Universidad de Oviedo

MEDIDAS DE EMBEBIMIENTO, INCLUSIÓN Y SIMILITUD PARA CONJUNTOS DIFUSOS INTERVALO-VALORADOS

Mariana González Alzueta

Trabajo Fin de Máster

Dirigido por

Susana Montes Rodríguez y S.Irene Díaz Rodríguez

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Facultad de Ciencias

Máster en Análisis de Datos para la Inteligencia de Negocios

Julio de 2023

Índice general

Introducción

En la teoría de conjuntos clásica, un elemento pertenece a un conjunto o no, es decir, su grado de pertenencia es 0 o 1, sin existir valores intermedios. Sin embargo, en muchas situaciones reales es común encontrarse con variables que no pueden ser completamente definidas o cuantificadas con precisión. Además, los seres humanos a menudo expresan juicios y razonamientos basados en términos lingüísticos difusos, como "alto", "bajo" o "medio", en lugar de valores numéricos precisos. A raíz de estas situaciones, se presentó la necesidad de cuantificar esta incertidumbre dando paso a la aparición de la lógica difusa.

La teoría de conjuntos difusos fue enunciada por primera vez por Lofti Zadeh [34] en 1965. Proporciona un marco matemático para manejar la incertidumbre y la imprecisión al permitir que los grados de pertenencia tomen rangos continuos y no solo valores discretos de verdadero o falso. Sin embargo, en muchas situaciones del mundo real, la incertidumbre no se puede capturar completamente utilizando conjuntos difusos tradicionales, ya que estos asignan un único grado de pertenencia a cada elemento. Esta asignación puntual puede no reflejar adecuadamente la variabilidad y causar falta de precisión en la estimación de los grados de pertenencia.

En respuesta a esta limitación, en los años setenta Zadeh [35], Grattan Guinness [16], Jahn [18] y Sambuc [29] introdujeron de forma independiente una extensión de los conjuntos difusos conocida como conjuntos difusos intervalo-valorados, para los cuales los valores de pertenencia pasan a ser intervalos. Desde entonces los autores los han empleado en campos muy diversos como, por ejemplo, para el diagnóstico médico en patologías tiroideas [29], en convexidad [1], en razonamiento aproximado [7] o en lógica [9]. El objetivo principal de este trabajo es definir nuevas medidas de similitud para conjuntos difusos

Índice de figuras

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es definir nuevas medidas de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados que posteriormente puedan aplicarse al agrupamiento jerárquico con distintos algoritmos y al reconocimiento de imágenes. Con el propósito de crear métodos de construcción de similitudes, se introducirán medidas que cuantificarán el grado de embebimiento o incrustación de un conjunto difuso intervalo-valorado en otro y el grado de inclusión. Dada la naturaleza de la función de pertenencia asociada a los mismos, se va a comenzar trabajando con las medidas del grado de contenido y de orden para intervalos. Además, hay que tener en cuenta que trabajar con un intervalo puede interpretarse como trabajar con un conjunto difuso intervalo-valorado en un referencial X de cardinal uno. Por último, además de incluir las conclusiones del trabajo, se explican las futuras líneas de aplicación e investigación.

Abstract

The main objective of this work is to define new similarity measures for interval-valued fuzzy sets that can later be applied to hierarchical clustering with different algorithms and to image recognition. With the aim of creating similarity construction methods, measures will be introduced that will quantify the degree of embedding of one interval-valued fuzzy set in another and the degree of inclusion. Given the nature of the membership function associated with them, we will start working with the measures of the degree of content and order for intervals. Furthermore, it should be noted that working with an interval can be interpreted as working with an interval-valued fuzzy set in a cardinal one X referential. Finally, as well as including the conclusions of the work, future lines of application and research are explained.

intervalo-valorados que posteriormente puedan aplicarse al agrupamiento jerárquico con distintos algoritmos.

Con el objetivo de crear métodos de construcción de similitudes, se introducirán medidas que cuantificarán el grado de embebimiento o incrustación de un conjunto difuso intervalo-valorado en otro y el grado de inclusión. En ambos casos, este estudio se realizará basándose a su vez en un estudio análogo para medidas del grado de contenido y de orden para intervalos, al ser estos la forma en la que se describe la función de pertenencia para este tipo de conjuntos.

Para alcanzar estos objetivos, este trabajo está estructurado como sigue: en el capítulo 1, tras una breve introducción de la teoría de conjuntos difusos intervalo-valorados, se desarrollan los conceptos fundamentales para la memoria sobre funciones de agregación, que es la forma en la que se fusionarán los valores en cada punto del referencial. En el capítulo 2 se introduce el concepto de medida del grado de orden para intervalos, estudiando en detalle el caso en el que el orden a cuantificar sea el contenido o el orden reticular clásico entre intervalos. El primer caso se analiza en detalle, desarrollando dos metodologías distintas para construir este tipo de medidas, para a continuación, en la sección 2.3, generar similitudes para intervalos a partir de las medidas del grado de contenido. Posteriormente, en el capítulo 3 se introducen los conceptos de medida de embebimiento o incrustación y medida de inclusión para conjuntos difusos intervalo-valorados y se proponen distintas metodologías para generarlos. Las medidas de inclusión se utilizan además para generar medidas de similitud mediante dos métodos diferenciados. Por último, se incluyen las conclusiones finales del trabajo así como futuras líneas de aplicación e investigación.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este primer capítulo se van a introducir aquellos conceptos fundamentales a lo largo de esta memoria, lo cual nos servirá para recordar los mismos, así como para fijar la notación que se va a emplear.

1.1 Conjuntos difusos intervalo-valorados

Los conjuntos borrosos o difusos fueron introducidos originalmente por Lotfi A. Zadeh como una extensión de la teoría clásica de conjuntos:

Definición 1.1.1. *([34]) Sea X un espacio de objetos. Un conjunto difuso o borroso A de X viene caracterizado por una función de pertenencia f_A tal que $f_A : X \longrightarrow [0,1]$.*

El valor que toma $f_A(x)$ en un elemento genérico x de X representa el grado de pertenencia de x a A.

Por tanto, en el caso concreto de los conjuntos difusos la función característica o indicatriz de un conjunto se reemplaza con una función en el intervalo de la unidad real $[0,1]$. Con lo cual, es evidente, que cualquier conjunto clásico, también llamado nítido, se puede ver como un caso particular de conjunto difuso.

Los conjuntos borrosos se han aplicado en muchas áreas diferentes, como la inteligencia artificial, el control de sistemas, las ciencias de la decisión [22], el aprendizaje automático

[5], el procesamiento de la información, la estadística y el análisis de datos [26], la economía [32], la medicina o la ingeniería [38].

Dado que existen muchos problemas reales en los que puede no ser posible definir con precisión la función de pertenencia asociada a un conjunto difuso, se han propuesto diversas extensiones o generalizaciones para este tipo de conjuntos, en las que el valor de pertenencia en sí mismo se vuelve menos preciso al convertirlo en una colección de valores posibles, en lugar de un solo número real del intervalo $[0,1]$. Esta idea conduce a una formulación más general de conjuntos borrosos donde los valores de pertenencia son intervalos (conjuntos borrosos con valores de intervalo). Dichos conjuntos son capaces de trabajar conjuntamente con la vaguedad y la incertidumbre. Matemáticamente,

Definición 1.1.2. *Sea X el conjunto de referencia. Un conjunto difuso intervalo-valorado en X está definido por la aplicación $A : X \to L([0,1])$ tal que $A(x) = [\underline{A}(x), \bar{A}(x)]$, donde $L([0,1])$ denota la familia de intervalos cerrados incluidos en el intervalo unitario $[0,1]$.*

A partir de esta definición es evidente observar que un conjunto difuso intervalo-valorado A está totalmente caracterizado por dos aplicaciones $\underline{A}$ y $\bar{A}$ de X en $[0,1]$ tales que $\underline{A}(x) \leq \bar{A}(x),\ \forall x \in X$. Estas funciones representan el límite inferior y superior de la función de pertenencia.

Ejemplo 1.1.1. *Sea $X = \mathbb{R}^+$ y A un conjunto difuso intervalo-valorado con grado de pertenencia dado por*

$$A(x) = [\underline{A}(x), \bar{A}(x)] \ \forall\, x \in X$$

siendo

$$\underline{A}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 2 \\ (x-2)/3 & si\ x \in (2,5) \\ 1 & si\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 1 \\ (x-1)/2 & si\ x \in (1,3) \\ 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

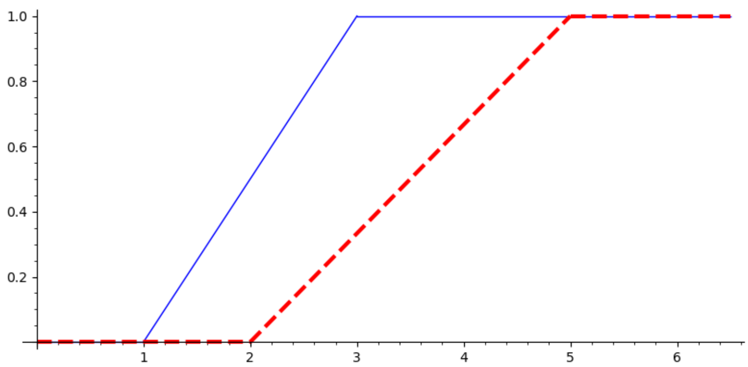


Figura 1.1: Conjunto difuso intervalo-valorado.

La representación gráfica de este conjunto puede verse en la figura 1.1.

Así, por ejemplo, se tiene que $A(1) = [0, 0]$, $A(1.5) = [0, 0.25]$, $A(2.5) = [0.17, 0.75]$, $A(4) = [2/3, 1]$ *y* $A(6) = [1, 1]$.

En el ejemplo anterior se puede ver como en algunas partes del referencial no existe ambigüedad sobre el valor de la función de pertenencia y ésta se define con un valor exacto. En general, es evidente que si A es un conjunto difuso clásico cuya función de pertenencia es f_A, se puede representar como un conjunto difuso intervalo-valorado, en el que $\underline{A}(x) = \bar{A}(x) = f_A(x), \forall x \in X$. Así pues, los conjuntos difusos son casos particulares de conjuntos difusos intervalo-valuados. De hecho, si denotamos por w la amplitud de un intervalo, es decir, $w([\underline{a}, \bar{a}]) = \bar{a} - \underline{a}$, un conjunto difuso no es más que un conjunto difuso intervalo-valorado tal que $w(A(x)) = 0, \forall x \in X$. De todo lo anterior se deduce que si se representa como $FS(X)$ el conjunto de subconjuntos difusos de X y como $IVFS(X)$ el conjunto de subconjuntos difusos intervalo-valorados de X, se tiene que $FS(X) \subseteq IVFS(X)$.

La definición anterior de conjunto difuso intervalo-valorado admite dos interpretaciones distintas, epistémica u óntica, que se describen a continuación, para lo cual es preciso comentar diferenciando entre conjunto conjuntivo y disyuntivo.

Definición 1.1.3. *([11]) Se dice que un conjunto es:*

- *Conjuntivo, si representa colecciones de elementos que forman objetos compuestos.*

- *Disyuntivo, si representa estados de información incompletos.*

Así, un conjunto conjuntivo es la representación precisa de una entidad objetiva, mientras que un conjunto disyuntivo solo representa información imperfecta. Con esto, se puede introducir la interpretación óntica y epistémica como sigue.

Definición 1.1.4. *([11]) Un conjunto óntico C es el valor concreto (y exacto) de una variable fija F y podemos escribir $F = C$.*

Un conjunto epistémico E contiene el valor real actual de un punto-evaluado x y lo podemos indicar como $x \in E$.

Un conjunto disyuntivo E representa el estado epistémico de un agente, por lo que no existe por sí mismo. De hecho, cuando se razona sobre un conjunto epistémico es mejor manejar un par (x, E). Un valor s dentro de un conjunto disyuntivo E es un posible valor candidato para x, mientras que los elementos fuera de E se consideran imposibles.

En nuestro estudio optaremos por la interpretación epistémica. Por lo tanto, asumimos que existe un grado de pertenencia real para cada elemento dentro del intervalo de pertenencia, pero que el mismo no es conocido.

Ejemplo 1.1.2. *Si se considera el referencial $X = [0, 3]$ y el conjunto difuso intervalo-valorado A definido por: $\underline{A}(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x + 4)/10$ y $\overline{A}(x) = (x^3 - 4x^2 + 2x + 8)/10$, para cualquier $x \in X$, cuya representación gráfica se puede ver en la figura 1.2, se sabe que el grado de pertenencia de este conjunto A en el punto $x = 1$ está entre $2/5$ y $7/10$, puesto que $A(x) = [2/5, 7/10]$, pero no se puede precisar si está más cerca del extremo inferior o del superior de ese intervalo, pudiendo ser 0.45, 0.5, 0.6 o cualquier otro valor en ese intervalo.*

Una vez dada la definición formal, así como la interpretación que se va a considerar para este tipo de conjuntos, se pueden introducir dos relaciones esenciales en $IVFS(X)$, en las que se va a focalizar este trabajo: la inclusión y el embebimiento. Ambos conceptos están basados en conceptos a su vez definidos sobre el conjunto $L([0, 1])$. Por un lado, la inclusión representa que un conjunto difuso intervalo-valorado está totalmente contenido

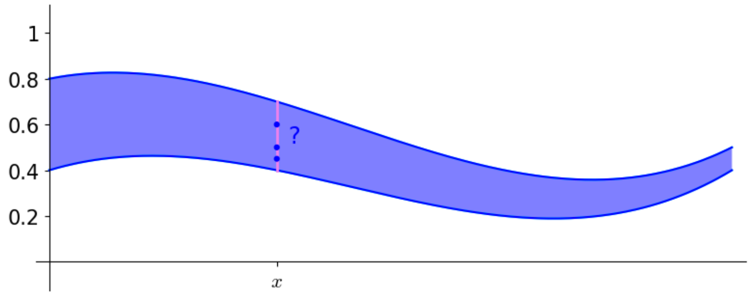


Figura 1.2: Incertidumbre en el grado de pertenencia.

en otro, mientras que el embebimiento refleja si un conjunto tiene una descripción más precisa respecto a la función de pertenencia. Se comienza pues, introduciendo conceptos previos sobre $L([0,1])$ que serán necesarios para acabar definiendo las relaciones sobre $IVFS(X)$.

Definición 1.1.5. *Si se considera el conjunto de intervalos cerrados en el intervalo* $[0,1]$, $L([0,1]) = \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \;\mid\; \underline{x}, \bar{x} \in [0,1]$ *y* $\underline{x} \leq \bar{x}\}$ *y dados dos intervalos cualesquiera en dicho conjunto,* $a, b \in L([0,1])$ *con* $a = [\underline{a}, \bar{a}]$ *y* $b = [\underline{b}, \bar{b}]$ *se definen dos relaciones sobre* $L([0,1])$ *como sigue:*

- *Orden reticular* ($a \preceq_{Lo} b$) *(cuyas siglas vienen de su denominación en ingles, lattice order): se dice que* a *es menor o igual que* b*, y se denota como* $a \preceq_{Lo} b$*, si* $\underline{a} \leq \underline{b}$ *y* $\bar{a} \leq \bar{b}$.

- *Contenido* ($a \subseteq b$)*: se dice que* a *está incluido en* b *si* $\underline{b} \leq \underline{a}$ *y* $\bar{a} \leq \bar{b}$.

Ambas relaciones son órdenes parciales, es decir, reflexivas, antisimétricas y transitivas, pero no se pueden comparar cualquier par de intervalos.

