



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

TRABAJO FIN DE GRADO (MATEMÁTICAS)

DOBLE GRADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES
PERIÓDICOS: TEORÍA Y APLICACIONES**

AUTOR: JORGE CERRADA VELASCO

TUTOR: ALFONSO RUIZ HERRERA

Oviedo, 26 de julio de 2023

“¿Importa el destino? ¿O es el camino que emprendemos? Declaro que ningún logro tiene tan gran sustancia como el camino empleado para conseguirlo. No somos criaturas de destinos. Es el viaje el que nos da la forma. Nuestros pies encallecidos, nuestras espaldas fortalecidas por cargar el peso de nuestros viajes, nuestros ojos abiertos con el fresco deleite de las experiencias vividas.” – Nohadon, El Camino de los Reyes

Índice general

I	Introducción: definiciones y resultados previos	1
1.	Introducción	2
2.	Preliminares	5
2.1.	Funciones periódicas	5
2.2.	Álgebra lineal: diagonalización y forma de Jordan	7
2.3.	Ecuaciones diferenciales ordinarias. Definiciones, teorema de existencia y unicidad de soluciones y sistemas lineales	9
2.3.1.	Estabilidad en sistemas lineales	13
II	Sistemas con coeficientes periódicos, teoría de Floquet y ejemplos de aplicación	16
3.	Teoría general de Floquet	17
3.1.	Logaritmo de una matriz	17
3.2.	El teorema de Floquet	22
3.2.1.	Consecuencias: el teorema de Lyapunov	26
3.2.2.	Estabilidad de los sistemas homogéneos con coeficientes periódicos	28
3.3.	El sistema lineal y periódico completo	30
3.3.1.	La alternativa de Fredholm	30
3.4.	Ejemplos de aplicación	34
3.4.1.	La ecuación de Hill	34
3.4.2.	La ecuación de Mathieu	39
4.	Una aproximación física a la teoría de Floquet: el teorema de Bloch	50
	Referencias	56

Parte I

Introducción: definiciones y resultados previos

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas fundamentales que se utilizan en diversas ramas de la ciencia para describir y modelar fenómenos y procesos naturales. Permiten estudiar cómo se relaciona una magnitud dada con la manera en que evoluciona en el tiempo. Este enfoque es especialmente relevante en física, ingeniería, biología y economía, entre otras disciplinas. Las ecuaciones diferenciales nos brindan una manera precisa de analizar y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos, lo que resulta crucial para comprender fenómenos complejos en la investigación científica y el desarrollo tecnológico.

Al modelizar un sistema a través de una ecuación diferencial, asignamos los distintos elementos que intervienen en la ecuación a magnitudes que lo describen. La variable independiente es la cantidad que haremos variar externamente. Buscaremos saber cómo cambian las demás propiedades en función de esta. Aunque puede tratarse de alguna coordenada espacial, lo más habitual es que se trate del tiempo. La función incógnita es la magnitud que estamos interesados en conocer. El modelo se basa en describir el cambio de esta magnitud a lo largo del tiempo (o cualquier otra variable independiente). Los coeficientes de la ecuación determinan la relación entre la función incógnita y su tasa de cambio. Pueden depender o no de la variable independiente. Finalmente, el término independiente es una función que actúa de manera externa a la incógnita del problema. Por ejemplo, puede representar alguna fuente externa o una fuerza ejercida sobre el sistema. Si los coeficientes del sistema son constantes, la función incógnita experimenta el mismo tipo de variación en todo instante. Es una situación bien conocida, de la que se sabe la solución analítica en el caso lineal. Sin embargo, en muchos fenómenos nos encontramos que la forma en que varía la función incógnita depende del instante de tiempo o incluso del propio valor de la incógnita. Como ejemplo de esto, podemos suponer un modelo de dinámica de poblaciones, donde las funciones incógnita sean las poblaciones de un herbívoro y de su depredador. La forma en que evolucionan ambas poblaciones depende del número de individuos de la otra especie, por lo que los coeficientes dependen de la función incógnita. También podríamos tener en cuenta que las estaciones del año afectan al número de herbívoros que mueren de manera natural. En ese aspecto, los coeficientes también dependerán del tiempo.

En este trabajo, nos centraremos en sistemas lineales cuyos coeficientes dependen del tiempo de manera periódica. Una de las razones por las que resultan de tanto interés es que aparecen constantemente en otras ramas de la ciencia. Por poner algunos ejemplos, este tipo de ecuaciones surgen al estudiar el modelo de van der Pol, que describe el comportamiento de algunos circuitos eléctricos; el modelo de FitzHugh-Nagumo, que explica la propagación de impulsos eléctricos en las neuronas; o en el modelo Tight-Binding de la materia condensada, en el que nos detendremos más adelante. Con ese fin, desarrollaremos la teoría de Floquet, introducida por Achille Marie Gaston Floquet en el año 1883 [1]. Nuestra discusión se centrará en encontrar soluciones periódicas a este tipo de ecuaciones. En ese aspecto, será justamente el llamado **teorema de Floquet** el que nos dé la forma general de las soluciones. Conocida la forma general, preguntarse por su periodicidad es una cuestión similar a preguntarse por su estabilidad. En el caso de coeficientes constantes, toda la información relevante sobre la estabilidad de las soluciones está contenida en los autovalores de la matriz de coeficientes. La principal dificultad en el

estudio de los sistemas periódicos la encontraremos al tratar de buscar algún parámetro que nos proporcione una información similar. Estos parámetros serán los **multiplicadores característicos**, y como veremos no se pueden calcular sin conocer previamente las soluciones del sistema. Si logramos desarrollar resultados que nos permitan lidiar con esta problemática, podremos conocer qué condiciones permiten obtener estados estables del sistema. Esto puede resultar útil, por ejemplo, para confinar una partícula cargada en un potencial eléctrico [2] o para excitar los modos adecuados de una membrana en vibración [3].

La estructura del trabajo consta de dos partes. En la primera, presentamos algunos preliminares. Incluyen contenidos de las asignaturas de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, así como algunas propiedades sobre funciones periódicas. En la segunda parte, comenzaremos con el estudio general de la teoría de Floquet. Definiremos conceptos clave, como la matriz de monodromía o los multiplicadores característicos. Tras demostrar el teorema de Floquet, veremos algunas consecuencias del mismo, como el teorema de Lyapunov y unas condiciones de estabilidad en sistemas periódicos. Terminaremos el trabajo abordando resultados encontrados por investigadores como George William Hill [4], Émile Léonard Mathieu [5] o Felix Bloch [6] durante su estudio de fenómenos físicos particulares. Nos permitirá comprender cómo la teoría de Floquet facilita el entendimiento de los sistemas con naturaleza inherentemente periódica.

2. Preliminares

En este capítulo expondremos algunos resultados de carácter general que serán útiles a lo largo del trabajo. En concreto, daremos unas nociones básicas sobre funciones periódicas, diagonalización de matrices, formas de Jordan y teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.1. Funciones periódicas

Comencemos estableciendo el concepto de función periódica, que será recurrente a lo largo del trabajo.

Definición 2.1 (Función periódica). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. Se dice que f es **periódica** si existe alguna constante real y no nula, $0 \neq T \in \mathbb{R}$, de manera que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Cualquier $T \in \mathbb{R}$ con esta propiedad se dice un **período** de f .

Dada una función periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos al conjunto de todos sus períodos por $P_f = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x + T) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$. Los siguientes resultados nos permitirán conocer la estructura algebraica de este conjunto y su relación con la función f .

Lema 2.1. Sea $a = \inf \{x \in G \mid x > 0\}$ con G un subgrupo aditivo no trivial de \mathbb{R} . Entonces, una de las siguientes condiciones se satisface:

1. Si $a = 0$, entonces G es denso en \mathbb{R} .
2. Si $a > 0$, entonces $G = a\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico generado por a .

Demostración. En primer lugar, notemos que el conjunto $\{x \in G \mid x > 0\}$ está inferiormente acotado por 0, por lo que la existencia de a está garantizada.

Caso $a = 0$

Veamos que, en este caso, G es denso en \mathbb{R} . Fijamos $y \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, y probaremos que $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$. Como $0 = \inf \{x \in G \mid x > 0\}$, existe $x \in G$ con $0 < x < \varepsilon$. Tomamos ahora $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $kx \leq y < (k + 1)x$. Por ser G grupo aditivo, $kx \in G$. Además, por construcción, notemos que $|y - kx| < x < \varepsilon$. Concluimos entonces que $kx \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap G$. Es decir, G es denso en \mathbb{R} .

Caso $a > 0$

Comencemos viendo que, en este caso, $a \in G$. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que $a \notin G$. Entonces, por la definición del ínfimo, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $g_\varepsilon \in G$ con $a \leq g_\varepsilon < a + \varepsilon$. En particular, como $a \notin G$, tenemos que $a < g_\varepsilon < a + \varepsilon$. Aplicando esta propiedad con $\varepsilon = a$, se deduce que existe $g_2 \in G$ tal que $a < g_2 < 2a$.

Repitiendo la estrategia con $\varepsilon = g_2 - a$, obtenemos $g_1 \in G$ tal que $a < g_1 < g_2$. Por ser G un grupo aditivo, concluimos que $g_2 - g_1 \in G$. No obstante, $0 < g_2 - g_1 < a$, lo que contradice que $a = \inf \{x \in G \mid x > 0\}$. Por tanto, $a \in G$.

A continuación, probaremos que $G = a\mathbb{Z}$. Sea $g \in G$. Observemos que $a \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \leq g$, siendo $\lfloor x \rfloor$ la función parte entera de x . Como $a, g \in G$ y $\left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$g - a \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor = a \left(\frac{g}{a} - \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \right) \in G$$

con $0 \leq a \left(\frac{g}{a} - \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \right)$. Para ver esto último, usamos que $a > 0$ y que $a \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \leq g$. Por otro lado, $0 \leq \frac{g}{a} - \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor < 1$. Esto implica que $0 \leq a \left(\frac{g}{a} - \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \right) < a$. Como $a = \inf \{x \in G \mid x > 0\}$, se concluye que $a \left(\frac{g}{a} - \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \right) = 0$, o equivalentemente, $g = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor a$. \square

Proposición 2.1. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica. Entonces, el conjunto de sus períodos, P_f , es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} . Además, si f es continua, P_f es un conjunto cerrado.*

Demostración. Comencemos viendo que P_f es un subgrupo aditivo. Para ello, bastará ver que la diferencia de dos períodos cualesquiera sigue siendo un período. Fijamos $T_1, T_2 \in P_f$, y consideramos $T_1 - T_2$. Entonces, dado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f(x + (T_1 - T_2)) = f((x - T_2) + T_1) = f(x - T_2) = f((x - T_2) + T_2) = f(x).$$

Esto prueba que $T_1 - T_2 \in P_f$. Consecuentemente, P_f es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} .

Consideramos ahora que f es una función continua. Para ver que P_f es un conjunto cerrado, es suficiente con comprobar que cualquier sucesión convergente de elementos de P_f tiene su límite en el propio conjunto P_f . Fijamos $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset P_f$ una sucesión convergente de períodos de f , con límite T_0 . Utilizando la continuidad de f , podemos intercambiar el orden del límite y de la función. Como cada elemento de la sucesión es un período de f , encontramos que

$$f(x + T_0) = f\left(\lim_n (x + T_n)\right) = \lim_n f(x + T_n) = \lim_n f(x) = f(x).$$

Concluimos que $T_0 \in P_f$, y por tanto P_f es cerrado. \square

Proposición 2.2. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica y continua, tal que existen $T_1, T_2 \in P_f$, $0 < T_1 < T_2$ y $T_2 \notin T_1\mathbb{Q}$. Entonces, f es una función constante.*

Demostración. Sean $0 < T_1 < T_2$ dos períodos de f una función continua, de manera que $T_2 \notin T_1\mathbb{Q}$. Supongamos que $\inf\{x \in P_f \mid x > 0\} = T_0 > 0$. Como consecuencia del lema 2.1 se deduce que $P_f = T_0\mathbb{Z}$. Por tanto, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ no nulos tales que $T_1 = k_1 T_0$ y $T_2 = k_2 T_0$. Consecuentemente, $T_2 = \frac{k_2}{k_1} T_1 \in T_1\mathbb{Q}$. Esto contradice la hipótesis de partida.

Deducimos entonces que $\inf\{x \in P_f \mid x > 0\} = 0$. Por el lema 2.1, P_f es denso en \mathbb{R} . Por definición de densidad, esto quiere decir que $\overline{P_f} = \mathbb{R}$. Por otro lado, como f es continua, aplicamos la proposición 2.1 para encontrar que $\overline{P_f}$ es un conjunto cerrado. Consecuentemente, el conjunto P_f es igual a su clausura, $\overline{P_f} = P_f$. De ambos hechos, se deduce que $P_f = \mathbb{R}$. Es decir, dado $x \in \mathbb{R}$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x) = f(x + \lambda)$. Concluimos que f es una función constante.

□

Observación 2.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica, continua y no constante, debe existir un elemento mínimo positivo en P_f como consecuencia del lema 2.1. Dicho elemento $0 < T_0 \in P_f$ se conoce como **período fundamental** de la función.

2.2. Álgebra lineal: diagonalización y forma de Jordan

El objetivo de esta sección es presentar algunos conceptos clave relacionados con la diagonalización de matrices y la forma de Jordan. Estos serán necesarios para comprender algunas demostraciones dentro de la teoría de Floquet.

Definición 2.2. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de V . Se dice que el escalar $\lambda \in K$ es un **autovalor** de f si existe un vector no nulo $u \in V$ tal que $f(u) = \lambda u$. Todo vector con esta propiedad se denomina **autovector** asociado a λ . El conjunto de autovectores asociados a λ se conoce como el **subespacio característico** asociado a λ y se denota V_λ . Tiene estructura de subespacio vectorial.

Se define el **polinomio característico** del endomorfismo f como el polinomio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, siendo A una matriz asociada al endomorfismo f . Sus raíces son los autovalores de f .

Se llama **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ a su multiplicidad como raíz del polinomio característico. Se llama **multiplicidad geométrica** de un autovalor λ a la dimensión de su correspondiente subespacio característico. En general, no tienen por qué coincidir.

Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ se dice **diagonalizable** si existe una base de V respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal. Es decir, la matriz asociada f solo tiene elementos no nulos en su diagonal principal.

Proposición 2.3. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo con $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sus distintos autovalores. Son equivalentes:

1. f es diagonalizable.
2. Existe una base de V formada por autovectores de f .
3. La suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores es igual a la dimensión de V . Además, la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con su multiplicidad geométrica.

Dada una matriz cuadrada A cualquiera, podemos verla como la matriz asociada a un endomorfismo. Supongamos que dicho endomorfismo es diagonalizable. Entonces, es posible hallar una matriz invertible P de la misma dimensión que A y una matriz diagonal B de manera que $B = PAP^{-1}$. La matriz B recibe el nombre de **forma diagonal** de A .

La forma diagonal de una matriz es deseable en el estudio de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales porque facilita el cálculo de la matriz exponencial. No obstante, la proposición 2.3 nos muestra que no siempre existirá dicha forma diagonal. Por este motivo surge la necesidad de encontrar otras formas matriciales que existan en todos los casos y que faciliten el cálculo de la matriz exponencial. Introducimos por ello la forma de Jordan y la forma de Jordan real.

Definición 2.3. Una matriz cuadrada de dimensión n se dice un **bloque de Jordan de orden n** si los elementos de su diagonal son todos iguales, los elementos por encima de esta diagonal son 1 y el resto de elementos son 0 ($a_{ii} = k$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y cierto escalar k ; $a_{i,i+1} = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso). Una matriz se dice **de Jordan** si es diagonal por bloques y estos bloques son de Jordan.

Para toda aplicación lineal h , denotaremos por $\ker h$ a su núcleo. Dado un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ y un autovalor suyo λ , se definen los **subespacios característicos generalizados asociados a λ** como $E^i(\lambda) = \ker((f - \lambda I)^i)$. Estos subespacios forman una cadena ascendente con la relación de contenido, cuyas dimensiones están acotadas superiormente por la dimensión del espacio V . Al último eslabón de la cadena se le llama **subespacio máximo del autovalor λ** , $M(\lambda)$.

