Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Sobre la estabilidad en el sentido de Lyapunov

Autora: Irene Urraburu Álvarez

Supervisado por:

Santiago Ibáñez Mesa y Pablo Pérez Riera

Curso 2022-2023

Agradecimientos

A mis tutores, Santiago y Pablo, por su paciencia, dedicación y compromiso.

A mi familia, por estar siempre a mi lado.

A mis amigos, por celebrar mis logros como suyos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Bajo hipótesis adecuadas, las soluciones de una ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, varían con continuidad con respecto a las condiciones iniciales. Es decir, si $x_i(t)$, con $i = 1, 2$, son dos soluciones definidas en un intervalo $[t_0, t^*]$ verificando que $x_i(t_0) = \bar{x}_i$, entonces la distancia $\|x_1(t) - x_2(t)\|$ puede suponerse tan pequeña como se desee, para todo $t \in [t_0, t^*]$, sin más que tomar $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ suficientemente próximos. Cuando las soluciones se pueden prolongar hasta tiempo infinito y la dependencia continua se plantea para ser satisfecha en todo el intervalo $[t_0, \infty)$, entonces estamos ante el concepto de estabilidad. Si nos cuestionamos la posibilidad de que, además de que una cierta solución $x_1(t)$ sea estable, se cumpla que las soluciones que parten próximas converjan asintóticamente a ella, entonces estamos haciendo referencia al concepto de estabilidad asintótica.

Los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica se estudian en el grado, en la asignatura Ecuaciones Diferenciales II, únicamente para el caso de soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales autónomas. Como herramientas para decidir si estas propiedades son satisfechas, se introduce el concepto de función de Liapunov y se demuestran criterios para la estabilidad y la estabilidad asintótica, conocidos como criterios de Liapunov, y también un criterio de inestabilidad, el criterio de Cetaev.

En este trabajo nos ocupamos de establecer criterios en el *caso no autónomo*. Además, en este contexto más general, surge un elemento nuevo de discusión, la uniformidad de las propiedades. Si una solución es estable, las soluciones que parten próximas permanecen próximas, pero cabe la posibilidad de que el entorno de condiciones iniciales que garanticen una determinada cercanía entre las soluciones pueda variar en función del tiempo inicial; si esto ocurre, decimos que la estabilidad no es uniforme.

En el Capítulo 3, después de haber recopilado resultados preliminares en el Capítulo 2, introducimos formalmente los diferentes conceptos de estabilidad y obtenemos resultados de estabilidad y de estabilidad asintótica basados en criterios de linealización de las ecuaciones en un entorno de la solución de referencia. Además, analizando el ejemplo de Perron, vemos cómo la estabilidad puede no ser robusta frente a pequeñas perturbaciones si falla el carácter uniforme. También estudiamos entonces criterios para la estabilidad uniforme. En este capítulo la referencia principal es el libro de C. Fernández y J.M. Vegas [2].

En el Capítulo 4 se estudian criterios de estabilidad basados en la existencia de funciones de Liapunov. Estos resultados se plantean bajo hipótesis muy generales, solo se suponen hipótesis de continuidad en las ecuaciones. En este capítulo la referencia básica es el libro de M. de Guzmán [1].

Es importante tener presente que el hecho de que una solución sea estable o, con mayor razón, asintóticamente estable, la convierte en un objeto observable en la dinámica. La inestabilidad, el hecho de que nos *alejemos* de una determinada solución a medida que avanzamos con el tiempo, la convierte en un comportamiento dinámico que permanece *oculto* para el observador. La caracterización de lo observable nos sirve como elemento motivador en todo nuestro estudio.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo vamos a introducir una serie de conceptos y resultados que nos serán de gran utilidad a lo largo del trabajo.

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que intervienen una variable dependiente o función y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Se pueden distinguir dos tipos:

- Ecuaciones diferenciales ordinarias. Son aquellas en las que la función incógnita depende solamente de una variable, de manera que todas las derivadas que aparecen en la correspondiente ecuación son derivadas ordinarias.

- Ecuaciones en derivadas parciales. Son aquellas en las que la función incógnita depende de varias variables, de manera que las derivadas que aparecen en la ecuación son derivadas parciales.

A lo largo de este trabajo nos ocuparemos únicamente de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, escritas de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

con $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ siendo D un conjunto abierto y $x : t \in I \subset \mathbb{R} \longmapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ para todo t en un cierto intervalo I de $\mathbb{R}$.

Existencia y unicidad de soluciones

Un problema de Cauchy consta de una ecuación diferencial y una condición inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Para garantizar la existencia de solución es suficiente que la función f sea continua en D (Teorema de Cauchy-Peano [1]). Si además la función es lipschitziana entonces la solución es única (Teorema de Picard-Lindelöf [1]). A continuación recordamos el concepto de función lipschitziana.

Definición 2.1. *Sea una función $f : (t, x) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^n$. Diremos que f es lipschitziana respecto a la segunda variable en D si existe $K > 0$ tal que para cualesquiera $(t, x_1), (t, x_2) \in D$ se verifica*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant K \|x_1 - x_2\|.$$

Más aún, diremos que f es localmente lipschitziana respecto a la segunda variable en D si para cada $(t, x) \in D$ existe un entorno $U \subset D$ de (t, x) donde f es lipschitziana respecto a la segunda variable.

Lema de Gronwall

El Lema de Gronwall es una herramienta de gran utilidad en la demostración de los resultados de existencia y continuidad de soluciones. En este trabajo veremos que también se convierte en un ingrediente en algunos argumentos de estabilidad.

Lema 2.1 (Lema de Gronwall)**.** *Sean $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que*

$$y(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

para cualquier $t \in [a, b]$. Entonces, para cada $t \in [a, b]$, se tiene

$$y(t) \leqslant h(t) + \int_a^t h(s)\, g(s)\, \exp\left(\int_s^t g(\tau)\, d\tau\right) ds.$$

En particular, si $h(t) = k$, entonces

$$y(t) \leqslant k \, \exp\left(\int_a^t g(s)\, ds\right).$$

Demostración. Definamos

$$u : t \in [a,b] \longmapsto u(t) = \int_a^t g(\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

Derivando y utilizando las hipótesis, obtenemos

$$u'(t) = g(t)\, y(t) \leqslant g(t)\, \big(h(t) + u(t)\big) = g(t)\, h(t) + g(t)\, u(t).$$

Entonces

$$u'(t) - g(t)\, u(t) \leqslant g(t)\, h(t).$$

Definamos ahora

$$v : t \in [a,b] \longmapsto v(t) = u(t)\, \exp\!\left(-\int_a^t g(\tau)\, d\tau\right),$$

de la cual se obtiene por derivación que

$$v'(t) = \big(u'(t) - g(t)\, u(t)\big)\, \exp\!\left(-\int_a^t g(\tau)\, d\tau\right) \leqslant g(t)\, h(t)\, \exp\!\left(-\int_a^t g(\tau)\, d\tau\right).$$

Fijemos $t \in [a,b]$. Integrando la desigualdad anterior en $[a,t]$ y teniendo en cuenta que $v(a) = u(a) = 0$, se tiene que

$$v(t) = u(t)\, \exp\!\left(-\int_a^t g(\tau)\, d\tau\right) \leqslant \int_a^t g(s)\, h(s)\, \exp\!\left(-\int_a^s g(\tau)\, d\tau\right) ds.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u(t) &\leqslant \exp\!\left(\int_a^t g(\tau)\, d\tau\right) \int_a^t g(s)\, h(s)\, \exp\!\left(-\int_a^s g(\tau)\, d\tau\right) ds \\ &= \int_a^t g(s)\, h(s)\, \exp\!\left(\int_s^t g(\tau)\, d\tau\right) ds, \end{aligned}$$

pues la función $\exp\big(\int_a^t g(\tau)\, d\tau\big)$ no depende de s. A partir de esta desigualdad se deduce la desigualdad buscada:

$$y(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(\tau)\, y(\tau)\, d\tau = h(t) + u(t) \leqslant h(t) + \int_a^t g(s)\, h(s)\, \exp\!\left(\int_s^t g(\tau)\, d\tau\right) ds.$$

Supongamos finalmente que $h(t) = k$. Entonces de la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &\leqslant k + k \int_a^t g(s)\, \exp\!\left(\int_s^t g(\tau)\, d\tau\right) ds \\ &= k - k \int_a^t \frac{d}{ds}\left(exp\!\left(-\int_t^s g(\tau)\, d\tau\right)\right) ds \\ &= k\, \exp\!\left(\int_a^t g(\tau)\, d\tau\right), \end{aligned}$$

y el lema queda probado. □

Prolongación de soluciones

A su vez, existen soluciones del problema de Cauchy (2.1) que pueden ser prolongables. Sean $x_i : t \in I_i \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n$, con $i = 1, 2$, dos soluciones de (2.1). Se dice que x_2 es una prolongación de x_1, si $I_1 \subseteq I_2$ y $x_2(t) = x_1(t)$ para todo $t \in I_1$. Una solución se dirá maximal si no admite prolongación. A continuación, introducimos el concepto de terminal de una curva, el cual nos permite establecer un teorema de prolongación de soluciones.

Definición 2.2. *Sea $x : t \in (a, b) \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$. Se dice que un punto $(b, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (respectivamente $(a, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) pertenece al terminal derecho (izquierdo) de x si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en (a, b) que converge a b (respectivamente a a) tal que $\{x(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z. Denotaremos por $T^+(x)$ (respectivamente $T^-(x)$) al terminal derecho (izquierdo) de x.*

Ahora estamos en condiciones de introducir el siguiente resultado (ver J. Sotomayor [3]):

Teorema 2.2 (Teorema de prolongación)**.** *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Sea $x : t \in (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de (2.1). Entonces x es prolongable a través de b (respectivamente de a) si y solamente si $T^+(x) \cap D \neq \emptyset$ (respectivamente $T^-(x) \cap D \neq \emptyset$).*

Caracterización de atractores

En este trabajo estudiaremos también la estabilidad de los sistemas lineales, tanto de coeficientes constantes como de coeficientes variables. En este contexto será de utilidad el concepto de atractor. Dado un sistema lineal con coeficientes constantes $x'(t) = Ax(t)$, decimos que el origen es un atractor (respectivamente repulsor) si para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $e^{tA}x_0 \longrightarrow 0$ (respectivamente $\|e^{tA}x_0\| \longrightarrow +\infty$) cuando $t \longrightarrow +\infty$. Es posible caracterizar los sistemas en los que el origen es un atractor:

Teorema 2.3. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1) *El origen es un atractor del sistema $x'(t) = Ax(t)$.*

2) *Todos los autovalores de A tienen parte real negativa.*

3) *Existen $\mu > 0$ y $k \geqslant 1$ tales que $\|e^{tA}x_0\| \leqslant ke^{-\mu t}\|x_0\|$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t \geqslant 0$.*

4) *El sistema $x'(t) = Ax(t)$ es topológicamente conjugado a $x'(t) = -x(t)$.*

La demostración de este Teorema también se puede consultar en [3].

Matriz fundamental y Fórmula de Lagrange

En el caso de los sistemas lineales con coeficientes variables, $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, vamos a introducir el concepto de matriz fundamental, el cual necesitaremos para establecer la Fórmula de Lagrange.

Definición 2.3. *Se denomina matriz fundamental de la ecuación $x'(t) = A(t)\,x(t)$ a una solución de la ecuación matricial asociada $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$ tal que sus columnas sean funciones linealmente independientes. Dicha matriz también se denomina núcleo resolvente de la ecuación $x'(t) = A(t)\,x(t)$.*

Teorema 2.4 (Fórmula de Lagrange)**.** *Sea $\Phi = \Phi(t)$ una matriz fundamental para la ecuación $x'(t) = A(t)\,x(t)$. Si $A(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas, entonces la solución de la ecuación diferencial $x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$ que satisface la condición inicial (t_0, x_0) viene dada por*

$$x(t) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,ds.$$

Demostración. Es evidente que $x(t_0) = x_0$. Por otro lado, utilizando que $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,ds\right)\\
&= \Phi'(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,ds + b(t)\\
&= A(t)\,\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0 + A(t)\,\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,ds + b(t)\\
&= A(t)\left(\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,b(s)\,ds\right) + b(t)\\
&= A(t)\,x(t) + b(t),
\end{aligned}$$

y el resultado queda demostrado. □

Números de Dini

Dada una función

$$x : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n,$$

se definen, para cada $t \in (t_0, t_1)$, los cuatro números de Dini siguientes:

$$\begin{aligned}
\bar{D}^+ x(t) &= \limsup_{h \to 0^+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\
\underline{D}^+ x(t) &= \liminf_{h \to 0^+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\
\bar{D}^- x(t) &= \limsup_{h \to 0^-} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\
\underline{D}^- x(t) &= \liminf_{h \to 0^-} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.
\end{aligned}$$

También nos referiremos a los números anteriores como derivada superior por la derecha, derivada inferior por la derecha, derivada superior por la izquierda y derivada inferior por la izquierda, respectivamente.