A pesar de que estos dos órdenes son parciales, sí existen órdenes totales sobre $L([0,1])$ que, de hecho, generalizan al orden reticular. Además de los órdenes parciales mencionados, podemos considerar el siguiente orden total en $L([0,1])$:

Definición 1.1.6. *Dados* $a, b \in L([0,1])$ *con* $a = [\underline{a}, \bar{a}]$ *y* $b = [\underline{b}, \bar{b}]$*, el orden lexicográfico con respecto a la primera componente* $\preceq_{lex1}$*, y respecto a la segunda componente* $\preceq_{lex2}$*, se definen respectivamente como:*

$$a \preceq_{lex1} b \quad si \quad \begin{cases} \underline{a} < \underline{b} \\ \text{ó} \\ \underline{a} = \underline{b} \quad y \quad \bar{a} \leq \bar{b} \end{cases}$$

$$a \preceq_{lex2} b \quad si \quad \begin{cases} \bar{a} < \bar{b} \\ \text{ó} \\ \bar{a} = \bar{b} \quad y \quad \underline{a} \leq \underline{b} \end{cases}$$

Ambos son órdenes totales y además preservan el orden reticular, es decir, si $a \leq_{Lo} b$ entonces $a \leq_{lex1} b$ y $a \leq_{lex2} b$.

Con estas relaciones, se pueden definir otras análogas sobre el conjunto $IVFS(X)$ como sigue:

Definición 1.1.7. *Dados dos conjuntos difusos intervalo-valorados A y B sobre el referencial X, se dice que:*

- *A está embebido en B ([6]), y se denota como $A \sqsubseteq B$, si $A(x) \subseteq B(x), \forall x \in X$.*
- *A está contenido en B con respecto al orden $\preceq_o$ sobre $L([0,1])$, y esto se denota por $A \subseteq_o B$, si $A(x) \preceq_o B(x), \forall x \in X$.*

En el caso del contenido, si se considera el orden reticular, se utilizará la notación $\subseteq$ en lugar de la notación $\subseteq_{Lo}$, al ser este el orden más habitual entre intervalos.

Ejemplo 1.1.3. *([6]) Consideremos $A, B, C, D \in IVFS(X)$ como se representan en la figura 1.3. Observamos que A está embebido en B ya que la incertidumbre sobre el valor real de pertenencia es menor para A que para B. Sin embargo $A \nsubseteq B$. Por otro lado, se tiene que $C \subseteq D$, pero $C \not\sqsubseteq D$. Es evidente por tanto, por lo expuesto anteriormente, que además $C \subseteq_{lex1} D$ y $C \subseteq_{lex2} D$.*

Por tanto, con un ejemplo muy simple se observa que los conceptos de embebimiento e inclusión son muy distintos, tanto desde el punto de vista matemático, como desde el de interpretación.

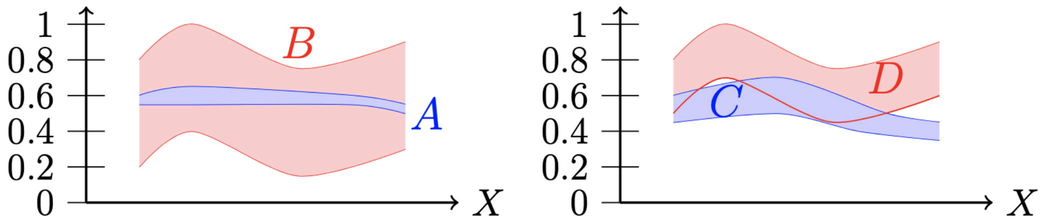


Figura 1.3: Embebimiento frente a inclusión.

Para concluir con este repaso sobre algunos conceptos fundamentales para conjuntos difusos intervalo-valorados, se van a introducir dos operaciones importantes, la unión y la intersección.

Definición 1.1.8. *([6]) Sean $A, B \in IVFS(X)$. La unión de A y B viene dada por el conjunto difuso intervalo-valorado con función de pertenencia:*

$$(A \cup B)(x) = \left[\max\{\underline{A}(x), \underline{B}(x)\}, \max\{\bar{A}(x), \bar{B}(x)\}\right] \tag{1.1}$$

para cualquier x en X.

Es evidente que, considerando la interpretación epistémica, este conjunto recoge la idea clásica de unión, puesto que el grado mínimo de certeza de que el punto pertenece a la unión es el mínimo de los dos grados de certeza mínimos y como mucho pertenece a la unión en el grado que pertenece a uno de ellos. De forma análoga se introducirá a continuación la intersección.

Definición 1.1.9. *Sean $A, B \in IVFS(X)$. La intersección de A y B viene dada por el conjunto difuso intervalo-valorado con función de pertenencia:*

$$(A \cap B)(x) = \left[\min\{\underline{A}(x), \underline{B}(x)\}, \min\{\bar{A}(x), \bar{B}(x)\}\right] \tag{1.2}$$

para cualquier x en X.

Ejemplo 1.1.4. *Si consideramos de nuevo el conjunto difuso intervalo-valorado del ejemplo 1.1.2, junto con el conjunto B definido por: $\underline{B}(x) = (-x^3 + 4x^2 - 2x - 7)/40$ y*

$\overline{B}(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x + 8.5)/10$, *para todo* $x \in X$, *ambos conjuntos aparecen representados en la figura 1.4.*

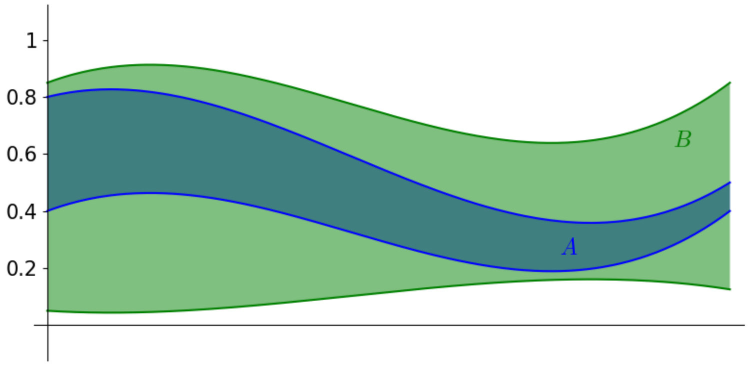


Figura 1.4: Dos conjuntos difusos intervalo-valorados.

Su unión viene representada en la parte izquierda de la figura 1.5 y su intersección en la derecha.

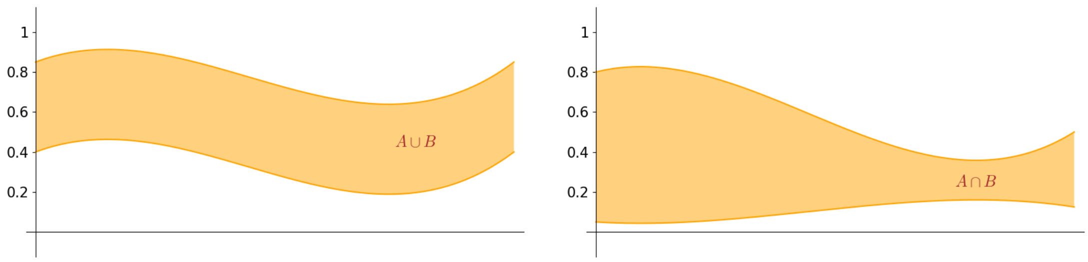


Figura 1.5: Unión e intersección.

1.2 Funciones de agregación

Tal como ha quedado de manifiesto, los conjuntos difusos intervalo-valuados están directamente relacionados con los intervalos cerrados, puesto que mediante los mismos se expresa su grado de pertenencia. Así pues, a la hora de definir medidas de embebimiento y similitud sobre $IVFS(X)$, se puede partir de medidas generadoras de las mismas sobre $L([0,1])$ y en el caso de referenciales finitos, agregar los valores obtenidos sobre cada punto del referencial. Se va a dedicar esta sección, precisamente, a las funciones que permiten dar este paso.

La agregación es el proceso de combinar varios valores en un solo valor que resume, en cierta forma, la información contenida en los valores de partida. Las funciones matemáticas que proporcionan un mecanismo para hacerlo se denominan funciones de agregación.

Consideraremos principalmente funciones de agregación que toman argumentos reales de intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$. En concreto nos centraremos en el intervalo $[0, 1]$, por ser el caso necesario para nuestros propósitos. Es evidente que los resultados obtenidos se pueden generalizar de forma inmediata para cualquier intervalo cerrado de la recta real.

Definición 1.2.1. *([4]) Sea $I = [0, 1]$, $\mathcal{A} : I^n \to I$ es una función de agregación de $n > 1$ argumentos si cumple las propiedades:*

i. Condiciones frontera: $\mathcal{A}(0, ..., 0) = 0$ y $\mathcal{A}(1, ..., 1) = 1$.

ii. Crecimiento: Si $x \preceq_{Lo} y$, entonces $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}(y)\ \forall\, x, y \in I^n$.

La segunda condición hace referencia a la monotonía en todas las componentes o argumentos puesto que se considera que $x \preceq_{Lo} y$ si cada componente de x no es mayor que la componente correspondiente de y, es decir, si $x_i \leq y_i$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Las funciones de agregación pueden presentar ciertas propiedades de interés:

Definición 1.2.2. *([4]) Una función de agregación $\mathcal{A}$ se dice que es simétrica, si su valor no depende de la permutación de los argumentos, es decir,*

$$\mathcal{A}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{A}(x_{P(1)}, ..., x_{P(n)}),$$

$\forall (x_1, ..., x_n) \in [0, 1]^n$ y para toda permutación $P = (P(1), ..., P(n))$ de $(1, 2, ..., n)$.

Definición 1.2.3. *([27]) Una función de agregación $\mathcal{A}$ se dice que es one-strict cuando*

$$\mathcal{A}(x_1, ..., x_n) = 1 \Longleftrightarrow x_1 = ... = x_n = 1$$

Definición 1.2.4. *([4]) Una función de agregación $\mathcal{A}$ de dos argumentos es asociativa* *si*

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(x_1,x_2),x_3) = \mathcal{A}(x_1,\mathcal{A}(x_2,x_3)) \ \forall\, x_1,x_2,x_3 \in [0,1]$$

Consecuentemente una función de agregación con n argumentos, si es asociativa, se puede construir iterando dicha función de agregación en dos argumentos como sigue:

$$\mathcal{A}(x_1,...,x_n) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(...\mathcal{A}(x_1,x_2),x_3),...,x_n)$$

A continuación vamos a introducir algunos ejemplos de funciones de agregación. Algunos de ellos tendrán interesantes propiedades que permitirán ser utilizados con posterioridad en este trabajo.

Ejemplo 1.2.1. *Se describen a continuación algunos ejemplos especialmente interesantes y conocidos de funciones de agregación. En todos ellos se considera que* $x = (x_1,\ldots,x_n)$ *es un elemento cualquiera en* $[0,1]^n$.

- *Raíz de la media* r*-ésima:*

  $$M_{[r]}(x) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\Big)^{\frac{1}{r}}$$

  con $r \in \mathbb{R}$ *y* $r \neq 0$.

  Particularmente cuando $r = 1$ *la expresión que se obtiene es la media aritmética:*

  $$M(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- *Producto:*

  $$\mathcal{P}(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

- *Media geométrica:*

  $$G(x) = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}}$$

- *Media armónica:*

  $$H(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}} = n\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\Big)^{-1} \ \forall x \in [0,1]^n$$

Es importante destacar que si alguna de las componentes de $x \in [0,1]^n$ es nula, la media armónica no está definida.

- *Mediana:*

$$Med(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{(k)}) + x_{(k+1)}), & si\ n = 2k \\ x_{(k)} & si\ n = 2k-1 \end{cases}$$

donde $x_{(k)}$ representa la k-ésima componente mayor de x suponiendo que este está ordenado de manera creciente.

- *Mínimo:*

$$\text{mín}(x) = \text{mín}\{x_1, ..., x_n\}$$

- *Máximo:*

$$\text{máx}(x) = \text{máx}\{x_1, ..., x_n\}$$

Pasamos a estudiar si los ejemplos de funciones de agregación que hemos desarrollado cumplen las propiedades introducidas en las definiciones 1.2.2 y 1.2.3.

Proposición 1.2.1. *La función de agregación raíz de la media r-ésima es simétrica y one-strict.*

Demostración. La simetría es clara por la construcción. Como se puede observar en la expresión

$$M_{[r]}(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

el valor de la función de agregación es independiente del orden de las componentes $x_1, ..., x_n$ de x.

Pasamos a demostrar la propiedad one-strict. Sea $x \in [0,1]^n$, se tiene que:

$$M_{[r]}(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^r = n$$

Dado que $x_i \in [0,1]\ \forall i \in \{1,...,n\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^r = n \Longleftrightarrow x_1 = ... = x_n = 1$$

$\square$

Proposición 1.2.2. *La función de agregación producto es simétrica y one-strict.*

Demostración. De nuevo la simetría es directa por definición.

Respecto a la propiedad one-strict, sea $x \in [0,1]^n$, se tiene que:

$$\mathcal{P}(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \Longleftrightarrow x_i = 1\ \forall i \in \{1,...,n\}$$

$\square$

Proposición 1.2.3. *La función de agregación media geométrica es simétrica y one-strict.*

Demostración. La simetría vuelve a ser inmediata por definición.

En el caso de la propiedad one-strict:

$$G(x) = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}} = 1 \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i = 1^n$$

La demostración es directa por la proposición 1.2.2. $\square$

Proposición 1.2.4. *La función de agregación media armónica es simétrica y one-strict.*

Demostración. La simetría, al igual que ocurría en los casos anteriores, se deduce directamente de la definición.

Respecto a la propiedad one-strict,

$$H(x) = n\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Big)^{-1} = 1 \Longleftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Big)^{-1} = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n$$

Dado que $x_i \in [0,1]\ \forall i \in \{1,...,n\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n \Longleftrightarrow x_1 = ... = x_n = 1$$

□

Proposición 1.2.5. *La función de agregación mediana es simétrica, pero no es one-strict.*

Demostración. La simetría se cumple por la propia definición, puesto que la mediana representa el valor de posición central en un conjunto de datos ordenados, en nuestro caso $x_1, ...x_n$ para un $x \in [0,1]^n$ cualquiera. Por tanto $Me(x)$ es independiente del orden en que estén situados los distintos x_i $\forall i \in \{1, ..., n\}$ en la tupla.

Para demostrar que no cumple la propiedad de one-strict emplearemos un contraejemplo:

Sea $x = (0, 1, 1)$, tupla en la que los valores ya están ordenados de menor a mayor. En este caso $n = 2k - 1 = 3$, por lo que $k = 2$. Atendiendo a la expresión de la mediana se tiene que:

$$Me(x) = x_2 = 1$$

pero $x_1 \neq 1$. □

Proposición 1.2.6. *La función de agregación mínimo es simétrica y one-strict.*

Demostración. La simetría es directa por la definición de esta función de agregación.

Vamos a demostrar ahora la propiedad one-strict:

$$\text{mín}(x) = 1 \iff \text{mín}\{x_1, ..., x_n\} = 1 \iff x_1 = ... = x_n = 1$$

□

Proposición 1.2.7. *La función de agregación máximo es simétrica, pero no es one-strict.*

Demostración. La simetría es directa por la definición de esta función de agregación.

Para demostrar que no se cumple que sea one-strict es suficiente con considerar el siguiente contraejemplo: Sea $x = (1, 1, .., 0)$ es claro que $max(x) = 1$ a pesar de que $x_n = 0$. □

Existen varias semánticas de agregación y las clases principales se determinan de acuerdo con esas semánticas. En nuestro trabajo nos centraremos en las funciones de agregación promedio.

Definición 1.2.5. *([4]) Una función de agregación $\mathcal{A}$ se dice que es de tipo promedio si $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in [0,1]^n$ se cumple que:*

$$min(x_1, ..x_n) \leq \mathcal{A}(x_1, ..., x_n) \leq max(x_1, ..., x_n)$$

Definición 1.2.6. *Una función de agregación $\mathcal{A}$ se dice que es idempotente si para cualquier $t \in [0,1]$ se tiene que $\mathcal{A}(t, ..., t) = t$.*

Corolario 1.2.8. *([4]) Un función de agregación es de promedio si, y sólo si, es idempotente.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es una función promedio, se tiene que $\text{mín}(x) \leq \mathcal{A}(x) \leq \text{máx}(x)$ para todo $x \in [0,1]^n$ y, en particular, para $(t, \ldots, t)$ dado un $t \in [0,1]$ cualquiera, con lo que $\text{mín}(t, \ldots, t) \leq \mathcal{A}(t, \ldots, t) \leq \text{máx}(t, \ldots, t)$. Así pues, $\mathcal{A}(t, ..., t) = t$ y se ha probado que $\mathcal{A}$ es idempotente.