Es posible probar que el subespacio máximo asociado a un cierto autovalor es invariante por el endomorfismo f . Como consecuencia, se puede probar que la restricción de f a dicho subespacio $M(\lambda)$ admite una base en la que la matriz asociada está en forma de Jordan. Además, la dimensión del subespacio máximo asociado a un cierto autovalor coincide con su multiplicidad algebraica. Enunciaremos a continuación el teorema de existencia de la forma de Jordan para matrices reales o complejas.

Teorema 2.1. Cada endomorfismo f de un \mathbb{C} -espacio vectorial tiene asociada, en una cierta base, una matriz de Jordan. Es decir, toda matriz cuadrada con coeficientes complejos es semejante a una matriz de Jordan.

En general, la forma (normal) de Jordan de una matriz tiene coeficientes complejos, incluso si es una matriz real. Se utiliza normal como contraposición a la forma real de Jordan. En caso de no utilizar la segunda, diremos únicamente forma de Jordan.

Es conveniente buscar una manera de asignar una forma matricial sencilla con coeficientes reales a aquellas matrices cuya forma normal de Jordan tenga coeficientes complejos. La solución a este problema es la *forma de Jordan real*. Es conocido que si λ es un autovalor complejo de una cierta matriz A , también lo es su conjugado $\bar{\lambda}$. Esto se traduce en que por cada bloque de Jordan asociado a un autovalor complejo, existe otro bloque de Jordan del mismo tamaño asociado a su conjugado.

Si $\lambda = a + ib$ es un autovalor complejo de una cierta matriz A , la **forma de Jordan real** de A coincide con su forma normal de Jordan, pero los lugares ocupados por bloques asociados a λ y $\bar{\lambda}$ se sustituyen por otros de la forma

$$\begin{pmatrix} C_\lambda & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_\lambda & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_\lambda \end{pmatrix}$$

siendo $C_\lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Presentamos por último un teorema de existencia de la forma de Jordan real.

Teorema 2.2. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, existe una matriz de Jordan real, J , y una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^{-1}JP$. Es decir, toda matriz cuadrada con coeficientes reales es semejante a una matriz de Jordan real.*

2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Definiciones, teorema de existencia y unicidad de soluciones y sistemas lineales

El objetivo de esta sección será recoger las nociones más importantes sobre la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se trata de los pasos previos que motivan la teoría de Floquet.

Definición 2.4. Sea t un escalar real y sea $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto (cuyos elementos se escriben como $(t, x) \in D$). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, y se denota $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Una **ecuación diferencial** es una relación de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) . \tag{2.1}$$

Se dice que x es una **solución** del problema (2.1) en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ si x es una función de clase $\mathcal{C}^1(I)$, $(t, x(t)) \in D$ siempre que $t \in I$ y x satisface la relación dada por (2.1) en el intervalo I .

Dado $(t_0, x_0) \in D$, se llama **problema de valores iniciales** o **problema de Cauchy** asociado a la ecuación (2.1) a aquel consistente en encontrar un intervalo abierto I que contenga a t_0 y una solución x del problema (2.1) tal que $x(t_0) = x_0$.

Uno de los resultados centrales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias es el teorema de existencia y unicidad de soluciones o teorema de Picard-Lindelöf. Presentamos su enunciado a continuación.

Teorema 2.3 (Teorema de Picard-Lindelöf). *Con la notación dada en la definición 2.4, si $f(t, x)$ es continua en D y localmente lipschitziana con respecto a x en D , entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in D$, existe una única solución $x(t, t_0, x_0)$, $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, del problema de Cauchy que pasa por (t_0, x_0) .*

Centraremos ahora nuestro interés en los sistemas lineales. Se trata de aquellos de la forma

$$\dot{z} = A(t)z + b(t) . \quad (2.2)$$

En primer lugar, nos limitaremos al caso homogéneo. En analogía a los sistemas de ecuaciones algebraicos, se dice sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales a aquel de la forma (2.2) con $b(t) = 0$. Una propiedad básica de los sistemas lineales homogéneos es que se satisface el **principio de superposición** de soluciones. Es decir, dadas dos soluciones diferentes de un sistema lineal homogéneo, cualquier combinación lineal de las mismas también es solución. Este hecho lleva a introducir el concepto de matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo.

Definición 2.5. Dado un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones

$$\dot{z} = A(t)z \quad (2.3)$$

de dimensión n , una matriz $X(t)$ de tamaño $n \times n$ ($t > 0$) se dice **matriz fundamental** de dicho sistema si cada una de sus columnas es una solución del mismo, y además las n soluciones son linealmente independientes (es decir, $\det X(t) \neq 0$ en todo instante $t > 0$).

Dado un cierto tiempo inicial t_0 , la matriz $X(t)$ se dice **matriz principal** del sistema en el tiempo inicial t_0 si es matriz fundamental del sistema y además $X(t_0) = I$, con I la matriz identidad de dimensión n . En dado caso, se denota por $X(t, t_0)$.

Las matrices fundamentales están estrechamente relacionadas con la función exponencial matricial. Es por ello que algunas propiedades típicas de la función exponencial también son satisfechas por la matriz fundamental de un sistema. Ese hecho se refleja en el siguiente resultado.

Proposición 2.4. *Sea el problema de Cauchy*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0 .$$

Si $X(t)$ es una matriz principal del sistema en el tiempo inicial $t_0 = 0$, entonces:

1. *La solución del problema de Cauchy es $x(t) = X(t) x_0$*
2. *$X(t+s) = X(t)X(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$*
3. *$X^{-1}(t) = X(-t)$*

En general, no conocemos la solución de un sistema lineal de ecuaciones cualquiera. En cambio, podemos comenzar por estudiar el caso de coeficientes constantes. Es decir, la matriz de coeficientes es tal que $A(t) = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. El sistema resultante es

$$\dot{z} = Az . \tag{2.4}$$

Sabemos que en el caso unidimensional la solución no es más que una función exponencial. Además, las propiedades expuestas en la proposición 2.4 sobre la matriz fundamental sugieren que la solución en dimensión n sigue teniendo este comportamiento. Estos hechos nos llevan a definir la exponencial de una matriz.

Definición 2.6 (Exponencial de una matriz constante). Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se define su exponencial, e^A , como la serie de potencias

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.5}$$

donde A^0 se corresponde con la matriz identidad.

En general, podremos usar series de potencias para definir funciones matriciales cuando dicha serie defina una función analítica en el cuerpo de los complejos. Por este motivo, la definición 2.6 es válida para cualquier elección de A . El siguiente resultado proporciona propiedades básicas de funciones del tipo $f(t) = e^{At}$, siendo A una matriz constante.

Proposición 2.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sea la función $f(t) = e^{At}$ con $t \in (-\infty, \infty)$.*

1. *$f(0) = I$ la matriz identidad y $f(t)$ es la matriz principal en el tiempo inicial $t_0 = 0$ del problema (2.4).*
2. *$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$.*
3. *$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.*
4. *$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$.*

5. Si $A = PBP^{-1}$, entonces $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$.

6. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $AB = BA$, se tiene que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

La proposición 2.5 nos da la solución de los sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes. El último escollo es el cálculo práctico de la matriz exponencial. Pero el apartado 5 de la misma proposición nos otorga una herramienta que será clave en este aspecto.

Si la matriz A del sistema dado por (2.4) es diagonalizable, el problema es trivial. Basta con pasar la matriz de coeficientes a su forma diagonal. Su exponencial será otra matriz diagonal de la misma dimensión, cuyos elementos son las exponenciales de los originales. No obstante, es igualmente sencillo encontrar la exponencial de un bloque de Jordan. De hecho, la exponencial de una matriz en su forma de Jordan (real o normal), se corresponde con la exponencial por bloques de la matriz de partida. No escribiremos explícitamente su forma. Sin embargo, el teorema 2.2 garantiza que siempre que los coeficientes del sistema sean reales, podremos pasar a la forma de Jordan real para facilitar el cálculo de la matriz exponencial.

Para terminar esta sección, demostraremos la fórmula de Jacobi. Esta resulta de utilidad para hallar una expresión del determinante de una matriz exponencial.

Lema 2.2 (Identidad de Jacobi). *Sea el sistema de ecuaciones $\dot{x} = A(t)x$ de dimensión n , sea $X(t)$ una solución matricial del mismo. Entonces*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds \right].$$

Demostración. Es suficiente con comprobar que la función $\det X(t)$ satisface la ecuación $\dot{z} = \text{Tr}(A(t))z$. Para ello:

- $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$. Esto implica que $(\dot{X}(t))_{ij} = \sum_{k=1}^n (A(t))_{ik}(X(t))_{kj}$.

- $\frac{d}{dt} (\det X(t)) = \sum_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{i1} & \dot{x}_{i2} & \cdots & \dot{x}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$.

De la primera igualdad, se tiene que $(\dot{x}_{i1} \dots \dot{x}_{in}) = \sum_{k=1}^n (A(t))_{ik} (x_{k1} \dots x_{kn})$. Además, sumar o restar combinaciones lineales de otras filas a una concreta no cambia el valor del determinante. Deducimos entonces que

$$\det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{i1} & \cdots & \dot{x}_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (A(t))_{ii} x_{i1} & \cdots & (A(t))_{ii} x_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = (A(t))_{ii} \det X(t) .$$

De esta manera, concluimos que $\frac{d}{dt} (\det X(t)) = \sum_{i=1}^n (A(t))_{ii} \det X(t) = \text{Tr } A(t) \det X(t)$.

□

Corolario 2.1. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se satisface*

$$\det e^A = e^{\text{Tr } A} . \quad (2.6)$$

Demostración. Basta aplicar la identidad de Jacobi al sistema de ecuaciones de coeficientes constantes $\dot{x} = Ax$. Evaluando en $t = 1$ la matriz principal en $t_0 = 0$, sigue el resultado. □

Observación 2.2. De la expresión (2.6), se deduce que la exponencial de una matriz real siempre tiene determinante positivo.

2.3.1. Estabilidad en sistemas lineales

Terminaremos este capítulo definiendo los conceptos más fundamentales de estabilidad en sistemas de ecuaciones y enunciando un teorema de estabilidad en sistemas lineales.

Definición 2.7 (Estabilidad en sistemas de ecuaciones). Sea $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$, con f suficientemente regular para garantizar la existencia y unicidad de solución de acuerdo con el teorema 2.3. Se considera que $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in [0, \infty)$. Entonces, $x \equiv 0$ es una solución, y se dice:

- $x \equiv 0$ es **estable (en el sentido de Lyapunov)** si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que si $|x_0| < \delta$, entonces $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, \infty)$.
- $x \equiv 0$ es **uniformemente estable** si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|x_0| < \delta$, entonces $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, \infty)$.
- $x \equiv 0$ es **asintóticamente estable** si es estable y existe $b = b(t_0)$ tal que si $|x_0| < b$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$.

- $x \equiv 0$ es **uniformemente asintóticamente estable** si es uniformemente estable, existe b independiente de t_0 tal que si $|x_0| < b$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$ y para todo $\eta > 0$ existe $T(\eta) > 0$ tal que si $|x_0| < b$, entonces $|x(t, t_0, x_0)| < \eta$ siempre que $t \geq t_0 + T(\eta)$.
- En cualquier otro caso, la solución $x \equiv 0$ se dice **inestable**.

Teorema 2.4. *Sea un sistema lineal de ecuaciones de la forma (2.3). Sea $X(t)$ una matriz fundamental de dicho sistema y sea $\beta \in (-\infty, \infty)$. Entonces, el sistema es:*

- **Estable** para todo $t_0 \in (-\infty, \infty)$ si y solo si existe $K = K(t_0) > 0$ tal que

$$|X(t)| \leq K \quad \text{para todo } t \in [t_0, \infty);$$

- **Uniformemente estable** para todo $t_0 \in [\beta, \infty)$ si y solo si existe $K = K(\beta) > 0$ tal que

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq K \quad \text{si } t_0 \leq s \leq t < \infty;$$

- **Asintóticamente estable** para todo $t_0 \in (-\infty, \infty)$ si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0;$$

- **Uniformemente asintóticamente estable** para todo $t_0 \in [\beta, \infty)$ si y solo si existe $K = K(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ tal que

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{si } t_0 \leq s \leq t < \infty.$$

El anterior resultado se puede particularizar para el caso de coeficientes constantes, limitando el estudio a los autovalores de la matriz de coeficientes.

Teorema 2.5. *Sea el sistema de coeficientes constantes (2.4).*

- I *Una condición necesaria y suficiente de estabilidad uniforme es que los valores propios de A tengan parte real menor o igual que 0, y aquellos con parte real 0 sean tales que su multiplicidad algebraica coincida con su multiplicidad geométrica.*
- II *Una condición necesaria y suficiente de estabilidad uniforme asintótica es que los valores propios de A tengan parte real menor que 0. En ese caso, existen $K > 0$ y $\alpha > 0$ tales que*

$$|e^{At}| \leq Ke^{-\alpha t} \quad \text{si } t \geq 0.$$

Veremos en capítulos posteriores cómo se extiende el teorema 2.4 para el caso de coeficientes periódicos.

Parte II

Sistemas con coeficientes periódicos, teoría de Floquet y ejemplos de aplicación

3. Teoría general de Floquet

Ya hemos presentado los sistemas lineales de ecuaciones de manera general, dados por la expresión (2.2). También destacamos que no conocemos la solución de un sistema lineal cualquiera. Esto motivó el estudio del sistema de coeficientes constantes. El siguiente paso natural en el estudio de los sistemas lineales consiste en introducir una dependencia del tiempo en los coeficientes que resulte manejable. Comenzando con el caso homogéneo, nos proponemos estudiar sistemas del tipo

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{con } A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ continua y } T\text{-periódica.} \quad (3.1)$$

Emplearemos la noción de periodicidad ya expuesta en la definición 2.1. A lo largo de las siguientes secciones, introduciremos la idea de logaritmo de una matriz, necesaria para la demostración del teorema de Floquet. Presentaremos después muchos de los conceptos utilizados habitualmente en el contexto de los sistemas periódicos. Con estas ideas, estaremos en condiciones de demostrar el teorema de Floquet. Este resultado se encuentra en el centro del estudio de los sistemas periódicos. Por último, nos encargaremos del estudio de los sistemas periódicos no homogéneos.

3.1. Logaritmo de una matriz

Comencemos por estudiar la extensión de la función logaritmo al caso matricial, como ya hicimos anteriormente con la función exponencial.

Definición 3.1 (Logaritmo de una matriz). Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se dice que admite un logaritmo si existe otra matriz $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de manera que $e^L = A$.

Con esta definición, no está garantizada la existencia ni unicidad de la matriz logaritmo. De hecho, en caso de existir, no es única en general, pues la función exponencial no es inyectiva en el cuerpo de los complejos. Por otro lado, el corolario 2.1 implica que, en el caso real, se debe cumplir que $\det A > 0$. Se trata de una condición de existencia de la matriz logaritmo.

Desarrollaremos a continuación los teoremas de existencia de logaritmo para matrices complejas y reales. Recordemos que una matriz $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice **nilpotente** si existe un natural $k \in \mathbb{N}$ de manera que $N^k = 0$, la matriz nula.

Lema 3.1. *Sea $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz nilpotente. Se define*

$$R(N) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} N^p .$$

Entonces, $e^{R(N)} = I + N$, donde I es la matriz identidad de dimensión n .