Lema 2.5. *Sea $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(*a*) *La función x es creciente en $[a, b]$.*

(*b*) *Para todo $t \in (a, b)$, $\underline{D}^- x(t) \leqslant 0$.*

(*c*) *Para todo $t \in (a, b)$, $\underline{D}^+ x(t) \leqslant 0$.*

La demostración está recogida en el libro de M. Guzmán [1].

Capítulo 3

Conceptos de estabilidad

El concepto de estabilidad surge cuando nos cuestionamos el comportamiento a largo plazo de las soluciones de una ecuación diferencial, es decir, el comportamiento cuando la variable independiente tiende a infinito. Sabemos que la dependencia continua de los datos iniciales es una propiedad muy importante que ha de satisfacer un problema de valor inicial para una ecuación diferencial en intervalos finitos de tiempo, es decir, dos soluciones serán próximas cuando las posiciones iniciales x_0 e y_0 sean próximas. Pero, ¿y qué sucede en intervalos infinitos de tiempo? Surge de este modo el concepto de *estabilidad*.

Diremos que una solución de una ecuación diferencial es *estable* si partiendo de un estado inicial próximo obtenemos una solución que se mantiene también próxima a la original en todo instante posterior. Si además, la distancia entre las soluciones tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito nos referiremos a *estabilidad asintótica*. Formalizaremos a continuación estas nociones. Para ello, consideramos la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$ donde la función f está definida en algún conjunto $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, toma valores en $\mathbb{R}^n$ y es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento. Estas condiciones nos permiten garantizar la existencia y unicidad de solución local del problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

En lo que sigue supondremos que esta solución, que denotaremos como $x(t; t_0, x_0)$, está definida en $[t_0, +\infty)$.

Definición 3.1. *Se dice que $x(t; t_0, x_0)$ es una solución estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_1 \in \mathbb{R}^n$ con $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$ se tiene que $x(t; t_0, x_1)$ existe y está definida en $[t_0, +\infty)$ y además se verifica*

$$\|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\| \leq \varepsilon, \tag{3.1}$$

para todo $t \geq t_0$ (Figura 3.1).

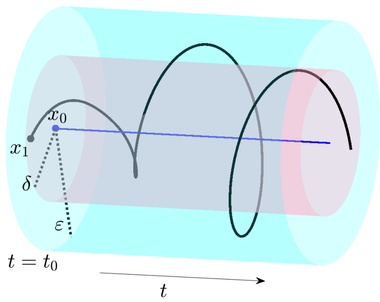

Figura 3.1: En azul la solución $x(t; t_0, x_0)$ y en negro la solución $x(t; t_0, x_1)$. Tomando condiciones iniciales a distancia de x_0 menor que δ, las correspondientes soluciones se mantienen a distancia menor que ε.

Definición 3.2. *Se dice que $x(t; t_0, x_0)$ es una solución asintóticamente estable (ver Figura 3.2) si es una solución estable y existe η tal que si $\|x_1 - x_0\| \leq \eta$ se tiene que*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\| = 0. \tag{3.2}$$

Se dice que una solución es inestable cuando no es estable.

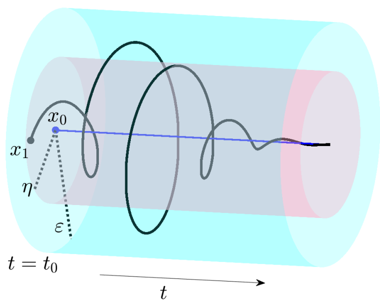

Figura 3.2: En azul la solución $x(t; t_0, x_0)$ y en negro la solución $x(t; t_0, x_1)$. Tomando condiciones iniciales a distancia de x_0 menor que δ, las correspondientes soluciones se mantienen a distancia menor que ε y además, la solución $x(t; t_0, x_1)$ se aproxima, asintóticamente, a $x(t; t_0, x_0)$.

Observación 3.1. *Usamos la terminología "propiedades de estabilidad de una solución" para referirnos a las tres posibilidades que ésta pueda presentar, es decir, que sea estable, asintóticamente estable o inestable.*

En el caso de una ecuación diferencial autónoma $x' = f(x)$ los conceptos anteriores se pueden entender de una forma más simple cuando los pensamos para puntos de equilibrio. Recordemos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se dice punto de equilibrio si $f(x_0) = 0$. A cada punto de equilibrio le corresponde una solución estacionaria $x(t; x_0) = x_0$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Como es habitual, al tratarse de una ecuación autónoma suponemos $t_0 = 0$ y no lo incluimos en la notación. La solución correspondiente a un tiempo inicial diferente no es otra cosa que una traslación en t de la correspondiente a tiempo inicial 0. A continuación, adaptamos las definiciones de estabilidad y estabilidad asintótica al caso de puntos de equilibrio de una ecuación autónoma.

Definición 3.3. *Se dice que un punto de equilibrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_1 \in \mathbb{R}^n$ con $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$ se cumple que*

$$\|x(t; x_1) - x_0\| < \varepsilon, \tag{3.3}$$

para todo $t \geq 0$.

Se dice que x_0 es inestable cuando no es estable.

Definición 3.4. *Se dice que un punto de equilibrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es asintóticamente estable si es estable y además $\delta > 0$ puede escogerse de forma que*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t; x_1) - x_0\| = 0. \tag{3.4}$$

Obsérvese que en la Definición 3.3 no decimos que la solución $x(t; x_1)$ esté definida para todo $t \geq 0$. Esto es consecuencia de lo establecido en la propia definición puesto que la órbita positiva permanece confinada en un compacto y por tanto puede prolongarse para todo $t \geq 0$.

Este pequeño intermedio autónomo nos facilita el trabajo de proporcionar un primer ejemplo de estabilidad.

Ejemplo 3.1. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Las soluciones de la ecuación diferencial*

$$x' = ax,$$

vienen dadas por

$$x(t; x_0) = x_0\, e^{at}.$$

- *Si $a = 0$, las soluciones son de la forma $x(t; x_0) = x_0$, es decir, todas las soluciones son estacionarias y por lo tanto trivialmente estables. Lo que no tendremos sin embargo son soluciones asintóticamente estables.*

- *Si $a < 0$, tenemos un punto de equilibrio asintóticamente estable en $x_0 = 0$. En efecto, como $a < 0$, entonces*

$$\|x(t; x_1) - x_0\| = \|x_1\, e^{at}\| = \|x_1\|\, e^{at} \leq \|x_1\|$$

para todo $t \geq 0$. Bastaría con escoger $\delta = \varepsilon$ en la Definición 3.3 para que se cumpliesen las propiedades requeridas. Por otra parte,

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t;x_1) - x_0\| = \lim_{t \to +\infty} \|x_1\| e^{at} = 0$$

y por lo tanto también tenemos estabilidad asintótica.

- *Si $a > 0$, todas las soluciones son inestables ya que*

$$\|x(t;x_1) - x(t;x_0)\| = \|x_1 - x_0\| e^{at},$$

y por lo tanto, por muy cerca que tomemos x_1 de x_0, la diferencia entre las soluciones se hace arbitrariamente grande a medida que t tiende a $+\infty$.

3.1. Criterios de estabilidad para sistemas lineales

En esta sección obtendremos los criterios para decidir acerca de la estabilidad o estabilidad asintótica de una solución en el caso de los sistemas lineales. Para ello, nuestro libro de referencia será [2]. Un sistema lineal es una ecuación de la forma

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{3.5}$$

donde $A : [t_0, +\infty) \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$ y $b : [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son aplicaciones continuas. Las soluciones de este sistema son funciones $x : [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que son derivables en $[t_0, +\infty)$ y satisfacen la ecuación (3.5). La ecuación (3.5) se llama *homogénea* si $b(t) \equiv 0$, y *no homogénea* en caso contrario. El siguiente resultado establece que el estudio de la estabilidad en los sistemas lineales se puede restringir al caso de la solución nula de los sistemas homogéneos asociados.

Teorema 3.1. *Las propiedades de estabilidad de las soluciones de un sistema $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, donde $A(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas y definidas para todo $t \geqslant t_0$, son las mismas que las de la solución nula del sistema homogéneo asociado.*

Demostración. Utilizamos la notación y para referirnos a las soluciones del sistema homogéneo asociado, así las distinguimos de las soluciones del sistema no homogéneo que estamos denotando con x.

Supongamos en primer lugar que la solución nula del sistema homogéneo asociado es estable; sea $x(t; t_0, x_0)$ una solución arbitraria del sistema no homogéneo. La linealidad de la ecuación diferencial garantiza que para cualquier $x_1 \in \mathbb{R}^n$ la solución $x(t; t_0, x_1)$ está definida para todo $t \geqslant t_0$. Luego sólo queda acotar $\|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\|$. Observemos que la función $u(t) = x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)$ es solución de la ecuación homogénea asociada y además verifica que

$u(t_0) = x_1 - x_0$, es decir, $u(t) = y(t; t_0, x_1 - x_0)$. Sea $\varepsilon > 0$, como la solución nula del sistema homogéneo es estable, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x^*\| < \delta$ entonces $\|y(t; t_0, x^*)\| < \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_0$. Por lo tanto, si $\|x_1 - x_0\| < \delta$ entonces

$$\|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\| = \|y(t; t_0, x_1 - x_0)\| < \varepsilon,$$

para todo $t \geqslant t_0$, y así concluimos que la solución $x(t; t_0, x_0)$ es estable.

Supongamos ahora que la solución nula del sistema homogéneo es asintóticamente estable. Escogiendo un $\delta > 0$ adecuado, si $\|x^*\| < \delta$ entonces $\|y(t; t_0, x^*)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$ y por lo tanto también, si $\|x_1 - x_0\| < \delta$, entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\| = \lim_{t \to +\infty} \|y(t; t_0, x_1 - x_0)\| = 0.$$

Supongamos por último que la solución nula del sistema homogéneo es inestable. Entonces podemos encontrar un valor $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x^*, con $\|x^*\| < \delta$ tal que $\|y(t^*; t_0, x^*)\| \geqslant \varepsilon$ para algún $t^* > t_0$. Sea ahora una solución arbitraria $x(t; t_0, x_0)$ del sistema no homogéneo, y consideremos la condición inicial $x_0 + x^*$, la cual está a distancia de x_0 menor que δ. Como la suma de una solución del sistema no homogéneo más una solución del homogéneo es solución del sistema no homogéneo, se tiene que

$$x(t; t_0, x_0) + y(t; t_0, x^*) = x(t; t_0, x_0 + x^*).$$

Por lo tanto

$$\|x(t^*; t_0, x_0 + x^*) - x(t^*; t_0, x_0)\| = \|y(t^*; t_0, x^*)\| \geqslant \varepsilon.$$

Concluimos así que $x(t; t_0, x_0)$ es inestable. □

Observación 3.2. *Los recíprocos también son ciertos. Si una solución del sistema no homogéneo es estable, entonces también lo es la solución nula del sistema homogéneo asociado, pues en caso contrario tendría que ser inestable y, como acabamos de demostrar, cualquier solución del sistema no homogéneo también lo sería. Análogamente, si una solución del sistema no homogéneo es inestable entonces también lo es la solución nula del sistema homogéneo. Únicamente quedaría por probar que si una solución $x(t; t_0, x_0)$ es asintóticamente estable entonces también lo es la solución nula del homogéneo. Como esta última ya sabemos que es estable, basta con que probemos que $\lim_{t \to +\infty} \|y(t; t_0, x^*)\| = 0$ si $\|x^*\|$ es suficientemente pequeño. Sabemos que podemos escoger $\delta > 0$ tal que si $\|x^*\| < \delta$ entonces*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t; t_0, x^* + x_0) - x(t; t_0, x_0)\| = 0.$$

Como $y(t; t_0, x^*) + x(t; t_0, x_0) = x(t; t_0, x^* + x_0)$ es una solución del sistema no homogéneo, se *sigue que*

$$\lim_{t\to+\infty} \|y(t;t_0,x^*)\| = 0.$$

De acuerdo con el Teorema 3.1, las propiedades de estabilidad de una solución del sistema $x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$ son las mismas que las de la solución nula del sistema homogéneo asociado. En consecuencia, las soluciones de un sistema no homogéneo tienen todas el mismo carácter (el que tenga la solución nula del sistema homogéneo asociado) y tiene sentido utilizar el término de propiedades de estabilidad del *sistema* no homogéneo. Obsérvese que el resultado es válido incluso si $b(t) \equiv 0$.