Recíprocamente, si $\mathcal{A}$ es una función de agregación idempotente, para un $x \in I^n$ cualquiera, si denotaremos como $p = \text{mín}(x)$, $q = \text{máx}(x)$, por la monotonía, $\mathcal{A}(p, ...p) \leq \mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}(q, ..., q)$. Aplicando la idempotencia se tiene además que $\mathcal{A}(p, ...p) = p = \text{mín}(x)$ y $\mathcal{A}(q, ..., q) = q$, con lo que hemos probado que $min(x) \leq \mathcal{A}(x) \leq max(x)$, es decir, que $\mathcal{A}$ es una función promedio. □

Finalmente se van a caracterizar las funciones de agregación que son de promedio. Según el resultado anterior serán aquellas idempotentes.

Proposición 1.2.9. *La raíz de media r-ésima, geométrica y armónica, la mediana, el mínimo y el máximo son funciones de agregación idempotentes. Sin embargo, el producto no lo es.*

Demostración. Por definición, se tiene que $M_{[r]}(t, \ldots, t) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^r\right)^{1/r} = (t^r)^{1/r} = t$, $G(t, \ldots, t) = \left(\prod_{i=1}^{n} t\right)^{1/n} = (t^n)^{1/n} = t$, $H(t, \ldots, t) = n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t}\right)^{-1} = n\left(\frac{n}{t}\right)^{-1} = t$,

$Med((t,\dots,t) = t$ si n es impar y $Med(t,\dots,t) = \frac{t+t}{2} = t$ si n es par, $\text{mín}(t,\dots,t) = \text{máx}(t,\dots,t) = t$. Con lo cual la idempotencia de las funciones de agregación consideradas queda probada.

Sin embargo se tiene que $\mathcal{P}(t,\dots,t) = t^n < t$ para todo $t \in [0,1)$. $\square$

Los resultados anteriores se resumen en la tabla 1.1.

	Simétrica	One-strict	Idempotente	Promedio
Raíz de la media r-ésima ($M_{[r]}$)	✓	✓	✓	✓
Producto ($\mathcal{P}$)	✓	✓	✗	✗
Media geométrica (G)	✓	✓	✓	✓
Media armónica (H)	✓	✓	✓	✓
Mediana (Med)	✓	✗	✓	✓
Mínimo (mín)	✓	✓	✓	✓
Máximo (máx)	✓	✗	✓	✓

Tabla 1.1: Propiedades de las diferentes funciones de agregación.

Un tipo particular de funciones de agregación se puede obtener a partir de las normas triangulares o t-normas.

Definición 1.2.7. *([21]) Dada una aplicación* $t : [0,1]^2 \to [0,1]$*, se dice que es una norma triangular o simplemente t-norma, si cumple las siguientes propiedades:*

- *Conmutativa:* $t(x,y) = t(y,x), \forall x,y \in X$*.*
- *Asociativa:* $t(x,t(y,z)) = (t(t(x,y),z), \forall x,y,z \in X$*.*
- *Monótona: si* $x \leq y$*, entonces* $t(x,z) \leq t(y,z), \forall z \in X$*.*
- *Elemento neutro:* $t(x,1) = x, \forall x \in X$*.*

Aplicando la monotonía y el elemento neutro, se tiene que para cualquier $x \in X$, $t(x,0) \leq t(1,0) = 0$, con lo que $t(x,0) = 0$. Así pues, en particular $t(1,1) = 1$ y $t(0,0) = 0$. Teniendo esto en cuenta, la monotonía y la asociatividad, es evidente que las t-normas permiten generar funciones de agregación simétricas.

Dos ejemplos interesantes de t-normas son el mínimo y el producto, de hecho el mínimo es la máxima t-norma. Así pues, toda t-norma t verifica que $t(x,y) \leq \text{mín}(x,y)$, con lo que $t(x, y) = 1$ si, y sólo si, $x = y = 1$, es decir, las t-normas son funciones de agregación one-strict, si bien no son todas idempotentes, puesto que como se observa en la tabla 1.1, el producto no lo es.

Otra consecuencia de la acotación superior de la familia de las t-normas es que la única t-norma que es una medida de promedio es el mínimo.

Capítulo 2

Grado de contenido y similitudes para intervalos

Aunque el objetivo final de este trabajo es definir medidas de embebimiento y similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados, dada la naturaleza de la función de pertenencia asociada a los mismos, se va a comenzar trabajando con estos conceptos para intervalos, es decir, en $L([0,1])$ en lugar de en $IVFS(X)$. Así pues, el estudio hecho en este capítulo, puede verse como la base del que se desarrollará en el capítulo posterior, puesto que trabajar con un intervalo puede interpretarse como trabajar con un subconjunto difuso intervalo-valorado en un referencial X de cardinal uno.

Antes de comenzar con el estudio propiamente dicho para intervalos, también conviene recordar que, como ya se comentó en el capítulo anterior, la relaciones de embebimiento y contenido entre conjuntos difusos intervalo-valorados, tienen una interpretación muy diferente. En el siguiente ejemplo se pone de nuevo de manifiesto este hecho, en el caso particular que nos va a ocupar en este capítulo en el que consideramos referenciales de cardinal uno.

Ejemplo 2.0.1. *Sea* $X = \{x\}$ *y sean* A, B *y* C *los conjuntos difusos intervalo-valorados definidos como* $A(x) = [0.3, 0.5]$, $B(x) = [0.1, 0.4]$ *y* $C(x) = [0.2, 0.6]$. *Si consideramos sobre* $L([0,1])$ *el orden reticular* $\preceq_{Lo}$, *se tiene que:*

- *A está embebido en C, pero no está contenido en C;*

- *B esta contenido en C pero no está embebido en C;*

- *A no está ni embebido ni contenido en B;*

- *B no está embebido en A, pero sí está contenido;*

- *C no está embebido ni contenido en A o en B.*

Estas relaciones entre los tres conjuntos pueden verse claramente en la figura 2.1.

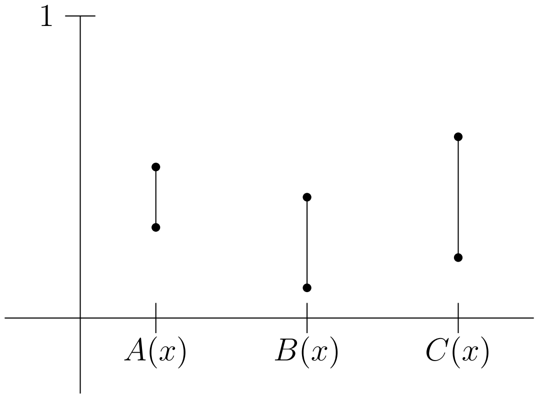


Figura 2.1: Diferencia entre embebimiento e inclusión.

El ejemplo anterior sirve además para poner de manifiesto que un conjunto está embebido en otro si el intervalo que determina su función de pertenencia está contenido, mientras que un conjunto está contenido en otro si el intervalo asociado es menor o igual que el otro respecto al orden considerado. Este punto es muy importante, puesto que podría dar lugar a confusión que el contenido entre intervalos da lugar a un embebimiento entre conjuntos, mientras que el contenido para conjuntos proviene de un intervalo menor que otro. Esquemáticamente esto aparece reflejado en la tabla 2.1.

$L([0,1])$	$IVFS(X)$
$\subseteq$	$\sqsubseteq$
$\preceq$	$\subseteq$

Tabla 2.1: Embebimiento, contenido y orden.

Así pues, si se pretende analizar las relaciones sobre $L([0,1])$ que luego nos permitirán estudiar el embebemiento y contenido en $IVFS(X)$, tenemos que analizar, respectivamente, las relaciones de contenido y ser menor o igual que entre intervalos. La definición de ambas fue establecida en el capítulo anterior y recordada en el ejemplo 2.0.1. En el mismo vimos que unos pares de intervalos las verifican y otros no. Sin embargo, también es evidente a partir del mismo que si bien una relación puede no verificarse, por ejemplo $B(x) = [0.1, 0.4]$ no está contenido en $C(x) = [0.2, 0.6]$, sí parece estar más contenido que el intervalo $[0.5, 0.9]$. Lo mismo podría observase respecto a la relación ser menor o igual. Por lo tanto puede hablarse de grados de contenido y grados de ser menor o igual para intervalos y a este objetivo dedicaremos este capítulo. De hecho, como se verá en la sección siguiente, las medidas de estos grados proceden de una definición común, en la que solo cambia la relación de orden considerada en $L([0,1])$.

2.1 Grado de orden entre dos intervalos

Como se acaba de comentar, dada una relación de orden sobre $L([0,1])$, unos pares de intervalos estarán claramente relacionados mediante la misma, otros no y otros lo estarán en cierto grado. En esta sección se introducen los axiomas que caracterizan una medida del grado de orden entre dos intervalos.

Definición 2.1.1. *Sea $L([0,1])$ el conjunto de intervalos cerrados en $[0,1]$ y sea $\leqslant$ un orden cualquiera sobre $L([0,1])$. La función $O : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ es una medida del grado del orden $\leqslant$ en $L([0,1])$, si se cumplen las siguientes propiedades:*

A1: $O(a,b) = 1 \Longleftrightarrow a \leqslant b$.

A2: Si $a \nleqslant b$ y $a \cap b = \emptyset$, entonces se cumple que $O(a,b) = 0$.

A3: Si $b \leqslant c$, entonces se cumple que $O(a,b) \leq O(a,c)$, $\forall a \in L([0,1])$.

A4: Si $a \leqslant b \leqslant c$, entonces se cumple que $O(c,a) \leq \min\{O(b,a), O(c,b)\}$.

Nótese que se ha utilizado el símbolo $\leqslant$ para el orden que se esté considerando en $L([0,1])$ y el símbolo $\leq$ para el orden habitual en la recta real.

Según el orden considerado, es evidente que se estarían midiendo distintos conceptos. En concreto:

- Si $\leqslant$ es $\subseteq$, la aplicación O mide el grado de contenido de un intervalo en otro o grado de embebimiento (ver [6]). En este caso, en el axioma *A2* es suficiente con que se cumpla $a \cap b = \emptyset$.
- En los casos en que $\leqslant$ sea $\preceq_{Lo}$, la función O medirá el grado en que un intervalo toma valores menores que otro con respecto al orden correspondiente. Lo mismo ocurrirá si el orden considerado es $\preceq_{lex1}$ ó $\preceq_{lex2}$.

2.2 Medidas del grado de contenido entre intervalos

Se va a estudiar en primer lugar el caso en el que el orden considerado es el contenido, viendo distintas formas de generar este tipo de medidas. En lo que sigue se considerará la notación E para representar a la función O cuando el orden considerado sea $\subseteq$. Estos resultados son análogos a los obtenidos en [6] de forma particular, sin pasar por las medidas generales de grado de orden.

En primer lugar, se van a obtener algunas propiedades interesantes para este tipo de medidas.

Proposición 2.2.1. *Sean $a, b \in L([0,1])$. Se tiene que:*

1. $E(a \cup b, a \cap b) \leq \text{mín}\{E(a, a \cap b), E(b, a \cap b)\}$.
2. $E(a \cup b, a \cap b) \leq \text{mín}\{E(a \cup b, a), E(a \cup b, b)\}$.
3. $E(a \cap b, a) = E(a \cap b, b) = E(a, a \cup b) = E(b, a \cup b) = 1$.

Demostración. Sean $a, b \in L([0,1])$ cualesquiera.

1. Es claro que $a \cap b \subseteq a \subseteq a \cup b$ y $a \cap b \subseteq b \subseteq a \cup b$. Aplicando el axioma *A4* de la definición 2.1.1 tenemos que : $E(a \cup b, a \cap b) \leq E(a, a \cap b)$ y $E(a \cup b, a \cap b) \leq E(b, a \cap b)$.

2. Teniendo en cuenta que $a \cap b \subseteq a$ y $a \cap b \subseteq b$, se aplica el axioma *A3* de la definición 2.1.1 y se obtiene que $E(a \cup b, a \cap b) \leq E(a \cup b, a)$ y $E(a \cup b, a \cap b) \leq E(a \cup b, b)$.

3. Considerando de nuevo que $a \cap b \subseteq a \subseteq a \cup b$ y $a \cap b \subseteq b \subseteq a \cup b$, esto es inmediato del axioma *A1* de la definición 2.1.1.

□

Proposición 2.2.2. *Para cualesquiera* $a, b, c \in L([0,1])$ *se tiene que* $E(a, b \cap c) \leq \text{mín}\{E(a,b), E(a,c)\}$.

Demostración. Dado que $b \cap c \subseteq b$ y $b \cap c \subseteq c$, deducimos del axioma *A3* de la definición 2.1.1 que $E(a, b \cap c) \leq E(a,b)$ y $E(a, b \cap c) \leq E(a,c)$. □

Una vez estudiadas estas propiedades generales para las medidas del grado de inclusión para intervalos, se pasa al estudio algunos métodos de construcción. El primero se basa en la amplitud de los intervalos y el segundo en las funciones de implicación.

2.2.1 Medidas basadas en la amplitud del intervalo

En esta subsección, se propone un método de construcción de medidas del grado de inclusión para intervalos basado en medir y comparar el ancho de los intervalos relacionados, es decir, la amplitud de los intervalos. Se comenzará con la familia más general.

Proposición 2.2.3. *Sea* $\phi : \Delta \to [0,1]$ *una aplicación* $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1] | x \leq y, x \leq z\}$ *tal que*

1. $\phi(0, y, z) = 0$

2. $\phi(x,y,z) = 1 \Longleftrightarrow x = y$.

3. ϕ *es creciente en la primera y tercera componente.*

4. ϕ *es decreciente en segunda componente.*

La aplicación E_ϕ definida por:

$$E_\phi(a,b) = \begin{cases} 1 & \textit{si } w(a) = 0, a \in b \\ 0 & \textit{si } w(a) = 0, a \notin b \\ \phi(w(a \cap b), w(a), w(b)) & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{2.1}$$

es una medida del grado de inclusión para intervalos, con $w(a) = \bar{a} - \underline{a}$.

Demostración. Es claro que E_ϕ está bien definido ya que toma valores entre 0 y 1. Se procede a demostrar que E_ϕ cumple los cuatro axiomas de la definición 2.1.1 con respecto al orden $\subseteq$.

A1: Hay diferentes casos según la naturaleza de a.

- Si $w(a) = 0$, $E_\phi(a,b) = 1 \iff a \in b$ o, lo que es lo mismo, si $a \subseteq b$.
- Si $w(a) \neq 0$, $E_\phi(a,b) = \phi(w(a \cap b), w(a), w(b)) = 1 \iff w(a \cap b) = w(a)$ por la segunda propiedad de ϕ. Puesto que $a \cap b \subseteq a$, la única posibilidad de tener el mismo ancho es que $a \cap b = a$ y esto es equivalente a decir que $a \subseteq b$.

A2: Si $a \cap b = \emptyset$, podemos considerar de nuevo dos casos:

- Si $w(a) = 0$, se tiene que $E_\phi(a,b) = 0 \iff a \notin b$, lo que es equivalente a $a \cap b = \emptyset$.
- Si $w(a) \neq 0$, entonces $E_\phi(a,b) = \emptyset(0, w(a), w(b)) = 0$ por la primera propiedad de ϕ.

A3: Si $b \subseteq c$, entonces se pueden considerar de nuevo dos casos:

- Si $w(a) = 0$ y $E_\phi(a,b) = 0$, entonces la demostración de este axioma es trivial. De lo contrario $E_\phi(a,b) = 1$ y $a \in b$. De este modo, $a \in c$ y por lo tanto $E_\phi(a,c) = 1$.