Demostración. En los reales, si $x > -1$ se satisface $e^{\log(1+x)} = 1+x$. Además, el desarrollo de Taylor de $\log(1+x)$ converge uniformemente a la función $\log(1+x)$ en el disco $|x| < 1$. De manera similar, el desarrollo de Taylor de la exponencial converge uniformemente a la función exponencial en todo \mathbb{R} y en particular en el disco $|x| < 1$. Tenemos por tanto que

$$1+x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{0 \leq r_1, \dots, r_n \leq p \\ r_1 + \dots + r_n = p}} \prod_{r_i} \frac{(-1)^{r_i-1}}{r_i} \right] x^p,$$

donde hemos usado la identidad

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{\substack{0 \leq r_1, \dots, r_n \leq k \\ r_1 + \dots + r_n = k}} a_{r_1} \cdot \dots \cdot a_{r_n} \right] x^k.$$

La convergencia uniforme en el disco $|x| < 1$ de los desarrollos de Taylor nos permite intercambiar los sumatorios en la igualdad anterior. Obtenemos así que

$$1+x = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{0 \leq r_1, \dots, r_n \leq p \\ r_1 + \dots + r_n = p}} \prod_{r_i} \frac{(-1)^{r_i-1}}{r_i} \right] x^p.$$

Igualando coeficientes, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{0 \leq r_1, \dots, r_n \leq p \\ r_1 + \dots + r_n = p}} \prod_{r_i} \frac{(-1)^{r_i-1}}{r_i} = \delta_{p1}$. Hemos utilizado el símbolo de Kronecker, definido como

$$\delta_{p1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 1 \\ 1 & \text{si } p = 1 \end{cases}.$$

Podremos extender esta igualdad al caso matricial, ya que en nuestro caso la matriz N es nilpotente. Por tanto, los desarrollos de potencias anteriores son finitos. Esto garantiza la convergencia. Entonces:

$$\begin{aligned} e^{R(N)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} N^p \right)^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{0 \leq r_1, \dots, r_n \leq p \\ r_1 + \dots + r_n = p}} \prod_{r_i} \frac{(-1)^{r_i-1}}{r_i} \right] N^p = \\ &= I + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{0 \leq r_1, \dots, r_n \leq p \\ r_1 + \dots + r_n = p}} \prod_{r_i} \frac{(-1)^{r_i-1}}{r_i} \right] N^p = I + \sum_{p=1}^{\infty} \delta_{p1} N^p = I + N. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz no singular ($\det A \neq 0$). Entonces, existe una matriz compleja $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de manera que $e^L = A$.

Demostración. Sea P una matriz no singular, y supongamos B, C dos matrices de manera que $e^C = B$. Entonces, por la proposición 2.5(5), se tiene que

$$PBP^{-1} = Pe^CP^{-1}.$$

Se puede asumir por tanto, por el teorema 2.1, que la matriz A del enunciado se encuentra en su forma canónica de Jordan. Es decir, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_p)$, donde $A_j = \lambda_j I + R_j$, siendo R_j una matriz nilpotente de la forma

$$R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis, A es no singular, luego $\lambda_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$. Basta probar que para cada bloque de Jordan, existe una matriz L_j tal que $A_j = e^{L_j}$.

Sea entonces $A = \lambda I + S$ un bloque de Jordan, siendo S nilpotente de la forma anterior. Como $\lambda \neq 0$, podemos expresar $A = \lambda \left(I + \frac{1}{\lambda} S \right)$.

Se define $L = (\log \lambda)I + R \left(\frac{1}{\lambda} S \right)$, siendo $R(N)$ con N nilpotente definida como en el lema 3.1. Entonces, aplicando la proposición 2.5(6), el lema 3.1 y operando, demostramos finalmente que la matriz L así definida es un logaritmo para el bloque de Jordan A

$$e^L = e^{(\log \lambda)I} e^{R \left(\frac{1}{\lambda} S \right)} = \lambda I e^{R \left(\frac{1}{\lambda} S \right)} = \lambda e^{R \left(\frac{1}{\lambda} S \right)} = \lambda I + S = A.$$

□

Teorema 3.2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz no singular ($\det A \neq 0$). Entonces, existe una matriz real $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de manera que $e^L = A^2$.

Demostración. De manera similar a como probamos el teorema 3.1, comencemos notando que dadas P una matriz no singular y B, C dos matrices reales con $e^C = B$, la proposición 2.5(5) garantiza que

$$PBP^{-1} = Pe^CP^{-1}.$$

Podemos asumir, por tanto, que la matriz real A se encuentra en su forma de Jordan real, como consecuencia del teorema 2.2. Es decir, $A = \text{diag}(J_1, \dots, J_r, L_1, \dots, L_s)$, donde $J_i = \lambda_i I + R_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, siendo

$$R_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Por su parte, los bloques L_j con $j \in \{1, \dots, s\}$ son de la forma

$$L_j = \begin{pmatrix} \Lambda & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda \end{pmatrix}$$

con $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ para cada autovalor complejo $\lambda_j = a + ib$.

El problema se reduce entonces a encontrar matrices logaritmo para cada bloque de la matriz A^2 en su forma de Jordan real. Recordemos que el cuadrado de una matriz diagonal por bloques es otra matriz diagonal por bloques, siendo cada nuevo bloque el cuadrado del original.

Bloques del tipo R_i

Comencemos considerando un bloque de la forma $J = \lambda I + N$, con N nilpotente igual que las matrices R_i . Sabemos que $\lambda \neq 0$, pues A es no singular.

Se define $L = (\log \lambda^2)I + 2R \left(\frac{1}{\lambda} N \right)$, siendo $R(S)$ para S nilpotente definida como en el lema 3.1. Entonces, aplicando la proposición 2.5(6), el lema 3.1 y operando, concluimos que la matriz L definida es un logaritmo para el bloque J^2 ,

$$e^L = e^{(\log \lambda^2)I} e^{2R \left(\frac{1}{\lambda} N \right)} = \lambda^2 \left(e^{R \left(\frac{1}{\lambda} N \right)} \right)^2 = \lambda^2 \left(I + \frac{1}{\lambda} N \right)^2 = J^2.$$

Bloques del tipo L_j

Consideremos ahora un bloque J de la forma de los L_j . Teniendo en cuenta que 0_2 denotará una matriz de ceros de tamaño 2×2 , este se puede escribir como

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda & I_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda \end{pmatrix} = \text{diag } \Lambda \left(I + \begin{pmatrix} 0_2 & \Lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0_2 & \Lambda^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0_2 \end{pmatrix} \right).$$

Notemos que la segunda matriz que aparece en la suma de la expresión anterior es nilpotente. Los bloques $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cumplen que $b \neq 0$. Suponiendo $a \geq 0$, al considerar la función tangente $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, se puede definir

$$L_\Lambda = \begin{pmatrix} \log \sqrt{a^2 + b^2} & \arctan \frac{b}{a} \\ -\arctan \frac{b}{a} & \log \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} = L_1 + L_2,$$

donde $L_1 = \log \sqrt{a^2 + b^2} I_2$ y $L_2 = \arctan \frac{b}{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices que conmutan. Aplicando entonces la proposición 2.5(6), se tiene

$$e^{L_\Lambda} = e^{L_1 + L_2} = e^{L_1} e^{L_2} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{L_2} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \left(\arctan \frac{b}{a} \right) & \sin \left(\arctan \frac{b}{a} \right) \\ -\sin \left(\arctan \frac{b}{a} \right) & \cos \left(\arctan \frac{b}{a} \right) \end{pmatrix}.$$

Necesitamos un par de relaciones trigonométricas. Denotemos por $y = \arctan x$. En ese caso, $x = \tan y$, por lo que podemos escribir $x^2 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}$. Utilizando la identidad fundamental de la trigonometría, obtenemos $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 y}$. Finalmente, despejamos para encontrar que $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. De manera análoga, se prueba que $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Teniendo en cuenta las identidades anteriores, concluimos que L_Λ es un logaritmo para el bloque Λ ,

$$e^{L_\Lambda} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Construimos entonces la matriz

$$L = \text{diag } L_\Lambda + R \left(\begin{pmatrix} 0_2 & \Lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0_2 & \Lambda^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0_2 \end{pmatrix} \right) = \Gamma + N,$$

donde $R(S)$ para S nilpotente está definida como en el lema 3.1. Así, utilizando la proposición 2.5(6) y el lema 3.1, se encuentra que la matriz L es un logaritmo para el bloque J :

$$e^L = e^{\Gamma+N} = e^{\Gamma} e^N = \text{diag } \Lambda \left(I + \begin{pmatrix} 0_2 & \Lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0_2 & \Lambda^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0_2 \end{pmatrix} \right) = J .$$

Así pues, para este tipo de bloques tenemos que $J^2 = e^{2L}$. Esto concluye la prueba. \square

3.2. El teorema de Floquet

En la descripción de los sistemas lineales periódicos, es habitual hablar de un cierto tipo de matrices relacionadas con las soluciones matriciales fundamentales de los mismos: las matrices de monodromía.

Observación 3.1. Consideremos el sistema periódico homogéneo dado por la ecuación (3.1). Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de este. Entonces, su traslación por un período es también matriz solución del sistema.

Demostración. Por ser $\Phi(t)$ una matriz solución del sistema, se tiene que

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T) \Phi(t+T) .$$

Como $A(t)$ es T -periódica, se cumple que $A(t+T) = A(t)$. Por tanto

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t) \Phi(t+T) .$$

Así, $\Phi(t+T)$ también es solución del mismo sistema. \square

En particular, como $\Phi(t)$ es matriz fundamental, su determinante es no nulo en todo instante de tiempo. Es decir, que $\det \Phi(t+T) \neq 0$ y $\Phi(t+T)$ es matriz fundamental del sistema. Como cualesquiera dos matrices fundamentales de un mismo sistema están relacionadas por una matriz constante no singular, sabemos que existe $C_{\Phi} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible de manera que $\Phi(t+T) = \Phi(t) C_{\Phi}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2 (Matriz de monodromía asociada a una matriz fundamental). Dada una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema periódico homogéneo (3.1), se conoce como **matriz de monodromía asociada a Φ** a la matriz $C_{\Phi} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible que cumple

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) C_{\Phi} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} .$$

Comenzamos planteándonos si matrices de monodromía asociadas a dos matrices fundamentales diferentes están relacionadas de alguna manera. La proposición 3.1 nos dará la respuesta.

Proposición 3.1. Sean $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ dos soluciones matriciales fundamentales del sistema periódico homogéneo (3.1). Sean $C_\Phi, C_\Psi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ las matrices de monodromía asociadas a cada una de ellas. Entonces, C_Φ, C_Ψ son matrices semejantes.

Demostración. Como Φ y Ψ son matrices fundamentales del sistema, existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular de manera que

$$\Phi(t) = \Psi(t) P \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} .$$

Entonces, podemos operar para obtener

$$\begin{aligned} \Phi(t+T) &= \Psi(t+T) P = \Psi(t) C_\Psi P , \\ \Phi(t+T) &= \Phi(t) C_\Phi = \Psi(t) P C_\Phi . \end{aligned}$$

Como $\det \Psi(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, la matriz $\Psi(t)$ es invertible en todo instante de tiempo. De manera que deducimos

$$P C_\Phi = C_\Psi P .$$

Por tanto, C_Φ, C_Ψ son matrices semejantes.

□

Como consecuencia de este hecho, el espectro de dos matrices de monodromía asociadas a dos matrices fundamentales cualesquiera es el mismo. Dicho de otra manera, $\sigma(C_\Phi)$ únicamente depende del sistema (3.1) y no de la matriz fundamental Φ elegida. En adelante, trabajaremos con la matriz principal del sistema en el instante $t_0 = 0$.

Definición 3.3 (Multiplicador característico). Sea Φ una matriz principal del sistema periódico homogéneo (3.1) en el instante $t_0 = 0$. Denotaremos por $C = \Phi(T)$ a la matriz de monodromía asociada a Φ , y diremos que es la matriz de monodromía del sistema. A los autovalores de C (que son invariantes), $\lambda \in \mathbb{C}$, se les llama **multiplicadores característicos** del sistema.

El nombre de multiplicador se debe a que los elementos de $\sigma(C)$ aparecen de manera multiplicativa al trasladar una cierta solución por un período, como probaremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. Sea el sistema periódico homogéneo (3.1), sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Son equivalentes:

1. λ es un multiplicador característico del sistema.
2. Existe una solución del sistema $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ no trivial ($\phi \neq 0$) tal que $\phi(t+T) = \lambda \phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Sea Φ una matriz principal del sistema. La matriz de monodromía asociada es $C = \Phi(T)$. Por hipótesis, existe un autovector asociado a λ . Es decir, existe $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de manera que $\Phi(T)x_0 = \lambda x_0$. Definimos $\phi(t) = \Phi(t)x_0$, que es solución no trivial por la proposición 2.4. Entonces, aplicando la definición de matriz de monodromía, obtenemos que

$$\phi(t+T) = \Phi(t+T)x_0 = \Phi(t)\Phi(T)x_0 = \lambda\Phi(t)x_0 = \lambda\phi(t).$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Consideramos de nuevo Φ una matriz principal del sistema. La matriz de monodromía asociada es $C = \Phi(T)$. Por hipótesis, existe una solución del sistema $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ no trivial ($\phi \neq 0$) tal que $\phi(t+T) = \lambda\phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $x_0 = \phi(0) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces, por la proposición 2.4, se cumple que $\phi(t) = \Phi(t)x_0$. Notemos ahora que $\phi(t+T) = \lambda\phi(t) = \lambda\Phi(t)x_0$. De igual manera, tenemos que $\phi(t+T) = \Phi(t+T)x_0 = \Phi(t)\Phi(T)x_0$.

Por ser Φ matriz fundamental, es invertible para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, de todo lo anterior deducimos que $\lambda x_0 = \Phi(T)x_0$. Por tanto, $\lambda \in \sigma(\Phi(T))$. Se concluye que λ es un multiplicador característico del sistema. \square

Hasta ahora, hemos encontrado un objeto invariante de cada sistema periódico (sus multiplicadores característicos). Es por esto que trataremos de usarlos para describir propiedades de los mismos.

En esta línea, la siguiente cuestión natural que cabe plantearse es la existencia de soluciones T -periódicas del sistema periódico homogéneo. La respuesta, en realidad, nos la da la proposición anterior. Formulamos el siguiente corolario para establecer condiciones de existencia de soluciones periódicas.

Corolario 3.1. *Sea el sistema periódico homogéneo (3.1).*

1. El sistema admite soluciones T -periódicas no triviales si y solo si 1 es un multiplicador característico de dicho sistema.
2. -1 es un multiplicador característico del sistema si y solo si existe una solución $2T$ -periódica del mismo que no es T -periódica.

Demostración. Basta particularizar la proposición 3.2 al caso de los valores 1 y -1 . \square

Otro resultado interesante en relación a los multiplicadores característicos es la particularización de la identidad de Jacobi, vista en el lema 2.2, al caso de sistemas periódicos.

Proposición 3.3. *Sea el sistema periódico homogéneo (3.1). Dada C una matriz de monodromía de dicho sistema, se tiene que*

$$\det C = \exp \left[\int_0^T \text{Tr } A(t) dt \right] = \prod_{\lambda \in \sigma(C)} \lambda .$$

Demostración. Por la proposición 3.1, dos matrices de monodromía cualesquiera son semejantes, y por tanto tienen el mismo determinante. Consideramos la matriz de monodromía asociada a Φ una matriz principal del sistema, $\Phi(T)$. Empleando la identidad de Jacobi con nuestro sistema y su solución matricial Φ , deducimos que

$$\det \Phi(t) = \exp \left[\int_0^t \text{Tr } A(s) ds \right] .$$

Entonces, como $\det C = \det \Phi(T)$, sigue la primera igualdad del enunciado. La segunda se deduce del hecho de que el determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores. \square

Hemos encontrado así que el producto de los multiplicadores característicos de un sistema es igual al determinante de cualquier matriz de monodromía asociada al mismo.

Estamos ya en condiciones de enunciar el teorema de Floquet. Este resultado básico de la teoría de sistemas periódicos nos da la forma general de las matrices fundamentales de todo sistema periódico y homogéneo. Ya que tenemos herramientas para ello, nos restringiremos al caso real.