3.1.1. Acotación y Estabilidad

En general, acotación y estabilidad son conceptos independientes. Sin embargo, para los sistemas lineales homogéneos existe una relación entre ellos. Introduciremos en primer lugar el concepto de solución acotada y a continuación estudiaremos dicha relación. Consideremos la ecuación diferencial $x'(t) = f(t,x(t))$ y la solución $x(t;t_0,x_0)$ definida para $t \geqslant t_0$; decimos que $x(t;t_0,x_0)$ es *acotada* si existe $M > 0$ tal que $\|x(t;t_0,x_0)\| \leqslant M$ para todo $t \geqslant t_0$.

Definición 3.5. *Se dice que un sistema lineal es estable si cada una de sus soluciones es estable.*

Teorema 3.2. *El sistema lineal $x'(t) = A(t)x(t)$ es estable si, y sólo si, todas sus soluciones son acotadas.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que todas las soluciones del sistema son acotadas. Tenemos que ver que la ecuación es estable. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental verificando que $\Phi(t_0) = I$. Como las columnas de la matriz fundamental son soluciones de la ecuación diferencial, se verifica por hipótesis que existe $M > 0$ tal que $\|\Phi(t)\| < M$ para todo $t \geqslant t_0$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ de forma que, si $\|x_0\| < \delta$ entonces

$$\|x(t;t_0,x_0)\| = \|\Phi(t)\, x_0\| \leqslant \|\Phi(t)\|\, \|x_0\| \leqslant M\|x_0\| < \varepsilon.$$

Así probamos que la solución nula del sistema es estable y por el Teorema 3.1 se concluye que el propio sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ es estable.

Supongamos ahora que el sistema es estable y por lo tanto también la solución nula. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_1\| < \delta$ entonces $\|x(t;t_0,x_1)\| < \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_0$. Sea $x(t;t_0,x^*)$ una solución arbitraria no nula y definamos

$$\bar{x}(t) = \frac{\delta}{2}\frac{1}{\|x(t_0;t_0,x^*)\|}\, x(t;t_0,x^*),$$

que también es solución por tratarse de un sistema lineal. Obsérvese que $\|\bar{x}(t_0)\| = \frac{\delta}{2}$ y por lo

tanto
$$\|\bar{x}(t)\| = \frac{\delta}{2}\frac{1}{\|x(t_0;t_0,x^*)\|}\|x(t;t_0,x^*)\| < \varepsilon$$
para todo $t \geqslant t_0$. Concluimos así que
$$\|x(t;t_0,x^*)\| < \frac{2}{\delta}\|x(t_0;t_0,x^*)\|\,\varepsilon,$$
para todo $t \geqslant t_0$, es decir, que la solución arbitraria que hemos considerado está acotada. □

Como consecuencia de este resultado podemos obtener otro criterio adicional de estabilidad para sistemas lineales homogéneos.

Teorema 3.3. *Sean A una matriz de coeficientes constantes y $C(t)$ una función matricial definida y continua en $[t_0,+\infty)$ verificando que $\int_{t_0}^{+\infty}\|C(t)\|\,dt < +\infty$. Si el sistema $x'(t) = Ax(t)$ es estable entonces el sistema $x'(t) = (A + C(t))x(t)$ también es estable.*

Demostración. Como $x'(t) = Ax(t)$ es estable, se sigue del Teorema 3.2 que toda matriz fundamental del sistema está acotada en el intervalo $[t_0,+\infty)$. En particular, dada $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$, existe $M > 0$ tal que $\|\Phi(t)\| < M$ para todo $t \geqslant t_0$. Aplicando la Fórmula de Lagrange (Teorema 2.4) para expresar las soluciones de la ecuación $x'(t) = (A + C(t))x(t)$, se tiene que, siendo $x(t) = x(t;t_0,x_0)$,
$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)\,x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,C(s)\,x(s)\,ds \\ &= \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t-s+t_0)\,C(s)\,x(s)\,ds. \end{aligned}$$
En la última identidad utilizamos que
$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = e^{A(t-t_0)}e^{A(t_0-s)} = e^{A(t-s)} = \Phi(t-s+t_0).$$
Por lo tanto,
$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant \|\Phi(t)\|\,\|x_0\| + \int_{t_0}^{t}\|\Phi(t-s+t_0)\|\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds \\ &\leqslant M\|x_0\| + \int_{t_0}^{t}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds. \end{aligned}$$
Aplicando el Lema de Gronwall 2.1, se sigue que
$$\|x(t)\| \leqslant M\|x_0\|\,e^{M\int_{t_0}^{t}\|C(s)\|\,ds} \leqslant M\|x_0\|\,e^{M\int_{t_0}^{+\infty}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds}.$$
Como por hipótesis $\int_{t_0}^{+\infty}\|C(t)\|\,dt < +\infty$ concluimos que todas las soluciones del sistema de $x'(t) = (A + C(t))x(t)$ están acotadas y por lo tanto, como consecuencia del Teorema 3.2, dicho sistema es estable. □

Con el siguiente resultado probaremos que la estabilidad asintótica de un sistema homogéneo es equivalente a que todas las soluciones del sistema se aproximen asintóticamente a la solución nula cuando $t \to +\infty$. También se prueba que fijada una solución del sistema, cualquier otra, independientemente de la condición inicial, tiende asintóticamente a ella.

Teorema 3.4. *Si $A(t)$ es continua para todo $t \geqslant t_0$, entonces el sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se verifica* $\lim_{t\to+\infty} \|x(t;t_0,x_0)\| = 0$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\lim_{t\to+\infty} \|x(t;t_0,x_0)\| = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces todas las soluciones están acotadas en $[t_0,+\infty)$ y, como consecuencia del Teorema 3.2, el sistema es estable y, en particular, la solución nula es estable. Por otra parte, por hipótesis sabemos que todas las soluciones, independientemente de la condición inicial, convergen asintóticamente a la solución nula y por lo tanto ésta es una solución asintóticamente estable. Se concluye así la estabilidad asintótica del sistema.

Supongamos ahora que $x'(t) = A(t)x(t)$ es asintóticamente estable. Existe por tanto un $\delta > 0$ tal que si $\|x^*\| < \delta$, entonces $\lim_{t\to+\infty} \|x(t;t_0,x^*)\| = 0$. Sea $x(t;t_0,x_0)$ una solución arbitraria no nula (por lo tanto $x(t_0;t_0,x_0) \neq 0$) y definamos

$$\bar{x}(t;t_0,x_0) = \frac{\delta}{2}\frac{1}{\|x(t_0;t_0,x_0)\|}\,x(t;t_0,x_0),$$

que también es solución por tratarse de un sistema lineal. Obsérvese que $\|\bar{x}(t_0;t_0,x_0)\| = \frac{\delta}{2}$ y que por tanto $\lim_{t\to+\infty} \|\bar{x}(t;t_0,x_0)\| = 0$. Entonces también se tiene que $\lim_{t\to+\infty} \|x(t;t_0,x_0)\| = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. □

Observación 3.3. *No es difícil demostrar (ver [2, Sección 2.4.2.]) que un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes verifica lo siguiente:*

- *es estable si y solo si $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$ para todo autovalor λ de A y además el rango de $A - \lambda I$ coincide con la multiplicidad algebraica de λ siempre que $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$.*
- *es asintóticamente estable si y solo si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ para todo autovalor λ de A.*

Utilizando el Teorema 3.4 y la Observación anterior podemos establecer condiciones suficientes sobre la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo $x'(t) = \big(A + C(t)\big)x(t)$ para que sea asintóticamente estable.

Teorema 3.5. *Si el sistema lineal de coeficientes constantes $x'(t) = Ax(t)$ es asintóticamente estable y $C(t)$ es una función matricial definida y continua en $[t_0,+\infty)$ verificando que $\lim_{t\to+\infty} \|C(t)\| = 0$, entonces el sistema $x'(t) = \big(A + C(t)\big)x(t)$ es asintóticamente estable.*

Demostración. Como el sistema $x'(t) = Ax(t)$ es asintóticamente estable se sigue que, teniendo en cuenta la Observación 3.3, que todos los autovalores de A tiene parte real negativa. Además, caracterizando los sistemas lineales con coeficientes constantes $x'(t) = Ax(t)$ que son atractores, se prueba que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa entonces existen constantes $k \geqslant 1$ y $\mu > 0$ tales que $\|e^{At}x\| \leqslant ke^{-\mu t}\|x\|$ para todo $t \geqslant 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ver Teorema 2.3). Aplicando esto a nuestro caso, tenemos que dada una matriz fundamental $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$, se verificará que para constantes k y μ adecuadas, $\|\Phi(t)\| \leqslant ke^{-\mu(t-t_0)}$ para todo $t \geqslant t_0$. Utilizando la Fórmula de Lagrange (Teorema 2.4) y la acotación exponencial de la matriz fundamental se tiene que

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leqslant \|\Phi(t)\|\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t-s+t_0)\|\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds \\ &\leqslant k\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} ke^{-\mu(t-s)}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds.\end{aligned}$$

siendo $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ una solución arbitraria de la ecuación $x'(t) = \big(A + C(t)\big)x(t)$. Puesto que $\lim_{t\to+\infty} \|C(t)\| = 0$, dado un $\varepsilon > 0$ existe $t_1 > t_0$ (el cual dependerá de ε) tal que $\|C(t)\| \leqslant \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_1$. Como nos interesa conocer el límite cuando $t \to +\infty$ de $x(t)$, podemos suponer que $t \geqslant t_1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leqslant k\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t_1} ke^{-\mu(t-s)}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds + \int_{t_1}^{t} ke^{-\mu(t-s)}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds \\ &\leqslant ke^{-\mu(t-t_0)}(\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} ke^{-\mu(t_0-s)}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds + \int_{t_1}^{t} ke^{-\mu(t_0-s)}\varepsilon\|x(s)\|\,ds) \\ &= ke^{-\mu(t-t_0)}(M + \int_{t_1}^{t} e^{-\mu(t_0-s)}\varepsilon\|x(s)\|\,ds),\end{aligned}$$

para todo $t \geqslant t_1$, donde $M = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} ke^{-\mu(t_0-s)}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds$ es constante. Entonces,

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \leqslant kM + k\varepsilon \int_{t_1}^{t} e^{\mu(s-t_0)}\|x(s)\|\,ds,$$

y aplicando el Lema de Gronwall 2.1,

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \leqslant kMe^{\int_{t_1}^{t} k\varepsilon\,ds} = kMe^{k\varepsilon(t-t_1)}.$$

De este modo probamos que

$$\|x(t)\| \leqslant kMe^{\mu t_0 - k\varepsilon t_1}e^{(k\varepsilon-\mu)t},$$

para todo $t \geqslant t_1$ y como $\mu > 0$ podemos escoger ε tal que $k\varepsilon - \mu < 0$. En tales condiciones, tomando límite cuando $t \to +\infty$ obtenemos que $\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0$. De este modo, concluimos que todas las soluciones $x(t;t_0,x_0)$ del sistema $x'(t) = \big(A + C(t)\big)x(t)$ verifican que $\lim_{t\to+\infty} \|x(t;t_0,x_0)\| = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y, como consecuencia del Teorema 3.4, dicho sistema es asintóticamente estable. $\square$

3.2. Criterios de estabilidad para sistemas no lineales. Linealización

Los resultados que hemos visto en la sección anterior para sistemas lineales nos van a ser de gran utilidad a la hora de aproximar un sistema no lineal por uno lineal.

