



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN FILOSOFÍA

DAVID HILBERT Y LOS *FUNDAMENTOS DE LA*
GEOMETRÍA

AUTOR: Pablo García Nicieza

TUTOR: David Alvargonzález Rodríguez

Curso académico: 2019-2020

-Índice

Resumen: 1

Introducción: 1-3

1.Contextualización histórica: 3

1a) Los orígenes de la geometría: Los *Elementos* de Euclides: 3-15

1b) La geometría proyectiva, el auge del método analítico y la fundamentación espacial de la geometría: la concepción kantiana y su influencia en la comunidad científica y filosófica: 15-20

1c) El surgimiento de las geometrías no-euclidianas y la pérdida de vigor de la fundamentación kantiana: el paradigma científico en que se desarrolla Hilbert: 20-25

2. David Hilbert y los fundamentos de la geometría: el formalismo geométrico: la concepción temprana: 25-27

2a) Juventud y primeras contribuciones al campo de las matemáticas. Las notas de su curso sobre geometría proyectiva, la conferencia de Wiener de 1891 y su influencia sobre Hilbert: 27-38

2b) Consolidación de la concepción temprana de la geometría: la influencia de M. Pasch en Hilbert: 38-41

3) Fundamentos de la geometría: 41

3a) Exposición de los contenidos: los precedentes del formalismo matemático: 41-60

3b) Recepción de la obra: la confrontación con Frege: 60-63

3c) El fin de un periodo: 63

4. Breve reflexión final: 63-67

Bibliografía: 67-68

-Resumen: El presente trabajo tiene como objetivo indagar en el desarrollo de la concepción temprana de las matemáticas de uno de los principales representantes de dicha ciencia: David Hilbert. Concretamente, nos centraremos en sus contribuciones al campo de la geometría, realizando una revisión genealógica de los eventos y autores que influyeron de manera decisiva en la concepción que el matemático alemán mantuvo durante sus primeros años. Es así que, nuestro estudio, pretende abarcar tan solo la primera etapa de su pensamiento, culminando con un análisis de la que sería considerada su obra más importante sobre esta disciplina: “Fundamentos de la geometría”, así como con una exposición superficial de la recepción de dicha obra por parte de uno de los filósofos de los matemáticos más importantes de su tiempo, Gottlob Frege, y la oposición que presentó ante la nueva concepción formalista de la geometría presente en la obra. Con esto, pretendemos dar cuenta, no solo de las ideas manejadas por Hilbert en dicha obra, sino también del proceso de conformación de su concepción temprana de esta disciplina, que sentó las bases teóricas para el formalismo matemático que posteriormente desarrollaría en su totalidad, pues en la época de la que trata nuestro estudio, aún no se encontraba del todo definido. Por ello, aparte de una contextualización histórica, que nos permitirá hacernos una idea general de la historia de la geometría y comprender mejor las innovaciones introducidas por Hilbert, así como aquellas ideas que habría extraído de la tradición, veremos a su vez en qué matemáticos se habría inspirado para desarrollar gran número de las tesis que acabaría por defender en sus “Fundamentos de la geometría”, tratando las ideas de dicho autor sobre esta ciencia, no de manera aislada e hipostasiada, sino en estrecha relación con su contexto histórico y los eventos acaecidos en éste, viendo como determinaron de manera sustancial la producción de la obra anteriormente mencionada.

-Introducción: Se dice que, grabadas sobre la entrada de la academia platónica, podían leerse las siguientes palabras: *ἀγεωμέτρητος μὴ εἰσίτω* (No entre quien no sepa geometría). Con esto, podemos ver que ambas disciplinas, filosofía y geometría, se encontraban estrechamente ligadas ya desde sus orígenes, siendo la segunda el canon de racionalidad elegido para la construcción de múltiples sistemas filosóficos, como la célebre *Ética* de Spinoza, la cual se encuentra organizada *more geometrico*.

En este trabajo, nos centraremos en la concepción temprana que David Hilbert tuvo de dicha disciplina científica, poniendo como evento culminante la publicación en 1889 de sus “Fundamentos de la geometría”, obra que supondría el tratamiento más sistemático y riguroso que habría realizado en esta rama de las matemáticas. Trataremos de comprender adecuadamente la concepción temprana que Hilbert mantuvo sobre la geometría, en base a las modificaciones que ésta supone respecto a las concepciones clásicas, ofreciendo en primer lugar un repaso del desarrollo histórico de esta ciencia, centrándonos en aquellos puntos que consideremos de mayor relevancia para comprender las innovaciones introducidas por Hilbert en la obra anteriormente mencionada. En primer lugar, expondremos los rasgos característicos del sistema geométrico desarrollado por Euclides de Alejandría, el cual abarcó durante más de un milenio prácticamente la totalidad del campo de la geometría, para posteriormente, contraponer alguno de ellos con los presupuestos del sistema desarrollado por Hilbert en 1889, pudiendo apreciar así la evolución que habría experimentado dicha disciplina desde su desarrollo en la Grecia clásica hasta principios del siglo XX. Nuestro repaso por la historia de dicha disciplina no se limitará únicamente a tratar los avances e innovaciones específicas en el campo de la geometría, viendo los cambios en los métodos empleados por los matemáticos para tratar problemas de este tipo, sino que en paralelo, iremos viendo qué concepción se tenía de dicha disciplina a medida que ésta se iba desarrollando y de qué manera se interpretaba; dicho de otra forma, también haremos un breve repaso de la historia de la filosofía de la geometría, prestando especial atención a la caracterización kantiana de dicha ciencia, debido a la amplia influencia que ésta tuvo en toda la comunidad de filósofos y matemáticos.

Una vez terminado este repaso histórico, que usaremos a modo de prolegómeno para los ulteriores contenidos del trabajo, pasaremos a adentrarnos en la concepción hilbertiana de la geometría en su primera etapa, procediendo de manera semejante a la primera parte del trabajo. En un primer momento, ofreceremos un estudio genealógico del pensamiento de Hilbert, viendo como este evoluciona desde sus primeros años como profesor, hasta que cristaliza en la que quizás sea su obra más conocida y que supondrá el punto de mayor relevancia de este trabajo: “Fundamentos de la geometría”. Expondremos sus contenidos en profundidad, para ver la nueva organización axiomática que el matemático alemán le otorga a esta disciplina, haciendo especial hincapié en los aspectos de mayor calaje filosófico y la contraponemos a la propuesta por Euclides

siglos atrás, así como haremos una breve mención a la polémica que mantuvo con uno de los filósofos más reconocidos en su tiempo, Gottlob Frege, acerca de la concepción formalista que Hilbert habría propuesto en dicha obra. Trataremos de poner de manifiesto los rasgos distintivos que dicha caracterización de la geometría tendría con las precedentes, expuestas con anterioridad en el primer apartado del trabajo. Finalmente, terminaremos con una breve reflexión acerca de las innovaciones introducidas por Hilbert en dicha rama de las matemáticas y su influencia posterior en los ámbitos de la filosofía y las matemáticas.

a) Los orígenes de la geometría: Los *Elementos* de Euclides

Uno de los problemas iniciales con el que nos encontramos al comenzar este trabajo, y que está presente siempre que se trata de realizar un estudio acerca de la evolución de una disciplina científica, consiste en determinar cuando surge dicha disciplina, como se produce su génesis. La respuesta a este interrogante dependerá de las coordenadas desde las que uno haga su trabajo y de los presupuestos filosóficos y metodológicos que emplee.

Para poder ofrecer una respuesta adecuada a la cuestión de la génesis de la geometría, deberíamos plantear a su vez una teoría de la ciencia que nos especificase que criterios de demarcación debemos emplear para determinar si una disciplina es o no científica. Pero hacer tal cosa, volvería nuestro trabajo demasiado largo, saliéndonos de las competencias de este, además de que la cuestión aún sigue siendo objeto de debate. Ya entre los grandes imperios fluviales puede encontrarse algún desarrollo que posteriormente pasaría a formar parte de la geometría. De este modo, se tiene constancia que ya en Mesopotamia, durante el periodo babilónico, se conocía la relación pitagórica, la semejanza de triángulos y la proporcionalidad en los lados correspondientes en triángulos semejantes, además de haber aproximado el valor de π a $3+1/8$ (Kline, 1992: 29); o ya en el papiro de Rhind, datado en el 2.000 a.C, se puede encontrar una determinación bastante precisa de π como $(8d/9)^2$, donde d sería la longitud de una circunferencia dada, así como parece haber numerosos indicios de que los mesopotámicos conocían la proporcionalidad entre triángulos, lo cual implicaría necesariamente conocer el teorema de Tales (Kline, 1992: 36-43). Las labores de agrimensura y roturación de terrenos en las primeras civilizaciones agrarias parecen haber sido determinantes en el surgimiento de dicha disciplina, si bien este asunto, tal

como hemos indicado, rebasa las competencias del presente trabajo, así como no lo consideramos de especial relevancia para su temática principal.

Lo que debemos destacar de lo anteriormente mencionado es que los desarrollos geométricos llevados a cabo en estos territorios, no pasaban de la construcción de una serie de teoremas aislados, derivados de los diferentes trabajos y actividades prácticas necesarias en aquel tiempo, no llegando a constituir una disciplina concreta y diferenciada, ni tampoco llegaban a ser organizados sistemáticamente, de modo que estuviesen interrelacionados entre sí. Es por ello que para evitar la problemática cuestión de los orígenes de la geometría, hemos decidido tomar como punto de partida en nuestro trabajo la obra que, históricamente, ha tenido más relevancia en esta rama de las matemáticas: Los “Elementos”, de Euclides de Alejandría. Trataremos de ofrecer una presentación detallada de la geometría euclídea, sus presupuestos y sus principales características, con el objetivo de posteriormente contraponerla a la geometría hilbertina, viendo así la evolución experimentada por dicha disciplina hasta finales del siglo XIX.

Al partir nuestro trabajo de dicha obra, ponemos el foco de estudio en la Grecia clásica y en el modo en que se realizaba la geometría en aquel tiempo. Por aquel entonces, la geometría tenía como objetivo el estudio de las distintas propiedades métricas de determinadas figuras geométricas, generalmente mediante la determinación de las relaciones existentes entre las longitudes de los lados y de los ángulos de diferentes triángulos, así como de otra clase de polígonos (Dubrovin, Fomenko, Nóvikov, 1998). Figuras tales como rectas, planos, triángulos o poliedros, así como ángulos, áreas y volúmenes, constituían el campo de estudio de la geometría clásica. Los elementos que componían este campo tenían un origen empírico (Giovannini, 2018); esto es, nociones como la de recta estaban basadas en elementos captados por los sentidos; en concreto, las representaciones más comunes que los antiguos griegos se hacían de dicha figura geométrica eran las de un hilo tenso, un rayo de luz y la de un eje (Müller en Euclides, 2000: 7). De esta clase de objetos cotidianos, se derivarían las nociones geométricas que hemos mencionado con anterioridad. El proceso de derivación por el cual se llegaron a constituir dichos términos específicos del campo de la geometría, pese a ser un tema de gran interés, también se escapa de los objetivos del presente trabajo; pero merece la pena destacar artículo “Sobre el origen de la geometría”, de Edmund Husserl, quien fue matemático antes que filósofo, donde

especula con la idea de una progresiva abstracción de los elementos presentados en un plano fenoménico, tales como la cuerda tensada, hasta llegar a la construcción de conceptos idealizados o de *objetividades ideales*, que acabarían por constituir el campo de estudio de la geometría (Husserl, 1939: 365-368). Dicha tesis resulta de interés, pues presenta grandes analogías con la postura que Hilbert mantenía durante sus primeras contribuciones a esta ciencia, como puede verse al revisar sus notas de clase sobre geometría proyectiva impartidas en 1891. “La geometría más antigua surge también de la intuición de los objetos en el espacio [...] en un comienzo se planteó problemas de necesidad práctica y se basó en el experimento más simple que se puede hacer, es decir, dibujar” (Hilbert en Giovannini, 2015: 21). Previamente a la composición de los “Elementos”, hemos visto que ya existían numerosos teoremas dispersos que pasarían a formar parte del campo de la geometría, y lo mismo ocurría en la Grecia clásica antes de la obra de Euclides, pues teoremas como el de Tales o el de Pitágoras ya existían con anterioridad a su inclusión en dicho tratado geométrico. Así pues, debemos preguntarnos qué es lo que vuelve a dicha obra tan importante como para considerarse, si no la madre de la geometría, si al menos la obra que marco su rumbo durante más de un milenio.

El principal aspecto que debemos destacar de dicha obra sería que ésta se encuentra organizada formando un sistema axiomático. Por sistema axiomático, entendemos un conjunto de proposiciones entre las cuales, existen unas que son consideradas primitivas o inmediatas; esto es, que no requerirían demostración previa, siendo tomadas directamente como verdaderas, las cuales serían denominadas con posterioridad axiomas y de las cuales se derivan, por métodos silogísticos y finitos, diferentes conclusiones, que serían los múltiples teoremas que constituyen el campo de la geometría. Esta la principal contribución de Euclides a dicha ciencia, habría sido organizar ese conjunto disperso de teoremas, que habían ido surgiendo por necesidades técnicas y empíricas, en torno a una serie de principios básicos, elementales, de los cuales podían derivarse recurriendo a inferencias lógicas y a cálculos silogísticos.

Aunque el geómetra alejandrino no fue pionero a la hora de introducir este modelo de organización teórica, pudiendo encontrarlo en geómetras anteriores, tales como Hipócrates de Quios o Teudio de Magnesia, el sistema axiomático euclídeo acabó siendo el más difundido y el que determinó el curso ulterior de la geometría, pues en él, en palabras de Proclo, “todas las virtudes del género hallan su cima y perfección”

(Proclo en Euclides, *Elementos*: XXIII). Esta idea, la de sistema axiomático, será uno de los puntos principales del trabajo, sirviendo como elemento de unión entre la concepción de la geometría euclídea y hilbertiana.

De esta forma, Euclides estableció una serie de definiciones y proposiciones elementales, a partir de las cuales fue derivando, mediante deducciones e inferencias lógicas, diferentes propiedades de las figuras geométricas con las que se trabajaba en la antigüedad, ya sean estas planas (libros I-IV) o sólidas (libros XI-XIII). El término “elemento” (*στοιχείον*) ha tenido varios significados dentro de la geometría, a menudo, variando entre una referencia a los teoremas (*θεώρημα ατος*) o a los principios (*ἀρχή*) de dicha disciplina, no existiendo consenso a la hora de determinar una acepción generalizada que dicho término tendría de la obra de Euclides. Proclo, en sus “Comentarios”, señala diversas acepciones del término, concluyendo que el significado que más se ajusta a los elementos que constituyen la obra de Euclides es aquel que los entiende como un conjunto de proposiciones básicas o axiomáticas; esto es, intuitivamente validas y por tanto, que no requieren de demostración previa para afirmar su validez, sirviendo de base para, a partir de ellos, ir construyendo un conjunto sistemático de conocimiento demostrativo (Proclo en Euclides, *Elementos*: XXV). Los “Elementos” también contienen problemas y teoremas que hoy consideraríamos pertenecientes al álgebra o la aritmética, pese a que son tratados mediante métodos geométricos, de modo que ignoraremos esas secciones de la obra al no entrar dentro de la temática del trabajo. Estos elementos principales de los que parte Euclides para construir su sistema axiomático estarían divididos en tres grupos, los cuales pasamos a explicitar a continuación:

-Definiciones: La obra comienza ofreciendo la definición de 23 entidades primitivas, con las que se trabajará a lo largo del tratado y que constituyen los objetos sobre los que tratarán los diferentes teoremas de los libros que componen los “Elementos”. A continuación, expondremos tres definiciones dadas por Euclides, para ilustrar de esta manera la caracterización que se les atribuía a dichos términos en la antigüedad, así como para poder compararla posteriormente con la forma en que Hilbert caracterizó a esas mismas entidades geométricas siglos más tarde:

1. “Un punto es lo que no tiene partes”
2. “Una línea es una longitud sin anchura”

15. “Un círculo es una figura plana comprendida por una línea (que se llama circunferencia), tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí”

-Nociones comunes: Éstas consisten en una serie de proposiciones que resultan evidentes de por sí, de modo que no necesitan ser demostradas además, tienen un carácter genérico; esto es, no se aplican exclusivamente al campo de la geometría, como lo harán los axiomas o postulados, sino que son considerados principios generales del razonamiento. Algunos ejemplos de estas nociones serían:

1. “Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí”
2. “Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales”
3. “Si se quitan cosas iguales a cosas iguales, los restos son iguales”

-Postulados: Estos resultan los elementos más interesantes de nuestro trabajo, debido a la relevancia que tendrán, no solo en la obra de Hilbert, sino en todos los desarrollos geométricos posteriores. A día de hoy, las nociones comunes han sido subsumidas dentro del grupo de los postulados que, con el paso del tiempo, acabarían por recibir el nombre de axiomas, si bien en la obra que tratamos actualmente no reciben tal denominación. Estos constituyen un conjunto de proposiciones básicas, que, como hemos indicado en reiteradas ocasiones, no requieren de demostración previa para afirmar su validez, a diferencia de los teoremas, los cuales sí que precisan ser demostrados, recurriendo, bien a dichos postulados, a definiciones o a nociones comunes; bien a teoremas que ya han sido demostrados con anterioridad. Los postulados son tomados como verdades evidentes, aunque, a diferencia de las nociones comunes, estos tendrían un carácter específico, tratando de cuestiones pertenecientes exclusivamente al ámbito de la geometría y a partir de los cuales, siguiendo las normas del razonamiento silogístico, deben derivarse los diferentes teoremas y proposiciones referentes a las propiedades que presentarían las diferentes figuras geométricas, tales como los triángulos o los ángulos. En su obra, Euclides enuncia cinco postulados, los cuales, debido a la importancia que tuvieron en el desarrollo ulterior de la geometría, especialmente el quinto postulado, mencionaremos en su totalidad y tal como aparecen formulados en la edición de dicha obra manejada en este trabajo:

1. “Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera a un punto cualquiera”

2. “Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta”
3. “Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia”
4. “Y el ser todos los ángulos rectos entre sí”
5. “Y que, si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontraran en el lado en el que están los ángulos menores a dos rectos”

Podemos apreciar a simple vista que el quinto postulado se diferencia en gran medida de los anteriores por su longitud y complejidad; esta resultará una cuestión clave en la historia de la geometría, pues será este postulado el que revolucionará completamente dicha disciplina siglos más tarde. El quinto postulado fue tratado extensamente por los matemáticos posteriores a Euclides, los cuales, en vista de su carácter poco intuitivo, trataron de demostrar que éste no se trataba de un axioma, sino de un teorema derivable de los 4 primeros. Esto resultaba de sumo interés, pues el quinto postulado, pese a su complejidad, era necesario en la demostración de múltiples teoremas fundamentales de la geometría euclidiana, de modo que debía de ser salvado de algún modo de las dudas y recelos que despertaba entre la comunidad de matemáticos. Nadie consiguió demostrarlo o derivarlo de los cuatro primeros, si bien, se consiguió demostrar que dicho postulado era equivalente a otros enunciados o proposiciones sobre propiedades geométricas. De este modo, podía trabajarse con el quinto postulado de una manera diferente a como lo había planteado Euclides en su obra. A continuación, enunciaremos una serie de proposiciones equivalentes al quinto postulado, que fueron empleados con asiduidad por los matemáticos, siendo más “manejables” que la caracterización dada originalmente. En este punto nos interesa destacar una de las múltiples reformulaciones que se hicieron, debido a que acabó siendo la más popularizada y conocida, hasta el punto de que no es raro encontrarse con que a dicho postulado se le denomine “el postulado de las paralelas”. Este axioma se basa en la noción de rectas paralelas y afirma que “Por un punto exterior a una recta r puede trazarse una y solo una recta paralela a la recta r ”. Otros enunciados equivalentes al quinto postulado y utilizados ampliamente por la comunidad matemática serían:

- “La suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual a dos rectos”
- “Se pueden construir triángulos de área tan grande como se desee”

- “Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia”

Una vez fijados estos elementos básicos, Euclides procede a realizar una serie de demostraciones en base a ellos. Resulta de especial relevancia destacar los aspectos metodológicos de dichas demostraciones, pues sufrirán notables modificaciones a lo largo del tiempo, aparte de que acabarán por ser un tema de disputa entre diferentes matemáticos. Lo que caracterizó al método euclidiano fue que procede mediante la utilización de lo que posteriormente se conocería como método sintético. Este procede a partir de una serie de presupuestos elementales, tomados como verdaderos, y exclusivos de la disciplina que va a desarrollar; en este caso, específicos del ámbito de la geometría, como son sus cinco postulados o las definiciones de las figuras geométricas. A partir de ellos, mediante una serie de razonamientos lógicos y silogísticos, se van demostrando diferentes teoremas basándose en la construcción de diversas figuras geométricas cuyas propiedades ya son conocidas con anterioridad, como, por ejemplo, las circunferencias, que ya aparecen caracterizadas en las definiciones iniciales. Euclides no emplea ningún recurso algebraico para realizar sus demostraciones, sino que éstas se realizan desde técnicas puramente geométricas, a través de múltiples construcciones diagramáticas, donde se trazan dichas figuras y se trata de demostrar alguna de sus propiedades en función de su relación con otras figuras geométricas más simples; por ello mismo el matemático Fano, en un célebre artículo de principios del siglo XX afirmó que dicho método es aquel que trata “a las figuras geométricas en sí” (Fano en Almira, Sabina de Lis, 2007: 86), pues tan solo recurre a herramientas exclusivas del ámbito de la geometría. En resumen, podemos decir que dicho método se caracteriza por demostrar, mediante un método lógico-deductivo, diferentes teoremas geométricos sin hacer uso de herramientas del algebra o el análisis; esto es, sin recurrir a herramientas de otras ramas de las matemáticas. Es así que a este método se le considera como el método geométrico puro, pues trata a la disciplina desde sus propios presupuestos, sin recurrir a herramientas extraídas de otros ámbitos de las matemáticas, pese a que, adolece de un grave problema, que fue puesto de manifiesto por los matemáticos posteriores a Euclides, especialmente a partir del siglo XIX. Dicho problema sería que este método carece de generalidad metódica; esto es, no existe un método general para realizar demostraciones de carácter sintético, sino que es el matemático, enfrentado a la figura que quiere tratar, el que debe, mediante múltiples

construcciones y basándose en su “intuición geométrica”, llegar a demostrar las diferentes propiedades de las figuras que está estudiando. La noción de intuición geométrica resulta oscura y poco concisa; no obstante, dicha noción es empleada reiteradamente por Hilbert en toda su obra, de modo que resulta inevitable hacer mención a ella. Ésta se trataría cierta capacidad de percibir las relaciones geométricas fundamentales de manera casi inmediata, mediante la observación de las construcciones diagramáticas realizadas para demostrar dicha propiedad geométrica (Giovannini, 2018).

No por nada, otro aspecto a destacar de la geometría euclídea es que esta era fundamentalmente diagramática; esto es, no solo acompañaba todas sus demostraciones de una serie de dibujos que deberían servir para ilustrar la demostración que acababa de hacerse, sino que, como pusieron de manifiesto los matemáticos del siglo XIX, los diagramas construidos por Euclides eran parte fundamental de sus demostraciones, pues existían una serie de inferencias o deducciones las cuales no eran derivables del grupo de definiciones y principios básicos establecidos al principio de la obra, sino que tan solo podían afirmarse o inferirse cuando se observaba la construcción diagramática y se veía dicha propiedad. Para ilustrar este aspecto capital de la geometría euclidiana, que sería fuertemente criticado por la comunidad matemática durante el siglo XIX, especialmente por los representantes de las corrientes logicistas, expondremos la Proposición 1 de los *Elementos*, acompañada con su respectivo diagrama (Figura 1), donde ya puede apreciarse la necesidad de dicho dibujo para la inferencia de ciertas propiedades geométricas. La Proposición 1: “Construir un triángulo fijado sobre una recta finita dada”, procede de la siguiente manera:

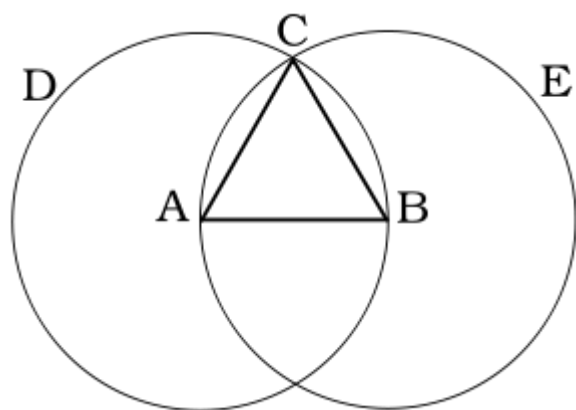


Figura 1

“Sea AB una recta finita cualquiera

1. Trácese, con centro en A y distancia AB, el círculo BCD [Postulado 3]
2. Trácese, con centro en B y distancia BA, el círculo BCE [Postulado 3]
3. A partir del punto C donde ambos círculos se cortan [¿?], trácense las rectas AC Y BC [Postulado 1]

Ahora bien, puesto que A es el centro de la circunferencia BCD, la recta AC es igual a la recta dada AB [Definición 15]. Puesto que, el punto B es a su vez el centro de la circunferencia BCE, la recta BC es igual a la recta BA [Definición 15]. Pero hemos demostrado que AC es igual a AB; por tanto, ambas rectas AC y BC son iguales a AB. Ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí [Noción Común 1]; por tanto, AC es también igual a BC; luego las rectas AC, AB Y BC son iguales entre sí. por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero y ha sido construido sobre la recta AB: Q.E.D”

Esta construcción nos servirá de ejemplo paradigmático del modelo de demostración euclidiana y de los fallos que este presentaría. Como podemos ver, aparentemente Euclides logra construir un triángulo equilátero sobre una recta apelando únicamente a los Postulados 1 y 3, a la Noción Común 1 y a la Definición 15. Cada uno de los 3 pasos que realiza en la construcción de la figura estarían avalados por los Postulados y a partir de ahí, deduciría que la figura construida con esa serie de operaciones es un triángulo equilátero, apelando igualmente a las Definiciones y las Nociones Comunes explicitadas con anterioridad. Cada paso en la construcción y cada inferencia que se realiza posteriormente se encuentra fundamentada sobre algún Postulado o Definición y se sigue lógicamente de éste. Así pues, dicha demostración da la apariencia de ser una serie de proposiciones derivadas de unas nociones elementales mediante deducciones lógicas; cada uno de los pasos seguidos por Euclides en su construcción y demostración debería de seguirse lógicamente de alguna de las nociones elementales introducidas al principio del libro. Sin embargo, no ocurría tal cosa.

Como puede apreciarse en la demostración expuesta anteriormente, el hecho de que las circunferencias trazadas se corten en un punto C aparece con unos signos de interrogación. Esto se debe a que, como se dieron cuenta matemáticos posteriores, este hecho no es deducible de ninguna de las proposiciones primitivas introducidas por Euclides. Si revisamos todas las Definiciones, Nociones Comunes y Postulados propuestos por Euclides al comienzo de la obra, vemos que nos es imposible inferir, a partir de estos, que ambos círculos se cortaran en un punto común C. ¿Cómo llega entonces el geómetra alejandrino a inferir semejante hecho? La respuesta está en que llega a esta conclusión gracias a la representación diagramática del problema, pero sin

tener el respaldo teórico de ninguno de los principios. Esto suponía un gran fallo para las pretensiones logicistas y formalistas en las matemáticas que preponderaron durante finales del siglo XIX y principios del XX. Para intentar solventar dicho problema, el matemático Dedekind introdujo el postulado de continuidad, que permitía inferir, recurriendo únicamente al cálculo lógico, que ambas circunferencias deberán de cortarse en un punto común; no obstante, dicho postulado resulto insuficiente y poco satisfactorio para los matemáticos de la época, los cuales buscaron métodos alternativos de salvar el carácter lógico y sintético de la geometría euclidiana. Más adelante en el trabajo profundizaremos en esta cuestión.

Así pues, Euclides parte de estos axiomas y proposiciones primitivas (Descripciones, Nociones Comunes, Postulados) para demostrar una serie de teoremas,

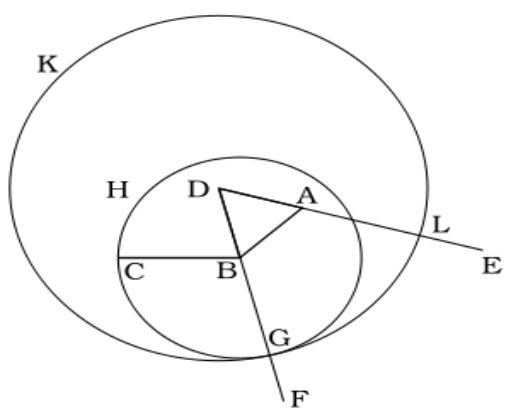


Figura 2

los cuales empleará a su vez recursivamente para demostrar teoremas posteriores de mayor complejidad. Por ejemplo, para demostrar la Proposición 2 “Construir en un punto dado como extremo una recta igual a una recta dada” (Figura 2), recurre a los postulados 1,2 y 3, así como a la proposición anteriormente demostrada. No formularemos la demostración de este teorema, pero basta con observar el diagrama de la Figura 2 para darse

cuenta que este incluye un triángulo equilátero ABD, el cual, si se quiere construir, debe de recurrirse al Postulado 1 donde se explica cómo construirlo.

De esta forma, se construye un sistema axiomático, un conjunto de teoremas y proposiciones relacionados entre sí, cuya validez parece descansar en la validez de los axiomas o principios de los que se derivan y en la coherencia interna del sistema, no pudiendo derivarse de estos ninguna contradicción. Las demostraciones se llevan a cabo en base a las Descripciones, Postulados y Nociones Comunes, mediante un razonamiento silogístico de encadenamiento de proposiciones, lo cual confiere a dicha disciplina una organización sistemática, en la cual unos teoremas se siguen de otros en un orden específico (según hemos indicado anteriormente, es imposible demostrar la Proposición 2 de los “Elementos” sin que previamente hayamos demostrado la

Proposición 1, pues aquella depende de esta, de modo que se da un orden en que los teoremas se hayan demostrados y relacionados entre sí).

Uno de los problemas aquí presentes y de gran calado filosófico, el cual Euclides no trata en su obra, sería el estatuto ontológico de las entidades geométricas. Como hemos dicho, las demostraciones geométricas parten de unos principios de los que se derivan el resto de teoremas y verdades geométricas. La naturaleza de estos principios, así como de las entidades matemáticas, ha sido objeto de debate ya desde la antigua Grecia. Platón reprochaba a los geómetras de su tiempo el dar como verdaderas estas premisas, no demostrándolas previamente y aceptándolas como verdaderas sin reflexión o consideración previa, relegando dicha disciplina al ámbito de la *diánoia* (*διάνοια*).

Quienes se ocupan de geometría, cálculo y de este tipo de cuestiones, ponen por hipótesis lo par y lo impar, las figuras geométricas, las tres especies de ángulos y todas las cosas emparentadas con éstas. [...] Poniendo esas hipótesis como si poseyeran un saber de las mismas, operan a partir de ellas, y ya no juzgan necesario dar razón de ellas ni a sí mismos ni a los demás, como si fueran evidentes para todos [...] Para su investigación, el alma se ve obligada a servirse de hipótesis. (Platón, *República*: 510 c-d, 511 a)

Así mismo, en su oposición radical a la realidad de los elementos captados por la sensibilidad, renegaba de los aspectos diagramáticos de la geometría, afirmando que estos no eran más que herramientas útiles para el geómetra, pero que no se trataban en absoluto de las entidades geométricas ni debían de confundirse con estas, pues en verdad dichas entidades pertenecían a otro plano de la realidad, al *ὑπερουράνιον τόπον* donde habitaban las ideas puras.

¿Sabes también que [los geómetras] hacen uso de figuras visibles y acerca de éstas realizan sus argumentaciones, pero razonando, no a propósito de las mismas, sino de aquello a lo que ellas se parecen, discurrendo, por ejemplo, acerca del cuadrado en sí y de su diagonal, pero no de las figuras que ellos dibujan? (Platón, *República*: 510- d)

Este rechazo a los aspectos diagramáticos de las demostraciones geométricas presentes en la filosofía platónica resultan de sumo interés, pues también estará presente en los representantes de las corrientes logicistas y formalistas que surgirían más de dos

milenios más tarde, incluyendo al propio Hilbert, solo que, a diferencia del filósofo alemán, Platón mantendría una posición realista respecto a las entidades geométricas, defendiendo la tesis de que las figuras tratadas en dicha ciencia tienen existencia propia e independiente de sus representaciones diagramáticas, las cuales no son sino un reflejo de las verdaderas entidades geométricas. Por otro lado, Aristóteles mantiene una postura más moderada en este punto, admitiendo que dichas entidades deben de tener alguna clase de realidad, más no una realidad sustancial e independiente de los objetos en los que se encuentran objetivadas. En palabras de Carlos Madrid Casado: “Aristóteles, realista moderado, siempre matizó que los universales poseen existencia, mas no autosubsistencia; solo existen en las cosas” (Casado, 2009: 4). Figuras como triángulos, círculos o rectas, existirían en la medida en que hay objetos en el mundo en los cuales pueden objetivarse y “subsistir” en ellos, mas no pueden ser hipostasiados tal como hace Platón, confiriéndoles existencia autónoma e independiente de sus referentes fisicalistas. Las fundamentaciones y explicaciones clásicas que se hicieron de las entidades geométricas y sus propiedades fueron múltiples y resulta imposible ser exhaustivo en este punto, así que nos limitaremos a exponer la concepción que tenían los dos filósofos más influyentes de la antigüedad para ilustrar, de manera superficial, las líneas generales a las que estas solían adherirse.

Así pues, resumiendo los contenidos expuestos hasta ahora, podemos determinar una serie de rasgos característicos de la geometría desarrollada por Euclides, que resultaron de importancia capital para el desarrollo histórico de dicha ciencia, y que serán importantes para entender adecuadamente las innovaciones introducidas por Hilbert, así como de las fundamentaciones clásicas que solían hacerse de esta disciplina. Dichos aspectos serían:

-La organización de la geometría como un sistema axiomático, donde los distintos teoremas están interrelacionados entre sí y descansan, en última instancia, en una serie de proposiciones elementales

-La adopción de una metodología sintética, donde las demostraciones geométricas se realizan mediante cálculos e inferencias lógicas aplicados a postulados y definiciones específicamente geométricos, sin recurrir a ninguna herramienta de carácter algebraico o de otra rama de las matemáticas

-El carácter diagramático de las demostraciones, siendo los diagramas, no meros dibujos que tienen el objetivo de ilustrar la proposición a demostrar y a ayudar a su comprensión, sino elementos fundamentales para demostrar ciertos hechos que no son derivables del conjunto de axiomas establecido por Euclides, tan solo inferibles cuando se observa el diagrama.

-La fundamentación de los objetos básicos del campo de la geometría (punto, línea, plano), en la intuición empírica (Giovannini, 2018). Pese a todo, la cuestión relativa al estatuto ontológico de las entidades geométricas fue objeto de disputa entre los filósofos, pues Euclides no entra en semejante cuestión y Platón y Aristóteles manejaban ideas diferentes al respecto, tal como hemos indicado. El formalismo hilbertiano ofrecerá otra alternativa a la hora de determinar el estatuto ontológico de estos objetos, proponiendo la idea de la vacuidad referencial de dichos elementos. Más adelante profundizaremos en esta cuestión.

b) El auge del método analítico y la fundamentación espacial de la geometría: la concepción kantiana y su influencia en la comunidad científica y filosófica

La obra de Euclides se constituye así como el principal tratado geométrico de la antigüedad; a partir de él, se realizaron ciertas innovaciones, pero la inmensa mayoría en la línea seguida por Euclides: Diofanto perfeccionó el cálculo aritmético basándose en principios geométricos y Apolonio de Perge trabajó las secciones cónicas.

La geometría euclidiana se mantuvo como la única vigente durante más de un milenio, pese a que, ya desde el Renacimiento, empezaba a atisbarse que éste no se trataba del único sistema geométrico existente. La geometría proyectiva, empleada para calcular la incidencia de una figura sobre un plano, había cobrado gran importancia debido al auge de la pintura en el Renacimiento. Puesto que una pintura se trata, a grandes rasgos, de una proyección, los artistas debían guiarse por las normas de esta geometría si querían lograr una representación espacial adecuada de la profundidad o la longitud de un objeto. Pero no sería hasta los trabajos de Pascal y Girard Desargues que ésta acabaría por constituirse como una disciplina científica bien definida. Lo que resultará de especial interés en esta geometría y que pasó desapercibido durante siglos habría sido lo siguiente: en ella, no se cumple el quinto postulado de Euclides. En la geometría proyectiva, no existen las rectas paralelas, pues toda recta prolongada indefinidamente acaba cortándose en un punto en el infinito, denominado punto de fuga.

Esto supone una cuestión de suma importancia para nuestro trabajo y para las ideas que Hilbert manejaría más tarde; no por nada sus primeros trabajos sobre geometría fueron acerca de geometría proyectiva. Los postulados de Euclides eran tomados, tal como hemos indicado, como verdades evidentes por si mismas, como axiomas. que no requerían de demostración previa y sobre los que se podía construir todo un sistema de teoremas y problemas coherente y que se correspondía con hechos comprobables empíricamente. Sin embargo, la sustitución de uno de los postulados de Euclides, concretamente, aquel que trataba sobre las paralelas; así como la posibilidad de construir un sistema geométrico coherente prescindiendo de dicho postulado, suponía un fenómeno que debería de haber despertado el interés de la comunidad de matemáticos y filósofos acerca de dichos axiomas y hasta qué punto eran verdades evidentes y necesarias, pues dicho postulado siempre había resultado problemático para los matemáticos. Como hemos dicho, este postulado contrasta, debido a su complejidad, con la simplicidad y evidencia de los cuatro primeros postulados propuestos por Euclides. Esto hizo que, durante muchos años, un gran número de matemáticos trataran de demostrar que se trataba, no de un postulado necesario para la construcción de la geometría, sino de un teorema, el cual era posible deducir a partir de solo los 4 primeros postulados.

En particular, el quinto postulado tiene un enunciado muy poco intuitivo. Dan ganas de demostrarlo, de intentar deducirlo como consecuencia de los otros para, de ese modo, dejar toda la geometría soportada sobre un conjunto de verdades indudables [...] este intento fue hecho realizado a lo largo de los siglos por numerosos matemáticos, como Saccheri, Taurinus, Legendre o Lambert. (Almira, Sabina de Lis, 2007: 85)

Pero todos estos intentos resultaron infructuosos, pese a producir resultados que resultarían de importancia con la consolidación de las geometrías no-euclidianas. El quinto postulado se mantuvo como independiente a los cuatro restantes, no pudiendo ser derivado de ellos, pese a lo cual, resultaba posible construir un sistema geométrico, diferente al desarrollado por Euclides, sustituyéndolo por otro. Así pues, otra geometría parecía posible independientemente del quinto postulado, y otros axiomas podían ser propuestos para la construcción de un sistema geométrico diferente al euclidiano.