Teorema 3.3 (Teorema de Floquet). *Sea el sistema periódico homogéneo (3.1). Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de dicho sistema.*

Entonces, existe una función matricial real $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de clase \mathcal{C}^1 , $2T$ -periódica y no singular en todo instante $t \in \mathbb{R}$, y existe una matriz real $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de manera que se verifica

$$\Phi(t) = P(t) e^{Rt} .$$

Demostración. Denotemos por C a la matriz de monodromía asociada a la matriz fundamental $\Phi(t)$. Tenemos que $\Phi(t+T) = \Phi(t) C$. Por tanto, $\Phi(t+2T) = \Phi(t) C^2$. Por ser C una matriz de monodromía, es no singular. Aplicando el teorema 3.2, existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = e^{2TR}$. Definamos ahora

$$P(t) = \Phi(t) e^{-Rt} .$$

La matriz P es real y $2T$ -periódica:

$$P(t + 2T) = \Phi(t) C^2 e^{-2TR} e^{-Rt} = \Phi(t) e^{-Rt} = P(t) .$$

En la anterior expresión, hemos tenido en cuenta que $C^2 e^{-2TR} = I$. Finalmente, despejando en la definición de $P(t)$, se encuentra que $\Phi(t) = P(t) e^{Rt}$. \square

Observación 3.2. En el teorema de Floquet, se puede relajar la condición de que P sea una función matricial real. Permitiendo que esta pueda ser del tipo $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces se puede obtener la misma expresión pero con P una función T -periódica. En la demostración, procederíamos exactamente de la misma manera, pero en vez de utilizar el teorema 3.2, usaríamos el teorema 3.1. No obstante, como trabajamos con sistemas periódicos reales, es conveniente que las soluciones también sean reales.

3.2.1. Consecuencias: el teorema de Lyapunov

El teorema de Floquet proporciona la forma general de las soluciones de los sistemas periódicos. Además, sabemos que no es posible encontrar de manera exacta estas soluciones. Pese a ello, tenemos herramientas para demostrar el teorema de Lyapunov. Este nos llevará a comprender que podemos relacionar cualquier sistema con coeficientes periódicos con uno de coeficientes constantes.

Teorema 3.4 (Teorema de Lyapunov). *Consideramos el sistema periódico homogéneo (3.1). Sean $P(t)$, real y $2T$ -periódica, y R , real y constante, las matrices dadas por el teorema de Floquet. El cambio de variables $x = P(t)y$ reduce al sistema lineal de coeficientes constantes:*

$$\dot{y} = R y .$$

Demostración. Como vimos en la demostración del teorema de Floquet, partimos de una matriz fundamental del sistema $\Phi(t)$, C su correspondiente matriz de monodromía y una matriz constante $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = e^{2TR}$ (existe por el teorema 3.2). Entonces, se tiene $P(t) = \Phi(t) e^{-Rt}$. La derivada de P para todo $t \in \mathbb{R}$ es

$$\dot{P}(t) = \dot{\Phi}(t) e^{-Rt} + \Phi(t) \frac{d}{dt} e^{-Rt} = A(t) \Phi(t) e^{-Rt} + \Phi(t) e^{-Rt} (-R) = A(t) P(t) - P(t) R .$$

Por tanto, al considerar el cambio de variable $x = P(t)y$, encontramos por un lado que

$$\dot{x} = \dot{P}(t) y + P(t) \dot{y} = A(t) P(t) y - P(t) R y + P(t) \dot{y} .$$

De igual manera, se verifica que

$$\dot{x} = A(t)x = A(t)P(t)y.$$

Concluimos así que $P(t)\dot{y} = P(t)Ry$. Como las matrices fundamentales y la exponencial son no singulares, también lo es $P(t)$. En definitiva, $\dot{y} = Ry$ un sistema de coeficientes constantes.

□

Sin embargo, aunque el teorema de Lyapunov pueda parecer indicar que los sistemas periódicos tienen la misma simplicidad que los sistemas de coeficientes constantes, existe una diferencia clave. En primer lugar, el cambio de variables necesario para llegar a un sistema de coeficientes constantes requiere conocer una matriz fundamental del sistema periódico de partida. Esto no será así en la práctica, pues justamente queremos conocer las soluciones. Por otro lado, en el caso de coeficientes constantes podemos conocer diversas características de las soluciones a partir de los autovalores de la matriz de coeficientes. Si bien es cierto que algunas propiedades de los sistemas periódicos pueden ser descritas en términos de los multiplicadores característicos, estos son conocidos a posteriori de la solución. Por ello resultan poco manejables en la práctica. De hecho, el problema del cálculo de los exponentes característicos sigue siendo un tema de investigación en la actualidad.

Ejemplo 3.1. Consideramos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} - \cos(t)y = 0.$$

Definiendo las variables $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, es posible escribir dicha ecuación como un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, periódico y homogéneo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix} x.$$

Un período de este sistema es $T = 2\pi$. Recordemos que para hallar las matrices involucradas en el teorema de Floquet, es necesario encontrar primero una matriz fundamental del sistema. En este caso, se tiene que $y_1 = c_1 e^t$, $y_2 = c_1 \sin t e^t + c_2 e^t$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación original, y consecuentemente, una matriz fundamental del sistema es la dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t \sin t & e^t \end{pmatrix}.$$

La forma de Floquet de esta matriz fundamental es $\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$, siendo

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = I_2.$$

Veamos cómo haciendo el cambio de variables $x = P(t)z$ en nuestro sistema periódico, encontramos el nuevo sistema de coeficientes constantes $\dot{z} = I_2 z$. Por un lado, podemos operar directamente sobre el cambio de variables para verificar que

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix} \dot{z}.$$

Otra opción es aplicar antes la relación dada por la ecuación diferencial y después realizar el cambio de variables. En ese caso, encontramos que

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix} \dot{z}.$$

Juntando ambos hechos, deducimos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix} \dot{z} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t + \cos t & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} \right] \dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{pmatrix} \dot{z}.$$

Finalmente, de esta última expresión llegamos al sistema de coeficientes constantes $\dot{z} = I_2 z$, en consistencia con el teorema de Lyapunov.

3.2.2. Estabilidad de los sistemas homogéneos con coeficientes periódicos

El teorema de Lyapunov permite estudiar la estabilidad de los sistemas periódicos homogéneos de manera análoga al caso de coeficientes constantes. Ya mencionamos en el teorema 2.5 algunas condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad en sistemas de coeficientes constantes. Notemos además que, en el caso de ser un sistema autónomo, la estabilidad y la estabilidad uniforme son equivalentes; de la misma manera, son equivalentes la estabilidad asintótica y la estabilidad uniforme asintótica. Veamos cómo se traduce esto al caso de coeficientes periódicos.

Teorema 3.5. *Sea el sistema periódico homogéneo (3.1).*

- I *Una condición necesaria y suficiente de estabilidad uniforme es que los multiplicadores característicos tengan módulo menor o igual a 1, y aquellos con módulo 1 sean tales que su multiplicidad algebraica coincida con su multiplicidad geométrica (como autovalores de la matriz de monodromía).*
- II *Una condición necesaria y suficiente de estabilidad uniforme asintótica es que los multiplicadores característicos tengan módulo menor que 1. En ese caso, dada $\Phi(t)$ una solución matricial del sistema, existen $K > 0$ y $\alpha > 0$ tales que*

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{si } t \geq s.$$

Demostración. Basta considerar en el sistema el cambio de variables dado por el teorema de Lyapunov (teorema 3.4). Una vez está en una forma de coeficientes constantes, se aplica el teorema 2.5. El resultado es inmediato. \square

Por tanto, la estabilidad no depende de manera evidente de la matriz de coeficientes, si no de los multiplicadores característicos. De nuevo, esto presenta una dificultad, pues no sabemos calcular multiplicadores característicos sin conocer previamente una solución.

En el siguiente ejemplo, mostraremos un sistema periódico cuya matriz de coeficientes tiene autovalores de parte real negativa (lo cual implica estabilidad uniforme asintótica en coeficientes constantes, recordemos el teorema 2.5), y que sin embargo tiene una solución no acotada.

Ejemplo 3.2. Consideremos el sistema 2π -periódico y homogéneo [7] dado por:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix} x .$$

El correspondiente polinomio característico de la matriz de coeficientes es

$$p(\lambda(t)) = \lambda^2 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} .$$

Por tanto, sus autovalores son independientes de t , y son $\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Ambos tienen parte real negativa. No obstante, es posible comprobar que una solución del sistema es $x(t) = e^{t/2}(-\cos t, \sin t)$, que es claramente no acotada. Consecuentemente, pese a que los autovalores de la matriz de coeficientes tienen parte real negativa, existe una solución inestable.

De hecho, a partir de la solución mencionada, aplicando la proposición 3.2 es posible comprobar que e^π es un multiplicador característico del sistema. El otro multiplicador, que denotaremos λ_2 , se puede deducir a partir de la proposición 3.3, sin más que integrar la traza de la matriz de coeficientes. En este caso, $\text{Tr } A(t) = -\frac{1}{2}$, de manera que

$$e^\pi \lambda_2 = e^{-\pi} .$$

Así, el segundo multiplicador característico resulta ser $e^{-2\pi}$. De acuerdo con el teorema 3.5, como uno de los multiplicadores tiene módulo mayor que uno, el sistema no es estable, como ya hemos visto.

3.3. El sistema lineal y periódico completo

Hemos estudiado ampliamente el caso de sistemas homogéneos de coeficientes periódicos. Como en el caso de coeficientes constantes, trataremos ahora de abordar el sistema periódico inhomogéneo. Recordemos que en coeficientes constantes, la solución se encontraba aplicando una fórmula de variación de constantes a la solución del sistema homogéneo. Consideramos la ecuación lineal

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t) \quad \text{con } A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continuas y T-periódicas. (3.2)}$$

En este caso, trataremos de utilizar una técnica conocida en \mathbb{R}^n para la discusión de sistemas: la **alternativa de Fredholm**. Nos permitirá estudiar la existencia de soluciones T-periódicas del sistema completo. Utilizaremos para ello una notación en términos de operadores de la ecuación (3.2). Definimos los conjuntos de funciones

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_T^1 &= \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{C}^1 \text{ y T-periódica} \}, \\ \mathcal{C}_T &= \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{C}^0 \text{ y T-periódica} \}. \end{aligned}$$

Definimos también el operador $L : \mathcal{C}_T^1 \rightarrow \mathcal{C}_T$ tal que para todo $x \in \mathcal{C}_T^1$, se tiene que $L(x) = \dot{x} - A(\cdot)x$. Se trata de un operador lineal, que permite expresar la ecuación diferencial (3.2) como

$$Lx = b.$$

3.3.1. La alternativa de Fredholm

La alternativa de Fredholm es el nombre que reciben una serie de teoremas enunciados por Fredholm, originalmente con el objetivo de estudiar las ecuaciones integrales. En su forma más general, se formula para espacios de Hilbert y operadores compactos sobre estos espacios. No obstante, se puede particularizar para \mathbb{R}^n , obteniendo así un método de discusión de sistemas lineales.

Teorema 3.6 (Alternativa de Fredholm en \mathbb{R}^n). *Sea el sistema $Lx = b$ donde $b \in \mathbb{R}^n$ un vector constante y $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operador lineal en \mathbb{R}^n , de manera que viene representado por una matriz $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Denotamos por L^ al operador adjunto de L , el único operador que verifica*

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle \quad \text{para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar habitual en \mathbb{R}^n (recordemos que en \mathbb{R}^n , el adjunto de un operador lineal coincide con su matriz traspuesta). Entonces:

1. Si $\ker L = 0$, entonces el sistema tiene una única solución: $x = L^{-1}b$.
2. Si $\ker L \neq 0$, entonces el sistema tiene alguna solución si y solo si $b \in (\ker L^*)^\perp$, el conjunto perpendicular al núcleo de L^* . Además, el número de soluciones linealmente independientes coincide con la dimensión de $\ker L$.

Demostración. Lo establecido en el punto (1) es un resultado bien conocido de álgebra lineal.

Supongamos que $\ker L \neq 0$. En ese caso, $\ker L^* \neq 0$ (por ser la matriz traspuesta), y de hecho $\dim \ker L = \dim \ker L^*$ (el rango por de una matriz coincide con el rango de su traspuesta). Si $y \in \ker L^*$, entonces

$$0 = \langle x, L^*y \rangle = \langle Lx, y \rangle = \langle b, y \rangle .$$

Es decir, $\text{Im } L \subseteq (\ker L^*)^\perp$. Por otro lado, se cumple que $n = \dim \ker L + \dim \text{Im } L = \dim \ker L^* + \dim \text{Im } L$. Se concluye que $(\ker L^*)^\perp = \text{Im } L$. \square

En vez de particularizar la alternativa de Fredholm en su forma general al caso que nos ocupa, trataremos de construir un teorema similar al 3.6, traduciendo cada uno de los elementos que intervienen en el mismo. Así, dadas $x, y \in \mathcal{C}_T$, definiremos su producto escalar como

$$(x, y) = \int_0^T \langle x(t), y(t) \rangle dt .$$

Buscamos ahora el operador adjunto de L . Debe ser tal que $(Lx, y) = (x, L^*y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{C}_T^1$. Escribimos explícitamente el producto escalar e integramos por partes para tratar de encontrar la expresión del adjunto, de manera que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \dot{x}(t) - A(t)x(t), y(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \dot{x}(t), y(t) \rangle dt - \int_0^T \langle A(t)x(t), y(t) \rangle dt = \\ &= \langle x(t), y(t) \rangle \Big|_0^T - \int_0^T \langle x(t), \dot{y}(t) \rangle dt - \int_0^T \langle x(t), A^*(t)y(t) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle x(t), -\dot{y}(t) - A^*(t)y(t) \rangle dt . \end{aligned}$$

Hemos utilizado la periodicidad de $x(t), y(t)$ para garantizar que

$$\langle x(t), y(t) \rangle \Big|_0^T = \sum_{i=0}^n x_i(t) y_i(t) \Big|_0^T = \sum_{i=0}^n (x_i(T) y_i(T) - x_i(0) y_i(0)) = 0 .$$

La unicidad del operador adjunto nos lleva a concluir que tiene la expresión es

$$L^*(y) = -\dot{y} - A^*(\cdot)y \quad \text{para todo } y \in \mathcal{C}_T^1.$$

Expondremos un par de lemas previos antes de enunciar y demostrar la alternativa de Fredholm en el caso de soluciones periódicas.

Lema 3.2. *Sea $\Phi(t)$ matriz fundamental del sistema (3.1). Entonces, $(\Phi^*)^{-1}(t)$ es matriz fundamental del sistema $\dot{y} = -A^*(t)y$.*

Demostración. Bastará probar que $(\Phi^*)^{-1}(t)$ es matriz solución del sistema $\dot{y} = -A^*(t)y$. Comencemos comprobando que, dada una función matricial cualquiera $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple que $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$. Para ello, consideramos la matriz identidad I . Se satisface que

$$0 = I' = (AA^{-1})' = A'A^{-1} + A(A^{-1})'.$$

Consecuentemente, $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$. Finalmente, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(\Phi^*)^{-1}(t)] &= -(\Phi^*)^{-1}(t)(\Phi^*)'(t)(\Phi^*)^{-1}(t) = \\ &= -(\Phi^*)^{-1}(t)\Phi^*(t)A^*(t)(\Phi^*)^{-1}(t) = -A^*(t)(\Phi^*)^{-1}(t), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\Phi' = A\Phi$. Por tanto, $(\Phi^*)' = \Phi^*A^*$.

□

Lema 3.3. *Sea φ una solución del sistema de ecuaciones (3.2). Entonces, φ es T -periódica si y solo si $\varphi(0) = \varphi(T)$.*

Demostración. \Rightarrow Es evidente.

\Leftarrow Las funciones $\varphi(t)$ y $\varphi(t+T)$ son soluciones del sistema (3.2). Además, ambas coinciden en $t=0$. Utilizando el teorema 2.3, por unicidad se debe cumplir que $\varphi(t) = \varphi(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, φ es T -periódica. □

Estamos en condiciones de establecer el teorema que nos permitirá discutir la existencia de soluciones T -periódicas para los sistemas lineales y periódicos completos.

