Universidad de Oviedo
Facultad de Formación del Profesorado y Educación

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES EN EL AULA DE PRIMARIA

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Guillermo López Iglesias

Tutor/a: Itziar García Honrado

Julio 2023

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente los currículos de matemáticas de Educación Primaria han pospuesto la introducción del estudio del álgebra a los primeros cursos de Educación Secundaria teniendo en cuenta la teoría piagetiana, la cual sostiene que la capacidad de abstracción de los alumnos de primaria no está lo suficientemente desarrollada para establecer un pensamiento formal algebraico (Zapatera, 2022). No obstante, diversos autores observaron que los estudiantes en la escuela desarrollaban la capacidad de generalización de manera natural, lo que permitía, potenciando estas capacidades, fomentar el pensamiento algebraico de los más pequeños (Manson et al., 2005; Socas, 2011).

Según Zapatera (2015) la generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes en el área de las matemáticas, siendo considerada la esencia del álgebra y una de las rutas fundamentales hacia el pensamiento abstracto y algebraico. Para desarrollar este pensamiento, la realización de problemas de generalización de patrones resulta de una valiosa herramienta. Se trata de identificar regularidades o una propiedad común dentro de una serie y extender dicha propiedad a todos los términos de la secuencia para, finalmente, encontrar una regla general que permita determinar cualquier término de la sucesión (Radford, 2008).

A la hora de representar una regla general que explique la relación funcional entre los términos del patrón, English y Warren (1998) como se citó en Callejo et al. (2016), sostienen que hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar, con cierto grado de generalidad, una norma general de manera verbal o escrita con sus propias palabras y la habilidad para recurrir al uso de símbolos o emplear notación algebraica para representarla. En relación con ello, la línea de investigación denominada *Early algebra* o álgebra temprana, trata de abordar el aprendizaje de conceptos algebraicos y habilidades matemáticas relacionadas con el álgebra. Esta propuesta curricular aboga por incorporar desde los primeros cursos de Educación Primaria actividades dirigidas al estudio y generalización de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, que potencien competencias propias del álgebra (Blanton y Kaput, 2005).

Con la entrada en vigor de la LOMLOE (2020) y la consolidación del Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, se introduce el concepto de patrón en cada ciclo de dicha etapa educativa. Los criterios de evaluación establecidos en el currículo se van desarrollando paulatinamente, desde la realización de conjeturas matemáticas sencillas, investigando patrones, propiedades y relaciones en el primer ciclo, pasando por su identificación, descripción verbal, representación y predicción de términos a partir de regularidades en una serie de números, figuras o imágenes en el segundo, hasta finalizar, en el tercer ciclo de Educación Primaria, con la formulación de patrones recurrentes, pudiendo ser representados mediante tablas, gráficos o notaciones inventadas. Todos estos criterios están englobados en el saber básico “Sentido algebraico”.

En el presente trabajo, se busca analizar cómo los estudiantes de sexto curso de Educación Primaria (11-12 años) son capaces de resolver problemas de generalización de patrones, poniendo especial atención en las distintas estrategias que utilizan para identificar y expresar una regla general funcional. En consecuencia, se ha diseñado una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) para la generalización de patrones geométricos de recurrencia, donde se establecen distintas fases o estadios por los que el alumnado ha de transitar para determinar la capacidad de razonamiento abstracto y pensamiento algebraico que presentan en dicha etapa educativa. Para ello, se han realizado cuatro intervenciones educativas en varios colegios públicos de Educación Primaria de la ciudad de Oviedo, Asturias, en el curso escolar 2022/2023, obteniendo una muestra de 84 estudiantes. A raíz de los datos obtenidos, se realizará un análisis estadístico inferencial a posterior revisión e interpretación de las distintas respuestas de los alumnos a las actividades propuestas.

Atendiendo a la estructura organizativa del trabajo, en primer lugar, se abordará la fundamentación teórica, enriqueciéndose de las aportaciones de diversos autores en torno a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, la generalización de patrones y el *Early-Algebra* o álgebra temprana en la etapa de Educación Primaria. En segundo lugar, se desarrollará el apartado metodológico en el que se describe y justifica el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje a partir de una actividad de generalización de patrones recurrente. En tercer lugar, se realizará una breve descripción de la puesta en práctica de la intervención educativa en las aulas de sexto curso de Educación Primaria. En cuarto lugar, se expondrán los resultados obtenidos, analizando las respuestas de los estudiantes y realizando un análisis estadístico inferencial. Finalmente, se expondrán las conclusiones.

2. MARCO TEÓRICO

En el presente apartado se desarrollará la fundamentación teórica que servirá como base y justificación de la intervención educativa que se llevará a cabo en las aulas de Educación Primaria en los subsiguientes apartados del trabajo. En primer lugar, se abordará el origen y concepto de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, así como su aplicación en el ámbito de las matemáticas y de la educación. A continuación, se expondrán las fases o estadios que sigue el proceso de generalización de patrones aplicados a la resolución de problemas matemáticos y su importancia para introducir el álgebra y promover el pensamiento algebraico en la etapa de Educación Primaria. Para finalizar, se abordará la implementación en el currículo del *Early algebra* o álgebra temprana en dicha etapa, exponiendo los beneficios que presenta en los estudiantes a la hora de consolidar conceptos matemáticos y su positiva repercusión en el área del álgebra una vez los estudiantes promocionen a la etapa de Educación Secundaria.

2.1 TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje son un recurso para planificar y estructurar el aprendizaje de los estudiantes basadas en el desarrollo de su pensamiento a lo largo del tiempo (Zapatera, 2015). Martin Simon introdujo en 1995 la noción de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como parte de su modelo de enseñanza de las matemáticas. Gómez (2007), recoge el trabajo de Simon y define las primeras bases acerca de las THA planteando la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva constructivista, donde la manera de educar y enseñar debe adaptarse necesariamente a la forma en la que aprenden los alumnos integrando conocimientos previos (Gómez-Chacón, 2020). El objetivo es anticipar cómo los estudiantes pueden adquirir conocimientos matemáticos en función de sus conocimientos previos y, a raíz de ello, diseñar actividades que promuevan un aprendizaje significativo.

Más adelante, Simon y Tzur (2004, p.93) distinguen las principales características de la noción de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje involucradas en el proceso de aprendizaje de actividades matemáticas conceptuales:

> Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995). Mientras que el objetivo del docente para el aprendizaje del alumno proporciona una dirección para los otros componentes, la selección de tareas de aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje del alumno son interdependientes. Las tareas son seleccionadas en base a hipótesis sobre el proceso de aprendizaje; la hipótesis del proceso de aprendizaje se basa en las tareas involucradas.

Teniendo en cuenta este constructo, ambos autores resaltaron las siguientes premisas donde enfatizan la importancia de la tarea y de su diseño:

1. La construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.
2. Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje es un vehículo para planificar el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos.
3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.
4. Dada la naturaleza hipotética e inherente incierta de este proceso, el docente puede modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Por consiguiente, una THA incluye tres aspectos fundamentales: la meta u objetivo de aprendizaje, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje, refiriéndose esto último al pronóstico del nivel de adecuación de las actividades en función de la evolución del contexto de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995). El objetivo de aprendizaje suele estar preestablecido desde un principio y condiciona los otros dos elementos, los cuales son interdependientes.

A raíz de ello, Simon y Tzur (2004) amplían sus investigaciones y enfatizan el papel que cumplen las tareas matemáticas en el aprendizaje de un concepto y, por lo tanto, en la concepción de una THA resaltando las siguientes características; el diseño de la tarea, los objetivos de aprendizaje, la progresión hipotética y los conocimientos previos del alumnado, los cuales resultan clave para la correcta adecuación de la THA. Es por ello, que una THA es hipotética ya que la trayectoria de aprendizaje real de los estudiantes no necesariamente se ajustará a la prevista inicialmente. Cabe destacar la importancia que desempeña el aprendizaje conceptual ligado a la enseñanza de las matemáticas, ya que es el alumno el que elabora estructuras lógicas mentales (conceptos y relaciones) a partir del análisis o procesamientos de la información relacionada con el objeto que se desea aprender (Bruner et. al, 2001).

Según Zapatera (2013) las trayectorias hipotéticas de aprendizaje permiten diagnosticar la comprensión de los estudiantes y describir el progreso en términos de crecimiento a través de niveles, proporcionando una retroalimentación a los maestros, mejorando la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes mediante la adaptación de la instrucción a lo que el estudiante realmente necesita, teniendo como finalidad progresar hacia el objetivo del aprendizaje previamente establecido. Es por ello, que la THA supone un recurso muy eficaz en la enseñanza de las matemáticas, ya que proporciona al profesorado una guía estructurada para acompañar al alumnado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pudiéndose adaptar a sus circunstancias personales.

2.2. GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Un patrón "es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro, et al., 2010, p. 57). También es entendido como "las sucesiones de elementos que se constituyen siguiendo una determinada regla; los estudiantes, a partir de casos particulares, han de deducir esa regla para generalizar el patrón y continuar la sucesión" (Zapatera, 2018, p. 55).

Zapatera (2018) sostiene que las reglas de formación de patrones pueden clasificarse en dos categorías: patrones de repetición o de recurrencia. Según el autor, en los patrones de repetición, los elementos se presentan de manera periódica, mientras que, en los patrones de recurrencia, cada término de la serie se expresa en función de los anteriores. Estos últimos pueden ser geométricos o numéricos y tienen un nivel de dificultad mayor que los patrones repetitivos, por lo que están indicados para ser trabajados en los cursos medios y superiores de Educación Primaria.

Para Pólya (1989) La generalización consiste en "Pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado" (p. 97), es decir, generalizar es "ver lo general a través de lo particular y ver lo particular en lo general" (Manson et al., 2005, p. 310). Según Merino et al. (2013) trabajar con tareas de generalización implica "la búsqueda de patrones, lo cual pretende hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos" (p. 27).

Radford (2010) señala que la generalización de patrones es considerada como una de las formas más interesantes de introducir el álgebra en la escuela, ya que, entre otros aspectos, permite a los alumnos explorar diversas situaciones que son fundamentales para desarrollar el pensamiento algebraico. En las actividades de generalización de patrones se plantea una serie de imágenes o figuras y se solicita continuar la sucesión o determinar la cantidad de elementos que conforman una figura dada o no especificada; o también dado el número de elementos de una figura, identificar qué posición ocupa en la sucesión o serie (Callejo et. al, 2016).

Radford (2006, p.5) ofrece una concisa definición acerca de la generalización algebraica de un patrón observable en una serie dada:

> La generalización algebraica de un patrón se basa en la capacidad de captar un carácter común observado en algunos elementos de una determinada secuencia "S", siendo consciente que este carácter común se aplica en todos los términos de dicha secuencia, pudiendo utilizarlo para proporcionar una expresión directa en cualquier término de "S".

En otras palabras, la generalización algebraica de un patrón se fundamenta en la detección de una cualidad común, notada sobre algunos elementos de la secuencia, que luego se generaliza a todos los términos de la misma y que sirven como referencia para construir expresiones más allá del campo perceptivo (Radford, 2006). De esta manera, generalizar implica extender una característica o propiedad observada en un conjunto limitado de casos. Esto requiere que los estudiantes busquen regularidades, reglas o pautas generales de comportamiento que puedan expresar de forma gráfica, verbal y/o algebraica, y que sean aplicables a cualquier caso que se les presente.

Radford (2008) describe el proceso de generalización de patrones en tres fases distintas. En la primera fase, el estudiante determina una propiedad común compartida por algunos términos de una secuencia y es capaz de extrapolarla a términos cercanos (generalización cercana). En la segunda fase, es capaz de extenderla a términos lejanos (generalización lejana), y en la tercera, puede establecer una regla general que le permite calcular cualquier término de la secuencia.

Complementando al modelo de Radford (2008) y teniendo en cuenta los estudios de Rivera (2010) y Warren (2005) centrados en cómo estudiantes de Educación Primaria resuelven problemas de generalización de patrones, Callejo y Zapatera (2017) reconocen tres elementos matemáticos significativos en el proceso de generalización:

- *Estructura numérica y espacial (generalización cercana):* es la relación entre la organización espacial y numérica; esto supone la relación del número de elementos de una serie y su distribución espacial con los términos de la serie anterior. "El estudiante es capaz de continuar la secuencia en términos cercanos (generalización cercana) prestando atención al número de elementos en un término, pero no a la estructura espacial de las figuras. No coordinan estructuras numéricas y espaciales" (p. 314).

Siguiendo a Zapatera (2015) "Un estudiante coordina ambas estructuras en un problema de generalización cuando dibuja el número exacto de elementos respetando su configuración espacial, es decir, la ubicación de cada elemento de la figura en el conjunto de elementos que la componen" (p. 72). Por lo tanto, "En este estadio el estudiante es capaz de continuar la sucesión de figuras respetando el número de elementos que componen cada término, pero no la distribución espacial de las figuras, por tanto, no coordina las estructuras numérica y espacial" (p.75).

- *Relación funcional (generalización lejana)*: para identificar un término lejano, o no especificado, los estudiantes deben establecer una relación entre la posición de la figura y el número de elementos que contiene. "El estudiante puede coordinar estructuras espaciales y numéricas, y puede expresar verbalmente una fórmula explícita o una fórmula donde una entidad conocida general se representa mediante un ejemplo. Sin embargo, aún no puede de invertir el proceso." (Callejo y Zapatera, 2017, p. 314).

En este estadio, como explica Zapatera (2015), un estudiante emplea una relación funcional a un problema de generalización al establecer una relación, ya sea numérica, verbal o algebraica, entre cualquier figura de la serie y el número de elementos que la conforman. De esta manera:

> Los estudiantes pueden establecer una relación funcional entre la posición de la figura y el número de elementos que la componen mediante la coordinación entre las estructuras espacial y numérica, al descomponer la figura en partes, o de forma recursiva, apoyándose en la identificación de la constante de crecimiento, sin tener en cuenta la estructura espacial (p. 72-73).

- *Generalización lejana con proceso inverso*: para identificar la posición de la figura sabiendo el número de elementos que la componen, es necesario establecer una relación funcional inversa de la anterior (Warren, 2005). "El estudiante es capaz de coordinar el modelo espacial y numérico, reconoce la relación funcional en casos concretos y expresa verbalmente la regla general como una relación funcional y, al mismo tiempo, invierte la relación funcional en casos concretos" (Callejo y Zapatera, 2017, p. 314).

Según Zapatera (2015) "Un estudiante domina el proceso inverso cuando es capaz, a partir del número de elementos dados de una figura, reconocer la posición de la figura en la secuencia, es decir, cuando es capaz de invertir la relación funcional" (p. 73). También subraya que a los niños de Educación Primaria les resulta difícil revertir el pensamiento ya que necesitan entender la concordancia entre los patrones numéricos y la relación entre las cantidades, aspectos que la mayoría de los alumnos en esta etapa aún no poseen.