Sea $x'(t) = f(t, x(t))$ una ecuación diferencial y sea $\bar{x}(t) = \bar{x}(t; t_0, x_0)$ una solución fijada. Para estudiar sus propiedades de estabilidad introducimos una nueva variable dependiente:

$$y(t) = x(t) - \bar{x}(t). \tag{3.6}$$

La nueva ecuación diferencial es

$$y'(t) = x'(t) - \bar{x}'(t) = f(t, x(t)) - f(t, \bar{x}(t)) = f(t, y(t) + \bar{x}(t)) - f(t, \bar{x}(t)). \tag{3.7}$$

Esta ecuación diferencial se denomina *ecuación variacional* de $x'(t) = f(t, x(t))$ relativa a la solución $\bar{x}(t)$. La función idénticamente nula $y(t; t_0, x_0) = 0$ es solución de la ecuación variacional y sus propiedades de estabilidad serán las de $\bar{x}(t; t_0, x_0)$.

Si suponemos que la función f tiene derivadas continuas con respecto a la segunda variable, la ecuación (3.7) se puede escribir de la forma

$$y'(t) = f(t, \bar{x}(t)) + D_x f(t, \bar{x}(t))y(t) + R(t, y(t)) - f(t, \bar{x}(t)) = D_x f(t, \bar{x}(t))y(t) + R(t, y(t)),$$

con $R(t, y)$ tal que $\|R(t, y)\|/\|y\| \to 0$ cuando $\|y\| \to 0$. En definitiva, la ecuación variacional responde a una expresión general $x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x)$, con $f(t, x)/\|x\| \to 0$ cuando $\|x\| \to 0$. Estudiaremos bajo qué condiciones las propiedades de estabilidad del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ se trasladan a la solución nula de la ecuación no lineal. Ha de quedar claro que estas propiedades no son siempre trasladables, tal y como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Sea la ecuación escalar $x' = x^2$. El origen es inestable mientras que la aproximación lineal en dicho punto es la ecuación $x' = 0$, cuyas soluciones son todas estables.*

En el siguiente teorema vamos a ver que, cuando la matriz A es una matriz de coeficientes constantes, la estabilidad asintótica de $x'(t) = Ax(t)$ sí se transfiere a la ecuación no lineal, $x'(t) = Ax(t) + f(t, x)$, bajo una hipótesis adicional sobre f [2].

Teorema 3.6. *Supongamos que:*

1. *Todos los autovalores de A tienen parte real negativa.*
2. *La función f está definida en un abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, es continua y localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable en D y existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que $[t_0, +\infty) \times B(0, r) \subset D$.*

3. $\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ *uniformemente en* $[t_0, +\infty)$.

Entonces la solución nula de la ecuación $x'(t) = Ax(t) + f(t,x)$ *es asintóticamente estable.*

Demostración. Sea $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ una solución de $x'(t) = Ax(t) + f(t,x)$ con $\|x_0\| < r$. Aplicando la fórmula de Lagrange obtenemos que, en el intervalo maximal de definición de la solución,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f\big(s, x(s)\big)\, ds.$$

Caracterizando los sistemas lineales con coeficientes constantes $x'(t) = Ax(t)$ que son atractores, se prueba que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa entonces existen constantes $k \geqslant 1$ y $\mu > 0$ tales que $\|e^{At}x\| \leqslant ke^{-\mu t}\|x\|$ para todo $t \geqslant 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ver 2.3). Aplicado a nuestro caso, $\|e^{A(t-t_0)}x\| \leqslant ke^{-\mu(t-t_0)}\|x\|$ para todo $t \geqslant t_0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Utilizando esta acotación exponencial obtenemos

$$\|x(t)\| \leqslant k\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} ke^{-\mu(t-s)}\|f\big(s, x(s)\big)\|\, ds,$$

para todo $t \geqslant t_0$ donde $x(t;t_0,x_0)$ esté definida. Por otra parte, por hipótesis se cumple

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$$

uniformemente en $[t_0, +\infty)$, luego para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ independiente de t (que podemos suponer menor que r), tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|f(t,x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|/k$.

Por lo tanto, para cada t perteneciente al intervalo maximal de definición, mientras se satisfaga que $\|x(s)\| < \delta$ para todo $s \in [t_0, t]$, tendremos

$$\|x(t)\| \leqslant k\|x_0\|e^{-\mu(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} ke^{-\mu(t-s)}\frac{\varepsilon}{k}\|x(s)\|\, ds,$$

o equivalentemente,

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \leqslant k\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} ke^{\mu(s-t_0)}\varepsilon\|x(s)\|\, ds.$$

Como consecuencia del Lema de Gronwall 2.1, obtenemos

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \leqslant k\|x_0\|\, e^{\int_{t_0}^{t}\varepsilon\, ds} = k\|x_0\|e^{\varepsilon(t-t_0)}$$

y por lo tanto, se verifica que

$$\|x(t)\| \leqslant k\|x_0\|e^{(\varepsilon-\mu)(t-t_0)}. \tag{3.8}$$

Como tenemos libertad en la elección de ε, suponemos que $\varepsilon < \mu$. Así, $e^{(\varepsilon-\mu)(t-t_0)} \leqslant 1$ para todo

$t \geqslant t_0$ y de este modo

$$\|x(t)\| \leqslant k\|x_0\|, \tag{3.9}$$

para todo $t \geqslant t_0$ tal que $\|x(s)\| < \delta$ para cada $s \in [t_0, t]$. Si ahora imponemos la condición $\|x_0\| < \frac{\delta}{k} < \delta < r$, tendremos que $\|x(t)\|$ está acotada en (3.9), con las restricciones indicadas, por una constante estrictamente menor que δ. Se sigue que (3.9) será válida para todo $t \geqslant t_0$ donde x esté definida. Como consecuencia del Teorema 2.2 sobre prolongación de soluciones se tiene que si $\|x_0\| < \frac{\delta}{k}$ entonces $x(t; t_0, x_0)$ está definida para todo $t \geqslant t_0$. Como la acotación (3.9) es válida para todo $t \geqslant t_0$ se deduce la estabilidad de la solución nula. Por último, de (3.8) resulta la estabilidad asintótica. □

Teorema 3.7. *Supongamos que:*

1. *Al menos uno de los autovalores de A tiene parte real positiva.*
2. *La función f está definida en un abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, es continua y localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable en D y existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que $[t_0, +\infty) \times B(0, r) \subset D$.*
3. $\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$ *uniformemente en $[t_0, +\infty)$.*

Entonces la solución nula de la ecuación $x'(t) = Ax(t) + f(t, x)$ es inestable.

Demostración. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que A está en forma canónica de Jordan compleja y tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

donde A_1 es una matriz $k \times k$ en la que todos sus autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tienen parte real mayor que 0 y A_2 es una matriz $(n-k) \times (n-k)$ tal que todos sus autovalores $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ tienen parte real menor o igual a 0. Las submatrices A_1 y A_2 podemos suponerlas de la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1\alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{k-1}\alpha \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{k+1} & \delta_{k+1}\alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1}\alpha \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde α es una constante que podremos escoger arbitrariamente pequeña y cada δ_i para $i \neq k$ e $i \neq n$ toma el valor 0 o 1 en función de la distribución de las cajas de Jordan. Cuando en una expresión tengamos que usar δ_k o δ_n, entenderemos que su valor es 0.

Dada una solución $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, definimos

$$R(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i(t)|^2} \quad \text{y} \quad \rho(t) = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} |x_i(t)|^2}.$$

Por reducción al absurdo, supongamos que la solución nula es estable. De la tercera hipótesis se sigue que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces

$$\|f(t, x)\| \leqslant \varepsilon \|x\| \tag{3.10}$$

para todo $t \geqslant t_0$. Por la estabilidad, existe $\eta > 0$ tal que si $\|x_0\| < \eta$ entonces $x(t; t_0, x_0)$ está definida para todo $t \geqslant t_0$ y satisface $\|x(t; t_0, x_0)\| < \delta$ para todo $t \geqslant t_0$ y, por lo tanto, la acotación (3.10) es válida a lo largo de la solución.

A continuación probaremos que para cada solución que verifique las condiciones anteriores, se cumple

$$R'(t) \geqslant \frac{1}{2}\sigma R(t) - \varepsilon \rho(t), \tag{3.11}$$

y

$$\rho'(t) \leqslant \varepsilon(R(t) + \rho(t)) + \frac{\sigma}{20}\rho(t), \tag{3.12}$$

donde σ es tal que $\mathrm{Re}(\lambda_i) \geqslant \sigma > 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Así

$$(R(t) - \rho(t))' \geqslant (\frac{1}{2}\sigma - \varepsilon)R(t) - (2\varepsilon + \frac{\sigma}{20})\rho(t).$$

Escogiendo $\varepsilon < \frac{\sigma}{20}$ se puede deducir la desigualdad siguiente

$$(R(t) - \rho(t))' \geqslant \frac{\sigma}{4}(R(t) - \rho(t)),$$

luego a lo largo de la solución se verifica

$$R(t) - \rho(t) \geqslant (R(t_0) - \rho(t_0))e^{\frac{\sigma}{4}(t - t_0)}.$$

Si escogemos la condición inicial x_0 verificando no solo que $\|x_0\| < \eta$ sino también la condición $R(t_0) = 2\rho(t_0)$, tendremos

$$R(t) \geqslant \rho(t_0)\, e^{\frac{\sigma}{4}(t - t_0)} + \rho(t) \geqslant \rho(t_0)\, e^{\frac{\sigma}{4}(t - t_0)}.$$

En tal caso, $\lim_{t \to +\infty} R(t) = +\infty$, lo que supone una contradicción ya que

$$R(t) \leqslant \|x(t)\| = \|x(t; t_0, x_0)\| < \delta,$$

para todo $t \geqslant t_0$; por lo tanto la solución nula es inestable.

Prueba de la acotación (3.11):

Por definición $R^2(t) = \sum_{i=1}^k |x_i(t)|^2 = \sum_{i=1}^k x_i(t)\bar{x}_i(t)$ y derivando con respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned} 2R(t)R'(t) &= \sum_{i=1}^{k} (x_i'(t)\bar{x}_i(t) + x_i(t)\bar{x}_i'(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \Big(\lambda_i x_i(t)\bar{x}_i(t) + \delta_i \alpha x_{i+1}(t)\bar{x}_i(t) + f_i(t,x(t))\bar{x}_i(t) \\ &\quad + \bar{\lambda}_i x_i(t)\bar{x}_i(t) + \delta_i \alpha x_i(t)\bar{x}_{i+1}(t) + \bar{f}_i(t,x(t))x_i(t) \Big). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Operando adecuadamente, se obtiene

$$\begin{aligned} 2R(t)R'(t) &= \sum_{i=1}^{k} 2\operatorname{Re}(\lambda_i)|x_i(t)|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{k} (\delta_i (x_{i+1}(t)\bar{x}_i(t) + \bar{x}_{i+1}(t)x_i(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} (f_i(t,x(t))\bar{x}_i(t) + \bar{f}_i(t,x(t))x_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2\operatorname{Re}(\lambda_i)|x_i(t)|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{k} \delta_i (|x_i(t) + x_{i+1}(t)|^2 - |x_i(t)|^2 - |x_{i+1}(t)|^2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} 2\operatorname{Re}(\bar{x}_i(t) f_i(t,x(t))). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Usando ahora que $\operatorname{Re}(z) \geq -|z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, a partir de (3.14) obtenemos la desigualdad

$$2R(t)R'(t) \geq \sum_{i=1}^{k} 2\operatorname{Re}(\lambda_i)|x_i(t)|^2 - \alpha \sum_{i=1}^{k} (\delta_i |x_i(t)|^2 + \delta_i |x_{i+1}(t)|^2) - 2\sum_{i=1}^{k} |\bar{x}_i(t)||f_i(t,x(t))|. \tag{3.15}$$

Si utilizamos que σ es cota inferior de las partes reales de los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y que

$$\sum_{i=1}^{k} (\delta_i |x_i(t)|^2 + \delta_i |x_{i+1}(t)|^2) \leq 2\sum_{i=1}^{k} |x_i(t)|^2,$$

de (3.15) se sigue que

$$2R(t)R'(t) \geq 2\sigma \sum_{i=1}^{k} |x_i(t)|^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^{k} |x_i(t)|^2 - 2\sum_{i=1}^{k} |\bar{x}_i(t)||f_i(t,x(t))|. \tag{3.16}$$

Teniendo en cuenta que $|x_i(t)| \leq R(t)$ para todo $i = 1, \ldots, k$, entonces

$$\begin{aligned} 2R(t)R'(t) &\geq 2\sigma R(t)^2 - 2\alpha R(t)^2 - 2R(t) \sum_{i=1}^{k} |f_i(t, x(t))| \\ &\geq 2\sigma R(t)^2 - 2\alpha R(t)^2 - 2R(t) \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x(t))|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Además, por la suposición de que la solución nula es estable, $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ a lo largo de la solución $x(t)$. Luego

$$2R(t)R'(t) \geq 2\sigma R(t)^2 - 2\alpha R(t)^2 - 2\varepsilon R(t)\|x(t)\|. \tag{3.18}$$

Finalmente, utilizando la equivalencia entre diferentes normas de $\mathbb{C}^n$ obtenemos

$$2R(t)R'(t) \geq 2\sigma R(t)^2 - 2\alpha R(t)^2 - 2R(t)\varepsilon(R(t) + \rho(t)). \tag{3.19}$$

Por lo tanto,

$$R'(t) \geq \sigma R(t) - \alpha R(t) - \varepsilon R(t) - \varepsilon \rho(t) = (\sigma - \alpha - \varepsilon)R(t) - \varepsilon \rho(t),$$

y como α y ε pueden suponerse arbitrariamente pequeños basta con suponer $\alpha + \varepsilon \leqslant \frac{\sigma}{2}$ para concluir la validez de la acotación (3.11).