Teorema 3.7 (Alternativa de Fredholm para soluciones periódicas). *Sea el sistema de ecuaciones lineal, periódico e inhomogéneo (3.2).*

1. *Si la ecuación homogénea $\dot{x} = A(t)x$ no tiene soluciones T -periódicas no triviales ($\ker L = 0$), entonces existe una única solución T -periódica de (3.2) para cualquier término independiente $b \in \mathcal{C}_T$.*

2. Si la ecuación homogénea admite soluciones T -periódicas no triviales ($\ker L \neq 0$), entonces (3.2) admite soluciones T -periódicas si y solo si toda solución T -periódica, $y \in \mathcal{C}_T^1$, de la ecuación adjunta $\dot{y} = -A^*(t)y$ verifica

$$(b, y) = \int_0^T \langle b(t), y(t) \rangle dt = 0 .$$

Es decir, $b \in (\ker L^*)^\perp$.

Demostración. Sea Φ una matriz principal en $t_0 = 0$ del sistema homogéneo $\dot{x} = A(t)x$ y φ una solución de (3.2). Aplicando la fórmula de variación de constantes, esta solución será de la forma

$$\varphi(t) = \Phi(t) x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) b(s) ds \quad \text{con } x_0 \in \mathbb{R}^n .$$

Aplicando el lema 3.3, el sistema (3.2) tiene soluciones T -periódicas si y solo si existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 = \Phi(T) x_0 + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s) ds$, si y solo si existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$[I - \Phi(T)] x_0 = \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s) ds .$$

La anterior expresión es un sistema de ecuaciones en \mathbb{R}^n . Apliquemos el teorema 3.6.

1. $I - \Phi(T)$ es invertible si y solo si su determinante es no nulo. Esto es equivalente a que 1 no sea un autovalor de $\Phi(T)$. Como $\Phi(T)$ es la matriz de monodromía del sistema homogéneo, esta condición es equivalente a que 1 no sea un multiplicador característico de $\dot{x} = A(t)x$. Finalmente, aplicando el corolario 3.1 esto es equivalente a que la ecuación homogénea no tenga más soluciones T -periódicas que la trivial.
2. Sabemos que el sistema lineal tiene soluciones si y solo si $\langle \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s) ds, y \rangle = 0$ para todo $y \in \ker[I - \Phi^*(T)]$, o equivalentemente $y = \Phi^*(T)y$. Desarrollemos este producto escalar, aprovechando su linealidad:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s) ds, y \rangle = \langle \int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s) ds, \Phi^*(T) y \rangle = \\ &= \langle \int_0^T \Phi^{-1}(s) b(s) ds, y \rangle = \int_0^T \langle \Phi^{-1}(s) b(s), y \rangle ds = \int_0^T \langle b(s), (\Phi^{-1}(s))^* y \rangle ds . \end{aligned}$$

Falta por ver que $(\Phi^{-1}(s))^* y$, con $y \in \ker(I - \Phi(T))^*$, recorre el conjunto de soluciones T -periódicas de $\dot{y} = -A^*(s)y$. Aplicando el lema 3.2, $(\Phi^{-1}(s))^* = (\Phi^*(s))^{-1}$ es matriz fundamental de la ecuación adjunta $\dot{y} = -A^*(s)y$. Por tanto, todas las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$(\Phi^{-1}(s))^* y_0 \quad \text{con } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ para todo } s \in \mathbb{R} .$$

Aplicando el lema 3.3, debe verificarse $(\Phi^{-1}(0))^* y_0 = y_0 = (\Phi^{-1}(T))^* y_0$. Es decir, y_0 debe ser tal que $y_0 \in \ker (I - (\Phi^{-1}(T))^*)$. Finalmente, notemos que $\ker (I - (\Phi^{-1}(T))^*) = \ker (I - \Phi^*(T))$.

Supongamos que $z \in \ker (I - (\Phi^{-1}(T))^*)$. Entonces $z = (\Phi^{-1}(T))^* z$. Como podemos tomar la inversa y el adjunto en el orden que queramos, deducimos que $\Phi^*(T)z = z$. Entonces, $z \in \ker (I - \Phi^*(T))$. El recíproco es análogo.

□

3.4. Ejemplos de aplicación

Trataremos de aplicar la teoría general de Floquet a casos concretos. Comenzaremos viendo en detalle la ecuación de Hill, pues se trata de la forma más general de las ecuaciones de segundo orden con coeficientes periódicos. Tras discutir sus propiedades de estabilidad, veremos algunas particularizaciones de esta ecuación: la ecuación de Mathieu para vibraciones en membranas, la trampa iónica cuadrupolar o las ecuaciones de movimiento del perigeo lunar.

3.4.1. La ecuación de Hill

La ecuación de Hill supone uno de los ejemplos más típicos de sistema periódico. Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$\ddot{y} + (a + p(t)) y = 0 \tag{3.3}$$

donde $p(t)$ es una función continua y T -periódica y $a \in \mathbb{C}$ es una constante.

Trataremos de encontrar para qué valores de a existen soluciones estables de esta ecuación. Una vez estudiadas de manera general sus propiedades, nos fijaremos en casos concretos que justificarán la elección de este modelo, pues aparece en la descripción de múltiples sistemas.

En primer lugar y para poder utilizar el lenguaje de la teoría de Floquet, convertiremos la ecuación (3.3) en un sistema de ecuaciones de primer orden, obteniendo

$$\dot{x} = [C(a) + A(t)] x, \tag{3.4}$$

donde x es una función vectorial cuyas componentes son $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Además, hemos definido las matrices de coeficientes

$$C(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $\Phi(t)$ es una matriz principal en $t = 0$ del sistema (3.4). Es decir, tenemos dos soluciones φ_1, φ_2 linealmente independientes de la ecuación de Hill (3.3), de manera que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(0) = I_2 .$$

Los multiplicadores característicos de la ecuación de Hill son las raíces de la matriz de monodromía $\Phi(T)$. Son las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 - 2B(a)\lambda + 1 = 0 .$$

En la anterior expresión, hemos definido

$$2B(a) = \text{Tr}(\Phi(T)) = \varphi_1(T) + \dot{\varphi}_2(T) .$$

El término $2B(a)$ recibe el nombre de **discriminante de la ecuación de Hill**. Además, hemos utilizado que $\det \Phi(t) = 1$. Esto es una consecuencia de la identidad de Jacobi, pues el determinante en $t = 0$ es $\det \Phi(0) = 1$ y la traza de la matriz de coeficientes, $C(a) + A(t)$, es 0 para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, $\det \Phi(T) = 1 = \lambda_1 \lambda_2$. Además, por el teorema 3.5, deducimos que solo existen soluciones estables si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Si uno de los dos autovalores tuviese módulo estrictamente menor que 1, el otro necesariamente tendría módulo mayor que 1, haciendo inestable al sistema.

Proposición 3.4. *Si la constante $a \in \mathbb{C}$ de la ecuación de Hill es tal que $\text{Im} a \neq 0$, entonces la ecuación es inestable, y ninguno de los multiplicadores característicos tiene módulo 1.*

Demostración. Por lo visto anteriormente, bastará ver que ninguno de los autovalores tiene módulo 1 para probar la inestabilidad del sistema. Supongamos que alguno de ellos, digamos λ_1 , es tal que $|\lambda_1| = 1$ y que $\text{Im} a \neq 0$. Entonces, por la proposición 3.2, existe una solución $z(t)$ que satisface $z(t + T) = \lambda_1 z(t)$. Podemos escribirla como $z(t) = u(t) + i v(t)$, con u, v funciones reales. Además, escribimos la constante $a = \alpha + i\beta$ con α, β constantes reales. Entonces, se cumple

$$\begin{aligned} \ddot{u} + (\alpha + p(t))u &= \beta v , \\ \ddot{v} + (\alpha + p(t))v &= -\beta u . \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que $\ddot{u}v - u\ddot{v} = \beta(u^2 + v^2)$. Finalmente, integrando el cuadrado de la función $z(t)$, tenemos que

$$\beta \int_0^t |z(s)|^2 ds = \beta \int_0^t (u^2(s) + v^2(s)) ds = \dot{u}(t)v(t) - u(t)\dot{v}(t) + K .$$

Por un lado, como $|\lambda_1| = 1$, el módulo de $z(t)$ es una función T-periódica. Entonces, la integral $\int_0^t |z(s)|^2 ds$ es monótona creciente en t , por ser el integrando una función

periódica y positiva. En particular, la integral $\int_0^t |z(s)|^2 ds$ es una función no acotada para $t > 0$. Sin embargo, $\dot{u}(t)v(t) - u(t)\dot{v}(t) + K$ es una función acotada para todo $t > 0$. Concluimos que o bien $z = 0$ (la solución trivial), o bien $\beta = 0$. Esto concluye la prueba. \square

Observación 3.3. De manera explícita, los multiplicadores característicos de la ecuación de Hill vienen dados por $\lambda_1 = B(a) + \sqrt{B(a)^2 - 1}$, $\lambda_2 = B(a) - \sqrt{B(a)^2 - 1}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación $B(a)^2 = 1$ nos dan el comportamiento del sistema.

Como consecuencia del corolario 3.1, si $B(a)^2 = 1$, entonces $B(a) = \pm 1$ y existen soluciones T-periódicas o 2T-periódicas, respectivamente, no triviales. Además, por la proposición 3.4, la ecuación $B(a)^2 = 1$ solo puede tener soluciones reales. Por otro lado, siempre que $a \in \mathbb{R}$, la condición $B(a)^2 < 1$ conduce a que los multiplicadores característicos son complejos conjugados de módulo 1. Por tanto, las soluciones son estables. Finalmente, la condición $B(a)^2 > 1$ conduce a que uno de los multiplicadores característicos tiene módulo mayor que 1, y consecuentemente el sistema es inestable.

La discusión anterior nos permite asegurar, en vista del teorema 3.5, que la ecuación de Hill no admite soluciones asintóticamente estables. Introduzcamos algo de nomenclatura para discutir en más detalle la transición del comportamiento estable al inestable.

Definición 3.4. Dado un intervalo real $I \subset \mathbb{R}$, se dice que es un **a-intervalo de estabilidad o inestabilidad** si para todo $a \in I$, la ecuación de Hill dada por (3.3) admite soluciones estables o inestables, respectivamente.

Los extremos de estos intervalos vienen dados por las soluciones de la ecuación $B(a)^2 = 1$, siendo $2B(a)$ el discriminante de la ecuación de Hill.

Por tanto, es indispensable encontrar herramientas que nos permitan hallar las soluciones de la ecuación $B(a)^2 = 1$. La siguiente proposición nos da información en este aspecto.

Proposición 3.5. *Si $a + p(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, T]$, entonces la ecuación de Hill tiene una solución no acotada. Además, si $a + p(t) \neq 0$, entonces $B(a) > 1$.*

Demostración. Supongamos $\varphi_1(t)$, una solución de la ecuación de Hill que satisface $\varphi_1(0) = 1$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$. Además, asumimos que $\psi(t) := -(a + p(t)) \geq 0$.

Por ser solución de la ecuación (3.3), φ_1 cumple la relación

$$\dot{\varphi}_1(t) \ddot{\varphi}_1(t) + (a + p(t)) \dot{\varphi}_1(t) \varphi_1(t) = 0$$

para todo valor de $t \in \mathbb{R}$. Podemos expresarla en forma integral como

$$(\dot{\varphi}_1(t))^2 = 2 \int_0^t \psi(s) \varphi_1(s) \dot{\varphi}_1(s) ds$$

para todo $t \geq 0$. Como $\varphi_1(0) = 1$, sabemos también que $\dot{\varphi}_1(0) = \psi(0) \varphi_1(0) \geq 0$. Consecuentemente, $\dot{\varphi}_1(t) \geq 0$ en algún intervalo $t \in [0, \eta_0]$.

Si para todo $t \geq 0$ se tiene que $\dot{\varphi}_1(t) = 0$, entonces $\varphi_1 = 1$ es una solución y consecuentemente $a + p(t) \equiv 0$. Recíprocamente, si $a + p(t) \equiv 0$, entonces $\varphi_1 = 1$ es una solución y para todo $t \geq 0$ se tiene que $\dot{\varphi}_1(t) = 0$. Entonces, $\varphi_2(t) = t$ también es una solución, que resulta ser no acotada.

Supongamos entonces que $a + p(t) \neq 0$. Elegimos $\eta \geq 0$ de manera que $\dot{\varphi}_1(t) = 0$ para todo $t \in [0, \eta]$, y tal que para todo $\tau > 0$ exista $t_0 \in (\eta, \eta + \tau)$ con $\dot{\varphi}_1(t_0) > 0$. La existencia de η está garantizada, pues ya hemos razonado que $\dot{\varphi}_1(t) \geq 0$ en algún intervalo $t \in [0, \eta_0]$. Además, $\dot{\varphi}_1(t)$ no puede ser idénticamente nula, o nos encontraríamos en el caso anterior. En estas condiciones, se puede elegir τ suficientemente pequeño, de manera que $\varphi_1(s) > 0$ para todo $s \in [0, \eta + \tau]$. Además, como $\psi(s) \geq 0$, de la expresión $(\dot{\varphi}_1(t))^2 = 2 \int_0^t \psi(s) \varphi_1(s) \dot{\varphi}_1(s) ds$ se deduce que $\dot{\varphi}_1(t) > 0$ para todo valor $t \in (\eta, \eta + \tau)$. Entonces, como el lado derecho de la expresión integral es no decreciente en t , deducimos que $\dot{\varphi}_1(t)$ es positiva para todo $t > \eta$ y monótona creciente para $t \geq \eta$. Teniendo esto en cuenta, se deduce que

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \dot{\varphi}_1(s) ds \geq 1 + \int_{\eta+\tau}^t \dot{\varphi}_1(s) ds \geq 1 + \dot{\varphi}_1(\eta + \tau) (t - \eta - \tau).$$

La anterior expresión es válida para $t \geq \eta + \tau$ y $\tau > 0$. Finalmente, como $\dot{\varphi}_1(\eta + \tau) > 0$, concluimos que $\varphi_1(t)$ es no acotada. Esto prueba la primera parte del lema.

Para la segunda parte, recordemos que ya hemos probado que $\dot{\varphi}_1(t) \geq 0$ para todo valor de t . Por tanto, $\varphi_1(T) > 1$. Consideramos ahora otra solución $\varphi_2(t)$ de la ecuación de Hill, que satisface $\varphi_2(0) = 0$ y $\dot{\varphi}_2(0) = 1$. Esta función cumple, de manera análoga a lo ya visto,

$$(\dot{\varphi}_2(t))^2 = 1 + 2 \int_0^t \psi(s) \varphi_2(s) \dot{\varphi}_2(s) ds.$$

Ya que $\psi(s) \geq 0$ y no es idénticamente nula, sigue que $\dot{\varphi}_2(T) > 1$. Deducimos que $2B(a) = \varphi_1(T) + \dot{\varphi}_2(T) > 2$. Esto concluye la prueba. □

Observación 3.4. La proposición 3.5 implica que la función $a + p(t)$ debe tomar algún valor positivo en cada período para que ambas soluciones sean acotadas. El mismo resultado asegura además que si $a + p(t) \leq 0$ pero no es idénticamente nula, entonces la ecuación de Hill no admite soluciones periódicas no triviales.

La proposición 3.5 nos permite deducir la forma del primer a -intervalo de inestabilidad. Ya que $p(t)$ es continua y T -periódica, es una función acotada. Entonces, existe $a^* \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a < a^*$ se cumple que $a + p(t) < 0$. De acuerdo con la proposición 3.5, determinamos que $(-\infty, a^*)$ es un a -intervalo de inestabilidad de la ecuación de Hill.

Concluiremos esta sección presentando un teorema que recoge una caracterización de los a -intervalos de estabilidad e inestabilidad de la ecuación de Hill. También permite determinar la existencia de soluciones periódicas. Su demostración involucra varios lemas, los cuales hacen referencia a propiedades de las funciones enteras y resultados de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver los lemas 8.1 a 8.7 del capítulo 3 de [8]). No obstante, no nos resultan de interés para los fines de nuestro estudio de la ecuación de Hill. Nos limitaremos por ello a enunciar el teorema.