Para concretar la carga teórica de los tres elementos matemáticos significativos en el proceso de generalización, Zapatera (2015) estructura estas tres etapas en estadios, los cuales se tendrán en cuenta para el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje y posterior desarrollo y estudio de la intervención didáctica del presente trabajo, representados en la imagen 1:

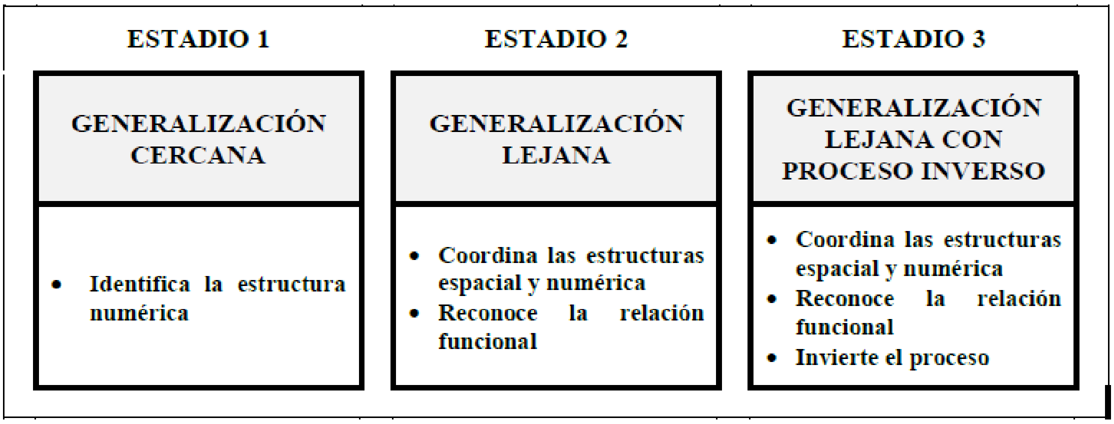


Imagen 1. *Estadios del proceso de generalización de patrones (Zapatera, 2015, p.75).*

Estos tres estadios guardan una relación progresiva para la comprensión de la generalización de patrones. De esta manera, siguiendo a Zapatera (2015) los alumnos que se encuentren en el primer estadio serán capaces de realizar la generalización cercana pero solo centrándose en una de las dos estructuras sin vincularlas; los alumnos que estén en el segundo estadio serán capaces de realizar la generalización lejana cuando establezcan una relación funcional teniendo en cuenta la coordinación entre las dos estructuras; y los niños que se encuentren en el tercer estadio, serán capaces de invertir dicha relación funcional.

2.3. EARLY ALGEBRA

En los últimos tiempos se han realizado una serie de investigaciones que exploran las capacidades que tienen los niños de Educación Primaria para solucionar tareas que promuevan el pensamiento algebraico (Socas, 2015). El *Early Algebra* o Álgebra temprana es una propuesta curricular y línea de investigación que plantea introducir el desarrollo del pensamiento algebraico en la etapa de Educación Primaria (Pinchera y Alsina, 2021). Kaput (2000) denomina este enfoque como “la agebrización” del currículo, es decir, la introducción de modos de pensamiento algebraicos en las matemáticas escolares a lo largo de toda la etapa educativa.

Como bien señalan Godino y Font (2003) no se trata de impartir específicamente un curso de álgebra a los alumnos de Educación Primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo de este periodo educativo para permitir un nivel de comprensión más profundo y complejo de las matemáticas escolares, en lugar de retrasarlo a los niveles de secundaria. Es por ello por lo que “En el “álgebra escolar” se incluye principalmente el estudio de patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos” (p. 774).

Según Kieran (2004) Introducir el *Early Algebra* en la etapa escolar también implica iniciar el desarrollo de distintos modos de pensamiento (funcional, relacional, etc.) que se manifiestan por medio de diversas tareas “análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelización, la justificación, el ensayo y el error y la predicción” (p. 149). Este autor también subraya que los estudiantes de Educación Primaria expuestos durante un largo periodo de tiempo a problemas y actividades algebraicas desarrollan una base matemática mucho más profunda que los estudiantes cuyas experiencias se centraron básicamente en procedimientos de cálculo. Se trata de introducir actividades que generen un ambiente de trabajo en área de las matemáticas donde los niños exploren, modelicen situaciones, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas además de practicar habilidades de cálculo. En definitiva, se trata de desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y algebraico desde la etapa de Educación Primaria, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje significativo teniendo como resultado un mejor desempeño en el área de álgebra en las matemáticas de la Educación Secundaria (Blanton y Kaput, 2005).

3. METODOLOGÍA

En este apartado se describe el diseño de las actividades que se llevarán a cabo a modo de intervención educativa en distintos centros de Educación Primaria. En primer lugar, se expondrán los objetivos que se plantean para la realización del presente trabajo teniendo en cuenta la fundamentación teórica presentada anteriormente. A continuación, se expondrá y justificará el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje en base a una actividad o problema de generalización de patrones, considerando las posibles estrategias de resolución del mismo. Seguidamente, se hará una breve descripción de una segunda actividad basada en el diseño de la primera que presenta un mayor nivel de dificultad.

3.1. OBJETIVOS DE LA INTERVENCIÓN EDUCATIVA

Teniendo en cuenta la justificación teórica expuesta en apartados previos del trabajo, a continuación, se proponen los objetivos relacionados con la intervención educativa que se llevará a cabo en las aulas de sexto curso de Educación Primaria en distintos centros educativos de la ciudad de Oviedo, Asturias, en el curso escolar 2022/2023:

- Interpretar el pensamiento algebraico de niños de sexto curso de Educación Primaria cuando realizan problemas de generalización de patrones geométricos de recurrencia.
- Inferir en la proporción de estudiantes de sexto curso de Educación Primaria que se encuentran en los distintos estadios del proceso de generalización de patrones basados en los establecidos por Zapatera (2015).

3.2. DISEÑO DE LA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Para elaborar la trayectoria hipotética de aprendizaje, se han diseñado dos actividades de generalización de patrones geométricos de recurrencia. La primera de ellas servirá como principal base de estudio para el análisis estadístico de los resultados. Por otro lado, la segunda servirá a modo de complemento para los alumnos que pudieran realizar satisfactoriamente la primera. Para ello, se han tenido en cuenta seis estadios que describen de manera progresiva la capacidad de los estudiantes para identificar patrones y expresarlos. Se han establecido como referencia los tres estadios principales propuestos por Zapatera (2015) y se han añadido tres más para atender a la idiosincrasia de la THA:

- Estadio 0: el estudiante no es capaz de seguir la serie para términos próximos ya que no es capaz de identificar la estructura espacial ni la estructura numérica.

- Estadio 1: el estudiante es capaz de continuar la serie para términos próximos identificando el número de elementos, pero no la estructura espacial de las figuras. De otro modo, puede identificar la estructura espacial para términos cercanos, pero no el número de elementos. No coordina las estructuras espacial y numérica.
- Estadio 2. Generalización cercana: el estudiante es capaz de coordinar la estructura espacial y numérica, pero no reconoce la relación funcional en casos particulares.
- Estadio 3. Generalización lejana: el estudiante es capaz de seguir la serie coordinando la estructura espacial y numérica, reconociendo la relación funcional en casos particulares, pero no es capaz de expresar la regla general que sigue el patrón de la sucesión. Tampoco es capaz de identificar la relación funcional inversa.
- Estadio 4. Generalización lejana con regla general: el estudiante es capaz de seguir la serie coordinando la estructura espacial y numérica, reconociendo la relación funcional en casos particulares y pudiendo expresar la regla general que sigue el patrón de la sucesión. No es capaz de identificar la relación funcional inversa.
- Estadio 5. Generalización lejana con proceso inverso: el estudiante puede coordinar la estructura espacial y numérica, reconocer la relación funcional en casos particulares, identificar una regla general y es capaz de invertir dicha relación en casos particulares.

Según este autor (p. 86), los problemas de generalización de patrones suelen seguir una serie de cuestiones y estructura comunes:

- Generalización cercana con dibujo (GCD): se pide al estudiante continuar la sucesión dibujando las figuras siguientes a las del enunciado.
- Generalización cercana sin dibujar figuras (GC): se pide al estudiante hallar el número de elementos de las figuras próximas a las del enunciado, pero sin realizar el dibujo de las figuras.
- Generalización lejana (GL): el estudiante debe hallar el número de elementos de términos lejanos a los del enunciado.
- Identificar la regla general (RG): se pide al estudiante que describa una regla general que relacione el número de la figura con el número de elementos que la componen.
- Proceso inverso (PI): se pide al estudiante el lugar que ocupa una figura a partir del número de elementos que la componen, es decir, que realice el proceso inverso al descrito en la regla general.

Estos apartados se verán reflejados en las actividades diseñadas para la intervención siguiendo el mismo orden procedimental. Cabe destacar la introducción del *Early algebra* o álgebra temprana en la cuestión relacionada con identificar la regla general (RG), permitiendo conocer de forma aproximada el grado de abstracción y pensamiento algebraico que poseen los estudiantes que participaron en la intervención educativa.

3.1.1. Actividad 1

Una vez establecida la trayectoria hipotética de aprendizaje, se diseñó para la primera actividad un patrón geométrico recurrente (imagen 2), ya que son los más adecuados para trabajar en los cursos medios y superiores de Educación Primaria.

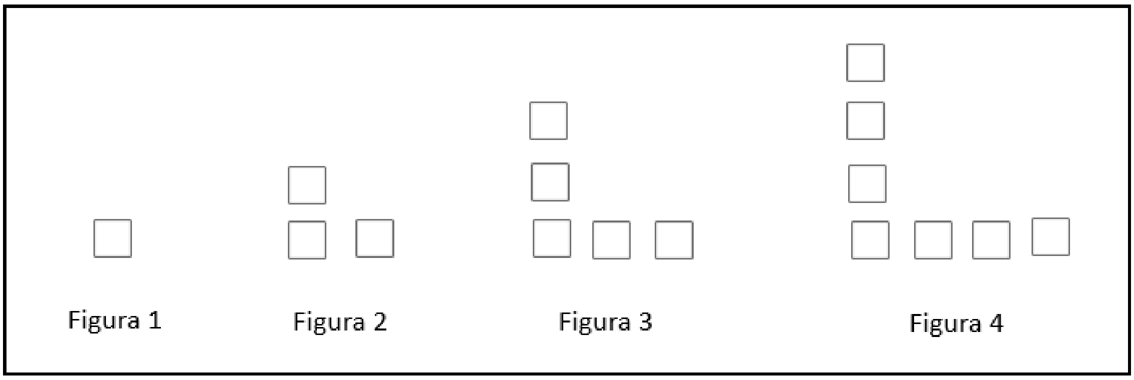


Imagen 2. *Patrón geométrico de recurrencia. Elaboración propia.*

Según Zapatera (2018) este tipo de patrones se empiezan a estudiar e implementar a partir del 3º curso de Educación Primaria, teniendo como objetivo la comprensión de la generalización de patrones. No obstante, en cada etapa se abordarán distintas cuestiones: en 3º de Primaria se centra principalmente en la generalización cercana y lejana, en concreto, en el número de elementos que aumenta en cada figura y en los elementos que permanecen constantes; en 4º de Primaria se añade la expresión verbal y escrita de la regla general; en 5º de Primaria se incorpora a los contenidos anteriores, la reversibilidad del proceso, es decir, hallar la posición de la figura dado su número de elementos; y en 6º curso se inicia la expresión simbólica o algebraica de la regla general. Es por ello por lo que el diseño de la actividad está pensado para ser realizada por estudiantes de sexto curso de Educación Primaria, ya que acumulan todos los contenidos para la generalización de patrones; generalización cercana, generalización lejana, regla general, proceso inverso y expresión algebraica.

Esta clase de patrones suele seguir una misma expresión algebraica, donde la regla general simplificada "se representa por medio de una función afín, $f(n) = an + b, b \neq 0$, donde "*a*" es el coeficiente o patrón de crecimiento, y "*b*" es el término independiente o invariante que aparece como una constante" (Zapatera, 2015, p. 44).

Como se puede observar, en la serie establecida se representan cuatro figuras formadas por cuadrados dispuestos en forma de "L". En la primera figura aparece solamente un cuadrado. En la segunda, se añade un cuadrado a la derecha en eje horizontal y otro encima en el eje vertical al cuadrado de la primera figura, haciendo un total de tres cuadrados. En la tercera figura, se añaden dos cuadrados siguiendo la misma disposición que en la figura anterior, sumando un total de cinco cuadrados. Finalmente, en la cuarta figura se vuelven a añadir otros dos cuadrados siguiendo la disposición de las anteriores figuras, estando compuesta por un total de siete cuadrados. El patrón que se repite en la serie es la adición de dos cuadros más respecto a la figura anterior, siendo la regla general simplificada: $f(n) = 2n -1$, donde "*2*" es el coeficiente o patrón de crecimiento, "*n*" representa al número de la figura y "*-1*" es el término independiente que se mantiene fijo en toda la secuencia. El alumnado puede llegar a esta regla general por medio de distintas vías, las cuales se exponen a continuación:

- Regla General 1. (RG1): el estudiante identifica que al pasar de una figura a otra se van añadiendo dos cuadrados, uno a cada lado del eje vertical y horizontal, por

lo tanto, debe sumar dos unidades a las que contenía la figura anterior. Se trata de un método recursivo; sumar una cantidad constante al término anterior:
2 + (2 (n-1) -1).

- Regla General 2. (RG2): el estudiante identifica sin tener en cuenta el cuadrado central (donde confluyen el eje vertical y horizontal), que la cantidad de cuadros que tiene cada fila es el número de la figura menos uno, por lo tanto, lo multiplica por dos. A continuación, para establecer los cuadrados totales de la figura, suma el cuadrado central que previamente no tuvo en cuenta: *2(n-1) + 1.*
- Regla general 3. (RG3): el estudiante identifica que los cuadrados de una de las filas de la figura (vertical u horizontal) coincide con el número de la figura. Seguidamente, se da cuenta que la otra fila contiene el mismo número de cuadrados que el número de la figura menos uno (en esta fila no tiene en cuenta el cuadrado central): *n + (n-1).*
- Regla General 4 (RG4): el estudiante identifica que el número de cuadrados independiente de cada fila es igual al número de la figura (tiene en cuenta el cuadrado central al realizar el recuento de cuadrados en cada fila). A continuación, se da cuenta que ambas filas comparten el cuadro central y lo resta del número de cuadrados totales: *n + n – 1*

Como se puede observar, todas las posibles vías para llegar a la generalización del patrón geométrico son válidas y susceptibles de ser argumentadas por el alumnado que las identifique y justifique, ya sea de forma escrita, verbal o con notación algebraica. A continuación, se describen las preguntas planteadas en base a la sucesión diseñada:

Pregunta 1 (P.1): *"¿Cuántos cuadrados debería haber en la Figura 5? ¿Por qué? Dibújala."*. Esta cuestión pide identificar el número de cuadrados para la figura inmediata de la sucesión, la Figura 5, y realizar su dibujo. Se pide seguir la serie para términos cercanos (generalización cercana). En consecuencia, se pretende averiguar si el alumno es capaz de coordinar la estructura espacial y numérica, ya que se le pide el número de elementos de la figura y su representación espacial por medio de una representación pictórica.