Prueba de la acotación (3.12): Por definición, se tiene que

$$\rho^2(t) = \sum_{i=k+1}^{n} |x_i(t)|^2 = \sum_{i=k+1}^{n} x_i(t)\bar{x}_i(t).$$

Derivando con respecto a t obtenemos (prescindiremos de aquellos pasos que son idénticos a los de la acotación de R')

$$\begin{aligned} 2\rho(t)\rho'(t) = \sum_{i=k+1}^{n} 2\,\mathrm{Re}(\lambda_i)|x_i(t)|^2 + \alpha \sum_{i=k+1}^{n} \delta_i \big(x_{i+1}(t)\bar{x}_i(t) + \bar{x}_{i+1}(t)x_i(t)\big) \\ + \sum_{i=k+1}^{n} \big(f_i(t, x(t))\bar{x}_i(t) + \bar{f}_i(t, x(t))x_i(t)\big). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{Re}(\lambda_i) \geq 0$ para todo $i = k+1, \ldots, n$, de (3.20) se sigue la desigualdad

$$2\rho(t)\rho'(t) \leq \alpha \sum_{i=k+1}^{n} \delta_i 2\,\mathrm{Re}(x_i(t)\bar{x}_{i+1}(t)) + \sum_{i=k+1}^{n} 2\,\mathrm{Re}(\bar{x}_i(t) f_i(t, x(t))). \tag{3.21}$$

Ahora utilizando que $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$2\rho(t)\rho'(t) \leq 2\alpha \sum_{i=k+1}^{n} \delta_i |x_i(t)||\bar{x}_{i+1}(t)| + 2 \sum_{i=k+1}^{n} |\bar{x}_i(t)||f_i(t, x(t))|. \tag{3.22}$$

A continuación, usando que $|x_i(t)| \leq \rho(t)$ para todo $i = k+1, \ldots, n$ obtenemos

$$\begin{aligned} 2\rho(t)\rho'(t) &\leq 2\alpha \sum_{i=k+1}^{n} \rho(t)^2 + 2 \sum_{i=k+1}^{n} \rho(t)|f_i(t, x(t))| \\ &\leq 2\alpha(n-k)\rho(t)^2 + 2\rho(t)\|f(t, x(t))\|. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Finalmente, debido a la suposición de que la solución nula es estable, $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ a lo largo de la solución $x(t)$,

$$2\rho(t)\rho'(t) \leq 2\alpha(n-k)\rho(t)^2 + 2\rho(t)\varepsilon(R(t) + \rho(t)). \tag{3.24}$$

El hecho de utilizar diferentes normas en $\mathbb{C}^n$ no altera la demostración, únicamente ocurre que ε se vería afectado por factores constantes que nos harían modificar su valor aunque en cualquier caso, y esto es lo esencial, lo podríamos suponer arbitrariamente pequeño.

Por lo tanto

$$\rho'(t) \leqslant \alpha(n-k)\rho(t) + \varepsilon(R(t) + \rho(t)),$$

y como α puede suponerse arbitrariamente pequeño, podemos suponer que $\alpha(n-k) \leqslant \dfrac{\sigma}{20}$ para concluir la validez de la acotación (3.12). $\square$

Observación 3.4. *Los Teoremas 3.6 y 3.7 pueden probarse con hipótesis menos restrictivas. Concretamente se puede sustituir la hipótesis relativa a la convergencia a 0 uniformemente en t del cociente $||f(t,x)||/||x||$ cuando $||x||$ tiende a 0 por:*

1 *Existen $k > 0$ y $\delta > 0$ tales que $||f(t,x)|| \leqslant k||x||$ para todo $t \geqslant t_0$ cuando $||x|| < \delta$.*

2 *Para todo $\varepsilon > 0$ existen $\bar{t} \geqslant t_0$ y $\bar{\delta} > 0$ tales que $||f(t,x)|| \leqslant \varepsilon||x||$ para todo $t \geqslant \bar{t}$ cuando $||x|| < \bar{\delta}$.*

Con estas hipótesis se pueden establecer teoremas análogos a los anteriores para ecuaciones diferenciales del tipo

$$x'(t) = Ax(t) + B(t)x(t) + f(t,x),$$

siendo B continua y verificando $\lim_{t\to 0} ||B(t)|| = 0$ y donde la perturbación no lineal $f(t,x)$ suponemos que satisface las mismas propiedades que se exigen en los teoremas previos.

3.3. Estabilidad uniforme

Existen sistemas lineales cuya solución nula es asintóticamente estable para los que, sin embargo, una pequeña perturbación puede provocar la pérdida de la estabilidad. Es entonces cuando cobra especial relevancia el concepto de estabilidad uniforme que introduciremos posteriormente, antes ilustraremos con un ejemplo, debido a Perron [1, 2], la situación que acabamos de describir.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -\alpha x \\ y' = \big(\operatorname{sen}(\ln t) + \cos(\ln t) - 2\alpha\big)y + x^2 \end{cases} \tag{3.25}$$

definido para todo $t > 0$ y con α tal que $1 < 2\alpha < \sqrt{2}$. Es inmediato que el sistema presenta una solución idénticamente nula. Por otro lado, la parte lineal de (3.25) está dada por

$$\begin{cases} x' = -\alpha x, \\ y' = (\operatorname{sen}(\ln t) + \cos(\ln t) - 2\alpha)y. \end{cases} \tag{3.26}$$

En primer lugar vamos a estudiar las propiedades de estabilidad de la solución nula de la parte lineal. Nótese que las ecuaciones están desacopladas luego pueden analizarse de forma separada.

En la primera ecuación (lineal, homogénea y con coeficientes constantes) es inmediato que la solución nula es asintóticamente estable. La segunda es de la forma $y'(t) = a(t)y(t)$ con

$$a(t) = \operatorname{sen}(\ln t) + \cos(\ln t) - 2\alpha$$

definida para todo $t > 0$ y continua en $(0, +\infty)$. Por lo tanto, para cada $t_0 > 0$, la solución $y(t; t_0, y_0)$ estará definida para todo $t \geqslant t_0$ y además

$$y(t; t_0, y_0) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}. \tag{3.27}$$

Nuestro primer objetivo es probar que la solución nula de (3.27) es asintóticamente estable. Integrando se obtiene que

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds = t(\operatorname{sen}(\ln t) - 2\alpha) - t_0(\operatorname{sen}(\ln t_0) - 2\alpha).$$

Como $\operatorname{sen}(\ln t) - 2\alpha < 1 - 2\alpha < 0$ se tiene que $t(\operatorname{sen}(\ln t) - 2\alpha) < t(1 - 2\alpha)$ y por lo tanto $\lim_{t\to+\infty} A(t) = -\infty$. Entonces podemos concluir que $\lim_{t\to+\infty} y(t; t_0, y_0) = 0$ y, en definitiva, la estabilidad asintótica de la solución nula.

Ahora nuestro siguiente objetivo es ver que al añadir la perturbación $h(t, x) = (0, x^2)$ se pierde la estabilidad.

Empezamos fijando una condición inicial $(t_0,(x_0,y_0))$ con $t_0 > 0$. La solución de la primera ecuación del sistema es

$$x(t;t_0,x_0) = e^{-\alpha(t-t_0)}x_0.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación x por esta solución obtenemos una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$y'(t) = a(t)y(t) + e^{-2\alpha(t-t_0)}x_0^2.$$

Resolviéndola obtenemos

$$y(t;t_0,(x_0,y_0)) = \big(y_0 + x_0^2\int_{t_0}^{t} e^{-(A(s)+2\alpha(s-t_0))}ds\big)e^{A(t)}.$$

Vamos a distinguir dos términos en la expresión: la solución general de la ecuación lineal homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea. Sin embargo, ya hemos visto con anterioridad que la solución de la ecuación lineal homogénea, independientemente de la condición inicial, es asintóticamente estable. Luego el término que corresponde a la solución general de dicha ecuación, es decir,

$$e^{A(t)}y_0,$$

tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$. Por tanto, sólo tenemos que estudiar el comportamiento de la función

$$e^{A(t)}x_0^2\int_{t_0}^{t} e^{-(A(s)+2\alpha(s-t_0))}ds.$$

Vamos a prescindir de los factores constantes para simplificar. Luego definimos la función

$$\phi(t) = e^{t\,\mathrm{sen}(\ln t)-2\alpha t}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\,\mathrm{sen}(\ln s)s}ds\right),$$

la cual es una función positiva. Nuestro último objetivo es encontrar una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to+\infty}\phi(t_n) = +\infty$. Para ello, escogemos $t_n = e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ y así $\mathrm{sen}(\ln(t_n)) = 1$, por tanto el primer factor exponencial que interviene en la expresión de ϕ alcanza sus valores máximos. (Tenemos que tener en cuenta que en función del valor de t_0 tendremos que eliminar un cierto número de términos en la sucesión para que se satisfaga que $t_n \geqslant t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces tenemos

$$\phi(t_n) = e^{t_n\,\mathrm{sen}(\ln t_n)-2\alpha t_n}(\int_{t_0}^{t_n} e^{-\,\mathrm{sen}(\ln s)s}ds) = e^{t_n(1-2\alpha)}(\int_{t_0}^{t_n} e^{-\,\mathrm{sen}(\ln s)s}ds).$$

Sea $\beta \in (0,\frac{\pi}{2})$. Denotamos $t'_n = t_n e^{-\pi} = e^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, entonces para cualquier $s \in [t'_n, t'_n e^{\beta}]$ se cumple $-\frac{\pi}{2}+2n\pi \leqslant \ln s \leqslant -\frac{\pi}{2}+2n\pi+\beta$. Luego podemos realizar la siguiente acotación

$$s \geqslant -s\,\mathrm{sen}(\ln s) \geqslant s\cos\beta.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\phi(t_n) &\geqslant e^{t_n(1-2\alpha)}\Big(\int_{t'_n}^{t'_n e^{\beta}} e^{-\operatorname{sen}(\ln s)s} ds\Big)\\
&\geqslant e^{t_n(1-2\alpha)}\Big(\int_{t'_n}^{t'_n e^{\beta}} e^{s\cos\beta} ds\Big)\\
&\geqslant e^{t_n(1-2\alpha)}\, e^{t'_n\cos\beta}\, t'_n\,(e^{\beta}-1)\\
&= e^{t'_n(e^{\pi}(1-2\alpha)+\cos\beta)}\, t'_n\,(e^{\beta}-1).
\end{aligned}$$

Luego si β es tal que $e^{\pi}(1-2\alpha)+\cos\beta > 0$, tendremos tal y como queríamos demostrar que $\lim_{n\to+\infty}\phi(t_n) = +\infty$. Para ello basta escoger β lo suficientemente próximo a 0 para que $\cos\beta > e^{\pi}(2\alpha-1)$, imponiendo antes sobre α la condición $2\alpha < 1+e^{-\pi}$, con el fin de que la acotación anterior pueda satisfacerse para algún valor $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Una vez explicado el Ejemplo de Perron, es buen momento para introducir el concepto de solución uniformemente estable.

