



# Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

## Atravesando lentamente una bifurcación de Hopf

Autor: Alejandro García Soria

---

Supervisado por:

Santiago Ibáñez Mesa

Curso 2022-2023



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. La bifurcación de Hopf</b>	<b>9</b>
2.1. Preliminares . . . . .	9
2.2. Reducción a forma normal . . . . .	13
2.3. Reducción vía equivalencia topológica . . . . .	22
2.4. Bifurcación de Hopf en el modelo de Fitzhugh-Nagumo . . . . .	27
<b>3. Pases lentos por una bifurcación de Hopf</b>	<b>33</b>
3.1. El problema de los pases lentos . . . . .	33
3.2. Sistemas con dinámica <i>rápida-lenta</i> . . . . .	35
3.3. Hiperbolicidad normal y Teorema de Fenichel . . . . .	38
3.4. Método WKB . . . . .	40
3.5. Retardo en la génesis de oscilaciones . . . . .	41
3.6. Simulaciones numéricas: aplicación del método WKB . . . . .	50
<b>A. Reescalados temporales</b>	<b>59</b>



# Resumen

En el presente trabajo se estudian bifurcaciones de Hopf: los procesos de generación de oscilaciones a partir de un estado estacionario que pierde su estabilidad al variar los parámetros que controlan un sistema.

En ocasiones los parámetros se convierten en variables del modelo que evolucionan con una dinámica mucho más lenta en comparación con las variables de estado. En esta situación se siguen generando oscilaciones, pero ahora surgen con un cierto retraso en relación al instante en el que se cruza la bifurcación. Este es el fenómeno de pase lento por una bifurcación que da título al trabajo y que también analizaremos.



# Capítulo 1

## Introducción

Dada una familia de ecuaciones diferenciales:

$$x' = f(x, \alpha) \tag{1.1}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ , decimos que  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^m$  es un punto de bifurcación si se cumple que en cualquier entorno de  $\alpha_0$  existen parámetros correspondientes a sistemas con dinámicas cualitativamente diferentes.

En este trabajo nos interesamos por un tipo específico de bifurcaciones: *las bifurcaciones de Hopf*. Para simplificar la descripción del correspondiente cambio en la dinámica, asumimos que  $n = 2$ , y que nuestra familia depende de un único parámetro, es decir,  $m = 1$ . Supongamos que existe un valor  $\alpha_0$  para el que se cumplen las siguientes propiedades :

- Existe  $\delta > 0$  tal que familia (1.1) tiene un punto de equilibrio  $x(\alpha)$  para todo parámetro  $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ .
- Los autovalores de  $D_x f(x(\alpha), \alpha)$  cruzan el eje imaginario cuando  $\alpha = \alpha_0$ . Además, si  $a(\alpha)$  denota la parte real de los autovalores, entonces,  $a'(\alpha_0) > 0$ ; es decir, el punto de equilibrio cambia de atractor a repulsor cuando se cruza el valor  $\alpha_0$  en sentido creciente.
- Para  $\alpha > \alpha_0$ , desde el punto de equilibrio emerge una órbita periódica atractora que aumenta su amplitud a medida que  $\alpha$  crece.

El mero hecho de que el punto de equilibrio cambie de repulsor a atractor ya supone un cambio cualitativo que señala el paso por una bifurcación, pero es la génesis de una órbita periódica, la génesis de oscilaciones, lo que caracteriza a una bifurcación de Hopf. La dinámica que acabamos de describir se corresponde con el caso denominado *supercrítico*; la alternativa, el caso *subcrítico*, supone la desaparición de una órbita periódica repulsora, que estaría presente para  $\alpha < \alpha_0$  y que colapsaría con el punto de equilibrio atractor en el punto de bifurcación.

En la Sección 2 se proporcionan algunos ejemplos concretos de familias con bifurcaciones. No obstante, en esta primera parte del trabajo, el objetivo principal es la caracterización de aquellas familias que exhiben bifurcaciones de Hopf, estableciendo con rigor las condiciones de degeneración y las condiciones genéricas que han de cumplirse para que el fenómeno esté presente. Seguiremos, principalmente, los libros de Guckenheimer y Holmes [7] y de Kuznetsov [12], referencias clásicas en el campo de la Teoría de Bifurcaciones.

En la segunda parte del trabajo se introduce una novedad en el planteamiento típico de un problema de bifurcación. Se considera un nuevo modelo de la forma

$$\begin{aligned}x' &= f(x, \alpha, \epsilon) \\ \alpha' &= \epsilon g(x, \alpha, \epsilon).\end{aligned}\tag{1.2}$$

El parámetro  $\alpha$  se convierte en una variable más del sistema y se añade un pequeño parámetro  $\epsilon \ll 1$ . Cuando este pequeño parámetro se anula tenemos una familia de ecuaciones diferenciales dependiente del parámetro  $\alpha$ , la cual presentará un determinado diagrama de bifurcación. Este diagrama se convierte en la dinámica límite del modelo completo. Focalizando la discusión en el caso del diagrama asociado a una bifurcación de Hopf, con una dinámica que pasa de converger a un estado de equilibrio a estabilizarse en una órbita periódica atractora, veremos como para valores de  $\epsilon$  suficientemente pequeños se observa que, como cabría esperar, las soluciones pasan de exhibir un comportamiento de tipo estacionario a mostrar otro de tipo oscilatorio. También podríamos describir la dinámica haciendo referencia a que el parámetro del modelo pasa de ser estático a variar de forma muy lenta. Esta interpretación de un *pase lento* por una bifurcación es la que recogemos en el título de este trabajo. Entre los aspectos más destacados de este nuevo fenómeno, se estudiará la existencia de retardos en la respuesta oscilatoria. En efecto, bajo hipótesis adecuadas, en lugar de observar como las oscilaciones comienzan cuando el parámetro  $\alpha(t)$  (dependiente del tiempo) pasa por el valor de bifurcación  $\alpha_0$ , estas se manifiestan con un cierto retardo.

La existencia de estos retardos ya había sido apuntada en [17]. La primera formalización teórica se consigue con los trabajos de A. Neishtadt [13, 14] (ver también [1, 15]), donde se emplean técnicas de funciones analíticas. Tratamientos alternativos son los que se ofrecen en [3], donde se apela a métodos asintóticos de expansión de las soluciones, y [8], donde se hace uso de técnicas geométricas para el análisis del problema. Sin embargo, nuestra principal referencia a lo largo de la Sección 3 será el libro de C. Kuehn [11] donde se discuten todas las técnicas utilizadas en los trabajos anteriores [3, 8, 13, 14]. Nuestra atención se centrará en las ideas desarrolladas en los tres primeros trabajos.

El trabajo concluye con una breve sección de conclusiones donde se hace referencia a interesantes problemas donde el fenómeno del pase lento por una bifurcación de Hopf resulta particularmente relevante.

## Capítulo 2

# La bifurcación de Hopf

En este capítulo estudiaremos las condiciones que caracterizan una bifurcación de Hopf. En primer lugar se hacen necesarias ciertas nociones que son esenciales para entender el concepto de bifurcación. Después se estudiará la reducción a forma normal de una bifurcación de Hopf y obtendremos un modelo canónico via equivalencia topológica. Para concluir el capítulo analizaremos una familia de campos que exhibe una bifurcación de Hopf.

### 2.1. Preliminares

Como ya se ha comentado, dada una familia de sistemas dinámicos

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \tag{2.1}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y dependiente de un parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ , decimos que se produce una bifurcación cuando la variación del parámetro implica cambios cualitativos en la dinámica. Decimos que dos sistemas dinámicos son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo entre los espacios de fase que lleva órbitas de un campo en órbitas del otro conservando el sentido de recorrido. Establecido este concepto, podemos introducir una definición más precisa:

**Definición 2.1.** Decimos que en  $\alpha_0$  la familia (2.1) sufre una bifurcación si a distancia arbitrariamente pequeña de  $\alpha_0$  podemos encontrar valores de los parámetros para los que los retratos de fase no son topológicamente equivalentes.

El ejemplo más sencillo de bifurcación es la conocida como *bifurcación de nodo-silla*, y su representación más simple la proporciona la siguiente familia:

$$\dot{x} = \lambda + x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Es fácil observar que el sistema (2.2) presenta un equilibrio en  $x = \pm\sqrt{-\lambda}$ . Cuando el parámetro tiene valores negativos, el sistema presenta dos puntos de equilibrio, siendo  $x = \sqrt{\lambda}$  un repulsor y  $x = -\sqrt{\lambda}$  un atractor. Por otro lado, cuando el valor del parámetro es nulo ( $\lambda = 0$ ), se tiene un único punto de equilibrio, el origen, que deja de ser un hiperbólico. Por último, para valores positivos del parámetro, el sistema no posee ningún equilibrio. Es precisamente este cambio en la dinámica del sistema, pasando de dos puntos de equilibrio a ninguno conforme varía el valor del parámetro, lo que entendemos como una bifurcación.

La situación descrita se puede visualizar mediante una representación gráfica bidimensional, representando en un eje el espacio de parámetros y en otro eje la variable de estado. Este tipo de representación se denomina **diagrama de bifurcación**, y en la Figura 2.1 podemos observar el diagrama de bifurcación del sistema (2.2). Obsérvese que cada recta vertical corresponde a un espacio de fases.

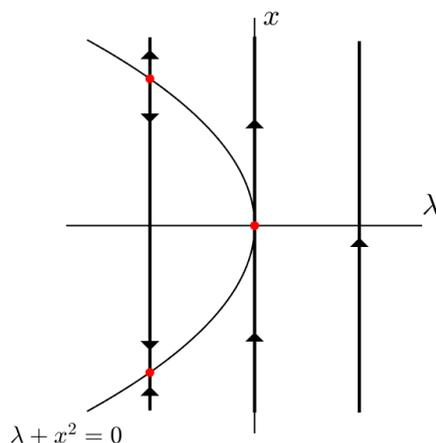


Figura 2.1: Diagrama de la bifurcación nodo-silla. En rojo se representan los puntos de equilibrio del sistema (2.2) según el valor del parámetro  $\lambda$ . Notamos como para valores negativos del parámetro existen dos puntos de equilibrio, uno atractor y uno repulsor, mientras que para  $\lambda = 0$  los puntos de equilibrio colapsan, resultando en un único equilibrio de nodo-silla. Por último, para valores positivos del parámetro, el sistema no posee ningún equilibrio.

Poder obtener un diagrama de bifurcación únicamente a partir de un análisis cualitativo de la dinámica del sistema resulta altamente beneficioso, pues resume y clasifica de una forma muy sintética las distintas dinámicas del sistema, y las transiciones entre ellas bajo los cambios en el parámetro de bifurcación.

Un segundo ejemplo de bifurcación, y tema de estudio de este trabajo, es la denominada **bifurcación de Andronov-Hopf** (bifurcación de Hopf en lo que sigue). Esta bifurcación aparece en

sistemas como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (2.3)$$

y está determinada por la existencia de autovalores imaginarios puros en la matriz jacobiana en el punto de equilibrio para un cierto valor del parámetro. En efecto, el sistema (2.3) posee un equilibrio en  $(x, y) = (0, 0)$  para cualquier valor de  $\alpha$ , con autovalores  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ ; cuando  $\alpha = 0$ , estos autovalores son imaginarios puros. Realizando el cambio de variable  $z = x + iy$  se obtiene una ecuación en variable compleja:

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (2.4)$$

Esta es la forma compleja de (2.3) y escribiendo (2.4) en coordenadas polares,  $z = \rho e^{i\varphi}$ , llegamos a la forma polar

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \quad , \quad \rho \geq 0 \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Esta representación resulta conveniente pues presenta las variables desacopladas. Debemos notar como en la primera ecuación de (2.5) existe un equilibrio en  $\rho = 0$  para cualquier valor de  $\alpha$ , el cuál corresponde con  $(x, y) = (0, 0)$ , el origen. La clasificación de este equilibrio depende del valor del parámetro, siendo:

- *asintóticamente estable* si  $\alpha < 0$ ,
- *asintóticamente estable* si  $\alpha = 0$  (pero no hiperbólico),
- *inestable* si  $\alpha > 0$ .

En efecto, la derivada de  $\varphi(\rho) = \rho(\alpha - \rho^2)$  en el origen es igual a  $\alpha$ . Cuando  $\alpha < 0$ , se tiene que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico atractor. Sin embargo, cuando  $\alpha = 0$  la derivada se anula, haciendo que el equilibrio deje de ser hiperbólico. Si sigue aumentando el valor de  $\alpha$ , el equilibrio en  $\rho = 0$  se convierte en repulsor (hiperbólico) y, simultáneamente, emerge un segundo equilibrio  $\rho = \sqrt{\alpha}$  para la primera ecuación en (2.5). Del estudio de la parte lineal se sigue que se trata de un punto de equilibrio hiperbólico y atractor que, teniendo en cuenta la variación del ángulo ( $\dot{\varphi} = 1$ ), se corresponde con una órbita periódica circular de radio  $\sqrt{\alpha}$  atractora para el sistema completo.

Esta situación se puede representar mediante el diagrama de bifurcación del sistema (2.5) (ver Figura 2.2). Es este cambio, de equilibrio atractor a equilibrio repulsor con la aparición de una órbita periódica (atractora), es la esencia una bifurcación de Hopf.

La bifurcación que hemos descrito, donde la órbita periódica que emerge es de carácter se denomina **bifurcación supercrítica**. Cuando es una órbita periódica repulsora la que colapsa

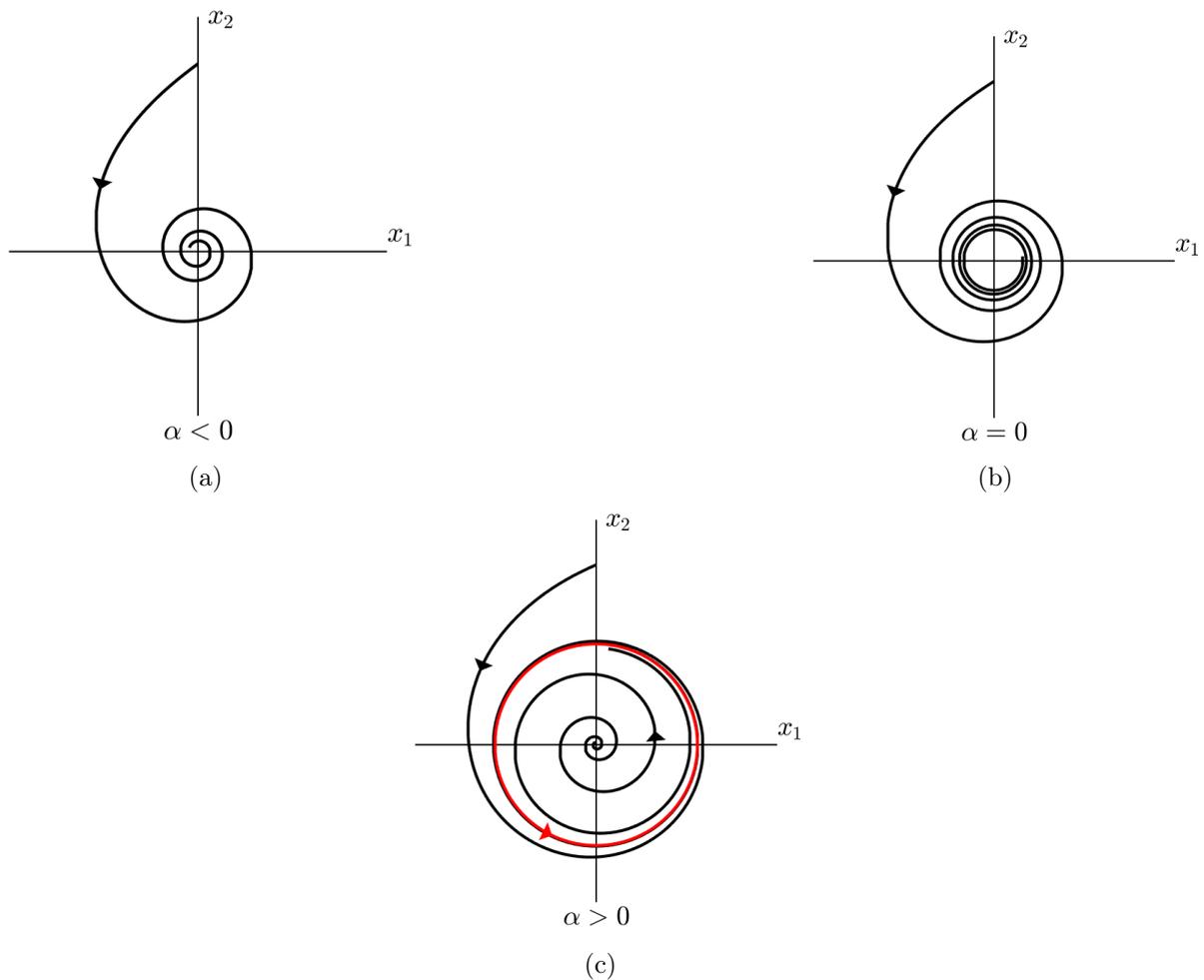


Figura 2.2: Diagramas de bifurcación del sistema (2.5). (a) Notamos como para valores de  $\alpha < 0$  el origen es un equilibrio atractor del sistema. (b) Cuando  $\alpha = 0$  el equilibrio sigue siendo atractor, pero deja de ser un equilibrio hiperbólico. (c) para valores de  $\alpha > 0$  aparece una órbita periódica atractora (rojo) de radio  $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ , y el origen se convierte en un punto de equilibrio repulsor.

con un atractor en su interior y desaparece al tiempo que el equilibrio se convierte en repulsor se conoce como **bifurcación subcrítica** (para un ejemplo bastaría con cambiar el signo a los términos no lineales de (2.3)). De forma simplificada, las bifurcaciones supercríticas son aquellas en las que la pérdida de estabilidad es *suave*, como es el paso de un equilibrio atractor a uno repulsor con la aparición de un ciclo estable de amplitud pequeña. En contraste, las bifurcaciones subcríticas son aquellas en las que se produce una pérdida catastrófica de la estabilidad, como es el cambio de atractor a repulsor por el colapso de una órbita periódica repulsora en el equilibrio. La importancia de esto es que si la pérdida de estabilidad es suave, se puede revertir el proceso y recuperar la estabilidad, mientras en el caso subcrítico no se tiene porque volver al equilibrio estable, puesto que las órbitas estarán fuera de la cuenca de atracción; posiblemente la dinámica habrá sido capturada por otra configuración atractora.

