DOI. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99131 ISSN 0213-8646 | E-ISSN 2530-3791

Explorando nuevas estrategias de formación del profesorado de matemáticas: un enfoque ampliado del *Lesson Study* para el desarrollo profesional en la Escuela Andorrana

Luis J. RODRÍGUEZ-MUÑIZ
Álvaro AGUILAR-GONZÁLEZ
Marlén ALONSO-CASTAÑO
Itziar GARCÍA-HONRADO
Esther LORENZO-FERNÁNDEZ
Laura MUÑIZ-RODRÍGUEZ

Datos de contacto:

Luis J. Rodríguez Muñiz
Universidad de Oviedo
luisj@uniovi.es

Álvaro Aguilar-González
Universidad de Oviedo
aguilaralvaro@uniovi.es

Marlén Alonso-Castaño
Universidad de Oviedo
alonsomarlen@uniovi.es

Itziar García-Honrado
Universidad de Oviedo
garciaitziar@uniovi.es

Esther Lorenzo-Fernández
Universidad de Oviedo
lorenzomaria@uniovi.es

Laura Muñiz-Rodríguez
Universidad de Oviedo
munizlaura@uniovi.es

Recibido: 29/03/2023
Aceptado: 11/06/2023

RESUMEN

El resumen en español en letra Cambria, 10 puntos. Tendrá En este trabajo se presenta un programa de formación en acción para el profesorado de matemáticas de los cursos 5 y 6 (10-12 años) de la Escuela Andorrana adaptando el *lesson study* para poder implementarlo a gran escala. El programa, *Andorran Lesson Study* (ALS) permitió superar limitaciones mediante la grabación y el visionado masivo de vídeos de clase, junto con sesiones de discusión previa y posterior. La combinación de observaciones y respuestas del profesorado evidenció una contribución significativa del ALS al desarrollo profesional en la enseñanza de las matemáticas, mediante un progreso notable en el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje, un catálogo más amplio de representaciones y la comunicación efectiva sobre y en torno a las matemáticas. El ALS contribuyó a mejorar la eficacia en el desarrollo de las competencias matemáticas promovidas por el currículo andorrano. En conclusión, el ALS se presenta como una alternativa viable para la formación continua del profesorado, permitiendo una adaptación logística y cultural a diferentes contextos escolares y organizaciones

PALABRAS CLAVE: Desarrollo profesional; estudio de clase; formación continua; profesorado de matemáticas.

Exploring new strategies for mathematics teacher training: an expanded approach to Lesson Study for professional development in the Andorran school

ABSTRACT

This paper presents an in-action teacher training program for 5th and 6th grade (10-12 years-old) mathematics teachers in the Andorran school, adapted from the Lesson Study to be implemented on a large scale. The program, called Andorran Lesson Study (ALS), overcame limitations by recording and mass viewing classroom videos, combined with pre- and post-discussion sessions. The combination of teacher observations and feedback showed a significant contribution of ALS to professional development in math teaching, with notable progress in the utilization of learning opportunities, a wider range of mathematical representations, and effective communication about and around mathematics. ALS also contributed to improving the effectiveness of developing math competencies promoted by the Andorran curriculum. In conclusion, ALS is presented as a viable alternative for continuous teacher training, allowing for logistical and cultural adaptation to different school contexts and organizations.

KEYWORDS: Professional development; lesson study; continuing training; mathematics teachers.

Introducción

El desarrollo profesional del profesorado de matemáticas es clave en la investigación educativa (Borko, 2004). Uno de sus objetivos es convertir el conocimiento, las experiencias y las creencias previas del profesorado en competencias profesionales (Alsina & Mulà, 2019). Para avanzar hacia una mejora del desarrollo profesional docente es requisito el diseño, implementación y evaluación de experiencias de formación continua, con un carácter dual y una naturaleza holística. Dual porque deben comprender dos fases, paralelas o consecutivas: formación de capacitación y de acompañamiento (Gamboa-Araya et al., 2022). Holística ya que en ambas formaciones es necesario abordar conjuntamente los contenidos disciplinares (matemáticos) y su didáctica, estrechamente interrelacionados (Ball et al., 2008; Carrillo-Yáñez et al., 2018).

En la educación matemática, la formación de capacitación se centra en el estudio de los contenidos matemáticos curriculares, analizando su fenomenología, las grandes ideas matemáticas subyacentes (Charles & Carmel, 2005), los problemas y tareas ricas que se pueden diseñar, el planteamiento de los procesos matemáticos, y la anticipación de obstáculos, dificultades, errores y posibles respuestas del alumnado (Montes et al., 2021). Por su parte, la formación de acompañamiento o en acción se caracteriza por una atención a los problemas que puedan surgir en la implementación de la formación de capacitación y, en concreto, al análisis sobre cómo afrontar las dificultades derivadas del diseño e implementación de actividades formativas y de la respuesta del alumnado (Kyei-Blankson, 2014). De acuerdo con Ponte et al. (2009) y Henze et al. (2009), los docentes se desarrollan profesionalmente participando en prácticas sociales, en las que es necesaria una significativa retroalimentación procedente de la teoría y de agentes educativos de distintos contextos.

La formación continua debe atender las diferencias del profesorado, en tipo y enfoque de las experiencias formativas y en competencias que desarrollar (Henze et al., 2009). El *lesson study*, un método basado en el análisis de modelos de actuación didáctica mediante la observación, se presenta como un método de desarrollo profesional óptimo, pues permite disponer de vídeos de clases para, posteriormente, analizarlos grupalmente y reflexionar sobre lo observado con y entre el profesorado, es decir, representa un modelo de formación-acción de naturaleza colaborativa (Fernandez & Yoshida, 2012).

El objetivo de la investigación que aquí se presenta consiste en diseñar e implementar un programa de desarrollo profesional docente adaptando el *lesson study* al contexto de la Escuela Andorrana con profesorado de Educación Primaria (*Primera Ensenyança*), que denominaremos *Andorran Lesson Study* (ALS). Se muestra una descripción de la experiencia diseñada y los resultados de la implementación, que persiguen responder a tres preguntas de investigación: (1) ¿Cómo articular un programa de desarrollo profesional basado en el *lesson study* a gran escala y a distancia? (2) ¿En qué medida ha permitido al profesorado el programa ALS descubrir o reforzar aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos? (3) ¿Cómo ha contribuido el programa ALS al desarrollo profesional del profesorado?