- Si $w(a) \neq 0$, dado que ϕ es creciente en la primera y tercera componente y dado que $w(a \cap b) \leq w(a \cap c)$ y $w(b) \leq w(c)$, entonces $E_\phi(a,b) = \phi(w(a \cap b), w(a), w(b)) \leq \phi(w(a \cap c), w(a), w(c)) = E_\phi(a,c)$.

A4: Sean $a, b, c \in L([0,1])$ tales que $a \subseteq b \subseteq c$.

- Si $w(c) = 0$, entonces $a = b = c$ y, por tanto, $E_\phi(c,a) = E_\phi(b,a) = E_\phi(c,b) = 1$.
- Si $w(c) \neq 0$ y $w(a) = 0$, se tiene que:

$$E_\phi(c,a) = \phi(w(c \cap a), w(c), w(a)) = \phi(w(a), w(c), w(a)) = \phi(0, w(c), 0)$$

por la primera propiedad de ϕ sabemos que $\phi(0, w(c), 0) = 0$, con lo que $E_\phi(c,a) \leq E_\phi(c,b)$ y $E_\phi(c,a) \leq E_\phi(b,a)$.

- Si $w(c) \neq 0$ y $w(a) \neq 0$, entonces también se tiene que $w(b) \neq 0$. Además, sabemos que $w(a) \leq w(b) \leq w(c)$. Por otro lado,

$$E_\phi(c,a) = \phi(w(c \cap a), w(c), w(a)) = \phi(w(a), w(c), w(a))$$

$$E_\phi(b,a) = \phi(w(b \cap a), w(b), w(a)) = \phi(w(a), w(b), w(a))$$

$$E_\phi(c,b) = \phi(w(c \cap b), w(c), w(b)) = \phi(w(b), w(c), w(b))$$

Aplicando el crecimiento de ϕ en la primera y tercera componente se tiene que $E_\phi(c,a) \leq E_\phi(c,b)$ y aplicando su decrecimiento en la segunda componente, se tiene que $E_\phi(c,a) \leq E_\phi(b,a)$.

$\square$

Como caso particular del resultado anterior se puede definir una medida del grado de contenido que es muy intuitiva y natural, estando basada solo en la proporción de amplitud de la zona común frente al intervalo inicial.

Corolario 2.2.4. *La función* $E_w : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ *definida como:*

$$E_w(a,b) = \begin{cases} 1 & si\ w(a){=}0, a \cap b \neq \emptyset \\ 0 & si\ w(a){=}0, a \cap b = \emptyset \\ \frac{w(a \cap b)}{w(a)} & si\ w(a) \neq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

es una medida del grado de inclusión entre intervalos.

Demostración. Este corolario es una consecuencia inmediata de la proposición 2.2.3, dado que $E_w = E_\phi$ con $\phi(x,y,z) = \frac{x}{y}$.

□

Se puede considerar esta intuitiva medida para comprobar como realmente este tipo de medidas cuantifica el grado de contenido, cuando este no es total, tal como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. *Si consideramos de nuevo los intervalos del ejemplo 2.0.1 y utilizamos la notación* $a = [0.3, 0.5]$*,* $b = [0.1, 0.4]$ *y* $c = [0.2, 0.6]$*, se tiene que:*

$$\begin{aligned} E_w(a,b) &= 1/2, & E_w(a,c) &= 1 \\ E_w(b,a) &= 1/3 & E_w(b,c) &= 2/3 \\ E_w(c,a) &= 1/2 & E_w(c,b) &= 1/2 \end{aligned}$$

donde se puede ver, por ejemplo, que b no está contenido ni en a ni en c, pero está contenido en mayor grado en c, lo cual es lógico a la vista de la figura 2.1.

Además, si consideramos por ejemplo el intervalo $d = [0.7, 1]$*, se tiene que* $E_w(a,d) = E_w(d,a) = E_w(b,d) = E_w(d,b) = E_w(c,d) = E_w(d,c) = 0$*, puesto que ninguno de los tres intervalos iniciales tiene nada en común con d.*

Otro ejemplo derivado de la misma proposición, que además permitirá generar la medida mínima, puede verse en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5. *Dado $\lambda \in [0,1)$, la función $E_\lambda : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ definida como:*

$$E_\lambda(a,b) = \begin{cases} 1 & si\ a \subseteq b \\ 0 & si\ w(a \cap b) = 0 \\ \lambda & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.3}$$

es una medida del grado de inclusión entre intervalos.

Demostración. De nuevo es consecuencia de la proposición 2.2.3, sin más que considerar la aplicación ϕ definida como:

$$\phi(x,y,z) = \begin{cases} 1 & si\ x = y \\ 0 & si\ x = 0 \\ \lambda & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.4}$$

Con dicha función se tiene que

$$E_\phi(a,b) = \begin{cases} 1 & si\ w(a) = 0, a \cap b \neq \emptyset \\ 0 & si\ w(a) = 0, a \cap b = \emptyset \\ \phi(w(a \cap b), w(a), w(b)) & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Ahora bien, puesto que

$$\phi(w(a \cap b), w(a), w(b)) = \begin{cases} 1 & si\ w(a \cap b) = w(a) \\ 0 & si\ w(a \cap b) = 0 \\ \lambda & en\ otro\ caso \end{cases}$$

se tiene que

$$E_\phi(a,b) = \begin{cases} 1 & si\ w(a) = 0, a \cap b \neq \emptyset \text{ ó } a \subseteq b \\ 0 & si\ w(a) = 0, a \cap b = \emptyset \text{ ó } w(a \cap b) = 0 \\ \lambda & en\ otro\ caso \end{cases}$$

pero dicha función E_ϕ se ve fácilmente que coincide con E_λ.

□

A pesar de que λ no puede ser igual a 1 (en ese caso, no se cumpliría el axioma *A1* de la proposición 2.2.3), sí que se ha considerado que puede tomar el valor 0. De hecho, en ese caso se obtendría un límite inferior para la familia de medidas del grado de inclusión para intervalos como establece la siguiente proposición.

Proposición 2.2.6. *Para cualquier medida del grado de inclusión E se cumple que $E_0 \leq E$.*

Demostración. Si $E_0(a,b) = 0$, la prueba es inmediata. De lo contrario, se tiene que $a \subseteq b$ y $E_0(a,b) = 1$. Pero como E es una medida del grado de inclusión para intervalos, cumple el axioma *A1* de la definición 2.1.1 con respecto al orden $\subseteq$, con lo que $E(a,b) = 1$. $\square$

2.2.2 Medidas basadas en funciones de implicación

En lo que sigue se introducirá otro método de construcción de medidas del grado de contenido para intervalos empleando funciones de implicación (ver [25]). Para ello es importante definir en primer lugar un método general y luego considerar la familia de funciones de implicación que verifican ciertas propiedades.

Proposición 2.2.7. *Sea $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ una función que verifica las siguientes propiedades:*

- *F1. F es decreciente en la primera componente*
- *F2. F es creciente en la segunda componente*
- *F3. $F(x,y) = 1 \Longleftrightarrow x \leq y$*

la aplicación $E_F : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ definida como:

$$E_F(a,b) = \begin{cases} 0 & si\ a \cap b = \emptyset \\ min(F(\underline{b},\underline{a}), F(\bar{a},\bar{b})) & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.5}$$

para cualesquiera $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ *y* $b = [\underline{b}, \overline{b}]$ *en* $L([0,1])$*, es una medida del grado de contenido para intervalos.*

Demostración. E_F está bien definida puesto que F toma valores en el intervalo $[0,1]$. Se procede a comprobar los cuatro axiomas de la definición 2.1.1 en el caso particular del orden $\subseteq$.

A1: Aplicando la propiedad $F3$ de F se tiene que: $E_F(a,b) = 1 \Longleftrightarrow F(\underline{b}, \underline{a})$ y $F(\bar{a}, \bar{b}) = 1 \Longleftrightarrow \underline{b} \leq \underline{a}$ y $\bar{a} \leq \bar{b} \Longleftrightarrow a \subseteq b$.

A2: Si $a \cap b = \emptyset$, por definición se tiene que $E_F(a,b) = 0$.

A3: Si $b \subseteq c$, se pueden considerar dos casos:

- Si $a \cap b = \emptyset$, entonces $E_F(a,b) = 0 \leq E_F(a,c)$.
- Si $a \cap b \neq \emptyset$, entonces $a \cap c = \emptyset$. Por otro lado, como $\underline{c} \leq \underline{b}$ y $\bar{b} \leq \bar{c}$ y F es decreciente en la primera componente y creciente en la segunda, tenemos $F(\underline{b}, \underline{a}) \leq F(\underline{c}, \underline{a})$ y $F(\underline{a}, \underline{b}) \leq F(\underline{a}, \underline{c})$, por lo que $E_F(a,b) \leq E_F(a,c)$.

A4: Si $a \subseteq b \subseteq c$, entonces se tiene que $a \cap b = a \cap c = a \neq \emptyset$ y $b \cap c = b \neq \emptyset$, con lo que $E_F(c,a) = \text{mín}\{F(\underline{a}, \underline{c}), F(\bar{c}, \bar{a})\}$, $E_F(b,a) = \text{mín}\{F(\underline{a}, \underline{b}), F(\bar{b}, \bar{a})\}$ y $E_F(c,b) = \text{mín}\{F(\underline{b}, \underline{c}), F(\bar{c}, \bar{b})\}$.

Por otro lado se tiene que $\underline{c} \leq \underline{b} \leq \underline{a} \leq \bar{a} \leq \bar{b} \leq \bar{c}$ y puesto que F es decreciente en la primera componente y creciente en la segunda, se cumple que

$$F(\underline{a}, \underline{c}) \leq F(\underline{a}, \underline{b}) \text{ y } F(\bar{c}, \bar{a}) \leq F(\bar{b}, \bar{a})$$
$$F(\underline{a}, \underline{c}) \leq F(\underline{b}, \underline{c}) \text{ y } F(\bar{c}, \bar{a}) \leq F(\bar{c}, \bar{b})$$

con lo que $E_F(c,a) \leq E_F(b,a)$ y $E_F(c,a) \leq E_F(c,b)$.

□

Por tanto, se acaba de comprobar que se puede emplear un tipo particular de funciones para obtener medidas del grado de contenido para intervalos. Un caso especialmente interesante de familia que cumple este tipo de propiedades es el de la función de implicación, y en concreto aquellas que cumplen además una propiedad de ordenación.

Definición 2.2.1. *[15] Una función de implicación, o simplemente implicación, es una función* $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *que verifica:*

I1. I *es decreciente en la primera componente.*

I2. I *es creciente en la segunda componente.*

I3. $I(0,0) = I(1,1) = 1$ *e* $I(1,0) = 0$.

En ocasiones, la propiedad *I3* se reemplaza por las condiciones

$$I(0,x) = 1 \qquad I(x,1) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

Se pueden requerir algunas propiedades adicionales. En particular vamos a tratar con funciones de implicación que cumplen:

I4. $I(x,y) = 1 \Longleftrightarrow x \leq y$.

Esta suele llamarse propiedad de ordenamiento u ordenación y se cumple con muchos ejemplos de funciones de implicación clásicas. Además, es evidente que cualquier función de implicación que cumpla la propiedad *I4* verifica las condiciones requeridas a la función F en la proposición 2.2.7. Sin embargo, no toda función de implicación cumple dicha propiedad, tal como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.2. *Algunos ejemplos interesantes de funciones de implicación son:*

- *Las funciones de implicación más pequeña y más grande vienen dadas, respectivamente, por:*

$$I_{\perp} = \begin{cases} 1 & \text{si x = 0 ó y = 1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$I_{\top} = \begin{cases} 0 & \text{si x} = 1 \text{ ó y } = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- *La función de implicación de Lukasiewicz:*

$$I_{LK} = min(1, 1 - x + y)$$

Vemos directamente que las funciones de implicación $I_{\perp}$ e $I_{\top}$ no cumplen la propiedad de ordenamiento, mientras que I_{LK} sí que cumple la propiedad I4.

A continuación se va a obtener un método de construcción de funciones de implicación que satisfacen la propiedad *I4*.

Proposición 2.2.8. *Sea $\Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2 | x > y\}$. Sea $f : \Delta \rightarrow [0, 1)$ una función que cumple*

- *f es decreciente en la primera componente,*
- *f es creciente en la segunda componente,*
- *$f(1, 0) = 0$,*

entonces la función $I_f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$I_f(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \leq y \\ f(x, y) & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de implicación que cumple la propiedad I4.

Demostración. Es inmediato que I_f está bien definida, tomando valores en el intervalo $[0, 1]$ y cumple los axiomas *I1*, *I2* y la propiedad *I4*. Para el axioma *I3* se tiene que $I_f(0, 0) = I_f(1, 1) = 1$ y $I_f(1, 0) = f(1, 0) = 0$ por definición. □

Como ya se ha comentado, cualquier función de implicación que verifica la propiedad $I4$ puede ser considerada en la proposición 2.2.7, con lo que se obtiene el siguiente método de generación de medidas del grado de contenido para intervalos a partir de funciones de implicación.

Corolario 2.2.9. *Sea I una función de implicación que cumple la propiedad I4, entonces la aplicación $E_I : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ definida como:*

$$E_I(a,b) = \begin{cases} 0 & si\ a\ \cap b = \emptyset \\ min(I(\underline{b},\underline{a}), I(\bar{a},\bar{b})) & en\ otro\ caso \end{cases}$$

es una medida del grado de contenido para intervalos.

En el caso particular que estas funciones de implicación sean generadas como en la proposición 2.2.8, es posible establecer un orden entre las medidas generadas, como puede verse a continuación.

Corolario 2.2.10. *Sean f_1 y f_2 dos funciones de Δ en $[0,1)$ decrecientes en la primera componente, crecientes en la segunda componente, tomando el valor 0 en el punto $(1,0)$ y tales que $f_1 \leq f_2$, entonces $I_{f_1} \leq I_{f_2}$ y $E_{I_{f_1}} \leq E_{I_{f_2}}$.*

Demostración. Si $f_1 \leq f_2$, es trivial de la proposición 2.2.8 que $I_{f_1} \leq I_{f_2}$. En cuanto a las medidas del grado de contenido para intervalos asociadas aplicando el corolario 2.2.9, se tiene que:

- Si $a \cap b = \emptyset$, entonces $E_{I_{f_1}}(a,b) = E_{I_{f_2}}(a,b) = 0$ por definición.
- En el caso $a \cap b \neq \emptyset$, como $I_{f_1}(\underline{b},\underline{a}) \leq I_{f_2}(\underline{b},\underline{a})$ y $I_{f_1}(\bar{a},\bar{b}) \leq I_{f_2}(\bar{a},\bar{b})$, entonces se tiene que $E_{I_{f_1}}(a,b) \leq E_{I_{f_2}}(a,b)$.

$\square$

En la proposición 2.2.8 vimos una familia genérica de funciones de implicación que cumplen la propiedad *I4*. Como consecuencia, se pueden obtener algunas funciones de implicación conocidas que cumplen la propiedad *I4*, así como sus medidas del grado de contenido asociadas. Hemos considerado la notación introducida en ([2]) para nombrar las funciones de implicación.