Como se puede observar, la bifurcación de Hopf se puede detectar para un entorno del equilibrio arbitrariamente pequeño. A este tipo de bifurcaciones se las denomina **bifurcaciones locales**. También podemos definir bifurcaciones que no son detectables observando a entornos arbitrariamente pequeños de un equilibrio o una órbita periódica. Estas bifurcaciones son las **bifurcaciones globales**. Las primeras son las que ocurren en el entorno de un punto de equilibrio, o también en el entorno de una órbita periódica cuando consideramos la aplicación de Poincaré asociada. Las bifurcaciones globales están ligadas a los cambios que se producen en el entorno de configuraciones como los ciclos homoclínicos o heteroclínicos: estructuras formadas por puntos de equilibrio y órbitas que viajan entre ellos para formar ciclos que permiten definir aplicaciones de retorno a su alrededor.

En casos simples de bifurcación, el espacio paramétrico se divide en un número finito de subespacios, separados por las denominadas *fronteras de bifurcación*, que son subvariedades regulares de  $\mathbb{R}^m$ . Estas fronteras se definen especificando un objeto del retrato de fases (equilibrio, órbita periódica, etc) y algunas condiciones que determinan el tipo de bifurcación.

Así, la **bifurcación de Hopf** de un equilibrio está caracterizada por una sola condición de degeneración: la presencia de un par de autovalores imaginarios puros en la matriz jacobiana del sistema al evaluarla en dicho equilibrio, además de otras condiciones genéricas (satisfechas en un conjunto abierto del espacio de parámetros), que especificaremos posteriormente.

**Definición 2.2.** La **codimensión** de una bifurcación es la diferencia entre la dimensión del espacio paramétrico y la dimensión de la frontera de bifurcación correspondiente.

Esta definición de codimensión es equivalente a decir que la codimensión es el número de condiciones de degeneración independientes que son necesarias para que se produzca la bifurcación. La bifurcación de Hopf que nos ocupa es de codimensión uno.

## 2.2. Reducción a forma normal

Una vez introducidos los ejemplos previos de bifurcaciones, y en particular el ejemplo de una bifurcación de Hopf (2.3), nos interesa establecer qué condiciones ha de verificar una familia de campos para que podamos garantizar que el fenómeno que hemos descrito de génesis de órbitas periódicas está presente, es decir, que familia *despliega* la bifurcación.

Cualquier bifurcación que pueda observarse en un espacio de fases  $n$ -dimensional, es susceptible de ser detectada en espacios de fases de mayor dimensión. Es claro que 2 es la dimensión mínima donde puede darse una bifurcación de Hopf y, por ello, esta será la dimensión que tomaremos con el fin de estudiarla, evitando así entrar en discusiones para dimensión superior, que nos obligarían a pasar por teoremas de reducción.

En primer lugar estudiaremos como cualquier familia de campos de vectores tal que para un

cierto valor del parámetro se presenta un punto de equilibrio cuya parte lineal tiene una pareja de autovalores imaginarios puros, puede escribirse en una forma simplificada a la que nos referiremos como *forma normal*. Más adelante mostraremos que la dinámica del sistema en forma normal es equivalente, de una forma que será probada en su momento, a la de la familia

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \beta\xi_1 - \xi_2 + \sigma\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \beta\xi_2 + \sigma\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \end{cases} \quad (2.6)$$

a la que nos referimos como *forma normal topológica*.

Partimos del sistema general

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad (2.7)$$

con  $f$  suficientemente regular, teniendo en  $\alpha = 0$  el equilibrio  $x = 0$  con autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Por el Teorema de la Función Implícita, el sistema posee un único equilibrio, parametrizado por  $\alpha$ ,  $x_0(\alpha)$ , en un entorno del origen para todo  $\alpha$  con  $|\alpha|$  suficientemente pequeño (basta notar que  $\lambda = 0$  no es un autovalor del jacobiano). Mediante un cambio de coordenadas, siempre podemos asumir sin perder generalidad que este equilibrio es  $x = 0$  para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, y por tanto podemos realizar un desarrollo de Taylor para escribir (2.7) como

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (2.8)$$

donde  $F$  es suficientemente regular y tiene un desarrollo de Taylor en  $x$  que empiezan al menos con términos cuadráticos. Así mismo, la matriz jacobiana  $A(\alpha)$  se escribe como

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

De esta forma los autovalores de  $A(\alpha)$  son

$$\frac{1}{2} \left( \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta} \right), \quad (2.10)$$

donde  $\sigma = \sigma(\alpha) = \text{tr } A(\alpha)$  y  $\Delta = \Delta(\alpha) = \det A(\alpha)$ . La condición de degeneración que caracteriza a una bifurcación de Hopf implica que

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0. \quad (2.11)$$

Para simplificar, introducimos la siguiente notación para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño:

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha), \quad \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}, \quad (2.12)$$

de donde se sigue que los autovalores son  $\lambda_1(\alpha)$  y  $\lambda_2(\alpha)$  con  $\lambda_1(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$  y  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ . La forma de proceder para conseguir convertir (2.8) en (2.6) consiste en realizar sucesivos cambios de variable, de forma que se eliminen los términos cuadráticos y la mayoría de los términos cúbicos del sistema. Para ello, a continuación, se prueban los lemas necesarios para obtener el resultado.

**Lema 2.1.** *Introduciendo una variable compleja  $z$  adecuada, el sistema (2.8) se puede escribir para  $|\alpha|$  suficientemente pequeño como*

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (2.13)$$

donde  $g = O(|z|^2)$  es una función regular.

*Demostración.* Sea  $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  el autovector de  $A(\alpha)$  asociado al autovalor  $\lambda(\alpha)$  y sea  $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$  el autovector de  $A(\alpha)^T$  asociado al autovalor  $\bar{\lambda}(\alpha)$ . Escogemos los autovectores de forma que  $p$  esté normalizado con respecto a  $q$ , es decir,

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$$

Así, cualquier  $x \in \mathbb{R}^2$  se puede escribir, suponiendo conocidos los autovectores, como

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha),$$

donde  $z \in \mathbb{C}$  está dado por

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle. \quad (2.14)$$

En efecto, basta ver que  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ . Como

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

se sigue que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Puesto que  $\lambda \neq \bar{\lambda}$  para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño (pues  $\omega(\alpha) > 0$ ) se ha de cumplir que  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ .

Ahora ya es fácil concluir que la variable  $z$  satisface la ecuación

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle, \quad (2.15)$$

obteniéndose la expresión (2.13).  $\square$

Obsérvese que, atendiendo a (2.15), la función  $g$  que interviene en (2.13) estará dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle.$$

Sean entonces los coeficientes del desarrollo de Taylor de la función  $g$  en las variables  $z$  y  $\bar{z}$

$$g_{k,l}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \Big|_{z=0},$$

para  $k+l \geq 2$ ,  $k, l = 0, 1, \dots$

Para  $\alpha = 0$  podemos escribir la función  $F(x, \alpha)$  como

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

donde  $B(x, y)$  y  $C(x, y, u)$  son funciones vectoriales multilineales simétricas con componentes de la forma

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2,$$

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2.$$

Se tiene que

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

donde, para simplificar la notación, escribimos  $q = q(0)$ ,  $p = p(0)$ . Esto nos permite escribir los coeficientes  $g_{kl}$  de los términos cuadráticos de  $g(z, \bar{z}, 0)$  como

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

y de forma análoga

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle.$$

En el siguiente lema se prueba la existencia de un cambio de coordenadas que nos permite eliminar los términos cuadráticos en la expresión (2.13)

**Lema 2.2.** *La ecuación*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3) \tag{2.16}$$

*puede ser transformada mediante un cambio de coordenadas complejo dependiente de  $\alpha$*

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \tag{2.17}$$

para cualquier  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, en una nueva ecuación:

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3),$$

en la que no están presentes los términos cuadráticos.

*Demostración.* La inversa de la transformación (2.17) es de la forma:

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3).$$

Derivando a ambos lados con respecto a  $t$  obtenemos

$$\dot{w} = \dot{z} - h_{20}z\dot{z} - h_{11}(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + O(|z|^3),$$

y utilizando (2.16) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + O(|z|^3) \\ &= \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2 + O(|w|^3). \end{aligned}$$

Por tanto, basta definir

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$$

para conseguir eliminar los términos cuadráticos y obtener la expresión buscada para  $\dot{w}$ .  $\square$

**Observación 2.1.** Los coeficientes  $h_{ij}$  están bien definidos para  $|\alpha|$  suficientemente pequeña puesto que los denominadores son distintos de cero. ya que  $\lambda(0) = i\omega_0$  con  $\omega_0 > 0$ . Por otra parte, tras el cambio de coordenadas, los coeficientes de los términos cúbicos (y mayores) podrán ser distintos de los que se tenían en la expresión de  $\dot{z}$ .

Una vez eliminados los términos cuadráticos, realizamos otro cambio de variable para tratar de eliminar los términos cúbicos. No será posible eliminarlos todos, permanecerá un único término, al que nos referimos como *término resonante*.

**Lema 2.3.** *La ecuación*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4) \quad (2.18)$$

puede ser transformada mediante un cambio de coordenadas complejo dependiente del parámetro  $\alpha$

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3 \quad (2.19)$$

para cualquier  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, en una nueva ecuación

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4),$$

con un único término cúbico, y donde  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

*Demostración.* La demostración es análoga a la del lema anterior. En este caso, la inversa de la transformación (2.19) viene dada por

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4).$$

Derivando a ambos con respecto a  $t$  obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2} (\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + O(|z|^4) \\ &= \lambda z + \left( \frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left( \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} \\ &\quad + \left( \frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 + \left( \frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + O(|z|^4) \\ &= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4). \end{aligned}$$

Por tanto, basta con definir

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

para eliminar todos los términos cúbicos, salvo  $w^2 \bar{w}$ . Este término no es posible eliminarlo, puesto que tomando

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}},$$

el denominador se anula en  $\alpha = 0$ . Debido a esto, definimos  $h_{21} \equiv 0$ , de tal forma que

$$c_1(\alpha) = \frac{g_{21}(\alpha)}{2},$$

obteniéndose así la expresión buscada. □

**Observación 2.2.** En este caso el coeficiente que afecta al término resonante  $w^2 \bar{w}$  no cambia tras la transformación, sigue siendo  $g_{21}/2$ . No obstante, la expresión de  $g_{21}$  podría haber variado como consecuencia de la eliminación de los términos de orden dos.

Podemos combinar ambos lemas para concluir el siguiente resultado.

**Lema 2.4.** *La ecuación*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4), \quad (2.20)$$

donde  $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , y  $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ , puede ser transformada mediante un cambio de variable

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3,$$

donde los coeficientes son funciones que dependen con regularidad de  $\alpha$  y  $|\alpha|$  se supone suficientemente pequeño, de forma que se obtiene una nueva ecuación que únicamente incluye un término resonante cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4), \quad (2.21)$$

donde  $c_1 = c_1(\alpha)$ .

*Demostración.* La demostración es aplicación directa de los lemas anteriores. Realizando primero la transformación del Lema 2.2

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2, \quad (2.22)$$

donde

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda},$$

conseguiamos eliminar los términos cuadráticos. Sin embargo, los coeficientes cúbicos se ven transformados también; sean  $\tilde{g}_{ij}$  los nuevos coeficientes en los términos de orden tres o superior, el coeficiente del término resonante será  $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$ . A continuación, realizamos la transformación del Lema 2.3, de forma que nos quedará una expresión como la buscada, donde además el coeficiente del término cúbico resonante sigue siendo  $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$  tras el segundo cambio de variable. Basta escribir entonces  $c_1 = \frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$ .  $\square$

Para concluir la reducción a forma normal, vamos a obtener una expresión explícita de  $c_1(\alpha)$ . Una forma sencilla de proceder consiste en expresar  $\dot{z}$  en términos de  $w$ ,  $\bar{w}$  de dos formas diferentes e igualar coeficientes. En primer lugar, aplicamos el cambio (2.17) en (2.20) para obtener

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda w + \left( \frac{1}{2}g_{20} + \frac{\lambda}{2}h_{20} \right) w^2 + (g_{11} + \lambda h_{11}) w \bar{w} + \left( \frac{1}{2}g_{02} + \frac{\lambda}{2}h_{02} \right) \bar{w}^2 \\ &\quad + \left( \frac{g_{21}}{2} + g_{20}h_{11} + g_{11} \left( \bar{h}_{11} + \frac{h_{20}}{2} \right) + \frac{1}{2}g_{02}\bar{h}_{02} \right) w^2 \bar{w} + \dots, \end{aligned}$$

donde como término de tercer orden solo se incluye el resonante que nos interesa. Por otra parte,

puesto que sabemos que (2.20) se transforma en (2.21), podemos directamente diferenciar (2.22),

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(w\dot{\bar{w}} + \bar{w}\dot{w}) + h_{02}\dot{w}\bar{w},$$

y sustituir  $\dot{w}$  y  $\dot{\bar{w}}$  usando (2.21) para obtener

$$\dot{z} = \lambda w + h_{20}\lambda w^2 + h_{11}(\bar{\lambda} + \lambda)w\bar{w} + h_{20}\bar{\lambda}\bar{w}^2 + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4).$$

Basta entonces comparar coeficientes para obtener los coeficientes  $h_{20}$ ,  $h_{11}$ , y  $h_{02}$ , así como el coeficiente del término resonante en la forma normal

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}.$$

Si evaluamos  $c_1(\alpha)$  en el valor de bifurcación  $\alpha = 0$  se obtiene

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.23)$$

El último paso de reducción consiste en una normalización de coeficientes y una reparametrización.

**Lema 2.5.** *Consideremos la ecuación*

$$\frac{dw}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

donde  $\mu(0) = 0$ , y  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Supongamos que  $\mu'(0) \neq 0$  y que  $\text{Re } c_1(0) \neq 0$ . Mediante oportunos cambios de coordenadas, reescalados en el tiempo, y reparametrizaciones, podemos escribir la ecuación en la forma:

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

donde  $\beta$  es un nuevo parámetro,  $\theta$  es una nueva variable temporal y  $s = \text{signo}(\text{Re}(c_1(0))) = \pm 1$ .

*Demostración.* En primer lugar hacemos un reescalado temporal definiendo  $\theta = \omega(\alpha)t$ . Obsérvese que no se cambia el sentido de recorrido de las órbitas porque  $\omega(\alpha) > 0$  para todo  $\alpha$  si  $|\alpha|$  es suficientemente pequeño. Si además definimos

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))},$$

obtenemos nuevas ecuaciones

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4).$$

Podemos considerar  $\beta$  como un nuevo parámetro pues tenemos como hipótesis que  $\mu'(0) \neq 0$  y, por lo tanto, se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Inversa:

$$\beta(0) = 0, \beta'(0) \neq 0$$

que garantizan localmente la existencia de  $\alpha$  como función regular de  $\beta$ .

A continuación multiplicamos el campo por el factor

$$\frac{1}{1 + e_1(\beta)|w|^2},$$

donde  $e_1(\beta) = \text{Im } d_1(\beta)$ . Se trata de una función estrictamente positiva en un entorno del origen. Así, obtenemos la ecuación

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4).$$

donde  $l_1(\beta) = \text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$  es real y

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (2.24)$$

Por último, introducimos una nueva variable compleja  $u$  tal que

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}.$$

Obsérvese que está bien definida puesto que por hipótesis  $\text{Re } c_1(0) \neq 0$ . De esta forma la ecuación se transforma en

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

con  $s = \text{signo } l_1(0) = \text{signo } c_1(0)$ . □

La función real  $l_1(\beta) = \text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$  se denomina **primer coeficiente de Lyapunov** y su signo caracteriza el carácter subcrítico o supercrítico de la bifurcación de Hopf. Para ser precisos, la bifurcación es supercrítica (respectivamente subcrítica) si  $s = \text{signo } l_1(0) = -1$  (resp.  $+1$ ).

Antes de recopilar todo lo que se ha demostrado hasta ahora, es conveniente hacer una pequeña reflexión sobre uno de los pasos utilizados en la prueba previa. Hemos multiplicado un campo  $\dot{x} = f(x)$  por una función positiva  $g(x)$  para obtener el sistema  $\dot{x} = g(x)f(x)$ . Los retratos de fase de ambos sistemas son idénticos ya que las órbitas son las mismas, pero recorridas a diferentes velocidades. Este resultado puede parecer intuitivamente claro pero en cualquier caso, hemos incluido una demostración detallada en el Apéndice A.

El siguiente resultado recopila todo el proceso de reducción de una bifurcación de Hopf a su forma normal.

**Teorema 2.6.** *Supongamos un sistema bidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1 \quad (2.25)$$

con  $f$  suficientemente regular, y con un equilibrio en  $x = 0$  para todo  $\alpha$  con  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, con autovalores

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

donde  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ .

Si se cumplen las siguientes condiciones:

(i)  $l_1(0) \neq 0$ , siendo  $l_1$  el primer coeficiente de Lyapunov,

(ii)  $\mu'(0) \neq 0$ ,

entonces, después de oportunos cambios de variable, reparametrizaciones y reescalados temporales, (2.25) se puede transformar en la siguiente forma normal:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4). \quad (2.26)$$

### 2.3. Reducción vía equivalencia topológica

Observando el sistema (2.26), vemos que lo único que lo diferencia del sistema que hemos denominado *forma normal topológica de la bifurcación de Hopf* (sistema (2.6)), es el término  $O(\|y\|^4)$ . El siguiente lema nos permite establecer una equivalencia topológica entre (2.26) y (2.6).

**Lema 2.7.** *Un sistema de la forma*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4), \quad (2.27)$$

con los términos de  $O(\|y\|^4)$  dependiendo de forma regular del parámetro  $\beta$ , es localmente topológicamente equivalente en el origen al sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

*Demostración.* Introduciendo coordenadas polares en el sistema (2.27) obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \Psi(\rho, \varphi), \end{cases} \quad (2.29)$$

donde  $\Phi = O(|\rho|^4)$ ,  $\Psi = O(|\rho|^3)$ , y la dependencia con respecto a  $\alpha$  de las funciones se omite para simplificar la notación.

*Existencia y unicidad del ciclo:*

El primer paso de la demostración consiste en probar la existencia y unicidad de un ciclo límite en el retrato de fases. Para ello, hemos de observar que una órbita de (2.29) con condiciones iniciales en  $(\rho, \phi) = (\rho_0, 0)$  va a cumplir que  $\rho = \rho(\varphi, \rho_0)$ , donde  $\rho$  satisface la ecuación

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + \Phi}{1 + \Psi} = \rho(\alpha - \rho^2) + R(\rho, \varphi), \quad (2.30)$$

con  $R = O(|\rho|^4)$ . Notemos que lo que subyace en este paso es una simple reparametrización del tiempo de forma que  $\dot{\varphi} = 1$ , implicando así que el tiempo que tarda la órbita en volver al semieje positivo  $\varphi = 0$  es el mismo para cualquier órbita empezando en el eje con  $\rho_0 > 0$ . Como  $\rho(\varphi, 0) = 0$ , desarrollamos  $\rho(\varphi, \rho_0)$  a orden tres respecto de la segunda variable:

$$\rho(\varphi, \rho_0) = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4). \quad (2.31)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.30) podemos probar, igualando en potencias de  $\rho_0$ , que  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  son soluciones, respectivamente, de los siguientes problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(\varphi) &= \alpha u_1(\varphi); & u_1(0) &= 1, \\ \dot{u}_2(\varphi) &= \alpha u_2(\varphi); & u_2(0) &= 0, \\ \dot{u}_3(\varphi) &= \alpha u_3(\varphi) - (u_1(\varphi))^3; & u_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Se tratan de ecuaciones diferenciales elementales que podemos resolver explícitamente para obtener:

$$\begin{aligned} u_1(\varphi) &= e^{\alpha\varphi} \\ u_2(\varphi) &\equiv 0 \\ u_3(\varphi) &= e^{\alpha\varphi}q(\alpha), \end{aligned}$$

con

$$q(\alpha) = \begin{cases} \frac{1-e^{2\alpha\varphi}}{2\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ -\varphi & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Notemos que la función  $q(\alpha)$  es regular y puede escribirse como  $q(\alpha) = -\varphi + O(\alpha)$ .

Los cálculos realizados nos permiten obtener una expresión para la aplicación de flujo a tiempo  $2\pi$  del campo (2.30):

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho_0 &\longrightarrow \rho(2\pi, \rho_0).\end{aligned}$$

Obsérvese que  $\rho(2\pi, \cdot)$  nos proporciona, en coordenadas polares, los puntos de retorno para condiciones iniciales en la rama positiva del eje de abscisas tras hacer un giro completo alrededor del origen siguiendo el flujo del campo (2.29).<sup>1</sup> Los puntos fijos de  $\rho(2\pi, \cdot)$  distintos del trivial se corresponden con órbitas periódicas de (2.29). Como decíamos, podemos escribir la aplicación de la forma

$$\begin{aligned}\rho(2\pi; \rho_0) &= u_1(2\pi)\rho_0 + u_3(2\pi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4) \\ &= e^{2\pi\alpha}\rho_0 - e^{2\pi\alpha}(2\pi + O(\alpha))\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4).\end{aligned}$$

Los puntos fijos de la aplicación son solución de

$$\rho_0(1 - e^{2\pi\alpha} + e^{2\pi\alpha}(2\pi + O(\alpha))\rho_0^2 + O(|\rho_0|^3)) = 0.$$

Además de la trivial, se sigue fácilmente que existe una raíz positiva  $\hat{\rho}_0 = \sqrt{\alpha + o(\alpha)}$  si  $\alpha > 0$ .

Para discutir la estabilidad de los puntos fijos, derivamos  $\rho(2\pi; \rho_0)$  con respecto a  $\rho_0$ <sup>2</sup>

$$\frac{d\rho}{d\rho_0}(2\pi; \rho_0) = e^{2\pi\alpha} - 3e^{2\pi\alpha}(2\pi + O(\alpha))\rho_0^2 + O(|\rho_0|^3).$$

Evalutando en el punto fijo trivial, obtenemos

$$\frac{d\rho}{d\rho_0}(2\pi; 0) = e^{2\pi\alpha}.$$

Si  $\alpha < 0$ , entonces  $\frac{d\rho}{d\rho_0}(2\pi; 0) < 1$ , de donde se sigue que el punto fijo trivial (el origen) es atractor. Si  $\alpha > 0$ , es un repulsor.

<sup>1</sup>Aquí nos estamos refiriendo a un difeomorfismo local definido desde la rama positiva del eje de abscisas sobre si misma a partir del flujo. Este tipo de construcción se conoce como aplicación de Poincaré. Los puntos fijos de una aplicación de Poincaré se corresponden con órbitas periódicas en el retrato de fases, que serán atractoras o repulsoras según sea el carácter del punto fijo.

<sup>2</sup>Al tratarse de puntos fijos de una aplicación, serán atractores o repulsores según que la derivada de aplicación tenga módulo menor o mayor que 1, respectivamente.

Evaluando en  $\hat{\rho}_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\rho_0}(2\pi; \hat{\rho}_0) &= e^{2\pi\alpha} - 3e^{2\pi\alpha} (2\pi + O(\alpha)) (\alpha + o(\alpha)) + O(\alpha^{3/2}) \\ &= 1 - 4\pi\alpha + o(\alpha). \end{aligned}$$

Observamos que para  $\alpha$  positivo y suficientemente pequeño,  $\frac{d\rho}{d\rho_0}(2\pi; \hat{\rho}_0) < 1$ , concluyendo así que el punto fijo es atractor; es decir, tendríamos una órbita periódica atractora.

Queda por tanto demostrada la existencia y unicidad de una órbita periódica para  $\alpha > 0$  suficientemente pequeño. El siguiente paso es construir un homeomorfismo de conjugación entre los sistemas (2.28) y (2.27).

*Construcción del homeomorfismo:*

Partimos entonces de los sistemas (2.28) y (2.27), ambos poseyendo una órbita periódica en un entorno del origen, y que en coordenadas complejas se escriben como

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2,$$

y

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 + O(|z|^4),$$

donde esta última se puede escribir en polares de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \Psi(\rho, \varphi). \end{cases}$$

Dividimos este sistema entre  $1 + \Psi$ . Como se trata de una función positiva, el retrato de fases no cambia de forma cualitativa (véase Apéndice A). Obtenemos entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

donde hemos conservado las notaciones por simplificación. Se trata entonces de establecer equivalencias topológicas entre (2.32) y

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\alpha - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

También suponemos, sin pérdida de generalidad, que la órbita periódica del sistema (2.32) pasa por  $\rho = \sqrt{\alpha}$  cuando  $\varphi = 0$ . Para obtener esta condición bastaría con hacer actuar una homotecia, dependiente del parámetro, en el espacio de fases.

Sean entonces  $\phi_1$  y  $\phi_2$  los flujos de los sistemas (2.32) y (2.33), respectivamente. Sean  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  aplicaciones de Poincaré (de primer retorno) definidas desde el eje de abscisas positivo sobre si mismo, para cada uno de los sistemas (2.32) y (2.33) respectivamente. La aplicación  $\Pi_1$  la podemos considerar definida desde el conjunto

$$\Sigma_1 = \{(\rho, 0) : 0 < \rho < \rho^*\}$$

sobre si mismo, para un cierto  $\rho^* > \sqrt{\alpha}$ . La aplicación  $\Pi_2$  estará definida en el conjunto

$$\Sigma_2 = \{(r, 0) : r > 0\}$$

tomando valores en el mismo conjunto.

Del estudio previo se sigue que  $\sqrt{\alpha}$  es un punto fijo atractor de  $\Pi_1$  y podemos suponer que  $\Sigma_1$  está contenido en la cuenca de atracción. En estas condiciones, es posible construir un homeomorfismo

$$h : \Sigma_1 \longrightarrow \hat{\Sigma}_2 \subset \Sigma_2$$

que establece una conjugación entre  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  restringido a  $\hat{\Sigma}_2$ , donde  $\hat{\Sigma}_2 = \{(r, 0) : r^* > 0\}$ .<sup>3</sup>

Estamos ahora en condiciones de construir un homeomorfismo de conjugación entre los flujos  $\phi_1$  y  $\phi_2$ .<sup>4</sup>

Sea  $J_1$  la curva de Jordan formada por la unión del arco de órbita desde  $(\rho^*, 0)$  hasta  $(\Pi_1(\rho^*), 0)$  y el segmento que une  $(\rho^*, 0)$  con  $(\Pi_1(\rho^*), 0)$ . Sea  $U_1$  el conjunto limitado por  $J_1$ . De forma similar, se define  $J_2$  como la curva de Jordan formada por la unión del arco de órbita desde  $(r^*, 0)$  hasta  $(\Pi_2(r^*), 0)$  y el segmento desde  $(r^*, 0)$  hasta  $(\Pi_2(r^*), 0)$ . Denotemos por  $U_2$  al conjunto limitado por  $J_2$ .

Finalmente, construimos

$$H : U_1 \longrightarrow U_2$$

como

$$H(\rho, \varphi) = \phi_2(\tau(\rho, \varphi); (h(\phi_1^p(-\tau(\rho, \varphi); (\rho, \varphi), 0)));$$

donde  $\tau(\rho, \varphi) \in [0, 2\pi)$  es tal que  $\phi_1^p(-\tau(\rho, \varphi); (\rho, \varphi)) = 0$  y  $\phi_1^p$  y  $\phi_1^q$  denotan las componentes del flujo  $\phi_1$ .

Se puede demostrar, aunque no entraremos en los detalles, que la aplicación  $H$  es en efecto un homeomorfismo que establece una conjugación entre (2.32) y (2.33).

Así mismo, resulta importante notar que la aplicación  $H$  depende de  $\alpha$  y proporciona por tanto

<sup>3</sup>Se trata de un homeomorfismo que lleva órbitas de  $\Pi_1$  en órbitas de  $\Pi_2$ . Para ser precisos,  $h$  es tal que  $h(\Pi_1(x)) = \Pi_2(h(x))$  y así, si  $\{\Pi_1^k(x)\}_{k=0,1,\dots}$  es una órbita de  $\Pi_1$ , entonces  $\{h(\Pi_1^k(x))\}_{k=0,1,\dots}$  es una órbita de  $\Pi_2$ .

<sup>4</sup>Es decir, un homeomorfismo  $h$  entre los espacio de fases tal que  $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$ .

toda una familia de homeomorfismos para  $\alpha > 0$ . Tampoco entraremos en los detalles de como prolongar la equivalencia para  $\alpha \leq 0$ .  $\square$

Para finalizar, recopilamos todos los resultados derivados hasta el momento en un único teorema:

**Teorema 2.8.** *Cualquier sistema bidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1 \quad (2.34)$$

con  $f$  suficientemente regular, y con un equilibrio en  $x = 0$  para todo  $\alpha$  con  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, con autovalores

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

donde  $\mu(0) = 0$ ,  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ , y verificando

(i)  $l_1(0) \neq 0$  siendo  $l_1$  el primer coeficiente de Lyapunov,

(ii)  $\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \neq 0$ ,

es localmente topológicamente equivalente en el origen a una de las siguientes formas normales:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

## 2.4. Bifurcación de Hopf en el modelo de Fitzhugh-Nagumo

El modelo de FitzHugh-Nagumo se utiliza en el contexto de la dinámica neuronal para estudiar, entre otros fenómenos, la génesis de *bursting* (ráfagas de oscilación intercaladas entre intervalos cuasi-estacionarios) de las señales neuronales (véase [3, 10, 18]). Se trata de un sistema bidimensional que podemos escribir como

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -f(v) - w + I, \\ \dot{w} &= b(v - \gamma w), \end{aligned} \quad (2.36)$$

con  $f(v) = v(v - a)(v - 1)$ , y siendo  $a, b, \gamma$  parámetros fijos positivos. El parámetro  $I$ , que representa la corriente aplicada en el sistema físico, es el parámetro de bifurcación del sistema. Con el fin de estudiar los puntos de equilibrio de (2.36) resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -f(v) - w + I = 0 \\ v - \gamma w = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Es inmediato que los equilibrios son puntos  $(v, \omega)$  verificando que

$$\begin{cases} \omega &= \frac{v}{\gamma} \\ I &= f(v) + \frac{v}{\gamma}. \end{cases}$$

Puesto que queremos aplicar el marco teórico introducido en la sección anterior, vamos a estudiar las condiciones bajo las cuales el sistema (2.36) sufre una bifurcación de Hopf. Por un lado, estudiamos la condición de degeneración propia de la bifurcación de Hopf, y por otro lado, las condiciones genéricas (i) y (ii) del teorema (2.8).

Comenzamos estudiando la condición de degeneración. Sea  $G = (g_1, g_2)$ , cuyas componentes son  $g_1(v, w) = -f(v) - w + I$ ,  $g_2(v, w) = b(v - \gamma w)$ , la función que define el sistema (2.36). La matriz jacobiana de  $G$  es

$$DG(v, w) = \begin{pmatrix} -f'(v) & -1 \\ b & -\gamma b \end{pmatrix},$$

de tal forma que su traza es

$$T = -(\gamma b + f'(v)), \quad (2.38)$$

y su determinante es

$$\Delta = b(1 + \gamma f'(v)). \quad (2.39)$$

Para que el sistema sufra una bifurcación de Hopf, es necesario que los autovalores crucen el semieje positivo imaginario; es decir, que la traza sea nula y el determinante positivo:

$$\begin{cases} f'(v) + \gamma b &= 0, \\ 1 + \gamma f'(v) &> 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Atendiendo a las condiciones que caracterizan a un equilibrio y a la condición de degeneración, podemos asegurar que el sistema (2.36) sufrirá una bifurcación de Hopf en el punto  $(v_0, w_0)$  (determinado por los valores de las constantes  $(a_0, b_0, \gamma_0, I_0)$ ) cuando se verifiquen las siguientes cuatro condiciones:

$$\begin{cases} -f(v_0) - w_0 + I &= 0, \\ v_0 - \gamma w_0 &= 0, \\ f'(v_0) + \gamma b &= 0, \\ 1 + \gamma f'(v_0) &> 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

A continuación estudiamos las condiciones genéricas de la bifurcación, comenzando con el análisis de la velocidad de cruce del eje imaginario. Dado un punto  $(v_0, w_0, a_0, b_0, \gamma_0, I_0)$  donde se verifiquen las condiciones (2.41), se cumple que la derivada de la traza (ver (2.38)) respecto del

parámetro de bifurcación es

$$\frac{\partial T}{\partial I}(v_0, w_0, a_0, b_0, I_0) = -f''(v_0) \frac{\partial v}{\partial I}.$$

Por las condiciones de bifurcación (2.41), se verifica que  $\partial v / \partial I = \gamma / (1 - \gamma^2 b) > 0$ , de tal forma que

$$-f''(v_0) \frac{\partial v}{\partial I} \neq 0 \quad \text{si} \quad v_0 \neq \frac{1+a}{3}.$$

Derivando con respecto a  $I$  en las ecuaciones de (2.37) obtenemos

$$\begin{cases} f'(v) \frac{\partial v}{\partial I} - \frac{\partial w}{\partial I} + 1 = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial I} - \gamma \frac{\partial w}{\partial I} = 0. \end{cases}$$

Se sigue, teniendo también en cuenta (2.40), que

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \frac{\gamma}{1 + \gamma f'(v)} > 0.$$

Por tanto, la condición genérica (ii) del Teorema 2.8, sobre la velocidad de cruce del eje imaginario por parte de los autovalores del sistema, se traduce en

$$\frac{\partial T}{\partial I}(v_0, w_0, a_0, b_0, I_0) = 2(3v_0 - a - 1) \frac{\gamma}{1 + \gamma f'(v_0)} \neq 0,$$

que se cumple si y solo si  $v_0 \neq (1+a)/3$ .