Marco teórico

El *lesson study* se inició en Japón, con grados variables de éxito en otros países (Fernandez, 2002; Fernandez & Yoshida, 2012; Murata, 2011). Consiste en uno o más ciclos compuestos por varios elementos: el profesorado diseña una lección centrada en la resolución de problemas a partir de investigaciones exhaustivas previas sobre los materiales de la clase y esta clase es impartida por un docente observado por el resto del profesorado, para luego realizar una discusión grupal que evalúa los objetivos logrados (Clivaz & Takahashi, 2018). Se han realizado implementaciones adaptando este esquema a las características de cada contexto (Ní Shúilleabháin, 2017; Ponte et al., 2017; Winsløw et al., 2017), pero todas coinciden en un ciclo que abarca tres procesos: planificación, observación y reflexión —esta última es señalada como clave para el desarrollo de las competencias profesionales de los docentes (Alsina & Mulà, 2019), remitimos a la bibliografía para más detalle sobre estos procesos. Los resultados de investigaciones previas demuestran que, a pesar de las diferencias (Funghi, 2022; Ramploud et al., 2022), el *lesson study* tiene considerables beneficios, ya que mejora la enseñanza y el aprendizaje y explora formas efectivas de implementar actividades formativas alternativas (Clivaz & Takahashi, 2018).

Los programas de desarrollo profesional deben adaptarse a las características de cada contexto. Mellone et al. (2021) definen el marco de transposición cultural, referido a la implementación de prácticas didácticas procedentes de culturas extranjeras en un contexto particular. El contexto andorrano se caracteriza por un currículo competencial, basado en la construcción del conocimiento a partir de la inducción y de la resolución de problemas, dejando espacio a la actividad del alumnado y referenciando la matemática del aula en un contexto próximo (Ministerio de Educación y Enseñanza Superior [MEES], 2022). Este enfoque requiere un conocimiento muy profundo por parte del profesorado sobre la matemática que aparece involucrada y sobre su didáctica para integrar la diversidad de pensamiento del alumnado, su conexión con la matemática objeto de aprendizaje y, finalmente, su conceptualización (Beltrán-Pellicer & Alsina, 2023; Muñiz-Rodríguez & Rodríguez-Muñiz, 2023; Rodríguez-Muñiz et al., 2022). El modelo competencial requiere que el profesorado participe de forma activa en el proceso de enseñanza-aprendizaje y, para investigar esta participación, nos hemos basado en las cinco fases para el diseño de actividades matemáticas competenciales en el aula propuestas por Alsina (2016), que se indican más adelante. Por otro lado, se ha asumido la formación continua del profesorado como una reconstrucción social del conocimiento (Alsina & Mulà, 2019), lo que ha generado un diseño de formación colaborativa en la que se coconst ruya el conocimiento generado.

Partiendo de la consideración del profesorado como agente crucial en el éxito de una reforma curricular (Coles et al., 2023), los autores llevaron a cabo un informe diagnóstico durante los cursos 2019-2020 y 2020-2021. Este informe, de carácter interno y reservado, se realizó a partir de observaciones de aula y entrevistas con todos los agentes implicados (profesorado, directores, MEES, etc.). En las entrevistas, los docentes de primaria expresaron que se sentían inseguros sobre su conocimiento didáctico-matemático, sobre todo debido a su formación inicial, ya que algunos no habían tenido formación al respecto en su etapa universitaria.

Los aspectos clave surgidos del informe fueron: la *institucionalización de la matemática* al final de la secuencia de aprendizaje (Brousseau, 1997); la *metacognición*, resumiendo la matemática involucrada en cada sesión colaborativa y reflexivamente (Desoete & De Craene, 2019); la *sistematización y validación de las producciones del alumnado*, por parte del profesorado y del propio alumnado, comparando y observando características comunes y diferencias (Hattie & Timperley, 2007); la *representación*, promoviendo el uso de más de un tipo de representación matemática y realizando conexiones explícitas entre ellas (Alsina, 2016); las *conexiones intramatemáticas* y *extramatemáticas*, explícitas y coherentes, explicadas por parte del profesorado o evocadas por el alumnado (Alsina et al., 2021); evidencias de *conocimiento matemático* por parte del profesorado sobre los diferentes temas, prácticas y estructura de la temática presente en la actividad formativa y, por último, evidencias de *conocimiento didáctico-matemático*, referido al enfoque de la enseñanza, características del aprendizaje, estructura curricular. Estos aspectos, que están en línea con los procesos matemáticos descritos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003), conforman los objetivos perseguidos para el aula durante el desarrollo del ALS, además de los objetivos de desarrollo profesional del profesorado.

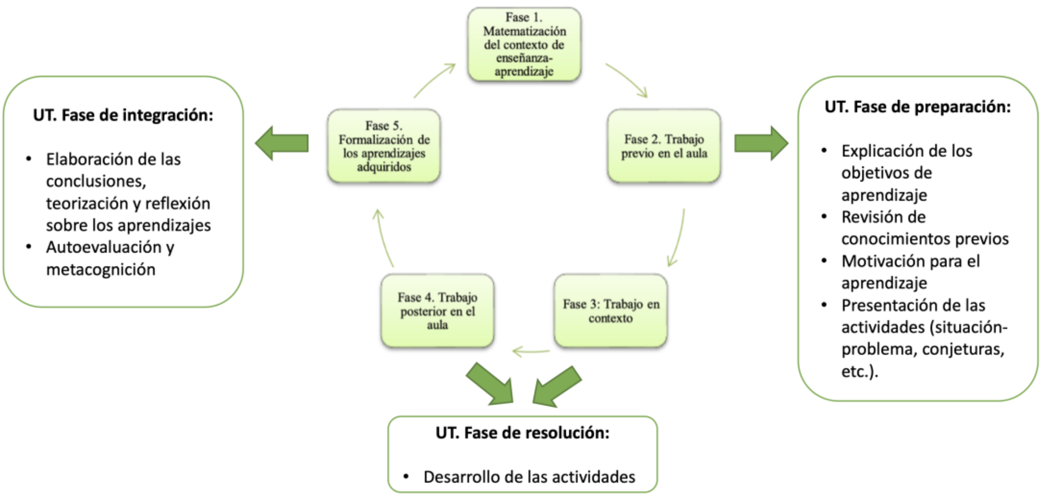
Método

Contexto

Andorra es un pequeño país enclavado en los Pirineos, en el que coexisten tres sistemas educativos: francés, español y andorrano. La *Escola Andorrana* consta de ocho escuelas (grados K-6, 6-12 años) y cuatro institutos (tres para los grados 7-10 y uno para los grados 11-12, 13-18 años). Los idiomas vehiculares para todas las asignaturas son el catalán y el francés (alternando en los grados impares y pares). En 2010-2011, el Ministerio inició un programa que se centró en el modelo de competencias (MEES, 2022). En la materia de matemáticas de primaria, se abordan tres: resolver problemas matemáticos y aplicaciones a la vida diaria, aplicar el razonamiento matemático a situaciones contextualizadas con las matemáticas, y comunicar conceptos, procesos y resultados matemáticos a través de una diversidad de representaciones. Este planteamiento se articula mediante unidades de aprendizaje (*unitats temporals*, UT en lo que sigue), cuya organización consta de tres fases (preparación, resolución e integración), divididas a su vez en subfases, cuya correspondencia con el modelo de Alsina (2016) se muestra en la Figura 1, dando coherencia al marco del ALS. Las UT habían sido diseñadas previamente por el Ministerio y constan con un programa detallado de objetivos de aprendizaje vinculados a las competencias evaluables, así como una secuencia didáctica completa que el profesorado debía aplicar de manera global.