Definición 3.6. *Decimos que una solución $x(t;t_0,x_0)$ es uniformemente estable en $[t_0,+\infty)$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $t_1\geqslant t_0$ y se cumple que*

$$\|x(t_1;t_1,x_1)-x(t_1;t_0,x_0)\|<\delta,$$

entonces se verifica que

$$\|x(t;t_1,x_1)-x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon$$

para todo $t\geqslant t_1$.

En general, una ecuación escalar lineal de la forma $x'(t)=a(t)x(t)$, con $a:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua y $x\in\mathbb{R}$, admite una caracterización para la estabilidad uniforme de su solución nula en términos de las propiedades de acotación de la matriz fundamental $e^{\int_{\bar{t}_0}^{t} a(s)ds}$ para todo $t\geqslant\bar{t}_0\geqslant t_0$.

Proposición 3.8. *La solución nula de la ecuación lineal $x'(t)=a(t)x(t)$ es uniformemente estable en $[t_0,+\infty)$ si y sólo si existe $M>0$ tal que*

$$e^{\int_{\bar{t}_0}^{t} a(s)ds}\leqslant M$$

para cualesquiera t y $\bar{t}_0$ tales que $t\geqslant\bar{t}_0\geqslant t_0$.

Volviendo al Ejemplo de Perron en el caso lineal, nosotros habíamos demostrado que la solución nula era asintóticamente estable. Veremos ahora que, sin embargo, dicha solución no es uniformemente estable. Es decir, que $e^{\int_{\bar{t}_0}^{t} a(s)ds}$ no se puede acotar superiormente en los términos de la Proposición 3.8.

Para ello, tenemos que construir una sucesión de intervalos disjuntos $\{[\bar{t}_0^{(k)},t^{(k)}]\}_{k\geqslant k_0}$, con $k_0\in\mathbb{N}$, tales que $\lim_{k\to+\infty} \bar{t}_0^{(k)} = +\infty$ y

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\int_{\bar{t}_0^{(k)}}^{t^{(k)}} a(s)ds} = +\infty. \tag{3.28}$$

Definimos la función $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 2\alpha$ para $\theta > 0$. La función f alcanza su valor máximo $\sqrt{2} - 2\alpha > 0$ en cualquier $\theta_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis sabemos que

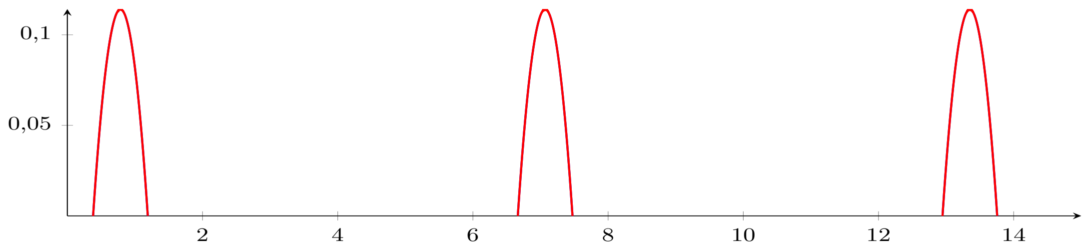

Figura 3.3: Representación de la parte positiva de la función $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 2\alpha$ para $\theta > 0$, con $\alpha = 0{,}65$. La función f alcanza su valor máximo $\sqrt{2} - 2\alpha > 0$ en cualquier $\theta_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$.

$2\alpha < \sqrt{2}$ luego dicho valor máximo es estrictamente positivo. Por lo tanto, se sigue la existencia de $\eta > 0$ y $c > 0$ tales que $f(\theta) > c > 0$ para todo $\theta \in [\theta_k - \eta, \theta_k + \eta]$; la Figura 3.3 ilustra este comportamiento de la función f. Llamamos $\bar{t}_0^{(k)} = e^{\theta_k - \eta}$ y $t^{(k)} = e^{\theta_k + \eta}$. Por construcción, $a(s) = f(\ln s) > c$ para todo $s \in [\bar{t}_0^{(k)}, t^{(k)}]$. Es en este punto donde uno puede entender la idea que subyace en el ejemplo de Perron. La construcción conduce a una sucesión de intervalos, disjuntos dos a dos y con longitudes crecientes exponencialmente, donde la función $a(s)$ toma valores estrictamente positivos; en la Figura 3.4 se muestran los tres primeros intervalos de esta sucesión. Tomando tiempos iniciales en estos intervalos las correspondientes soluciones crecerán inicialmente alcanzando valores máximos cada vez más grandes; esto supone una obstrucción para la estabilidad uniforme (la Figura 3.5 ilustra este comportamiento para los dos primeros intervalos).

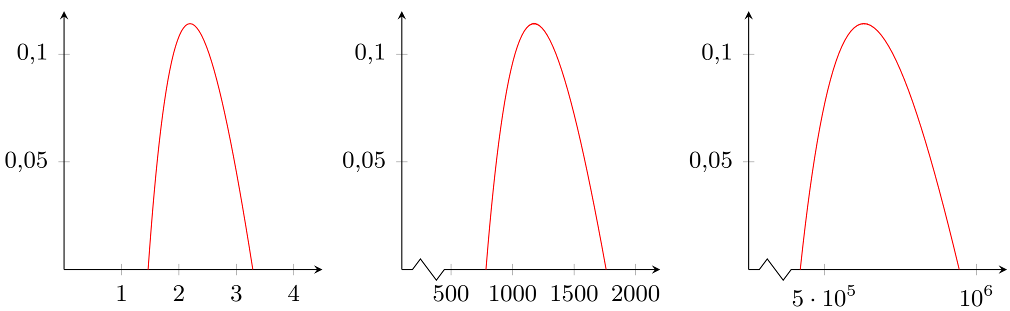

Figura 3.4: Representación de la parte positiva de la función $a(s) = f(\ln(s)) = \operatorname{sen}(\ln(s)) + \cos(\ln(s)) - 2\alpha$ para $s > 0$ con $\alpha = 0{,}65$.

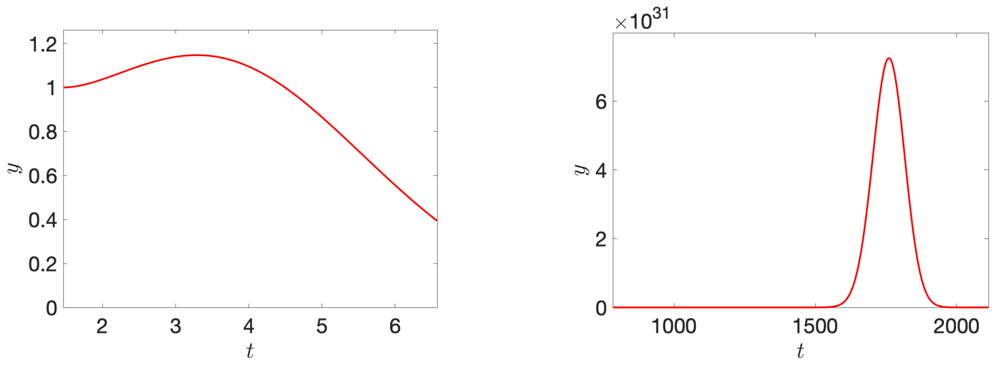

Figura 3.5: En estas figuras se muestran la segunda componente de una solución del ejemplo de Perron para condiciones iniciales (t_0, y_0) con $y_0 = 1$. A la izquierda el tiempo inicial t_0 pertenece al primero de los intervalos en la Figura 3.4, mientras que a la derecha se ha considerado t_0 en el segundo de los intervalos. Se observa cómo el valor máximo de esta componente se dispara, mostrándonos la obstrucción para la estabilidad uniforme.

Por otro lado,

$$\int_{\bar{t}_0^{(k)}}^{t^{(k)}} a(s)ds > c\int_{\bar{t}_0^{(k)}}^{t^{(k)}} ds = c(t^{(k)} - \bar{t}_0^{(k)}) = ce^{\theta_k}(e^{\eta} - e^{-\eta})$$

y como $\lim_{k\to+\infty}\theta_k = +\infty$, se sigue que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\bar{t}_0^{(k)}}^{t^{(k)}} a(s)ds = +\infty.$$

Así obtenemos (3.28), tal y como queríamos demostrar. Por tanto, se puede concluir que la estabilidad asintótica no implica la estabilidad uniforme.

A continuación recogemos un resultado que proporciona condiciones suficientes para que la estabilidad uniforme de un sistema lineal homogéneo con coeficientes variables sea persistente frente a pequeñas perturbaciones. La demostración puede consultarse en [2].

Teorema 3.9. *Sea la ecuación $x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t))$. Supongamos que existen $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y V un entorno del origen en $\mathbb{R}^n$ tales que $A(t)$ es continua en $(\beta - \sigma, +\infty)$ y la función $f(t, x)$ es continua y con derivadas parciales primeras continuas con respecto a $x_1, \ldots, x_n$ en el conjunto $(\beta - \sigma, +\infty) \times V$. Supongamos también que existe una función continua $\alpha : [\beta, +\infty) \to [0, +\infty)$ tal que*

$$\int_{\beta}^{+\infty} \alpha(t)dt < +\infty \quad y \quad \|f(t, x)\| \leqslant \alpha(t)\|x\| \quad si\ t \geqslant \beta. \tag{3.29}$$

Entonces, si la solución nula de $x'(t) = A(t)x(t)$ es uniformemente estable, también la solución nula de $x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t))$ es uniformemente estable.

Sin embargo, este teorema no puede considerarse como una extensión del Teorema 3.6 al caso de perturbaciones de sistemas lineales homogéneos con coeficientes variables. Esto se explica al observar que no toda perturbación f verificando la hipótesis 3 del Teorema 3.6 cumple la condición (3.29) del Teorema (3.9) y viceversa. Se necesita establecer un concepto de solución uniformemente asintóticamente estable, que no será la mera combinación de la estabilidad uniforme con el apropiado comportamiento asintótico.

Definición 3.7. *Una solución $x(t;t_0,x_0)$ es uniformemente asintóticamente estable en $[t_0,+\infty)$ si verifica las propiedades siguientes:*

- *$x(t;t_0,x_0)$ es uniformemente estable en $[t_0,+\infty)$;*
- *Existe $\delta>0$ tal que para cada $\varepsilon>0$ existe un $T=T(\varepsilon)>0$ de modo que si*

  $$\|x(t_1;\bar{t}_0,\bar{x}_0)-x(t_1;t_0,x_0)\|\leqslant\delta$$

  para algún $t_1\geqslant t_0$, entonces

  $$\|x(t;\bar{t}_0,\bar{x}_0)-x(t;t_0,x_0)\|\leqslant\varepsilon$$

  para todo $t\geqslant t_1+T$.

Ahora si que podemos introducir un teorema sobre la conservación de la estabilidad asintótica uniforme para un sistema lineal homogéneo perturbado con coeficientes variables. La demostración puede consultarse en [2].

Teorema 3.10. *Sea la ecuación $x'(t)=A(t)x(t)+f(t,x(t))$. Supongamos que existen $\beta\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ y V un entorno del origen en $\mathbb{R}^n$ tales que $A(t)$ es continua en $(\beta-\sigma,+\infty)$ y la función $f(t,x)$ es continua y con derivadas parciales primeras continuas respecto a $x_1,\dots,x_n$ en el conjunto $(\beta-\sigma,+\infty)\times V$. Supongamos también $f(t,x)=o(\|x\|)$ cuando $\|x\|\to 0$ uniformemente para $t\in[\beta,+\infty)$.*

Entonces, si la solución nula de $x'(t)=A(t)x(t)$ es uniformemente asintóticamente estable, lo mismo ocurre para la solución nula de $x'(t)=A(t)x(t)+f(t,x)$.

Capítulo 4

Métodos directos de Lyapunov

En este último capítulo vamos a estudiar del método directo de Lyapunov, el cual nos va a permitir analizar la estabilidad de la solución de problemas del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

sin tener que resolver explícitamente la ecuación diferencial. En este sentido, se trata de una alternativa a los métodos de linealización estudiados en el capítulo anterior. Lyapunov introdujo una función, que recibe su nombre, que proporciona información sobre la estabilidad de la solución nula de una ecuación diferencial. La idea esencial de Lyapunov es estudiar cómo una cierta función escalar varía a lo largo de las órbitas. Como principal inconveniente del método, veremos que la construcción de una función de Lyapunov para un problema dado no sigue ningún método universalmente válido. A lo largo de este capítulo hemos utilizado como referencia el libro de M. de Guzmán [1] . En primer lugar recogeremos algunos resultados relativos a la estabilidad y estabilidad uniforme.