Sin embargo, todo esto pasó desapercibido debido al surgimiento de la geometría analítica, gracias a la obra de Rene Descartes y Pierre de Fermat, que acapararía la atención de todos los matemáticos de la época y acabaría por imponerse como el método predominante en los estudios geométricos. Surge así otro método de tratar los problemas geométricos. Este método se caracteriza por la aplicación de métodos algebraicos en la resolución de problemas geométricos, mediante la constitución de un eje ortogonal de coordenadas compuesto por un número infinito de puntos y la representación de las diferentes figuras geométricas en él (Figura 4). Las rectas y planos pasan a ser entidades denotadas por diferentes ecuaciones, de modo que podemos resolver los problemas de la geometría clásica recurriendo a reglas algebraicas y aritméticas, en vez de tener que operar construyendo líneas, o circunferencias, como ocurre en el método sintético.

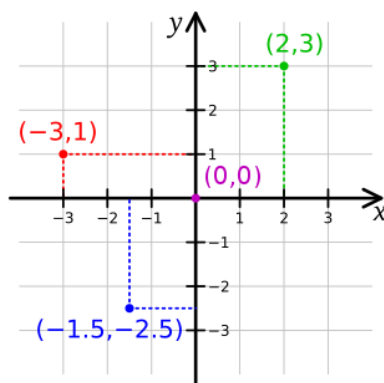


Figura 3

Esta forma de tratar los problemas geométricos fue sustituyendo progresivamente al método sintético, pues el nuevo enfoque algebraico permitía un mejor manejo de dichos problemas y facilitaba las demostraciones de los teoremas. Del mismo modo, también la concepción axiomática de la geometría fue perdiendo peso; ya no se dependía de una serie de proposiciones elementales características de la geometría, de las cuales se derivaban un conjunto de

teoremas, sino que se operaba con métodos algebraicos y se apelaba a reglas de esta rama de las matemáticas. Durante el siglo XVII la geometría sufre modificaciones metodológicas de gran importancia para su desarrollo ulterior.

En paralelo a dicho cambio metodológico, la geometría iba adquiriendo cada vez más el carácter de ciencia que estudia las propiedades del espacio físico. El surgimiento de la ciencia moderna estuvo intrínsecamente unido a los desarrollos geométricos, y fue gracias a estos que se pudo realizar, lo cual desató un renovado interés en plantearse la naturaleza de los problemas geométricos y su aplicación a otras ciencias tales como la astronomía. “El uso que hizo Kepler de las secciones cónicas en 1609 dio un enorme impulso al reexamen de dichas curvas y la búsqueda de propiedades que fueran útiles

para la astronomía” (Klein, 1972: 381). La relación entre ciertas figuras geométricas, tales como las curvas, con el comportamiento de algunos cuerpos en el espacio físico, por ejemplo, el lanzamiento de un proyectil desde un cañón, se fue haciendo cada vez más evidente gracias a los trabajos de Kepler, Galileo o Newton, donde continuamente intervenían elipses, parábolas u otras figuras geométricas a la hora de tratar problemas de corte astronómico o mecánico, lo cual hizo ver a los científicos de aquel tiempo a dicha disciplina como una suerte de medio para llegar a conocer las propiedades del espacio físico en que nos desenvolvemos. Los movimientos de los cuerpos en el espacio, desde las orbitas planetarias hasta el recorrido de una bala de cañón, podían ser predichos apelando a propiedades de figuras geométricas tales como elipses o parábolas. También sirvió de impulso a el hecho de que la obra más reconocida de la ciencia moderna, el “*Philosophiae naturalis principia mathematica*”, fuese publicado por Newton con una demostración geométrica de los teoremas ahí propuestos, pese a haberlos inferido originalmente recurriendo a otras herramientas matemáticas pertenecientes al campo del análisis, del cual fue uno de sus principales desarrolladores.

En los “*Principia*”, Newton utilizó métodos de demostración geométricos. [...] Se cree que la razón por la cual recurría a la geometría era porque las demostraciones resultaban más comprensibles para sus contemporáneos (Klein, 1972: 483)

Newton no se llegó a plantear si acaso el espacio es euclídeo o no; lo da por hecho y a partir de ahí, emplea diferentes métodos de demostración geométrica para resolver cuestiones de corte astronómica o dinámica. Y, partiendo de estos presupuestos, consiguió llegar a predecir con gran exactitud los movimientos de los cuerpos celestes, así como de los cuerpos en la tierra, realizando la célebre unificación de las fuerzas por la que es recordado, aparte sus múltiples aportaciones a otras disciplinas científicas. Así fue que, dicha ciencia acabo, poco a poco, por ser concebida como la disciplina encargada de estudiar las propiedades del espacio físico y el comportamiento de los cuerpos en éste. El ejemplo más paradigmático de esta idea lo tenemos en las célebres declaraciones de Galileo en su obra “El ensayador”:

La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo. Pero no se puede entender si antes no se aprende a entender su lengua, a conocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en

lengua matemático y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas. (Galileo, 1981: 62-63)

La idea de que la geometría estudiaba, no solo las propiedades de las figuras trazadas por los geómetras en sus diagramas, sino también de las figuras que podían distinguirse en espacio físico, acabó por ser aceptada de forma implícita por la comunidad de científicos y matemáticos y durante los siglos XVII y XVIII fue admitida sin mucho reparo; ahora solo, quedaba la cuestión de fundamentar adecuadamente semejante relación ¿Por qué las figuras geométricas y sus propiedades describían de manera tan precisa las propiedades de las figuras y objetos del espacio físico? Fueron muchas las respuestas que se dieron a esta pregunta, pero de entre todas ellas, hubo una que tuvo un éxito sin igual y que influyó de manera más que notable en todos los interesados en semejantes cuestiones, especialmente en el ámbito alemán.

La fundamentación kantiana de la geometría y su amplia influencia en la comunidad filosófica y científica merece ser tratada, aunque sea de forma superficial, por el impacto anteriormente mencionado, que llegaría a influir incluso en el propio Hilbert, quien comienza la obra sobre la que versa nuestro trabajo con un epígrafe extraído de la “Crítica de la razón pura” de Kant. Dicha concepción determino de manera sustancial la forma en que filósofos y matemáticos empezaron a plantearse dicha cuestión; nociones como las de *a priori/a posteriori* o analítico/sintético fueron cobrando cada vez más relevancia en las disertaciones sobre esta cuestión, llegando a influir incluso en el propio Hilbert casi 200 años tras su introducción. Un claro ejemplo de esto podemos verlo en la tesis doctoral realizada por Bertrand Russel, filósofo evidentemente no kantiano, “Fundamentos de geometría”, donde ya en los primeros capítulos se trata la cuestión desde las nociones *a priori/ a posteriori*, *analítico/sintético*. Las nociones desde las que Kant realiza su análisis epistemológico de la geometría, así como las conclusiones a las que llega sobre dicha disciplina, condicionaron enormemente a todos los estudiosos de dicha disciplina posteriores a él.

Como es bien sabido, Kant fundamenta la verdad de las proposiciones matemáticas en la constitución del sujeto cognoscente individual, en las formas de sensibilidad (tiempo y espacio) que se encontrarían *a priori*, previas a toda experiencia empírica, en la mente del sujeto. Estos conceptos tendrían un carácter transcendental, siendo la condición de posibilidad subjetiva de toda intuición empírica; esto es, una

suerte de marco donde quedarían estructuradas nuestras sensaciones, teniendo que amoldarse siempre a éste. Es por este carácter apriorístico y subjetivo de las formas de intuición que las matemáticas son posibles como conocimiento con proposiciones de valor apodíctico, ya que se encargaría del estudio de tales formas puras de la intuición.

“El tiempo y el espacio son, pues, dos fuentes de conocimiento de las cuáles se pueden extraer *a priori* diversos conocimientos sintéticos; como lo muestra de modo particularmente brillante la matemática” (Kant, KrV, B55).

Con esta afirmación vemos como la idea de que la geometría era la ciencia encargada de estudiar las propiedades del espacio físico queda completamente avalada, con la única modificación de que, debido al giro copernicano introducido por Kant, el espacio ya no se concibe como una entidad exterior al sujeto cognoscente, sino como un elemento interno, constituyente de sus formas de representación empírica. “El espacio es una necesaria representación *a priori*, que sirve de base a todas las intuiciones externas” (Kant, KrV, B39). De este modo, la geometría seguía siendo considerada como una ciencia encargada de estudiar las propiedades del espacio físico, solo que, ahora, el valor de verdad de los teoremas que componían dicha disciplina no estaba fundamentado en ciertas propiedades de un elemento externo, ni tampoco en un conjunto de proposiciones elementales, a la manera de Euclides, sino que dependía de los modos de sensibilidad del modo en que se intuían las cosas.

La geometría es una ciencia que establece las propiedades del espacio sintéticamente y, no obstante, *a priori*. ¿Cuál ha de ser, pues, la representación del espacio para que sea posible semejante conocimiento? Tiene que ser originariamente una intuición (Kant, KrV, B40)

Esta manera de entender el espacio y la geometría, como elementos dependientes de la subjetividad humana y de sus formas de intuición, acabó proliferando en la comunidad de filósofos y matemático, siendo aceptada por la gran mayoría de ellos.

c) El surgimiento de las geometrías no-euclidianas y la pérdida de vigor de la fundamentación kantiana: el siglo del nacimiento de Hilbert

El evento que supone un punto de inflexión en la concepción de la geometría, y que llevara a los matemáticos posteriores a interesarse profundamente por la cuestión de

la fundamentación de dicha disciplina, habría sido el surgimiento de las geometrías no-euclidianas. Estas se tratan de sistemas geométricos donde no se cumple alguno de los cinco postulados de Euclides, en concreto, donde no se cumple el quinto postulado sobre las paralelas. Como ya hemos indicado con anterioridad, semejante cosa ya ocurría en la geometría proyectiva, la cual es una geometría no-euclidiana, al no cumplir el quinto postulado sobre las paralelas, si bien este hecho fue ignorado por la comunidad matemática y no tuvo gran repercusión. Sin embargo, a comienzos del siglo XIX, los trabajos realizados por diversos matemáticos en el campo de la geometría fueron poniendo de manifiesto que, negando el quinto postulado de las paralelas, podían construirse sistemas geométricos coherentes, de los cuales no se derivaba ningún teorema contradictorio, pese a que los resultados obtenidos resultasen completamente contraintuitivos y no se correspondiesen con los hechos que se hacían patentes a la sensibilidad humana. No explicaremos en profundidad los rasgos distintivos ni las causas que motivaron el surgimiento de dichas geometrías; nos limitaremos a indicar que estuvieron muy ligados a la proliferación del interés en disciplinas tales como la cartografía, que fue la que llevo a Friedrich Gauss a interesarse por cuestiones geodésicas y, en última instancia, a desarrollar el primer sistema de geometría esférica, la cual se trata de un tipo de geometría no-euclidiana, pues en una esfera ocurre que, por una recta exterior a un punto dado no pasa ninguna paralela, pues en una esfera, las circunferencias máximas (aquellas que se obtienen al seccionar la esfera mediante un plano que pase por su centro) son tomadas como rectas, pues estas constituyen el espacio más corto que une dos puntos. Así pues, como podemos apreciar en la Figura 6, toda circunferencia máxima; esto es, toda recta que se trace sobre una superficie esférica, al ser prolongada indefinidamente, acabará por intersectarse con cualquier otra recta prolongada indefinidamente en dos puntos, los cuales serían los polos de la esfera. Esto significaba a su vez que los enunciados que eran equivalentes al quinto postulado tampoco se cumplían en la geometría esférica; por ejemplo, en ésta geometría, la suma de los ángulos internos de todo triángulo es mayor a dos rectos.

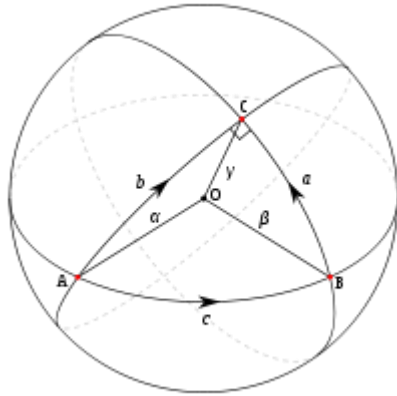


Figura 6

Los trabajos en cartografía llevaron a Gauss a darse cuenta de semejante hecho, pero, en paralelo, otros matemáticos también iban contribuyendo al desarrollo de las geometrías no-euclidianas por su propia cuenta, mediante estudios no tan ligados a factores prácticos o técnicos, sino de carácter más abstracto. Como hemos indicado, las geometrías no-euclidianas son aquellas que no cumplen el quinto postulado de Euclides. Esta fue la razón de que muchos

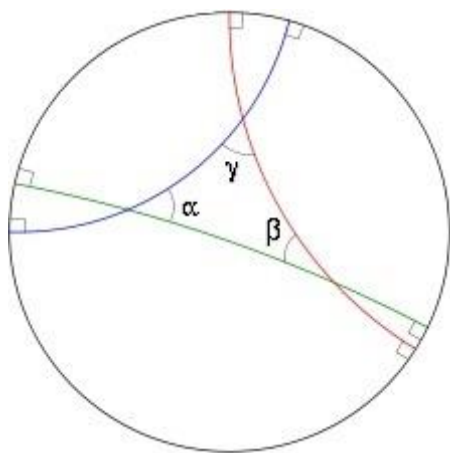
defensores de la unicidad de la geometría, creyendo que únicamente la geometría euclidiana era la única válida, trataron de demostrarlo mediante un método de reducción al absurdo; esto es, negando el primer postulado y tratando de deducir algún tipo de contradicción de su negación. En este punto, debemos destacar la figura de Giovanni Saccheri, filósofo y matemático jesuita que, en 1733, el mismo año de su muerte, publicó su obra *Euclides ab omni naevo vindicatus*. En ella, consiguió demostrar que, si negamos el quinto postulado, afirmando que por un punto exterior a una recta no puede trazarse ninguna paralela, se llegaba a una serie de contradicciones; sin embargo, al afirmar que pasan 2 o más, no incurrimos en ninguna contradicción y podemos derivar todo un conjunto de teoremas completamente contraintuitivos, pero coherentes entre sí. De esta forma, paradójicamente, Saccheri, en su intento por reivindicar la vigencia exclusiva de la geometría euclidiana, anticipó con sus trabajos un gran número de teoremas de lo que posteriormente sería conocida como geometría hiperbólica. Saccheri trabajó con la caracterización de dicho postulado basado en la relación entre los ángulos internos de un triángulo; sin embargo, si nos atenemos a la formulación del quinto postulado basado en la relación entre paralelas, solo nos quedan un par de opciones.

Si negamos el quinto postulado podemos, por tanto, hacerlo exactamente de dos modos: o negamos la unicidad o simplemente negamos la existencia de paralelas. (Almira, Sabina de Lis, 2007: 88)

Esto fue precisamente lo que hizo a principios del siglo XIX Lobachevski, quien, tomando la caracterización del quinto postulado basado en la suma de los ángulos internos de un triángulo, se propuso aceptar la idea de que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es inferior a dos rectos y ver qué consecuencias se

derivaban de esto (Figura 7). De este modo, mantuvo los cuatro primeros postulados de Euclides y añadió el quinto, modificado, para tal como hizo Euclides en sus “Elementos”, proceder a derivar mediante operaciones lógicas una serie de teoremas que se siguiesen de estos postulados fundamentales. Sus resultados fueron semejantes a los que obtuvo Saccheri un siglo atrás: los teoremas derivados de este nuevo conjunto de premisas resultaban completamente contraintuitivos, extraños para “el sentido común”, pero, pese a todo, no podía deducirse de ellos ninguna contradicción; por muy extrañas que fuesen las conclusiones a las que se llegaba negando el quinto postulado, ninguna de ellas presentaba algún tipo de impedimento lógico, únicamente chocaban con lo que, de forma un tanto ambigua, se denomina “sentido común”.

El hecho de que existiesen diversos sistemas geométricos, aparentemente validos pero diferentes en sus conclusiones, suponía ya de por sí una cuestión de gran calado gnoseológico; en el caso de la geometría proyectiva, esto no resultaba tan chocante, pues al fin y al cabo se trataba de una geometría que, pese a no cumplir en quinto



postulado de las paralelas, estaba íntimamente relacionada con la sensibilidad y la realidad física, empíricamente comprobable, pues al fin y al cabo se trataba de una geometría que estudiaba las proyectividades que se daban en el espacio físico; quizás esta geometría no cumpliera todos los postulados de Euclides, pero aquellos elementos en donde esta geometría se hacía patente (cuadros, pinturas, etc), se encontraban localizados en el

espacio físico, el cual, se suponía, obedecía los postulados euclidianos (debemos recordar la concepción clásica de la geometría, a la cual hemos hecho alusión en diversas ocasiones a lo largo del trabajo, que entendía que dicha ciencia se encargaba de estudiar las propiedades del espacio físico). Ahora bien, el sistema geométrico desarrollado por Lobachevski no tenía ningún referente fisicalista al que pudiese apelarse ¿Cómo era posible que por un punto exterior a una recta se pudiesen trazar infinitas rectas paralelas? Pese a todo, uno podía aceptar dicho postulado y trabajar sobre él, construyendo una serie de demostraciones de diversos teoremas, los cuales no parecían contradecirse entre sí. No solo eso, además ambos sistemas, pese a presentar una consistencia interna, a la hora de contrastar sus diversos teoremas y proposiciones,

estos resultaban inconsistentes entre sí. De este modo, nos encontrábamos con que proposiciones como: “En todo triangulo la suma de los ángulos internos es siempre igual a dos rectos” y “En todo triangulo la suma de los ángulos internos es siempre inferior a dos rectos” eran simultáneamente verdaderas, cada uno dentro de su propio sistema, pese a que en conjunto resultan contradictorias. Posteriormente, los trabajos de János Bolyai contribuyeron a afianzar la creencia de que, en efecto, era posible construir otra geometría diferente a la desarrollada por Euclides hacía más de un milenio. Ahora, solo quedaba tratar de dar explicación a un fenómeno tan curioso como la existencia de múltiples sistemas geométricos, todos ellos consistentes y verdaderos, pero cuyos teoremas y conclusiones eran incompatibles entre sí. Ésta será una cuestión que Hilbert tratará de resolver en sus trabajos sobre dicha ciencia.

El efecto más inmediato que estos descubrimientos tuvieron en el ámbito filosófico fue la pérdida de vigor de la tesis kantiana de que la geometría pudiera ser una ciencia *a priori*, dependiente exclusivamente de la intuición humana y que se pudiera desarrollar sin acudir a la experiencia empírica. Un claro ejemplo de esto lo tenemos en las declaraciones que el célebre matemático Gauss realiza en una carta dirigida a su amigo Bessel, donde afirma:

Cada vez más estoy llegando a la convicción de que la necesidad de nuestra geometría [euclídea] no puede ser probada, al menos no por medio del entendimiento humano [...] no debemos poner a la geometría en el mismo nivel que la aritmética, que es puramente *a priori*, sino junto a la mecánica. (Gauss en Giovannini, 2016: 17)

Esta cita resulta de especial interés pues refleja una posición idéntica a la que Hilbert mantuvo en su primera concepción de la geometría, donde afirmaba que esta tenía más en común con ciencias naturales como la mecánica que con otras ramas de la matemática, como el análisis o el álgebra (Hilbert en Giovannini, 2016, p.22). Veremos esto con mayor detalle en la siguiente sección del trabajo, donde procederemos a exponer la concepción de la geometría que mantuvo Hilbert en el conocido como su periodo geométrico.

