$, en estos tres casos, siempre se da convergencia.

Finalmente, se ha comprobado que es posible aplicar estos resultados a un caso real, la fluctuación en el caudal del río Nilo. Para ello, mediante herramientas estadísticas se ha comprobado si la sucesión recursiva multiplicativa resulta un modelo razonable para esta serie de datos. Una vez que este análisis ha sido favorable, se han construido intervalos de confianza para el máximo, el mínimo y la media, obteniendo intervalos dentro de los cuáles se hallan los valores observados.

De este modo, se han logrado los objetivos inicialmente planteados, consiguiendo una sucesión recursiva estocástica multiplicativa que cumple ciertas propiedades y además puede ser empleada como modelo teórico para algún conjunto de datos reales.

Bibliografía

[1] Aleksandr Alekseevich Borovkov. *Probability Theory*. CRC Press, Boca Ratón, EEUU, 1999.

[2] Alexander Alekseevich Borovkov and Sergei Georgievich Foss. Stochastically recursive sequences and their generalizations. *Limit theorems for random processes and their applications (Russian)*, 20:32–103, 1993.

[3] Gareth O Roberts and Jeffrey S Rosenthal. One-shot coupling for certain stochastic recursive sequences. *Stochastic processes and their applications*, 99(2):195–208, 2002.

[4] François Baccelli and Zhen Liu. On a class of stochastic recursive sequences arising in queueing theory. *The Annals of Probability*, 20:350–374, 1992.

[5] Eitan Altman. Stochastic recursive equations with applications to queues with dependent vacations. *Annals of Operations Research*, 112(1-4):43–61, 2002.

[6] Yuri Suhov and Mark Kelbert. *Probability and Statistics by Example*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2005.

[7] V K Rohatgi and Ehsanes Saleh. *An Introduction to Probability and Statistics*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2015.

[8] Zofia Hanusz, Joanna Tarasinska, and Wojciech Zielinski. Shapiro–Wilk test with known mean. *REVSTAT-Statistical Journal*, 14(1):89–100, 2016.

[9] Peter C O'Brien and Peter J Dyck. A runs test based on run lengths. *Biometrics*, 41:237–244, 1985.

[10] Ana María Lara Porras. Tema 8. tests de hipótesis. *Repositorio Institucional de la Universidad de Granada*, page 304, 2014.

[11] Konrad Knopp. *Theory and Application of Infinite Series.* Courier Corporation, Chelmsford, EEUU, 1990.

[12] George Marsaglia and John CW Marsaglia. A new derivation of Stirling's approximation to n! *The American Mathematical Monthly*, 97(9):826–829, 1990.

[13] Sever S Dragomir, Ravi P Agarwal, and Neil S Barnett. Inequalities for beta and gamma functions via some classical and new integral inequalities. *RGMIA Research Report Collection*, 2(3), 1999.