- Para $f_{LK}(x,y) = 1 - x + y$, se obtiene la función de implicación Lukasiewicz:

$$I_{LK}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ 1 - x + y & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.6}$$

  La correspondiente medida del grado de contenido para intervalos de Lukasiewicz es:

$$E_{LK}(a,b) = \begin{cases} 0 & si\ a \cap b = \emptyset \\ min(1 - \underline{b} + \underline{a}, 1 - \bar{a} + \bar{b}, 1) & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.7}$$

  ya que $min(I_{LK}(\underline{b}, \underline{a}), I_{LK}(\bar{a}, \bar{b})) = min(1 - \underline{b} + \underline{a}, 1 - \bar{a} + \bar{b}, 1)$

- Para $f_{FD}(x,y) = max(1 - x, y)$ se obtiene la función de implicación de Fodor:

$$I_{FD}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ max(1 - x, y) & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.8}$$

  La correspondiente medida del grado de contenido para intervalos de Fodor es:

$$E_{FD}(a,b) = \begin{cases} 0 & si\ a \cap b = \emptyset \\ 1 & \text{si } a \subseteq b \\ max(1 - \bar{a}, \bar{b}) & si\ \underline{b} \leq \underline{a} \leq \bar{b} \leq \bar{a} \\ max(1 - \underline{b}, \underline{a}) & si\ \underline{a} \leq \underline{b} \leq \bar{a} \leq \bar{b} \\ min\{max(1 - \bar{a}, \bar{b}), max(1 - \underline{b}, \underline{a})\} & si\ b \subseteq a, a \neq b \end{cases} \tag{2.9}$$

- Para $f_{GD}(x,y) = y$, se obtiene la función de implicación Gödel:

$$I_{GD}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ y & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.10}$$

La correspondiente medida del grado de contenido para intervalos de Gödel es:

$$E_{GD}(a,b)=\begin{cases} 0 & si\ a\cap b=\emptyset \\ 1 & \text{si } a\subseteq b \\ \bar{b} & si\ \underline{b}\leq\underline{a}\leq\bar{b}\leq\bar{a} \\ \underline{a} & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.11}$$

- Para $f_{GG}(x,y)=y/x$, se obtiene la función de implicación de Goguen:

$$I_{GG}(x,y)=\begin{cases} 1 & si\ x\leq y \\ y/x & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.12}$$

La correspondiente medida del grado de contenido para intervalos de Goguen es:

$$E_{GG}(a,b)=\begin{cases} 0 & si\ a\cap b=\emptyset \\ 1 & \text{si } a\subseteq b \\ \bar{b}/\bar{a} & \text{si } a\cap b\neq\emptyset, \underline{b}=0 \\ \text{mín}(\bar{b}/\bar{a},\underline{a}/\underline{b}) & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.13}$$

- Para $f_{RS}(x,y)=0$, se obtiene la función de implicación de Rescher:

$$I_{RS}(x,y)=\begin{cases} 1 & si\ x\leq y \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{2.14}$$

y en consecuencia, la medida del grado de contenido para intervalos de Rescher es:

$$E_{RS}(a,b)=\begin{cases} 1 & si\ a\subseteq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.15}$$

Como consecuencia del corolario 2.2.10, es posible establecer un orden entre las diferentes medidas que acabamos de introducir.

Proposición 2.2.11. *Se verifica que* $E_{RS}\leq E_{GD}\leq E_{FD}\leq E_{LK}$ *y* $E_{RS}\leq E_{GD}\leq E_{GG}\leq$

E_{LK}.

Demostración. Esto es consecuencia de las relaciones existentes entre las funciones empleadas para generar cada uno de estas medidas y aplicar el corolario 2.2.10. De este modo $\forall(x, y) \in \Delta$, es claro que:

$$f_{RS}(x, y) = 0 \leq y = f_{GD}(x, y),$$

$$f_{GD}(x, y) = y \leq max(1 - x, y) = f_{FD}(x, y)$$

y

$$f_{FD}(x, y) = max(1 - x, y) \leq 1 - x + y = f_{LK}(x, y)$$

Además, se tiene que:

$$f_{GD}(x, y) = y \leq y/x = f_{GG}(x, y)$$

ya que $0 \leq y < x \leq 1$ y entonces $1/x \geq 1$. Por otro lado, sabemos que $x > y$ y $1 - x \geq 0$. De este modo, $y(1-x) \leq x(1-x)$ y en consecuencia $y \leq x(1-x+y)$ lo que es equivalente a $y/x \leq 1 - x + y$, esto es,

$$f_{GG}(x, y) \leq f_{LK}(x, y), \quad \forall(x, y) \in \Delta.$$

Además, sabemos que no existe una relación de orden entre E_{GG} y E_{FD} ya que,por ejemplo,

$$E_{GG}([0.1, 1], [0.5, 1]) = \min(1, 0.1/0.5) = 0.2$$

$$E_{FD}([0.1, 1], [0.5, 1]) = \min(\max(0, 1), \max(0.5, 0.1)) = 0.5$$

pero

$$E_{GG}([0.3, 1], [0.5, 1]) = \min(1, 0.3/0.5) = 0.6$$

$$E_{FD}([0.3, 1], [0.5, 1]) = \min(\max(0, 1), \max(0.5, 0.3)) = 0.5$$

$\square$

El resultado anterior aparece esquematizado en la figura 2.2.

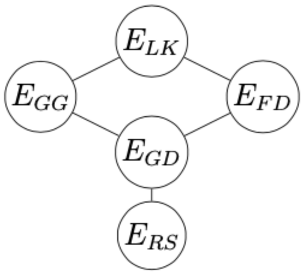


Figura 2.2: Orden entre los distintos embeddings basados en implicaciones.

2.3 Medidas de similitud para intervalos

Estas medidas intentan cuantificar el grado de solapamiento o intersección entre los intervalos, lo que refleja su grado de similitud. Entre las medidas de similitud más comunes para intervalos se encuentran el índice de Jaccard [17] y el índice de Dice [13]. Cada una de estas medidas tiene sus propias ventajas y desventajas, y la elección de una medida en particular dependerá del contexto y del problema específico que se esté tratando de resolver. En general, estas medidas de similitud son herramientas importantes para la toma de decisiones y la resolución de problemas en una variedad de campos.

Definición 2.3.1. *([10, 19]) La función* $S : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ *es una medida de similitud para intervalos si* $\forall a, b, c \in L([0,1])$ *cumple las siguientes propiedades:*

S1. $S(a,b) = S(b,a)$

S2. $S(a,b) = 1 \iff a = b$

S3. Si $a \subseteq b \subseteq c$ *entonces* $S(a,c) \leq \min\{S(a,b), S(b,c)\}$

En la sección 1.2 desarrollamos conceptos relevantes relacionados con las funciones de agregación. Hicimos especial hincapié en las propiedades de simetría y one-strict, introducidas en las definiciones 1.2.2 y 1.2.3, respectivamente y en ver ejemplos concretos de funciones de agregación que las cumplen. Además, en la sección 2.2 hemos propuesto diversas medidas del grado de contenido para intervalos. Vamos a unir estos dos conceptos para construir medidas de similitud entre intervalos.

Proposición 2.3.1. *Sea E una medida del grado de contenido y sea $\mathcal{A}$ una función de agregación simétrica y one-strict. Si se define*

$$S(a,b) = \mathcal{A}(E(a,b), E(b,a))$$

se cumple que es una medida de similitud para intervalos.

Demostración. Por la definición de $\mathcal{A}$ y E, es evidente que S está bien definida. Vamos a comprobar que se cumplen los 3 axiomas de la definición de función de similitud:

- S1: La simetría de S sale directa de la simetría de A.

- S2: $a = b \iff a \subseteq b$ y $b \subseteq a \iff E(a,b) = 1$ y $E(b,a) = 1$. Por otro lado, como $\mathcal{A}$ es one-strict y $S(a,b) = \mathcal{A}(E(a,b), E(b,a))$, se tiene que $S(a,b) = 1$ si, y sólo si, $E(a,b) = 1$ y $E(b,a) = 1$.

- S3: Si $a \subseteq b \subseteq c$, entonces $S(a,b) = \mathcal{A}(E(a,b), E(b,a)) = \mathcal{A}(1, E(b,a))$, por el axioma *A1* de la definición 2.1.1. De la misma forma se obtiene que $S(a,c) = \mathcal{A}(1, E(c,a))$ y que $S(b,c) = \mathcal{A}(1, E(c,b))$.

  Como $E(c,a) \leq E(b,a)$, por el axioma *A4* de de la definición 2.1.1 y $\mathcal{A}$ es creciente, es evidente que $S(a,c) \leq S(a,b)$.

  Por otro lado, por el axioma *A3* de la definición 2.1.1, tenemos que $E(c,a) \leq E(c,b)$, con lo que, aplicando de nuevo el crecimiento de A (es decir, la propiedad *ii.* de la definición 1.2.1), obtenemos que $S(a,c) = \mathcal{A}(1, E(c,a)) \leq \mathcal{A}(1, E(c,b)) = S(b,c)$.

□

Si este resultado se verifica en general, más en concreto será cierto para la funciones de promedio.

Corolario 2.3.2. *Sea E una medida del grado de inclusión y sea $\mathcal{A}$ una función de promedio simétrica y one-strict. Si se define $S(a,b) = \mathcal{A}(E(a,b), E(b,a))$ se cumple que es una medida de similitud para intervalos.*

Demostración. Teniendo en cuenta que cualquier medida de promedio en particular es una función de agregación, la demostración se deduce de la proposición 2.3.1. □

En concreto se puede aplicar el resultado anterior para la media aritmética y obtener el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1. *Sea E una medida del grado de contenido. Sea $S_E : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ definida como la media de $E(a,b)$ y $E(b,a)$, es decir,*

$$S_E(a,b) = \frac{E(a,b) + E(b,a)}{2} \tag{2.16}$$

Entonces es evidente, por ser la media aritmética una función de agregación simétrica y one-strict (ver, por ejemplo, la tabla 1.1), S_E es una función de similitud para intervalos.

Por lo tanto, considerando las medidas del grado de contenido obtenidas en la sección 2.2, se pueden definir distintas medidas de similitud que serán denotadas respectivamente como $S_w, S_{LK}, S_{FD}, S_{GD}, S_{GG}$ y S_{RS}, en función de la medida del grado de contenido que las genera.

Vamos ahora a desarrollar las expresiones concretas de $S_E(a,b) = \frac{E(a,b)+E(b,a)}{2}$ para cada una de estas medidas.

- *Para E_w la expresión que se obtiene es*

$$
S_{E_w}(a,b) = \begin{cases} 1 & \textit{si } w(a)=w(b)=0, a \cap b \neq \emptyset \\ \frac{1+\frac{w(b\cap a)}{w(b)}}{2} & \textit{si } w(a)=0,\ w(b) \neq 0, a \cap b \neq \emptyset \\ \frac{\frac{w(a\cap b)}{w(a)}+1}{2} & \textit{si } w(a) \neq 0 w(b)=0, a \cap b \neq \emptyset \\ 0 & \textit{si } w(a)=w(b)=0, a \cap b = \emptyset \\ \frac{\frac{w(a\cap b)}{w(a)}+\frac{w(b\cap a)}{w(b)}}{2} & \textit{si } w(a) \neq 0 \textit{ y } w(b) \neq 0 \end{cases}
$$

- *Para E_{LK} la expresión que se obtiene es*

$$
S_{E_{LK}}(a,b) = \begin{cases} 0 & \textit{si } a \cap b = \emptyset \\ \frac{min(1-\underline{b}+\underline{a},1-\bar{a}+\bar{b},1)+min(1-\underline{a}+\underline{b},1-\bar{b}+\bar{a},1)}{2} & \textit{en otro caso} \end{cases}
$$

- *Para E_{FD} la expresión que se obtiene es*

$$
S_{E_{FD}}(a,b) = \begin{cases} 0 & \textit{si } a \cap b = \emptyset \\ 1 & \text{si } a = b \\ \frac{1+min\{max(1-\bar{b},\bar{a}),max(1-\underline{a},\underline{b})\}}{2} & \textit{si } a \subseteq b \\ \frac{min\{max(1-\bar{a},\bar{b}),max(1-\underline{b},\underline{a})\}+1}{2} & \textit{si } b \subseteq a \\ \frac{max(1-\bar{a},\bar{b})+max(1-\underline{b},\underline{a})}{2} & \textit{si } \underline{b} \leq \underline{a} \leq \bar{b} \leq \bar{a} \\ \frac{max(1-\underline{b},\underline{a})+max(1-\bar{b},\bar{a})}{2} & \textit{si } \underline{a} \leq \underline{b} \leq \bar{a} \leq \bar{b} \end{cases}
$$

- *Para E_{GD} la expresión que se obtiene es*

$$S_{E_{GD}}(a,b) = \begin{cases} 0 & si\ a \cap b = \emptyset \\ \\ 1 & \text{si } a = b \\ \\ \frac{1+b}{2} & si\ a \subseteq b \\ \\ \frac{a+1}{2} & si\ b \subseteq a \\ \\ \frac{\bar{b}+\underline{b}}{2} & si\ \underline{b} \leq \underline{a} \leq \bar{b} \leq \bar{a} \\ \\ \frac{\underline{a}+\bar{a}}{2} & si\ \underline{a} \leq \underline{b} \leq \bar{a} \leq \bar{b} \\ \\ \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} & en\ otro\ caso \end{cases}$$

- *Para E_{RS} la expresión que se obtiene es*

$$S_{E_{RS}}(a,b) = \begin{cases} 1 & si\ a = b \\ \\ \frac{1}{2} & si\ a \subset b\ \ ó\ \ b \subset a \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Si consideramos de nuevo los intervalos del ejemplo 2.2.1, cuya representación gráfica puede verse en la figura 2.3, se obtienen los valores de la tabla 2.2 para la medida del grado de contenido E_w.

En función de los datos obtenidos y teniendo en cuanta la amplitud de los intervalos involucrados, parece que los intervalos más similares son a y c y los más diferentes son d con cualquiera de los otros. También se observa, por ejemplo, que b es más similar a c

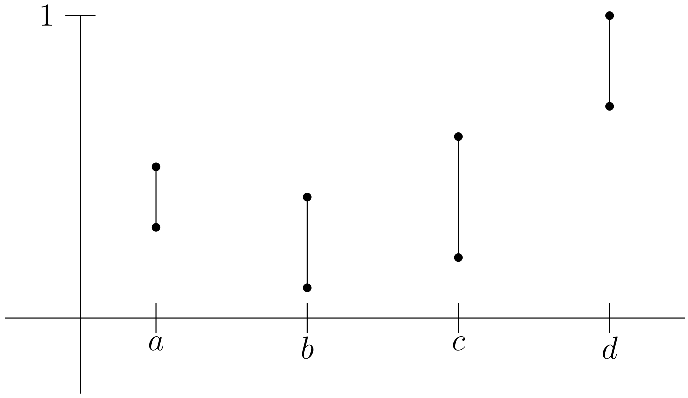


Figura 2.3: Intervalos a comparar.

$i_1 - i_2$	$E_w(i_1, i_2)$	$E_w(i_2, i_1)$	$S_w(i_1, i_2)$
$a - b$	1/2	1/3	5/12
$a - c$	1	1/2	3/4
$a - d$	0	0	0
$b - c$	2/3	1/2	7/12
$b - d$	0	0	0
$c - d$	0	0	0

Tabla 2.2: Similitud basada en la amplitud.

que a a.

De forma análoga, se puede repetir el procedimiento para las demás medidas, obteniendo los valores de la tabla 2.3, donde se observa como hay un comportamiento coherente pero diferenciado, entre E_w, E_{LK}, E_{FD}, E_{GD}, E_{GG} y E_{RS}.

	$a - b$	$a - c$	$a - d$	$b - c$	$b - d$	$c - d$
S_w	0.42	0.75	0	0.58	0	0
S_{LK}	0.85	0.95	0	0.85	0	0
S_{FD}	0.6	0.75	0	0.6	0	0
S_{GD}	0.25	0.6	0	0.25	0	0
S_{GG}	0.57	0.83	0	0.58	0	0
S_{RS}	0	0.5	0	0	0	0

Tabla 2.3: Similitudes entre distintos intervalos.

Se han desarrollado en detalle los ejemplos obtenidos a partir de la media aritmética, pero es evidente que se podría utilizar, de forma análoga, cualquier función de agregación simétrica y one-strict.

Ejemplo 2.3.2. *Sea E es una medida del grado de contenido y considerando la función de agregación $M_{[2]}$ se obtiene como función de similitud $S_E : L([0,1]) \times L([0,1]) \to [0,1]$ definida como:*

$$S_E(a,b) = \sqrt{\frac{E(a,b)^2 + E(b,a)^2}{2}} \tag{2.17}$$

En concreto, se podrían considerar, como se hizo en el ejemplo anterior, cualquiera de las medidas $E_w, E_{LK}, E_{FD}, E_{GD}$ y E_{RS}.