Con esto, vemos que el surgimiento de las geometrías no-euclidianas fue llevando a los matemáticos a desconfiar cada vez más de la idea kantiana de que el espacio pudiese estudiarse con independencia de la experiencia y además, que este fuera producto exclusivo de la conciencia humana; esto es, que fuese la forma de la sensibilidad externa. “El espacio tiene además una realidad fuera de nuestro pensamiento, a la cual no podemos prescribirle *a priori* sus leyes” (Gauss en Giovannini, 2016: 16). Esto desató un renovado interés por indagar los fundamentos de la geometría y cuáles eran las bases sobre las que asentaban sus teoremas, en un intento de aclarar cómo era posible la existencia de múltiples sistemas geométricos, todos ellos con teoremas coherentes, pero incompatibles entre ellos. En este punto se produce en 1871 el Programa de Erlangen dirigido por Félix Klein en un intento de dar respuesta a esta cuestión y establecer una definición adecuada de geometría, llegando a la conclusión de que todas las geometrías no euclídeas eran reducibles de diversas maneras a la geometría proyectiva. “Félix Klein demostró en 1871-aunque no todos sus colegas aceptaron sus conclusiones- que las geometrías no euclídeas son parte de la proyectiva” (Hilbert, 2016: XX). Por aquel entonces contaba Hilbert con 9 años y se educaba en la escuela de Königsberg, el cual también había sido el lugar de nacimiento de Kant. Fue en este contexto en el que se crió Hilbert y donde desarrolló su concepción temprana de la geometría, en un momento de cambio radical en el paradigma geométrico.

Después de esta introducción sobre el desarrollo los métodos y la concepción de la geometría, pasaremos a explicar la concepción temprana de Hilbert de esta ciencia, haciendo en primer lugar un repaso genealógico de los eventos que influyeron de manera decisiva en las tesis que defendería en la publicación de su obra cumbre, “Fundamentos de la geometría”.

2. David Hilbert y los fundamentos de la geometría: el formalismo geométrico. La concepción temprana

David Hilbert nace en Königsberg en 1862, ciudad prusiana donde, a modo de curiosidad, nació también el filósofo Immanuel Kant. Pasó la mayor parte de su vida en dicha ciudad, ocupando una plaza de catedrático que años atrás había pertenecido al conocido matemático Jakob Jacobi, hasta que en 1895 se trasladó a la universidad de Gotinga, donde pasaría el resto de sus días. Antes de adentrarnos en los desarrollos

llevados a cabo por Hilbert, conviene aclarar ciertas cuestiones preliminares que ayuden a entender la estructura adoptada en este trabajo.

Generalmente, suele establecerse una división en el pensamiento de Hilbert en dos grandes periodos: el conocido como periodo geométrico, que se extendería desde 1891 con el inicio de sus clases sobre geometría proyectiva, hasta 1904, con la publicación de su artículo “Sobre los fundamentos de la lógica y las matemáticas”, y el periodo aritmético, que comenzaría con la publicación en 1918 de su artículo “El pensamiento axiomático” y se extendería hasta el final de su vida. Nosotros centraremos nuestro trabajo en la obra más representativa del primer periodo: los “Fundamentos de la geometría”, publicada en 1899, donde establece un sistema axiomático capaz de dar cuenta de toda la geometría euclidiana de manera mucho más completa y coherente que sus predecesores; tomaremos esta obra como referencia para exponer la geometría hilberiana, así como hicimos con los “Elementos” de Euclides para ilustrar la geometría euclidiana. Para el estudio de este primer periodo en el que se centrará nuestro trabajo, tomaremos como fuente principal de información los trabajos del filósofo y matemático Eduardo N. Giovannini, autor especializado en la figura de Hilbert y que ha estudiado en profundidad sus trabajos en las primeras etapas de su vida. Tras esto, se considera que Hilbert realiza una pequeña “pausa” en su producción intelectual hasta 1918. Es aquí donde daría comienzo lo que se conoce como la etapa aritmética, la cual se extendería hasta el final de sus días. En este periodo, Hilbert presentaría ya un pensamiento matemático fuertemente consolidado, habiendo trazado las líneas generales que definirían el formalismo matemático del cual fue padre.

Esta diferenciación en dos etapas de pensamiento se debe a los intereses en los temas de investigación de Hilbert, estando el primero más centrado en cuestiones relacionadas con la geometría y los fundamentos de ésta, y el segundo en problemas aritméticos y la consistencia del sistema de los números naturales, pues, una de las conclusiones extraídas de su primer periodo, y que aquí adelantamos para profundizar posteriormente más en ella, será que, tras la publicación de sus “Fundamentos”, Hilbert descubre que la consistencia de la geometría depende de la consistencia del sistema de los números reales, de modo que su interés pasa a estar más centrado en la teoría de números y en demostrar la consistencia de dicho sistema para, de esta manera, demostrar simultáneamente la consistencia de la geometría.

A continuación, haremos un repaso a la evolución del pensamiento de Hilbert desde que empieza a involucrarse en problemas de corte geométrico, para concluir con una exposición de su obra más paradigmática, viendo que modificaciones presenta ésta respecto al sistema axiomático desarrollado por Euclides y el impacto que tuvo en algunos filósofos y matemáticos; en concreto, expondremos a grandes rasgos la polémica que mantuvo con uno de los filósofos de las matemáticas más reconocidos de su tiempo: Gottlob Frege, y las réplicas realizadas por éste ante la nueva forma de concebir la geometría propuesta por Hilbert en dicha obra.

a) Juventud y primeras contribuciones al campo de las matemáticas. La conferencia de Wiener de 1891 y su influencia sobre Hilbert

En un primer momento, el interés que Hilbert empezó a mostrar en la geometría desde la última década del siglo XIX resultó inesperado para la comunidad de matemáticos de su tiempo. Por aquel entonces, ya se había hecho un nombre dentro del campo de las matemáticas, gracias a sus trabajos en la teoría de los invariantes o de los cuerpos algebraicos, llegando a demostrar la trascendencia de π y e o que todo sistema finito de formas tiene un sistema finito fundamental (Hilbert, 2016: XVI). Así fue que, cuando Hilbert anunció su idea de realizar un curso sobre geometría proyectiva en 1891, sorprendió a sus compañeros de Königsberg, pues esta se trataba de una rama de la matemática en la cual previamente no había mostrado gran interés, no habiendo realizado ninguna contribución de relevancia a este campo. Posteriormente, sorprendió aún más cuando 7 años más tarde decidió realizar un curso acerca de los fundamentos de la geometría, demostrando que su interés en esta rama de las matemáticas no había hecho otra cosa sino aumentar cada vez más, queriendo profundizar cada vez en las bases sobre las que se sustentaba esta disciplina, pues el surgimiento de las geometrías no-euclidianas había propiciado un renovado interés entre los matemáticos en hallar los fundamentos o bases sobre los que se sostenía el conocimiento geométrico, así como de darle sentido al hecho de la existencia de una multiplicidad de sistemas geométricos coherentes, pero con teoremas y postulados incompatibles entre sí. Dicho interés, presente también en Hilbert, acabaría cristalizando en 1899 en la publicación de su obra más celebre, de la cual nos ocuparemos en el siguiente apartado de este trabajo.

Según las notas que nos han quedado del curso impartido por aquel tiempo, Hilbert parecía tener originalmente una concepción de la geometría muy semejante a la

que podíamos apreciar en Carl Gauss y sus declaraciones anteriormente citadas. Por un lado, seguía manteniendo la tesis de que la geometría tenía por objeto de estudio las propiedades del espacio físico, pero nos encontramos a su vez con un rechazo a la tesis kantiana de la aprioricidad de dicho espacio, así como de la dependencia de la veracidad de los teoremas geométricos en los factores cognoscitivos de los sujetos humanos.

No puedo fundar las propiedades del espacio en la mera reflexión. [...] El espacio no es un producto de nuestro pensamiento, sino que me es dado a través de los sentidos. (Hilbert, en Givannini, 2015: 20)

Con esto, vemos que en su etapa inicial Hilbert aceptaba las tesis más promovidas por su época acerca del espacio, que ya lo habían descartado como forma de la sensibilidad externa y que, a su vez, seguía viendo una relación muy estrecha entre dicho espacio físico y la geometría. En este punto, Hilbert se mantuvo completamente conservador durante sus primeros años, aceptando completamente la idea de que la geometría se encarga de estudiar las características del espacio físico, tal como habían hecho la inmensa mayoría de científicos hasta entonces.

La geometría es la ciencia de las propiedades del espacio, y se diferencia substancialmente de las ramas de las *matemáticas puras*, como la teoría de números, el álgebra y la teoría de las funciones. Los resultados de estas disciplinas pueden ser alcanzadas a través del *pensamiento puro*. (Hilbert, en Giovannini, 2015: 18)

Resulta de interés comparar estas declaraciones con los fragmentos anteriormente citados de la “Crítica de la razón pura” de Kant, viendo los puntos comunes y discordantes entre ambos.

Para empezar, podemos ver que la definición que los dos autores ofrecen de la geometría (en Kant, KrV, B40) son prácticamente idénticas, afirmándose en ambos casos que dicha disciplina tiene como objeto el estudio de las propiedades del espacio físico. Sin embargo, también se ve claramente el punto de discrepancia, pues, mientras para el filósofo de Königsberg los teoremas geométricos y su validez derivan de los aspectos sensitivos del sujeto, los cuales se encuentran supeditados a su vez en aspectos intuitivos de carácter inherente a dicho sujeto, de modo que es posible deducirlos sin necesidad de acudir a la experiencia empírica, esto es, a la experiencia, pues lo que nos

describen dichos teoremas son precisamente la forma en que percibiremos los objetos del mundo y sus relaciones; para Hilbert esto no es así. Aunque la geometría se dedique a estudiar las propiedades del espacio físico, dicho espacio no es ningún elemento perteneciente a la subjetividad humana, sino que nos es dado a posteriori; esto es, requerimos de la experiencia, de la sensibilidad no-pura (empírica) para poder establecer las diferentes propiedades del espacio, que solo se nos hacen patentes a través de la experimentación y la intuición de objetos en el espacio, como atestigua la propia historia de la geometría. “La geometría más antigua también surge de la intuición [*Anschauung*] de los objetos en el espacio, tal como se ofrece en la vida cotidiana” (Hilbert en Giovannini, 2015: 21).

Es así que la geometría tendría un carácter que la haría más análoga a la física o a una ciencia natural, por la necesidad de recurrir a la sensibilidad y a la experiencia para corroborar sus teoremas, en contraposición a ciertas disciplinas, como la aritmética y el álgebra, que supuestamente solo requerirían del pensamiento para generar sus teoremas; esto es, bastaría con que yo me dedicase, por ejemplo, a contar mis pensamientos, para que de ese proceso de recuento pudiese, de alguna manera, inferir las leyes fundamentales de la aritmética. El binomio conocimiento puro/empírico, el cual contaría con precedentes bastante significativos en la historia de la geometría, como en el caso de las verdades de razón/verdades de hecho en la filosofía wolffiana-leibniziana, seguía estructurando completamente los términos en los que se llevaba a cabo en debate sobre estas cuestiones. En este punto, podemos ver que en su etapa inicial Hilbert no destaca por la originalidad de sus ideas acerca de dicha disciplina; como afirma Giovannini.

En primer lugar, se adhiere a la distinción gaussiana al señalar que la geometría se distingue de la aritmética y las demás disciplinas matemáticas puras [...]. En segundo lugar, presenta una definición tradicional o clásica de la geometría como la ciencia encargada de estudiar las propiedades del espacio físico. Esta definición tradicional es incompatible con una concepción axiomática formal (Giovannini, 2015: 18-19)

Como el autor, dicha forma de caracterizar a la geometría no es compatible con los presupuestos del formalismo matemático que Hilbert desarrollaría en sus años posteriores, pero originalmente, se adhirió a las tesis imperantes en su tiempo acerca de

dicha disciplina. Es por ello que, en estos años, sus trabajos y lecciones sobre geometría no puedan resultar de especial relevancia, pues no introducen ninguna tesis novedosa que merezca la pena destacar.

Lo que si resulta de interés señalar, pues se trata de algo que tendrá relevancia posterior en el pensamiento de Hilbert, es el criterio de clasificación que introduce a lo largo de estas lecciones, estableciendo tres ramas o modos de entender la geometría diferenciados entre sí. Este se trata de un criterio de diferenciación metodológica; esto es, el elemento tomado de referencia para establecer las diferentes ramas de la geometría sería el método por el cual son tratados los problemas geométricos. “En el fondo, la división introducida por Hilbert responde más bien a una clasificación de la geometría en virtud de los diferentes métodos que pueden ser utilizados para abordarla” (Giovannini, 2015: 24).

No explicaremos en profundidad las diferencias y características de los tres tipos de geometrías establecidas por Hilbert; en este punto, nos limitaremos a mencionarlas de manera superficial, prestando más atención a una de ellas por la importancia que tendrá posteriormente para el pensamiento hilbertiano, pues anticipa parte de lo que sería la concepción axiomática formal que desarrollaría años más tarde¹. Las tres grandes ramas de la geometría establecidas en ese esquema clasificatorio eran:

-La geometría de la intuición: Ésta “reduce sus afirmaciones a los hechos simples de la intuición, sin investigar ella misma su origen y legitimidad” (Hilbert en Giovannini, 2015, 22). Así pues, dicha geometría está basada en intereses de carácter práctico o pragmático, queriendo conocer las diferentes propiedades geométricas por cuestiones estéticas o técnicas, pero sin ahondar en los aspectos fundamentales de esta. Podríamos decir que se trata de un tratamiento praxológico de la geometría, donde ésta no busca alcanzar un estatuto de cientificidad, sino solo describir una serie de hechos y propiedades geométricas fundamentales.

-La geometría axiomática: Ésta es sin duda la rama de la geometría establecida por Hilbert que más nos interesa, pues se encuentra en estrecha relación con sus trabajos ulteriores y en ella se pueden ver los prepuestos de la tarea que se propondría posteriormente, la de fundamentar la geometría en particular, y las matemáticas en

¹ Para una explicación más detallada de dicha clasificación, consultar Giovannini, 2015, 21-25.

general. Dicho tipo de geometría se caracterizaría por: “investigar qué axiomas son utilizados en los hechos establecidos en la geometría de la intuición y comparar sistemáticamente las geometrías que surgen cuando uno de aquellos axiomas es omitido” (Hilbert en Giovannini, 2015, 22). La idea de una comparación sistemática de las diferentes geometrías, así como el hecho de la posibilidad del surgimiento de una nueva geometría mediante la modificación de alguno de sus axiomas, es sin duda un claro adelanto de las tesis que el matemático alemán desarrollaría posteriormente y que resultarían claves para la constitución del formalismo matemático.

-Geometría analítica: Se trata, a grandes rasgos, de aquella geometría que emplea el método analítico anteriormente mencionado en la resolución de problemas geométricos. “La geometría analítica correlaciona desde el comienzo los puntos de una línea y los números, reduciendo de ese modo la geometría al análisis” (Hilbert en Giovannini, 2015: 22) De la clasificación que acabamos de mencionar, resulta de especial interés una de las declaraciones anteriores de Hilbert: aquella donde se apela a la comparación de los diversos sistemas geométricos y del resultado de la alteración de los axiomas que fundamentan cada uno de ellos. Esto resulta clave para entender el inicio de la concepción geométrica de Hilbert, así como su posterior desarrollo.

Podemos fijar dos eventos que resultaron decisivos en el desarrollo del pensamiento de dicho matemático y que le encauzaron a escribir la obra sobre la que trata principalmente nuestro estudio: los trabajos en geometría proyectiva de von Staudt, y su hipótesis de la independencia de dicha disciplina respecto a otras ramas de las matemáticas; y la conferencia realizada en 1891 por el matemático Hermann Wiener titulada “Sobre los fundamentos y la construcción de la geometría”.

Ya hemos comentado con anterioridad como la geometría proyectiva fue pionera a la hora de presentar un sistema geométrico no-euclidiano, pese a que semejante cosa pasase desapercibida para la mayoría de matemáticos y filósofos. Sin embargo, a principios del siglo XIX, se produjo un renovado interés por este tipo de geometría gracias a los trabajos de Jean-Victor Poncelet. En concreto, sería su artículo “Traité des propriétés projectives des figures”, el cual despertaría la atención de un gran número de matemáticos, entre ellos, Karl von Staudt. En este punto, la geometría proyectiva se encontraba en una situación que podríamos denominar de “encrucijada metodológica”,

librada entre el método sintético y el analítico. Tal como hemos explicado, el surgimiento del método analítico acabo por imponerse en el campo de la geometría, suplantando al método sintético practicado previamente. Esta disparidad metodológica a la hora de tratar de resolver los problemas geométricos había causado una disputa entre los partidarios de un método en exclusiva; se había creado un purismo metodológico por el cual, muchos matemáticos defendían la posición de que solo una de las dos metodologías era la correcta a la hora de construir la geometría, de modo que, o bien aceptaban la idea de que el enfoque algebraico de dichos problemas era la forma adecuada de abordarlos, o bien optaban por conferir a la geometría un carácter autónomo, donde sus problemas debían de resolverse recurriendo a nociones y método específicos de la geometría, tales como “corte” “intersección” “proyectividad” o “unión”. La geometría proyectiva ya se había demarcado como una disciplina independiente a la geometría euclídea, pero aún no se había librado de lo que, para los defensores del método sintético, suponía un grave problema, el cual era la necesidad de recurrir a conceptos métricos para definir y demostrar gran parte de sus teoremas; nociones como la de concepto de razón doble eran definidas mediante su caracterización algebraica, pues se debía recurrir al concepto de razón o división para definirla. Es en este punto donde Straudt destaca por sus trabajos publicados entre los años 1857-1860 bajo el título de “Geometrie der lage”, pues en ellos, consigue desarrollar la geometría proyectiva recurriendo a nociones puramente sintéticas, exclusivas de dicho sistema geométrico, sustituyendo, por ejemplo, la noción antes menciona por la de Cuaterna armónica, la cual era definida en términos puramente geométricos, recurriendo solo a las nociones de “unión” e “intersección” de puntos y rectas. De esta forma, la geometría proyectiva no necesitaba recurrir a los conceptos de longitud y medida para demostrar sus teoremas, sino que se había liberado de ellas y se había constituido como una disciplina con conceptos y nociones propias.

Es precisamente este hecho, el de haber vuelto a geometría una disciplina autónoma, capaz de construirse valiéndose únicamente de conceptos y definiciones exclusivas de ella, la parte del trabajo que Straudt que más interesó a Hilbert y que le ayudaría a desarrollar su concepción axiomática de la geometría, como una ciencia capaz de desarrollarse independientemente de otras ramas de la matemática. Como el mismo dice en sus notas de clase:

Contrariamente a sus predecesores, quienes siempre necesitaron el cálculo, el [Von Straudt] consiguió hacer de la geometría proyectiva, “una ciencia autónoma, que no requiere de la medida” (Hilbert en Giovannini, 2015, 39)

Aquí podemos apreciar claramente el interés de Hilbert de hacer de la geometría una disciplina que pudiese fundamentarse recurriendo exclusivamente a una serie de nociones y conceptos que fuesen exclusivos de ella, pudiendo derivar de ellos todos los teoremas que compondrían su campo sin recurrir a otra clase de conceptos. La idea de determinar un conjunto concreto de proposiciones específicas de una ciencia, mediante las cuales se pudiese inferir todos los teoremas verdaderos de dicha disciplina científica, será la tarea que emprenderá posteriormente a lo largo de su carrera, no solo para la geometría, cuyo mayor aproximamiento a esta perspectiva será su obra “Fundamentos de la geometría”, la cual analizaremos en profundidad más adelante; sino también para las matemáticas e incluso, para toda ciencia en general.

La conferencia impartida Wiener fue sin duda uno de los eventos más influyentes en la concepción temprana de la geometría que experimentó Hilbert, tal como afirman sus biógrafos, como Blumenthal, su biógrafo oficial.