Teorema 3.8. *Existen dos sucesiones, $\{a_0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots\}$ y $\{a_1^* \leq a_2^* \leq \dots\}$ de números reales, tales que ambas tienden a infinito y con la propiedad:*

$$a_0 < a_1^* \leq a_2^* < a_1 \leq a_2 < a_3^* \leq a_4^* < a_3 \leq a_4 < \dots$$

de manera que la ecuación de Hill (3.3) admite una solución T -periódica (o $2T$ -periódica) si y solo si $a = a_k$ para algún $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (o $a = a_k^$ para algún $k \in \{1, 2, \dots\}$).*

La ecuación de Hill (3.3) es estable en los intervalos (a_0, a_1^) , (a_2^*, a_1) , $(a_2, a_3^*) \dots$. Es inestable en los intervalos $(-\infty, a_0]$, (a_1^*, a_2^*) , (a_1, a_2) , $(a_3^*, a_4^*) \dots$.*

La ecuación es estable en a_{2k+1} o a_{2k+2} si y solo si $a_{2k+1} = a_{2k+2}$, para todo $k \geq 0$ (de igual manera, la ecuación es estable en a_{2k+1}^ o a_{2k+2}^* si y solo si $a_{2k+1}^* = a_{2k+2}^*$, para todo $k \geq 0$).*

La ecuación es siempre inestable si a es complejo.

En resumen, la estabilidad o inestabilidad de las soluciones de la ecuación de Hill depende del valor del parámetro a . Si logramos encontrar, fijada una cierta función periódica $p(t)$, los valores de a para los que existen soluciones T -periódicas y $2T$ -periódicas, el teorema 3.8 nos describe completamente el comportamiento de la ecuación. Sin embargo, la teoría general no proporciona herramientas para calcular en la práctica estos valores. Veremos en las siguientes secciones como particularizando la ecuación se pueden realizar avances en este aspecto.

Movimiento del perigeo lunar

Hasta ahora, hemos estudiado las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes periódicos bajo el nombre de ecuación de Hill. Sin embargo, el trabajo original de George William Hill [4] trata sobre el movimiento del perigeo lunar.

No abordaremos la totalidad del problema, pero vamos a describirlo. Las medidas más antiguas de los ciclos lunares corresponden a los babilonios. Ya en aquel entonces

comenzaron a anotarse discrepancias en el tiempo que sucedía entre dos lunas llenas (o equivalentemente, lunas nuevas) consecutivas. En la actualidad, se habla del movimiento del perigeo lunar; es decir, del punto más próximo de la Luna a la Tierra en su trayectoria. Sabemos que si la Luna interactuase únicamente con la Tierra, seguiría una órbita perfectamente periódica. Sin embargo, la existencia de otros cuerpos celestes la perturban. De entre todos ellos, el más relevante por su enorme masa es el Sol. Por tanto, en el problema del movimiento del perigeo lunar encontramos el clásico problema de los tres cuerpos. En su artículo, Hill considera al Sol como un cuerpo infinitamente lejano para simplificar las ecuaciones canónicas del sistema. Tras una serie de consideraciones y cambios de variable, llega a la ecuación siguiente:

$$\ddot{w}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \cos(2j\nu(t-t_0)) w(t) = 0. \quad (3.5)$$

En la ecuación (3.5), t_0 corresponde al instante de conjunción de la Luna y el Sol (desde la perspectiva terrestre), ν representa la frecuencia de rotación de la Luna en torno al Sol, θ_j son constantes que no dependen del resto de variables y w es una medida de la desviación de la órbita lunar, aunque Hill no le da una interpretación clara.

Con la nomenclatura que hemos desarrollado, θ_0 cumple el papel del parámetro a de la ecuación (3.3). La función periódica $p(t)$, por su lado, viene dada por una serie de Fourier. Esta función periódica depende únicamente de la posición relativa de la Luna con respecto al Sol. Para abordar el problema, Hill plantea un sistema infinito de ecuaciones que permita encontrar los valores de las constantes θ_j , resolviendo un determinante infinito. Encuentra este sistema introduciendo un *ansatz* de tipo Floquet en la ecuación (3.5). La parte periódica del *ansatz* es una serie de Fourier con coeficientes θ_j . Finalmente, describe las soluciones cuasi-periódicas del sistema en términos de dichas constantes.

3.4.2. La ecuación de Mathieu

En la sección anterior hemos estudiado el caso general de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes periódicos. También discutimos su estabilidad en base a un parámetro que denotamos por a . El teorema 3.8 nos resuelve la existencia de a -intervalos de estabilidad e inestabilidad, pero no nos brinda herramientas para hallarlos. Por ello, seguimos sin poder conocer si la ecuación de Hill en su forma general admite o no soluciones periódicas.

Nos planteamos ahora restringir la ecuación de Hill. Para ello, nos centraremos en otra ecuación periódica clásica, ampliamente estudiada y que aparece en muchos contextos diferentes: la **ecuación de Mathieu**. Dadas dos constantes reales $a, q \in \mathbb{R}$, la forma general de la ecuación de Mathieu viene dada por

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) w = 0. \quad (3.6)$$

Buscaremos discutir la existencia de soluciones periódicas para esta ecuación. Para ello, comenzamos con el siguiente teorema, que recoge propiedades generales de las soluciones principales.

Teorema 3.9. *La ecuación de Mathieu (3.6) siempre posee dos soluciones, w_1 y w_2 , que satisfacen*

1. w_1 es par y w_2 es impar.
2. $w_1(0) = \dot{w}_2(0) = 1, \dot{w}_1(0) = w_2(0) = 0$.
3. $w_1(z \pm \pi) = w_1(\pi) w_1(z) \pm \dot{w}_1(\pi) w_2(z)$.
4. $w_2(z \pm \pi) = \pm w_2(\pi) w_1(z) + \dot{w}_2(\pi) w_2(z)$.
5. $w_1(z) \dot{w}_2(z) - \dot{w}_1(z) w_2(z) = 1$.
6. $w_1(\pi) = \dot{w}_2(\pi)$.

Demostración. Probemos cada afirmación por separado.

1. Podemos aplicar el método de Frobenius (ver sección 4.2 de [9]) para encontrar que existen dos soluciones linealmente independientes de la forma $w_1 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$ y $w_2^* = \sum_{r=0}^{\infty} b_r z^{r+1}$ con $a_0 \neq 0 \neq b_0$. Podemos construir una combinación lineal de ambas, $w_2 = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r$ tal que $c_0 \neq 0$ y $c_1 = 0$. Por tanto, w_1, w_2 son soluciones tales que $w_1(0) \neq 0, \dot{w}_2 \neq 0$ y $w_2(0) = \dot{w}_1(0) = 0$. Notemos que $w_1(-z), w_2(-z)$ también satisfacen la ecuación de Mathieu. Es por ello que existen constantes reales $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que $w_1(-z) = A w_1(z) + B w_2(z)$ y $w_2(-z) = C w_1(z) + D w_2(z)$. Evaluando en $z = 0$ las anteriores expresiones y sus primeras derivadas, concluimos que $A = 1, B = C = 0$ y $D = -1$. Esto prueba que $w_1(-z) = w_1(z)$ y que $w_2(-z) = -w_2(z)$.
2. Tal como hemos definido las soluciones w_1 y w_2 en el punto anterior, la segunda igualdad está probada. Para la primera, basta escoger de manera adecuada las condiciones de contorno de la ecuación de Mathieu.
3. Ya que la ecuación de Mathieu es π -periódica, $w_1(z + \pi)$ también la satisface. Por ello, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $w_1(z + \pi) = \alpha w_1(z) + \beta w_2(z)$. Además, se cumple también que $\dot{w}_1(z + \pi) = \alpha \dot{w}_1(z) + \beta \dot{w}_2(z)$. Evaluando ambas expresiones en $z = 0$ y considerando las igualdades del punto anterior, sigue que $\alpha = w_1(\pi)$ y $\beta = \dot{w}_1(\pi)$. La otra igualdad se prueba de forma análoga.
4. La prueba es completamente análoga a la expuesta en el punto 3.
5. Recordemos que la **matriz wronskiana** de una ecuación diferencial de orden n está formada por las n soluciones linealmente independientes y sus $(n - 1)$ primeras derivadas, organizadas por filas. El **wronskiano** es el determinante de la matriz wronskiana. La identidad de Abel para el wronskiano (ver lema 3.11 de [9]) viene dada por

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr } A(s) ds \right).$$

Esta igualdad garantiza que el wronskiano de la ecuación de Mathieu es constante. Por tanto, tenemos que

$$w_1(z) \dot{w}_2(z) - w_2(z) \dot{w}_1(z) = w_1(0) \dot{w}_2(0) - w_2(0) \dot{w}_1(0) = 1.$$

6. Finalmente, evaluamos en $z = \pi$ las identidades 3, 4 y 5 para obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (w_1(\pi))^2 - \dot{w}_1(\pi) w_2(\pi) = 1 \\ w_1(\pi) w_2(\pi) - w_2(\pi) \dot{w}_2(\pi) = 0 \\ w_1(\pi) \dot{w}_2(\pi) - \dot{w}_1(\pi) w_2(\pi) = 1 \end{cases} .$$

La segunda ecuación implica que o bien $w_2(\pi) = 0$ o bien $w_1(\pi) = \dot{w}_2(\pi)$. Si se da lo segundo, hemos terminado. Si $w_2(\pi) = 0$, de la primera ecuación deducimos que $(w_1(\pi))^2 = 1$. De la tercera, deducimos que $w_1(\pi) \dot{w}_2(\pi) = 1$. En cualquier caso, obtenemos de nuevo que $w_1(\pi) = \dot{w}_2(\pi)$. Esto concluye la prueba. □

Al igual que ya hicimos con la ecuación de Hill, podemos escribir la ecuación de Mathieu como un sistema lineal. Se obtiene el sistema lineal de ecuaciones con coeficientes periódicos

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(a - 2q \cos 2z) & 0 \end{pmatrix} x . \quad (3.7)$$

La función incógnita x es un vector con componentes w y \dot{w} , la solución de la ecuación de Mathieu y su primera derivada. El teorema 3.9 nos permite construir una matriz principal del sistema (3.7),

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ \dot{w}_1(z) & \dot{w}_2(z) \end{pmatrix} .$$

Por tanto, la matriz de monodromía del sistema (3.7) viene dada por

$$\Phi(\pi) = \begin{pmatrix} w_1(\pi) & w_2(\pi) \\ \dot{w}_1(\pi) & \dot{w}_2(\pi) \end{pmatrix} .$$

Sus autovalores son los multiplicadores característicos de la ecuación de Mathieu. Sabemos que estos describen completamente a un sistema periódico. Se reduce a encontrar las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 - (w_1(\pi) + \dot{w}_2(\pi)) \lambda + 1 = 0 .$$

Hemos utilizado que el determinante de la matriz de monodromía es 1, como consecuencia del punto 5 del teorema 3.9.

Ya hicimos este desarrollo para la ecuación de Hill. En aquel caso, discutimos que el producto de los multiplicadores característicos debe ser $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, por ser igual al determinante de la matriz de monodromía. Además, solo pueden existir soluciones periódicas si ambos multiplicadores característicos tienen módulo 1. No obstante, la ecuación de

Mathieu permite llevar un paso más allá la discusión sobre la existencia de soluciones periódicas. Como los multiplicadores característicos deben tener producto igual a la unidad, la única posibilidad de tener alguna solución periódica es que ambos sean 1 (en cuyo caso existirá una solución π -periódica) o -1 (en cuyo caso existirá una solución 2π -periódica).

Teorema 3.10. *Fijados valores de las constantes $a, q \in \mathbb{R}$ y excepto en el caso trivial en que $q = 0$, la ecuación de Mathieu (3.6) nunca posee dos soluciones periódicas linealmente independientes.*

Demostración. En el teorema 3.9 probamos que la ecuación de Mathieu siempre admite una solución par y otra impar, w_1 y w_2 , ambas linealmente independientes. Si los multiplicadores característicos son tales que $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, la proposición 3.2 garantiza que existe al menos una solución periódica, llamémosla ϕ_1 . Si existiese una segunda solución periódica ϕ_2 linealmente independiente de ϕ_1 , tendría el mismo período. Además, podríamos construir w_1 y w_2 como combinaciones lineales de ϕ_1 y ϕ_2 . Por tanto, existirían w_1 y w_2 soluciones linealmente independientes, T -periódicas (con T pudiendo ser π o 2π), una de ellas par y la otra impar. Nuestro objetivo será ver que tales soluciones no pueden coexistir.

Comenzaremos probando que si existen w_1 y w_2 con las propiedades anteriores, entonces $\int_0^\pi w_1(z) w_2(z) \sin 2z \, dz = 0$. Después, concluiremos que dicha integral no puede ser 0, encontrando la contradicción deseada. Denotamos $J(z) = a - 2q \cos 2z$. Entonces, se satisfacen las identidades $\ddot{w}_1 + J(z) w_1 = 0$ y $\ddot{w}_2 + J(z) w_2 = 0$. Multiplicamos por \dot{w}_2 y \dot{w}_1 , respectivamente. Sumando los resultados, se tiene la identidad $(\dot{w}_1 \dot{w}_2 + \ddot{w}_2 \dot{w}_1) + J(z) (w_1 \dot{w}_2 + w_2 \dot{w}_1) = 0$. Integramos la expresión obtenida, de manera que

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi (\dot{w}_1 \dot{w}_2 + \ddot{w}_2 \dot{w}_1) \, dz + \int_0^\pi J(z) (w_1 \dot{w}_2 + w_2 \dot{w}_1) \, dz = \\ & = \int_0^\pi \frac{d}{dz} (\dot{w}_1 \dot{w}_2) \, dz + \int_0^\pi J(z) (w_1 \dot{w}_2 + w_2 \dot{w}_1) \, dz = 0 . \end{aligned}$$

Podemos aplicar integración por partes en la segunda integral. Tomamos $u = J(z)$, $dv = (w_1 \dot{w}_2 + w_2 \dot{w}_1) \, dz$, de manera que

$$(\dot{w}_1 \dot{w}_2) \Big|_0^\pi + (J(z) w_1 w_2) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{J}(z) w_1 w_2 \, dz = 0 .$$

Como w_1 y w_2 tienen período o bien π o bien 2π (en cuyo caso, $w_i(z + \pi) = -w_i(z)$ para $i \in \{1, 2\}$), su producto tiene período π . La misma propiedad es cierta para el producto de sus primeras derivadas. Además $J(z)$ es también π -periódica. En definitiva, de la anterior expresión se deduce que $\int_0^\pi \dot{J}(z) w_1 w_2 \, dz = 0$. Sustituyendo el valor de $J(z)$, encontramos que

$$\int_0^\pi 4q \sin 2z w_1 w_2 \, dz = 0 .$$

Por hipótesis, omitimos el caso trivial $q = 0$. Por tanto, queda probado como queríamos que

$$\int_0^\pi w_1(z) w_2(z) \sin 2z \, dz = 0 .$$

Nos queda probar que la integral anterior no puede ser 0. Para ello, definimos $u(z) = w_1(z) w_2(z)$. Se trata de una función π -periódica e impar, que satisface la ecuación diferencial $\ddot{u} + 4J(z)\dot{u} + 2\dot{J}(z)u = 0$. Esta última propiedad no es exclusiva de la ecuación de Mathieu, sino que es válida para cualquier ecuación ordinaria de segundo orden. Definamos las integrales $I_n = \int_0^\pi u(z) \sin 2nz \, dz$. Tomamos $u = u(z)$ y $dv = \sin 2nz \, dz$, para integrar por partes y obtener

$$I_n = \left(-u(z) \frac{\cos 2nz}{2n} \right) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos 2nz}{2n} \dot{u}(z) \, dz = \int_0^\pi \frac{\cos 2nz}{2n} \dot{u}(z) \, dz ,$$

ya que tanto $u(z)$ como $\cos 2nz$ son funciones π -periódicas. Podemos integrar por partes dos veces más, tomando como dv el término trigonométrico y como u a las derivadas de $u(z)$ para encontrar

$$8n^3 I_n = - \int_0^\pi \cos 2nz \, \ddot{u}(z) \, dz .$$

Notemos que las derivadas de $u(z)$ siguen siendo funciones π -periódicas. Además, tanto $\cos 2nz$ como $\sin 2nz$ son también funciones π -periódicas. Así, los términos que vamos evaluando en los límites de integración al integrar por partes se anulan.