Figura 1

Correspondencia entre las fases de Alsina (2016) —ciclo central— y las fases de las UT andorranas. Elaboración propia a partir de Alsina (2016, p. 17).



Una de las recomendaciones del informe diagnóstico previo fue reforzar la formación continua del profesorado de primaria mediante un programa de formación en acción (Kyei-Blankson, 2014) que permitiese la conexión entre la formación y la actividad diaria sobre la base de los aspectos clave mencionados en la sección anterior. Para ello, se diseñó el ALS, transposición del *lesson study* a la *Escola Andorrana*, implementado en 2021-2022 para apoyar la práctica del profesorado durante el despliegue de las nuevas UT en ese curso. Sobre esta base, el programa de desarrollo profesional ALS se sustentó en una adaptación de las fases descritas en la Figura 1.

Participantes

La investigación se planteó de manera censal, al participar el conjunto del profesorado del tercer ciclo de primaria (5º y 6º cursos) de la *Escola Andorrana*, en total 21 docentes de 5º curso y 20 de 6º. Los perfiles académicos de este profesorado eran muy variados, tanto en la procedencia de la titulación (España o Francia), como en la propia titulación: grado en magisterio, pedagogía, filología francesa o catalana, ciencias experimentales (estos más escasos), y algunas personas con diferente formación de posgrado (solo una de ellas en didáctica de la matemática).

Organización del ALS

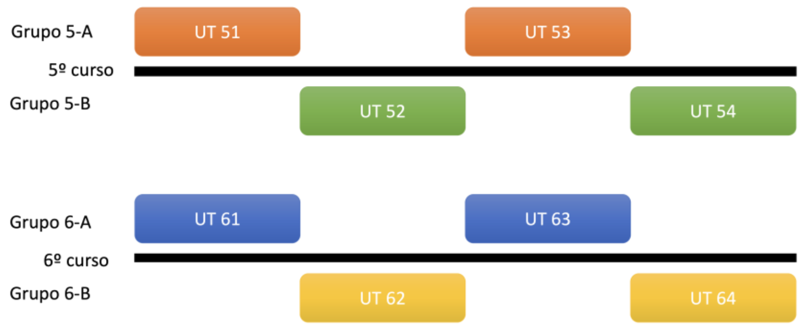
La vocación censal unida a las dificultades derivadas, por un lado, de la pandemia del COVID-19 (aún presente en 2021-2022) y, por otro, de la diferente ubicación del equipo investigador y el profesorado, motivaron un planteamiento original y adaptado a la situación. Cada grupo de profesores de un nivel educativo fue dividido en dos subgrupos (denominados 5-A, 5-B, 6-A y 6-B, que contaron con 10, 11, 9 y 11 profesores, respectivamente). A cada grupo se le asignaron dos UT (de las cuatro que tiene cada curso) de manera que cada docente participó en dos UT alternas en el curso 2021-2022 (Figura 2) de modo que durante el ALS se analizaron la totalidad de las UT. En la posterior observación y discusión participaron todos los docentes de cada curso.

Cada ciclo de observación y discusión del ALS se organizó alrededor de una de las ocho UT y consistió en cuatro etapas: preparación de las sesiones de la UT, implementación (con grabación), análisis y discusión. Antes de cada UT, el equipo investigador realizó una sesión de presentación con el profesorado y jefes y jefas de estudio de todos los centros. Esta sesión fue impartida por los miembros del equipo investigador (cada uno se encargó de una o dos UT) y en ella se señalaron los objetivos de aprendizaje de cada UT y se anticiparon las posibles dificultades de la secuencia didáctica. Esta sesión se realizó de manera presencial para los dos primeros ciclos y online para los dos últimos.

Durante la implementación de cada UT, el profesorado correspondiente grabó en vídeo todas sus sesiones, compartió con el equipo investigador sus vídeos, y una muestra representativa de producciones del alumnado, cuando hubiera lugar a ello. El equipo investigador visualizó y analizó todos los materiales subidos por cada docente durante toda la UT. Aproximadamente, se generaron unas 1200 horas de grabación de diferentes clases. Ha de señalarse que en 5º la lengua vehicular es el catalán y en 6º el francés, si bien en el aula se observa una notable diglosia entre ambas lenguas, que en ocasiones conviven también con el castellano. A este respecto, los vídeos se analizaron en el idioma original, resolviendo con el Ministerio los problemas de interpretación que surgieron. Las traducciones de las transcripciones que se incluyen en este trabajo han sido realizadas por los autores.

Figura 2

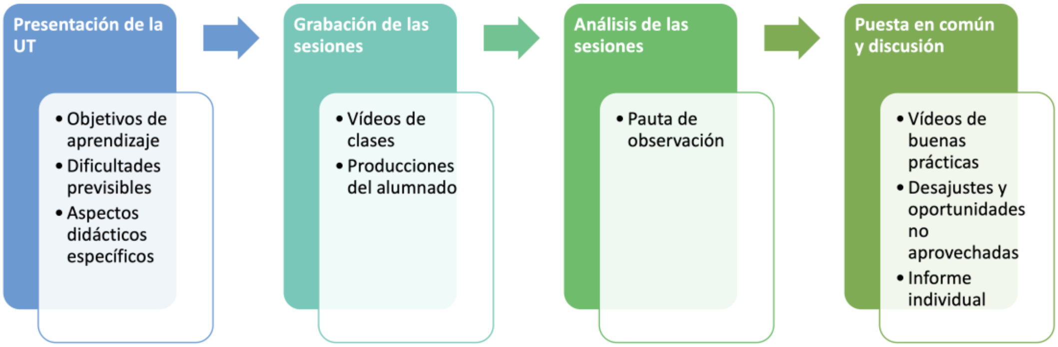
Esquema de organización del ALS. Elaboración propia.



Al acabar cada UT, se realizó una puesta en común y discusión en la que participó todo el profesorado del curso correspondiente y en la que el equipo investigador seleccionó ejemplos de buenas prácticas identificadas respecto a los objetivos de aprendizaje de la UT y a los aspectos clave que se querían reforzar con la formación. Estos ejemplos se compartieron mostrando los fragmentos de vídeo. Además, se indicaron, sin personalizar y sin mostrar los vídeos, ejemplos de actuaciones que se consideraron no alineadas con los objetivos o que desaprovechaban oportunidades de aprendizaje en la UT. Estas cuestiones se indicaron de manera reservada en informes personales de retroalimentación, siempre que fue posible. Igualmente, el profesorado discutió las debilidades y fortalezas de la UT, indicando aspectos de mejora en su planteamiento y actividades y señalando obstáculos que se encontró en la interacción con el alumnado. Por lo tanto, respecto al ciclo habitual de la *lesson study* (Fernandez & Yoshida, 2012), la principal aportación del ALS es la modificación para poder afrontar una formación a gran escala y a distancia, llevando el análisis al final del ciclo, en lugar de tras cada sesión (Figura 3). Las sesiones de discusión fueron realizadas en noviembre de 2021, febrero de 2022, abril de 2022 y junio de 2022. La primera y la última se realizaron presencialmente y las dos intermedias, online.