Hilbert me relató que esta conferencia le provocó un interés tan grande para ocuparse de los axiomas de la geometría, que en el mismo viaje de regreso en tren emprendió la tarea (Blumenthal en Giovannini, 2015: 47)

Dicha conferencia resulta de especial interés pues, a diferencia de los trabajos de Straudt, donde se habla de la geometría proyectiva pero solo a escala metodológica; esto es, tan solo trata acerca de cómo construir la geometría proyectiva empleando únicamente el método sintético, sin entrar en consideraciones acerca de los fundamentos en que se basa esta preferencia metodológica, la conferencia de Wiener trata directamente de este asunto, como bien indica su título “Sobre los fundamentos y la construcción de la geometría”. En dicha conferencia, Wiener proponía, a la manera de Straudt, que la geometría fuese desarrollada como una teoría completamente abstracta, prescindiendo, no solo de los elementos pertenecientes a otras ramas de las matemáticas, tales como nociones de longitud o herramientas teóricas extraídas del álgebra.

Aquello que debe exigirse a una demostración de un teorema matemático, es que utilice sólo aquellas premisas de la que el teorema realmente depende. Las premisas más básicas imaginables son la existencia de ciertos objetos y de ciertas operaciones, a través de las cuales los objetos están conectados (Wiener en Giovannini, 2015: 47)

La última parte de la cita es de gran interés, pues consideramos que resulta fundamental resaltar la importancia que dichas aseveraciones tuvieron para el desarrollo ulterior de la concepción de la geometría de Hilbert, pues como veremos más adelante, el sistema axiomático que propondrá 8 años más tarde sigue al pie de la letra esas “premisas más básicas” de las que habla Wiener. Como se puede apreciar, al igual que Straudt, era un férreo partidario del método sintético, no solo en geometría, sino en la matemática en general, defendiendo la idea de la necesidad de un conjunto de premisas específicas a un dominio científico, a partir del cual, se pudiesen derivar todos los teoremas pertenecientes a dicha disciplina sin la necesidad de recurrir a herramientas o elementos pertenecientes a otra ciencia. Sin embargo, en su conferencia Wiener también propone otra idea que influirá de manera sustancial en los trabajos de Hilbert y en sus desarrollos ulteriores. Esta se trataría de la vacuidad referencial de los elementos geométricos. Como explica Giovannini:

Wiener sugiere que es posible construir la geometría de una manera abstracta, partiendo solo de un conjunto de objetos o elementos no definidos, cuyas únicas propiedades son aquellas relaciones básicas establecidas en los “postulados básicos” (Giovannini, 2015: 48)

De este modo, por un lado, tenemos la idea de que los objetos de los que trata la geometría (círculos, triángulos, esferas), no deberían de tener ningún referente por el cual obtuviesen significado, sino que este debería venir determinado por una serie de premisas o postulados básicos, que estableciera una serie de relaciones específicas entre dichos objetos, y serían precisamente esas relaciones y las propiedades determinadas por ellas, las que dotarían de significado a dichos elementos. En otras palabras, nos encontramos ante una concepción relacional de la geometría. A diferencia de lo que hizo Euclides en su obra, donde en un inicio, nos ofrecía una serie de definiciones que determinaban las características principales de las nociones ahí definidas, en este caso, se prescinde de dichas definiciones, dejando a dichas entidades en un estado de

vacuidad referencial, pues su significado no vendría determinado por algún referente externo, sino por un grupo de axiomas o proposiciones primitivas que describían el tipo de operaciones que era posible realizar con dichos elementos y como se comportarían al manejarlos de determinada manera; dicho de otra forma, no hay necesidad de especificar a qué nos referimos cuando hablamos de un círculo, nos bastaría con especificar el tipo de operaciones que podemos realizar con dicho objeto y como éste reaccionaría al ser sometido a ella, para haber caracterizado completamente a dicho elemento geométrico. Con esto, vemos que se estaba produciendo una suerte de transformación, en la cual, los axiomas o postulados básicos de la geometría pasaban a cumplir el papel de definiciones. Como afirma Laura Fontanella en un artículo donde se dedica a analizar la concepción, que tanto Hilbert como el célebre matemático Henri Poincaré tenían de los axiomas, ambos matemáticos coincidían a la hora de entender los axiomas de dicha forma, así como aceptaban la tesis de la vacuidad referencial de las entidades geométricas.

Despite the deep differences in their philosophical views, Poincaré and Hilbert came to the same conception of the axioms of geometry: they are definitions in disguise; rather than asserting undeniable truths, they fix the meaning of the basic terms of geometry (point, line, etc.) that would otherwise remain undefined. (Fontanella, 2019: 168)

De esta manera, los geómetras se conseguían librar de la engorrosa tarea, de carácter más filosófico que matemático, de determinar qué clase de entidades estaban manejando y con qué clase de elementos trabajaban. Las definiciones propuestas por Euclides resultaban muy útiles a la hora de demostrar algunos de sus teoremas, sin embargo, algunas de ellas resultaban un tanto difíciles de concebir o de hacerse una representación de ellas. ¿Qué significa exactamente eso de que una recta es “longitud sin anchura”? Ofreciendo tal definición, podía demostrarse una serie de teoremas, pero, a su vez, se estaba especulando con la existencia de una entidad difícilmente imaginable, algo que poseería longitud, pero no anchura, imposible de encontrar en el espacio físico en que nos encontramos. Lo mismo ocurría con la noción de punto como “aquello que no tiene partes”, pues, aunque esta definición permitía caracterizar de forma muy adecuada las relaciones de intersección o de corte entre rectas, cuando se piensa en ella, nos damos cuenta de que resulta una definición un tanto oscura y confusa. Sin embargo, al reformular la geometría como una disciplina cuyos conceptos

básicos vienen caracterizados, no por definiciones que establecen algún tipo de rasgo distintivo, sino por una serie de proposiciones que determinan de qué manera se relacionan con otros elementos del mismo campo, entonces, podemos prescindir de ofrecer dichas definiciones y limitarnos solo a especificar las relaciones básicas que se establecen entre tales objetos indefinidos, pudiendo derivar de dichas relaciones todo el conjunto de teoremas que compondrían el campo de la geometría. Dicha concepción de las nociones geométricas no fue aceptada de manera generalizada, aunque está claro que influyó notablemente en Hilbert, y algunos matemáticos y filósofos se opusieron a ella, defendiendo que las definiciones eran elementos clave en la geometría, necesarios para la construcción de sus teoremas, de modo que no bastaba con determinar solo el tipo de operaciones y de relaciones que las figuras geométricas podían entablar con otros elementos del mismo campo. Un ejemplo de dicha oposición la veremos más adelante, cuando analicemos la polémica epistolar que Hilbert mantuvo con otro de los grandes filósofos de la matemática de su tiempo: Gottlob Frege.

Con esto, vemos que los trabajos de Straudt y Wiener sientan prácticamente la totalidad de las bases teóricas sobre las que se sostendrá el sistema axiomático propuesto por Hilbert casi una década más tarde en sus “Fundamentos”: por un lado, tenemos la reivindicación de la autonomía de los axiomas de la geometría, donde se defiende que los principios fundamentales de dicha ciencia deben de consistir en una serie de proposiciones específicas de dicha disciplina, independientes de toda noción aritmética o algebraica. Por otro lado, la conferencia de Wiener dio a Hilbert la idea de que no era necesario establecer una serie de rasgos distintivos o de definiciones para los términos con los que se operaba en la geometría, bastaba con, mediante una serie de axiomas, indicar el tipo de relaciones fundamentales que mantenían con otros elementos del mismo dominio científico y a partir de estas, ir deduciendo mediante cálculos lógicos, todos los teoremas que compondrían el campo de dicha disciplina. Así pues, los años que van de 1891 a 1894 sirvieron a Hilbert para dotarse de gran parte de las tesis principales que acabaría por desarrollar años más tarde al redactar la obra que pasaremos a analizar a continuación; entre ellos, podemos destacar las ideas de que:

-Para construir una disciplina científica como la geometría, el método más adecuado era recurrir a una serie de proposiciones primitivas o fundamentales, denominadas axiomas, a partir de los cuales se pudiesen inferir todos los teoremas verdaderos constitutivos de dicha ciencia

-Dichos axiomas no debían de establecer ningún tipo de propiedad o rasgo distintivo de los términos manejados por dicha ciencia, esto es, ninguna definición; tan solo debían de establecer la manera en que se relacionaban unos con otros según el tipo de operaciones que se realizasen sobre ellos; esto es, no debía de darse una definición de los términos con los que se operaba.

Con esto, hemos fijado casi todos los eventos que influyeron de manera más decisiva en el desarrollo del pensamiento primitivo hilbertiano y que fueron clave en la redacción de su obra “Fundamentos de la geometría”. Sin duda, la época que fue de 1891 a 1894 fue decisiva para el viraje puramente axiomático y formalista de Hilbert, si bien, como podemos ver por sus notas de clase de su curso de geometría proyectiva, en esta etapa temprana aun no presentaba ese formalismo exacerbado que podemos apreciar en sus artículos y trabajos posteriores a 1918, pues continuamente hace referencia a los aspectos empíricos de dicha disciplina y la necesidad de recurrir a la experiencia para determinar la validez de sus teoremas. De este modo, Hilbert aún seguía presa de la concepción clásica de la geometría como ciencia que estudia las propiedades espaciales, solo que, debido al surgimiento de las geometrías no-euclidianas, había renegado de la tesis Kantiana de la aprioricidad de dicho espacio, así como de su carácter subjetivo como intuiciones puras del sujeto; la geometría seguía estudiando las propiedades espaciales, pero estas no eran ningún elemento perteneciente a la sensibilidad humana pura, sino que existían de manera independiente al sujeto cognoscente, de modo que solo podíamos llegar a conocerlas *a posteriori*, esto es, recurriendo a la experimentación y a la experiencia empírica; tal es así que afirmaba que la geometría era una disciplina que, por su necesidad de experimentación y de interacción con la realidad empírica, se encontraba más cercana a las ciencias naturales, como la física o la química, que a las formales, como la lógica u otras ramas de las matemáticas.

Hilbert afirma que la geometría, en función de su origen empírico, se encuentra naturalmente más cerca de disciplinas físicas como la mecánica, que de la aritmética o el análisis (Hilbert en Giovannini, 2015: 58)

Así pues, pese a que aún se mantenía en una línea de pensamiento muy análoga a las concepciones clásicas, vemos que ya desde principios de la década de los 90 del siglo XIX habría empezado poco a poco a cambiar su línea de pensamiento, si bien, éste

sería un cambio progresivo que, en opinión del autor de este trabajo, no habría llegado a concretarse del todo aún en su obra de 1899 “Fundamentos de la geometría”. Las razones para afirmar tal cosa las expondremos en la sección dedicada a analizar dicha obra y sus contenidos, pero antes de pasar a ello, debemos de hacer una breve mención a otro evento que también habría sido decisivo para la publicación de dicha obra: los trabajos de Moritz Pasch sobre esta rama de las matemáticas y, en concreto, la publicación en 1882 de su obra “Fundamentos de la nueva geometría”.

2b) Consolidación de la concepción temprana de la geometría: la influencia de M. Pasch y sus “Fundamentos de la nueva geometría” en Hilbert

No podemos proceder a realizar un análisis de la obra más emblemática de Hilbert sin mencionar, aunque sea de manera superficial, los trabajos de M. Pasch y la influencia que éstos tuvieron sobre el matemático nacido en Königsberg, pues, como es aceptado por un gran número de historiadores, los trabajos de éste último fueron decisivos para que Hilbert llegase a decantarse de manera definitiva por abordar la geometría desde una metodología axiomática independiente de todo elemento aritmético o algebraico.

El matemático que mejor representa el enfoque axiomático y que tuvo probablemente mayor impacto en la obra de Hilbert fue M. Pasch (1843-1930) (Altamira, Sabina de Lis, 2001: 77)

Este matemático es reconocido principalmente por la publicación en 1882 de la obra mencionada en el título de esta sección del trabajo, la cual supuso una verdadera revolución en el campo de la geometría e influyó notablemente en el repunte del método sintético en la geometría, así como influyó notablemente en la concepción de las matemáticas de muchos de sus representantes, entre ellos Hilbert. El objetivo del trabajo de Pasch era tratar de determinar un conjunto finito de axiomas a partir de los cuales se pudiesen deducir todos los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva mediante deducciones puramente lógicas, sin el uso de sistemas de coordenadas ni tampoco, de diagramas, tal como había hecho Euclides en un principio. Ya hemos indicado cómo los matemáticos del siglo XIX recelaban de los aspectos diagramáticos de la geometría euclídea, que requería del trazado de las diferentes figuras con las que se trabajaba para poder inferir algunas de sus propiedades fundamentales, tal como hemos puesto de manifiesto al exponer la Proposición 1 en el primer apartado de este trabajo. Esta

necesidad de recurrir a construcciones diagramáticas para poder corroborar ciertas propiedades geométricas era algo intolerable para aquellos matemáticos que tenían una concepción completamente formal y abstracta de las matemáticas. Para los partidarios de esta forma de concebir la geometría, sus teoremas debían de demostrarse recurriendo exclusivamente a inferencias lógicas realizadas sobre ese conjunto de proposiciones primitivas que servían como axiomas de un sistema geométrico. Sin embargo, tales axiomas no podían postularse sin más, sino que era necesaria la intervención de la percepción del mundo externo para poder determinarlos; la experiencia era un factor fundamental en el desarrollo de la geometría, pues de la observación de los hechos del espacio físico, debían de poder inferirse una serie de fenómenos fundamentales, que estuviesen presentes en toda forma de percepción del mundo y los cuales constituían los axiomas fundamentales de la geometría; tal era la forma en que Pasch concebía dicha ciencia.

Los conceptos geométricos son ese grupo especial de conceptos que sirven para describir el mundo externo, y se refieren a la forma y posición mutua de los cuerpos [...] El punto de vista así indicado, que será asumido en lo que sigue, es que la geometría es una parte de la ciencia natural (Pasch en Giovannini, 2015: 57)

El surgimiento de las geometrías no-euclidianas había acabado con las tesis Kantianas de la aprioricidad del espacio, no obstante, la idea de que la geometría se encargaba de estudiar las propiedades del espacio físico aún seguía vigente entre un gran número de matemáticos, entre ellos Pasch, como podemos observar en la anterior cita, pero también Hilbert, quien, en su concepción temprana de la geometría, mantenía una posición empirista respecto a esta ciencia, aunque un tanto ambigua, bastante alejada del formalismo matemático que acabaría profesando años más adelante.

Durante el verano de 1893 en Königsberg, Hilbert imparte un curso titulado “Axiomas de la geometría”, donde ya se puede apreciar el interés que se había despertado en Hilbert por concretar los axiomas fundamentales de dicha disciplina, debido principalmente a los eventos anteriormente mencionados y a la lectura de la obra de Pasch. Durante este curso, que se extendió hasta 1884, Hilbert se dedicó al estudio de los presupuestos básicos sobre los que se sostenían los teoremas de la geometría euclidiana, tratando de demostrar que gran parte de los teoremas fundamentales de la

geometría proyectiva eran deducibles recurriendo exclusivamente a nociones como las de “incidencia” y “orden”

En estas notas Hilbert se dedica exclusivamente a presentar un sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental y a definir sobre la base de los dos primeros grupos (incidencia y orden), algunos conceptos y teoremas de la geometría proyectiva (Hilbert en Giovannini, 2015: 55)

Podemos ver estas notas de clase como un claro anticipo de las labores que emprendería posteriormente en obra publicada en 1889, pues, la idea de desarrollar un conjunto de axiomas determinados, a partir de los cuales se puedan deducir los teoremas fundamentales de un sistema geométrico, es aquí anticipada, con la excepción de que, a diferencia de los “Fundamentos”, el sistema geométrico que se estudia con mayor profundidad en estas lecciones es el de la geometría proyectiva, mientras que en la obra anteriormente citada será el sistema euclidiano, así como que en dicha obra el grupo de axiomas de los que se servirá serán un total de 5, que pasaremos a exponer en breves.

Está claro que la obra de Pasch fue decisiva en la consolidación del pensamiento axiomático de Hilbert y los objetivos que se propuso realizar en años posteriores, como el mismo afirma en una carta dedicada al matemático Félix Klein.

Creo que se puede aprender mucho, respecto de las disputas de los geómetras en torno a los axiomas de la geometría, del inteligente libro de Pasch [...] En mi opinión, la pregunta respecto de cuál es el sistema más pequeño de condiciones (axiomas), que uno debe establecer para un sistema de cosas, de manera que el mismo sistema sirva para describir la forma externa del mundo exterior, no ha sido resuelto todavía (Hilbert en Giovannini, 2015: 56)

Estas declaraciones resultan de sumo interés pues podemos ver que, aun en 1893, Hilbert seguía manteniendo la idea de que la geometría debía de “describir la forma externa del mundo”, mostrándose partidario de la concepción clásica de la geometría, la cual hemos ido exponiendo a lo largo del trabajo. Pero lo más relevante será la afirmación de que, semejante empresa no ha sido realizada aun con éxito. Esto será precisamente lo que se propondrá hacer en los años siguientes, tratando de axiomatizar toda la geometría euclidiana en el menor número de axiomas o proposiciones posibles. Todos estos esfuerzos acabaran por cristalizar en el desarrollo

de la que será sin duda su obra más conocida e influyente dentro del ámbito de las matemáticas: “Fundamentos de la geometría”, la cual pasaremos a exponer en profundidad en la siguiente sección

3. Los Fundamentos de la geometría

3a) Exposición de sus contenidos: los precedentes del formalismo matemático

Hasta ahora, hemos recorrido la historia de la geometría, desde sus orígenes hasta finales del siglo XIX, para desembocar finalmente en la concepción temprana de Hilbert y como esta fue conformándose. Todos los trabajos e investigaciones realizadas por dicho autor en esta ciencia culminan en una de las obras más influyentes de las matemáticas y que supuso la obra más importante de dicho autor y el objeto de estudio de nuestro trabajo: “Fundamentos de la geometría”.

Esta obra no solo constituye un hito en la historia de las matemáticas, sino que a su vez resulta de especial relevancia para la filosofía, pues en ella podemos encontrar lo que sería la obra germinal del formalismo matemático, una de las corrientes más importantes en la filosofía de las matemáticas del siglo XX, especialmente en el periodo conocido como crisis de fundamentos. En ella, Hilbert se propone deducir todos los teoremas fundamentales de la geometría euclídea partiendo de un conjunto de 23 axiomas, divididos en 5 grupos, aplicados a elementos indeterminados que pudiesen ser sometidos dicho grupo de transformaciones explicitadas en dichos axiomas. A continuación, vamos a exponer los contenidos de la obra que más importancia tienen a nivel filosófico, pues nos permiten ver el estado inicial de la corriente de la filosofía de las matemáticas que hemos mencionado antes, pues, en esta etapa, Hilbert aún no había desarrollado completamente su concepción formalista madura y los presupuestos de la obra difieren de los que más adelante defendería. Por ello, a la vez que exponemos los contenidos de la obra, trataremos de señalar algunos puntos donde las ideas expresadas con Hilbert no se corresponden del todo con las que defendería más adelante.