Pregunta 2 (P.2): *"¿Cuántos cuadrados debería haber en las Figuras 6 y 7? ¿Y en la Figura 100? Justifica tu respuesta."*. En primer lugar, esta cuestión pide al estudiante establecer el número de cuadrados que deberían tener las Figuras 6 y 7. Como se puede observar, se sigue requiriendo continuar la serie para figuras próximas (generalización cercana) pero esta vez no se exige realizar el dibujo. En segundo lugar, se solicita hallar el número de cuadrados de la Figura 100, es decir, para términos lejanos (generalización lejana). Por lo tanto, se pretende averiguar si el alumno es capaz de coordinar la estructura espacial y numérica y reconocer la relación funcional de la serie para casos particulares.

Pregunta 2.1 (P.2.1): *"Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de cuadrados que podría haber en cualquier figura?"*. Esta cuestión está fuertemente relacionada con el último apartado de la anterior pregunta ya que, una vez el estudiante establece la coordinación de la estructura numérica y espacial y la relación funcional en casos particulares (generalización lejana), se pide que determine una regla general para calcular el número total de cuadrados de cualquier figura. Esta puede ser expresada de manera escrita, verbal o con lenguaje algebraico.

Como se puede observar en la imagen 3, se presentó junto a la pregunta una pequeña ayuda de forma gráfica para que el alumnado pudiera llegar al resultado de una manera guiada y estructurada. Para ello, se tuvo en cuenta la Regla General 4 (RG4): $n + n -1$, ya que se consideró que era la forma más sencilla e intuitiva de reconocer la regla general del patrón. En primer lugar, el estudiante debe identificar la RG4 para las Figuras 5, 6 y 7, que ya le resultan conocidas. Una vez realizado, se pide establecer dicha regla para cualquier figura. En este punto, el estudiante puede argumentar la regla general de forma escrita: *"El número de la figura más el número de la figura menos uno"* o con notación algebraica: $n + n – 1$. Ambas respuestas son válidas para tener en consideración el nivel de pensamiento algebraico del estudiantado.

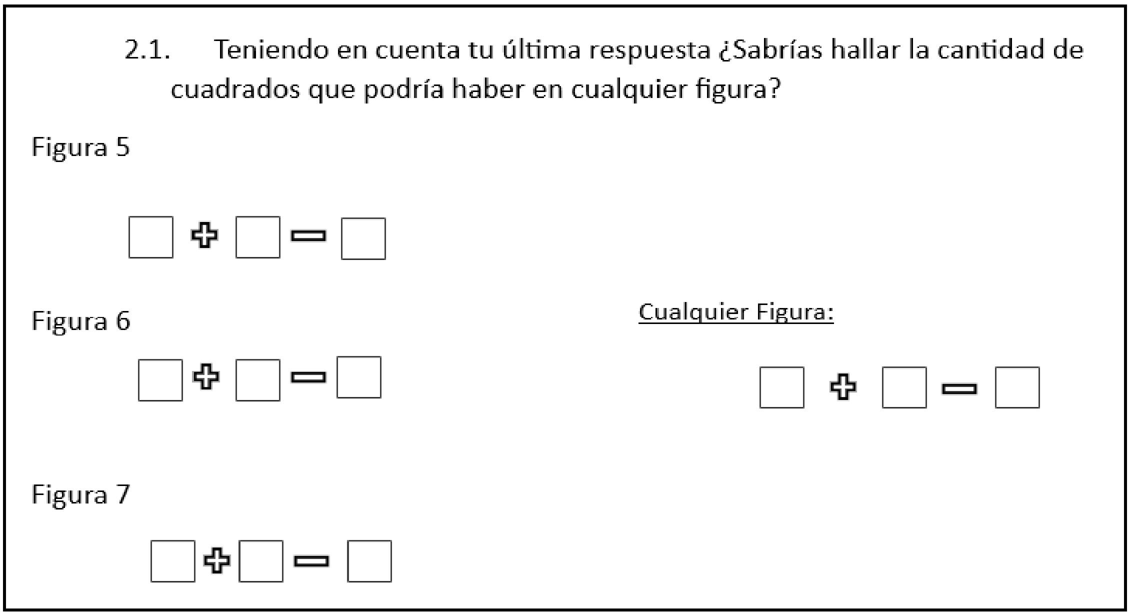

2.1. Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de cuadrados que podría haber en cualquier figura?

Figura 5

Figura 6

Cualquier Figura:

Figura 7

Imagen 3. *Pregunta 2.1 de la actividad diseñada. Elaboración propia.*

Pregunta 3 (P.3): *"¿Podría haber una figura con 144 cuadrados? ¿Y con 145? Justifica cómo podría ser posible la distribución de esos cuadrados"*. En esta cuestión, el estudiante tiene que identificar y argumentar si podría existir una determinada figura dado el número de elementos que la conforma, es decir, debe realizar el proceso contrario al que se le pedía en las preguntas anteriores, teniendo que establecer la relación funcional inversa en un caso particular lejano.

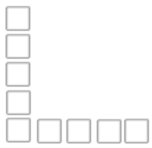
Pregunta 4 (P4): *"¿Sabrías decir con qué cantidades de cuadrados podríamos formar figuras que sigan esta serie?"*. Esta cuestión induce al estudiante a buscar una relación entre la cantidad de cuadrados que comparten las figuras, es decir, si son cantidades pares o impares.

En la tabla 1 se relacionan las preguntas propuestas en la actividad clasificadas según los tipos de cuestiones señaladas anteriormente por Zapatera (2015) y con los posibles estadios donde se encuentren los estudiantes establecidos en la trayectoria hipotética de aprendizaje.

P.1	*“¿Cuántos cuadrados debería haber en la Figura 5? ¿Por qué? Dibújala.”*	GCD	E.0/E.1/E.2
P.2	*“¿Cuántos cuadrados debería haber en las Figuras 6 y 7? ¿Y en la Figura 100? Justifica tu respuesta.”.*	GC (F. 6 y 7)	E.1/E.2
		GL (F. 100)	E.2/E.3
P.2.1.	*“Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de cuadrados que podría haber en cualquier figura?”*	RG	E.4
P.3	*“¿Podría haber una figura con 144 cuadrados? ¿Y con 145? Justifica cómo podría ser posible la distribución de esos cuadrados*	PI	E.5
P.4	*“¿Sabrías decir con qué cantidades de cuadrados podríamos formar figuras que sigan esta serie?”*	PI	E.5

Tabla 1. *Clasificación de las preguntas según las cuestiones establecidas por Zapatera (2015) y los estadios de la THA.*

Como se puede observar, cada pregunta está relacionada con uno o varios estadios del proceso de generalización de patrones. Esto brinda la oportunidad de conocer y establecer con mayor precisión en qué estadio se pudiera encontrar cada alumno en base a sus respuestas. En la tabla 2 se expone la solución a cada una de las preguntas de la actividad.

Pregunta		Respuesta
P.1	*“¿Cuántos cuadrados debería haber en la Figura 5? ¿Por qué? Dibújala.”*	En la Figura 5 debería haber nueve cuadrados. 
P.2	*“¿Cuántos cuadrados debería haber en las Figuras 6 y 7? ¿Y en la Figura 100? Justifica tu respuesta.”.*	En la Figura 6 debería haber 11 cuadrados. En la Figura 7 debería haber 13 cuadrados. En la Figura 100 debería haber 199 cuadrados.
P.2.1	*“Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de cuadrados que podría haber en cualquier figura?”*	Figura 5 = 5 + 5 - 1 Figura 6 = 6 + 6 – 1 Figura 7 = 7 + 7 – 1 Cualquier figura = n + n - 1

P.3	*"¿Podría haber una figura con 144 cuadrados? ¿Y con 145? Justifica cómo podría ser posible la distribución de esos cuadrados*	No podría haber una figura con 144 cuadrados. Sí podría haber una figura con 145 cuadrados. Sería la Figura 73. La distribución de los cuadrados podría ser de la siguiente manera: 73 cuadrados en el eje vertical y 72 cuadrados en el horizontal.
P.4	*"¿Sabrías decir con qué cantidades de cuadrados podríamos formar figuras que sigan esta serie?"*	Para formar figuras que sigan esta serie deben tener un número impar de cuadrados.

Tabla 2. *Solución a las preguntas de la actividad.*

3.1.1.1. Posibles respuestas de los estudiantes a las preguntas de la Actividad 1

Una vez establecidas las soluciones a las preguntas de la actividad, a continuación se proponen las posibles respuestas de los estudiantes a cada una de ellas teniendo en cuenta los estadios establecidos para la THA.

Pregunta 1 (P.1): *"¿Cuántos cuadrados debería haber en la Figura 5? ¿Por qué? Dibújala.":* En esta primera pregunta el estudiante puede dibujar o no la Figura 5 y justificar o no su respuesta.

En la situación hipotética donde el estudiante realiza el dibujo y no justifica su respuesta, se pueden establecer tres posibles situaciones:

- El estudiante no es capaz de identificar la estructura numérica de la figura; dibujando más o menos cuadrados de los que debiera, ni tampoco la estructura espacial; no siguiendo la distribución y posición espacial de los cuadrados de la serie. En este caso, el estudiante se encontraría en el Estadio 0.
- El estudiante puede identificar la estructura numérica de la serie, dibujando los nueve cuadrados correspondientes de la Figura 5, pero no es capaz de atender a la estructura espacial de la figura. Por ejemplo; a partir del cuadrado central (donde confluyen el eje vertical y horizontal) dibuja cinco cuadrados en la fila vertical y tres en la horizontal. De modo contrario, el estudiante puede respetar la configuración espacial, pero no la numérica. Por ejemplo; dibuja una figura con 11 cuadrados; cinco cuadrados en la fila horizontal y cinco en la vertical a partir del cuadrado central. En estos casos, el estudiante no coordina la estructura numérica y espacial y por ello se encontraría en el Estadio 1.
- El estudiante coordina la estructura espacial y numérica dibujando correctamente la Figura 5 respetando la cantidad de cuadrados atendiendo a su distribución espacial. En este caso, el estudiante puede pasar a realizar la segunda pregunta, ya que se encontraría como mínimo en el Estadio 2 (generalización cercana). Al no justificar su respuesta, no se podría determinar qué método ha seguido para dibujar correctamente a la figura.

En la situación hipoteca donde el estudiante realiza el dibujo de la figura y justifica su respuesta, se pueden presentar las siguientes opciones:

- El estudiante al no poder identificar las dos estructuras (numérica y espacial), no puede justificar de manera correcta su respuesta (Estadio 0).
- El estudianteal no coordinar la estructura numérica y espacial no puede argumentar correctamente su respuesta (Estadio 1).
- El estudiante puede dibujar correctamente la figura, pero no justificar bien su respuesta. Por ejemplo, identifica que el número total de cuadrados de cada lado de la figura es igual al número de la figura y suma los cuadrados de ambas filas, no teniendo en cuenta el término independiente (el cuadrado central). En este caso, el estudiante no estaría utilizando un método recursivo, sino un método espacial (tiene en cuenta los cuadrados del eje vertical y de la horizontal) de forma equivocada. Bajo este criterio, se ha decidido enmarcar al estudiante en el Estadio 1, ya que no está justificando correctamente la estructura numérica.
- En la tercera opción, el estudiante puede justificar correctamente de varias maneras su respuesta. Para ello, se tendrá en consideración principalmente la aproximación a la Regla General 1 (RG1) ya que estaría utilizando un método recursivo. Es la forma más intuitiva de continuar la serie para términos cercanos (cada figura tiene dos cuadrados más que la anterior). En este caso, el alumno puede justificar el dibujo de la Figura 5 argumentando que al pasar de una figura a otra se van añadiendo dos cuadrados, uno a cada lado del eje vertical y horizontal. De esta manera, al dibujar correctamente la figura y justificar de manera adecuada la pregunta, el estudiante puede estar capacitado para realizar la siguiente cuestión, ya que se encontraría como mínimo en el Estadio 2.

En la situación hipotética donde el estudiante no realiza el dibujo, pero sí justifica su repuesta, se pueden presentar las siguientes situaciones:

- El estudiante no justifica correctamente su respuesta: en este caso, al no haber una representación gráfica de la figura no se puede determinar si identifica la estructura espacial. En cambio, al saber que responde incorrectamente a la pregunta, se da por hecho que, al no identificar la estructura numérica, tampoco es capaz de hacerlo para la espacial. Por lo que se podría determinar que se encuentra en el Estadio 0.
- El estudiante justifica correctamente su respuesta: en esta situación, al no haber una representación gráfica de la figura, no se puede determinar si el estudiante pertenece al Estadio 1 o al Estadio 2. Al responder correctamente a la pregunta, se puede determinar que identifica la estructura numérica, pero no se puede saber si es capaz de coordinarla con la estructura espacial, pudiéndose encontrar en cualquiera de los dos Estadios. En este punto, el estudiante podría estar capacitado para realizar la siguiente cuestión. No obstante, si el alumno es capaz de justificar su respuesta aproximándose a cualquiera de las cuatro reglas generales establecidas, se podría considerar que pertenece al Estadio 2, ya que, para ello, se requiere coordinar ambas estructuras.

Pregunta 2 (P.2): *"¿Cuántos cuadrados debería haber en las Figuras 6 y 7? ¿Y en la Figura 100? Justifica tu respuesta."*. Atendiendo a las cuestiones se presentan varias opciones de respuesta:

- En la situación hipotética en la que el estudiante sea capaz de responder correctamente a la primera cuestión (Figuras 6 y 7), pero no a la segunda (Figura 100), se puede establecer que el alumno se encuentra en el Estadio 2, ya que es capaz de coordinar la estructura numérica y espacial, pero no reconoce la relación funcional en casos particulares lejanos (generalización cercana).
- En la situación hipotética en la que el estudiante sea capaz de responder correctamente a la primera cuestión (Figuras 6 y 7) y también a la segunda (Figura 100), se puede establecer que el alumno se encuentra en el Estadio 3, ya que es capaz de seguir la serie coordinando la estructura espacial y numérica, reconociendo la relación funcional en casos particulares lejanos (generalización lejana). En este caso, el estudiante puede argumentar su respuesta teniendo en cuenta las Reglas Generales 1, 2, 3 y 4 para este caso en particular, pero sin establecer una regla general para ninguna de ellas.