Figura 3

Ciclo del ALS. Elaboración propia.



Instrumentos

Los vídeos grabados en cada sesión son un instrumento que se complementa con la información recogida en las cuatro sesiones de cierre llevadas a cabo con el profesorado. Tras ellas, además, se aplicó un cuestionario *ad hoc* elaborado por el equipo investigador, en el que se preguntó por la percepción respecto a la formación y su incidencia en las emociones del profesorado. La parte concerniente a las emociones no será objeto de análisis de este trabajo, ya que se recoge en Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz (2023).

Metodología

Las observaciones de aula se analizaron conforme a una pauta elaborada por el equipo investigador en la que explícitamente se atendía a los aspectos clave identificados en el informe previo (Capomagi et al., 2022). Las respuestas abiertas en los cuestionarios se analizaron mediante codificación inductiva (Patton, 2002).

Resultados

Observaciones de aula

En este apartado se indica la evolución observada durante el ALS en relación con los aspectos clave señalados anteriormente: la institucionalización, la metacognición, el conocimiento matemático, con sus respectivas conexiones intra y extramatemáticas, el conocimiento didáctico-matemático y los procesos de validación y de representación. No se trata de realizar un análisis pormenorizado de todas las observaciones realizadas (sería excesivamente extenso), sino de proporcionar una visión global de los resultados obtenidos en este estudio.

Comenzando con la *institucionalización*, se observa que, con frecuencia, después de que el alumnado ha realizado las actividades de las UT, no se explicitan las matemáticas que han surgido, o bien se explicitan de forma superficial o incompleta, faltando un análisis más profundo de las propiedades de los conceptos matemáticos que vertebran las UT y que impide alcanzar los objetivos de la fase de integración (Figura 1). También, en algunas ocasiones, advertimos que la institucionalización se interpreta como una formalización con un nivel de abstracción inadecuado para la etapa educativa. A pesar de estas limitaciones, observamos buenas prácticas en las que los docentes, a partir de las respuestas del alumnado, institucionalizan adecuadamente los conceptos matemáticos. En la siguiente transcripción podemos ver un ejemplo de institucionalización, al abordar las diferencias entre poliedro regular e irregular y poliedro cóncavo y convexo. Previo a la transcripción, el alumnado de 5º ya había descubierto que existen algunos poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales y otros en los que no. Asimismo, se había observado que algunos poliedros permiten estampar sobre un papel todas las caras de la figura tridimensional, mientras que otros no lo permiten. Así, el docente institucionaliza los conceptos, mediante un diálogo con los estudiantes, interpelándolos y apoyándose en ejemplos previos trabajados durante la clase:

Docente: Todos los poliedros regulares, que tienen todas las caras iguales, están delimitados por polígonos iguales y que podemos estampar, se dice que son convexos.
Estudiante 1: Convexo es el icosaedro.
D: Sí, es convexo. Convexos quiere decir que las caras las puedo estampar sobre una superficie plana. Después vamos a hacer un esquema todos juntos para que no os olvidéis. [Toma un poliedro cóncavo] [...] Este poliedro se puede estampar y este [toma otro poliedro cóncavo] también, pero ¿qué va a pasar?
E1: Que no se pueden estampar todas las caras.
D: Había caras que se podían estampar, pero había otras que no. ¿Vale? Continúa siendo un poliedro, pero en este caso no es regular, porque no todas las caras son iguales, sería irregular. Pero como hay algunas que no las puedo estampar, decimos que son cóncavos. ¿Veis la diferencia?
E1: ¡Ah! Convexos y cóncavos.
E2: Entonces, ese no sé … es en plan…
D: No es regular, porque no todas las caras son iguales. Aquí tenemos un… [señala una cara de un poliedro irregular cóncavo].
Todos: ¡Cuadrado!
D: Aquí tenemos un… [señala otra cara]
T: ¡Rectángulo!
D: ¿Y las demás?
T: Rectángulos
D: Por lo tanto, no es… Es un poliedro, porque tiene volumen, está en 3D, pero no todas sus caras son iguales, son diferentes.
E3: Y no es convexo.
D: Y no es convexo porque no podemos estampar todas las caras. Es un poliedro irregular...
E3: Cóncavo.

Respecto a la *metacognición*, la gran mayoría del profesorado realiza al inicio de las sesiones una evocación de lo aprendido con anterioridad (fase de preparación, Figura 1). Sin embargo, esta práctica es menos frecuente en la finalización de las sesiones, o bien se lleva a cabo por parte únicamente del docente, sin la participación efectiva del alumnado. Aunque el desarrollo de las UT siempre concluye con una fase de integración que recoge la metacognición (Figura 1), la duración tan extensa de las UT llevó, en su momento, a la recomendación de realizar breves resúmenes de lo aprendido al final de cada sesión, sin menoscabo de la fase de integración, para evitar que mediara tanto tiempo entre la actividad y la última fase de la UT. Se muestra a continuación un extracto de una clase de 6º que ilustra el tipo de resumen de evocación al comienzo de la clase que se buscaba y que mayoritariamente se logró:

D: ¿Quién recuerda lo que hemos aprendido sobre las fracciones en la sesión de mates anterior, por favor? [Interpela a E1].
E1: Aprendimos que… 1/2 es igual que 2/4.
D: Que, por ejemplo 1/2 es igual que 2/4, es verdad. ¿Y cómo se dice que son esas fracciones?
E2: Fracciones equivalentes.
D: Que son fracciones equivalentes. Las fracciones equivalentes, son aquellas que representan una misma cantidad, pero se expresan con números y cifras diferentes. ¿Qué más hemos aprendido?
E2: Que también son equivalentes a las anteriores 4/8 y 8/16.
D: 4/8 y 8/16. ¿Y cómo se hace para probar que dos fracciones son equivalentes? [Interpela a E3].
E3: Multiplicando por el mismo número y después dividir por el mismo número.
D: Muy bien. ¿Multiplicando y dividiendo el qué?
E3: Eh… La primera o la…
D: Estudiante 4, ayúdala. ¿Multiplicando y dividiendo el qué?
E4: Multiplicamos… eh… el nominador (*sic*) y el denominador…
D: Numerador, nominador no, numerador.
E4: Numerador y denominador por el mismo número para avanzar la fracción.
D: Para ampliar la fracción, no avanzar, ampliar, multiplicamos por el mismo número el numerador y el denominador. Para reducir la fracción y encontrar una fracción equivalente… ¿E4?
E4: Tenemos que dividir.
D: Tenemos que dividir. ¿Qué dividimos?
E4: El numerador.
D: El numerador y … ¿E4?
E4: Y el nominador (*sic*)
D: No, y el denominador, por el mismo número. ¿Recordamos todos lo que son fracciones equivalentes?
T: ¡Sí!