Estudiamos ahora el primer coeficiente de Lyapunov. Sea  $(v_0, w_0)$  un punto de equilibrio para parámetros  $(a_0, b_0, \gamma_0, I_0)$  donde  $T = 0$  y  $\Delta > 0$ . Podemos trasladarlo al origen  $(0, 0)$  mediante el cambio de variable  $V = v - v_0$ ,  $W = w - w_0$ , de forma que el sistema (2.36) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \gamma_0 b_0 V - W + (1 + a_0 - 3v_0^2)V^2 - V^3, \\ \dot{W} &= b_0(V - \gamma_0 W). \end{aligned} \tag{2.42}$$

La matriz asociada a la parte lineal es

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_0 v_0 & -1 \\ b_0 & -\gamma_0 b_0 \end{pmatrix},$$

con autovalores  $\pm i\omega_0$ , donde  $\omega_0 = \sqrt{b_0(1 - \gamma_0^2 b_0)}$ . La matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & \gamma_0 b_0 \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & \gamma_0 b_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_0 b_0 & -1 \\ b_0 & -\gamma_0 b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & \gamma_0 b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos unas nuevas variables  $(\widehat{V}, \widehat{W})$  tales que

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & \gamma_0 b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{V} \\ \widehat{W} \end{pmatrix},$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{V}' \\ \widehat{W}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & \gamma_0 b_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_0 b_0 V - W + (1 + a_0 - 3v_0^2)V^2 - V^3 \\ b_0(V - \gamma_0 W) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma_0 b_0}{\omega_0} & \frac{-1}{\omega_0} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \widehat{V} + (1 + a_0 - 3v_0^2)\widehat{W}^2 - \widehat{W}^3 \\ b_0 \gamma_0 \omega_0 \widehat{V} + \omega_0^2 \widehat{W} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_0 \widehat{W} + p_{02} \widehat{W}^2 + p_{03} \widehat{W}^3 \\ \omega_0 \widehat{V} + q_{02} \widehat{W}^2 + q_{03} \widehat{W}^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con

$$p_{02} = \frac{\gamma_0 b_0}{\omega_0} (1 + a_0 - 3v_0^2), \quad p_{03} = -\frac{\gamma_0 b_0}{\omega_0}, \quad q_{02} = 1 + a_0 - 3v_0^2, \quad q_{03} = -1.$$

Introduciendo la variable compleja  $\widehat{Z} = \widehat{V} + i\widehat{W}$ , se verifica que

$$\begin{aligned} \widehat{Z}' &= \widehat{V}' + i\widehat{W}' \\ &= -\omega_0 \widehat{W} + p_{02} \widehat{W}^2 + p_{03} \widehat{W}^3 + i(\omega_0 \widehat{V} + q_{02} \widehat{W}^2 + q_{03} \widehat{W}^3) \\ &= \omega_0 i \widehat{Z} + (p_{02} + iq_{02}) \left( \frac{\widehat{Z} - \overline{\widehat{Z}}}{2i} \right)^2 + (p_{03} + iq_{03}) \left( \frac{\widehat{Z} - \overline{\widehat{Z}}}{2i} \right)^3 \\ &= \omega_0 i \widehat{Z} - \frac{p_{02} + iq_{02}}{4} \left( \widehat{Z}^2 - 2\widehat{Z}\overline{\widehat{Z}} + \overline{\widehat{Z}}^2 \right) + \frac{ip_{03} - q_{03}}{8} \left( \widehat{Z}^3 - 3\widehat{Z}^2\overline{\widehat{Z}} + 3\widehat{Z}\overline{\widehat{Z}}^2 - \overline{\widehat{Z}}^3 \right). \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con el desarrollo del Lema 2.4 es fácil notar, comparando coeficientes, que

$$g_{20} = -\frac{p_{02} + iq_{02}}{2}, \quad g_{11} = \frac{p_{02} + iq_{02}}{2}, \quad g_{02} = -\frac{p_{02} + iq_{02}}{2}, \quad g_{21} = -\frac{3(ip_{03} - q_{03})}{4}.$$

De esta forma, acudiendo a la expresión de  $c_1(0)$  obtenida en la demostración del mismo lema,

obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} c_1(0) &= \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{i}{2\omega_0} \left( -\frac{1}{4}(p_{02} + iq_{02})^2 - \frac{7}{12}(p_{02}^2 + q_{02}^2) \right) - \frac{3(ip_{03} - q_{03})}{8}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta expresión y la definición del primer coeficiente de Lyapunov evaluado en 0, concluimos que

$$l_1(0) = \frac{\operatorname{Re} c_1(0)}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{\gamma_0 b_0}{4\omega_0^2} (1 + a_0 - 3v_0^2)^2 - \frac{3}{8} \right).$$

La condición (ii) del Teorema 2.8 se cumplirá siempre que el coeficiente sea distinto de 0; esto nos impone una nueva condición sobre el valor de los parámetros. En caso de cumplirse ambas condiciones genéricas, el Teorema 2.8 nos asegura que el sistema (2.42) será localmente topológicamente equivalente en el origen a una de las formas normales de (2.35), de forma que en el diagrama de bifurcación se podrá observar una bifurcación de Hopf. Obsérvese que el sistema (2.42) es una traslación del sistema original (2.36), de forma que este último también será localmente topológicamente equivalente en el punto de bifurcación a una de las formas normales de (2.35).

Vamos a realizar una simulación numérica dando valores a los parámetros del sistema (2.36). Consideramos  $a = 0.2$ ,  $b = 0.05$ , y  $\gamma = 0.4$ . Estos valores junto con las condiciones de bifurcación de Hopf (2.41) proporcionan dos puntos de bifurcación, en  $(v_0^-, w_0^-) = (0.106, 0.264)$  y  $(v_0^+, w_0^+) = (0.694, 1.736)$ . La condición de traza nula nos revela dos valores de la corriente  $I$ ,  $I^- = 0.273$  e  $I^+ = 1.6311$ . Es fácil notar que la última condición de (2.41) se verifica para los valores tomados.

Respecto a las condiciones genéricas, como  $(1 + a)/3 = 0.4$ , distinto de ambos puntos de bifurcación  $v_0^\pm$ , la velocidad de cruce del eje imaginario es distinta de cero; en concreto,

$$\partial T / \partial I(v_0^-, w_0^-, a_0, b_0, \gamma_0, I^-) > 0 \quad , \quad \partial T / \partial I(v_0^+, w_0^+, a_0, b_0, \gamma_0, I^+) < 0.$$

Sobre el coeficiente de Lyapunov evaluado en 0, para el equilibrio  $(v_0^-, w_0^-, I^-)$  se cumple que  $l_1(0) = -1.0681$ , mientras que en el equilibrio  $(v_0^+, w_0^+, I^+)$ ,  $l_1(0) = -1.6567$ ; notamos que ambos son distintos de cero. Vemos por tanto que para los valores de los parámetros escogidos el sistema se encuentra en las condiciones del Teorema 2.8 (salvo una traslación del equilibrio al origen), de forma que, por la discusión realizada en las secciones anteriores sobre la bifurcación de Hopf, podemos afirmar que en el primer punto de bifurcación el punto de equilibrio cambia de atractor a repulsor al tiempo que emerge de un ciclo límite atractor; mientras que en el segundo punto de bifurcación, el ciclo límite atractor colapsa con el equilibrio repulsor, transformándose este en un equilibrio atractor. En ambos casos se trata de bifurcaciones de Hopf supercríticas.

En la Figura 2.3a podemos ver representada la curva de equilibrios (2.37) (en verde), donde la

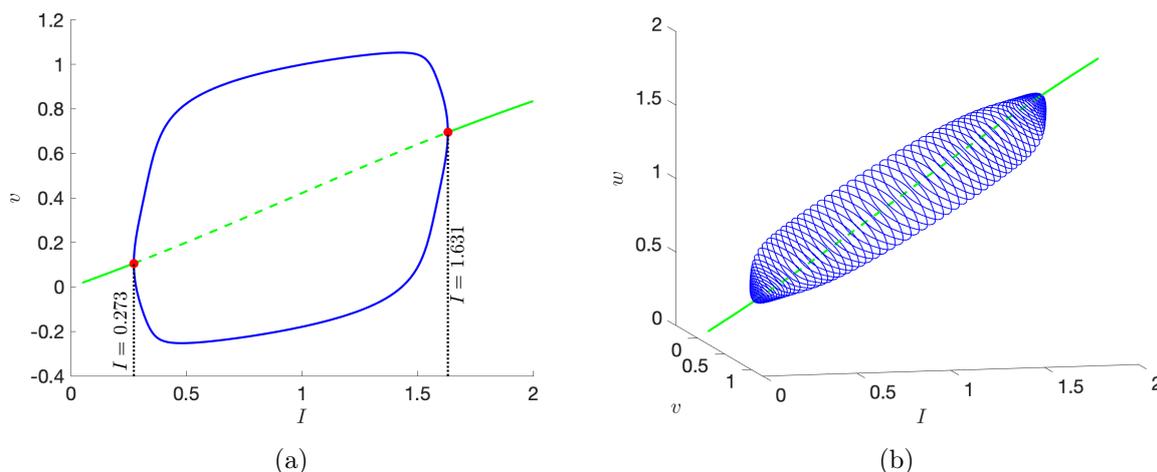


Figura 2.3: Simulaciones numéricas para el sistema (2.36). Se han utilizado los parámetros  $a_0 = 0.2$ ,  $b_0 = 0.05$ ,  $\gamma_0 = 0.4$ . (a) Se tiene representada a la variable  $v$  respecto del parámetro de bifurcación  $I$ . En verde se representa la curva de equilibrios, donde la línea continua implica que el equilibrio es atractor, y la línea discontinua implica que el equilibrio es repulsor. En rojo se ven marcados los dos puntos de bifurcación  $(I^\pm, v_0^\pm)$ . En azul se representa las curvas de valor máximo y mínimo de la variable  $v$ , al acercarse al ciclo atractor creado tras la bifurcación; podemos notar que ambas bifurcaciones son supercríticas: se genera un ciclo límite atractor. (b) Se tiene representada de forma tridimensional la curva de equilibrios  $(I, v_0, w_0)$  (verde), al igual que los ciclos límite completos (azul). Se puede observar como la amplitud del ciclo va aumentando tras la primera bifurcación, y se va reduciendo conforme  $I$  se acerca al valor de la segunda bifurcación.

línea continua nos indica que son equilibrios estables, mientras que la discontinua indica que son inestables. Así mismo, podemos observar los dos puntos de bifurcación de Hopf (en rojo), junto con los valores máximo y mínimo que toma la variable  $v$  para cada valor de  $I$  entre  $I^-$  e  $I^+$ . Estos valores extremos se deben al poder de atracción del ciclo creado tras la primera bifurcación (supercrítica); conforme  $I$  se acerca a  $I^+$ , los valores extremos se van haciendo más pequeños, hasta colapsar en  $I = I^+$ , dándose lugar la segunda bifurcación (supercrítica). En la Figura 2.3b se puede observar el diagrama de bifurcación tridimensional, donde de nuevo la curva verde son los puntos de equilibrio, y las curvas azules representan los ciclos atractores límite. Podemos observar la creación de estos ciclos en el punto  $I = I^-$ , su expansión en amplitud, y su reducción hasta el colapso en el punto  $I = I^+$ . Para obtener los diagramas de bifurcación de la Figura 2.3 se ha utilizado Matcont [4], un paquete de Matlab para la continuación numérica de bifurcaciones en familias de ecuaciones diferenciales ordinarias.

## Capítulo 3

# Pases lentos por una bifurcación de Hopf

Hasta aquí solo hemos considerado el caso en el que el parámetro de bifurcación es independiente del tiempo. Sin embargo, podemos añadir la ecuación  $\dot{\alpha} = \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , de forma que el parámetro varíe lentamente, y estudiar las órbitas  $(x(t), y(t), \alpha(t))$ , viendo como se atraviesa la bifurcación. Es lo que se conoce como **pase lento por una bifurcación** y es el objeto de estudio de este capítulo.

### 3.1. El problema de los pases lentos

Como una primera aproximación al problema, sin entrar a fondo en las matemáticas que subyacen en el mismo, podemos hacer una simulación y representación de lo que les ocurre a las órbitas de un sistema cuando atravesamos una bifurcación (de Hopf) de forma lenta. Para ello, partimos de un sistema similar a (2.3), pero añadimos la dependencia temporal al parámetro de bifurcación  $\alpha$ , es decir, un sistema como el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \\ \dot{\alpha} &= \epsilon, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde en este caso consideramos  $0 < \epsilon \ll 1$ . Recordemos que para el sistema con un valor de  $\alpha$  fijo se verificaba lo siguiente: para valores de  $\alpha$  negativos, existía un único punto de equilibrio atractor, siendo este el origen; pero para valores positivos de  $\alpha$ , el origen se volvía repulsor y aparecía una órbita periódica atractora de radio  $\rho = \sqrt{\alpha}$ . Resulta interesante entonces que representemos el diagrama de bifurcación del sistema (3.1), por ejemplo para la variable  $x$ , y

observar que ocurre en el sistema.

La diferencia entre el nuevo sistema (3.1) y la forma normal de la bifurcación de Hopf (2.3) es que ahora  $\alpha$  no está fijado, sino que va a ir variando conforme pase el tiempo, de tal forma que si  $\alpha$  comienza siendo negativo, el sistema va a pasar por el punto de bifurcación considerando un tiempo suficientemente grande. Esperamos por tanto que, conforme el parámetro pase de un valor negativo a uno positivo, la solución para  $x$ , que en un principio se encuentra cerca del equilibrio, comience a oscilar en torno a la órbita periódica. Sin embargo, fijámonos en la Figura

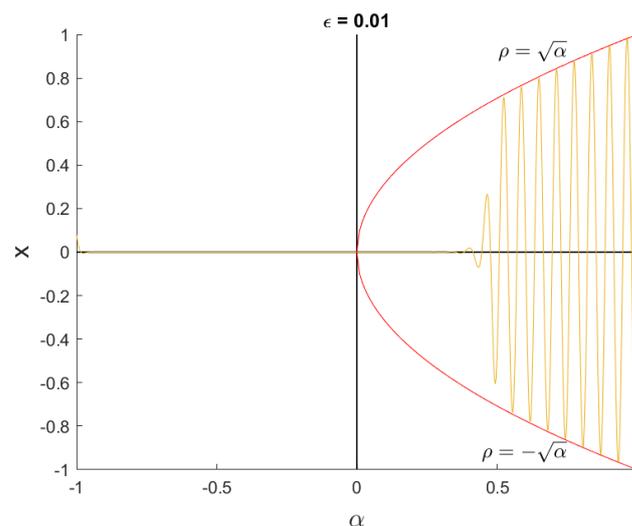


Figura 3.1: Diagrama de bifurcación para el sistema (3.1) y la variable  $x$ . Observamos como las oscilaciones aparecen con un cierto retardo: en lugar de comenzar cuando  $\alpha$  cambia de signo, las oscilaciones se manifiestan para un valor de  $\alpha$  cercano a 0.5, pasado el origen. La curva roja representa el radio de la órbita periódica atractora del sistema. Condiciones iniciales ( $x = 0.08, y = 0, \alpha = -1$ ).

(3.1), vemos como esta oscilación no se produce inmediatamente después de que el parámetro tome valores positivos y el equilibrio se vuelva repulsor, sino que sufre un retardo. Podemos decir que a pesar de que el equilibrio es un repulsor, la solución se sigue sintiendo atraída hacia él durante un tiempo, para luego empezar a oscilar en torno al ciclo atractor.

Jugando con los valores de  $\epsilon$ , o lo que es lo mismo, con la velocidad con la que cambia nuestro parámetro de bifurcación, podemos notar cambios en el comportamiento del sistema. Por ejemplo, aumentando el valor de  $\epsilon$ , haciendo que  $\alpha$  evolucione más rápidamente, observamos como el retardo aparece más tarde. Este efecto se puede apreciar en la Figura (3.2a). Por el contrario, si introducimos un valor de  $\epsilon$  más cercano al 0 (Figura (3.2b)), notamos como las oscilaciones aparecen antes, y el retardo se hace más pequeño. Tiene sentido que ocurra esto pues, hacer  $\epsilon$  más pequeño significa hacer que  $\alpha$  evolucione más lentamente, de forma que el sistema (3.1) está más próximo al (2.3).

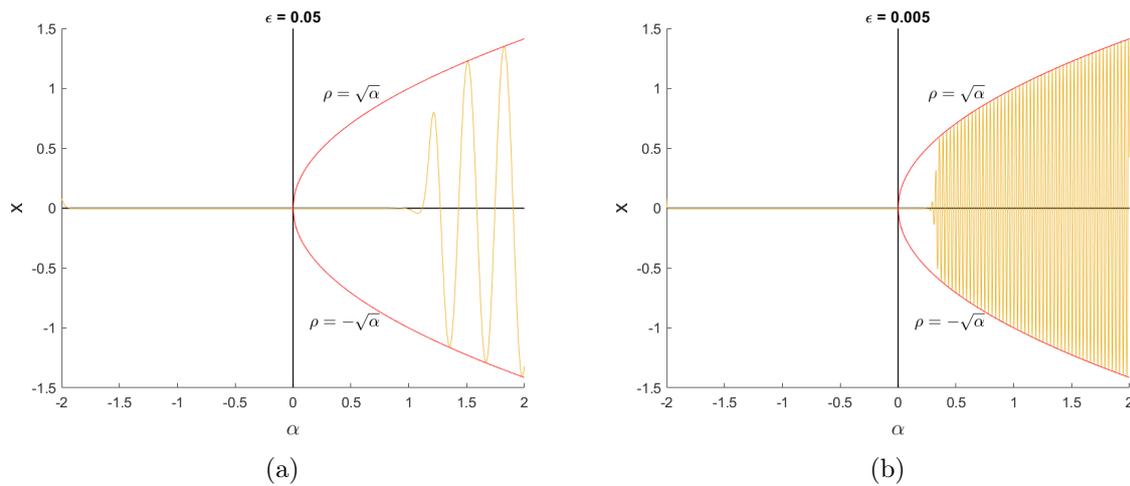


Figura 3.2: Diagramas de bifurcación para el sistema (3.1) y la variable  $x$ . (a) Se tiene un valor de  $\epsilon = 0.005$  superior al de la Figura (3.1). Esto hace que el retardo aumente y las oscilaciones aparezcan más tarde. (b) de forma contraria, al tomar  $\epsilon = 0.005$  haciéndolo más pequeño, las oscilaciones comienzan antes, debido a una disminución del retardo. Condiciones iniciales ( $x = 0.08, y = 0, \alpha = -2$ ).