Pregunta 2.1 (P.2.1): *"Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de cuadrados que podría haber en cualquier figura?"*. Esta pregunta está diseñada para ser contestada si el estudiante ha podido responder adecuadamente a la última cuestión de la Pregunta 2 (hallar el número de cuadrados de la Figura 100), enmarcándose en el Estadio 3. Un alumno que se encuentre en estadios inferiores no podría contestarla adecuadamente ya que, si no es capaz de identificar la relación funcional ni coordinar las estructuras numérica y espacial, no podrá tener el nivel de abstracción suficiente para hallar una regla general y expresarla de manera algebraica. En consecuencia, el alumnado puede responder a esta pregunta de distintas formas:

- El estudiante no sigue la guía que se le presenta de forma gráfica establecida para representar la Regla General 4, pero sí es capaz de establecer una regla general (RG1, RG2 o RG3) de forma escrita o con notación algebraica. En este caso, el estudiante se encontraría en el Estadio 4 (Generalización lejana con regla general).
- El estudiante sigue la ayuda gráfica correctamente para las figuras 5, 6 y 7 pero no para cualquier figura. No es capaz de llegar a la abstracción y por tanto no puede determinar una regla general. En este caso, el estudiante estaría en el Estadio 3.
- El estudiante sigue la ayuda gráfica correctamente para las figuras 5, 6 y 7 y para cualquier figura. En este punto, el alumno puede determinar la regla general de forma escrita: *"El número de la figura más el número de la figura menos uno"* o con notación algebraica: $n + n - 1$. Ambas respuestas son válidas para considerar que el estudiante se encuentra en el Estadio 4.

Pregunta 3 (P.3): *"¿Podría haber una figura con 144 cuadrados? ¿Y con 145? Justifica cómo podría ser posible la distribución de esos cuadrados"*.

Las estrategias que el estudiante pue de utilizar para contestar a esta pregunta pueden ser las siguientes:

- El estudiante puede darse cuenta de que todas las figuras tienen un número de cuadrados impar y contestar correctamente a la pregunta. No estaría estableciendo una relación funcional inversa, por lo tanto, podría encontrarse en los Estadios 2, 3 y 4.
- Estrategia de Ensayo y error (P.3.E.E.E): el estudiante calcula si puede existir una figura para la cantidad total de cuadrados dados (144 y 145) teniendo en cuenta la regla general simplificada $2n - 1$. Parte del número de una figura al azar que crea que pueda aproximarse al número de cuadrados que se pide y en consecuencia establece cuál de las dos premisas se puede lograr. En este caso, el alumno estaría utilizando una estrategia funcional por medio del tanteo, pero no la inversa. Por lo tanto, se enmarcaría en el Estadio 4.
- Estrategia Funcional Inversa (P.3.E.F.I.): el estudiante parte de la regla general que relaciona el número de la figura con la cantidad de cuadrados, y la transforma en otra regla general invirtiendo el proceso: $n = (c+1): 2$, siendo *"n"* el número de la figura y *"c"* la cantidad de cuadrados que contiene la figura. No es necesario que exprese la regla general deforma algebraica. En este caso, el estudiante se encontraría en el Estadio 5.

Si bien es cierto que, cuando el estudiante utiliza la estrategia de ensayo y error y determina que con números impares puede seguir la serie está contestando a la pregunta correctamente, se considera que el alumno se ubica en el Estadio 5 cuando sea capaz de invertir la relación funcional.

Pregunta 4 (P4): *"¿Sabrías decir con qué cantidades de cuadrados podríamos formar figuras que sigan esta serie?"*. Esta pregunta sirve para que el estudiante sea capaz de identificar y validar una relación entre la cantidad de cuadros que conforman cada una de las figuras dentro de la serie. Es decir, se espera que pueda determinar que solo puede haber figuras con una cantidad impar de cuadrados en la secuencia. Un alumno que sea capaz de coordinar las estructuras numérica y espacial puede ser capaz de responder correctamente a esta la pregunta, ya que no es necesario establecer una relación funcional para llegar a tal razonamiento. Es por ello, que un estudiante que se encuentre en el Estadio 2 en adelante, puede argumentar correctamente la respuesta. Esto será más acusado conforme se vayan acercando al Estadio 5 ya que deberán tener un mayor nivel de abstracción.

3.1.2. Actividad 2

Una vez establecido el diseño de la primera actividad, se elaboró una segunda donde se incrementó ligeramente el grado de dificultad. Su implementación en la intervención se llevó a cabo con el alumnado que pudo resolver correctamente todas las preguntas de la primera actividad o los que hallaron una regla general funcional, los enmarcados en el Estadio 4 y 5. Como se puede observar en la imagen 4, en este problema se establece el mismo patrón geométrico de la actividad anterior, solo que las figuras en vez de estar compuestas por cuadrados están formadas por monedas; se parte de una moneda de un euro y se van añadiendo dos monedas de dos euros a cada figura; una en eje horizontal derecho y otra encima del eje vertical.

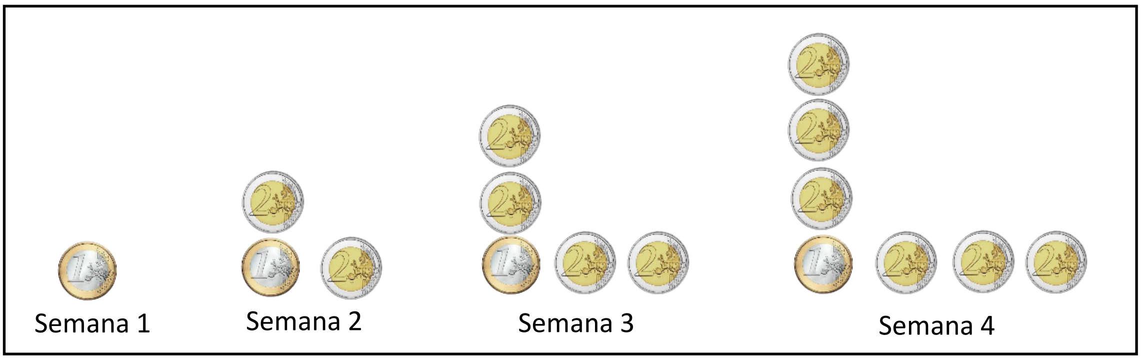


Imagen 4. *Patrón geométrico de la segunda actividad. Elaboración propia.*

En este caso, el grado extra de dificultad frente a la actividad anterior reside en la adición de una nueva variable; el valor cuantitativo de las monedas. Para seguir la serie, el alumnado no solo deberá tener en cuenta la cantidad de monedas de cada figura (en este problema expresado en semanas), sino también su valor numérico. Para identificar el número de monedas de cualquier semana, el estudiante deberá establecer la misma regla general que en la anterior actividad; $f(n) = 2n - 1$. En cambio, para identificar la cantidad de euros, deberá seguir la regla general simplificada $f(n) = 4n - 3$.

A continuación, se describen las preguntas planteadas en base a la sucesión diseñada. Para contextualizarla, se estableció la siguiente premisa: *"El primer día del año los abuelos de Lorenzo meten en su hucha una moneda de un euro. Desde ese momento, cada semana le ingresan dos monedas de dos euros"*

Pregunta 1 (P.1): *"¿Cuántas monedas tendrá en la semana 5? ¿Cuánto dinero? ¿Por qué?"*. En primer lugar, se pide justificar cuántas monedas tendrá el individuo en la siguiente semana siguiendo la sucesión. Esta cuestión no debería presentar ningún problema para el estudiante ya que la actividad está diseñada para ser realizada por el alumnado que ese encuentre en los Estadios 4 o 5, donde debe ser capaz de coordinar la estructura espacial y numérica para términos cercanos. Atendiendo a la segunda cuestión, se pide determinar la cantidad de euros para la siguiente semana. Agregando esta variable, el alumnado debe identificar la cantidad de dinero que se añade cada semana identificando el patrón de crecimiento (cuatro euros) al mismo tiempo que tiene en cuenta la cantidad de dinero total de la semana anterior.

Pregunta 2 (P.2): "*¿Cuántas monedas y euros debería tener en la semana 6 y 7? ¿Y al acabar el año? Justifica tu respuesta."*. En primer lugar, esta cuestión pide al estudiante establecer el número de monedas y euros que debería haber en la semana 6 y 7. Como se puede observar, se sigue requiriendo continuar la serie para semanas próximas añadiendo la variable del dinero. El estudiante tampoco debería tener problema en realizar correctamente esta pregunta. En la segunda cuestión, el alumno deberá calcular la cantidad de monedas y de euros que tendrá al acabar el año, por lo tanto, deberá establecer una relación funcional para términos lejanos. Primeramente, tendrá que identificar el número de semanas que tiene un año y a continuación calcular la cantidad de monedas y de euros para dicha semana. Para determinar la cantidad de monedas puede seguir cualquiera de las cuatro Reglas Generales establecidas en la actividad anterior. En cambio, para calcular la cantidad de euros, debe basarse en estas para adaptarlas a la característica del problema:

- Regla General 1´ (RGE 1´): el estudiante identifica que al pasar de una semana a otra se van añadiendo cuatro euros, por lo tanto, debe sumar esa cantidad al dinero de la semana anterior. Se trata de un método recursivo: sumar una cantidad constante al término anterior: $4 + (2\ (2\ (n - 1) - 1) - 1)$
- Regla General 2´ (RGE 2´): el estudiante identifica sin tener en cuenta la moneda de un euro que la cantidad de monedas de dos euros que contiene cada fila es el número del día de la semana menos uno, por lo tanto, lo multica por dos para obtener el número de monedas y lo vuelve a multiplicar por dos para calcular su valor en euros. A continuación, le añade la moneda de un euro que previamente no tuvo en cuenta: $2\ (2\ (n - 1)) + 1$
- Regla General 3´ (RGE 3´): el estudiante identifica que las monedas de una de las filas (vertical u horizontal) coincide con el número del día de la semana, por lo tanto, para obtener su valor en euros multiplica esa cantidad por dos (como si todas las monedas fueran de dos euros) y le resta uno (valor de la moneda de un euro). Seguidamente, se da cuenta que la otra fila contiene el mismo número de monedas que el número de la semana menos uno y lo multiplica por dos (en esta fila no tiene en cuenta la moneda de un euro): $2n - 1 + 2(n - 1)$
- Regla General 4´ (RG4´): el estudiante identifica la cantidad de monedas del mismo modo que en la Regla General 4 y multiplica su valor por dos (considera que todas las monedas son de dos euros). A continuación, le resta un euro (tiene en consideración el valor de la moneda central): $2(2n - 1) - 1$
- Regla General 5 (RG5): el estudiante identifica que el número de monedas independiente de cada fila es igual al número de la semana y lo multiplica por dos (tiene en cuenta la moneda central al realizar el recuento de monedas de cada fila y la considera como si tuviera el valor de una de dos euros). A continuación, se da cuenta que ambas filas comparten una moneda y resta su valor cuantitativo (dos euros). Una vez establecida la cantidad correcta de monedas, procede a restar un euro, ya que previamente había considerado que la moneda central era de dos: $2(2n) - 2 - 1$

Pregunta 2.1 (P.2.1): *"Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de monedas que tendría en cualquier semana? ¿Y la cantidad de euros?".* Esta cuestión está íntimamente relacionada con el último apartado de la anterior pregunta. Una vez el estudiante establece una relación funcional para términos lejanos particulares, se solicita que determine una regla general para calcular el número total de monedas de cualquier día de la semana (aspecto que ya es capaz de determinar porque se encuentra en el Estadio 4 o 5). Seguidamente, se le pide establecer una regla general para calcular la cantidad de dinero de cualquier semana. Las reglas pueden ser expresadas de manera escrita, verbal o con lenguaje algebraico.

Pregunta 3 (P.3): "*¿Podría tener en algún momento del año 44 monedas? ¿Y 45? Justifica tu respuesta.*" En esta cuestión, el estudiante tiene que identificar y argumentar si podría existir una semana donde hubiera una determinada cantidad de monedas. El alumno debe establecer la relación funcional inversa de un caso particular lejano para determinar la relación entre la cantidad de monedas y el día de la semana de la secuencia. Si bien es cierto que se tuvo en consideración añadir una segunda cuestión para que el estudiante pudiera identificar el proceso inverso a la hora de saber el valor cuantitativo de las monedas (estableciendo un número determinado de dinero y determinar cuántas monedas tendría en dicha semana), se concluyó que resultaría de un proceso de abstracción demasiado complejo para el alumnado, por lo que se descartó.

En la tabla 3 se expone la solución a cada una de las preguntas de la actividad.

Pregunta		Respuesta
P.1	*"¿Cuántas monedas tendrá en la semana 5? ¿Cuánto dinero? ¿Por qué?"*	En la semana 5 tendrá 9 monedas y 17 euros.
P.2	"*¿Cuántas monedas y euros debería tener en la semana 6 y 7? ¿Y al acabar el año? Justifica tu respuesta.*"	En la semana 6 tendrá 11 monedas y 21 euros. En la semana 7 tendrá 13 monedas y 25 euros. Al acabar el año (semana 52) tendrá 103 monedas y 205 euros.
P.2.1	*"Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de monedas que tendría en cualquier semana? ¿Y la cantidad de euros?"*	Cantidad de monedas: 2n – 1 Cantidad de euros: 4n – 3
P.3	"*¿Podría tener en algún momento del año 44 monedas? ¿Y 45? Justifica tu respuesta.*"	No podría haber una semana con 44 monedas. Sí podría haber una semana con 45 monedas.

Tabla 3. *Solución de las preguntas de la actividad.*

4. DESARROLLO DE LA INTERVENCIÓN EDUCATIVA: PARTICIPANTES Y CONTEXTO

La intervención se llevó a cabo en cuatro aulas de sexto curso de Educación Primaria (niños entre 11 y 12 años) de tres centros educativos de la ciudad de Oviedo, Asturias, en el curso escolar 2022/2023 durante el mes de marzo. La primera de ellas se realizó en el Colegio Público Veneranda Manzano en las aulas de 6º A y 6º B con 21 y 22 estudiantes respectivamente. La segunda intervención, se llevó a cabo en el Colegio Público Germán Fernández Ramos en la clase de 6º C con un total de 24 estudiantes. Finalmente, la tercera se realizó en el Colegio Público San Lázaro - Escuelas Blancas en el aula de 6º con 19 estudiantes.

En relación con el segundo objetivo de nuestro trabajo, para inferir la proporción de estudiantes en cada estadio en la población escolar ovetense a través de nuestra muestra, se concluyó la necesidad de una muestra de al menos 68 alumnos para poder asegurar una confianza del 90%, que en los porcentajes obtenidos se limita el error al 10%. En la siguiente fórmula se recoge el cálculo del tamaño muestral:

- En el numerador el valor de la confianza al 90% (1,645), multiplicado por el mayor valor que se puede encontrar en la función ($p \cdot (1-p)$, en la que p representa la proporción).
- En el denominador el 10% máximo que se permite como error en la proporción.

$$Tamaño\ muestral = \frac{1{,}645^2 \cdot 0{,}5(1-0{,}5)}{0{,}1^2} = 68$$

Tras la intervención educativa, se obtuvo una muestra tomada por conveniencia, mayor de 68 individuos. En total participaron 85 estudiantes, donde no se tuvo en cuenta la contribución de uno de ellos por presentar un desfase curricular muy acusado. De esta manera, la muestra total de alumnos que se tomó en consideración para la recogida de datos y posterior análisis estadístico es de 84 estudiantes. Antes de realizar la intervención, se preguntó a los tutores de los respectivos cursos si el alumnado había realizado previamente alguna actividad similar a la diseñada en el presente curso escolar, a lo que todos respondieron negativamente. Esto supone un menor sesgo en los resultados ya que serán más fieles al nivel de conocimientos previos del alumnado, siendo de esta manera más representativos.