Capítulo 3

Grado de embebimiento, inclusión y similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados

Tal como se comentó en la sección 1.1, los conjuntos difusos intervalo-valorados son aquellos cuyo grado de pertenencia viene determinado por un intervalo. Esto hace que los estudios hechos en el capítulo 2 tengan gran relevancia a la hora de analizar este tipo de conjuntos. En concreto este capítulo se va a centrar en cuantificar y analizar el grado de embebimiento o incrustación entre dos conjuntos, así como el grado de inclusión. Ambos conceptos se relacionarán directamente con el grado de contenido y el grado de orden, respectivamente, entre intervalos. Además, se obtendrán métodos para medir el grado de similitud entre dos conjuntos, que serán comparados entre sí.

3.1 Grado de embebimiento para conjuntos difusos intervalo-valorados

En la definición 1.1.7 se estableció un orden parcial en $IVFS(X)$ basado en determinar cuando un conjunto está embebido o incrustado en otro, es decir, cuando su información respecto a la función de pertenencia es más precisa. Sin embargo, esta relación, al ser parcial, no permite comparar cualquier par de conjuntos, si bien unos están incrustados en mayor grado que otros. Esto motiva la introducción del concepto de medida del grado de embebimiento entre dos conjuntos. De forma natural, se obtienen los siguientes axiomas para este concepto

Definición 3.1.1. *La aplicación $\mathcal{E} : IVFS(X) \times IVFS(X) \to [0,1]$ se dice que es un medida del grado de embebimiento para conjuntos difusos intervalo-valorados, o simplemente un embebimiento, si cumple las siguientes propiedades:*

P1: $\mathcal{E}(A,B) = 1 \Longleftrightarrow A \sqsubseteq B$.

P2: Si $A(x) \cap B(x) = \emptyset \ \forall x \in X$, *entonces* $\mathcal{E}(A,B) = 0$.

P3: Si $B \sqsubseteq C$, *entonces* $\mathcal{E}(A,B) \leq \mathcal{E}(A,C), \ \forall A \in IVFS(X)$.

P4: Si $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C$, *entonces* $\mathcal{E}(C,A) \leq \mathcal{E}(B,A)$ *y* $\mathcal{E}(C,A) \leq \mathcal{E}(C,B)$.

En lo que sigue vamos a suponer que el referencial X es finito o numerable e introducir un método general para obtener este tipo de medidas basado en la agregación del grado de contenido de las funciones de pertenencia (intervalos) en cualquier punto del conjunto referencial. Nos basaremos en la noción de función de agregación introducida en la definición 1.2.1 y en las medidas del grado de contenido para intervalos consideradas en la sección 2.2 (medida del grado de orden introducido en la definición 2.1.1 con respecto a $\subseteq$).

Proposición 3.1.1. *Sea X es un conjunto finito o numerable. Si tenemos $\mathcal{A} : [0,1]^n \to [0,1]$ una función de agregación one-strict y $E : L([0,1])^2 \to [0,1]$ una medida del grado de contenido para intervalos, entonces la función $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E} : IVFS(X) \times IVFS(X) \to [0,1]$ definida como*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(A,B) = \mathop{\mathcal{A}}_{x \in X}(E(A(x), B(x)) \tag{3.1}$$

es una medida del grado de embebimiento entre conjuntos.

Demostración. Es evidente, por definición, que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}$ está bien definida. Vamos a demostrar que cumple las propiedades de la definición 3.1.1.

P1: Por definición se tiene que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(A,B)=1 \iff \mathcal{A}_{x\in X}\, E(A(x),B(x))=1$. Dado que $\mathcal{A}$ es una función de agregación one-strict, esto es equivalente a decir $E(A(x),B(x))=1\,\forall x\in X$. Por el axioma *A1* de la definición 2.1.1, esto es equivalente a $A(x)\subseteq B(x)\,\forall x\in X$, es decir a que $A\sqsubseteq B$.

P2: Si $A(x)\cap B(x)=\emptyset\,\forall x\in X$, entonces $E(A(x),B(x))=0$ por el axioma *A2* de la definición 2.1.1. Así, $\mathcal{A}_{x\in X}\, E(A(x),B(x))=\mathcal{A}_{x\in X}\, 0=0$ por la condición frontera de la función de agregación y, como consecuencia, $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(A,B)=0$.

P3: Sea $A\in IVFS(X)$ cualquiera. Si $B\sqsubseteq C$, entonces $B(x)\subseteq C(x)\,\forall x\in X$ y aplicando ahora el axioma *A3* de la definición 2.1.1 se tiene que $E(A(x),B(x))\leq E(A(x),C(x))\,\forall x\in X$. Con lo cual, por la monotonía de $\mathcal{A}$,

$$\mathop{\mathcal{A}}_{x\in X} E(A(x),B(x))\leq \mathop{\mathcal{A}}_{x\in X} E(A(x),C(x))$$

y, por tanto, se cumple que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(A,B)\leq \mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(A,C)$.

P4: Sean $A,B,C\in IVFS(X)$ tales que $A\sqsubseteq B\sqsubseteq C$. Si $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(A,B)=1$, entonces $A\sqsubseteq B$, lo acabamos de probar en *P1*. Así $A(x)\subseteq B(x)\,\forall x\in X$.Si$\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(B,C)=1$, entonces $B\sqsubseteq C$, lo acabamos de probar en *P1*. Así $B(x)\subseteq C(x)\,\forall x\in X$.Si $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{E}(A,C)=1$, entonces $A\sqsubseteq C$, lo acabamos de probar en *P1*. Así $A(x)\subseteq C(x)\,\forall x\in X$.

Por tanto,

Si $A\sqsubseteq B\sqsubseteq C$, entonces $A(x)\leq B(x)\leq C(x),\forall x\in X$ y, por el axioma *A4* de la definición 2.1.1, se tiene para cualquier $x\in X$ que $E(C(x),A(x))\leq E(B(x),A(x))$ y $E(C(x),A(x))\leq E(C(x),B(x))$. Entonces, por la monotonía de $\mathcal{A}$, se cumple

$$\mathop{\mathcal{A}}_{x\in X} E(C(x),A(x))\leq \mathop{\mathcal{A}}_{x\in X} E(B(x),A(x))$$

$$\underset{x\in X}{\mathcal{A}} E(C(x), A(x)) \leq \underset{x\in X}{\mathcal{A}} E(C(x), B(x))$$

y, por tanto, se tiene que $\mathcal{E}^E_{\mathcal{A}}(C, A) \leq \mathcal{E}^E_{\mathcal{A}}(B, A)$ y $\mathcal{E}^E_{\mathcal{A}}(C, A) \leq \mathcal{E}^E_{\mathcal{A}}(C, B)$.

□

La proposición 3.1.1 nos permite construir diferentes medidas de embebimiento para conjuntos difusos intervalo- valorados a partir de las medidas de contenido para intervalos descritas en la sección 2.2. Además, nos permite encontrar la cota inferior para este conjunto de medidas, a partir de la medida E_0 considerada en la proposición 2.2.6.

Proposición 3.1.2. *La medida de embebimiento entre conjuntos mínima es*

$$\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0}(A, B) = \begin{cases} 1 & \textit{si } a \sqsubseteq b \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar hay que demostrar que es una medida de embebimiento. Si consideramos la medida de contenido entre intervalos E_0 (ver proposición 2.2.6) y

$$\mathcal{A}^0(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = \cdots = x_n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene que $\mathcal{A}^0$ es una función de agregación, puesto que es creciente y cumple trivialmente las condiciones de frontera. Además toma el valor 1 solo en el punto $(1, \ldots, 1)$ con lo que es one-strict y se puede aplicar la proposición 3.1.1, con lo que $\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0}$ es una medida de embebimiento para conjuntos.

Por otro lado, es inmediato probar que

$$\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0}(A, B) = \begin{cases} 1 & \textit{si } a \sqsubseteq b \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

dadas las definiciones de E_0 y $\mathcal{A}^0$, con lo cual sólo nos queda probar que dada una medida de embebimiento para conjuntos cualquiera $\mathcal{E}$ se tiene que $\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0} \leq \mathcal{E}$.

Si $A \sqsubseteq B$, entonces $\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0}(A,B) = 1$, pero dado que $\mathcal{E}$ es un IV-embedding sabemos que $\mathcal{E}(A,B) = 1$ por la propiedad 1. Así, en este caso, $\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0}(A,B) = \mathcal{E}(A,B)$. Por otro lado, si $A \not\sqsubseteq B$, entonces $\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0}(A,B) = 0$ y por lo tanto es inmediato que $\mathcal{E}^{E_0}_{\mathcal{A}^0}(A,B) \leq \mathcal{E}(A,B)$. $\square$

A continuación vamos a proponer algunos ejemplos de medidas de embebimiento para conjuntos.

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos la medida del grado de contenido para intervalos E_w y las medidas de embebimiento para conjuntos difusos intervalo-valorados obtenidas con ella a partir de las funciones de agregación mínimo, producto, media aritmética, media geométrica y media armónica, que se denotarán por $\mathcal{E}^w_M$, $\mathcal{E}^w_P$, $\mathcal{E}^w_{AM}$, $\mathcal{E}^w_{GM}$ y $\mathcal{E}^w_{HM}$, respectivamente.*

Sea X el referencial definido como $X = \{x/10 : x \in \mathbb{N}, x \leq 100\}$.

Para ver la influencia de la función de agregación, consideraremos diferentes posibilidades para que un conjunto obtenga el grado de embebimiento en otro conjunto fijo. Por lo tanto, sea A_ϵ la familia de conjuntos difusos intervalo-valorados definidos por

$$A_\epsilon(x) = \left[0.25 - \frac{(x-5)^2}{100}, \frac{(x-5)^2}{100} + \epsilon\right], \quad \forall x \in X, \forall \epsilon \in [0.25, 0.75]$$

y sea B el conjunto difuso intervalo-valorados definido como

$$B(x) = \left[0, \frac{x^3 - 15x^2 + 50x}{400} + 0.87\right], \quad \forall x \in X$$

Algunos de los conjuntos A_ϵ se han representado mediante puntos en la figura 3.1, mientras que B se ha representado por triángulos.

Así, en la figura 3.2 se ha representado el grado de embebimiento obtenido mediante $\mathcal{E}^w_M$, $\mathcal{E}^w_P$, $\mathcal{E}^w_{AM}$, $\mathcal{E}^w_{GM}$ y $\mathcal{E}^w_{HM}$ para diferentes valores de ϵ.

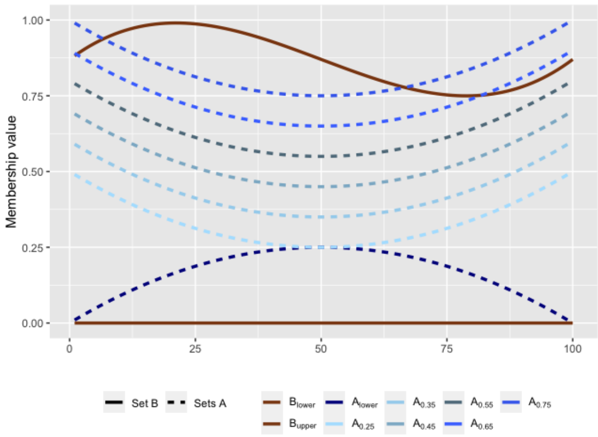


Figura 3.1: Funciones de pertenencia de A_ϵ y B.

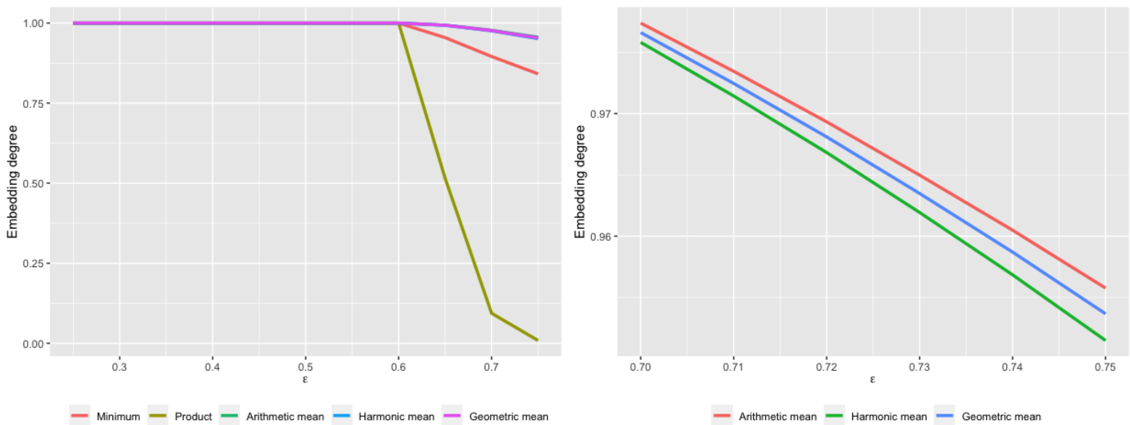


Figura 3.2: Comparando el comportamiento de distintas medidas de embebimiento.

Podemos ver en este sencillo ejemplo la influencia de la función de agregación elegida. Para cualquier $\epsilon \in [0.6141, 0.75]$, A_ϵ no está totalmente incrustado en B y los valores para el grado de embebimiento son totalmente diferentes si consideramos el producto o la media aritmética para agregar los grados en cualquier punto de X. Para las diferentes medias, podemos ver que los resultados son, en este caso, similares, pero no iguales, como se observa en la parte derecha de la figura 3.2. Más en detalle, podemos ver algunos valores de las medidas de embebimiento para los casos $\epsilon \in \{0.53, 0.63, 0.73\}$ en la tabla 3.1.

Obsérvese que $A_{0.53} \sqsubseteq B$, pero $A_{0.63} \not\sqsubseteq B$ y estamos aún más seguros de que $A_{0.73} \not\sqsubseteq B$.

ϵ	$\mathcal{E}^w_M$	$\mathcal{E}^w_P$	$\mathcal{E}^w_{AM}$	$\mathcal{E}^w_{GM}$	$\mathcal{E}^w_{HM}$
0.53	1	1	1	1	1
0.63	0.9796	0.79925	0.9978	0.9978	0.9978
0.73	0.8625	0.0215	0.9642	0.9627	0.9611

Tabla 3.1: Valores de diferentes medidas de embebimiento para medir el grado en que $A_{0.73}$ está incrustado en B.

3.2 Grado de inclusión para conjuntos difusos intervalo-valorados

Las medidas del grado de embebimiento, tal como se vio en la sección anterior, se pueden obtener fusionando los grados de contenidos de los intervalos que determinan sus funciones de pertenencia (ver proposición 3.1.1). Así pues están basadas en el grado de contenido entre intervalos, pero no miden el grado de contenido de los conjuntos, sino el grado de embebimiento, tal como ya se anticipó en la tabla 2.1. Así pues, de un grado de contenido entre intervalos, llegamos a medir la precisión en la descripción de la función de pertenencia, pero no el grado de contenido o inclusión entre los conjuntos. Esto se pone claramente de manifiesto si consideramos el caso particular de conjuntos difusos intervalo-valuados que representen conjuntos nítidos o difusos, tal como puede verse en la figura 3.3

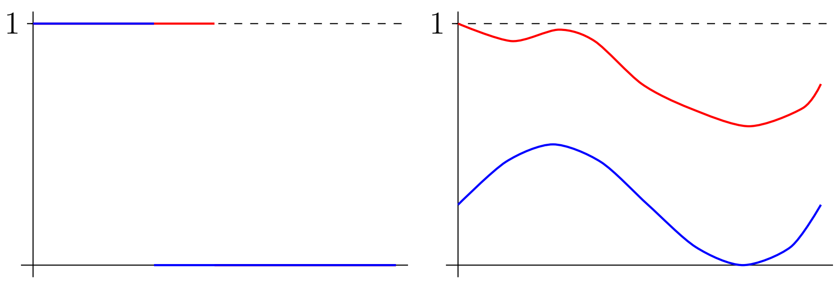


Figura 3.3: Representación de dos conjuntos nítidos a la izquierda y dos conjuntos difusos a la derecha.