4.1. Estabilidad y estabilidad uniforme

En esta sección vamos a considerar una ecuación de la forma $x'(t) = f(t, x(t))$ donde

$$f : [t_0, +\infty) \times V \to \mathbb{R}^n$$

es una función continua, V es entorno abierto del origen en $\mathbb{R}^n$ y $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geqslant t_0$. El primer teorema que vamos a estudiar nos proporciona condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de la solución nula de esa ecuación.

En lo que sigue, denotaremos con $B(0, r)$ a la bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ de centro 0 y radio $r > 0$.

Teorema 4.1. *Supongamos que existe una función*

$$G : [t_0, +\infty) \times B(0, r) \to [0, +\infty)$$

verificando

H1. $G(t_0, \xi) \to 0$ *para* $\|\xi\| \to 0$.

H2. *Existe una función* $a : [0, r] \to [0, +\infty)$ *continua, estrictamente creciente y tal que*

$$a(0) = 0 \quad y \quad G(t, \xi) \geqslant a(\|\xi\|)$$

para cualquier $t \in [t_0, +\infty)$ *y para cualquier* $\xi \in B(0, r)$.

H3. *Para toda solución* $x(t)$ *de* $x'(t) = f(t, x(t))$ *tal que* $\|x(t_0)\| \leqslant r$ *se verifica que la función* $G^*(t) = G(t, x(t))$ *es una función decreciente en su intervalo de definición.*

Entonces la solución nula es estable en $[t_0, +\infty)$.

Demostración. Fijamos un $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subset V$ y sea $p = a(\varepsilon) > 0$. Por la hipótesis **H1** tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|\xi\| \leqslant \delta$ entonces

$$0 \leqslant G(t_0, \xi) < p.$$

Tomamos una solución cualquiera $x(t)$ de $x'(t) = f(t, x(t))$ tal que $\|x(t_0)\| \leqslant \delta$. Supongamos por reducción al absurdo que para algún $t_1 > t_0$ se tiene que $\|x(t_1)\| \geqslant \varepsilon$; entonces, teniendo en cuenta la hipótesis **H2**, se cumple que

$$G^*(t_1) = G(t_1, x(t_1)) \geqslant a(\|x(t_1)\|) \geqslant p > G(t_0, x(t_0)) = G^*(t_0),$$

lo que contradice el carácter decreciente de $G^*(t)$ que se establece en la hipótesis **H3**. Luego, $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_0$. Así, $x(t)$ es prolongable a $[t_0, +\infty)$ por el Teorema 2.2 y además la solución nula es estable. □

En el caso de la estabilidad uniforme, también existe un teorema que nos proporciona condiciones suficientes para afirmar la estabilidad uniforme de la solución nula.

Teorema 4.2. *Supongamos que existe una función*

$$G : [t_0, +\infty) \times B(0, r) \to [0, +\infty)$$

verificando

H1. *Existen dos funciones* $a : [0, r] \to [0, +\infty)$ *y* $b : [0, r] \to [0, +\infty)$ *continuas, estrictamente crecientes y tales que*

$$a(0) = b(0) = 0 \quad y \quad a(\|\xi\|) \leqslant G(t, \xi) \leqslant b(\|\xi\|)$$

para cualquier $t \in [t_0, +\infty)$ *y para cualquier* $\xi \in B(0, r)$.

H2. *Para toda solución* $x(t)$ *de* $x'(t) = f(t, x(t))$ *tal que* $\|x(t_1)\| \leqslant r$ *para algún* $t_1 \geqslant t_0$*, se verifica que la función* $G^*(t) = G(t, x(t))$ *es una función decreciente para* $t \geqslant t_1$ *en su intervalo de definición.*

Entonces la solución nula es uniformemente estable en $[t_0, +\infty)$.

Demostración. Fijamos un $\varepsilon > 0$ de manera que $B(0, \varepsilon) \subset B(0, r) \subset V$ y sea $\delta > 0$ tal que $a(\varepsilon) > b(\delta) > 0$. Sea ahora $t_1 \geqslant t_0$ y $x(t)$ una solución tal que $\|x(t_1)\| \leqslant \delta$.

Supongamos por reducción al absurdo que para un $t_2 > t_1$ se verifica que $\|x(t_2)\| > \varepsilon$, entonces, teniendo en cuenta la hipótesis **H1**, se cumple que

$$G^*(t_2) = G(t_2, x(t_2)) \geqslant a(\|x(t_2)\|) \geqslant a(\varepsilon) > b(\delta) \geqslant G(t_1, x(t_1)) = G^*(t_1),$$

lo que contradice el carácter decreciente de $G^*(t)$. Luego, necesariamente $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_1$ y esto demuestra que la solución es prolongable a $[t_1, +\infty)$ (ver 2.2) y que la solución nula es uniformemente estable. □

Observación 4.1. *El recíproco del Teorema 4.2 también es cierto. Es decir, no es sólo una condición suficiente sino también necesaria. (Ver [1])*

4.2. Estabilidad asintótica

Al igual que con la estabilidad y estabilidad uniforme, el método directo de Lyapunov permite también estudiar la estabilidad asintótica de la solución nula de $x'(t) = f(t, x(t))$ donde f satisface las mismas hipótesis que hemos indicado al inicio de la sección anterior.

Teorema 4.3. *Supongamos que existe una función continua*

$$G : [t_0, +\infty) \times B(0, r) \to [0, +\infty)$$

verificando

H1. $G(t_0, \xi) \to 0$ *para* $\|\xi\| \to 0$.

H2. *Existe una función* $a : [0, r] \to [0, +\infty)$ *continua, estrictamente creciente y tal que*

$$a(0) = 0 \quad y \quad G(t, \xi) \geqslant a(\|\xi\|)$$

para cualquier $t \in [t_0, +\infty)$ *y para cualquier* $\xi \in B(0, r)$.

H3. *Existe una función* $c : [0, r] \to [0, +\infty)$ *continua, creciente y tal que* $c(0) = 0$, *de modo que para toda solución* $x(t)$ *de* $x'(t) = f(t, x(t))$ *tal que* $\|x(t_0)\| < r$ *se verifica:*

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{G(t+h, x(t+h)) - G(t, x(t))}{h} \leqslant -c(G(t, x(t)))$$

para todo t *donde el límite está definido.*

Entonces la solución nula es asintóticamente estable en $[t_0, +\infty)$.

Demostración. La hipótesis **H3** implica, por el Corolario 2.5, que $G(t, x(t))$ es decreciente en t. Por lo tanto, por el Teorema 4.1, la solución nula es estable. Así, existe $\delta > 0$ tal que si $x(t)$ es una solución tal que $\|x(t_0)\| \leqslant \delta$ entonces $\|x(t)\| < r$ para todo $t \geqslant t_0$. A continuación demostraremos que como consecuencia de **H3** se tiene que:

$$\limsup_{h \to 0^+} \left(\frac{G(t+h, x(t+h)) - G(t, x(t))}{h} + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} c(G(s, x(s)))ds \right) \leqslant 0. \tag{4.1}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \to 0^+} \left(\frac{G(t+h, x(t+h)) - G(t, x(t))}{h} + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} c(G(s, x(s)))ds \right) \\ &\leqslant \limsup_{h \to 0^+} \frac{G(t+h, x(t+h)) - G(t, x(t))}{h} + \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} c(G(s, x(s)))ds \\ &\leqslant \limsup_{h \to 0^+} \frac{G(t+h, x(t+h)) - G(t, x(t))}{h} + c(G(t, x(t))) \leqslant 0. \end{aligned}$$

En la penúltima desigualdad hemos usado que $G(s, x(s)) \leqslant G(t, x(t))$ para todo $s \in [t, t+h]$ y en la última, hemos utilizado la hipótesis **H3**. También como consecuencia del carácter decreciente de $G(t, x(t))$ se tiene que

$$\lim_{t \to +\infty} G(t, x(t)) = G_0 \geqslant 0.$$

Supongamos en primer lugar que $G_0 > 0$. Entonces $c(G_0) > 0$ y como c es creciente,

$$c(G(t, x(t))) \geqslant c(G_0) > 0$$

para todo $t \geqslant t_0$. De esta forma,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} c(G(s,x(s)))ds \geqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} c(G_0)ds = c(G_0),$$

y teniendo en cuenta la expresión (4.1) obtenemos

$$\limsup_{h\to 0^+}\left(\frac{G(t+h,x(t+h))-G(t,x(t))}{h}+c(G_0)\right)\leqslant 0.$$

Sea $\Psi(t) = G(t,x(t)) + c(G_0)t$. Se cumple que

$$\limsup_{h\to 0^+}\frac{\Psi(t+h)-\Psi(t)}{h} = \limsup_{h\to 0^+}\left(\frac{G(t+h,x(t+h))-G(t,x(t))}{h}+c(G_0)\right)\leqslant 0.$$

Aplicando el Corolario 2.5 a la función Ψ se concluye que esta función es decreciente y por lo tanto

$$G(t,x(t)) - G(t_0,x(t_0)) \leqslant -c(G_0)(t-t_0).$$

Por tanto,

$$\lim_{t\to+\infty} G(t,x(t)) = -\infty,$$

y hemos llegado a una contradicción con la condición $G_0 > 0$. Luego necesariamente se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} G(t,x(t)) = G_0 = 0.$$

Esto según la hipótesis **H2** implica que

$$\lim_{t\to+\infty} a(\|x(t)\|) = 0$$

y entonces,

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0$$

que demuestra la estabilidad asintótica de la solución nula. □

4.3. Inestabilidad

Finalmente, lo mismo ocurre con la inestabilidad de la solución nula. El método directo de Lyapunov permite dar condiciones suficientes que garantizan dicha inestabilidad.

Teorema 4.4. *Supongamos que existe una función continua*

$$G : [t_0,+\infty) \times B(0,r) \to (-\infty,+\infty)$$

verificando

H1. *Existe una función* $a : [0, r] \to [0, +\infty)$ *continua, estrictamente creciente y tal que*

$$a(0) = 0 \quad y \quad |G(t, \xi)| \leqslant a(\|\xi\|)$$

para todo $t \geqslant t_0$ *y para cualquier* $\xi \in B(0, r)$.

H2. *Para cada* $\delta > 0$ *y* $t_1 \geqslant t_0$, *existe* $\bar{\xi}$ *tal que* $\|\bar{\xi}\| \leqslant \delta$, *verificando* $G(t_1, \bar{\xi}) < 0$.

H3. *Existe una función* $c : [0, r] \to [0, +\infty)$ *continua, creciente y tal que* $c(0) = 0$, *de modo que si* $x(t)$ *es una solución de* $x'(t) = f(t, x(t))$ *tal que* $x(t_1) = \xi_1$ *con* $t_1 \geqslant t_0$ *y* $\|\xi_1\| < r$ *entonces,*

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{G(t_1 + h, x(t_1 + h)) - G(t_1, x(t_1))}{h} \leqslant -c(\|\xi_1\|).$$

Entonces la solución nula es inestable en $[t_0, +\infty)$.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que la solución nula es estable en $[t_0 + \infty)$. Sea $\varepsilon \in (0, r)$; por la estabilidad de la solución nula, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x(t_0)\| \leqslant \delta$ entonces $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_0$.

Por la hipótesis **H2**, existe un $\xi_0 \in B(0, \delta)$ tal que $G(t_0, \xi_0) < 0$. Sea $x(t)$ la solución que satisface $x(t_0) = \xi_0$, entonces $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_0$. De este modo, por la hipótesis **H1** tenemos

$$|G(t, x(t))| \leqslant a(\|x(t)\|) \leqslant a(\varepsilon), \tag{4.2}$$

para todo $t \geqslant t_0$.

La hipótesis **H3** implica que $G(t, x(t))$ es decreciente en $[t_0, +\infty)$. Luego

$$G(t, x(t)) \leqslant G(t_0, \xi_0) < 0,$$

para todo $t \geqslant t_0$. Así,

$$|G(t_0, \xi_0)| \leqslant |G(t, x(t))| \leqslant a(\|x(t)\|).$$

Como a es continua y estrictamente creciente, su inversa que denotaremos a^{-1} también lo es, por tanto

$$a^{-1}(|G(t_0, \xi_0)|) \leqslant \|x(t)\|,$$

para todo $t \geqslant t_0$.