4.1. Medidas de atención a la diversidad

La educación inclusiva se entiende como una herramienta contra el fracaso escolar y la exclusión, un cambio en el sistema educativo y escolarización en el alumnado y una obligación política hacia una sociedad más tolerante, justa y equitativa (Escudero y Martínez, 2011). A la hora de atender a la diversidad del alumnado en el aula, se consultó previamente con cada tutor el nivel competencial de los estudiantes con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE) de cada clase, prestando especial atención al alumnado con Necesidades Educativas Especiales (NEE), ya que eran los más susceptibles de requerir una adaptación de la actividad. De esta manera, se ha procurado llevar a cabo una intervención educativa lo más inclusiva posible.

En cuanto al alumnado con trastornos de atención o aprendizaje, cuatro estudiantes presentaban Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH) y dos Dificultades Específicas de Aprendizaje (DEA). Atendiendo a las medidas organizativas y de flexibilidad que favorecerían su implicación en la tarea, se procuró sentarlos cerca del profesor evitando estímulos distractores. Al mismo tiempo, los docentes presentes estuvieron más pendientes de que entendieran los enunciados de las cuestiones planteadas tras su lectura. No se requirió adaptación de la actividad.

Un total de tres estudiantes presentaban Trastorno del Espectro Autista (TEA) sin discapacidad intelectual, por lo que tenían un nivel competencial acorde con el curso en el que se encontraban (Nivel/Grado 1). Las estrategias que se siguieron para favorecer su implicación en la tarea fueron:

- A nivel comunicativo; uso del lenguaje y estructuras gramaticales sencillas evitando un lenguaje rígido y procurando que entendieran cada pregunta de la actividad.
- A nivel cognitivo; flexibilizar las actividades estableciendo un orden y estructura determinado dejando espacio y tiempo para momentos de distensión en los que necesiten reducir su sentimiento de agobio o ansiedad.
- A nivel emocional: estructurar las actividades para evitar sentimientos de frustración reforzando su autoestima y motivación por medio de refuerzos positivos verbales.

Para el alumnado de altas capacidades, con enriquecimiento o ampliación curricular en el área de las matemáticas, se pretendió en un primer momento entregar la segunda actividad sin tener que realizar previamente la primera. Finalmente, se decidió esperar el resultado de la primera actividad para la entrega de la segunda.

Un alumno con NEE presentaba una discapacidad intelectual grave, no pudiendo contestar a ninguna pregunta de la actividad sin ningún tipo de ayuda. Para ello, se adaptó la primera cuestión de la primera activad para que pudiera realizarla a través de las regletas Cuisenaire de una unidad. De esta manera, se intentó que representara a través del material manipulativo la figura que continuaba la sucesión junto a la ayuda de los profesionales presentes en el aula, tratando de realizar el recuento de manera recursiva sobre el dibujo; identificando la adición de dos cuadrados a la figura anterior. Debido a su nivel competencial, su participación en la toma de datos no se tuvo en cuenta para determinar los resultados del estudio estadístico.

4.2. DESARROLLO DE LA INTERVENCIÓN

La intervención educativa tuvo lugar en la asignatura de matemáticas estando siempre el tutor de la clase presente en el aula. La duración de la primera actividad estaba prevista para ser realizada entre 20 y 40 minutos, aunque en algunos casos se extendió hasta la hora entera. En cuanto a la distribución del alumnado, se decidió ubicarlos de forma individual para que no tuvieran opción a inspirarse en las respuestas de sus compañeros. Seguidamente, se procedió a dar comienzo a la intervención.

En primer lugar, se explicó al alumnado en qué consistía la intervención y los objetivos que se pretendían alcanzar por medio de su participación. A continuación, se les entrego la primera actividad (anexo 1) y se leyeron en voz alta cada una de las preguntas. Una vez el alumnado estaba centrado en la resolución del problema, los docentes estaban a su disposición para resolver las posibles dudas que se les fueran planteando. Se procuró no interferir en el razonamiento lógico-matemático del alumnado, ofreciendo respuestas cortas y concisas. El maestro tutor se encargó de prestar más atención al alumnado con TDAH, DEA y TEA. El estudiante con discapacidad intelectual estuvo supervisado por el especialista de Pedagogía Terapéutica ya que el centro disponía de la modalidad de docencia compartida. Según el estudiantado iba respondiendo a las preguntas, se iba determinando cuáles eran susceptibles de poder realizar la segunda actividad (anexo 2), siendo estos los alumnos enmarcados en los Estadios 4 y 5. Los estudiantes que no pudieron terminar la actividad satisfactoriamente, fueron reforzados positivamente por los docentes agradeciendo su participación y remarcando lo bien que lo habían hecho. Para el alumnado que tuvo que realizar las dos actividades se les dejó más tiempo del establecido para la sesión.

Una vez el alumnado hubo terminado la actividad, se explicó la solución a cada una de las preguntas de cada actividad en el encerado de la clase. Finalmente, se les agradeció su participación.

5. RESULTADOS

En este apartado se expondrán e interpretarán los resultados fruto de la intervención educativa atendiendo a los objetivos que se plantean en el presente trabajo.

5.1. RESPUESTAS DEL ALUMNADO

En relación con el primer objetivo, se realizará un breve análisis y comentario acerca de las respuestas de los estudiantes a las distintas preguntas de las actividades, justificando los estadios en los que se encuentran.

5.1.1. Actividad 1

Teniendo en cuenta la gran cantidad de alumnos que participaron en la intervención, se han decidido seleccionar y estructurar las respuestas de la primera actividad en base a los distintos estadios en los que el alumnado puede encontrarse.

5.1.1.1. Estadio 0

En este estadio el estudiante no es capaz de seguir la serie para términos próximos ya que no identifica la estructura espacial ni la estructura numérica.

Como se puede observar en la imagen 5, la respuesta del alumno A, a la primera pregunta, pone de manifiesto la incapacidad de identificar tanto la estructura numérica como la espacial. Si bien es cierto que el estudiante es capaz de identificar el patrón de la serie argumentando que *"cada vez suma 2"*, no reconoce la estructura numérica al argumentar que la Figura 5 está conformada por ocho cuadrados, ni la estructura espacial, dibujando erróneamente la siguiente figura de la serie. Por otro lado, tampoco es capaz de identificar adecuadamente la estructura numérica de las Figuras 6 y 7 de la segunda pregunta.

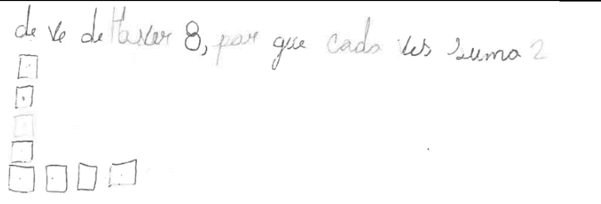
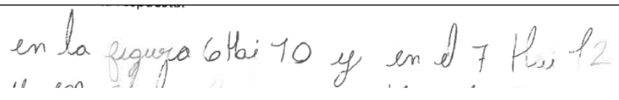
Pregunta	Respuestas del alumno A	
P.1		*"Debe haber 8, porque cada vez suma 2"*
P.2 (Figuras 6 y 7)		*"En la figura 6 hay 10 y en la 7 hay 12"*

Imagen 5. *Respuesta a la primera pregunta del alumno A y a la primera cuestión de la segunda pregunta.*

El alumno B (imagen 6) identifica erróneamente el patrón de crecimiento de la serie *"tengo que añadir 3"*, siendo incapaz de identificar la estructura numérica de la Figura 5. Al no haber una representación pictórica, no se podría determinar si puede identificar la estructura espacial correctamente, pero al justificar mal la respuesta, se da por hecho que no hubiera sido capaz de hacerlo. Tampoco pudo seguir la serie adecuadamente para las Figuras 6 y 7.

Pregunta	Respuestas del alumno B	
P.1	10 cuadrados por que solo tengo que añadir 3	"10 cuadrados porque solo tengo que añadir 3"
P.2 (Figuras 6 y 7)	6 – 13 cuadrados 7 – 16 cuadrados	*"6 – 13 cuadrados"* *"7 – 16 cuadrados"*

Imagen 6. *Respuesta del alumno B a la primera pregunta y a la primera cuestión de la segunda pregunta.*

5.1.1.2. Estadio 1

Para seguir una secuencia de figuras el alumno debe captar una regularidad que implica la vinculación entre dos estructuras, la espacial y la numérica. En este estadio, el estudiante es capaz de continuar la serie para términos próximos identificando el número de elementos, pero no la estructura espacial de las figuras. De otro modo, puede identificar la estructura espacial para términos cercanos, pero no el número de elementos. No coordina la estructura numérica y espacial.

Como se puede observar en la imagen 7, el alumno C es capaz de identificar el patrón correctamente y de identificar la estructura numérica, ya que dibuja la Figura 5 con nueve cuadrados. En cambio, no es capaz de identificar la estructura espacial, dibujando una figura desproporcionada; la representa a través de tres cuadrados en la fila vertical a partir del cuadrado central y cinco en la horizontal. Aunque el alumno se apoyó en la estructura numérica para argumentar su respuesta, no fue coherente con la estructura espacial. Sin embargo, es importante destacar que esto no implica que no haya percibido la estructura proporcional de las figuras, sino que su enfoque se centró principalmente en la estructura numérica, relegando la estructura espacial a un segundo plano.

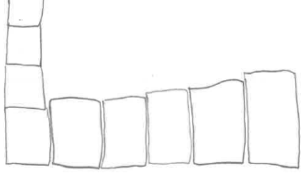
Pregunta	Respuesta del alumno C	
P.1	1. ¿Cuántos cuadrados debería haber en la Figura 5? ¿Por qué? Dibújala.  Porque a partir de la 2º figura se añaden 2 cuadrados	*"Porque a partir de la 2º figura se añaden 2 cuadrados"*

Imagen 7. *Respuesta del alumno C a la primera pregunta.*

Como se puede observar en la imagen 8, el alumno D es capaz de identificar la estructura espacial debido a que representa correctamente la figura 5 y se podría decir que también reconoce la estructura numérica, ya que dibuja nueve cuadrados. En cambio, a la hora de justificar su respuesta, lo hace de forma incorrecta. En este caso, el estudiante no se apoya en un método recursivo; cada figura tiene dos cuadrados más que la anterior. Sino en un método espacial; considerando el número de cuadrados de la fila horizontal y vertical de cada figura. El problema reside en que no es capaz de reconocer que ambas filas comparten el cuadrado central y no lo resta del número de cuadrados totales, viéndose reflejado en la justificación de la segunda pregunta.

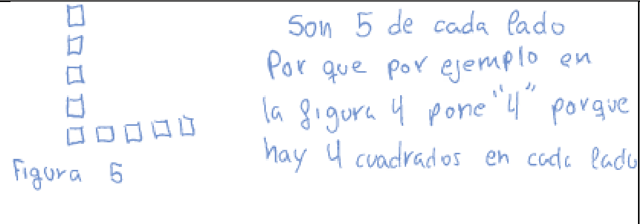
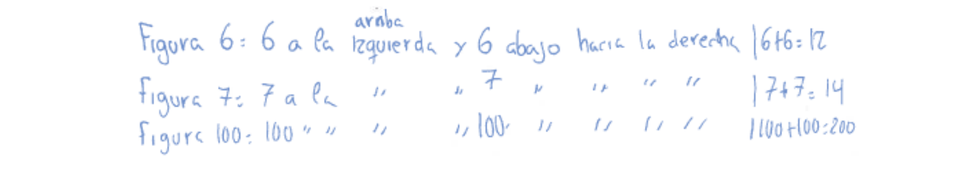
Pregunta	Respuesta del alumno D	
P.1		*"Son 5 de cada lado porque por ejemplo en la figura 4 pone "4" por que hay 4 cuadrados en cada lado"*
P.2		

Imagen 8. *Respuesta del alumno D a las dos primeras preguntas.*

5.1.1.3. Estadio 2

En este estadio el estudiante es capaz de coordinar la estructura espacial y numérica, pero no reconoce la relación funcional en casos particulares. Para identificar un término lejano es preciso establecer la relación funcional entre dos cantidades; la posición de la figura en la serie y la cantidad de cuadrados que la forman.

Como se puede observar en la imagen 9, el alumno E coordina las estructuras numérica y espacial, ya que es capaz de reconocer el patrón de la serie y aplicarlo a figuras cercanas (Figuras 5, 6 y 7). En cambio, a la hora de establecer una relación funcional para términos lejanos no es capaz de realizarlo, dejando en blanco su respuesta.

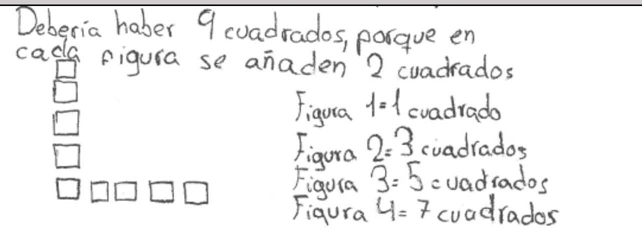
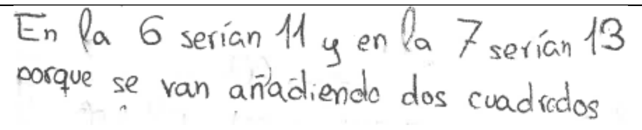
Pregunta	Respuesta del alumno E	
P.1		*"Debería haber 9 cuadrados, porque en cada figura se añaden dos cuadrados"*
P.2		*"En la 6 serían 11 y en la 7 serían 13 porque se van añadiendo dos cuadrados"*

Imagen 9. *Respuesta del alumno E a las dos primeras preguntas.*

Los alumnos F y G (imagen 10) también son capaces de interpretar correctamente el patrón de la serie y coordinar ambas estructuras para figuras cercanas. Para intentar hallar los cuadrados de la Figura 100, utilizan un método recursivo mediante ensayo y error sumando dos cuadrados desde una figura conocida. El alumno F realiza el recuento hasta la figura 100, pero se equivoca por el camino y no contesta bien a la pregunta. Por otro lado, el alumno G realiza correctamente el recuento hasta la Figura 50, identificando que estaría formada por 99 cuadrados. Seguidamente, multiplica esa cantidad por dos, pensando que, si en una figura hay una determinada cantidad de cuadrados, el doble de esa figura tendrá el doble de cuadrados, estableciendo que en la Figura 100 habría 198 cuadrados. Si ambos estudiantes hubieran contestado correctamente a la pregunta, este método recursivo no sería válido para enmarcar a ambos estudiantes en el Estadio 3, ya que no estarían estableciendo la relación funcional entre la posición de la figura en la serie y la cantidad de cuadrados que la forman.