### 3.2. Sistemas con dinámica rápida-lenta

Introducido el concepto de *pase lento por una bifurcación*, y viendo su efecto sobre las órbitas de un sistema con una bifurcación de Hopf, nos interesa ser capaces de cuantificar el retardo sufrido en la génesis de las oscilaciones. En las secciones que siguen estudiamos el pase lento por una bifurcación de Hopf. Antes debemos introducir ciertos conceptos y terminología que son propias de este contexto. Seguimos principalmente el libro de Kuehn [11]. Cualquier pase lento a través de una bifurcación se puede formular como un problema de dinámica **rápida-lenta**. Nos referimos a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en las que algunas variables poseen derivadas de una magnitud mucho mayor que las de las demás; su variación será, por tanto, mucho más rápida. En otras palabras, en el modelo, las variables que definen el estado del sistema evolucionan en distintas escalas temporales. A continuación formalizamos estas ideas.

Consideremos un sistema

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dx}{d\tau} &= \epsilon x' = f(x, y, \epsilon), \\ \frac{dy}{d\tau} &= y' = g(x, y, \epsilon), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y el parámetro  $\epsilon$  cumple que  $0 < \epsilon \ll 1$ . Las funciones  $f$  y  $g$  podemos suponerlas regulares, incluso analíticas. También podemos escribir (3.2) como

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\epsilon} f(x, y, \epsilon), \\ y' &= g(x, y, \epsilon), \end{aligned}$$

y, de esta forma, ya podemos entender que  $x'$  va a tomar valores arbitrariamente grandes (tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeño) mientras que  $y'$  permanece acotada. La variación de  $x$  va a ser mucho más “rápida” que la de  $y$ . Es en este sentido en el que identificamos a las variables incluidas en el vector  $x$  como las **variables rápidas** y a las variables incluidas en el vector  $y$  como las **variables lentas**. Mediante el reescalado  $t = \tau/\epsilon$ , se obtiene la expresión equivalente

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \dot{x} = f(x, y, \epsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = \epsilon g(x, y, \epsilon).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Nos referiremos a  $t$  como la escala temporal *rápida* o el *tiempo rápido* y a  $\tau$  como la escala temporal *lenta* o el *tiempo lento*.

En la forma (3.3) tenemos la misma lectura en relación con la “rapidez” en la variación de las variables. Como  $\epsilon$  es un pequeño parámetro, tendremos que  $y'$  es muy pequeña en comparación con  $x'$  y de nuevo cobra sentido la identificación de  $x$  e  $y$  como las variables rápida y lenta, respectivamente. Pero la expresión (3.3) permite una lectura adicional. Si hacemos  $\epsilon = 0$ , entonces  $y$  permanece constante y podemos entender que juega el papel de un parámetro en la primera ecuación. Estudiar la dinámica en la familia

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, y, 0),\tag{3.4}$$

se convierte en un problema de bifurcación y el correspondiente diagrama de bifurcación debiera de proporcionar información sobre la dinámica del sistema (3.3) para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. La formalización de esta idea conduce a la Teoría de Fenichel [6, 9] sobre persistencia de variedades invariantes normalmente hiperbólicas. Este diagrama de bifurcación se corresponde con la dinámica del subsistema rápido asociado al problema rápido-lento:

**Definición 3.1.** Denominamos **subsistema rápido** al sistema resultante de igualar  $\epsilon = 0$  al sistema (3.3):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, 0), \\ \dot{y} &= 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

El flujo de (3.5) se llama **flujo rápido**.

También se define el subsistema lento como la familia límite en (3.2):

**Definición 3.2.** Denominamos **subsistema lento** al sistema resultante de igualar  $\epsilon = 0$  al sistema (3.2):

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y, 0), \\ y' &= g(x, y, 0).\end{aligned}\tag{3.6}$$

El flujo generado por (3.6) se denomina **flujo lento**.

La idea es aprovechar estos dos subsistemas para estudiar el comportamiento del sistema general. Dependiendo de la región del espacio de fases, la dinámica dominante será la de uno u otro subsistema.

El conjunto de puntos que verifican la ecuación  $f(x, y, 0) = 0$  tiene una especial relevancia.

**Definición 3.3.** Denominamos **conjunto crítico** del sistema rápido-lento al conjunto

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : f(x, y, 0) = 0\}. \quad (3.7)$$

Si  $C_0$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , nos referimos ella como **variedad crítica**.

La variedad crítica juega papeles distintos en los subsistemas rápido y lento. Para el subsistema rápido (3.5),  $C_0$  representa el conjunto de puntos de equilibrio en el diagrama de bifurcación asociado a la familia. Recorriendo la variedad encontraremos genéricamente hiperbolicidad, comportamientos atractores, repulsores o de tipo silla en la dirección del espacio de fases (la dirección de  $x$ ), pero también detectaremos puntos de bifurcación, donde la dinámica en la dirección del espacio de fases experimenta cambios cualitativos. El papel de  $C_0$  en el subsistema lento (3.6) es diferente. Este sistema de ecuaciones no es una ecuación diferencial estándar, se trata de un sistema algebraico-diferencial, la combinación de una ecuación algebraica  $f(x, y, 0) = 0$  y una ecuación diferencial  $y' = g(x, y, 0)$ . La variedad crítica es la solución de la parte algebraica y nuestro espacio de fases. La dinámica sobre este espacio de fases restringido la determina la parte diferencial. Observar que allí donde la variedad crítica pueda expresarse como el grafo de una función  $x = \varphi(y)$ , podremos escribir la parte diferencial del subsistema lento como

$$y' = g(\varphi(y), y, 0).$$

Cerca de aquellos puntos de  $C_0$  que sean atractores en la familia de campos que constituyen el subsistema rápido, la dinámica evolucionará en la proximidad de la variedad crítica siguiendo el comportamiento dominante del subsistema lento y, en particular, la dinámica será lenta. Sin embargo, si se alcanzan puntos de  $C_0$  donde los equilibrios son repulsores o de tipo silla para el subsistema rápido, el flujo se alejará, típicamente, de  $C_0$ , con  $x$  variando rápidamente en el espacio de fases (alejándose de  $C_0$ ) dominado por la ecuación  $x' = f(x, y, 0)$ , mientras  $y$  permanece próximo a un valor constante. Cabría la posibilidad de observar la presencia de órbitas periódicas en las que se sucediesen tramos con dinámica lenta, en los que la órbita evolucionaría en la proximidad de  $C_0$ , y tramos de dinámica rápida, en los que la órbita evolucionaría lejos de  $C_0$ .

Formalmente, el primer problema que precisa de una discusión es el de la persistencia de la variedad crítica como variedad invariante del sistema rápido-lento. Esta persistencia viene determinada por el comportamiento local que muestren  $C_0$  en el subsistema rápido. Para enunciar los

resultados de persistencia con rigor necesitamos introducir el concepto de hiperbolicidad normal, uno de los conceptos clave en el marco de los sistemas dinámicos con varias escalas temporales, y entender el enunciado del Teorema de Fenichel.

### 3.3. Hiperbolicidad normal y Teorema de Fenichel

Sea  $M$  una variedad compacta, conexa y de clase  $C^r$ , con  $r \geq 1$ , con frontera embebida en el espacio euclideo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.4.** Se define el **fibrado tangente** a  $M$  como

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M, \quad (3.8)$$

donde  $T_p M$  denota el espacio tangente a  $M$  en  $p$ . Para cada  $p \in M$  sea  $\mathcal{N}_p$  el complemento normal a  $T_p M$  en  $T_p \mathbb{R}^n$ , es decir, el espacio formado por todos los vectores ortogonales a  $T_p M$ . De esta forma, para cada  $p \in M$  se tiene que  $T_p \mathbb{R}^n = T_p M \oplus \mathcal{N}_p$  y definimos el **fibrado normal** a  $M$  como

$$\mathcal{N} = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathcal{N}_p, \quad (3.9)$$

Observar que se tiene entonces la descomposición  $T\mathbb{R}^n = TM \oplus \mathcal{N}$

Supongamos ahora que se tiene un campo de vectores

$$x' = F(x)$$

con  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$  y denotemos por  $\varphi_t$  al correspondiente flujo. Supongamos que  $M$  es invariante por el flujo. En estas condiciones  $D\varphi_t(p)$  define una transformación entre fibrados:

$$\begin{aligned} D\varphi_t(x) : T_p M &\rightarrow T_{\varphi_t(p)} M, \\ \Pi \circ D\varphi_t(x) : \mathcal{N}_p &\rightarrow \mathcal{N}_{\varphi_t(p)}, \end{aligned}$$

donde  $\Pi : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow \mathcal{N}$  denota la aplicación de proyección sobre el fibrado normal.

**Definición 3.5.** Decimos que la descomposición  $T\mathbb{R}^n = TM \oplus \mathcal{N}$  es **hiperbólica** si existen  $\mathcal{N}^u$  y  $\mathcal{N}^s$  con  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^u \oplus \mathcal{N}^s$  y constantes  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  verificando que  $\|\Pi^u \circ D\varphi_{-t}(x)|_{\mathcal{N}^u}\| \leq Ce^{-\lambda t}$  y  $\|\Pi^s \circ D\varphi_t(x)|_{\mathcal{N}^s}\| \leq Ce^{-\lambda t}$  para todo  $t \geq 0$ , donde  $\Pi^u$  y  $\Pi^s$  denotan las correspondientes proyecciones sobre  $\mathcal{N}^u$  y  $\mathcal{N}^s$ , respectivamente.

Si se tiene una descomposición hiperbólica, entonces el flujo linealizado es contractivo en la dirección de  $\mathcal{N}^s$  y expansivo en la de  $\mathcal{N}^u$ . Si además la dirección de  $\mathcal{N}$  domina sobre la dirección de

TM para el flujo linealizado, se dice que la variedad invariante  $M$  es **normalmente hiperbólica**. Intuitivamente, esta propiedad se verificará en ciertas partes del conjunto crítico de un sistema rápido-lento, aquellas formadas por puntos de equilibrio hiperbólicos, tal y como precisamos a continuación.

En el contexto de los sistemas *rápido-lento* como (3.2) y (3.3) el concepto de hiperbolicidad normal es más simple.

**Definición 3.6.** Una subvariedad compacta del conjunto crítico  $S \subset C_0$  es **normalmente hiperbólica** si para todo  $p \in S$ , la matriz  $m \times m$   $(D_x f)(p)$  no tiene autovalores con parte real nula.

Una matriz sin autovalores con parte real nula se dice **hiperbólica**. Podemos observar como en un sistema rápido como (3.2) la matriz  $(D_x f)(p)$  es la linealización del subsistema rápido (3.5) en el punto  $p$ .

La hiperbolicidad normal en el sentido de la Definición 3.6 implica, en efecto, que el flujo normal domina sobre el flujo tangencial en la dirección del conjunto crítico. Intuitivamente, podemos pensar en esto como sigue. Si atendemos a la expresión (3.2), se tiene que  $\frac{1}{\epsilon}(D_x f)(p)$  describe el flujo linealizado en la dirección normal (la dirección rápida) a  $C_0$  y  $(D_y g)(p)$  nos proporciona el flujo linealizado en la dirección tangente (la dirección lenta). Como no hay autovalores con parte real nula, podemos hacer  $\frac{1}{\epsilon}(D_x f)(p)$  tan grande como queramos comparado con  $(D_y g)(p)$ , de forma que el flujo normal (*rápido*) domina sobre el flujo tangencial (*lento*).

Existe una relación evidente entre el carácter de los equilibrios del subsistema rápido (3.5) y la hiperbolicidad normal.

**Proposición 3.1.** Una subvariedad  $S \subset C_0$  es normalmente hiperbólica si y solo si para cada  $p = (x^*, y^*) \in S$ , se tiene que  $x^*$  es un punto de equilibrio hiperbólico de  $\dot{x} = f(x, y^*, 0)$ .

*Demostración.* Se sigue de forma inmediata de la definición 3.6 y la definición de un punto de equilibrio hiperbólico.  $\square$

El Teorema de Fenichel que enunciamos a continuación es clave en nuestro estudio de la bifurcación de Hopf como sistema *rápido-lento*.

**Teorema 3.2.** (Fenichel [6, 11]) Sea  $S = S_0$  una subvariedad compacta normalmente hiperbólica contenida en la subvariedad crítica  $C_0$  de (3.2) y supongamos que  $f, g \in C^r$ , con  $r < \infty$ . Entonces, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, se cumple lo siguiente:

(F1) Existe una variedad localmente invariante<sup>1</sup>  $S_\epsilon$  difeomorfa a  $S_0$ .

<sup>1</sup>Invarianza local significa que las trayectorias pueden entrar o salir de  $S_\epsilon$  únicamente a través de la frontera.

(F2)  $S_\epsilon$  está a una distancia Hausdorff<sup>2</sup> de  $S_0$  de orden  $\mathcal{O}(\epsilon)$  (cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

(F3) El flujo sobre  $S_\epsilon$  converge al flujo lento cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

(F4)  $S_\epsilon$  es de clase  $C^r$ .

(F5)  $S_\epsilon$  es una variedad normalmente hiperbólica y tiene las mismas propiedades de estabilidad con respecto a las variables rápidas que  $S_0$ .<sup>3</sup>

(F6) La variedad  $S_\epsilon$  no tiene por qué ser única. En regiones que se encuentran a una distancia fija de la frontera de  $S_\epsilon$ , cualesquiera dos variedades que satisfagan (F1)-(F5) se encuentran entre sí a una distancia Hausdorff de orden  $\mathcal{O}(e^{-K/\epsilon})$ , para algún  $K > 0$ , con  $K = \mathcal{O}(\infty)$ .

Es importante observar que toda la notación asintótica se refiera a  $\epsilon \rightarrow 0$ . Las mismas conclusiones para  $S_0$  se dan para las correspondientes variedades estable e inestable:

$$W_{loc}^s(S_0) = \bigcup_{p \in S_0} W_{loc}^s(p), \quad W_{loc}^u(S_0) = \bigcup_{p \in S_0} W_{loc}^u(p),$$

donde interpretamos a los puntos  $p \in S_0$  como equilibrios del subsistema rápido. Estas variedades también persisten para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, es decir, existen variedades locales estables e inestables  $W_{loc}^s(S_\epsilon)$  y  $W_{loc}^u(S_\epsilon)$ , respectivamente, para las cuales las conclusiones (F1)-F(6) se mantienen si reemplazamos  $S_\epsilon$  y  $S_0$  por  $W_{loc}^s(S_\epsilon)$  y  $W_{loc}^s(S_0)$ , o por  $W_{loc}^u(S_\epsilon)$  y  $W_{loc}^u(S_0)$ , respectivamente.

**Definición 3.7.** La variedad  $S_\epsilon$ , resultado del Teorema 3.2, se denomina **variedad lenta**.

### 3.4. Método WKB

Dentro de la gran variedad de técnicas que se pueden utilizar para el estudio de los sistemas *rápido-lento*, nosotros vamos a hacer uso del denominado **método WKB**, a partir de sus autores Wentzel, Kramers y Brillouin. Supongamos que queremos resolver una ecuación diferencial ordinaria que, escrita como ecuación de orden  $n$ , toma la forma:

$$F\left(\frac{d^n y}{d\tau^n}, \frac{d^{n-1} y}{d\tau^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{d\tau}, y, \tau; \epsilon\right) = 0, \quad (3.11)$$

<sup>2</sup>La **distancia Hausdorff** entre dos conjuntos no vacíos  $V, W \subset \mathbb{R}^{m+n}$  se define como

$$d_H(V, W) := \max\left\{\sup_{v \in V} \inf_{w \in W} \|v - w\|, \sup_{w \in W} \inf_{v \in V} \|v - w\|\right\}. \quad (3.10)$$

<sup>3</sup>Esta puede ser variedad atractora, repulsora, o de tipo silla.

donde la derivada de mayor orden está multiplicada por  $\epsilon$ . Entonces, el método propone un ansatz de la forma

$$y(\tau) \sim \exp\left(\frac{1}{\gamma(\epsilon)} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(\epsilon)^j S_j(\tau)\right) \quad \text{con } \gamma(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

donde las funciones  $\gamma$  y  $S_j$  se han de determinar a partir de la ecuación diferencial. Generalmente se utiliza  $\gamma(\epsilon) = \epsilon$ .

Las principales condiciones para la validez del método, sin exponer su demostración, son como siguen:

(C1) La sucesión de funciones  $\gamma(\epsilon)^{j-1} S_j(\tau)$  tiene que ser una sucesión asintótica<sup>4</sup> cuando  $\gamma(\epsilon) \rightarrow 0$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ .

(C2) Si buscamos una buena aproximación truncando en el término  $\gamma(\epsilon)^{N-1} S_N(\tau)$ , se debe cumplir que

$$\gamma(\epsilon)^N S_{N+1}(\tau) \ll 1 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

### 3.5. Retardo en la génesis de oscilaciones

Una vez que hemos introducido la terminología necesaria, podemos abordar el fenómeno del pase lento por una bifurcación de Hopf, en ocasiones también denominado bifurcación de Hopf retardada. Nos encontramos con un sistema de la forma (3.1), que es una forma de sistema *rápido-lento* con dos variables rápidas  $(x, y)$  y una variable lenta  $(\alpha)$ . El sistema (3.1) lo podemos reescribir en función de la escala del tiempo lento de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dx}{d\tau} &= \epsilon x' = \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ \epsilon \frac{dy}{d\tau} &= \epsilon y' = x + \alpha y - y(x^2 + y^2), \\ \frac{d\alpha}{d\tau} &= \alpha' = 1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Notar que con la escala del tiempo rápido,  $t = \tau/\epsilon$  se obtiene el sistema (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2), \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \dot{\alpha} = \epsilon. \end{aligned} \quad (3.15)$$

---

<sup>4</sup>Una sucesión de funciones  $\{\delta_n(\epsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice asintótica si

$$\delta_{n+1}(\epsilon) = o(\delta_n(\epsilon))$$

para todo  $n$ , cuando  $\epsilon$  tiende a 0.

La variedad crítica de (3.14)-(3.15) es  $C_0 = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 = y\}$ , es decir, el eje  $\alpha$ . Debemos observar que, imponiendo  $\epsilon = 0$  en (3.15), obtenemos el subsistema rápido, el cual coincide con la forma normal de la bifurcación de Hopf (2.6) (supercrítica). Por ello, podemos pensar en (3.15) como la forma normal de la bifurcación de Hopf con  $\alpha$  siendo un parámetro que varía lentamente y lleva a las variables rápidas al punto de bifurcación  $\alpha = 0$ . Como ya vimos en el capítulo anterior, la bifurcación de Hopf supercrítica consiste en pasar de un equilibrio estable para  $\alpha < 0$  a un equilibrio inestable el nacimiento de un ciclo periódico atractor para  $\alpha > 0$ , con radio  $\rho = \sqrt{\alpha}$ .

La pregunta que nos hacemos es cómo el movimiento lento del parámetro interactúa con la dinámica de las variables rápidas. La respuesta ya la vislumbramos en la introducción del capítulo, pues basta realizar una simulación numérica como en la Figura 3.1 para ver que el efecto es retardar la aparición de las oscilaciones y el efecto de repulsión. En la Figura 3.1 se puede observar como para  $\alpha < 0$  la solución se acerca a la parte atractora de la variedad crítica  $C_0^a = C_0 \cap \{\alpha < 0\}$ . Después, la solución se mantiene cercana a la variedad crítica repulsora  $C_0^r = C_0 \cup \{\alpha > 0\}$  durante un tiempo tras el punto de bifurcación  $\alpha = 0$ . Como ya comentamos, este efecto de retardo, que causa a la solución mantenerse cercana a la parte repulsora de la variedad lenta, es la característica clave de la bifurcación de Hopf retardada.

**Definición 3.8.** Una bifurcación de Hopf en un sistema *rápido-lento* en el que la variable lenta actúa como parámetro de bifurcación se denomina **bifurcación de Hopf retardada**.

El objetivo es cuantificar este retardo. Para ello, definamos un sistema general de dos variables rápidas y una lenta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, \alpha; \epsilon), \\ \dot{y} &= f_2(x, y, \alpha; \epsilon), \\ \dot{\alpha} &= \epsilon g(x, y, \alpha; \epsilon). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para aligerar la notación, escribiremos  $f := (f_1, f_2)^\top$ . Además, a lo largo del desarrollo asumiremos lo siguiente:

- (A1) El conjunto crítico  $C_0 = \{f = (0, 0)\}$  de (3.16) es una variedad suave.
- (A2) Se aplica una transformación de coordenadas preliminar de forma que  $C_0 = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 = y\}$
- (A3)  $C_0$  es normalmente hiperbólica excepto en  $(0, 0, 0) = 0$ ;  $C_0$  es atractor para  $\alpha < 0$  y repulsor para  $\alpha > 0$ .
- (A4) EL subsistema rápido de (3.16) tiene una bifurcación de Hopf supercrítica no degenerada en  $\alpha = 0$ . Es decir, una pareja de autovalores imaginarios no nulos  $\lambda_{1,2}(\alpha)$  que cruzan el eje imaginario cuando  $\alpha = 0$  con velocidad no nula  $v = \frac{d}{d\alpha} \text{Re}(\lambda_{1,2})(0)$ .

Obsérvese que las hipótesis son más generales que las que satisface el sistema (3.15) en el sentido de que genéricamente, el conjunto crítico  $C_0$  no es invariante para  $\epsilon > 0$ .

La ecuación que gobierna el flujo lento del sistema rápido-lento (3.16) es de la forma

$$\dot{\alpha} = g(0, 0, \alpha; \epsilon).$$

Para esta ecuación, siendo  $\alpha^0(\tau)$  a la solución con condición inicial  $\alpha_0 = \alpha(0)$ , denotamos por  $\tau_*$  al tiempo lento necesario para que  $\alpha^0$  alcance el punto de bifurcación de Hopf del subsistema rápido, es decir, el tiempo  $\tau_*$  tal que  $\alpha^0(\tau_*) = 0$ . En estas condiciones, el tiempo rápido necesario para que el subsistema rápido alcance la bifurcación de Hopf es del orden de  $t_* = \tau_*/\epsilon$ .

**Teorema 3.3.** *Supongamos que el sistema (3.16) verifica las hipótesis (A1)-(A4) y que  $\epsilon > 0$  es suficientemente pequeño. Consideremos una solución  $\gamma(\tau) = \gamma(\epsilon t)$  tal que el punto inicial  $\gamma(0)$  está  $O(\epsilon)$ -próximo a  $C_0$ . Supongamos que  $\alpha(0) < 0$ . Entonces pertenecerá a un  $O(\epsilon)$ -entorno de  $C_0$  para un cierto tiempo de retardo más allá del punto de bifurcación  $y = 0$ .*

*Supongamos que  $f$  y  $g$  son analíticas en las variables  $(x, y)$  y regulares con respecto a  $\epsilon$  en un entorno del origen. Entonces  $\gamma$  tiene un retardo  $\tau_* + \tau_K$ , con  $\tau_K = O(1)$ .*

**Observación 3.1.** A continuación esbozaremos la demostración de este resultado, omitiendo parte de los detalles, pero estableciendo las ideas principales de la argumentación. Una prueba completa se escapa de los objetivos del trabajo.

*Esbozo de la demostración.* Denotando  $u = (x, y)$ , podemos escribir el sistema (3.16) como

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \epsilon h_0(\alpha, \epsilon) + A_0(\alpha, \epsilon)u + \varphi_0(u, \alpha, \epsilon), \\ \dot{\alpha} &= \epsilon g_0(u, \alpha; \epsilon), \end{aligned} \tag{3.17}$$

con  $\epsilon h_0(\alpha, \epsilon) = f(0, \alpha, \epsilon)$ ,  $A_0(\alpha, \epsilon) = D_u f(0, \alpha, \epsilon)$  y  $\varphi_0(u, \alpha, \epsilon) = O(\|u\|^2)$ . Obsérvese que  $A_0(0, 0) = D_u f(0, 0, 0)$  es una matriz con autovalores imaginarios puros y, por lo tanto,  $A_0(\alpha, \epsilon)$  tiene inversa para  $\alpha$  y  $\epsilon$  suficientemente pequeños. Esto nos permite definir una nueva variable rápida

$$\tilde{u} = u + \epsilon A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)h_0(\alpha, \epsilon),$$

de forma que

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \epsilon h_0(\alpha, \epsilon) + A_0(\alpha, \epsilon)u + \varphi_0(u, \alpha, \epsilon) \\ &\quad + \epsilon^2 (D_\alpha A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)h_0(\alpha, \epsilon) + A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)D_\alpha h_0(\alpha, \epsilon)) g_0(u, \alpha, \epsilon) \\ &= \epsilon h_0(\alpha, \epsilon) + A_0(\alpha, \epsilon)(\tilde{u} - \epsilon A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)h_0(\alpha, \epsilon)) + \varphi_0(\tilde{u} - \epsilon A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)h_0(\alpha, \epsilon), \alpha, \epsilon) \\ &\quad + \epsilon^2 (D_\alpha A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)h_0(\alpha, \epsilon) + A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)D_\alpha h_0(\alpha, \epsilon)) g_0(\tilde{u} - \epsilon A_0^{-1}(\alpha, \epsilon)h_0(\alpha, \epsilon), \alpha, \epsilon) \\ &= \epsilon^2 h_1(\alpha, \epsilon) + A_1(\alpha, \epsilon)\tilde{u} + \varphi_1(\tilde{u}, \alpha, \epsilon) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} h_1(\alpha, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi_0(-\varepsilon A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) h_0(\alpha, \varepsilon), \alpha, \varepsilon) \\ &\quad (D_\alpha A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) h_0(\alpha, \varepsilon) + A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) D_\alpha h_0(\alpha, \varepsilon)) g_0(-\varepsilon A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) h_0(\alpha, \varepsilon), \alpha, \varepsilon), \\ A_1(\alpha, \varepsilon) &= A_0(\alpha, \varepsilon) + D_u \varphi_0(-\varepsilon A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) h_0(\alpha, \varepsilon), \alpha, \varepsilon) \\ &\quad + \varepsilon^2 (D_\alpha A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) h_0(\alpha, \varepsilon) + A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) D_\alpha h_0(\alpha, \varepsilon)) D_u g_0(-\varepsilon A_0^{-1}(\alpha, \varepsilon) h_0(\alpha, \varepsilon), \alpha, \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{y } \varphi_1(\tilde{u}, \alpha, \varepsilon) = O(\|\tilde{u}\|^2).$$

Se tiene que  $A_1(0, 0) = A_0(0, 0)$  y por lo tanto, de nuevo,  $A_1$  tiene inversa para  $\alpha$  y  $\varepsilon$  suficientemente pequeños. Podemos iterar el proceso y después de  $n$  cambios de variable obtenemos

$$u' = \varepsilon^{n+1} h_n(\alpha, \varepsilon) + A_n(\alpha, \varepsilon) u + \varphi_n(u, \alpha, \varepsilon)$$

donde, por simplicidad, hemos vuelto a denotar la variable rápida como  $u$ . Se cumple de nuevo que  $\varphi_n(u, \alpha, \varepsilon) = O(\|u\|^2)$  y que la matriz  $A_n(\alpha, \varepsilon)$  tiene inversa para  $\alpha$  y  $\varepsilon$  suficientemente pequeños. De los cálculos se sigue que en la expresión de  $h_n$  tenemos derivadas de  $h_0$  hasta orden  $n$ . Teniendo en cuenta el estimador de Cauchy <sup>5</sup> para la derivada  $n$ -ésima de una función analítica se puede probar que

$$|h_n(\alpha, \varepsilon)| < K a^n n!$$

siendo  $K$  y  $a$  constantes positivas. Aplicando la fórmula de Stirling se tiene que

$$|\varepsilon^{n+1} h_n(\alpha, \varepsilon)| < K \varepsilon^{n+1} a^n n! \approx K \varepsilon \sqrt{2\pi n} \left(\frac{\varepsilon a n}{e}\right)^n.$$

Fijando  $n$  como la parte entera de  $\frac{1}{\varepsilon a}$  se puede probar que <sup>6</sup>

$$\varepsilon \sqrt{2\pi n} \left(\frac{\varepsilon a n}{e}\right)^n = o(e^{-\frac{1}{\varepsilon a}}).$$

<sup>5</sup>Estimador de Cauchy: Sea  $f(x)$  una función analítica en un dominio  $U$ . La fórmula integral de Cauchy establece que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^{n+1}} d\xi.$$

donde  $C$  la frontera de un disco centrado en  $x$  y de radio  $r$  contenido en  $U$ . Entonces, parametrizando la frontera como  $\xi = x + r e^{i\theta}$ ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + r e^{i\theta}) r i e^{i\theta}}{(r e^{i\theta})^{n+1}} d\theta$$

y

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{2\pi |i|} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x + r e^{i\theta})| |r i e^{i\theta}|}{|r e^{i\theta}|^{n+1}} d\theta \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^n} d\theta = \frac{M n!}{r^n},$$

donde  $M = \max_{x \in C} |f(x)|$ .

<sup>6</sup>Podemos escribir la parte entera de  $\frac{1}{\varepsilon a}$  como  $\frac{1}{\varepsilon a} - \delta$ , con  $0 \leq \delta < 1$ . Se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sqrt{2\pi \left(\frac{1}{\varepsilon a} - \delta\right)} \frac{\left(\frac{1 - \varepsilon a \delta}{e}\right)^{\frac{1}{\varepsilon a} - \delta}}{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{\varepsilon a}}} = 0.$$

Consideremos una solución  $(u(t), \alpha(t))$  con condición inicial  $(u_0, \alpha_0)$ , siendo  $\alpha_0 < 0$  tal que  $\alpha(t_*) = 0$  para un tiempo rápido  $t_*$  con  $t_* = O(\frac{1}{\epsilon})$ . Como  $A_n(\alpha, \epsilon) = D_u f(0, \alpha, 0) + O(\epsilon)$ , si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño y mientras  $\alpha$  no cruce el valor de bifurcación, los autovalores de  $A_n$  tendrán parte real menor que 0. En ese tiempo, como  $\varphi_n(u, \alpha, \epsilon)$  es de orden  $\|u\|^2$ , la aproximación de  $u$  por la solución del sistema

$$u' = A_n(\alpha, \epsilon)u + \varphi_n(u, \alpha, \epsilon)$$

tendra un decrecimiento exponencial y como la perturbación  $\epsilon^{n+1}h_n(\alpha, \epsilon)$  es exponencialmente pequeña,  $\|u(t)\|$  decrecerá hasta situarse a una distancia exponencialmente pequeña de la variedad lenta  $C_\epsilon$ , es decir, para algún  $p_\epsilon \in C_\epsilon$ ,

$$\|u(\tau_*/\epsilon) - p_\epsilon\| = O(e^{-K/\epsilon}).$$

Para tiempos  $\epsilon t = \tau > \tau_*$ , se produce un efecto de retardo porque  $u(t)$  llega a situarse a una distancia  $O(e^{-K/\epsilon})$  de  $C_\epsilon$  antes de cruzar el punto de bifurcación de Hopf y a partir de ese punto tenemos que esperar hasta que se sitúe a una distancia  $O(\epsilon)$  y podamos observar el efecto de la bifurcación, es decir, la aparición de oscilaciones. Para que la repulsión tenga efecto tiene que transcurrir un tiempo “grande”  $t_K$ , de orden  $O(1/\epsilon)$ , es decir, un tiempo lento  $\tau_K = \epsilon t_K = O(1)$ . Así, el tiempo de retardo necesario para observar la oscilación es  $\tau_* + \tau_K$ .  $\square$

El Teorema 3.3 fue probado en [14], aunque también son interesantes los comentarios en [11]. Una vez que se ha establecido que la existencia de tiempos de retardo, el siguiente paso es dar una estimación del mismo.

**Definición 3.9.** Un tiempo lento  $\tau$  se dice momento asintótico de salto de una trayectoria si en un  $O(\epsilon|\ln \epsilon|)$ -entorno de  $\tau$  existe un intervalo  $[\tau_a, \tau_b]$  tal que  $\gamma(\tau_a)$  está a una distancia  $O(\epsilon)$  de  $C_0$  mientras que  $\gamma(\tau_b)$  está a una distancia  $O(1)$ . Se denomina momento asintótico de caída a un tiempo lento que es momento asintótico de salto cuando se recorre la órbita en sentido negativo

Obsérvese que el momento asintótico de salto se corresponde con el tiempo en el que una trayectoria se separa de  $C_0$  y el retraso concluye. Recordemos que  $\alpha^0(\tau)$  denota el flujo lento del sistema rápido-lento (3.16) y que  $\lambda_i(\alpha)$ , con  $i = 1, 2$  son los autovalores de la parte lineal del subsistema rápido en el punto de equilibrio. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $\text{Im}(\lambda_1) < 0$ . En estas condiciones, se define la fase compleja como la función:

$$\Psi(\tau) = \int_{\tau_*}^{\tau} \lambda_1(\alpha^0(s)) ds, \quad (3.18)$$

para la que hemos de tener presente que  $\lambda_1$  es una función que toma valores complejos. Sea  $p(\tau) = \text{Re}(\Psi(\tau)) = \text{Re} \int_{\tau_*}^{\tau} (\lambda_1(\alpha^0(s))) ds$ . Tenemos que  $p'(\tau) = \text{Re}(\lambda_1(\alpha^0(\tau)))$  y, por tanto,  $p'(\tau_*) = 0$  y, para  $\tau$  suficientemente próximo a  $\tau_*$ ,  $p'(\tau) < 0$  (resp.  $p'(\tau) > 0$ ) si  $\tau < \tau_*$  (resp.  $\tau > \tau_*$ ).

Se tiene entonces que  $\tau_*$  es un punto de mínimo relativo estricto de  $p$ . Esto nos permite definir, para  $\tau < \tau_*$  suficientemente próximo a  $\tau_*$  un valor  $\Pi(\tau) > \tau_*$  tal que

$$\operatorname{Re}(\Psi(\tau)) = \operatorname{Re}(\Psi(\Pi(\tau))).$$

Nos referiremos a  $\Pi$  como función de entrada-salida; su estudio nos permitirá calcular los retardos observados en el sistema.