Como se observa, el docente guía la discusión con el alumnado y recaba información sobre su aprendizaje, al tiempo que matiza o corrige los términos, afianzando la institucionalización, mientras que el alumnado evoca lo aprendido previamente al comenzar la sesión. En otros ejemplos se observa que el momento del resumen matemático de la sesión se utiliza para realizar una validación entre iguales. A continuación, se muestra un extracto del final de una clase de 6º en la que se han realizado pesadas de objetos para estudiar las relaciones entre peso y volumen. La docente lanza preguntas al alumnado sobre lo que se ha aprendido, promoviendo la metacognición y ayudando al alumnado en esa construcción (sin esperar a la fase de integración):

D: ¿Qué hemos hecho? ¿De qué hemos hablado?
Varios: De peso, de volumen.

D: ¿De qué más?
E1: De regletas.
D: ¿De qué más, E2?
E2: De cómo se diferencian peso y volumen.
D: Muy bien, ¿y algo más? ¿E3? ¿E4?
E5: Del peso.
D: Bien, del peso, y ¿algo más?
E2: Que se puede tener diferente peso y el mismo volumen.
D: ¿De algo más, E6?
Cuando hablamos del peso…
E6: De la diferencia entre peso y volumen.
D: ¿Qué aprendimos de la diferencia?
E6: Que cuando el peso es, por ejemplo, grande, el volumen es la distancia.
D: ¿Qué distancia?
E6: No sé cómo explicar, por ejemplo, 2 cm.
D: ¿Recuerdas qué forma tenía el objeto que tomaste?
E6: Era un cubo.
D: El cubo tiene un volumen, tú lo pesaste. Al compararlo con otros objetos diferentes, en la balanza, ¿tenían el mismo peso?
E6: Sí.
D: ¿O sea que dos cuerpos pueden tener el mismo peso y diferente volumen?
T: Sí.
D: ¿Y pueden tener diferente peso y volumen?
T: Sí.
D: ¿Y el mismo volumen y diferente peso?
T: Sí.

La participación del alumnado en los procesos de *validación*, como en el ejemplo anterior, así como la reflexión y *sistematización* de las producciones durante las fases de preparación y de resolución de la UT (Figura 1) fue otra de las líneas de refuerzo durante el ALS. Se había observado que el alumnado realizaba muchas producciones y que apenas se aprovechaban para construir conocimiento sobre ellas. En este aspecto se apreció una notable mejoría, encontrando en los vídeos de las últimas UT mucha más sistematización. En el siguiente extracto de una clase de 6º se muestra cómo, tras manipular objetos de diferente composición y forma, la docente pide al alumnado que exprese verbalmente sus hallazgos, escribe estos hallazgos y anima a la reflexión del alumnado sobre su posible generalización, introduciendo cuantificadores verbales para matizar la argumentación, promoviendo la comunicación matemática:

D: ¿Cuál es la relación entre el volumen y el peso?
E1: [D escribe mientras E1 habla] cuando tiene volumen, el objeto tiene un peso, pero si es una forma plana no, porque es solamente un dibujo.
D: ¿Qué más? ¿E2?
E2: Si hay un volumen … hay [el estudiante tiene problemas al vehicular en francés] … más peso
D: ¿Quieres decir que si hay más volumen hay más peso?
E2: Si el volumen cambia más, el peso cambia más.
D: Podemos decir [escribe] a mayor volumen, mayor peso tendrá.

E2: Sí.
D: Entonces, pregunto, yo tengo una burbuja [muestra una burbuja de plástico, hueca] y tengo otra burbuja más grande, según esto tiene más peso la burbuja mayor [el alumnado asiente]. Pero, si comparo esta burbuja con una canica [muestra una canica maciza] pequeñita, ¿la burbuja pesa más que la canica?
V: No.
D: Entonces, esto que hemos escrito de que "a mayor volumen, mayor peso", ¿será cierto siempre?
T: No.
E3: Es solo si son del mismo material.
D: ¡Vale! Entonces añadimos "del mismo material" a lo que dijo E2. [Interpela a E4] ¿Y si son de distinto material, esto es cierto?
E4: También.
D: ¿También, E5?
E5: No.
D: Bueno, esto lo tendremos que ir viendo…

El uso de diferentes registros de *representación*, otro de los objetivos de la formación, se trabajó mediante distintas vías. Por un lado, la tradición del uso de manipulativos en la *Escola Andorrana* facilitó seguir la secuencia CPA (concreto, pictórico, abstracto—véase Leong et al., 2015) mediante el uso de diferentes manipulativos físicos y virtuales con los que se suelen realizar la fase de preparación y la de resolución (Figura 1), aunque fue necesario insistir, paralelamente a la institucionalización de las matemáticas, en alcanzar, en los momentos adecuados, la fase de representación abstracta. Por otro lado, además del trabajo dirigido hacia el alumnado, se insistió en que el profesorado manejase diferentes representaciones, por ejemplo, en el tema de las fracciones, promoviendo el uso de modelos diferentes al modelo circular, al trabajar con fracciones equivalentes, o en el de estadística, utilizando diferentes tipos de gráficos. Respecto al registro de *representación* verbal, se detectaron algunos obstáculos derivados del contexto de poliglosia y la terminología específica. Por ejemplo, la media y la mediana se corresponden en catalán con *mitjana* y *mediana*, respectivamente. Los obstáculos surgieron por el significado de "mitad" que evoca *mitjana*, generando confusión con mediana.

En cuanto a las *conexiones intra y extramatemáticas*, se apreciaron mejoras sustanciales, a través de conexiones de simplificación, de complejización y transversales. En el fragmento siguiente se observa una conexión intramatemática de complejización (en el sentido de Carrillo-Yáñez et al., 2018). En 6º, se están tratando los movimientos del plano, el docente adelanta el concepto de coordenadas cartesianas y su significado como distancia:

D: Eso son coordenadas sobre el espacio, ¿sí? El primero [señala un número] es la x y el segundo [señala otro número], es la y. Esta línea horizontal es la x y la vertical es la y. Mirad, este punto está en el (15, 5). Es como cuando hicimos lo de (1, c) o (3, a); es lo mismo, pero en los ejes X e Y. Son distancias.

Encontramos más ejemplos de conexiones extramatemáticas que de intramatemáticas. El planteamiento de las UT favorece estas conexiones, ya que la situación problema con la que se inicia siempre surge en un contexto realista. Por ejemplo, planteando el concepto de simetría a través del estudio de la naturaleza (flores, mariposas, etc.) o de obras de arte (el Taj Mahal).