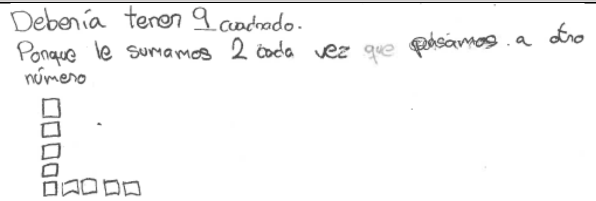
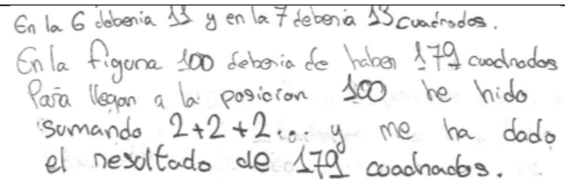
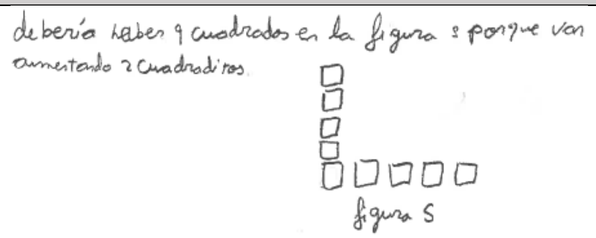
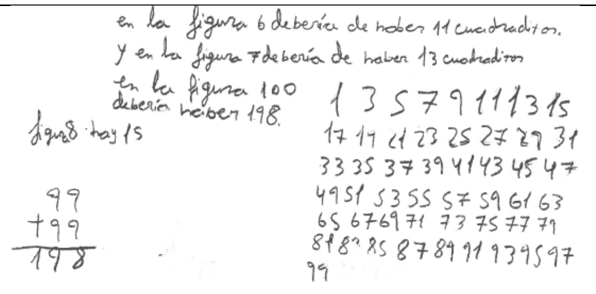
Pregunta	Respuesta del alumno F	
P.1		*"Debería tener 9 cuadrados. Porque le sumamos 2 cada vez que pasamos a otro número"*
P.2		*"En la 6 debería 11 y en la 7 debería 13 cuadrados. En la figura 100 debería haber 179 cuadrados. Para llegar a la posición 100 he ido sumando 2+2+2… y me ha dado el resultado de 179 cuadrados"*
Pregunta	**Respuesta del alumno G**	
P.1		*"Debería haber 9 cuadrados en la figura 5 porque van aumentando 2 cuadraditos"*
P.2		*"En la figura 6 debería haber 6 cuadraditos y en la figura 7 debería haber 13 cuadraditos. En la figura 100 hay 198"*

Imagen 10. *Respuesta de los alumnos F y G a las dos primeras preguntas de la actividad.*

5.1.1.4. Estadio 3

En este estadio el estudiante es capaz de seguir la serie coordinando la estructura espacial y numérica, reconociendo la relación funcional en casos particulares, pero no es capaz de expresar la regla general que sigue el patrón de la sucesión. Tampoco es capaz de identificar la relación funcional inversa.

Como se puede observar en la imagen 11, los alumnos H e I coordinan las estructuras numérica y espacial y son capaces de establecer la relación funcional para la Figura 100. Ambos estudiantes utilizan la Regla General 3, ya que identifican que los cuadrados de una de las filas de la figura (vertical u horizontal) coincide con el número de la figura y discurren que la otra fila contiene el mismo número de cuadrados que el número de la figura menos uno (en esta fila no tienen en cuenta el cuadrado central). Como no son capaces de expresar una regla general que identifique la cantidad de cuadrados para cualquier figura de la serie (no generalizan), no se les puede enmarcar en el Estadio 4.

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th colspan="2">Respuesta del alumno H</th></tr>
<tr><td>P.2</td><td colspan="2">11, 13, 199 porque como se añade uno arriba se fondra 100 veces arriba y 99 a la derecha ya que el bloque de esquina abajo izquierda lo contamos como que es de los de arriba.

“199 porque como se añade uno arriba se forma 100 veces arriba y 99 a la derecha ya que el bloque de la esquina abajo a la izquierda lo contamos como que es de arriba”</td></tr>
<tr><th>Pregunta</th><th colspan="2">Respuesta del alumno I</th></tr>
<tr><td>P.2</td><td>6 = 11 cuadrados
7 = 13 cuadrados
100 = 199 cuadrados
porque tiene 100 de largo y 99 de ancho</td><td>“6 = 11 cuadrados”
“7 = 13 cuadrados”
“100 = 199 cuadrados porque tiene 100 de largo y 99 de ancho”</td></tr>
</table>

Imagen 11. *Respuesta de los alumnos H e I a la segunda pregunta de la actividad.*

El alumno J (imagen 12) también coordina las estructuras numérica y espacial y es capaz de establecer la relación funcional para la Figura 100. En este caso, está recurriendo a la Regla General 4, ya que identifica que el número de la figura es igual al número de cuadrados de cada fila y le resta el cuadrado que comparten. Al no justificar su respuesta, sería difícil establecer si pertenece al Estadio 3 o 4, pero como se puede observar, en la Pregunta 2.1 no es capaz de establecer una relación abstracta para cualquier figura, por lo tanto, el estudiante se establecería en el Estadio 3

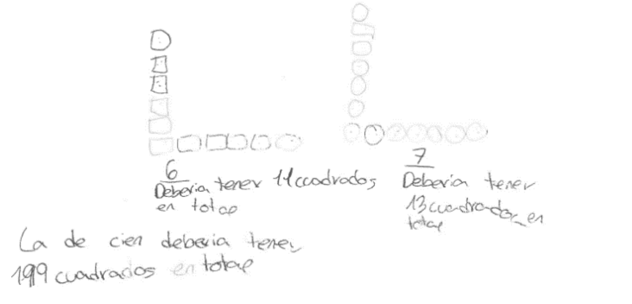
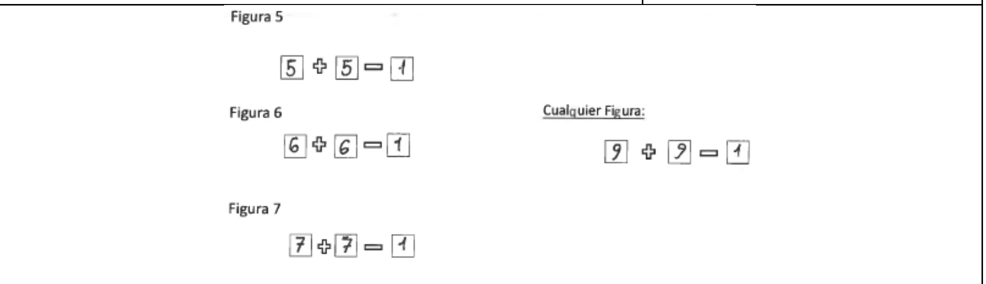
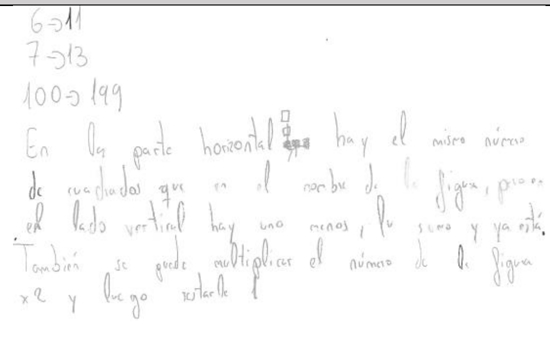
Pregunta	Respuesta del alumno J	
P.2		*"La de cien debería tener 199 cuadrados en total"*
P.2.1		

Imagen 12. *Respuesta del alumno J a la pregunta 2 y 2.1.*

5.1.1.5. Estadio 4

En este estadio el estudiante es capaz de seguir la serie coordinando la estructura espacial y numérica, reconociendo la relación funcional en casos particulares y pudiendo expresar la regla general que sigue el patrón de la sucesión. No obstante, no es capaz de identificar la relación funcional inversa.

Como se puede observar en la imagen 13, el alumno K identifica el número de cuadrados para la figura 100 apoyándose en la Regla General 3 y es capaz de explicarlo con sus propias palabras. Mas adelante, en la pregunta 2.1 por medio de la ayuda gráfica, es capaz de identificar la Regla General 4 *(n + n - 1)* pudiendo representarla con lenguaje algebraico. A la hora de responder a la Pregunta 3, no es capaz de identificar la relación inversa, ya que partiendo de una figura al azar ha utilizado la regla general por medio del ensayo y error para llegar a contestar correctamente la respuesta (73 + 73 – 1 = 145). Es por ello, que no es capaz de identificar la relación funcional inversa.

Pregunta	Respuesta del alumno K	
P.2		*"En la parte horizontal hay el mismo número de cuadrados que el nombre de la figura, pero en el lado vertical hay uno menos, lo sumo y ya está."* *"También se puede multiplicar el número de la figura x2 y luego restar 1"*

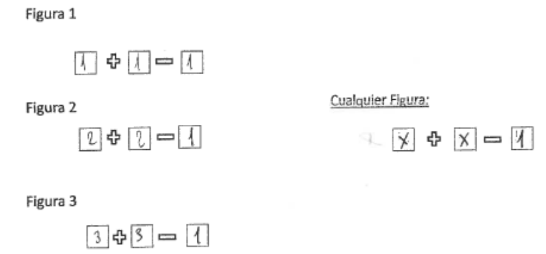
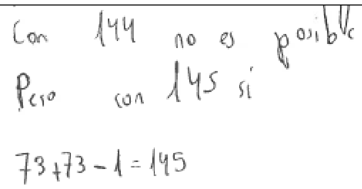
P.2.1		
P.3		*"Con 144 no es posible, pero con 145 sí"* *"73 + 73 – 1 = 145"*

Imagen 13. *Respuesta del alumno K a las Preguntas 2, 2.1. y 3.*

Otros estudiantes que no pudieron expresar la forma general con lenguaje algebraico lo hicieron con sus propias palabras (imagen 14). Los ejemplos que se muestran son de alumnos de distintos centros educativos.

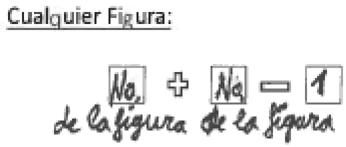
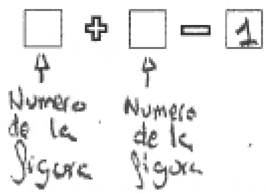
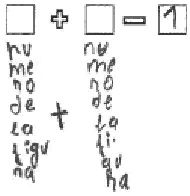
Pregunta 2.1		
		

Imagen 14. *Respuesta de distintos estudiantes a la Pregunta 2.1.*

A la hora de responder a la tercera pregunta de la actividad, varios alumnos que contestaron correctamente a las anteriores respuestas argumentaron que solo podía haber figuras con un número impar de cuadrados (imagen 15). En estos casos, al no estar estableciendo una relación funcional inversa se consideró enmarcarlos en el Estadio 4.

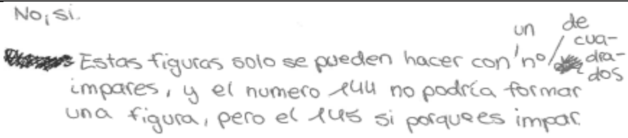
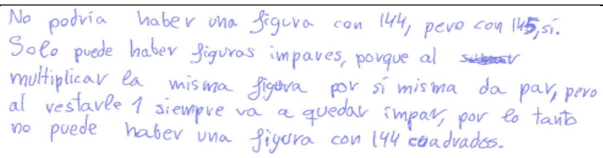
Pregunta 3
 *"Estas figuras solo se pueden hacer con un número de cuadrados impares, y el número 144 no podría formar una figura, pero el 145 si porque es impar"*
 *"No podría haber una figura con 144, pero con 145 sí. Solo puede haber figuras impares, porque al multiplicar la misma figura por sí misma da par, pero al restarle 1 siempre va a quedar impar, por lo tanto no puede haber una figura con 144 cuadrados"*

Imagen 15. *Respuestas de distintos alumnos a la Pregunta 3 de la actividad.*

5.1.1.6. Estadio 5

En este estadio el estudiante puede coordinar la estructura espacial y numérica, reconocer la relación funcional en casos particulares, identificar una regla general y es capaz de invertir dicha relación en casos particulares.

Si bien es cierto que varios alumnos pudieron identificar la relación funcional y expresarla de forma algebraica, solo uno de ellos fue capaz de realizar la función inversa. Por lo tanto, solo un estudiante de toda la muestra pone de manifiesto la comprensión de la generalización de patrones correspondiente al Estadio 5. En el anexo 3, se encuentran sus respuestas a la totalidad de las preguntas de la actividad. En la imagen 16, se muestra cómo fue capaz de invertir la relación funcional.

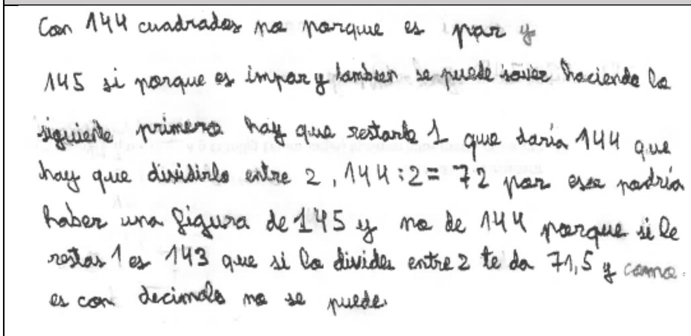
Pregunta 3
 *"Con 144 cuadrados no porque es par y 145 si porque es impar y también se puede saber haciendo lo siguiente: primero hay que restarle 1 que daría 144 que hay que dividirlo entre 2, 144:2 = 71, por eso podría haber una figura de 145 y no de 144 porque si le restas 1 es 143 que si lo divides entre dos te da 71,5 y como son decimales no se puede".*

Imagen 16. *Estudiante que identifica la relación funcional inversa.*

5.1.2. Actividad 2

Una vez realizada la actividad 1, se entregó a los estudiantes que pudieron determinar la regla general del patrón de la serie o los que fueron capaces de invertir la relación funcional (alumnos enmarcados en el Estadio 4 o 5) la segunda actividad. A continuación, se presentan algunas respuestas del alumnado a cada una de las preguntas del problema.

5.1.2.1. Pregunta 1

"El primer día del año los abuelos de Lorenzo meten en su hucha una moneda de un euro. Desde ese momento, cada semana le ingresan dos monedas de dos euros ¿Cuántas monedas tendrá en la semana 5? ¿Cuánto dinero? ¿Por qué?"