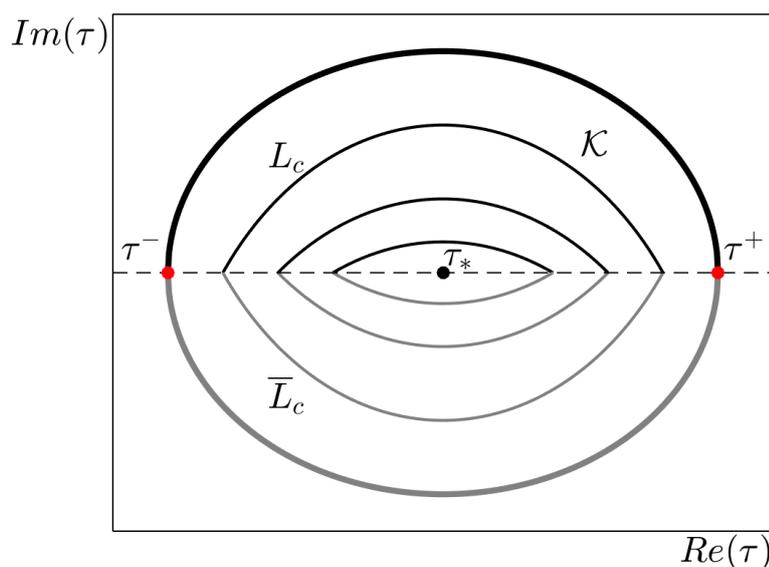


Figura 3.3: Esquema de posibles curvas de nivel de una función  $\operatorname{Re}(\Psi(\tau))$ .  $L_c$  sería una curva con la parte imaginaria positiva, y  $\bar{L}_c$  su conjugada.  $\mathcal{K}$  es la región encerrada por las curvas que unen los puntos  $\tau^-$  y  $\tau^+$ , los momentos asintóticos de caída y de salto respectivamente.

En este punto resulta conveniente considerar  $\tau$  como un tiempo complejo. De esta forma podemos conectar los puntos  $\tau$  y  $\Pi(\tau)$  en el plano complejo a través curvas de la familia:

$$L_c = \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\Psi(\tau)) = c\}$$

con  $c$  una constante (ver Figura 3.3). Las curvas de nivel conjugadas  $\bar{L}_c$  corresponderían a tomar  $\lambda_2$  en lugar de  $\lambda_1$  en la expresión de  $\Psi$ .

Si escribimos  $\tau = a + bi \in \mathbb{C}$  se tiene

$$\Psi(\tau) = \Psi(a + bi) = \int_{\tau_*}^{a+bi} \lambda_1(\alpha^0(s)) ds,$$

donde ahora también  $s \in \mathbb{C}$ . También definimos la función de variables reales y con valor com-

plejo:

$$F(a, b) = \Psi(a + bi) = \int_{\tau_*}^{a+bi} \lambda_1(\alpha^0(s)) ds = u(a, b) + iv(a, b).$$

Por una parte,

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = \frac{\partial u}{\partial b}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial b}(a, b),$$

y, por otra,

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a, b) = i\lambda_1(\alpha^0(a + bi)) = -\text{Im}(\lambda_1(\alpha^0(a + bi))) + i\text{Re}(\lambda_1(\alpha^0(a + bi))).$$

Tenemos entonces que

$$\frac{\partial u}{\partial b}(a, b) = -\text{Im}(\lambda_1(\alpha^0(a + bi)))$$

y, en particular,

$$\frac{\partial u}{\partial b}(a, 0) = -\text{Im}(\lambda_1(\alpha^0(a))).$$

Por hipótesis  $\text{Im}(\lambda_1) < 0$  y así  $\frac{\partial u}{\partial b}(a, 0) > 0$ , al menos para  $a$  suficientemente próximo a  $\tau_*$ . El vector normal a una curva  $L_c$  en su intersección con el eje real será vertical si y solo si la parte imaginaria de  $\lambda_1$  es cero, es decir, cuando los autovalores pasan a ser reales.

De los cálculos anteriores y teniendo en cuenta las hipótesis (A1)-(A4) se sigue que, para valores de  $\tau \in \mathbb{C}$  próximos a  $\tau_*$ , se satisfacen las siguientes condiciones:

**(C1)** El flujo lento es analítico y  $f$  y  $g$  son analíticas en todos los puntos del recorrido de la órbita descrita por el flujo lento.

**(C2)**  $\lambda_{1,2}(\alpha(\tau)) \neq 0$  y  $\lambda_1(\alpha(\tau)) \neq \lambda_2(\alpha(\tau))$ .

**(C3)** Las curvas de nivel  $L_c$  no tienen tangentes verticales.

Lejos del punto de bifurcación de Hopf del subsistema rápido, algunas de estas hipótesis pueden dejar de verificarse. Sea  $\Gamma$  un arco sobre una curva de nivel  $L_c$  con extremos sobre el eje de los reales tal que en el interior del conjunto  $\mathcal{K}$  limitado por  $\Gamma$  y su conjugado  $\bar{\Gamma}$  se cumplen las hipótesis (C1)-(C3). El conjunto  $\mathcal{K}$  es un entorno de  $\tau_*$ . Se definen los tiempos lentos  $\tau^- \in \mathbb{R}$  y  $\tau^+ \in \mathbb{R}$  (con  $\tau^- < \tau^+$ ) como los extremos del arco  $\Gamma$  (ver Figura 3.3).

El siguiente resultado establece que los momentos asintóticos de salto pueden determinarse haciendo uso de la función de entrada-salida aplicada a momentos asintóticos de caída, es decir, aplicada a los instantes en los que la solución antes de haber alcanzado el punto de Hopf, se encuentra a una distancia  $O(\epsilon)$  de  $C_0$ .

**Teorema 3.4.** ([13, 14]) *Supongamos que el tiempo  $\tau_0 \in (\tau^-, \tau^+)$  es un momento asintótico de*

caída. Entonces  $\Pi(\tau_0)$  es un momento asintótico de salto. En el intervalo

$$(\tau_0 + K\epsilon|\log \epsilon|, \Pi(\tau_0) - K\epsilon|\log \epsilon|),$$

con  $K > 0$  una constante, la solución está a una distancia  $O(\epsilon)$  de  $C_0$ . Además, si  $\tau_0 < \tau^-$  en el momento de caída, entonces la solución permanece cerca de  $C_0$  para valores de  $\tau$  menores que  $\tau^+ - \delta(\epsilon)$ , siendo  $\delta$  tal que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$ .

Podemos hacer un ejemplo de cálculo de función de entrada-salida volviendo al ejemplo de retardo en el caso de la forma normal de la bifurcación de Hopf con parámetro lento. Ahora consideramos

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2) + O(\epsilon) \\ \dot{y} &= x_1 + \alpha y - y(x^2 + y^2) + O(\epsilon) \\ \dot{\alpha} &= \epsilon. \end{cases} \quad (3.19)$$

Como hipótesis genérica suponemos que la perturbación  $O(\epsilon)$  es tal que la variedad crítica  $C_0 = \{(xy, \alpha) \mid x = y = 0\}$  pierde su carácter invariante si  $\epsilon \neq 0$ .

La parte lineal del sistema en el origen tiene autovalores  $\lambda_1(\alpha) = \alpha - i$  y  $\lambda_2(\alpha) = \alpha + i$ . Por otra parte, el subsistema lento asociado a (3.19) es de la forma

$$\begin{cases} 0 &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ 0 &= x_1 + \alpha y - y(x^2 + y^2) \\ \alpha' &= 1, \end{cases}$$

y su flujo, el flujo lento, se reduce a

$$\alpha^0(\tau) = \tau + \alpha^0(0)$$

y, por lo tanto, se cruza el punto de bifurcación de Hopf en el subsistema rápido cuando  $\tau = \tau_* = -\alpha_0(0)$ . En estas condiciones la función de entrada-salida (3.18) se escribe como

$$\Psi(\tau) = \int_{-\alpha^0(0)}^{\tau} (\alpha^0(s) - i) ds = \int_{-\alpha^0(0)}^{\tau} (s + \alpha^0(0) - i) ds.$$

Si escribimos  $\tau = a + bi$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \int_{-\alpha^0(0)}^{a+bi} (s + \alpha^0(0) - i) ds \\ &= \frac{1}{2}((a + \alpha^0(0) + (b-1)i)^2 - i^2) \\ &= \frac{1}{2}((a + \alpha^0(0))^2 - (b-1)^2 + 1 + 2(a + \alpha^0(0))(b-1)i). \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\operatorname{Re}(\Psi(\tau)) = \frac{1}{2}((a + \alpha^0(0))^2 - (b - 1)^2 + 1)$$

y podemos escribir las curvas de nivel  $\operatorname{Re}(\Psi(\tau)) = c$  como

$$a = \pm\sqrt{2c + (b - 1)^2 - 1} - \alpha^0(0).$$

La Figura 3.4 muestra las curvas de nivel en el caso  $\alpha^0(0) = 0$ , otro caso se correspondería con una adecuada traslación horizontal. No tenemos ningún problema de pérdida de analiticidad en el campo. Por otra parte, la condición (C2)  $\lambda_1(\alpha^0(\tau)) \neq 0$  falla cuando  $\tau = i$  y por lo tanto el conjunto  $\mathcal{K}$  se reduce, en principio, al recinto abierto acotado por los segmentos que unen los puntos  $\tau = \pm i$  con  $\tau = i$  y sus conjugados. Para comprobar que la condición (C3) también se verifica en esta región, calculamos la derivada de la parte real de  $\Psi(\tau)$  con respecto a la parte imaginaria de  $\tau$ :

$$\frac{\partial}{\partial b} \operatorname{Re}(\Psi(a + bi)) = -b + 1.$$

Se sigue que las curvas de nivel presentan tan gentes verticales cuando  $b = 1$ . Como esta recta no corta a  $\mathcal{K}$ , la condición (C3) se satisface. En esta situación con  $\alpha^0(0) = 0$  se tiene que  $\tau^- = -1$  y

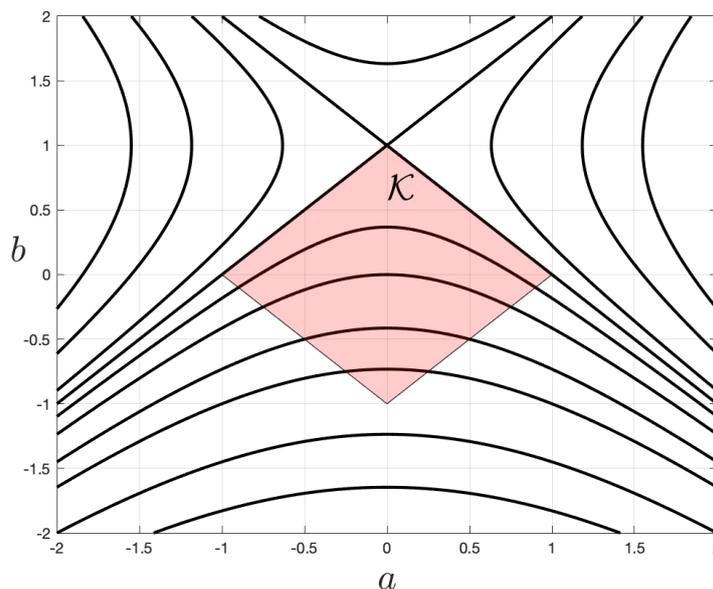


Figura 3.4: Curvas de nivel de la función  $\operatorname{Re}(\Psi(\tau))$  para el sistema (3.19) y  $\alpha^0(0) = 0$ . En rojo se pinta la región  $\mathcal{K}$  en la que se verifican las condiciones (C1)-(C3).

$\tau^+ = 1$  y, en el caso general, con  $\tau_* = -\alpha^0(0)$ ,  $\tau^- = \tau_* - 1$  y  $\tau^+ = \tau_* + 1$ . A partir del Teorema (3.4) concluimos que para momentos de caída  $\tau_0 \in (\tau^-, -\tau_*)$  el retardo es  $\tau_* + \tau_0$ . De hecho, de acuerdo con [11], se podría demostrar que si  $\tau_0 < \tau^-$ , entonces  $\tau^+$  también es el momento asintótico de salto. Esto se ilustrará en posteriores simulaciones numéricas.

### 3.6. Simulaciones numéricas: aplicación del método WKB

En esta sección vamos a expresar el momento asintótico de salto en términos de la variable lenta, evitando así el uso de tiempos complejos, mediante el método WKB. Así mismo, realizaremos distintas simulaciones numéricas para visualizar el tiempo asintótico de salto, comparando el valor teórico con lo observado en las órbitas aproximadas numéricamente.

Al igual que antes, consideramos un sistema rápido-lento de la forma (3.20), donde hacemos uso de una notación similar a la de la demostración:  $u = (x, y)$  es una variable bidimensional, y  $\alpha$  es la variable lenta

$$u' = f(u, \alpha(\varepsilon t)). \quad (3.20)$$

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

(A1) Para  $\varepsilon > 0$ , la ecuación (3.20) tiene una bifurcación de Hopf no degenerada cuando  $\alpha = \alpha_H$  alrededor del equilibrio  $u = u_s$ . En particular, ninguno de los autovalores  $\lambda_{1,2}$  de la matriz jacobiana  $J = (D_u f)(u_s)$  se anula.

(A2) La bifurcación es supercrítica y  $u_s$  es un punto de equilibrio hiperbólico atractor para  $\alpha < \alpha_H$ .

(A3) La evolución de la variable lenta  $\alpha$  viene dada por la expresión

$$\alpha(\varepsilon t) = \alpha(0) + h(\varepsilon t) = \alpha_0 + h(\varepsilon t). \quad (3.21)$$

con  $h(0) = 0$ , y  $h$  siendo una función estrictamente creciente de forma monótona.

(A4) El campo vectorial  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es analítico. De hecho,  $f$  es lo suficientemente genérica como para que la variedad crítica para  $\varepsilon = 0$  no sea invariante para  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

(A5) La condición inicial de la trayectoria en consideración  $(u_0, \alpha_0)$  es tal que el momento asintótico de caída  $\tau_0$  es mayor que  $\tau^-$ .

Consideramos  $\alpha_j$  como el valor del parámetro para el cual el retardo en la bifurcación de Hopf finaliza, es decir, la coordenada en el espacio de fases de la variable lenta correspondiente al momento asintótico de salto. Se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.** ([11]) *Supongamos que se cumplen las condiciones (A1)-(A5). Entonces, una condición asintótica formal de inicio para las oscilaciones del sistema (3.20) es*

$$0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_j} [h^{-1}(\alpha - \alpha_0)]' \max_k (\operatorname{Re}(\lambda_k(\alpha))) d\alpha, \quad (3.22)$$

donde los autovalores  $\lambda_k$  se calculan a partir del jacobiano  $J = (D_u f)(u_s)$  evaluado en el equilibrio  $u_s$ .

*Esbozo de la demostración.* Por las hipótesis del teorema sabemos que existe un punto de equilibrio  $u_s = u_s(\alpha(\tau))$  para  $\varepsilon = 0$  que sufre una bifurcación de Hopf (estática). Planteamos como ansatz que la solución que varía lentamente  $u_{sv}$ , la que sufre el retardo, tiene una expansión perturbativa de la forma

$$u_{sv}(\tau) \sim u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \dots \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.23)$$

donde  $\tau = h(\varepsilon t)$ . Sustituyendo (3.23) en (3.20) obtenemos que  $u_0(\tau) = u_s(\alpha(\tau))$ , de forma que

$$u_{sv}(\tau) = u_s(\alpha(\tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Para determinar cuando esta solución se vuelve inestable, linearizamos (3.20) en torno a  $u_{sv}$ , es decir, resolvemos el problema de estabilidad que involucra el jacobiano  $J_{sv} = (D_u f)(u_s(\alpha(\tau)))$ . Esto nos lleva a un problema variacional lineal de la forma

$$U' = J_{sv}U. \quad (3.24)$$

Para resolverlo recurrimos al método WKB, utilizando en la ecuación (3.24) el siguiente ansatz:

$$U(t; \varepsilon) \sim e^{\sigma(\tau)/\varepsilon} (U_0(\tau) + \varepsilon U_1(\tau) + \dots) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Igualando términos de mismo orden obtenemos el siguiente problema algebraico

$$(J_{sv} - \sigma'(\tau)h'(\varepsilon t)Id)U_0 = 0, \quad U_0 \neq 0. \quad (3.25)$$

Este problema tiene soluciones no triviales si

$$\det(J_{sv} - \sigma'(\tau)h'(\varepsilon t)Id) = 0. \quad (3.26)$$

Notando que (3.26) tiene la misma forma que la correspondiente a la ecuación para el problema de cálculo de autovalores de  $J_{sv}$ , podemos identificar

$$\lambda = \sigma'(\tau)h'(\varepsilon t) = \frac{\sigma'(\tau)}{(h^{-1}(\tau))'}. \quad (3.27)$$

Para estimar el momento de salto  $\alpha_j$  a primer orden, debemos encontrar el tiempo  $\tau_j$  para el cual  $\text{Re}(\sigma) = 0$  en la expansión WKB. Usando (3.27) obtenemos la condición de inicio

$$0 = \int_0^{\tau_j} (h^{-1}(\tau))' \max_k (\text{Re}(\lambda_k(\alpha))) d\tau. \quad (3.28)$$

Realizando un cambio simple de variables  $\alpha = \alpha_0 + \tau$ , llegamos al resultado buscado

$$0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_j} [h^{-1}(\alpha - \alpha_0)]' \max_k (\operatorname{Re}(\lambda_k(\alpha))) d\alpha. \quad (3.29)$$

□

Cabe destacar que este teorema nos sirve para situaciones en las que la ecuación de la variable lenta es un poco más general que  $\alpha' = \varepsilon$  donde el tiempo lento es simplemente  $\tau = \varepsilon t$ , aunque nosotros nos centraremos en el caso más simple.