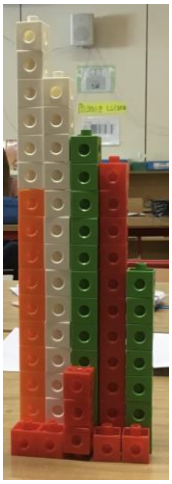
El último objetivo del ALS, comprobado a través de las observaciones, era enriquecer el *conocimiento del profesorado*, tanto desde el punto de vista matemático como desde el didáctico-matemático. Por ejemplo, en la UT sobre fracciones, en 6º, se trabajaron en la sesión inicial los significados de una fracción con diversas formas y materiales ya que se observó que habitualmente se trabajan con ejemplos prototípicos como tartas o pizzas. Este conocimiento se hizo patente en muchas de las observaciones, como se aprecia en el siguiente extracto, en el que el docente favorece la desvinculación de la unidad con la totalidad:

D: ¿Qué representa 1?
E1: 3/4
E2: Una fracción.
D: ¿Una fracción?
E2: No.
E3: Una tarta, por ejemplo. Toda la tarta.
D: 1 representa la totalidad, ¿1 implica que su valor sea 1? Ejemplo: 20 € La unidad puede tomar valores diferentes, que divido en partes iguales.

También se apreciaron mejoras notables en las oportunidades de aprendizaje generadas a partir de un uso eficiente de manipulativos, lo que supone una ampliación del conocimiento didáctico-matemático del profesorado. Vemos un ejemplo en 5º, cuando se plantea una situación de recuento manipulativo (Rodríguez-Muñiz et al., 2021), sobre el número de horas a la semana que dedica al estudio un grupo de escolares (Figura 4).

Figura 4

Representación manipulativa del recuento del número de horas de estudio por alumno. Fuente: elaboración propia.



A partir de la producción del alumnado, la docente desarrolla la idea de media aritmética como reparto equitativo:

D: Tal y como lo tenemos aquí [Figura 4] y sin hacer cuentas, ¿cómo haríamos para que todos tuvieran lo mismo?
E1: Le doy este a este, este a este [señala los policubos indicando cómo los movería].
D: A ver… [se aleja para monitorizar a otro grupo, mientras el alumnado de este grupo manipula la representación, igualando todas las barras a la altura de la más pequeña, quitando las piezas por exceso]… No, pero tiene que haber las mismas piezas que había al principio porque, si no, estás quitando, no estás repartiendo.
E2: ¡Ah! ¡Con todas!
D: Eso [el grupo vuelve a colocar las piezas sobrantes, repartiéndolas entre las barras]… Entonces, ahora, sí habéis repartido todas las piezas que teníamos al principio a partes iguales entre todos los niños, esto que nos ha salido es el valor que llamamos media. Así que la media sería…
T: ¡Doce!
D: Doce, muy bien. O sea que, si todos los alumnos estudiaran las mismas horas, ¿sería?
T: Doce horas.
D: Hemos repartido todas las horas que estudian los alumnos a partes iguales entre los 5 alumnos y nos han salido 12 horas, a ese valor lo llamamos media.

Respuestas a los cuestionarios

Además de los aspectos afectivos (discutidos en Muñiz-Rodríguez & Rodríguez-Muñiz, 2023) se planteó, tras cada ciclo del ALS, un cuestionario de dos preguntas abiertas sobre la percepción de cambio en el conocimiento matemático y en el conocimiento didáctico-matemático del profesorado participante. Al finalizar el curso, se planteó a todo el profesorado otro cuestionario con una única pregunta abierta sobre la percepción de la utilidad de la formación. Las respuestas a estas preguntas se describen a continuación.

La pregunta sobre el conocimiento matemático era: "¿Qué aspectos de las matemáticas de la UT ha reforzado o descubierto con esta formación? ¿Ha cambiado su percepción respecto a algún contenido matemático?" Las respuestas obtenidas se pueden dividir en cuatro categorías:

- Profundización de conceptos: 16 participantes mencionan que han reforzado conceptos matemáticos, en general ("He reforzado todos, ya que las matemáticas me cuestan bastante", UT52), y 25 especifican conceptos —volumen, perímetro, área, polígonos regulares, fracciones, operaciones, etc.— ("He reforzado mucho la parte de las operaciones y me ha gustado hacerlo", UT 51).
- Cambio en la percepción: 25 respuestas mencionan que, tras la formación, ven las matemáticas de una forma más manipulativa (por ejemplo, en las transformaciones en el plano abordadas con GeoGebra) o las conectan con la reflexión ("He aprendido a cómo enseñar nuevos conceptos de manera diferente a la tradicional. Dejar pensar/reflexionar a los alumnos para llegar a la solución. Ponerles en situación para solucionar el problema", UT54). También se señala la relevancia de identificar procesos matemáticos (NCTM, 2003) que venían

utilizando de manera algo naif.

- Metodología y enfoque: 17 participantes mencionan que han aprendido nuevas formas de plantear las matemáticas escolares, conectándolas más con la acción de aula ("He observado que estamos más acostumbrados en el cómo hacer que en el concepto. Los alumnos no están acostumbrados a este tipo de ejercitación/reflexión/análisis", UT61).
- Utilidad de las matemáticas: 7 respuestas destacan la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y la importancia de mejorar la comprensión y la resolución de problemas ("Sí me ayuda en algunas cosas. Por ejemplo, ver ejemplos de la vida", UT64).

Además de estas cuatro categorías, debemos señalar que en las respuestas tras el segundo ciclo del ALS observamos una mayor profundidad que en las respuestas tras el primero. Así, tras el segundo ciclo se mencionan aspectos como la metacognición, la necesidad de argumentación de las respuestas, o la construcción social de las matemáticas mediante trabajos en grupo.

La segunda pregunta, sobre conocimiento didáctico-matemático, era: "Respecto a la didáctica de estos conceptos (cómo enseñarlos y cómo aprenderlos, qué recursos utilizar, etc.), ¿ha aprendido algo? ¿Ha cambiado su conocimiento previo respecto a la didáctica de algún contenido de la UT?" Respecto a qué se ha aprendido, 23 de 69 respuestas inciden en promover y favorecer la reflexión del alumnado. Se señala mayoritariamente que dejar tiempo para que el alumnado elabore sus propias conjeturas y dé respuestas mejora notablemente el proceso de aprendizaje, se indica la oportunidad de encontrar buenas preguntas que guíen el proceso y de fomentar la participación reflexiva, tanto individual como grupalmente. También hay respuestas que apuntan a recursos específicos: Tangram, GeoGebra, recursos gráficos estadísticos, el muro de las fracciones, etc. En cuanto a cómo ha cambiado su conocimiento didáctico-matemático, algunos docentes consideran que no ha cambiado sustancialmente, pero otros señalan la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, la comprensión de la práctica de manera productiva, el encaje de las fases de las UT con la secuencia CPA y la importancia de considerar la representación abstracta en la fase de integración, o una mejor gestión del tiempo en el aula.