El alumno L (imagen 17) es capaz de contestar correctamente a la primera pregunta, ya que identifica el total de monedas en la semana 5 y la cantidad de dinero. En un primer lugar, tiene en cuenta la cantidad de monedas de dos euros que tendría en esa semana y calcula su valor en euros. A continuación, suma la moneda de un euro.

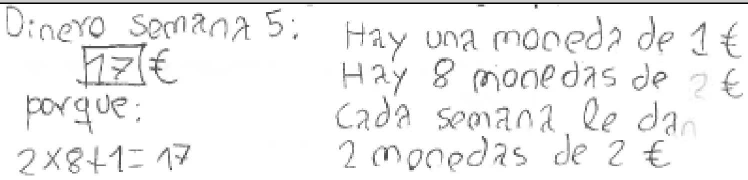
Alumno L - Pregunta 1
 *" Hay una moneda de 1€. Hay 8 monedas de 2€". Cada semana le dan 2 monedas de 2€"*

Imagen 17. *Respuesta del alumno L a la primera pregunta.*

5.1.2.2. Pregunta 2

"*¿Cuántas monedas y euros debería tener en la semana 6 y 7? ¿Y al acabar el año? Justifica tu respuesta.".*

Como se puede observar en la imagen 18, aunque el alumno M identifique mal las semanas que tiene un año, argumenta correctamente su respuesta. Para calcular la cantidad de monedas sigue la regla general simplificada de la actividad 1 ($2n$ - 1). Por otro lado, para para calcular el total de euros, resta una moneda (la de un euro) al total de monedas y multiplica el resto por dos (ya que son monedas de dos euros) y finalmente añade la moneda de un euro que previamente había descartado.

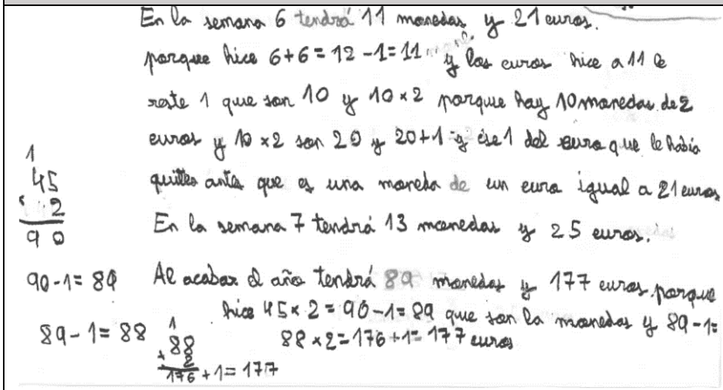
Alumno M - Pregunta 2
 *"En la semana 6 tendrá 11 monedas y 21 euros porque hice 6+6=12 – 1= 11 y los euros hice a 11 le resté 1 que son 10 y 10x2 porque hay 10 monedas de 2 euros y 10 x 2 son 20 y 20+1 y ese 1 del euro que le había quitado antes que es una moneda de un euro igual a 21 euros. En la semana 7 tendrá 13 monedas y 25 euros. Al acabar el año tendrá 89 monedas y 177 euros porque hice 45 x 2 = 90 - 1= 89 que son las monedas y 89 - 1 = 88 x 2 = 176+1=177 euros"*

Imagen 18. *Respuesta del alumno M a la segunda pregunta.*

5.1.2.3. Pregunta 2.1

"Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de monedas que tendría en cualquier semana? ¿Y la cantidad de euros?".

Como se puede observar en la imagen 19, el alumno N fue capaz de explicar cómo podría hallar la cantidad de monedas y euros para cualquier semana con sus propias palabras. Por otro lado, el alumno Ñ pudo representarlo con notación algebraica, aspecto que demuestra un alto grado de abstracción y pensamiento algebraico teniendo en consideración la edad del estudiante. Ambos discentes multiplican por dos la cantidad de monedas a partir de la regla general simplificada de la anterior actividad, considerando que todas las monedas son de dos euros. Finalmente, le restan un euro para representar el valor de la moneda central.

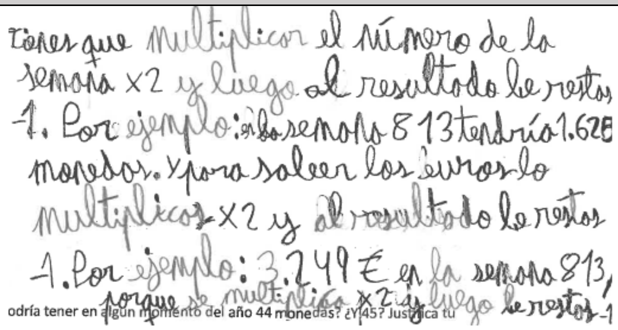
Respuesta del alumno N
 Tienes que multiplicar el número de la semana x2 y luego al resultado le restas -1. Por ejemplo: en la semana 813 tendría 1.625 monedas. Y para saber los euros lo multiplicas x2 y al resultado le restas -1. Por ejemplo: 3.249 € en la semana 813, porque se multiplica x2 y luego le restas -1
"Tienes que multiplicar el número de la semana x2 y luego al resultado le restas -1. Por ejemplo: en la semana 813 tendría 1625 monedas. Para saber los euros lo multiplicas x2 y al resultado le restas -1. Por ejemplo: 3249€ en la semana 813, porque se multiplica x2 y luego le restas 1."
Respuesta del alumno Ñ
 X + X - 1 monedas (X+X-1)·2 - 1 cantidad de euros

Imagen 19. *Respuesta de los alumnos N Y Ñ a la Pregunta 2.1.*

5.1.2.4. Pregunta 3

"*¿Podría tener en algún momento del año 44 monedas? ¿Y 45? Justifica tu respuesta."*

Del mismo modo que en la actividad 1, únicamente el estudiante que realizó la relación inversa pudo aplicarla de nuevo a esta actividad (imagen 20)

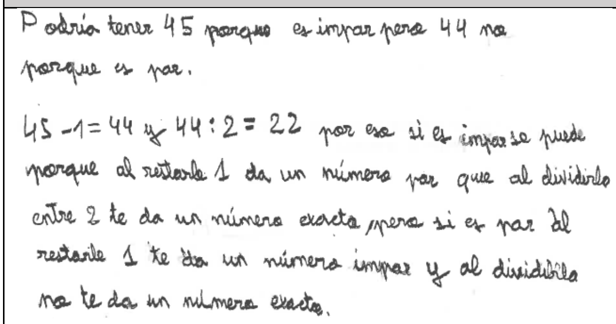
Pregunta 3	
 Podría tener 45 porque es impar pero 44 no porque es par. 45 - 1 = 44 y 44 : 2 = 22 por eso si es impar se puede porque al restarle 1 da un número par que al dividirlo entre 2 te da un número exacto, pero si es par al restarle 1 te da un número impar y al dividirlo no te da un número exacto.	*"Podría tener 45 porque es impar, pero 44 no porque es par. 45-1 y 44:2 =22 por eso si es impar se puede porque al restarle 1 da un número par que al dividirlo entre 2 te da un número exacto, pero si es par al restarle 1 te da un número impar y al dividirlo no te da un número exacto".*

Imagen 20. *Respuesta de un alumno a la tercera pregunta de la actividad.*

5.2 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

En relación con el segundo objetivo del presente trabajo, se realizará un análisis estadístico inferencial en base a los datos obtenidos.

Una vez revisadas las respuestas del alumnado a la primera actividad, se clasificó a cada una de ellos en un estadio determinado. En la tabla 4, se puede observar la cantidad de estudiantes enmarcados en cada estadio teniendo en cuenta el total de la muestra.

Estadio 0	Estadio 1	Estadio 2	Estadio 3	Estadio 4	Estadio 5
3/84	10/84	34/84	21/84	15/84	1/84
3.57%	11.9%	40.48%	25%	17.86%	1.19%

Tabla 4. *Cantidad de estudiantes en cada Estadio.*

En la imagen 21 se establece de forma porcentual la relación de estudiantes en cada estadio.

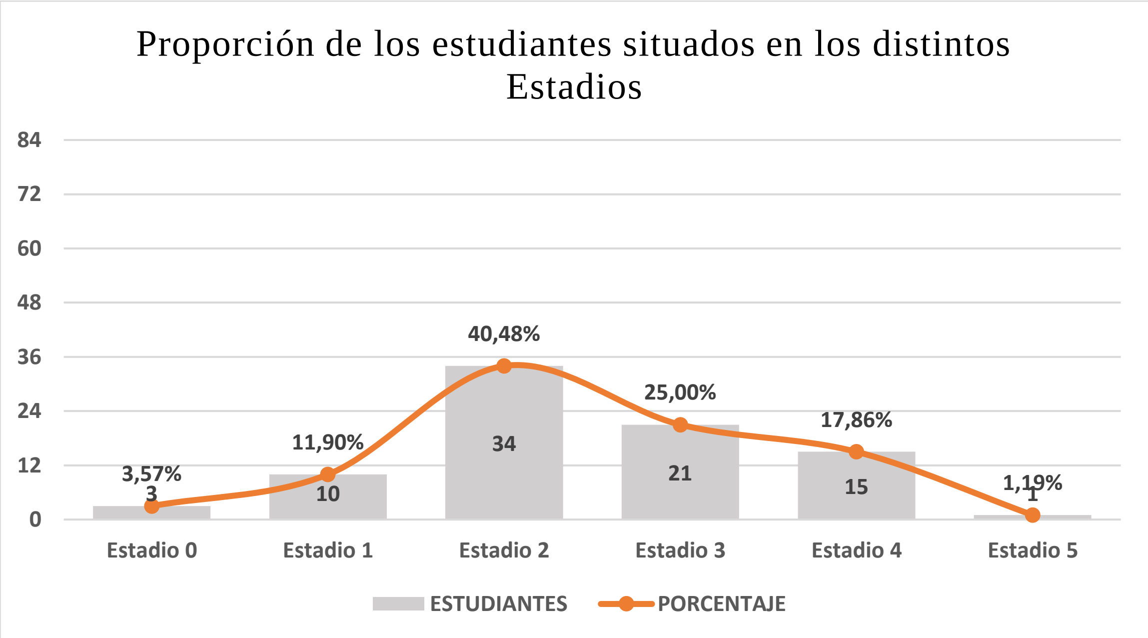


Imagen 21. *Proporción de los estudiantes en los estadios.*

Como se aprecia, tres estudiantes no fueron capaces de identificar tanto la estructura numérica como la espacial, enmarcándose en el Estadio 0. Por otro lado, 10 discentes no supieron de coordinar ambas estructuras. Entre los alumnos que participaron en la intervención, ninguno de ellos tenía un desfase curricular superior a tres cursos. Es por ello por lo que resulta interesante constatar que el 15,5% del alumnado no fue capaz de establecer una relación para términos cercanos, es decir, seguir la sucesión para las figuras próximas a las del enunciado (Generalización Cercana).

En cuanto a la identificación de términos lejanos particulares (Generalización lejana), el 56% del estudiantado no fue capaz de identificar la relación funcional entre la posición de la figura y el número de elementos que contiene. En cambio, el 19% sí pudo establecer una regla general para determinar el patrón de la serie.

Un aspecto a tomar en consideración fue el escaso número de alumnos que pudo realizar la relación inversa (1,1%) de la actividad. Bajo el estudio de las distintas respuestas de los estudiantes y la posterior revisión de las preguntas de la actividad 1, se cree que una parte del alumnado establecido en el Estadio 4 también se pudo haber enmarcado en el Estadio 5. No se tuvo en consideración que el alumnado pudiera contestar a la tercera pregunta identificando que las figuras solo podían estar conformadas por un número impar de cuadrados antes de realizar la relación inversa. Debido a ello, algunos estudiantes que no fueron siquiera capaces de identificar la relación funcional, pudieron contestar correctamente a esta pregunta. Del mismo modo, los alumnos del Estadio 4 que de esta manera justificaron su respuesta, cabe la posibilidad que también hubieran sido capaces de realizar la relación inversa.

5.2.1. Intervalos de confianza

Con las proporciones obtenidas podemos inferir que, en la población, con una confianza del 90%, la proporción de estudiantes que se sitúan en cada uno de los estadios se define en los siguientes intervalos (tabla 5):

Estadio	Intervalo de confianza
Estadio 0 (3/84)	[0.3%, 6.9%]
Estadio 1 (10/84)	[6.1%, 17.7%]
Estadio 2 (34/84)	[31.7%, 49.3%]
Estadio 3 (21/84)	[17.2%, 32.8%]
Estadio 4 (15/84)	[11%, 24.7%]
Estadio 5 (1/84)	[0%, 3.1%]

Tabla 5. *Intervalo de confianza de cada estadio.*

Esto quiere decir que, al realizarse esta actividad en la población, con una probabilidad del 90% la proporción de alumnado en el Estadio 0 estará entre un 0.3% y un 6.9%. Asimismo, con la misma probabilidad, en el Estadio 1 se situarán entre un 6.1% y un 17.7%; en el Estadio 2 entre un 31.7% y 49.3%; en el Estadio 4 entre un 11% y un 24.7%; y, por último, en el Estadio 5 se situarán entre un 0% y un 3.1%.

Con una confianza del 90%, podemos afirmar que entre un tercio y la mitad de los estudiantes de sexto de Primaria de Oviedo están en un Estadio 2 y un porcentaje algo menor que un tercio en el Estadio 3. Estos estadios corresponden a la generalización cercana y una intuición sobre la generalización lejana, sin llegar a explicitar la relación funcional que está ligada a las nociones de algebra temprana. Al 90% de confianza, entre una décima parte y una cuarta parte de los estudiantes de sexto de Primaria de Oviedo manifiestan nociones de álgebra cuando construyen la relación funcional. Finalmente, con el mismo nivel de significancia, menos de un 3.1% de los estudiantes realizan la trayectoria hipotética de aprendizaje completa, llegando a un muy buen manejo de la relación funcional, ya que además de construirla son capaces a realizar su inversa.

6. CONCLUSIONES

Una vez realizada la intervención educativa en distintos centros de Educación Primaria de la ciudad Oviedo, se ha observado que, si bien es cierto que la gran mayoría de estudiantes de sexto curso pude seguir la sucesión para las figuras próximas con menor cantidad de cuadrados apoyándose en el recuento gráfico o en el término anterior de la serie, alrededor de la mitad de los alumnos no son capaces de identificar la relación funcional para términos lejanos o no especificados, es decir, la concordancia entre el número de la figura y la cantidad de elementos que contiene, lo que pone de manifiesto un escaso pensamiento abstracto que no debería corresponderse con el curso en el que se realizó la intervención educativa. Según Zapatera (2018), este aspecto debería estar dominado al acabar el segundo ciclo de Educación Primaria. Entre las respuestas del alumnado, se ha podido observar que la mayoría siguen el mismo procedimiento para establecer el número de cuadrados para las figuras cercanas como para las lejanas, un método recursivo. Tienen en cuenta el patrón de crecimiento de la serie, es decir, la cantidad de cuadrados que se va añadiendo figura a figura, en vez de utilizar un método funcional, identificando la relación entre la posición de la figura y el número de cuadrados que la componen.