En dicha figura, en ambos casos, si consideramos representado en azul el conjunto A y en rojo el B, se tiene claramente que $A \subseteq B$, ahora bien, si fusionamos mediante una función de agregación los distintos valores del grado de contenido entre los conjuntos que los definen se tiene, considerando un referencial a lo sumo numerable:

$$\mathcal{E}^E_{\mathcal{A}}(A, B) = \mathcal{A}_{x \in X}(E(A(x), B(x)))$$

pero en los casos considerados se tiene que $A(x) = B(x)$ o $A(x) \cap B(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$, con lo que dicho valor sería igual a aplicar la función de agregación $\mathcal{A}$ a una colección de unos y ceros. Como no son iguales, alguno de los elementos es seguro un cero y, al ser la función de agregación one-stric, a pesar de que A está contenido en B, mediante este método no se obtiene una medida del grado de inclusión entre dos conjuntos, sino del grado de embebimiento, como ya habíamos probado. Es importante poner de manifiesto las diferencias entre ambos conceptos.

Sin embargo, si es posible obtener medidas de inclusión para conjuntos, si partimos de una medida del grado de orden respecto a $\preceq_{Lo}$ y no de un grado de contenido, que se basa en el orden $\subseteq$. Dichas medidas de inclusión fueron muy estudiadas para conjuntos difusos: basadas en la cardinalidad ([12, 23]), basadas en implicaciones lógicas ([3]), basadas en definiciones axiomáticas ([8, 14, 20, 30, 31, 33]) o basadas en funciones de representación ([24]).

Algunos de estos estudios previos sirvieron para dar una definición axiomática de medida del grado de inclusión para conjuntos difusos intervalo-valorados.

Definición 3.2.1. *([36]) Una función $\mathcal{I} : IVFS(X) \times IVFS(X) \to [0, 1]$ se dice que es una medida del grado de inclusión, o simplemente una medida de inclusión, en $IVFS(X)$, si satisface las siguientes propiedades:*

(I1) $\mathcal{I}(X, \emptyset) = 0$

(I2) $\mathcal{I}(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$

(I3) Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $\mathcal{I}(C, A) \leq \mathcal{I}(B, A)$ e $\mathcal{I}(C, A) \leq \mathcal{I}(C, B)$.

En la definición anterior se ha considerado el contenido entre conjuntos, que como se recordó en el capítulo 1 se tiene cuando el grado de pertenencia sea menor o igual. En concreto se tiene que:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \preceq_{Lo} B(x), \forall x \in X$$

por analogía a lo que ocurre en el caso nítido y difuso. En concreto, en la figura 3.4 se representan el caso difuso y el caso intervalo-valorado.

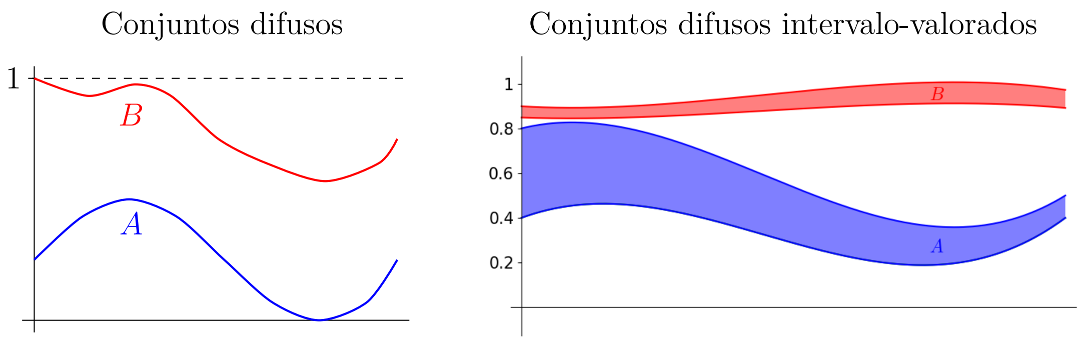


Figura 3.4: El conjunto A está contenido en B en ambos casos.

Al igual que ocurría con los embebimientos y fue demostrado en la proposición 3.1.1, se pueden generar a partir de las comparaciones entre intervalos (funciones de pertenencia) si se fusionan los datos mediante funciones de agregación one-strict. En concreto,

Proposición 3.2.1. *Sea X es un conjunto finito o numerable. Si tenemos $\mathcal{A} : [0,1]^n \to [0,1]$ una función de agregación one-strict y $I : L([0,1])^2 \to [0,1]$ una medida del grado de orden para intervalos con respecto a $\preceq_{Lo}$, entonces la función $\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}} : IVFS(X) \times IVFS(X) \to [0,1]$ definida como*

$$\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(A,B) = \underset{x \in X}{\mathcal{A}} I(A(x), B(x))$$

es una medida del grado de inclusión entre conjuntos difusos intervalo-valorados.

Demostración. Es evidente, de la definición, que $\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}$ está bien definida. Vamos pues a probar las tres propiedades de la definición 3.2.1.

(I1) $\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(X, \emptyset) = \mathcal{A}_{x\in X} I([1,1],[0,0])$. Ahora bien, como $[1,1] \cap [0,0] = \emptyset$ y $[1,1] \not\preceq_{Lo} [0,0]$, aplicando el axioma A2 de la definición 2.1.1 se tiene que $I([1,1],[0,0]) = 0$. Con lo cual, por la condición frontera de cualquier función de agregación, se tiene que $\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(X, \emptyset) = 0$.

(I2) $\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(A, B) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_{x \in X}\, I(A(x), B(x)) = 1$ pero como $\mathcal{A}$ es one-strict, esto es equivalente a decir que $I(A(x), B(x)) = 1, \forall x \in X$ lo que es a su vez equivalente, por el axioma A1 de la definición 2.1.1, a decir que $A(x) \preceq_{Lo} B(x), \forall x \in X$, es decir, que $A \subseteq B$.

(I3) Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $A(x) \preceq_{Lo} B(x) \preceq_{Lo} C(x), \forall x \in X$. Aplicando ahora el cuarto axioma de la definición 2.1.1, se tiene que $I(C(x), A(x)) \leq I(B(x), A(x))$ e $I(C(x), A(x)) \leq I(C(x), B(x))$ para todo $x \in X$. Con lo cual, simplemente aplicando la monotonía de la función de agregación, se tiene que $\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(C, A) \leq \mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(B, A)$ e $\mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(C, A) \leq \mathcal{I}^I_{\mathcal{A}}(C, B)$.

$\square$

Con lo cual, de las proposiciones 3.1.1 y 3.2.1 se concluye como partiendo de una misma función, pero dependiendo del orden elegido, se obtienen distintas medidas en $IVFS(X)$:

$$
\begin{array}{ccccccl}
O & + & \subseteq & + & \mathcal{A} & \longrightarrow & \text{Medida del embebimiento en } IVFS(X) \\
O & + & \preceq_{Lo} & + & \mathcal{A} & \longrightarrow & \text{Medida de inclusión en } IVFS(X)
\end{array}
$$

3.3 Grado de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados

En el capítulo 2 se introdujo el concepto de similitud entre intervalos y se desarrolló la subsección 2.3 en la que se expusieron diferentes similitudes a partir de la agregación de medidas de contenido para intervalos. El concepto de similitud es especialmente útil en el contexto de conjuntos difusos intervalo-valorados (ver, por ejemplo, [28]), donde cada elemento tiene un grado de pertenencia que es un intervalo de valores reales. En este contexto, la similitud entre dos conjuntos difusos se puede medir como la similitud entre sus elementos, que a su vez se basa en la similitud entre los intervalos que representan sus grados de pertenencia. No obstante, ésta no será la única forma de construir medidas de similitud, como veremos a lo largo de esta sección. En la misma propondremos distintos métodos de construcción, que serán finalmente comparados.

Comencemos recordando la definición de medida de similitud en $IVFS(X)$.

Definición 3.3.1. *([37]) Una función* $\mathcal{S} : IVFS(X) \times IVFS(X) \to [0,1]$ *es una medida de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados, es decir medida de similitud en* $IVFS(X)$*, si cumple las siguientes propiedades:*

$\mathcal{S}1$: $\mathcal{S}(A, A^c) = 0$ si A es un conjunto nítido.

$\mathcal{S}2$: $\mathcal{S}(A, B) = \mathcal{S}(B, A), \forall A, B \in IVFS(X)$.

$\mathcal{S}3$: $\mathcal{S}(A, B) = 1 \Longleftrightarrow A = B$.

$\mathcal{S}4$: Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $\mathcal{S}(A, C) \leq \mathcal{S}(A, B)$ y $\mathcal{S}(A, C) \leq \mathcal{S}(B, C)$.

En el primer axioma de esta definición se analiza el comportamiento de los conjuntos difusos intervalo-valorados que sean nítidos. Así, se está considerando que $A \in IVFS(X)$ es un conjunto nítido si $\underline{A}(x) = \bar{A}(x) = 0$ ó $\underline{A}(x) = \bar{A}(x) = 1 \quad \forall x \in X$, puesto que esto supondría que se sabe claramente si el punto x pertenece o no al conjunto. El resto de los axiomas son los habituales en cualquier medida de similitud.

En lo que sigue se van a plantear dos métodos de construcción de medidas de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados, que serán analizados y comparados. En ambos casos el punto de partida será una medida del grado de orden entre intervalos.

Proposición 3.3.1. *Sea I una medida del grado de orden entre intervalos con respecto al orden $\preceq_{Lo}$, sea $\mathcal{A}$ una función de agregación simétrica y one-strict y sea t la función de agregación generada a partir de una t-norma cualquiera. La aplicación $\mathcal{S}' : IVFS(X) \times IVFS(X) \to [0,1]$ definida como*

$$\mathcal{S}'(A, B) = \mathcal{A}\left(\mathcal{I}_t^I(A, B), \mathcal{I}_t^I(B, A)\right)$$

es una medida de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados.

Demostración. Según vimos en la proposición 3.2.1, $\mathcal{I}_t^I$ toma valores en el intervalo $[0,1]$ con lo que $\mathcal{S}'$ está bien definida. Faltaría pues demostrar los cuatro axiomas de la definición 3.3.1.

$\mathcal{S}1$: Si A es un conjunto nítido, entonces se tiene que para cualquier x en X, o bien $A(x) = [0,0]$ y $A^c(x) = [1,1]$ o bien $A(x) = [1,1]$ y $A^c(x) = [0,0]$. En el primer caso $A(x) \preceq_{Lo} A^c(x)$ y en el segundo caso $A(x) \cap A^c(x) = \emptyset$ y $A(x) \not\preceq_{Lo} A^c(x)$. Así, aplicando los axiomas A1 y A2 de la definición 2.1.1, se tiene que en el primer caso $I(A(x), A^c(x)) = 1$ y en el segundo $I(A(x), A^c(x)) = 0$. Con lo cual tanto $\mathcal{I}_t^I(A, A^c)$ como $\mathcal{I}_t^I(A^c, A)$ se obtendrían aplicando reiteradamente la t-norma t a ceros y unos, con lo que se llegaría a

$$\mathcal{I}_t^I(A, A^c) = \mathcal{I}_t^I(A^c, A) = t(0,1) = 0$$

y, por tanto, $\mathcal{S}'(A, A^c) = \mathcal{A}(0,0) = 0$.

$\mathcal{S}2$: Por la simetría de $\mathcal{A}$ es evidente que $\mathcal{S}'(A,B) = \mathcal{S}'(B,A)$.

$\mathcal{S}3$: $\mathcal{S}'(A,B) = 1$ si, y sólo si, $\mathcal{I}_t^I(A,B) = \mathcal{I}_t^I(B,A) = 1$, puesto que $\mathcal{A}$ es one-strict. Ahora bien, como toda t-norma genera una función de agregación one-strict, esto es a su vez equivalente a decir que

$$I(A(x), B(x)) = I(B(x), A(x)) = 1, \forall x \in X$$

lo cual es a su vez equivalente, por el axioma A1 de la definición 2.1.1, a $A(x) \preceq_{Lo} B(x)$ y $B(x) \preceq_{Lo} A(x)$ y, por la antisimetría del orden, esto es equivalente a decir que $A(x) = B(x), \forall x \in X$, es decir, a que $A = B$.

$\mathcal{S}4$: Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $A(x) \preceq_{Lo} B(x) \preceq_{Lo} C(x), \forall x \in X$, con lo que, por el axioma A1 de la definición 2.1.1 y la transitividad del orden se tiene que $I(A(x), B(x)) = I(A(x), C(x)) = I(B(x), C(x)) = 1$, con lo que $\mathcal{I}_t^I(A,B) = t(1,\ldots,1) = 1$ y, de la misma forma, $\mathcal{I}_t^I(A,C) = \mathcal{I}_t^I(B,C) = 1$. Con lo cual

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'(A,B) &= \mathcal{A}(1, \mathcal{I}_t^I(B,A)),\\ \mathcal{S}'(A,C) &= \mathcal{A}(1, \mathcal{I}_t^I(C,A)),\\ \mathcal{S}'(B,C) &= \mathcal{A}(1, \mathcal{I}_t^I(C,B)).\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el axioma A4 de la definición 2.1.1 se tiene que $I(C(x), A(x)) \leq \text{mín}\{I(B(x), A(x)), I(C(x), B(x))\}$, con lo que, por la monotonía de la t-norma,

$$\mathcal{I}_t^I(C,A) \leq \text{mín}\{\mathcal{I}_t^I(B,A), \mathcal{I}_t^I(C,B)\}$$

y, por tanto,

$$\mathcal{S}'(A,C) \leq \text{mín}\{\mathcal{S}'(A,B), \mathcal{S}'(B,C)\}$$

$\square$

Vamos a ver un ejemplo de aplicación de este resultado.

Ejemplo 3.3.1. *Si consideramos $X = \{x, y, z\}$ y los conjuntos difusos intervalo-valorados A y B con funciones de pertenencia las consideradas en la tabla 3.2, se obtiene que*

$$I(A(x), B(x)) = 1, I(A(y), B(y)) = 1, I(A(z), B(z)) = 1$$

$$I(B(x), A(x)) = 0$$

X	x	y	z
A	$[0.2, 0.4]$	$[0.1, 0.2]$	$[0.3, 0.6]$
B	$[0.5, 0.6]$	$[0.7, 0.8]$	$[0.4, 0.7]$

Tabla 3.2: Funciones de pertenencia de A y B.

Así pues, si consideramos la t-norma del producto, se obtiene que

$$\mathcal{I}_{prod}^I(A,B) = 1 \text{ y } \mathcal{I}_{prod}^I(B,A) = 0$$

Finalmente, si la función de agregacióne es la media ponderada, se obtiene que

$$\mathcal{S}'(A, B) = 0.5$$

A continuación, vamos a plantear otro método de obtención de medidas de similitud entre conjuntos, en el que también se parte de comparar los valores de pertenencia mediante medidas del grado de orden, pero donde se intercambia el papel de las funciones de agregación con respecto al resultado anterior.

Proposición 3.3.2. *Sea I una medida del grado de orden entre intervalos con respecto al orden $\preceq_{Lo}$, sea $\mathcal{A}$ una función de agregación one-strict y t una t-norma. La aplicación $\mathcal{S}'' : IVFS(X) \times IVFS(X) \to [0, 1]$ definida como*

$$\mathcal{S}''(A, B) = \mathop{\mathcal{A}}_{x \in X} t(I(A(x), B(x)), I(B(x), A(x)))$$

es una medida de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados.

Demostración. De nuevo es evidente que $\mathcal{S}''$ está bien definida y solo nos queda probar las cuatro condiciones de la definición 3.3.1.