Por otro lado, con los mismos argumentos que en la demostración del Teorema 4.3 y teniendo en cuenta la hipótesis **H3**, si definimos

$$\Psi(t) = G(t, x(t)) - G(t_0, \xi_0) + \int_{t_0}^{t} c(\|x(s)\|)ds,$$

podemos probar que

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{\Psi(t+h) - \Psi(t)}{h} \leqslant \limsup_{h\to 0^+} \left(\frac{G(t+h, x(t+h)) - G(t, x(t))}{h} + \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} c(\|x(s)\|)ds \right) \leqslant 0,$$

para todo $t \geqslant t_0$. Usando ahora el Corolario 2.5, deducimos que la función Ψ es decreciente, luego $\Psi(t) \leqslant \Psi(t_0) = 0$. De este modo,

$$G(t, x(t)) \leqslant G(t_0, \xi_0) - \int_{t_0}^{t} c(\|x(s)\|)ds.$$

Como hemos probado antes que $\|x(t)\| \geqslant a^{-1}(|G(t_0, \xi_0)|)$, se sigue que

$$c(\|x(t)\|) \geqslant c(a^{-1}(|G(t_0, \xi_0)|))$$

y entonces

$$G(t, x(t)) \leqslant G(t_0, \xi_0) - (t - t_0)\, c(a^{-1}(|G(t_0, \xi_0)|)).$$

Así,

$$\lim_{t\to+\infty} G(t, x(t)) = -\infty,$$

lo que contradice la desigualdad (4.2). Por ello, concluimos que la solución nula es inestable en $[t_0, +\infty)$. □

4.4. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Consideremos un sistema lineal homogéneo

$$x'(t) = Ax(t), \tag{4.3}$$

donde A es una matriz $n \times n$ de coeficientes reales y tal que todos sus autovalores tienen parte real negativa. En esas condiciones, ya sabemos que la solución nula del sistema es asintóticamente estable y, por lo tanto, no necesitamos apelar a los métodos directos de Lyapunov; no obstante, en este caso su aplicación resulta muy ilustrativa.

Para analizar la estabilidad de la solución nula, nos basaremos en el Teorema 4.3; para ello, será suficiente construir una función $G : [t_0, +\infty) \times B(0, r) \to [0, +\infty)$ que verifique las hipótesis **H1**,

H2 y **H3**. Nuestra idea consiste en elegir G de la forma

$$G(t,\xi) = \langle \xi, B\xi \rangle,$$

donde B será una matriz real $n \times n$ y simétrica; así es evidente que se verifica **H1**. Para que se verifique **H2**, escogeremos B de forma que además sea definida positiva. En ese caso (véase [4]), se cumple la siguiente propiedad:

$$\xi^t B \xi \geqslant \Lambda \, \|\xi\|^2$$

donde Λ es el mínimo de los valores propios de B; además $\Lambda > 0$. De esa manera, se satisface la hipótesis **H2** sin más que elegir

$$a(s) = \Lambda \, s^2.$$

Finalmente, observemos que si $x(t)$ es una solución de (4.3) y definimos

$$G^*(t) = G(t, x(t)) = \big\langle x(t), Bx(t) \big\rangle,$$

entonces

$$\frac{dG^*}{dt}(t) = \big\langle x(t), (A^t B + BA) x(t) \big\rangle.$$

Si adicionalmente elegimos B de manera que $A^t B + BA = -C$, con C una matriz simétrica definida positiva, entonces garantizaremos también la hipótesis **H3**. Para ello nos basaremos en el siguiente resultado:

Teorema 4.5. *Sea $A \in M(n,\mathbb{R})$ y sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ el conjunto de sus autovalores. Supongamos que para dos autovalores cualesquiera λ_i, λ_j, no necesariamente distintos, se verifica que $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$. Entonces, para cada matriz $C \in M(n,\mathbb{R})$, la ecuación en $B \in M(n,\mathbb{R})$*

$$A^t B + BA = -C,$$

tiene solución única. Además si $C = C^t$, entonces $B = B^t$. Y también, si $C = C^t$ es definida positiva y todos los autovalores de A tienen parte real negativa, entonces $B = B^t$ también es definida positiva.

En nuestro caso, la elección más simple consiste en elegir $C = I_n \in M(n,\mathbb{R})$, que es simétrica y definida positiva. Así, existe única matriz $B \in M(n,\mathbb{R})$ que verifica

$$A^t B + BA = -I_n$$

y además también es simétrica y definida positiva.

4.5. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes variables

A partir de la sección anterior podemos utilizar el método directo de Lyapunov para analizar la estabilidad de la solución nula de

$$x'(t) = A(t)\,x(t) \tag{4.4}$$

en algunos casos particulares.

Supondremos que la matriz $A : [t_0, +\infty) \to M(n, \mathbb{R})$ tiene derivada continua en $[t_0, +\infty)$ y que todos los autovalores de $A(t)$ tienen parte real negativa, para cualquier $t \in [t_0, +\infty)$. Si elegimos una matriz $C \in M(n, \mathbb{R})$ simétrica, constante y definida positiva, entonces, por el Teorema 4.5, para cada $t \in [t_0, +\infty)$ existe una matriz $B(t)$ simétrica y definida positiva tal que

$$A^t(t)B(t) + B(t)A(t) = -C.$$

Además, por la condición de derivabilidad de $A(t)$, se puede probar que la función $B : [t_0, +\infty) \to M(n, \mathbb{R})$ tiene también derivada continua.

Para estudiar la estabilidad de la solución nula de (4.4), nos basaremos en el Teorema 4.1; para ello, al igual que antes será suficiente con construir una función $G : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que verifique las hipótesis **H1**, **H2** y **H3**. Por lo tanto, empezamos eligiendo G de la forma

$$G(t, \xi) = \phi(t)\,\langle B(t)\xi, \xi\rangle, \tag{4.5}$$

donde $\phi : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ será una función positiva con derivada continua. Es claro que se cumple **H1**.

Para satisfacer la hipótesis **H2**, necesitamos encontrar una función $a : [0, r] \to [0, +\infty)$ continua, estrictamente creciente y tal que $G(t, \xi) \geqslant a(\|\xi\|)$ para cualesquiera $t \in [t_0, +\infty)$ y $\xi \in B(0, r)$. Para cada $t \in [t_0, +\infty)$, denotemos $\Lambda(t)$ al menor autovalor de $B(t)$; como la matriz $B(t)$ es simétrica y definida positiva, entonces $\Lambda(t) > 0$. De la expresión (4.5) se deduce

$$G(t, \xi) = \phi(t)\,\langle B(t)\xi, \xi\rangle \geqslant \phi(t)\,\Lambda(t)\,\langle \xi, \xi\rangle.$$

Por tanto, para que se cumpla la hipótesis **H2** es suficiente que exista algún $\delta > 0$ tal que $\phi(t)\Lambda(t) \geqslant \delta > 0$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$.

Finalmente, si $x(t)$ es una solución que satisface la ecuación (4.4) y

$$G^*(t) = G(t, x(t)) = \phi(t)\,\langle B(t)x(t), x(t)\rangle,$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{dG^*}{dt}(t) &= \phi'(t)\langle B(t)x(t),x(t)\rangle + \phi(t)\Big(\langle B'(t)x(t)+B(t)x'(t),x(t)\rangle + \langle B(t)x(t),x'(t)\rangle\Big)\\ &= \phi(t)\bigg(\langle\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}B(t)x(t),x(t)\rangle + \langle B'(t)x(t),x(t)\rangle + \langle B(t)A(t)x(t),x(t)\rangle\\ &\qquad + \langle A^t(t)B(t)x(t),x(t)\rangle\bigg)\\ &= \phi(t)\langle V(t)x(t),x(t)\rangle,\end{aligned}$$

donde

$$V(t) = \frac{d\log\phi}{dt}(t)B(t) + B'(t) - C.$$

Para que se verifique la hipótesis **H3** será suficiente que $\frac{dG^*}{dt}(t) \leqslant 0$ o, equivalentemente, que $\phi(t)\,V(t)$ sea semidefinida negativa. Para cada $t \in [t_0,+\infty)$, consideremos la función polinómica

$$\mu \in \mathbb{R} \longmapsto \det\big(\mu B(t) + B'(t) - C\big),$$

y denotemos $\mu^*(t)$ al mínimo de sus ceros. Veamos que todas sus raíces son reales. Como la matriz $B(t)$ es simétrica y definida positiva, la podemos escribir de la forma $B(t) = L(t)L^t(t)$ donde $L(t)$ es una matriz triangular inferior invertible. De este modo,

$$\begin{aligned}\mu B(t) + B'(t) - C &= \mu\, L(t)\, I\, L^t(t) + B'(t) - C\\ &= L(t)\,\Big(\mu\, I\, L^t(t) + L^{-1}(t)\big(B'(t)-C\big)\Big)\\ &= L(t)\,\Big(\mu I + L^{-1}(t)\,\big(B'(t)-C\big)\,\big(L^t(t)\big)^{-1}\Big)\,L^t(t).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\det\big(\mu B(t) + B'(t) - C\big) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \det\Big(\mu I + L^{-1}(t)\,\big(B'(t)-C\big)\,\big(L^t(t)\big)^{-1}\Big) = 0. \tag{4.6}$$

Llamamos $z(t) = L^{-1}(t)\,\big(B'(t)-C\big)\,\big(L^t(t)\big)^{-1}$. Así, se verificará (4.6) si y solo si μ es valor propio de $-z(t)$. Bastará con probar que $z(t)$ es simétrica, es decir que $-z(t) = -z^t(t)$. Sea

$$-z^t(t) = -\Big(\big(L^t(t)\big)^{-1}\Big)^t\,\big(B'(t)-C\big)^t\Big(\big(L(t)\big)^{-1}\Big)^t = -L^{-1}(t)\,\big(B'(t)-C\big)\,\big(L^t(t)\big)^{-1} = -z(t).$$

Volviendo a la hipótesis **H3**, vamos a probar que, si $h \leqslant \mu^*(t)$, entonces todos los autovalores de la matriz

$$M_h(t) = hB(t) + B'(t) - C = h\Big(B(t) + \frac{B'(t)-C}{h}\Big)$$

son menores o iguales que 0. Por reducción al absurdo, supongamos que existiese un autovalor

$\lambda > 0$. Para $h < 0$, los autovalores de $M_h(t)$ son los opuestos de los autovalores de la matriz

$$B(t) + \frac{B'(t) - C}{h}.$$

Pero si $h < 0$ y $|h|$ es muy grande, los autovalores de esta última matriz son todos positivos, ya que $B(t)$ es definida positiva, de modo que todos los de $M_h(t)$ serían negativos. Por continuidad tenemos que existe $h_1 < \mu^*(t)$ tal que $h_1 B(t) + B'(t) - C$ tiene un autovalor nulo, es decir, $\det(h_1 B(t) + B'(t) - C) = 0$ lo que contradice la definición de $\mu^*(t)$ ya que es la raíz mínima. Luego necesariamente la matriz $M_h(t) = hB(t) + B'(t) - C$ tiene todos sus autovalores menores o iguales que 0 si $h \leqslant \mu^*(t)$ y entonces

$$\frac{dG^*}{dt}(t) \leqslant 0.$$

De este modo podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Sea la ecuación $x'(t) = A(t)x(t)$, con $A(t)$ una función matricial con derivada continua en $[t_0, +\infty)$ y tal que para cada t fijo de $[t_0, +\infty)$ la matriz $A(t)$ tiene sus autovalores con parte real negativa. Fijemos $C \in M(n, \mathbb{R})$ una matriz simétrica definida positiva cualquiera (por ejemplo, $C = I$) y sea $B(t)$ la matriz (que es definida positiva y simétrica por 4.5) y solución única de la ecuación*

$$A^t(t)B(t) + B(t)A(t) = -C.$$

Sea $\Lambda(t)$ el autovalor mínimo de $B(t)$ y $\mu^*(t)$ la raíz mínima del polinomio en μ. Supongamos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\Lambda(t) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \mu^*(s) ds\Big) \geqslant \delta > 0$$

para todo $t \geqslant t_0$. Entonces, la solución trivial de $x'(t) = A(t)x(t)$ es estable.

Bibliografía

[1] M. de Guzmán. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Teoría de Estabilidad y Control*. Alhambra, 1975.

[2] C. Fernández y J.M. Vegas. *Ecuaciones diferenciales*. Ediciones Pirámide, 1996.

[3] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[4] E. Süli y D.F. Mayers. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge University Press, 2003.