Aunque cerca de la mitad de los estudiantes son capaces de identificar dicha relación funcional, todavía les resulta complicado revertir el proceso, es decir, distinguir la posición de la figura dado el número de cuadrados de la misma o, como se propuso en la trayectoria hipotética de aprendizaje, identificar si pudiera existir una figura con un determinado número de cuadrados. Este aspecto, teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente en la literatura, se introduce en 5º curso de Educación Primaria. Es por ello por lo que, en sexto curso de Educación Primaria, la mayoría de los estudiantes deberían ser capaces de identificar la relación funcional inversa.

A la hora de establecer una regla general una vez identificado el patrón de la serie, aproximadamente uno de cada cinco estudiantes puede expresarlo de manera escrita con sus propias palabras o con notación algebraica. Si bien es cierto que no deja de ser un porcentaje relativamente bajo, el hecho de no haber realizado ejercicios de esta índole previamente, los resultados de los estudiantes no son desalentadores. Esto deja entrever la capacidad y predisposición en esta etapa educativa a identificar y extender regularidades a través de la generalización sin depender únicamente de representaciones concretas, tal y como sostiene Zapatera (2018).

Aunque se pueda notar una mayor implicación en las nuevas leyes educativas en relación con la introducción de ejercicios de generalización de patrones para fomentar el razonamiento abstracto y el pensamiento algebraico en el alumnado de Educación Primaria, todavía queda un largo camino por recorrer para otorgar el peso que se merece al pensamiento matemático, y en concreto, a las nociones de álgebra temprana en el currículo de esta etapa educativa. La comunidad docente debe tomar conciencia de ello y planificar actividades de generalización de patrones desde los primeros cursos de Educación Primaria, más concretamente desde los inicios del segundo ciclo, para ir aumentando gradualmente su complejidad hasta llegar a la abstracción y ser capaces de consolidar las bases de un pensamiento algebraico sólido y acorde con la capacidad cognitiva del alumnado. No solo para que los estudiantes puedan tener más garantías de éxito en el álgebra en la etapa de Educación Secundaria, sino también para desarrollar una serie de competencias y habilidades relacionadas con el ámbito de las matemáticas, tales como el pensamiento crítico, razonamiento lógico y la resolución de problemas, todas ellas repercutiendo transversalmente en las demás áreas del currículo.

El trabajar con trayectorias hipotéticas de aprendizaje puede proporcionar una buena herramienta que indica al profesorado, además del objetivo de la secuencia de tareas propuestas, los distintos estadios por los que ha de transitar el alumno. Por otro lado, se podría modificar esta trayectoria, dotándola de más apoyos para conseguir que sean más los alumnos que alcancen los estadios más altos, como se especifican a continuación. Del mismo modo, puede resultar útil el acompañar la trayectoria hipotética de aprendizaje con un árbol del problema que recoja por un lado las posibles respuestas de los estudiantes (como se ha recoge en la sección 3.1.1.1. de este trabajo) y por otro lado las indicaciones que el profesor puede dar a sus alumnos para conseguir resolver las tareas e ir alcanzando distintos estadios en su progresión de aprendizaje.

A modo de cierre, se contempla la mejora de algunos aspectos relacionados con el diseño e implementación de la trayectoria hipotética de aprendizaje diseñada para las actividades propuestas una vez realizada la intervención educativa y estudiado los resultados obtenidos.

Actividad 1

- Pregunta 2.1: para comprobar de una manera menos condicionada los distintos caminos que el alumnado puede tomar para representar la regla general de la serie, se recomienda no utilizar ningún tipo de ayuda gráfica que pueda guiar una única posibilidad de representación.
- Pregunta 3: se aconseja reformular la cuestión para que el alumnado tenga más presente la opción de realizar la relación funcional inversa en un primer lugar, antes de argumentar que solo podría haber figuras con una cantidad impar de cuadrados. La pregunta está enunciada de la siguiente manera: *"¿Podría haber una figura con 144 cuadrados? ¿Y con 145? Justifica cómo podría ser posible la distribución de esos cuadrados"*. A continuación, se sugiere preguntar en un primer lugar por el número de una figura que pudiera estar conformada por una cantidad determinada de cuadrados: *"Determina el número de una figura si estuviera compuesta por 145 cuadrados. ¿Podría haber una figura con 188 cuadrados? ¿Por qué? Justifica tu respuesta"*. De esta manera, si el alumnado identifica que solo pueden existir figuras con un número impar de cuadrados, debe de invertir el proceso de la relación funcional para identificar la posición de la figura teniendo en cuenta el número de elementos que la compone.

Actividad 2

- Se sugiere añadir una cuarta pregunta donde el alumnado tenga que establecer la relación funcional inversa entre una cantidad de dinero determinada y el número de la semana correspondiente: *"¿En qué semana del año Lorenzo tendría 157€? ¿Podría haber una semana donde tenga 200€? ¿Por qué? Justifica tu respuesta."* De esta manera, añade un extra de dificultad a la hora de establecer la realización funcional inversa ya que la regla general resulta ser más complicada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446. https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf

Bruner, J. S., Goodnow, J. J., & Austin, G. (2001). *El proceso mental en el aprendizaje*. Narcea.

Callejo, M. L., García-Reche, Á., & Fernández, C. (2016). Pensamiento Algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *10*, 5–25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Callejo, M. L. & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teacher´s noticing of students´ understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Education*, *20*(4), 309-333. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Carraher, D., & Schliemann, A. D. (2002). The Transfer Dilemma. *The Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 1-24. https://www.jstor.org/stable/1466719

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El Razonamiento Inductivo como Generador de Conocimiento Matemático. *UNO*, *54*, 55-67. http://hdl.handle.net/10481/26079

Escudero, J. M., & Martínez, B. (2011). Educación inclusiva y Cambio Escolar. *Revista Iberoamericana de Educación*, *55*, 85–105. https://doi.org/10.35362/rie550526

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/

Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2007). trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la Formación Inicial de profesores de Matemáticas de Secundaria. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *1*(2), 79–98. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6214

Gómez-Chacón, I. M., Ortuño, T., & De la Fuente, A. (2020). Aprendizaje-Servicio En Matemáticas: Uso de trayectorias de aprendizaje en la Formación Universitaria. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, *18*(1), 213-231. https://doi.org/10.4995/redu.2020.12079

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" The k-12 curriculum*. U.S. Dept. of Education, Office of Educational Research and Improvement, Educational Resources Information Center. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151. https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE, 2020). *Boletín Oficial del Estado*, 340, de 30 de Diciembre de 2020. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3/dof/spa/pdf

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in Algebra*. Paul Chapman. https://www.academia.edu/16037219/Developing_Thinking_in_Algebra

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40

Pincheira Hauck, N., & Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos Contemporáneos de Educación Infantil y primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 153–180. https://doi.org/10.24844/em3301.06

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. *PME-NA*, *1*, 2-21 https://www.researchgate.net/publication/239933692_Algebraic_thinking_and_the_generalization_of_patterns_A_semiotic_perspective

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, *40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *4*(2), 37–62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con

Rivera, F.D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 81-88.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking learning*, *6*(2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de las investigaciones. *Números, Revista de Didáctica de las matemáticas*, *77*, 5-34. http://funes.uniandes.edu.co/3582/

Zapatera, A. (2013). Cómo alumnos de Educación Primaria resuelven problemas de Generalización de patrones. Una Trayectoria de Aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *21*(1), 87–114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Zapatera, A. (2015). *La competencia "mirar con sentido" de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Alicante]. http://hdl.handle.net/10045/52046

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números Revista de Didáctica de las matemáticas*, *97*, 51-67. http://funes.uniandes.edu.co/12877/1/Zapatera2018Introduccion.pdf

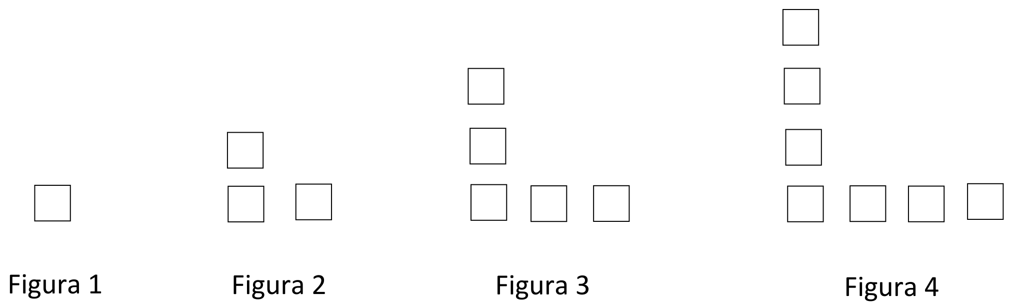
Zapatera, A. (2022). La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria. *Educación Matemática*, *34*(2), 134–152. https://doi.org/10.24844/em3402.05

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 305–312. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496965.pdf

ANEXOS

ANEXO 1. PRIMERA ACTIVIDAD

Nombre________________________________ Curso________
Fecha____________



1. ¿Cuántos cuadrados debería haber en la Figura 5? ¿Por qué? Dibújala.

2. ¿Cuántos cuadrados debería haber en las Figuras 6 y 7? ¿Y en la Figura 100? Justifica tu respuesta.

2.1. Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de cuadrados que podría haber en cualquier figura?

Figura 5

$\square + \square - \square$

Figura 6

$\square + \square - \square$

<u>Cualquier Figura:</u>

$\square + \square - \square$

Figura 7

$\square + \square - \square$

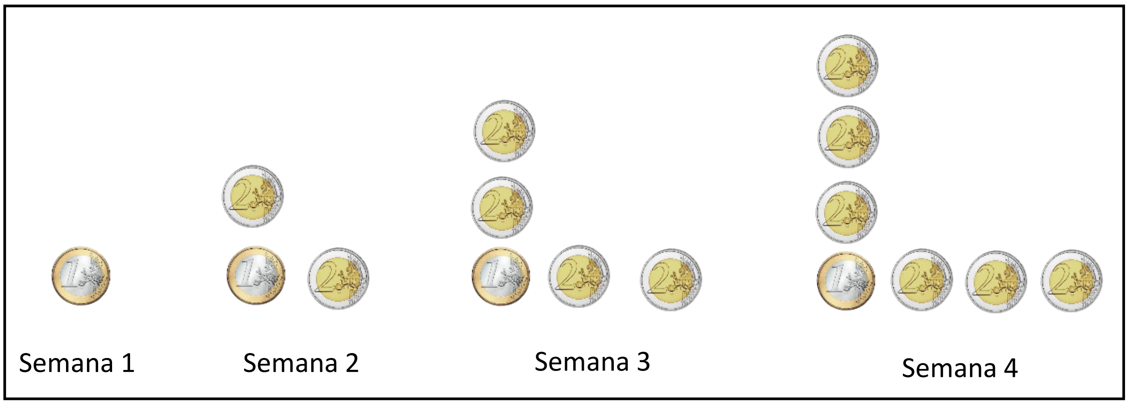
3. ¿Podría haber una figura con 144 cuadrados? ¿Y con 145? Justifica cómo sería posible la distribución de esos cuadrados.

4. ¿Sabrías decir con qué cantidades de cuadrados podríamos formar figuras que sigan esta serie?

ANEXO 2. SEGUNDA ACTIVIDAD

Nombre_______________________________ Curso________

Fecha____________



1. El primer día del año los abuelos de Lorenzo meten en su hucha una moneda de un euro. Desde ese momento, cada semana le ingresan dos monedas de dos euros ¿Cuántas monedas tendrá en la semana 5? ¿Cuánto dinero? ¿Por qué?

2. ¿Cuántas monedas y euros debería tener en la semana 6 y 7? ¿Y al acabar el año? Justifica tu respuesta.

2.1 Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de monedas que tendría en cualquier semana? ¿Y la cantidad de euros?

3. ¿Podría tener en algún momento del año 44 monedas? ¿Y 45? Justifica tu respuesta.

ANEXO 3. RESPUESTAS DEL ALUMNO EN EL ESTADIO 5 A LA ACTIVIDAD 1

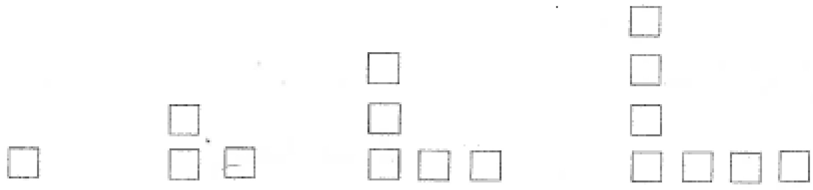


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. ¿Cuántos cuadrados debería haber en la Figura 5? ¿Por qué? Dibújala.

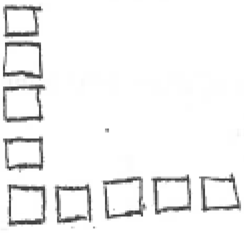


Figura 5

Porque en cada figura se le va añadiendo un cuadrado a cada lado, y también coincide que si es la figura 3 por ejemplo hay 3 cuadrados por lado contando el del medio.

2. ¿Cuántos cuadrados debería haber en las Figuras 6 y 7? ¿Y en la Figura 100? Justifica tu respuesta.

En la figura 6 habría 11 cuadrados.

En la figura 7 habría 13 cuadrados

En la figura 100 habría 199 cuadrados.

Porque ya multiplica el número del nombre de la figura por 2 que me da el número de cuadros por lado contando el del medio 2 veces, luego le restó 1 porque solo hay un cuadrado en el medio.

2.1. Teniendo en cuenta tu última respuesta ¿Sabrías hallar la cantidad de cuadrados que podría haber en cualquier figura?

Figura 1

$\boxed{1} + \boxed{1} - \boxed{1}$

Figura 2

$\boxed{2} + \boxed{2} - \boxed{1}$

Cualquier Figura:

$\boxed{X} + \boxed{X} - \boxed{1}$

Figura 3

$\boxed{3} + \boxed{3} - \boxed{1}$

3. ¿Podría haber una figura con 144 cuadrados? ¿Y con 145? Justifica cómo sería posible la distribución de esos cuadrados.

Con 144 cuadrados no porque es par y
145 si porque es impar y tambien se puede saber haciendo la
siguiente primero hay que restarle 1 que daría 144 que
hay que dividirlo entre 2, 144:2= 72 par eso podría
haber una figura de 145 y no de 144 porque si le
restas 1 es 143 que si lo divides entre 2 te da 71,5 y como
es con decimales no se puede.

4. ¿Sabrías decir con qué cantidades de cuadrados podríamos formar figuras que sigan esta serie?

Con una cantidad impar de cuadrados