Finalmente, se planteó como cierre la pregunta: "Tras esta formación, ¿ha cambiado su percepción respecto al enfoque competencial de la educación matemática? ¿Cree que la formación le ayudará a plantear las próximas UT?" Las respuestas indican que la mayoría de los participantes experimentaron cambios en su percepción. Algunos mencionaron haber mejorado aspectos como la argumentación en sus respuestas, la definición más precisa de los conceptos y el correcto uso del lenguaje matemático, las formas de validación de las respuestas del alumnado y, sobre todo, dejar tiempo y espacio en las UT para que el alumnado descubra por sí mismo. Otros, participantes consideraron que la formación les ha proporcionado nuevas ideas y herramientas para plantear próximas UT. Sin embargo, algunos aún se sienten inseguros respecto al enfoque competencial y reclaman más formación y más tiempo para aplicarlo adecuadamente. En general, la mayoría considera que la formación ha sido enriquecedora y útil para mejorar su práctica docente.

Discusión y conclusiones

Este trabajo partía de tres preguntas de investigación, que organizan la discusión. La primera era: (1) ¿Cómo articular un programa de desarrollo profesional basado en el *lesson study* a gran escala y a distancia? Los resultados del ALS evidencian que una organización basada en la grabación y visionado masivo de vídeos de clase, combinada con sesiones de discusión previa y posterior (Figura 3), puede ser una solución para suplir los inconvenientes del *lesson study* cuando se cuenta con limitaciones de tiempo, de espacio y de personal. En este sentido, se produce no solamente una transposición cultural (Mellone et al., 2021), adaptándolo a las características del contexto escolar andorrano, sino una adaptación logística. La estructura definida en el ALS es reescalable y exportable a otros contextos escolares y adaptable a diferentes organizaciones en función de la cantidad de profesorado participante, el número de personas disponibles para realizar la observación y las oportunidades de mantener encuentros antes, durante y después de la observación entre el profesorado y el equipo investigador. En este sentido, nuestro trabajo se suma a anteriores adaptaciones del *lesson study* (Ní Shúilleabháin, 2017; Ponte et al., 2017; Winsløw et al., 2017), presentando como principal novedad el cambio de escala que supone el ALS y su integración como programa de desarrollo profesional basado en la acción de aula.

Respecto a la segunda pregunta de investigación (¿En qué medida ha permitido al profesorado el programa ALS descubrir o reforzar aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos?), los resultados evidencian que se produce una resignificación de las matemáticas enseñadas por parte del profesorado, en un proceso de deconstrucción y reconstrucción como el de Alsina y Mulà (2019). En esta resignificación se ve involucrado, al mismo tiempo, el conocimiento matemático y el didáctico-matemático (Ball et al., 2008) del profesorado, en una mutua retroalimentación, como evidencian las respuestas a los cuestionarios (por ejemplo, la manipulación como recurso didáctico que hace pensar en la matemática de una manera nueva). También se aprecia una mayor profundización en los aspectos que resultaban claves al plantear el programa del ALS, si bien en algunos de ellos aún no se ha logrado la mejora considerada. Así, se observa que, respecto a la institucionalización de las matemáticas, aunque ha habido un progreso de las primeras a las últimas UT, el avance logrado no es aún suficiente. Los resultados muestran secuencias muy apropiadas de institucionalización, pero también hay casos en los que esta no está presente ni siquiera en la fase de integración de la UT (Figura 2). Algo similar ocurre con el resumen matemático vinculado a la metacognición. Parte del profesorado reconoce en las respuestas a los cuestionarios que aún necesita más formación matemática y didáctica al respecto, pero otros señalan dificultades derivadas del tiempo para preparar las sesiones o la propia estructura de las UT, lo que es consistente con las denominadas oposiciones jerárquicas en Ramploud et al. (2022) y con las objeciones manifestadas respecto a la estructura de la formación en Funghi (2022).

Sin embargo, en otros de los aspectos claves del diseño formativo del ALS, los resultados (ejemplificados en las transcripciones) muestran un progreso muy notable. Se aprovechan oportunidades de aprendizaje que en las observaciones previas pasaban desapercibidas. Se utilizan los materiales con una finalidad didáctica más allá de la propia manipulación, vinculándolos a los objetivos de aprendizaje. Se consigue un catálogo más amplio de representaciones matemáticas entre las que se establecen conexiones. Y, finalmente, se promueve una comunicación efectiva sobre y en torno a las matemáticas presentes en el aula, siempre con la resolución de un problema (la situación inicial de la UT) como eje vertebrador de la actividad del aula. En definitiva, mediante el ALS, los aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos del conocimiento del profesorado se ven reforzados en un proceso social de desarrollo profesional (Henze et al., 2009).

La tercera pregunta de investigación era: (3) ¿Cómo ha contribuido el programa ALS al desarrollo profesional del profesorado? En este caso, la combinación de las observaciones con las respuestas del profesorado a los cuestionarios evidencia una contribución significativa del ALS, apreciada de forma positiva por los participantes. Por un lado, la formación ha contribuido a mejorar la eficacia en el desarrollo de las competencias matemáticas que promueve el currículo andorrano (MEES, 2022), como queda de manifiesto en las respuestas a los cuestionarios, ya que se han logrado una mayor comunicación, una mejora de los procesos de argumentación y una mayor profundidad en la matemática institucionalizada en cada UT. Estas evidencias indican una mejor comprensión del modelo competencial por parte del profesorado, la cual, en sintonía con Beltrán-Pellicer y Alsina (2022), es una condición necesaria para su buen funcionamiento. Por otro lado, la propia dinámica de trabajo que se estableció con el ciclo del ALS contribuyó a que el profesorado, al tiempo que se desarrollaba profesionalmente, adquiriera un mayor protagonismo en la definición, implementación y revisión de las UT, es decir, el profesorado se constituyó en un agente activo en el cambio curricular, lo cual supone otra condición necesaria para su eficacia (Coles et al., 2023). El nivel creciente de profundización en las respuestas del profesorado a las preguntas abiertas y la mayor cantidad de oportunidades de aprendizaje suscitadas en las sesiones de puesta en común del ALS evidencian, asimismo, un aumento en la capacidad de autocrítica, que se respalda tanto en las respuestas que demandan una mayor formación como en las que reconocen niveles de inseguridad (cuestión analizada con más detalle en Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2023).