Recordando que $u(z)$ satisface la ecuación $\ddot{u} + 4J(z)\dot{u} + 2\dot{J}(z)u = 0$, podemos sustituir en nuestra última expresión de I_n para encontrar que

$$8n^3 I_n = 4 \int_0^\pi \cos 2nz (a - 2q \cos 2z) \dot{u}(z) \, dz + 8q \int_0^\pi \cos 2nz \sin 2z u(z) \, dz .$$

Utilizando las identidades trigonométricas relativas a la suma y resta de ángulos y recordando que $I_n = \int_0^\pi u(z) \sin 2nz \, dz = \int_0^\pi \frac{\cos 2nz}{2n} \dot{u}(z) \, dz$, podemos simplificar la expresión anterior para obtener

$$\begin{aligned} 8n^3 I_n &= 4 \int_0^\pi (a \cos 2nz - q \cos (2n+2)z - q \cos (2n-2)z) \dot{u}(z) \, dz + \\ &\quad + 4q \int_0^\pi (\sin (2n+2)z - \sin (2n-2)z) u(z) \, dz = \\ &= 8(na I_n - (n+1)q I_{n+1} - (n-1)q I_{n-1}) + 4q(I_{n-1} + I_{n+1}) . \end{aligned}$$

En definitiva, hemos encontrado una relación de recurrencia válida para $n \geq 1$ de la forma

$$I_{n+1} = \frac{2n(a-n^2)}{(2n+1)q} I_n - \frac{2n-1}{2n+1} I_{n-1} .$$

Sabemos que $I_0 = 0$. Si $I_1 = 0$, ya que $q \neq 0$, tendríamos que $I_n = 0$ para todo n natural. Pero reconocemos las integrales I_n como los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función $u(z)$ en la base de los senos (recordemos que es impar). Como esta función es no trivial, no pueden ser nulos todos los coeficientes del desarrollo. Necesariamente, $I_1 = \int_0^\pi w_1(z) w_2(z) \sin 2z \, dz \neq 0$. Encontramos la contradicción deseada. Esto concluye la prueba. □

El teorema 3.10 nos da mucha información sobre las soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu. En particular, nos permite asegurar que, si existe alguna solución periódica para una pareja de valores de a y q , entonces es la única. De hecho, cualquier solución periódica de la ecuación de Mathieu está necesariamente en alguna de las siguientes opciones:

1. π -periódica y par.
2. π -periódica e impar.
3. 2π -periódica y par.
4. 2π -periódica e impar.

Concluiremos nuestro estudio de la ecuación de Mathieu con el análisis de un par de sistemas particulares regidos por esta ecuación.

Vibraciones de una membrana elíptica

Al igual que en el caso de Hill, Émile Léonard Mathieu discutió por primera vez la ecuación que lleva su nombre en un contexto físico. En su artículo de 1868 [5], describe las vibraciones de una membrana con forma elíptica. En el desarrollo, se encuentra una ecuación del tipo (3.6). Estaba especialmente interesado en los modos de vibración periódicos de este tipo de sistemas. Las vibraciones de una membrana con forma elíptica son descritas por la ecuación de ondas. La parte espacial de las soluciones viene dada por la ecuación

$$\nabla^2 \varphi + \lambda \varphi = 0 .$$

En la misma, φ representa pequeñas variaciones en la altura de cada punto de la membrana. λ por su parte corresponde a los autovalores. Es decir, cada valor solución de λ corresponde a un modo de vibración natural. Además, se consideran las condiciones de contorno $\varphi = 0$ sobre la frontera de la membrana.

Se introducen coordenadas elípticas para facilitar el estudio de la ecuación. Se trata del cambio de variables $x = c \cosh \beta \cos \alpha$, $y = c \sinh \beta \sin \alpha$. La variable β toma valores reales positivos y $\alpha \in [0, 2\pi]$. Los valores $\pm c$ corresponden a las coordenadas de los focos de la elipse, suponiendo que está centrada en los ejes y que su eje mayor se sitúa sobre el eje de abscisas. Este cambio de variables no es conveniente en el caso límite $c = 0$ (la membrana

circular). Por ello, lo excluirémos del estudio actual. La ecuación de Mathieu aparece al desarrollar la expresión y emplear el método de separación de variables. Practicando una solución de la forma $\varphi(\alpha, \beta) = X(\alpha)Y(\beta)$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\ddot{X}(\alpha) + (a - 2q \cos 2\alpha) X(\alpha) = 0 , \quad (3.8)$$

$$\ddot{Y}(\beta) + (a - 2q \cosh 2\beta) Y(\beta) = 0 . \quad (3.9)$$

La ecuación (3.8) se suele conocer como la parte angular de las soluciones, y es justamente la ecuación de Mathieu. Por otro lado, la ecuación (3.9) describe la parte radial de las soluciones. Recibe el nombre de ecuación de Mathieu modificada. Notar que en ambas ecuaciones, se ha definido el parámetro $q = \lambda^2 c^2$ y el autovalor a . Este último debe ser elegido de manera adecuada para que existan soluciones periódicas.

Introducimos ahora algo de notación. Las soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu podían ser de cuatro tipos. En función de su paridad, denotaremos $ce_m(q; \alpha)$ a las soluciones pares y $se_m(q; \alpha)$ a las soluciones impares. Su período viene dado por los valores de q y de m , que es algún número entero. La ecuación de Mathieu modificada tiene de igual manera dos tipos de soluciones, que denotaremos $Ce_m(q; \beta) = ce_m(q; i\beta)$ y $Se_m(q; \beta) = -i se_m(q; i\beta)$. Por tanto, Mathieu prueba que cualquier modo de vibración natural de la membrana elíptica es de la forma

$$\varphi = ce_m(q; \alpha) Ce_m(q; \beta) ,$$

o bien

$$\varphi = se_m(q; \alpha) Se_m(q; \beta) .$$

Para encontrar estos modos de vibración, se buscan los valores permitidos de q imponiendo sobre la parte radial de las soluciones las condiciones de contorno. Existe una familia de infinitos valores de q que conducen a modos de vibración permitidos, pues hay al menos uno para cada entero m . Este hecho proviene de la libre elección del autovalor a .

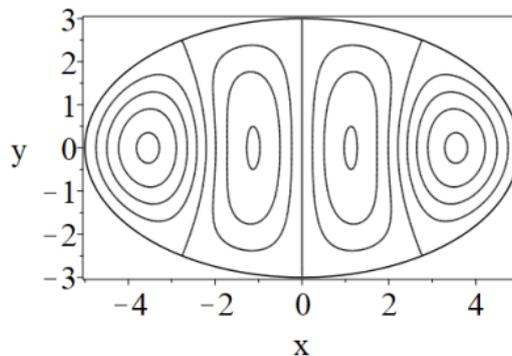


Figura 3.1: Curvas de nivel del primer modo de vibración natural par de una membrana elíptica cuyos ejes tienen una proporción 5 : 3, para el valor $m = 3$. [3]

Siguiendo el artículo de Corless [3], terminaremos la sección viendo de manera gráfica algunos resultados para las vibraciones de una membrana elíptica en la que la proporción de sus ejes es 5 : 3. Centrémonos en el modo de vibración par para $m = 3$. Corless encuentra a través del método de Newton-Raphson que el primer valor de q que resuelve la ecuación $Ce_3(q; \log 2) = 0$ es $q = 8.6576$. En dado caso, el correspondiente modo de vibración viene representado en la figura 3.1.

Trampa iónica cuadrupolar

Otro sistema regido por la ecuación de Mathieu y que ha sido ampliamente estudiado es la trampa iónica cuadrupolar. Siguiendo el desarrollo de March [2], veremos como se construye este modelo y discutiremos la relevancia física de la existencia de soluciones periódicas. Se trata de dispositivos que son capaces de confinar iones en estado gaseoso, o bien operar como espectrómetros de masas de gran resolución, a través potenciales creados por diferentes electrodos. En la figura 3.2 se puede ver la estructura del dispositivo. Para deducir las ecuaciones de movimiento de un ión en el potencial creado por un dispositivo de este tipo, partimos de la expresión de la fuerza cuadrupolar que experimenta. Tengamos en cuenta que podemos desacoplar el movimiento en cada eje y estudiarlo de manera independiente.

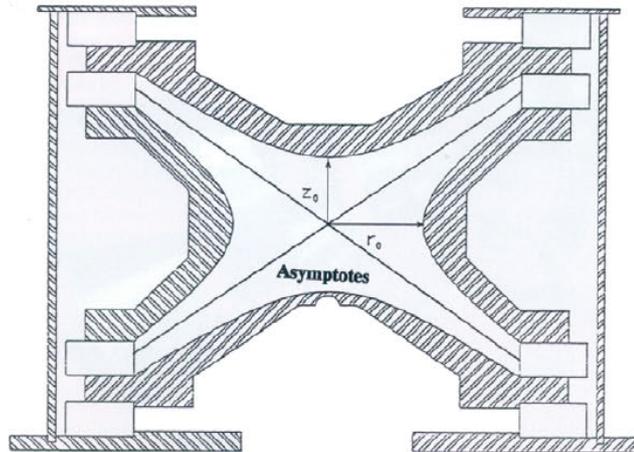


Figura 3.2: Diagrama de la estructura de una trampa iónica cuadrupolar ideal. Aparecen representadas las dos dimensiones más relevantes en su estudio. [2]

Entonces, un ión de masa m y carga e experimente una fuerza en la dirección del eje x

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = -e \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

donde a es la aceleración del ión en la dirección x y ϕ es el potencial en la trampa iónica cuadrupolar. El potencial cuadrupolar puede ser descrito con la ecuación

$$\phi = \frac{\phi_0}{r_0^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) .$$

La magnitud r_0 aparece representada en la figura 3.2, mientras que ϕ_0 es el potencial eléctrico aplicado al anillo de electrodos. En general, será un potencial alterno con una cierta señal continua de fondo, de manera que tiene la forma $\phi_0 = U + V \cos \Omega t$ con Ω la frecuencia angular de la corriente aplicada. Podemos emplear coordenadas cilíndricas, pues resultan más convenientes. Entonces, el potencial adopta la expresión

$$\phi(r, z) = \frac{U + V \cos \Omega t}{r_0^2} (r^2 - 2z^2) .$$

Retomando la expresión de la fuerza que experimenta el ión, resulta que podemos reescribir la ecuación en vista a la forma hallada del potencial cuadrupolar, de manera que

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-4e}{r_0^2} (U + V \cos \Omega t) x . \quad (3.10)$$

Se encuentra de esta manera que la ecuación (3.10) que describe el movimiento de un ión en cada eje tiene la forma de la ecuación de Mathieu (3.6). Para tenerla escrita adecuadamente, hacemos el cambio de variables $\Omega t = 2\tau$. Entonces, podemos expresar la ecuación (3.10) como

$$\frac{\Omega^2 m}{4} \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{-4e}{r_0^2} (U + V \cos 2\tau) x ,$$

e inmediatamente, podemos igualar coeficientes para concluir que $a = \frac{16eU}{\Omega^2 m r_0^2}$ y que

$$q = -\frac{8eV}{\Omega^2 m r_0^2} .$$

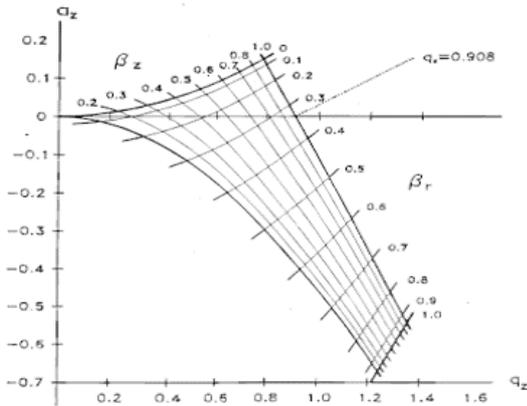


Figura 3.3: Representación de la región de estabilidad en el plano $a - q$ para la ecuación (3.10). Es la misma en los tres ejes del movimiento. [2]

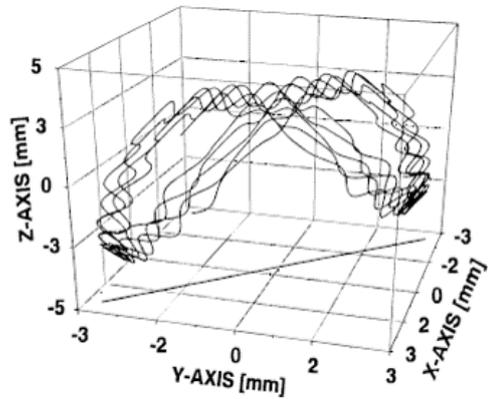


Figura 3.4: Representación de la trayectoria de un ión en una trampa iónica cuadrupolar, para una pareja de valores $a - q$ situada en la región de estabilidad. [2]

Cabe destacar que muchas trampas cuadrupolares comerciales no ofrecen la posibilidad de suministrar una señal continua a los electrodos. En dado caso, $a = 0$. En este sistema, el interés radica en ajustar los parámetros a y q para hallar regiones en las que exista una solución periódica de la ecuación de Mathieu. Estas soluciones estables, físicamente, son aquellas en las que el sistema es capaz de confinar el movimiento de los iones. Por otro lado, las regiones de inestabilidad en las que no existen soluciones periódicas se reflejan en iones capaces de escapar del potencial. Hemos encontrado de nuevo el problema de determinación de a -intervalos de estabilidad, que ya fue discutido en el caso general de la ecuación de Hill.

Concluimos esta sección presentando algunos de los resultados expuestos por March en [2]. La figura 3.3 muestra el resultado numérico de calcular la región de estabilidad de la trampa iónica cuadrupolar, según el modelo expuesto anteriormente. Se tuvo en cuenta que los parámetros de estabilidad coinciden en todos los ejes.

Por otro lado, la figura 3.4 muestra la trayectoria de un ión, cuya posición inicial se eligió aleatoriamente de una población con distribución gaussiana. La trampa cuadrupolar en este caso está configurada con $a = 0$ (sin señal continua en el potencial) y $q = 0.3$. Dicho valor pertenece a la región de estabilidad, como se comprueba en la figura 3.3.

4. Una aproximación física a la teoría de Floquet: el teorema de Bloch

En este capítulo, veremos como el teorema de Floquet aparece de manera natural al estudiar el modelo *Tight-Binding* de la física de la materia condensada. Se trata de una teoría que describe el comportamiento de los electrones en un sólido. Al desarrollarla, serán argumentos propios de la mecánica cuántica los que nos lleven a formular el teorema de Bloch. Dicho resultado fue publicado por Felix Bloch en 1929 [6], el cual desconocía el trabajo previo de Gaston Floquet del año 1883 [1]. El teorema de Bloch recupera el resultado de Floquet en dimensión 1 y sigue siendo válido al estudiar sistemas de dimensión superior.

Comencemos por introducir las herramientas básicas en el estudio de los sólidos. Es común encontrarse que los átomos que componen un sólido presentan una disposición ordenada en el espacio, periódica y homogénea. Es lo que se conoce como **estructura cristalina**. Por tanto, el primer paso para describir las propiedades de un sólido es conocer las características de su red cristalina. Para ello, buscamos una base de vectores $\{a_i\}_{i=1}^n$ (para un sólido n-dimensional) que describan la red de Bravais. Esta no es más que una disposición de puntos en el espacio que preservan todas las simetrías del sistema. Asimismo, buscamos una unidad mínima de estudio, la llamada **celda unidad**. Esta debe contener una cantidad de elementos tales que podamos construir el sólido con traslaciones enteras de la celda unidad por vectores de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$. En general, la elección de la base y de la celda unidad no es única. A la celda unidad con menor volumen (o superficie, en 2 dimensiones) que es posible asignar a una cierta base se le llama **celda primitiva**. A la celda primitiva que conserva todas las simetrías de la red cristalina se le llama **celda de Wigner-Seitz**.