La obra, en su última edición, pues Hilbert realizó múltiples reediciones de la ella, donde añadió algún apartado o altero parte de sus contenidos, se compone de 8 capítulos, cada uno tratando una temática diferente. Expondremos el título de cada uno para así ver la estructura general de la obra, pero en nuestro estudio, no centraremos

exclusivamente en los capítulos 1 y 2, pues son los que poseen mayor relevancia a nivel filosófico. Dichos capítulos son:

1. Los 5 grupos de axiomas
2. Incontradictibilidad e independencia de los axiomas
3. Teoría de las proporciones
4. La teoría del contenido superficial en el plano
5. El teorema de Desargues
6. El teorema de Pascal
7. Las construcciones geométricas fundadas en los axiomas I-IV
8. Epílogo

A continuación, expondremos los contenidos de los capítulos indicados anteriormente, centrándonos en los aspectos de mayor calado filosófico, sin profundizar en los aspectos estrictamente matemáticos de dicha obra. Antes de comenzar a analizar los capítulos antes mencionados, merece la pena hacer un breve comentario a la introducción de dicha obra, la cual apenas ocupa una página, pero que nos ofrece gran información acerca de los presupuestos filosóficos sobre los que se asentaba Hilbert. Por ejemplo, a lo largo de la obra hemos puesto de manifiesto cómo, tanto dicho matemático como la gran parte de sus compañeros, habrían rechazado la tesis kantiana de la aprioricidad del espacio, debido al surgimiento de las geometrías no-euclidianas. Sin embargo, no se habían librado completamente de la influencia de la filosofía kantiana y alguna de sus ideas o tesis principales seguían siendo manejadas por cierto número de matemáticos, especialmente, aquellos partidarios de la corriente intuicionista desarrollada por el matemático Luitzen Brouwer, la cual mantuvo una disputa teórica con el formalismo, representado por Hilbert, en el periodo conocido como Crisis de fundamentos de las matemáticas. Por ello, resulta de especial interés el hecho de que Hilbert decidiese poner de epílogo para la introducción un fragmento de la “Crítica de la razón pura” de Kant, aquella que dice: “Así pues, todo conocimiento comienza con intuiciones, de esta pasa a conceptos y termina con ideas”. Quizás sea en este hecho donde más se puede apreciar que la concepción formalista que profesaría años más tarde

no se encontraba aún completamente definida, pues esa referencia a la intuición como el origen de todo conocimiento nos remite a una postura de carácter más bien empirista, como el que habría mostrado en sus diferentes notas de clase. Por ello, consideramos que algunas de las ideas y presupuestos que presentaría dicha obra no se corresponderían con los que años más tarde defendería, donde esa necesidad de recurrir a la experiencia, sobre todo en disciplinas como la geometría, habría ido perdiendo peso progresivamente, hasta que únicamente los axiomas serían los elementos clave en la fundamentación de toda disciplina científica.

Si ahora consideramos de cerca una teoría determinada, constatamos invariablemente que el edificio de los conceptos en un dominio científico deben tener como base un número restringido de proposiciones excepcionales que se basten a sí mismas para construir todo el edificio de acuerdo a principios lógicos (Hilbert, 1999: 128)

Esta cita, extraída del célebre artículo “Pensamiento axiomático”, publicado en 1918, época en la que se suele datar el inicio del periodo aritmético de Hilbert, da a entender que la validez de los teoremas científicos reside en los axiomas de la ciencia en particular que se está estudiando y las diferentes operaciones lógicas que pueden realizarse sobre ellos, independientemente de los datos de la experiencia.

El papel jugado por la sensibilidad y la experiencia en el pensamiento de Hilbert resulta complejo y, en esta obra en particular, algo que parece estar poco desarrollado o donde no se profundiza demasiado. Es así que, en la introducción a dicha obra, podemos encontrarnos con declaraciones muy semejantes a las anteriormente citadas “La Geometría, lo mismo que la Aritmética, necesita para su consecuente construcción pocas y sencillas proposiciones fundamentales” (Hilbert, 201: 3). Con estas declaraciones, se pone de manifiesto la posición estrictamente axiomática del autor, pues solo dichas proposiciones fundamentales serían de relevancia para la construcción de dicha disciplina. Sin embargo, al continuar leyendo, vemos que dichos axiomas son caracterizados en la misma línea de pensamiento que el autor habría mostrado en sus diferentes notas de clase:

Estas proposiciones fundamentales se llaman *axiomas*. El poner de manifiesto los axiomas fundamentales de la geometría, es un problema que se encuentra presente desde los tiempos de Euclides en numerosos y excelentes tratados de la

literatura matemática. El problema citado queda reducido al análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales (Hilbert, 2016: 3)

Una vez más vemos como, en estas declaraciones, Hilbert sigue siendo partidario de relacionar geometría y espacio físico, al admitir que los axiomas sobre los que fundamentará su sistema geométrico no son sino el producto del análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales. Así pues, la geometría, no solo no queda desvinculada del estudio de las propiedades del espacio físico, sino que además, parece que dicho espacio tampoco queda completamente libre de los caracteres subjetivos del sujeto cognoscente, pues, dichos axiomas se sustentan en nuestras “intuiciones espaciales”. El problema con el que aquí nos encontramos es que la noción de “intuición” no es definida en todo momento, lo cual vuelve un tanto engorroso el acabar de determinar con claridad la concepción temprana de dichos axiomas en el pensamiento Hilbertiano, pues la noción de “intuición” o de “intuición matemática” no es clara en absoluto, como expresa Alberto Dou. “La noción de intuición matemática está en un plano prematemático o mejor, de la filosofía de las matemáticas” (Dou, 1970, 114). Así pues, Hilbert no profundiza en dicha noción y únicamente se dedica a enunciarla, sin especificar los rasgos distintivos de dicha intuición. No entraremos en los problemas que esto plantea a la hora de hacerse una idea clara de la concepción hilbertiana de la geometría, tan solo nos limitaremos a señalar que este aspecto se encuentra poco claro y definido, más aun en su etapa temprana.

-Los 5 grupos de axiomas

Por fin, tras este repaso genealógico por la historia de la geometría y los eventos que más influyeron en la conformación del pensamiento de David Hilbert, procederemos a exponer los contenidos de su obra de mayor relevancia sobre esta disciplina, pues en ella, se exponen los veintitrés axiomas desarrollados por Hilbert para fundamentar la geometría, organizados en cinco grupos, sentando los presupuestos sobre los que tratará de deducir todos sus teoremas, así como nos ofrece su concepción de las entidades geométricas y de cuál sería su estatuto ontológico; comenzaremos tratando este último punto para luego, pasar a exponer los rasgos generales de los cinco grupos de axiomas, así como las diferencias presentes entre la axiomática euclídea y la hilbertiana.

Como hemos señalado con anterioridad, uno de los problemas principales que tuvo que enfrentar la filosofía de la geometría fue determinar qué clase de entidades eran aquellas manejadas por los geómetras, del mismo modo que hubo disputas acerca de las entidades aritméticas, como los números. En un primer momento, Euclides no presenta una posición clara a este respecto, solo se limita a dar una serie de definiciones de unas entidades como son circunferencias o triángulos, sin llegar a meterse en cuestiones de índole filosófica; siendo los trabajos de Euclides estrictamente geométricos, se limita a establecer una serie de elementos y de definiciones, dejando de lado los problemas que surgirían de definiciones de ese tipo. Platón y Aristóteles trataron de solucionar esto de diversas maneras, el primero, concediéndole realidad independiente a dichas entidades y postulando su existencia autónoma, independiente de las representaciones diagramáticas realizadas por los filósofos; y el segundo partiendo de una posición más moderada, aceptando la existencia de entidades geométricas como rectas o circunferencias, pero solo en la medida en que existían unos referentes en la realidad empírica en los cuales se encontraban objetivados, de modo que más que existir, subsistían en dichas entidades. Con el paso del tiempo, hemos visto que los elementos geométricos fueron cada vez relacionándose con el espacio físico, hasta que en cierto momento, llegaron a ser considerados como las formas de los fenómenos empíricos; por ejemplo, las orbitas planetarias tenían forma elíptica, de modo que se consideraba que la elipse era un elemento constitutivo de la astronomía y de los movimientos rotatorios de los planetas. Las nociones geométricas pasaron a ser entendidas como modos de caracterizar las propiedades del espacio físico e incluso, algunos llegan a pensar que los diferentes fenómenos del espacio físico no son sino un reflejo de dichas nociones y propiedades, en una línea de pensamiento muy similar al realismo platónico. Todo esto cambia con el surgimiento de las geometrías no-euclidianas, donde dichas nociones pasan a tener una caracterización completamente distinta: no es lo mismo una recta en la geometría euclidiana que en la hiperbólica y así mismo, las propiedades de figuras como triángulos pasan a tener propiedades diferentes dentro de cada sistema geométrico, de modo que, en el sistema euclidiano, la suma de sus ángulos internos es siempre exactamente igual a dos rectos, o a π radianes, mientras que en la geometría hiperbólica, tal como indicamos con anterioridad, la suma de los ángulos internos siempre será inferior a π radianes. Esto planteaba una serie de dudas importantes sobre tales nociones ¿A qué nos estamos refiriendo exactamente cuando hablamos de triángulo o de recta? ¿Qué clase de entidad estamos denotando con

semejantes nombres? La heterogeneidad semántica que presentaban tales nociones suponía un problema para el geómetra a la hora de determinar con qué clase de objetos trabajaba y que clase de estatuto ontológico, que grado de realidad tenían. Es aquí donde Hilbert introduce su primera innovación, ya planteada anteriormente por matemáticos como Wiener, la cual sería la vacuidad referencial de las entidades geométricas.

Esta forma de concebir las entidades geométricas lo que hace “vaciarlas de contenido”; esto es, hacer que no se refieran a ningún objeto o ente en particular más que a ellas mismas. “Hilbert [...] parte de que se debe admitir la existencia de tres tipos de objetos matemáticos, a los cuales llamaremos (por tradición, convenio o simple dejadez), puntos rectas y planos” (Altamira, Sabina de Lis, 2007: 114). De este modo, damos por sentado la existencia de un grupo de entidades indefinidas a las cuales le conferimos una nomenclatura determinada, ateniéndonos a la tradición geométricas. Así pues, al hablar de *puntos*, *rectas* y *planos* no nos referimos a ningún ente específico, sino que, como dice Hilbert en una de sus frases más conocidas a la hora de hablar de geometría, cuando afirmó que: “uno debería poder decir “mesas”, “sillas” y “jarras de cerveza”, en vez de “puntos”, “rectas” y “planos” y no por ello los resultados [geométricos] perderían su validez” (Altamira, Sabina de Lis, 2007, 108). De este modo, Hilbert trata de resolver el problema de los referentes geométricos apelando a su vacuidad; ni realistas ni nominalistas habrían acertado a la hora de caracterizar correctamente dichas entidades, pues, si bien no se tratarían de entidades con existencia independiente y autónoma, tampoco serían meros *flatus vocis*, pese a su vacuidad referencial ¿Cómo es esto posible? Sencillo. Pese a que ya tengamos claro que no existen entidades concretas a las cuales nos estemos refiriendo al hablar de puntos o rectas, tales nociones sí que tendrían un significado y unas propiedades determinadas, poseyendo de esta forma existencia, mas no de la manera en que antiguamente se había pensado. La realidad de dichas nociones residiría en su carácter relacional; esto es, dichas nociones adquieren significación en función de una serie de relaciones y operaciones que afirmamos que se pueden realizar con ellas, y todo objeto que se adapte a ese tipo determinado de relaciones y operaciones podrá ser denominado de dicha forma. “Tal descripción [la de los hechos geométricos] es llevada a cabo por la construcción de un esquema o entramado de conceptos” (Giovannini, 2015: 58). De esta forma, los axiomas pasan a cumplir el papel que antiguamente cumplían las definiciones, ofreciendo los rasgos distintivos de las entidades con las que tenemos pensado trabajar.

Concebimos los puntos, rectas y planos en ciertas relaciones reciprocas y expresamos estas relaciones con palabras tales como entre, congruente, paralelo o continuo. La descripción completa de estas relaciones hecha exactamente y con fines matemáticos resulta de los axiomas de la geometría (Hilbert, 2016, 3)

Con esto, el foco de los fundamentos de la geometría deja de estar en las entidades denotadas por “punto” o “recta”, pues estas pueden usarse indistintamente para denotar una heterogeneidad de objetos, y pasa a estar en el tipo de relaciones que establecemos entre dichos elementos mediante nociones como las de “entre” o “paralelo”. De hecho, ese es el objetivo de los axiomas de Hilbert: tratar de definir, mediante una serie de proposiciones, los significados de dichas nociones (por ejemplo, como indicaremos a continuación, el segundo grupo de axiomas tendría por objetivo definir el concepto “entre”). De este modo, las ideas propuestas por Wiener en su conferencia de 1881 serían abaladas por Hilbert en esta obra y desarrolladas con mayor profundidad, haciendo que esa vacuidad referencial de las entidades geométricas pueda fundamentarse sobre un grupo finito y determinado de axiomas, los cuales, pasaremos a continuación a explicar, señalando los aspectos de mayor importancia para los objetivos de nuestro trabajo.

Como hemos dicho, la obra propone un total de 23 axiomas organizados en 5 grupos, los cuales definen diferentes tipos de relaciones e interacciones entre ciertos elementos indeterminados. A continuación, expondremos los 5 grupos de axiomas y mencionaremos alguno de ellos, así como algún teorema demostrado por Hilbert, para posteriormente, ver los aspectos más distintivos de su obra respecto a la axiomática Euclidiana con la que se originó la geometría.

I: *Axiomas de enlace*

Este grupo de axiomas establece el significado de la noción “entre”, tan recurrente en la geometría sintética. “Los axiomas de este grupo establecen un *enlace* entre los referidos entes que hemos introducido: puntos, rectas y planos” (Hilbert, 2016, 4). Dicho conjunto contiene un total de 8 axiomas, estando los 3 primeros dedicados exclusivamente a la geometría plana, mientras que los restantes estarían destinados a la caracterización de dicha noción en el espacio tridimensional. Enunciaremos los 3 primeros, para ver de qué manera Hilbert caracterizó dicha noción para la geometría plana y posteriormente, algunos de los referentes a la geometría del espacio, para ver

que conclusiones pueden sacarse de ellos. Antes de nada, conviene aclarar, para facilitar la comprensión de dichos axiomas, una puntualización realizada por Hilbert tras enunciar los dos primeros axiomas: “En lugar de corresponderse mutuamente, usaremos también otras locuciones, por ejemplo, a pasa por A y B o a une A y B” (Hilbert, 2016, 4). Dicho esto, procedemos a su exposición:

I-1. “Dados dos puntos A, B, existe siempre una recta a , que con cada uno de los puntos A y B, se corresponde mutuamente”

I-2. “Dados dos puntos A, B, no existe más que una recta la cual, con cada uno de los puntos A, B, se corresponda mutuamente”

I-3. “Sobre una recta existen al menos dos puntos. Existen al menos 3 puntos no situados sobre una recta”

Como podemos apreciar, dichos axiomas guardan un enorme parecido con los postulados euclidianos, pudiendo ver el primero de ellos como una reformulación del primero de ellos: “Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera a un punto cualquiera”, pues vienen a decir exactamente lo mismo. La diferencia sería que, mientras para Euclides la relación de incidencia que se establece entre las rectas y los puntos, no resulta objeto de especial atención, mientras que en la axiomática hilbertiana, ésta resulta ser el elemento principal a tratar, debido a la concepción relacional de las entidades geométricas de la que hemos hablado anteriormente. Este grupo de axiomas se refieren exclusivamente a propiedades de puntos y rectas que pertenecerían al mismo plano, noción que comenzaría a ser caracterizada con la introducción del axioma 3, pues la existencia de 3 puntos no colineales implicaría la existencia de un espacio plano en que dichos puntos estén situados, no pudiendo situarlos a los 3 en una recta y por tanto, teniendo que admitir la existencia de un espacio que como mínimo, sea plano; esto es, tenga al menos dos dimensiones (Altamira, Sabina de Lis: 2007). Por lo demás, el resto de axiomas nos describen como inciden puntos y rectas en diferentes planos, los cuales, quedarían definidos inicialmente con la introducción del tercer axioma, para luego ir atribuyéndoles algunas propiedades a dichos elementos geométricos en base a otros axiomas, que especifican el tipo de relaciones de incidencia que mantendrían con el resto de entidades geométricas. En concreto, fijémonos en los axiomas 7 y 8:

I-7. “Si dos planos α y β , tienen un punto A en común, todavía tienen, al menos, otro punto común B”

I-8. “Existen, al menos, cuatro puntos no situados en el mismo plano”

De estas proposiciones se podrían inferir una serie de propiedades fundamentales del espacio físico; concretamente, el axioma 7 nos garantizaría que el espacio tiene a lo sumo 3 dimensiones, mientras que el 8 garantiza que el espacio no puede tener menos de tres dimensiones (Altamira, Sabina de Lis: 2007). Así pues, conseguimos caracterizar el espacio físico sin recurrir a nociones como las de “longitud” o “anchura”, tal como hacia Euclides, recurriendo únicamente a una serie de hechos o presupuestos fundamentales, basados en las relaciones de enlace e incidencia entre diferentes figuras geométricas, las cuales permanecerían indefinidas, siendo todas sus propiedades consecuencia de los axiomas que los coordinan. De dichos axiomas se seguirían de manera inmediata una serie de teoremas, que Hilbert no demuestra, al considerar que se siguen de manera inmediata de la lectura del conjunto de dicho grupo de axiomas. Uno de estos teoremas sería: “Por una recta y un plano no situado en ella, así como también por dos rectas distintas con un punto común, pasa siempre uno y solo un plano”. Esta proposición debería de derivarse intuitivamente de las relaciones especificadas en dicho grupo de axiomas, pues Hilbert no se dedica a demostrarla, tan solo la enuncia, considerando que su contenido resulta evidente a la luz de los axiomas de enlace. Así pues, existirían una serie de teoremas los cuales se seguirían de manera inmediata del conjunto de axiomas propuesto y que, por tanto, no requerirían demostración previa, siendo así considerados como los teoremas fundamentales de dicho grupo de axiomas.

II: *Axiomas de ordenación*

Este grupo de axiomas tiene como objetivo definir la relación “estar entre dos puntos”, mediante la cual, Hilbert establece una relación de orden entre diferentes figuras geométricas más complejas. “Los axiomas de este grupo definen el concepto “entre” y posibilitan, a base de este concepto, la ordenación de puntos sobre una recta, plano o espacio” (Hilbert, 2016: 5). Esta sección resulta de especial interés pues en ella, nuevamente podemos ver la tendencia a la indefinición de las nociones básicas de la geometría que Hilbert trataría de realizar en dicha obra, haciendo que éstas dependiesen exclusivamente de ciertas relaciones y operaciones. Es por ello que en dicho apartado

indica, a modo de corolario antes de enunciar dichos axiomas, lo siguiente: “Los puntos de una recta están en ciertas relaciones entre sí, para cuya descripción nos sirve especialmente la palabra “entre”” (Hilbert, 2016: 5). Aquí, podemos ver como se habla de ciertas relaciones, las cuales, pueden ser determinadas recurriendo al término “entre”. Dicha noción no tendría un significado propio, sino que nos serviría únicamente para denotar tales relaciones y sus rasgos característicos, de modo que ésta no tendría una definición, un significado concreto, sino que tan solo sería un vocablo empleado para referirse a dicho tipo de relaciones. Los axiomas que caracterizarían completamente la noción “entre” serían un total de cuatro, los cuales, pasaremos a enunciar en su totalidad, pues en esta sección tenemos un ejemplo del modo en que Hilbert va realizando las demostraciones de diversos teoremas geométricos a lo largo de la obra. Una vez enunciados dichos axiomas, expondremos la demostración del primer teorema deducible de ellos, de manera semejante a como hicimos con la Proposición 1 de los “Elementos” de Euclides, viendo los rasgos distintivos de cada tipo de demostración. Los axiomas de ordenación serían los siguientes:

II-1. “Cuando un punto B está situado entre un punto A y un punto C; A, B, C son tres puntos distintos de una recta y B está situado también entre C y A”

II-2. “Dados dos puntos A y C, existe siempre al menos un punto B sobre la recta AC de tal modo que C está situado entre A y B”

II-3. “De tres puntos cualesquiera de una recta no existe más que uno situado entre los otros dos”

II-4. “Sean A, B, C, tres puntos dados no situados en línea recta y a una recta del plano ABC que no contiene a ninguno de dichos puntos; cuando la recta pasa también por un punto del segmento AB, seguramente pase también, o por un punto del segmento AC, o por uno del segmento BC”

Dichos axiomas implicarían a su vez gran parte de los contenidos de los postulados euclidianos, tal como hacían el primer grupo de axiomas; así, por ejemplo, el axioma 2 es equivalente a Postulado 2 de Euclides, pues éste nos indica que se puede prolongar de manera indefinida una recta (Almira, Sabina de Lis, 2007). Además, será a partir de los dos primeros grupos de axiomas que acabamos de explicitar que Hilbert

realiza sus primeras demostraciones de teoremas geométricos. A continuación, veremos un ejemplo de ello.