Señalamos a continuación las limitaciones más relevantes de esta investigación. En primer lugar, a pesar de que se trata de un estudio censal (lo que elimina la limitación de la representatividad), la participación obligatoria del profesorado en este modelo de formación puede estar generando efectos difíciles de controlar, especialmente en las respuestas a los cuestionarios anónimos. La poca literatura previa sobre estudios a esta escala también limita nuestra capacidad de comparación de los resultados. Podría haber sesgos derivados de los planteamientos teóricos del equipo investigador, que comparte postulados, que se superpongan a las fases de triangulación de los resultados. Por último, el trabajo en un entorno trilingüe puede haber generado problemas de interpretación lingüística. En el futuro, se plantea que la formación vaya incorporando mayores grados de autonomía del profesorado, tanto en el diseño de las UT como en su implementación.

A modo de conclusión, el ALS se ha revelado como un marco eficaz de formación en acción basado en el *lesson study*, ampliando el conocimiento matemático y didáctico-matemático del profesorado participante y contribuyendo a su desarrollo profesional potenciando su participación como agente del cambio curricular.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el MEES de Andorra. Los autores agradecen su apoyo económico, así como la participación y colaboración de docentes, personal directivo y del MEES.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses. Los financiadores no tuvieron ningún papel en el diseño del estudio; en la recopilación, análisis o interpretación de datos; en la redacción del manuscrito, o en la decisión de publicar los resultados.

Contribuciones de los autores

Conceptualización, L.J.R.M y L.M.R.; metodología, A.A.G., L.J.R.M. y L.M.R.; investigación, todos los autores; análisis de datos, M.A.C., A.A.G., I.G.H. y E.L.F.; redacción del borrador original, M.A.C., A.A.G., I.G.H., E.L.F. y L.M.R.; revisión y edición, L.J.R.M. y L.M.R.; supervisión, L.J.R.M. y L.M.R.; administración del proyecto, L.J.R.M.

Referencias

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, 33*(1), 7–29.

Alsina, A., Maurandi, A., Ferre, E. y Coronata, C. (2021). Validating an instrument to evaluate the teaching of mathematics through processes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*, 559–577. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10064-y

Alsina, Á. y Mulà, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. *Sustainability, 11*(15), 4039. https://doi.org/10.3390/su11154039

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Beltrán-Pellicer, P. y Alsina, Á. (2022). La competencia matemática en el currículo español de Educación Primaria. *Márgenes Revista de Educación de la Universidad de Málaga, 3*(2), 31–58. https://doi.org/10.24310/mgnmar.v3i2.14693

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational researcher, 33*(8), 3–15. https://doi.org/10.3102/0013189x033008003

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Capomagi, G., Rodríguez-Muñiz, L.J. y Benvenuti, S. (2023). Il lesson study come strategia di ricerca: un esempio presso il Principato di Andorra. En C. Manolino y R. Minisola (Eds.), *Atti del Convegno La Formazione dei Docenti di Matematica tra continuità e innovazione: il Lesson Study, 3-4 novembre 2022* (en prensa).

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Charles, R.I. y Carmel, C.A. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education, 7*(3), 9–24.

Clivaz, S. y Takahashi, A. (2018). Mathematics lesson study around the world: Conclusions and looking ahead. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J.P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 153–164). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_9

Coles, A., Rodríguez-Muñiz, L.J., Chee-Mok, I.A., Ruiz, A., Karsenty, R., Martignone, F., Osta, I., Ferretti, F. y An Nguyen, T. T. (2023). Teachers, Resources, Assessment Practices: Role and Impact on the Curricular Implementation Process. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World* (pp. 291-321). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_18

Desoete, A. y De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM Mathematics Education, 51*, 565–575. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01060-w

Fernandez, C. (2002). Learning from Japanese approaches to professional development: The case of lesson study. *Journal of Teacher Education, 53*(5), 393–405. https://doi.org/10.1177/002248702237394

Fernandez, C. y Yoshida, M. (2012). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410610867

Funghi, S. (2022). Cultural transposition of lesson study: Primary pre-service teachers' beliefs after a workshop. En C. Andrà, D. Brunetto, F. Ferretti y L.J. Rodríguez-Muñiz (Eds.), *Mathematics teachers' and students' views: insights from innovative perspective in affect-related research* (en prensa). Springer.

Gamboa-Araya, R., Hidalgo-Mora, R. y Castillo-Sánchez, M. (2022). La implementación de los programas de estudio de Matemática en primaria desde la visión de la persona docente. *Uniciencia, 36*(1), 177–207. http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.11

Hattie, J. y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research, 77*(1), 81-112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Henze, I., van Driel, J.H. y Verloop, N. (2009). Experienced science teachers' learning in the context of educational innovation. *Journal of Teacher Education, 60*(2), 184–199. https://doi.org/10.1177/0022487108329275

Kyei-Blankson, L. (2014). Training math and science teacher–researchers in a collaborative research environment: implications for math and science education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(5), 1047–1065. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9444-6

Leong, Y.H., Ho, W.K. y Cheng, L.P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator, 16*(1), 1–18.

Mellone, M., Pacelli, T. y Liljedahl, P. (2021). Cultural transposition of a thinking classroom: to conceive possible unthoughts in mathematical problemsolving activity. *ZDM Mathematics Education, 53*, 785–798. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01256-z

Ministeri d'Educació i Ensenyament Superior [MEES] (2022). *Pla Estratègic per a la Renovació I Millora del Sistema Educatiu Andorrà*. https://www.educacio.ad/sistema-educatiu-andorra/permsea

Montes, M., Pascual, M. y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24*(1), 83–104. https://doi.org/10.12802/relime.21.2414

Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L.J. (2023). Teachers' emotions during a professional development program based on lesson study. *La matematica e la sua didattica* (en prensa).

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1

NCTM (2003). P*rincipios y estándares para la educación matemática.* Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

Ní Shúilleabháin, A. (2017). Enacting curriculum reform through lesson study in the Irish post-primary mathematics classroom. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 65–85). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_4

Patton, M. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Sage Publications.

Ponte, J.P. da, Quaresma, M., Mata-Pereira, J. y Baptista, M. (2017). Fitting lesson study to the Portuguese context. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J.P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 87–103). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_5

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., Fiorentini, D., Miskulin, R., Passos, C., de La Rocque Palis, G., Huang, R. y Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice. En R. Even y D. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 185–209). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_20

Ramploud, A., Funghi, S. y Bartolini, M.G. (2022). Chinese lesson study: critical aspects of transfer from China to Italy. *International Journal for Lesson & Learning Studies, 11*(2), 147–169. https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2021-0031

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar González, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas. Los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, 15*(4), 311–338. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511

Rodríguez-Muñiz, L.J., Ferrando, I. y Montejo-Gámez, J. (2022). Oportunidades, retos y necesidades de la educación matemática. *Cuadernos de Pedagogía, 531*, 14–19.

Winsløw, C., Bahn, J. y Rasmussen, K. (2017). Theorizing lesson study: Two related frameworksand two Danish case-studies. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J.P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 123–142). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_7