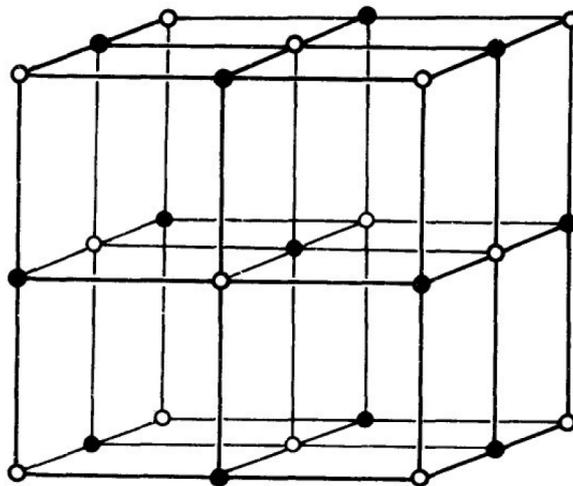


Figura 4.1: Estructura cristalina del cloruro de sodio, NaCl. Los puntos blancos representan los átomos de sodio, y los negros los átomos de cloro. Este tipo de estructura se conoce como *rocksalt*. [10]

Por ejemplo, en la figura 4.1 podemos observar la estructura cristalina de la sal de mesa. Se puede describir con la base de vectores de \mathbb{R}^3 :

$$a_1 = \frac{a}{2}(u_2 + u_3), \quad a_2 = \frac{a}{2}(u_1 + u_3), \quad a_3 = \frac{a}{2}(u_1 + u_2),$$

donde a es llamado parámetro de red (distancia entre dos posiciones vecinas de la red de Bravais) y $\{u_i\}_{i=1}^3$ es la base canónica de vectores. En este caso, la celda unidad está compuesta por un átomo de sodio en la posición $(0, 0, 0)$ y un átomo de cloro en la posición $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, en las coordenadas de la base $\{a_i\}_{i=1}^3$ o coordenadas cristalográficas.

El siguiente paso es describir el concepto de **red recíproca**. En mecánica cuántica se trabaja con el formalismo hamiltoniano. Es por ello que se describe un sistema dado en el espacio de posiciones o en el espacio de momentos, de manera indistinta. La red recíproca hace referencia al espacio de momentos de la red cristalina. Es sabido que todo sistema con una cierta periodicidad a (su parámetro de red) en el espacio real tendrá una periodicidad de $\frac{2\pi}{a}$ en el espacio recíproco. Este principio general es muy útil, ya que garantiza que todas las propiedades que pueda tener un sólido como consecuencia de su estructura periódica deben manifestarse también en el espacio recíproco. Además, la red recíproca admite una base de vectores $\{b_i\}_{i=1}^n$ con la propiedad $a_i \cdot b_j = 2\pi \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker (toma el valor 1 si los índices son iguales, y 0 en otro caso). A la celda de Wigner-Seitz del espacio recíproco se le llama **primera zona de Brillouin**. Se trata de un ente de enorme importancia para nuestras discusiones posteriores, pues todos los fenómenos relativos a un material dado se describen dentro de la misma.

Una vez sentadas las bases de nuestra descripción del sólido a través de redes cristalinas, pasamos a proponer un modelo que explique el comportamiento de los electrones en el mismo. En términos de la mecánica cuántica, asociamos a cada átomo un espacio de Hilbert de dimensión infinita. De esta manera, al sólido se le asocia el producto de M espacios de Hilbert de dimensión infinita (donde M es el número de átomos de la red). Queremos hallar el hamiltoniano asociado al sistema. Este será un operador que actúe sobre el espacio de Hilbert anteriormente descrito. Finalmente, buscamos resolver la correspondiente ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para obtener una base de autoestados de energía. Como el hamiltoniano es un observable, los postulados de la mecánica cuántica garantizan que sus autoestados forman una base del espacio de Hilbert, pero no ahondaremos en este aspecto.

La primera descripción cuántica de los electrones en sólidos los considera como partículas libres. Es lo que se conoce como modelo de Sommerfeld. No obstante, es claro que existe una cierta interacción entre los electrones y los núcleos de los átomos que conforman la red cristalina. De hecho, también existe interacción electrostática repulsiva entre los propios electrones. Para tener todo esto en cuenta, surge el modelo *Tight-Binding*.

Comenzamos notando que si hubiera un único núcleo, el potencial de interacción sería de Coulomb. Consideremos un sólido unidimensional (una cadena de átomos). Si los núcleos se encuentran separados a una distancia a , el resultado del solapamiento de los potenciales de Coulomb tiene el aspecto de la figura 4.2. Es decir, un potencial periódico con la misma periodicidad que la red cristalina. Además, son los electrones de valencia

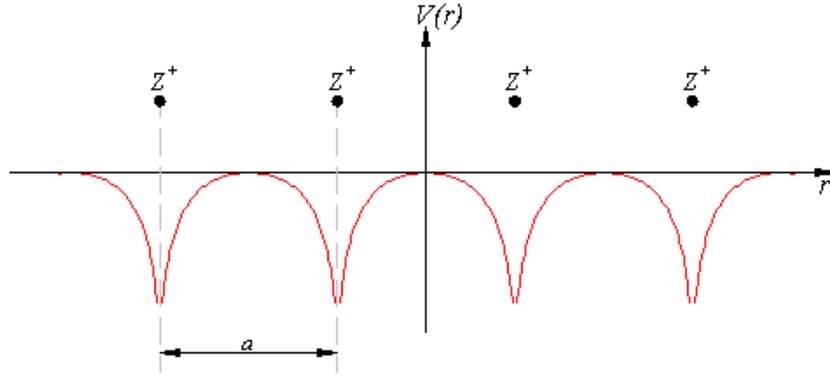


Figura 4.2: Potencial periódico de una red unidimensional de núcleos con Z protones separados a una distancia a .

de cada átomo los que son susceptibles a moverse por la cadena siempre que superen las barreras de potencial. Por otro lado, el modelo *Tight-Binding* asume que la nube de electrones del sólido ejerce una repulsión sobre cada electrón cuyo promedio en cada celda unidad es el mismo. De esta manera, se trataría de un término periódico con la periodicidad de la red. Esta aproximación preserva la propiedad deseada de neutralidad de carga. El potencial efectivo resultante, V_{red} , sigue siendo un potencial periódico de la forma de la figura 4.2. Al pasar a los casos de dos y tres dimensiones, el razonamiento es el mismo. Por tanto, el hamiltoniano que describe al sólido es de la forma

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V_{\text{red}}(\vec{r}) ; \quad V_{\text{red}}(\vec{r} + \vec{R}) = V_{\text{red}}(\vec{r}) . \quad (4.1)$$

Notemos que \vec{P} es el operador de momento lineal, m es la masa del núcleo, \vec{r} es el vector posición de un electrón en el sólido y \vec{R} es cualquier vector de la red (es decir, una combinación lineal entera de los vectores de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$). Este hamiltoniano describe a cada electrón del sólido de manera independiente.

Estamos en condiciones de enunciar el teorema de Bloch. Este describe la forma que tienen las autofunciones correspondientes al hamiltoniano (4.1). Recordemos que se trata de las soluciones de la ecuación de Schrödinger asociada al mismo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) + V_{\text{red}}(\vec{r}) \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \varepsilon_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) . \quad (4.2)$$

Teorema 4.1 (Teorema de Bloch). *Las autofunciones de un electrón sometido a un potencial periódico en un sólido, descrito por el hamiltoniano (4.1), son de la forma*

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) , \quad (4.3)$$

donde $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ es una función periódica con la periodicidad de la red cristalina llamada **función de Bloch**. Por su parte, \vec{k} es el momento del cristal y se puede elegir en la primera zona de Brillouin.

Demostración. Comencemos por considerar el operador de traslaciones $T_{\vec{R}}$, donde \vec{R} es un vector de la red cristalina (esto es, una combinación lineal entera de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$). Se trata de un operador unitario, por lo que sus autovalores tienen módulo 1. Sea φ un autoestado simultáneo de todos los operadores de traslación. En particular, existen constantes $C_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ con $|C_i| = 1$, de manera que

$$T_{\vec{a}_i} \varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r} + \vec{a}_i) = C_i \varphi(\vec{r}) .$$

Podemos escribir estas constantes como $C_i = e^{2\pi i \theta_i}$, donde θ_i es algún valor real perteneciente al intervalo $[0, 1]$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Ya vimos que existe una base $\{b_i\}_{i=1}^n$ de la red recíproca con la propiedad $a_i \cdot b_j = 2\pi \delta_{ij}$. Definimos el vector $\vec{k} = \sum_{i=1}^n \theta_i b_i$, perteneciente al espacio recíproco. Por último, definimos $u(\vec{r}) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \varphi(\vec{r})$. Entonces

$$T_{\vec{a}_i} u(\vec{r}) = u(\vec{r} + \vec{a}_i) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_i} \varphi(\vec{r} + \vec{a}_i) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-2\pi i \theta_i} e^{2\pi i \theta_i} \varphi(\vec{r}) = u(\vec{r}) .$$

Por tanto, u es una función periódica con la periodicidad de la red cristalina. Concluimos así que toda función que sea simultáneamente autofunción de todos los operadores de traslación es de la forma $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u(\vec{r})$.

Ahora bien, el hamiltoniano de nuestro sistema tiene simetría por traslaciones de vectores de la red. Consecuentemente, cada operador de traslaciones conmuta con el hamiltoniano. Además, todos los operadores de traslaciones conmutan entre sí. Esto quiere decir que existe una base de autoestados simultáneos del hamiltoniano y todos los operadores de traslaciones (este es un resultado de la mecánica cuántica en el que no entraremos en detalle). Concluimos así que todas las autofunciones del hamiltoniano son de la forma $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r})$, pues también lo son de todos los operadores traslación.

Queda ver que el índice \vec{k} corresponde al momento cristalino en la primera zona de Brillouin. Sean dos vectores del espacio recíproco \vec{k}, \vec{k}' que difieren en un vector \vec{G} de la red recíproca (una combinación lineal entera de la base $\{b_i\}_{i=1}^n$). Es decir, $\vec{k} = \vec{k}' + \vec{G}$. Entonces

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \left(e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} u_{\vec{k}'}(\vec{r}) \right) .$$

Como el término $e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}$ es periódico en la red cristalina, se concluye que dos electrones cuyo momento cristalino difiere en un vector de la red recíproca tienen la misma energía. Nos podemos limitar a calcular las autofunciones para índices en la primera zona de Brillouin. \square

El teorema de Bloch encuentra la forma de las autofunciones del hamiltoniano *Tight-Binding* a partir de un principio de simetría. Este procedimiento es habitual en física. Notemos que el resultado nos indica que los electrones en un sólido, aún cuando se considera la interacción con la propia red, se comportan como ondas planas moduladas por una función periódica. Ya que las ondas planas son las autofunciones correspondientes al sistema de la partícula libre, entendemos gracias al teorema de Bloch por qué los electrones

se mueven con tanta facilidad en los sólidos. Además, el mismo resultado permite reducir la dimensionalidad del problema de diagonalización. Del teorema de Bloch se deduce que las autofunciones correspondientes a dos vectores \vec{k}, \vec{k}' que difieren en un vector \vec{G} de la red recíproca (una combinación lineal entera de la base $\{b_i\}_{i=1}^n$) son iguales. Por tanto, en vez de recorrer todo el espacio recíproco, nos limitamos a la primera zona de Brillouin.

La discusión hasta el momento ha sido desde el punto de vista de la física. No obstante, el teorema de Bloch nos debería resultar familiar a estas alturas. No es más que una generalización del teorema de Floquet a varias dimensiones, para el caso de electrones en un sólido. Para ver esto de manera clara, volvamos a considerar la cadena de átomos separados a distancia a (nuestro sólido de dimensión 1). La ecuación de Schrödinger que satisfacen los electrones de este sistema es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_k(x)}{dx^2} + (-\varepsilon_k + V_{\text{red}}(x)) \psi_k(x) = 0. \quad (4.4)$$

Como hemos definido el potencial de red de manera que $V_{\text{red}}(x+a) = V_{\text{red}}(x)$, es inmediato reconocer que la ecuación (4.4) es un caso particular de la ecuación de Hill (3.3). En este caso, la función continua y a -periódica es el potencial de red, y la constante se corresponde con cada valor de autoenergía $-\varepsilon_k$ (ambas multiplicadas por $-\frac{2m}{\hbar^2}$).

Podemos calcular los posibles momentos cristalinos de los electrones en la cadena unidimensional de manera directa a partir del teorema de Bloch. Si la cadena tiene M átomos y suponiendo condiciones de contorno periódicas, sabemos que la energía de un electrón depende de su momento cristalino. Nos limitamos a la primera zona de Brillouin, pues $\varepsilon_k = \varepsilon_{k+G}$ para todo $G = m \frac{2\pi}{a}$ con $m \in \mathbb{Z}$. Imponiendo las condiciones de contorno periódicas a las autofunciones, obtenemos

$$\psi_k(x) = \psi_k(x + M a) = e^{i k M a} \psi_k(x).$$

Por tanto, $k M a = m 2\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$. Finalmente, como k debe estar en la primera zona de Brillouin, concluimos que los posibles momentos cristalinos de un electrón en una cadena unidimensional de M átomos con condiciones de contorno periódicas son

$$k \in \frac{2\pi}{a} \frac{1}{M} \left\{ -\frac{M}{2}, -\frac{M}{2} + 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 \right\}.$$

Partiendo de estos valores, el procedimiento habitual consiste en buscar las autoenergías a partir de métodos variacionales. Esto lleva de manera natural a la estructura de bandas de los electrones en los sólidos.

Terminaremos esta sección resaltando de nuevo la enorme relevancia del teorema de Bloch en el estudio de las propiedades electrónicas de los sólidos. Además del evidente interés de obtener el mismo resultado en dos contextos con enfoques completamente distintos, el teorema de Bloch permite continuar el estudio por vías diferentes a la teoría de Floquet. El trabajo de Bloch, al estar descrito en el lenguaje de la mecánica cuántica,

facilita entender el resultado desde el punto de vista del análisis de Fourier y extenderlo a otros grupos de simetría diferentes al de las traslaciones. Por su parte, el trabajo de Floquet se enmarca en la teoría de sistemas lineales de ecuaciones. Es por ello que la manera más habitual de extender la teoría sea a través del estudio de sistemas perturbados.

Referencias

1. Floquet, G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. fr. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **2e série**, **12**, 47 (1883).
2. March, R. E. An Introduction to Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometry. *Journal of Mass Spectrometry* **32**, 351 (1997).
3. Corless, R. M. *Pure tone modes for a 5:3 elliptic drum* 2020. arXiv: [2008.06936](https://arxiv.org/abs/2008.06936) [math.HO].
4. Hill, G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica* **8**, 1 (1900).
5. Mathieu, É. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. fr. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **13**, 137 (1868).
6. Bloch, F. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. *Zeitschrift für Physik* **52**, 555 (1929).
7. Markus, L. y Yamabe, H. Global stability criteria for differential systems. *Osaka Mathematical Journal* **12**, 305 (1960).
8. Hale, J. *Ordinary Differential Equations* (Dover Publications, 2009).
9. Teschl, G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems* (American Mathematical Soc., 2012).
10. Blakemore, J. S. *Solid State Physics* 2.^a ed. (Cambridge University Press, 1985).
11. Knopp, K. *Theory of Functions, Parts I and II* (Dover Publications, 2013).
12. Merino González, L. y Santos Aláez, E. *Álgebra lineal con métodos elementales* (Ediciones Paraninfo, S.A, 2006).
13. Pérez, C. *Ecuaciones diferenciales I: Ecuaciones lineales* (Ediciones Pirámide, 1992).
14. Starzhinskii, V. y Yakubovich, V. A. *Linear differential equations with periodic coefficients* (London: Halsted Press, 1975).
15. Arscott, F. *Periodic Differential Equations: An Introduction to Mathieu, Lamé, and Allied Functions* (Macmillan, 1964).