- $\mathcal{S}1$: Si A es un conjunto nítido, como ya se vio en la demostración de la proposición 3.3.1, se llega a que para cualquier $x \in X$ se tiene que $I(A(x), A^c(x)) = 1$ o $I(A(x), A^c(x)) = 0$. Con lo cual $t(I(A(x), B(x)), I(B(x), A(x))) = t(0, 1) = 0$ y, por tanto, $\mathcal{S}''(A, A^c) = \mathcal{A}_{x \in X}\, 0 = 0$, por la condición de frontera de la función de agregación.

- $\mathcal{S}2$: Por la simetría de la t-norma, es evidente que $\mathcal{S}''(A, B) = \mathcal{S}''(B, A)$.

- $\mathcal{S}3$: $\mathcal{S}''(A, B) = 1$ si, y sólo si, $t(I(A(x), B(x)), I(B(x), A(x))) = 1, \forall x \in X$, puesto que $\mathcal{A}$ es one-strict. Ahora bien, como toda t-norma genera una función de agregación one-strict, esto es a su vez equivalente a decir que

$$I(A(x), B(x)) = I(B(x), A(x)) = 1, \forall x \in X$$

lo cual es a su vez equivalente, por el axioma A1 de la definición 2.1.1, a $A(x) \preceq_{Lo} B(x)$ y $B(x) \preceq_{Lo} A(x)$, es decir, $A(x) = B(x), \forall x \in X$ o, lo que es lo mismo, $A = B$.

$\mathcal{S}4$: Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $A(x) \preceq_{Lo} B(x) \preceq_{Lo} C(x), \forall x \in X$, con lo que, por el axioma A1 de la definición 2.1.1 y la transitividad del orden se tiene que $I(A(x), B(x)) = I(A(x), C(x)) = I(B(x), C(x)) = 1$, con lo que

$$t(I(A(x), B(x)), I(B(x), A(x))) = I(B(x), A(x))$$

$$t(I(A(x), C(x)), I(C(x), A(x))) = I(C(x), A(x))$$

$$t(I(B(x), C(x)), I(C(x), B(x))) = I(C(x), B(x))$$

Por otro lado, aplicando el axioma A4 de la definición 2.1.1 se tiene que $I(C(x), A(x)) \leq \text{mín}\{I(B(x), A(x)), I(C(x), B(x))\}$, con lo que, por el crecimiento de la función de agregación, se tiene que

$$\mathcal{S}''(A, C) \leq \text{mín}\{\mathcal{S}''(A, B), \mathcal{S}''(B, C)\}$$

□

Ejemplo 3.3.2. *Si consideramos de nuevo los conjuntos del ejemplo 3.3.1 y la misma t-norma y función de agregación, se obtiene que*

$$I(A(x), B(x)) = 1, I(A(y), B(y)) = 1, I(A(z), B(z)) = 1$$

$$I(B(x), A(x)) = 0, I(B(y), A(y)) = 0$$

pero no podemos decir en general el valor de $I(B(z), A(z))$, puesto que $B(z) \not\preceq_{Lo} A(z)$, pero no son intervalos disjuntos. Por lo tanto, en este caso, es necesario considerar una función I concreta.

Si consideramos

$$I(a,b) = \begin{cases} 1 & \textit{si } a \preceq_{Lo} b \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene que I es una medida del grado de orden con respecto a $\preceq_{Lo}$, puesto que

A1: Es inmediato de la definición que $I(a,b) = 1$ si, y sólo si, $a \preceq_{Lo} b$.

A2: Si $a \not\preceq_{Lo} b$, entonces $I(a,b) = 0$.

A3: Supongamos que $b \preceq_{Lo} c$. Se consideran tres casos:

- *Si $a \preceq_{Lo} b$, entonces $I(a,b) = I(a,c) = 1$, por la transitividad del orden.*
- *Si $a \not\preceq_{Lo} b$, entonces $I(a,b) = 0$ y la demostración es trivial.*

A4: Si $a \preceq_{Lo} b \preceq_{Lo} c$, tenemos dos casos:

- *Si $a = c$, entonces $a = b = c$, con lo que $I(c,a) = I(b,a) = I(c,b) = 1$.*
- *Si $a \neq c$, entonces $I(c,a) = 0$ y la demostración es trivial.*

Así pues, $I(B(z), A(z)) = 0$, con lo que

$$\mathcal{S}''(A,B) = \frac{t(1,0) + t(1,0) + t(1,0)}{3} = 0$$

Así pues, tenemos dos métodos para obtener medidas de similitud entre conjuntos, tal como puede verse en la figura 3.5.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{I}_t^I \arrow[r, dash, "\mathcal{A}"] & \mathcal{S}' \arrow[d, dash, "\neq"] \\
(I, \preceq_{Lo}) \arrow[ur, dash] \arrow[rr, dash, "{t, \mathcal{A}}"] & & \mathcal{S}''
\end{tikzcd}$$

Figura 3.5: Métodos de obtención de medidas de similitud para conjuntos.

En dicha figura se ha remarcado que las similitudes obtenidas son distintas, tal como se deduce de los ejemplos 3.3.1 y 3.3.2, con lo que los métodos propuestos en la proposiciones 3.3.1 y 3.3.2 son distintos en general.

Conclusiones

Los conjuntos difusos intervalo-valorados son una herramienta muy utilizada cuando además de existir incertidumbre sobre si un elemento está o no en un conjunto determinado, existe imprecisión sobre el grado de pertenencia y este se representa mediante un intervalo.

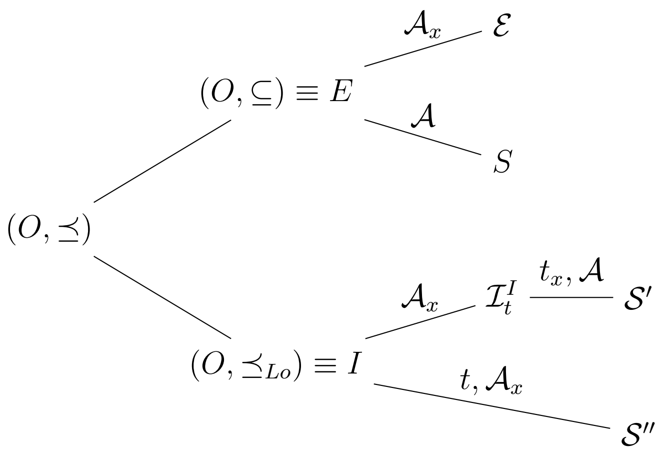
Esto hace que el estudio de cualquier concepto para los conjuntos difusos intervalo-valorados pueda tener asociado un estudio previo sobre el concepto análogo para intervalos. En esta línea, en este trabajo se han definido las medidas del grado de orden en general respecto a un orden cualquiera sobre el conjunto de intervalos (O) y se han analizado en detalle los casos de los órdenes contenido ($\subseteq$) y reticular ($\preceq_{Lo}$) que establece cuando un intervalo es menor que otro en el sentido habitual.

Siguiendo un razonamiento análogo para conjuntos difusos intervalo-valorados, se establecen las medidas del grado de embebimiento o incrustración y del grado de inclusión. Las primeras miden el grado en el que la función de pertenencia está incrustada en la otra y, por tanto, el grado en el que el primer conjunto es más preciso que el segundo. Sin embargo, las segundas miden el grado en que el primer conjunto está contenido en el otro, con lo que a pesar de tener un punto de partida común, es evidente que conceptualmente cuantifican conceptos claramente diferenciados. Es evidente que además estas medidas para conjuntos se puede relacionar con medidas para intervalos, tal como se recoge en la siguiente tabla:

Orden entre intervalos	Medida para intervalos	Medida para conjuntos
$\subseteq$	Grado de contenido (E)	Grado de embebimiento ($\mathcal{E}$)
$\preceq_{Lo}$	Grado de “menor” (I)	Grado de inclusión ($\mathcal{I}$)

En dicha tabla es importante destacar que la medida del grado de contenido para conjuntos no se obtiene a partir de una medida del grado de contenido para intervalos, sino del grado en que los intervalos son menores o iguales con respecto al orden reticular. Esto puede dar lugar a confusión, pero es perfectamente lógico si se considera el concepto que se está analizando y como el contenido entre conjuntos clásicamente se ha asociado a una pertenencia menor o igual.

Los estudios realizados sobre este tipo de medidas tienen entidad por sí mismos, si bien son además la base para definir medidas de similitud o del grado de semejanza entre intervalos y conjuntos. En esta memoria se han realizados distintas propuestas en este sentido, las cuales aparecen resumidas en el siguiente esquema:



Con esto, se ha hecho un estudio profundo de los conceptos de medidas de embebimiento, inclusión y similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados, lo cual era el objetivo inicial de este trabajo, que podemos decir que ha concluido con éxito. No obstante, por el camino han ido aparecienco interesantes problemas abiertos, tanto de índole teórica como práctica. Así, los puntos abiertos más inmediatos serían:

- Teóricos:
  - Analizar qué mide la agregación de la medida del embebimiento de A en B y la medida del embebimiento de B en A. Parece que pueda ser algo similar al grado de similitud, pero es previsible que algunos axiomas sean diferenciadores.

  - Analizar que se obtiene al agregar en cada punto la similitud de los intervalos. En principio, parece que sería una medida de las consideradas en el punto anterior.
  - Estudiar con más detalle las medidas de orden para intervalos y sus análogas medidas de inclusión para conjuntos, estableciendo métodos de construcción de las primeras.
  - Estudiar si existen, y tal caso caracterizarlas, medidas que sean de contenido y de orden a la vez para intervalos y/o de embebimiento e inclusión para conjuntos.

- Prácticos:
  - Aplicar las medidas de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados al agrupamiento jerárquico con distintos algoritmos, analizando la influencia y comportamiento de las distintas medidas consideradas y comparando la metodología propuesta con las ya existentes.
  - Aplicar las medidas de similitud para conjuntos difusos intervalo-valorados en el reconocimiento de imágenes.

Bibliografía

[1] E. Ammar, J. Metz, On fuzzy convexity and parametric fuzzy optimization. Fuzzy Sets and Systems 49(2) (1992) 135–141.

[2] M. Baczynski, B. Jayaram, Fuzzy Implications, Springer-Verlag, 2008.

[3] W. Bandler, L. Kohout, Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. Fuzzy Sets and Systems 4(1) (1980) 13–30.

[4] G. Beliakov, H. Bustince Sola, T. Calvo Sánchez, A Practical Guide to Averaging Functions, Springer Cham, 2016.

[5] J.C. Bezdek, Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms, Springer, 2013.

[6] A. Bouchet, M. Sesma-Sara, G. Ochoa, H. Bustince, S. Montes, S. Díaz, Measures of embedding for interval-valued fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 467 (2023) 108505.

[7] H. Bustince, P. Burillo, Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: Application to approximate reasoning. Fuzzy Sets and Systems 113(2) (2000) 205–219.

[8] H. Bustince, V. Mohedano, E. Barrenechea, M. Pagola, Definition and Construction of Fuzzy DI-Subsethood Measures. Information Sciences 176(21) (2006) 3190–3231.

[9] C. Cornelis, G. Deschrijver, E.E. Kerre. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory. International Journal of Approximate Reasoning 35 (2004) 55–95.

[10] I. Couso, H. Bustince, From fuzzy sets to interval-valued and atanassov intuitionistic fuzzy sets: A unified view of different axiomatic measures. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 27(2) (2019) 362–371.

[11] I. Couso, D. Dubois, Statistical reasoning with set-valued information: Ontic vs. epistemic views. International Journal of Approximate Reasoning 55 (7) (2014) 1502–1518.

[12] B.De Baets, H.De Meyer, H. Naessens, On rational cardinality-based inclusion measures. Fuzzy Sets and Systems 128(2) (2002) 169–183.

[13] L.R. Dice, Measures of the amount of ecologic association between species. Ecology 26 (3) (1945) 297–302.

[14] J. Fan, W. Xie, J. Pei, Subsethood measure: new definitions, Fuzzy Sets and Systems 106(2) (1999) 201–209.

[15] J. Fodor, M. Roubens, Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Springer, 1994.

[16] I. Grattan-Guinness, Fuzzy membership mapped onto intervals and many-valued quantities. Mathematical Logic Quarterly 22(1) (1976) 149–160.

[17] P. Jaccard, Nouvelles recherches sur la distribution florale. Bull. Soc. Vaud. Sci. Nat. 44 (1908) 223–270.

[18] K.U. Jahn, Intervall-wertige mengen. Mathematische Nachrichten, 68 (1975) 115–132.

[19] Q. Jiang, X. Jin, S-J. Lee, S. Yao, A new similarity/distance measure between intuitionistic fuzzy sets based on the transformed isosceles triangles and its applications to pattern recognition. Expert Systems with Applications 116 (2018) 439–453.

[20] L.M. Kitainik, Fuzzy Inclusions and Fuzzy Dichotomous Decision Procedures, Theory and Decision Library, vol. 4, Springer Netherlands, 1987, pp. 154–170.

[21] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular Norms, Springer Netherlands, 2000.

[22] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice-Hall, 1995.

[23] B. Kosko, Fuzzy entropy and conditioning. Information Sciences 40(2) (1986) 165–174.

[24] N. Madrid, Manuel Ojeda-Aciego, Measures of inclusion and entropy based on the φ-index of inclusion. Fuzzy Sets and Systems 423 (2021) 29–54.

[25] S. Massanet, G. Mayor, R. Mesiar, J. Torrens, On fuzzy implications: an axiomatic approach. Int. J. Approx. Reason. 54(9) (2013) 1471–1482.

[26] W. Pedrycz, F. Gomide, An introduction to fuzzy sets: analysis and design, MIT Press, 1998.

[27] A. Pradera, G. Beliakov, H. Bustince, B. De Baets, A review of the relationships between implication, negation and aggregation functions from the point of view of material implication. Information Sciences 329 (2016) 357–380.

[28] N. Rico, P. Huidobro, A. Bouchet, I. Diaz, Similarity measures for interval-valued fuzzy sets based on average embeddings and its application to hierarchical clustering. Information Sciences 615 (2022) 794–812.

[29] R. Sambuc, Function phi-flous, application a l'aide au diagnostic en pathologie thyroidienne, PhD Thesis, Faculté de Médecine de Marseille, 1975.

[30] H.S. Santos, A new class of fuzzy subsethood measures, PhD Thesis, Federal University of Rio Grande do Norte, Brasil, 2016.

[31] D. Sinha, E.R. Dougherty, Fuzzification of set inclusion: Theory and applications. Fuzzy Sets and Systems 55(1) (1993) 15–42.

[32] M. Sugeno, T. Yasukawa, A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. IEEE Transactions on fuzzy systems 1(1) 1993 7–31.

[33] V.R. Young, Fuzzy subsethood. Fuzzy Sets and Systems 77(3) (1996) 371–384.

[34] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (3) (1965) 338–353.

[35] L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning —I. Information Sciences 8(3) (1975) 199–249.

[36] W. Zeng, P. Guo, Normalized distance, similarity measure, inclusion measure and entropy of interval-valued fuzzy sets and their relationship. Information Sciences 178 (5) (2008) 1334–1342.

[37] W. Zeng, Q. Yin, Similarity measure of interval-valued fuzzy sets and application to pattern recognition. Fifth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Jinan, China, 2008, pp. 535–539.

[38] H.J. Zimmermann, Fuzzy set theory—and its applications, Springer, 2011.

De acuerdo con lo expresado en el *artículo 8.3 del Reglamento para la elaboración y defensa del Trabajo Fin de Máster de la Universidad de Oviedo*, aprobado por su Consejo de Gobierno el 17 de julio de 2020 (BOPA de 7 de agosto de 2020), quiero expresar lo siguiente:

Yo, **Mariana González Alzueta**, con DNI en relación a la memoria que presento ante el Tribunal, para su valoración como ***Trabajo Final en el Máster Universitario en Análisis de Datos para la Inteligencia de Negocios (MANADINE),*** quiero ***DECLARAR*** que ***s***oy el autor de la misma, habiendo citado debidamente las fuentes utilizadas en su desarrollo.

Para que conste, firmo el presente documento.

Oviedo, 18 de julio de 2023

Fdo.-