Teorema 1: “Situado entre dos puntos A y C, existe siempre al menos un punto D en la recta AC”

Demostración: “Según el axioma I-3, existe un punto E fuera de la recta AC, y conforme al II-2, existe en AE un punto F, de suerte que E es un punto del segmento AF. Según el último axioma y el II-3, existe sobre FC un punto G que no está situado sobre el segmento FC. Según el axioma II-4 la recta EG cortara al segmento AC en un punto D”.

De esta forma, Hilbert demuestra, recurriendo únicamente a las operaciones y relaciones especificadas en los axiomas anteriores, el teorema aquí expuesto, sin necesidad de recurrir a la definición de los términos “recta” o “puntos”, a diferencia de Euclides, quien, en sus demostraciones, debe recurrir a las definiciones de las entidades sobre las que trabaja para poder inferir de ellas ciertos hechos y propiedades fundamentales, como vimos en su primera demostración, donde se sirve de la definición de circunferencia para la demostración de un modo de construir un triángulo equilátero. Además, el modelo de demostración hilbertiano es estrictamente formal; no necesitamos de ningún diagrama para corroborar las inferencias realizadas en ella, pues todas ellas, son deducibles mediante la correcta comprensión de los axiomas explicitados con anterioridad. Dicho teorema, además, llevaría implícita la idea de que una recta se compone de infinitos puntos pues, si siempre existe un punto D situado entre dos puntos A y B cualesquiera, dicha propiedad puede aplicarse de manera reiterada, de modo que siempre podremos fijar un nuevo punto en una recta, situado entre dos puntos dados. Dicha propiedad resulta de suma importancia por las repercusiones que tiene en la concepción de dicha figura geométrica, pues nos permite, mediante otra serie de demostraciones, concebir la recta como un conjunto infinito de puntos, de la misma manera en que la geometría analítica concebía el plano como un conjunto infinito de puntos, pero pudiendo prescindir de las nociones métricas empleadas por Euclides u otros matemáticos para definir dicha figura como “longitud sin anchura”. De este modo, ofrecemos una propiedad de dicha figura geométrica apelando únicamente a nociones geométricas, tal como se proponían los partidarios del método sintético, a la vez que nos ahorramos cualquier tipo de definición, centrándonos solo en determinar cómo dicha

figura interactúa con el resto de entidades geométricas. Esto último nos permite emplear dicha noción para cualquier objeto que se ajuste a las propiedades que se van demostrando progresivamente, de modo que nos libramos del inconveniente de determinar qué clase de entes son los puntos o las rectas, aceptando que estos son únicamente términos empleados para denotar una serie indeterminada de objetos, pero sin referentes fijos.

III- *Axiomas de congruencia*

En el siguiente apartado, Hilbert trata de caracterizar la noción de “congruencia”, tan recurrente en la geometría euclidiana, basándose de nuevo tan solo en nociones específicamente geométricas, así como el concepto de movimiento. “Los axiomas de este grupo definen el concepto de congruencia, y, con este, también el de movimiento” (Hilbert, 2016: 13). Dicho grupo de axiomas permiten demostrar un gran número de los teoremas fundamentales de la geometría euclidiana, sin embargo, no poseen especial relevancia en el ámbito de la filosofía, de modo que, en esta parte, únicamente nos limitaremos a indicar que dicho grupo se compone de cuatro axiomas, donde se especifican cierto tipo de relaciones que permiten realizar operaciones tales como el transporte de segmentos rectilíneos o la adición de segmentos rectilíneos a segmentos ya dados, operaciones fundamentales para esta disciplina y la demostración de sus teoremas (Giovannini, 2016).

IV- *Axioma de las paralelas*

A primera vista, podemos observar una gran diferencia entre esta sección y las precedentes, pues ésta únicamente contiene un axioma, el cual, debido a su importancia para la historia de la geometría, requiere de una sección propia. Éste se trataría del célebre axioma de las paralelas o del quinto postulado, denominado por Hilbert como “Axioma de Euclides”. Para exponer dicho axioma, Hilbert recurre originalmente a la caracterización más difundida de dicho axioma, utilizando la noción de rectas paralelas, para posteriormente, ir infiriendo el resto de caracterizaciones que hemos indicado en la parte primera de este trabajo, como las que hacen referencia a la suma de los ángulos internos de un triángulo. Así pues, dicho axioma aparece formulado de la siguiente manera en el tratado de Hilbert:

IV. “Sea a una recta cualquiera y A un punto exterior a a : en el plano determinado por a y A existe a lo más una recta que pasa por A y no corta a la recta a ”

En este punto, Hilbert no destaca por su originalidad a la hora de determinar el concepto de “rectas paralelas” en un espacio euclidiano, pues como vemos, no hace sino recurrir a una de sus caracterizaciones clásicas para, posteriormente, ir infiriendo de ella, no solo el resto de interpretaciones que dicho axioma habría tenido, sino también una serie de teoremas elementales de la geometría euclidiana que requerirían necesariamente de dicho axioma para su demostración. La verdadera innovación que Hilbert introduciría respecto a este axioma sería la idea de su independencia respecto al resto de axiomas o grupos de axiomas que constituirían la geometría euclidiana, pudiendo de este modo, ofrecer una explicación consistente a la existencia de múltiples sistemas geométricos con diferentes fundamentos incompatibles entre sí. Este punto será el que explicaremos en mayor profundidad en la siguiente sección, una vez terminado el apartado dedicado a los axiomas.

V- Axiomas de continuidad

En este grupo, compuesto por solo dos axiomas, Hilbert recoge dos proposiciones que habían sido fundamentales para la geometría y que estarían relacionadas con los conceptos de “medida”, presentándolo desde presupuestos puramente sintéticos, y el de “plenitud o continuidad”, el cual, como indicamos al principio del trabajo, resulta necesario para la constitución de la geometría euclídea, como había puesto de manifiesto Dedekind al tratar sobre el Postulado 1 de Euclides. Estos axiomas, al igual que ocurría con los del grupo III, no presentan gran interés a nivel filosófico, al menos, no en este apartado, de modo que únicamente nos limitaremos a enunciarlos. Dichos axiomas afirman lo siguiente:

V-1: “(Axioma de la medida o de Arquímedes): Siendo AB y CD segmentos cualesquiera, existe siempre sobre la recta AB un número de puntos $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, de modo que los segmentos formados por la unión de dichos puntos son congruentes con CD , y el punto B queda entre A y A_n ”

V-2: “(Axioma de plenitud lineal): Los puntos de una recta forman un sistema el cual no es susceptible de ampliación ninguna, bajo la condición de conservar la ordenación”

lineal, el primer axioma de congruencia y el axioma de Arquímedes (esto es, los axiomas I: 1-2; II, III-1, y V-1)”

Estos últimos axiomas, en especial el primero de ellos, resultan de especial relevancia para la construcción de los sistemas geométricos no-euclidianos, pues, al igual que el axioma de las paralelas, son proposiciones las cuales no se cumplen en la geometría esférica o hiperbólica; por ejemplo, la geometría esférica es una geometría no-arquimediana pues, en ella, aparte del quinto postulado de Euclides, tampoco se cumple el axioma de la medida o de Arquímedes (Hilbert, 2016). Tales cuestiones resultan de especial interés a la hora de estudiar el fenómeno de la existencia de múltiples sistemas geométricos incompatibles entre sí, sin embargo, en esta primera sección de sus “Fundamentos”, Hilbert solo se encarga de los aspectos puramente matemáticos de dichos axiomas. Será en la siguiente sección, la cual pasaremos a exponer a continuación, donde ahondará más en estas cuestiones, al tratar sobre la independencia y la no derivabilidad de dichos axiomas y como esto permitiría explicar la existencia de esa multiplicidad de sistemas geométricos.

- Incontradictibilidad e independencia de los axiomas

Tras haber enunciado el conjunto de proposiciones sobre el que pretendía fundamentar la geometría euclidiana, Hilbert pasará a tratar una cuestión de suma relevancia para su concepción de la geometría y de las matemáticas en general, y que estará presente, como podremos ver, en etapas posteriores de su pensamiento: el fenómeno de la no-contradictibilidad o consistencia de los axiomas de una ciencia, así como la independencia que éstos deben de presentar respecto a otros. Comenzaremos tratando la cuestión de la consistencia de los sistemas geométricos para luego, pasar a explicar el fenómeno de la independencia de dichos axiomas y las repercusiones que dichas tesis tendrían.

-Incontradictibilidad de los axiomas

Una de las condiciones que Hilbert exige para su fundamentación axiomática de la geometría, será la de que los axiomas sobre las que ésta se cimenta sean consistentes entre sí, de modo que, puedan realizarse sobre ellos todo tipo de cálculos e inferencias lógicas sin que esto nos lleve en ningún momento a desembocar en una contradicción.

Así pues, Hilbert comienza el segundo apartado de la obra con las siguientes afirmaciones:

Los cinco grupos de axiomas establecidos en el capítulo primero no están en contradicción los unos con los otros, esto es, no es posible por medio de silogismos deducir de ellos hechos que contradigan a alguno de los axiomas expuestos (Hilbert, 2016: 38)

Tras proponer dicha tesis, Hilbert tratará de demostrarla recurriendo al sistema de los números reales y a métodos de carácter algebraico y aritmético, algo que contrasta profundamente con el carácter puramente sintético de sus axiomas y su concepción de la geometría, si bien, tal cosa no supone ninguna incongruencia metodológica, pues en este caso, Hilbert no está tratando sobre proposiciones geométricas, sino sobre cuestiones de corte metageométrico (Giovannini, 2016), de modo que, el hecho de que use el sistema de los números reales a modo de metalenguaje para tratar las propiedades que debían de cumplir los sistemas geométricos en general, no entra en contradicción con la metodología puramente sintética que adopta a la hora de demostrar los teoremas de dicha ciencia. No expondremos el modo en que Hilbert demuestra tal incontradictibilidad, pues los recursos matemáticos empleados resultan demasiado complejos para ser tratados de manera exhaustiva en dicho trabajo, únicamente, indicaremos la conclusión a la que llega tras haber realizado los cálculos y operaciones pertinentes, la cual sería de importancia capital en el curso ulterior de sus investigaciones, pues acabaría por demostrar que la consistencia de la geometría euclidiana depende, en última instancia, de la consistencia del sistema de los números reales.

La manera de tratar la cuestión correspondiente a la geometría espacial no ofrece dificultad alguna. Toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-V necesitará verse, según esto, en la aritmética de los números reales. (Hilbert, 2016: 41)

De este modo, el problema de la consistencia de los sistemas geométricos queda reducida al problema de la consistencia del sistema de los números reales, lo cual sería uno de los principales motivos por los que Hilbert cambiaría de intereses en sus estudios posteriores a 1918, centrándose en tratar de demostrar la consistencia interna de dicho sistema numérico, pues esto implicaría a su vez demostrar la consistencia de la

geometría, así como de otras ramas de las matemáticas, como fue descubriendo en sus investigaciones posteriores (Giovannini, 2016).

La tesis de la consistencia de los sistemas axiomáticos resulta el punto de mayor relevancia de esta sección, pues sería, no solo una tesis relativamente innovadora, siendo Hilbert el primero en presentarla sistemáticamente, sino porque además sería una constante en su pensamiento, como se puede ver consultando los artículos publicados décadas más tarde por dicho autor.

Para que una teoría científica representada por un edificio de conceptos responda a sus objetivos, se requiere ante todo dos exigencias: la primera concierne a la *dependencia* y al mismo tiempo la *independencia* de las proposiciones de esta teoría; la segunda, *la ausencia de contradicción* en la que deben participar las proposiciones tomadas en conjunto (Hilbert, 1999: 130)

Así pues, podemos ver como, en la entrada de su etapa aritmética, los presupuestos de independencia y coherencia de los axiomas que fundamentan una ciencia seguían siendo tesis fundamentales en su forma de concebir, no solo las matemáticas, sino también la ciencia en general; como enfatiza en dicho artículo, esta cuestión posee una importancia primordial, pues la presencia de una contradicción en alguno de sus teoremas comprometería a todo el sistema en que dicho teorema se encuentra localizado. La importancia de la consistencia de los sistemas axiomáticos iría cobrando cada vez mayor importancia dentro del pensamiento hilbertiano, haciendo que, en cierto momento, defiende una posición radicalmente teoreticista, defendiendo un criterio de verdad basado exclusivamente en la coherencia de los axiomas y los teoremas específicos de un dominio científico, prescindiendo de toda referencia a la intuición o a los aspectos sensitivos del ser humano. Aquí, podemos ver el tránsito hacia la postura puramente formalista ya consolidada que defendería en su última etapa. Profundizaremos en esta idea de verdad como no-contradicción cuando tratemos acerca de la polémica que mantuvo vía epistolar con Frege, pues en ella se encuentran una serie de declaraciones de sumo interés para aclarar esta tesis.

-Independencia de los axiomas

La segunda condición que Hilbert impone a los sistemas axiomáticos es que, las proposiciones elementales sobre las que éstas se sustentan, deben de ser independientes

unas de otras, esto es, no debe de ser posible deducir mediante inferencias lógicas unas de otras.

Interesa investigar si todos ellos [los axiomas] son independientes entre sí. En efecto, se prueba que no es posible derivar por medio de silogismos ninguna parte esencial de un determinado grupo de axiomas de los grupos de axiomas precedentes (Hilbert, 2016: 42)

Éste sería uno de los aspectos más notables de las innovaciones introducidas por Hilbert en dicha disciplina, pues permite dar cuenta de un problema mencionado reiteradamente a lo largo de este trabajo: la existencia de una multiplicidad de sistemas geométricos, todos ellos consistentes, pero incompatibles entre sí y fundamentados sobre axiomas o principios diferentes. Podemos ver esta tesis de la independencia total de los axiomas de la geometría como una suerte de la generalización de las ideas propuestas por Straudt mencionadas con anterioridad. Recordemos que dicho matemático reivindicaba para la geometría proyectiva un conjunto de conceptos y teoremas que les fuesen propios e independientes de otras disciplinas. Tal idea, la de dotar a un sistema geométrico como el proyectivo de premisas que fuesen exclusivas de dicha disciplina, es tomada por Hilbert y aplicada a los presupuestos de todas las geometrías existentes en el momento, de modo que cada una de ellas pueda construirse de manera independiente de las otras, sin que esto suponga algún problema a nivel gnoseológico, pues dicha independencia nos permite combinar de múltiples formas dichos axiomas, siempre y cuando cumplamos una serie de condiciones, como la de consistencia.

Como hemos indicado en el apartado anterior, Hilbert manejaría un criterio de verdad basado en la coherencia interna de los sistemas científicos. Dicha coherencia dependería exclusivamente de un grupo de proposiciones elementales escogidas para fundamentar dicha ciencia, así como del hecho de que de ellas no pueda derivarse ninguna contradicción. En consecuencia, si volvemos a todos axiomas independientes entre sí, nada nos impide el poder sustituirlos por aquellos que consideremos más oportunos, tal como hicieron los padres de las geometrías no-euclidianas, sustituyendo el quinto postulado por alguna proposición con contenido distinto, tratando de ver qué clase de conclusiones podemos extraer de ellas y aceptándolas como válidas, siempre y cuando, no nos lleven a ninguna clase de contradicción. Esto hace que podamos

entender dicha postura como un “juego de proposiciones” (Dou, 1970), donde vamos introduciendo y sustituyendo diferentes enunciados y axiomas, sobre los que construimos, mediante métodos lógicos y silogísticos, un edificio de conceptos organizados sistemáticamente, los cuales constituirían una disciplina científica concreta. De esta manera, tal como indica Hilbert en su artículo de 1918, al aceptar la tesis de la independencia axiomática, podemos dar cuenta de todos los problemas que hubo a lo largo de la historia de las matemáticas con el quinto postulado de Euclides, pues éste sería el mejor exponente de la dicha independencia en un dominio científico determinado. “El ejemplo clásico del que uno echa mano para probar la independencia de un axioma lo proporciona la geometría, en el postulado de las paralelas” (Hilbert, 1999: 130). Este postulado había sido objeto de múltiples investigaciones y, como indicamos anteriormente, muchos matemáticos trataron sin éxito de derivarlo de los cuatro primeros axiomas propuestos por Euclides. Era, pues, un presupuesto que no era susceptible de demostración y por tanto, una verdad que debía de aceptarse o negarse sin reservas. Así mismo, vimos cómo, al sustituir este postulado por otros con contenidos diferentes, surgían nuevos sistemas geométricos, todos ellos consistentes, pero con teoremas incompatibles entre sí. La idea de la independencia de los axiomas, unida a una concepción de la noción de verdad científica basada en la coherencia interna de los múltiples sistemas científicos, permitía explicar dicho fenómeno con relativa facilidad.

Para Hilbert, dicho fenómeno no suponía ningún problema, pues, en la medida en que concebimos dichos axiomas como independientes entre sí, permitiéndonos operar con ellos de la manera que consideremos más oportuna, podemos sustituirlos por otra clase de proposiciones, con contenidos radicalmente diferentes, ya que, mientras no lleguemos a ninguna contradicción, podremos considerar a dicho sistema axiomático como válido y a sus teoremas como verdaderos. De este modo, partiendo de los cinco grupos de axiomas propuestos al comienzo de su obra, podemos construir todos los sistemas geométricos existentes en aquella época según aceptemos o rechacemos algunos de ellos, con la excepción de los grupos I, II y III, que son considerados como comunes a todas las geometrías, conocidos por ello como axiomas de la “geometría absoluta” (Almira, Sabina de Lis, 2007). A partir de aquí, podemos prescindir del resto de axiomas presentes en los dos grupos restantes para, de esta forma, construir la totalidad de los sistemas geométricos. Si prescindimos del axioma de las paralelas,

obtendremos las geometrías no-euclidianas, las cuales ya habían quedado corroboradas por los trabajos desarrollados con anterioridad por Lobachevski o Bolyai. Así mismo, si prescindimos del quinto grupo de axiomas, formaremos conjunto de sistemas geométricos que denominaré “Geometría elemental” o “Construcciones geométricas por medio de regla y patrón”, los cuales son aquellos que solo requerían para la resolución de sus problemas del trazado de rectas y el uso del transporte de ángulos (Hilbert, 2016), de manera semejante a como operaba la geometría antigua. Con esto, podemos ver que la coexistencia de múltiples sistemas geométricos incompatibles entre sí no supone ningún problema de carácter gnoseológico, siempre y cuando se acepte el presupuesto de independencia axiomática, pues este nos permitiría “jugar”, como decía Dou, con el conjunto de proposiciones fundamentales de la geometría y, tomando como criterio de verdad uno basado en la coherencia de sus teoremas, podemos dar por válidas todas aquellas demostraciones que no comprometan al sistema llevándonos a una contradicción, cada una, con vigencia exclusiva en el sistema geométrico al que pertenece.

Con lo anteriormente dicho, hemos puesto de manifiesto los rasgos más destacables de dicha obra, los cuales nos permiten hacernos una idea de las novedades que introdujo dentro del campo de la geometría. Vemos a su vez que gran parte de las ideas defendidas en ella no eran completamente novedosas, pues habían sido formuladas con anterioridad, aunque fuese parcialmente, por otros matemáticos como Wiener o Staudt. El mérito de Hilbert consistiría en haber conseguido aunar todas esas ideas y haberlas organizado de modo que diesen lugar a una concepción completa y bien fundamentada de todos los sistemas geométricos, no limitándose a uno en exclusiva, pudiendo emplearse sus presupuestos generales para todos ellos, si bien, la obra tiene como objeto de estudio principal la geometría euclidiana. Una vez expuestas las innovaciones que dicha obra habría introducido en la forma de concebir, en un inicio la geometría, pero posteriormente las matemáticas en general, veremos cómo fue recibida la obra por sus contemporáneos, centrándonos en un evento que nos ayudará a comprender, tanto los recelos que dicha obra provocó entre ciertos matemáticos, como algunas de las ideas anteriormente expuestas a lo largo del trabajo. Esta se trataría de la polémica epistolar que el matemático alemán mantuvo con Gottlob Frege, acerca de la idea reemplazar las definiciones geométricas por una serie de axiomas que únicamente

denotaran una serie de relaciones y operaciones entre objetos indefinidos. Dicha disputa no nos proporcionará mucha información sobre las ideas de Hilbert que no haya sido expuesta con anterioridad, pues tan solo se ha conservado una respuesta de las cartas de dicho matemático, pese a lo cual, nos ayudará a ver cuáles fueron las principales objeciones que se realizaron a esta novedosa forma de entender la geometría, así como de profundizar algo más en la noción de verdad manejada por Hilbert por aquel tiempo.

3b) Recepción de la obra: la confrontación con Frege

El impacto de la obra fue inmediato; al poco de publicarse, ya se había vuelto objeto de debate entre toda la comunidad de filósofos y matemáticos, los cuales discutían acerca de la validez del sistema propuesto por Hilbert. Las respuestas a dicha publicación fueron muy numerosas, existiendo partidarios y detractores de sus tesis por igual. En este punto, resulta imposible ser exhaustivo a la hora de señalar todas las réplicas realizadas a dicha obra, sin embargo, existe una polémica la cual, debido a su contigüidad temporal respecto a la publicación de la obra, pues se inició ese mismo año, así como por la importancia del otro participante en la polémica, merece la pena describir aunque sea brevemente. Esta se trataría de la disputa epistolar mantenida durante aproximadamente un año entre Hilbert y Frege.

Como es sabido, Frege también estaba profundamente interesado en las matemáticas, de modo que es normal que los trabajos de Hilbert despertasen su atención. A los pocos meses de la publicación de los “Fundamentos”, le envió una carta, exponiéndole las dudas y problemas que, para él, presentaba la axiomática formal presentada en el tratado de Hilbert. Frege, pese a su posición logicista, seguía fuertemente influenciado por la concepción clásica de la geometría y el modo en que esta se entendía. Para dicho filósofo, el prescindir de las definiciones de las entidades con las que trabajaba el geómetra, para depender solo de un conjunto de proposiciones que determinasen los modos de relación entre esas entidades indefinidas, suponía confundir gravemente conceptos clave de la matemática, reduciendo unos a otros, cuando tal cosa no debería ser posible.

Para Frege en toda teoría matemática es preciso distinguir entre las definiciones y el resto de las proposiciones, i.e. axiomas, teoremas y leyes fundamentales. El objetivo de una definición no es afirmar algo, sino establecer el significado de un nuevo signo (una palabra, una expresión), que previamente carecía de

significado. La función de una definición consiste así en *fixar la referencia* de un término o signo (Giovannini, 2016: 131)

Con las siguientes afirmaciones, vemos que dicho filósofo mantenía una posición semejante a la de Euclides, distinguiendo una serie de elementos básicos, entre los cuales, se encontraban las definiciones, así como una serie de entidades a las cuales debían referirse conceptos como punto o recta. En vista de la cita anterior y de los comentarios realizados respecto a la concepción que Hilbert mantenía por aquel entonces sobre la geometría, se hace evidente el problema que, para Frege, suponía la tesis de la vacuidad referencial de las entidades geométricas. A la hora de determinar qué clase de objetos denotaban los términos manejados en la geometría, hemos visto que Hilbert prescinde de dotarlos de algún tipo de referente en específico, centrándose únicamente en un conjunto de relaciones y de propiedades inferibles a partir de ellas; el conjunto de objetos al que dichas relaciones haga referencia resultaría indiferente, siempre y cuando, dichos objetos cumplieren con las relaciones establecidas por los axiomas. De esta manera, Hilbert hacía descansar los referentes de las entidades geométricas en cualquier objeto que se adaptase a dicho conjunto de proposiciones elementales, haciendo que, el significado del término con el que denotamos dicho objeto se encontrase únicamente caracterizado por dichas nociones elementales. De esta manera, una elipse podía ser sin problema tanto una figura trazada por un geómetra, como la trayectoria de un planeta que orbitase en torno a la tierra, pues bastaba con que, ambos elementos, el dibujo del geómetra y los movimientos planetarios, se ajustaran al conjunto de relaciones con las que caracterizábamos al término “elipse”, para de este modo, poder tratar a ambas entidades de la misma manera y aplicando los mismos teoremas. Sin embargo, esta concepción relacional de los elementos geométricos, donde sus referentes venían determinados por un sistema de relaciones, resultaba inaceptable para Frege. No podemos profundizar en la concepción que dicho filósofo tenía de las entidades matemáticas, pero, en vista a la anterior cita, podemos afirmar que para Frege, los objetos manejados por el geómetra o el matemático, debían poseer algún tipo de referente, con rasgos específicos, a partir de los cuales, se pudieran inferir los teoremas que trataban sobre dicho objeto, y no deducir estos de un conjunto de proposiciones, las cuales afirmamos sin demostración previa, y con las cuales tratando de ir deduciendo teoremas y propiedades de dichas entidades indefinidas, a las cuales, no hemos dotado de referencia, tan solo de aspectos relacionales. Para este filósofo, la validez de los

teoremas de la geometría residiría, no solo en sus axiomas o presupuestos elementales, sino también en las propiedades de los objetos sobre los que trataban dicho teorema; la concepción puramente relacional del Hilbert acerca de las entidades geométricas resultaba insuficiente a Frege a la hora de demostrar la validez de los teoremas de la geometría, pues en base dicha concepción, cualquier sistema podría considerarse verdadero, independientemente de a que se refiera, siempre y cuando no entrame ninguna contradicción. Esta discrepancia de opiniones acerca de los criterios de validez de los teoremas geométricos, así como de la necesidad de definir los términos con los que se opera, aparece muy bien ilustrada en una de las respuestas enviadas por Hilbert a Frege, la cual pasamos a exponer a continuación.

Realmente me interesaron sus declaraciones: “de la validez de los axiomas debe de seguirse que no se contradigan unos a otros”, porque, en todo lo que llevo pensando, escribiendo y leyendo sobre estas cosas, he estado diciendo exactamente lo contrario: si los axiomas, dados arbitrariamente, no se contradicen entre ellos, entonces son verdaderos y las cosas definidas por dichos axiomas existen. Este es mi criterio de verdad y de existencia (Hilbert en Giovannini, 2007: 139)

En estas declaraciones podemos apreciar claramente la discrepancia entre ambos autores, los cuales, según parece, manejaban nociones de verdad radicalmente diferentes, siendo el primero partidario que de la coherencia de los axiomas de una ciencia debía de deberse a su validez, esto es, a la verdad de estos axiomas, mientras que para Hilbert, la posición era la opuesta: es la coherencia, la no-contradicción entre teoremas derivados de axiomas propuestos de manera espontánea, lo que garantizaría su validez y el que sean verdaderos, de modo que podía considerarse como valido todo sistema axiomático cuyas proposiciones elementales no fuesen incompatibles entre sí, independientemente del referente que se les atribuyese a los objetos postulados por dichos axiomas. Con esto, vemos con mayor claridad el criterio de verdad manejado por Hilbert en 1900, fecha en que realizó tales declaraciones, y como cada vez iba adoptando una posición más abstracta y formal, pues a diferencia de en sus “Fundamento”, en dicha frase no hay referencia alguna a la sensibilidad o la intuición, tan solo a la coherencia interna del sistema a desarrollar.

La polémica entre ambos pensadores no fue muy prolífica, pues Hilbert respondió con poca asiduidad en comparación con Frege, quien envió numerosas y extensas cartas tratando la cuestión. Además, posteriormente, Hilbert se negó a la publicación de todas las cartas enviadas entre ambos, pues decía haber cambiado de opinión en puntos de especial relevancia. A pesar de todo, dicha correspondencia nos ayuda a aclarar las ideas de Hilbert sobre los fundamentos de los sistemas axiomáticos, así como de su criterio de verdad, que cada vez iba adquiriendo un carácter más abstracto hasta desembocar en el formalismo matemático que desarrollaría con plenitud años más tarde.

3c) El fin de un periodo

Terminamos aquí nuestro repaso por la concepción temprana de la geometría por parte de Hilbert, desde sus inicios en 1881, con sus primeras aportaciones a dicho campo, hasta la publicación de sus “Fundamentos de la geometría”, donde culminaría su trabajo en esta rama de las matemáticas. A partir de aquí, Hilbert experimentaría un cambio en sus intereses, pasando a centrarse en los fundamentos de la aritmética, en gran medida, debido a que había demostrado que la consistencia de la geometría dependía de la consistencia del sistema de los números reales, de modo que éste ocupó la mayor parte de sus estudios posteriores, dejando la geometría en un segundo plano. Es en este punto donde podemos dar por finalizada la mayor parte de la contribución del matemático alemán a la geometría y de su etapa geométrica, pese a que esta suele extenderse hasta 1904. Los cambios, no solo a nivel metodológico, sino en la concepción de dicha ciencia, que supuso la obra de Hilbert, fueron de gran importancia y condicionaron el curso ulterior de las matemáticas y el surgimiento de alguna de sus ramas, como comentaremos en la sección final de este trabajo, donde repasaremos los contenidos expuestos a lo largo de su redacción, viendo la evolución en el pensamiento Hilbertiano sobre la geometría, que acabaría por cristalizar en la publicación de su obra más conocida sobre dicha ciencia. Además, comentaremos de manera superficial de qué manera determino el surgimiento de alguna de las ramas más novedosas de las matemáticas, como la teoría de modelos.

4. Breve reflexión final

Con esta sección, damos por finalizado nuestro trabajo. En un principio, comenzamos con una contextualización histórica de la geometría, haciendo hincapié en

aquellos eventos que resultaron de mayor relevancia en dicha disciplina. Con esto, pretendíamos poner de manifiesto una serie de ideas o presupuestos que habrían estado presentes, principalmente desde la modernidad, en la concepción de la geometría, como la tesis de que dicha ciencia se encargaba de estudiar las propiedades del espacio físico, o que dicho espacio, desde el surgimiento de la filosofía kantiana, habría pasado a ser un elemento constitutivo de las formas de intuición humana. En paralelo, tratamos de exponer de manera superficial la evolución metodológica experimentada en aquella época, con el desarrollo del método analítico, así como la revolución que supuso el surgimiento de las geometrías no-euclidianas en la representación que un gran número de matemáticos y filósofos se hacían de esta ciencia. De este modo, tratamos de ver siempre la concepción de la geometría en estrecha relación con el contexto histórico en que ésta era llevada a cabo, intentando poner de manifiesto cómo, la evolución que dicha ciencia experimentaría a lo largo del tiempo, habría determinado las diferentes filosofías y fundamentaciones que se hacían de ésta, tal como ocurrió con la fundamentación kantiana, la cual, pese a su gran impacto inicial, fue descartada por prácticamente la totalidad de los matemáticos al surgir las geometrías no-euclidianas, poniendo de esta forma en duda las relaciones entre la intuición de los sujetos humanos y el espacio físico que el filósofo de Königsberg habría defendido.

Nuestro trabajo, tal como hemos indicado en el resumen y en la introducción, pretendía presentar la concepción temprana de Hilbert sobre la geometría, poniéndola en relación con los eventos históricos característicos de dicha ciencia, de modo que pudiésemos tratar el pensamiento inicial del autor de manera contextualizada y poner de manifiesto, de manera más clara, las innovaciones que habría introducido en la concepción de dicha disciplina. De este modo, también pudimos apreciar que gran parte de las tesis filosóficas implícitas en “Los fundamentos de la geometría”, obra culmen de dicho autor, no eran completamente novedosas, teniendo precedentes bastante claros en matemáticos como Wiener, Straudt y Pasch, así como de otros matemáticos precedentes a él, viendo así que, como Newton y todo científico en general, Hilbert “caminaba a hombros de gigantes”, de los cuales se valió para desarrollar y consolidar su pensamiento durante su juventud. En este periodo, como esperamos que se haya podido ver a lo largo del trabajo, Hilbert no presentaría la concepción puramente formalista que defendería en su etapa de madurez, estando condicionado aun por ciertas ideas extraídas de la tradición filosófica. La idea de relacionar la geometría con el estudio de las

propiedades del espacio físico, presentes ya desde la época de Galileo, todavía se encuentra presente en dicha obra, así como la idea de que existe una relación entre la intuición de los sujetos humanos, las propiedades del espacio físico y los axiomas de la geometría, como se expresa claramente en las declaraciones que realiza en la introducción a dicha obra.

El poner de manifiesto los axiomas de la geometría y el averiguar sus conexiones, es un problema que se encuentra discutido desde tiempos de Euclides en numerosos y excelentes tratados de la literatura matemática. El problema citado queda reducido al análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales. (Hilbert, 2016: 1)

La última frase de esta cita nos pone de manifiesto como la relación entre geometría, espacio e intuición, que había empezado a cobrar especial relevancia desde los desarrollos anteriormente mencionados de Kant, seguía aún muy vigente en el pensamiento del matemático alemán, y que dicha relación no presentaba un carácter claro y definido. En este punto, puede consultarse Giovannini, 2019: 167-191, donde se ofrece un estudio detallado de la relación entre el formalismo prematuro presente en esta etapa de la vida de Hilbert, con la idea de intuición que manejaba también por aquella época.

Pese a que en este periodo nuestro matemático aun no hubiese consolidado completamente su pensamiento y concepción de las matemáticas, podemos ver claros precedentes en sus notas de clase y en dicha de numerosas tesis que defendería con posterioridad, tales como la vacuidad referencial de las entidades geométricas, la cual, con el paso del tiempo, acabaría por aplicar a toda entidad matemática; o la concepción estrictamente relacional de la geometría, la cual, gracias a la falta de referentes de los términos manejados por el geómetra, le permitían desarrollar un sistema geométrico basado únicamente en una serie de proposiciones elementales o primitivas, sin tener que dar cuenta de los objetos con los que se operaba, pues, tales objetos, vendrían determinados por el conjunto de operaciones y relaciones postulados por el geómetra, siendo ser cualquier cosa que cumpliera con los requisitos establecidos en dichos axiomas. Dicha forma de conceptualizar la geometría permitía dar respuesta a muchos de los problemas clásicos de la filosofía de la geometría, pues, por ejemplo, la idea de la vacuidad referencial de las entidades geométricas, unida a la idea de verdad como

coherencia de un conjunto de proposiciones elementales, podía ofrecer una explicación satisfactoria a la relación de dicha ciencia con disciplinas como la física. Si podíamos aplicar las propiedades de las elipses para predecir los movimientos de los planetas que orbitan alrededor del sol, tal como hizo Kepler, no era porque estuviésemos leyendo “el libro de la naturaleza”, que estaría compuesto por entidades geométricas. Lo que ocurriría, sería que ambos elementos, las elipses con las que trabaja el geómetra, y las órbitas planetarias, se adaptarían de manera adecuada a una serie de normas, de axiomas, que postularían unas formas concretas de interacción con otras entidades, pudiendo aplicarse a ambos por igual. De este modo, las elipses y las órbitas planetarias solo tendrían en común aquel conjunto de axiomas y proposiciones que determinan su forma de relacionarse, de modo que dicha figura geométrica no sería el fundamento del movimiento de los astros, tal como habían concebido algunos científicos de la antigüedad. La estrecha relación entre ambas disciplinas, apreciable en los trabajos de Galileo o Newton, no se debía a la relación entre los objetos tratados, sino a la de los axiomas que regulaban el tipo de relaciones que dichas entidades podían entablar con otras del mismo género, cada una perteneciente a un campo específico y diferenciado; unas a la física, como los planetas y las órbitas, y otras a las de la geometría, como los puntos y las elipses. Del mismo modo, también podía resolverse el problema gnoseológico que suponía la coexistencia de múltiples sistemas geométricos incompatibles entre sí, apelando a la independencia axiomática y de nuevo, a la noción de verdad como coherencia.

Aunque sabemos que el programa formalista que Hilbert llevará a cabo posteriormente terminará por fracasar, esto no significa que las aportaciones de dicho matemático no hayan tenido ninguna repercusión en el ámbito de las matemáticas, pues, por poner un ejemplo ilustrativo, las tesis propuestas por Hilbert en sus “Fundamentos” y la concepción puramente relacional que en ella defiende de la geometría, sirvió como precedente para el desarrollo de lo que posteriormente se conocería como teoría de modelos, rama de las matemáticas encargada del estudio de determinadas estructuras matemáticas, como cuerpos o grupos. De esta forma, los trabajos en geometría de Hilbert sientan las bases para el desarrollo de esta disciplina (Eder, Schiemer, 2018), pese a que la corriente en filosofía de las matemáticas desarrollada posteriormente por dicho autor no consiguiese prosperar, fracasando a causa de los trabajos de Gödel sobre los sistemas axiomáticos. Pese a todo, las innovaciones que introduce Hilbert en el

ámbito de las matemáticas y en particular, de la geometría, tuvieron una gran repercusión, tanto en el momento en que fueron propuestas, como en épocas posteriores. Es por ello que consideramos que merecía la pena realizar un estudio de cómo se fue constituyendo su modo de concebir dicha disciplina, pues dicho proceso serviría de punto de partida para el desarrollo de las ideas que manejaría años más tarde, en su etapa de madurez, siendo sus trabajos en geometría el germen del formalismo geométrico de principios del siglo XX y sirviendo de inspiración para gran número de matemáticos y filósofos a la hora de conformar su pensamiento, tal como Wiener y Pasch contribuyeron al desarrollo del pensamiento de Hilbert.

Bibliografía

- Almira Juan Manuel, Sabina de Lis (2007); *Hilbert; Matemático fundamental*, Editorial Nivola, Madrid
- Casado, Carlos Madrid. Filosofía de las matemáticas: El cierre de la topología y la teoría del caos, *El Basilisco*, 41(2), 1-48. <http://fgbueno.es/bas/bas24101.htm>
- Dou A. (1970). *Fundamentos de la matemática*. Editorial Labor, Barcelona
- Dubrovin, Fomenko, Nóvikov (1988): *Geometría moderna: métodos y aplicaciones*, Editorial Matematnka, Madrid
- Eder, G., & Schiemer, G. (2018). Hilbert, Duality, and the geometrical roots of model theory. *The Review of Symbolic Logic*, 11(1), 48-86. doi:10.1017/S1755020317000260
- Euclides (2000); *Elementos*, Editorial Gredos, Barcelona
- Fontanella, L. (2019). Axioms as Definitions: Revisiting Poincaré and Hilbert. *Philosophia Scientiae*, 23-1(1), 167-183. <https://www.cairn.info/revue-philosophia-scientiae-2019-1-page-167.htm>.
- Galileo, Galilei (1981); *El ensayador*, Editorial Agilar, Buenos Aires
- Giovannini, Eduardo (2015): *Cuadernos de lógica, epistemología y lenguaje, Volumen 8: David Hilbert y los fundamentos de la geometría (1891-1905)*, Collage Publications
- Hilbert, David. (1999). Pensamiento axiomático, *Educación matemática*, 11(2), 128-136, <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol11/2/10Hilbert.pdf>
- Hilbert, David (2016): *Fundamentos de la geometría*, Editorial CSIC, Madrid
- Husserl, Edmund (1939); Sobre el origen de la geometría, *Revue internationale de Philosophie*, 1(2), 365-386

-Kant, Emmanuel (2016): *Critica de la razón pura*, Editorial Taurus, Madrid

-Kline, Morris (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid

-Platón (1988); *Diálogos IV, República*, Editorial Gredos, Madrid