El Teorema 3.5 nos proporciona una forma de estimar el momento en el que acaba el retardo en un sistema rápido-lento y la solución empieza a oscilar. A continuación aplicamos este resultado para el caso de la bifurcación de Hopf normal (3.30), donde los términos de orden  $\varepsilon$  nos eliminan la invarianza de la variedad crítica para  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

En el caso particular del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - y - x(x^2 + y^2) + O(\varepsilon) \\ \dot{y} &= x_1 + \alpha y - y(x^2 + y^2) + O(\varepsilon) \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon. \end{cases} \quad (3.30)$$

la función  $h(s)$  del Teorema 3.5 es  $h(s) = s$ , de forma que  $[h^{-1}(\alpha - \alpha_0)]' = 1$ . Los autovalores del sistema son  $\lambda = \alpha \pm i$ , y la solución al flujo lento es  $\alpha(\tau) = \alpha_0 + \tau$ . Por tanto, la condición de inicio de las oscilaciones se traduce en

$$0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_j} \alpha d\alpha = \frac{\alpha_j^2 - \alpha_0^2}{2}, \quad (3.31)$$

de forma que el momento asintótico de salto es

$$\alpha_j = |\alpha_0|. \quad (3.32)$$

En la Figura 3.5 se recogen varias simulaciones del sistema para las que el momento asintótico de caída  $\tau_0 \in (\tau^-, \tau^*)$ , de forma que podemos aplicar el Teorema 3.5 (se verifica A(5)). Podemos observar ese efecto de retardo predicho por la teoría expuesta anteriormente, de forma que el sistema tarda un tiempo en comenzar a oscilar a pesar de que el parámetro de perturbación  $\alpha$  ya ha cambiado de signo. De esta manera, para distintas condiciones iniciales  $\alpha_0$ , hemos calculado el momento asintótico de salto mediante (3.32). Podemos observar como la aproximación a primer orden es bastante buena. Al añadir un término de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  a las ecuaciones de (3.30) conseguimos eliminar la invarianza de la variedad crítica  $C_0$ , de forma que ahora  $C_\varepsilon$  ya no es el eje  $\alpha$ , sino que se encuentra cerca del mismo. Esto se corresponde con lo exigido en la condición (A4) del Teorema 3.5, y se puede apreciar en la Figura 3.5d, por ejemplo. En la Figura 3.5a

debemos notar como al encontrarnos bastante cerca del punto de bifurcación  $\alpha = 0$ , a la solución casi no le da tiempo a estabilizarse cerca de la variedad lenta  $C_\epsilon$ . Conforme vamos alejando la condición inicial de  $\alpha = 0$ , vamos observando (Figuras 3.5b-3.5d) el efecto atractor de la variedad  $C_\epsilon$

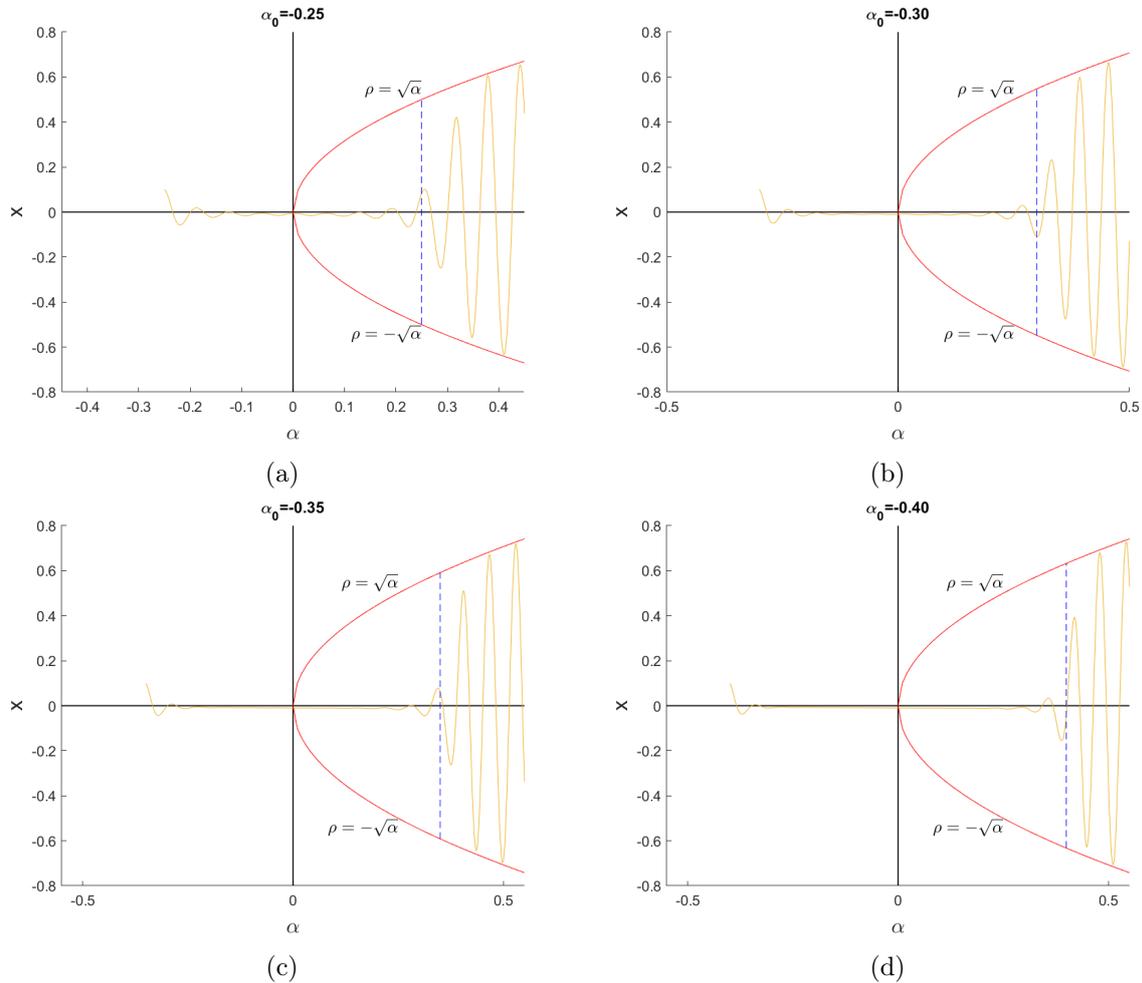


Figura 3.5: Simulaciones numéricas para distintas condiciones de inicio  $\alpha_0$  distintas. Podemos observar el retardo en el comportamiento oscilatorio del sistema. Vemos también que el retardo aumenta conforme menor sea la condición inicial  $\alpha_0$ , coincidiendo con el cálculo teórico de (3.32). En azul se marca el valor del momento asintótico de salto  $\alpha_j$  calculado mediante (3.32), que coincide en primer orden con el observado. Se han utilizado unas condiciones  $(x_0 = 0.1, y_0 = 0)$ , y un valor  $\epsilon = 0.01$ .

En la Figura 3.6 se representan dos situaciones para las que  $\tau_0 < \tau^-$ . Notamos como tanto en la Figura 3.6a como en la Figura 3.6b los momentos asintóticos de salto (en azul) son iguales. Esto se corresponde con lo comentado anteriormente, ya que al ser  $\tau_0 < \tau^-$ , el momento asintótico de salto es en ambos casos  $\tau^+$ . De nuevo podemos observar (Figura 3.6a para verlo mejor) el efecto de los términos de orden  $\mathcal{O}(\epsilon)$  al modificar  $C_\epsilon$  y alejar la variedad del eje  $\alpha$ .

Es importante destacar que con el fin de obtener unas buenas simulaciones numéricas han sido necesarias unas tolerancias extremadamente bajas, del orden de  $10^{-13}$ .

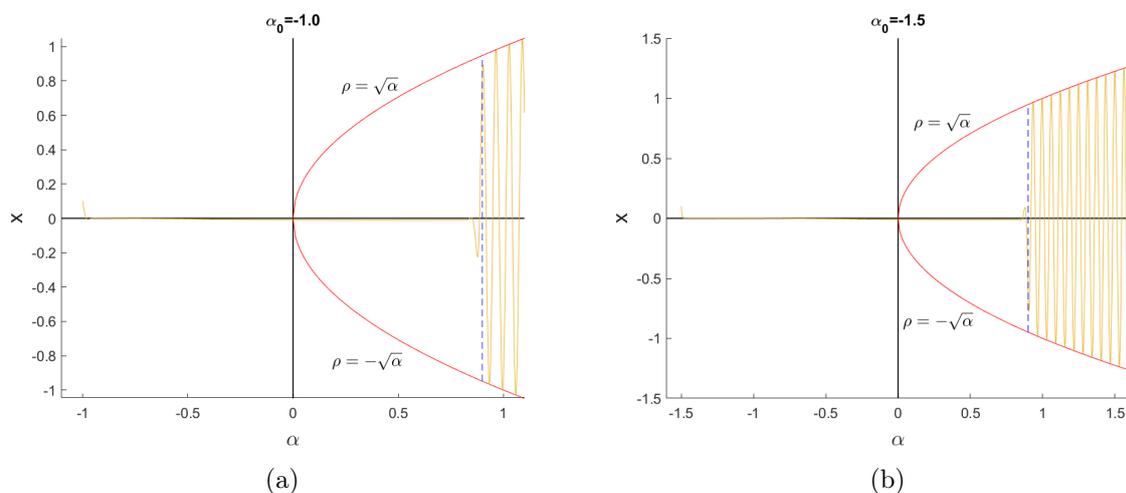


Figura 3.6: Simulaciones numéricas para distintas condiciones de inicio  $\alpha_0$  distintas. En azul se marca el valor del momento asintótico de salto. En este caso se observa un mismo momento asintótico de salto para ambos casos, a pesar de la diferencia en  $\alpha_0$ , correspondiéndose con lo comentado teóricamente. Notar como la variedad  $C_\epsilon$  no es exactamente  $\{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 = y\}$ , sino que es una pequeña perturbación de esta. Se han utilizado unas condiciones  $(x_0 = 0.1, y_0 = 0)$ , y un valor  $\epsilon = 0.01$ .

Otro de los modelos que podemos estudiar, ya mencionado en el capítulo anterior, es el modelo de FitzHugh-Nagumo. Recordemos sus ecuaciones para una corriente aplicada  $I$ :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -f(v) - w + I, \\ \dot{w} &= b(v - \gamma w), \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde  $f(v) = v(v-a)(v-1)$ , y  $a, b, \gamma$  son parámetros fijos positivos. La corriente aplicada  $I = I(t)$  es el parámetro de bifurcación del sistema. Consideramos que la corriente varía lentamente de la siguiente forma:

$$I(t) = I_0 + \epsilon t, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Por condiciones biológicas es necesario considerar  $\gamma < 3(1 - a + a^2)^{-1}$ , de forma que nos aseguramos de que el sistema (3.33) tenga un único equilibrio para  $\epsilon = 0$ . Este estado de equilibrio  $(v, w) = (v_s(I), w_s(I))$  satisface las condiciones

$$w_s = v_s/\gamma \quad I = f(v_s) + v_s/\gamma.$$

Del estudio realizado en el capítulo anterior sabemos que existen dos corrientes distintas en las que se da una bifurcación de Hopf:  $I = I_\pm$ , de forma que cuando  $I < I_-$  o  $I > I_+$  ( $I_- < I < I_+$ ), el equilibrio es estable (inestable).

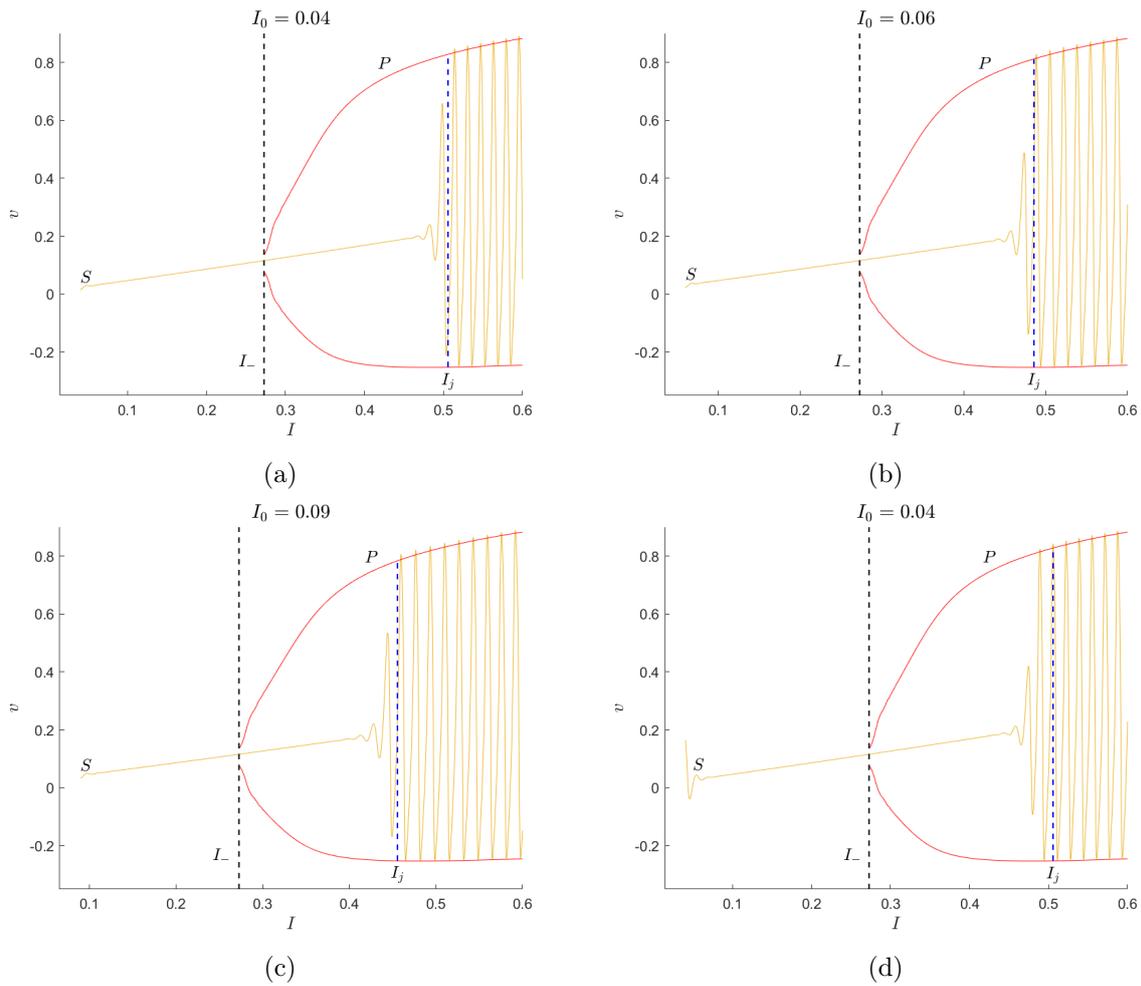


Figura 3.7: Simulaciones numéricas para distintas condiciones de inicio  $I_0$ . En azul se marcan los valores asintóticos de salto calculados mediante la ecuación (3.36). En negro (línea discontinua) se marca el valor en el que se da la bifurcación de Hopf, en este caso de 0.273 con los valores de las constantes utilizados. S (amarillo) hace referencia a la solución calculada de forma numérica y P (rojo) son las ramas de bifurcación de las soluciones periódicas en torno las que oscila la solución. En (a), (b), y (c) se aprecia una buena aproximación del momento asintótico de salto  $I_j$ . En (d), al alejar las condiciones iniciales de la variedad crítica, la aproximación de  $I_j$  falla en comparación con (a), que tiene el mismo  $I_0$  e  $I_j$  se encuentra mejor aproximado. Se han usado los valores  $a = 0.2, b = 0.05, \gamma = 0.4, \epsilon = 5e - 5$ .

Para aplicar el método WKB, y en concreto el Teorema 3.5, realizamos un desarrollo a primer orden de la parte real de los autovalores del sistema:

$$\max_k \operatorname{Re}(\lambda_k(I)) \approx v \cdot (I - I_-), \quad (3.34)$$

donde  $v$  hace referencia a la velocidad de cruce de la parte real de la pareja de autovalores

conjugados de la parte lineal del sistema, es decir,

$$v = \frac{d}{dI} \max_k \operatorname{Re}(\lambda_k(I)) \Big|_{I=I_-}. \quad (3.35)$$

A partir de la aproximación (3.34), podemos sustituir en la condición de inicio de las oscilaciones (3.22). Teniendo en cuenta que de nuevo la función  $h(s) = s$ , e integrando por partes, llegamos a la condición

$$I_j - I_- = I_- - I_0. \quad (3.36)$$

Es decir, lo que tarda en avanzar desde el punto inicial  $I_0$  hasta el punto de bifurcación  $I_-$  es lo mismo que tarda en ir desde la bifurcación hasta el punto asintótico de salto  $I_j$ . Debemos destacar la forma tan simple de la ecuación (3.36), la cuál es debida a ser una aproximación de primer orden. Además, la aproximación solo es válida cuando la solución se encuentra cerca de la variedad crítica del sistema (3.33). Para comprobar si la aproximación dada por (3.36) es correcta, realizamos varias simulaciones numéricas.

En la Figura 3.7 podemos observar el retardo sufrido por la solución (en la variable  $v$ ) para distintas condiciones iniciales  $I_0$ . Tanto en la Figura 3.7a como en la Figura 3.7b y la Figura 3.7c se puede apreciar una buena aproximación del momento asintótico de salto, calculado a partir de (3.36) y representado por la línea discontinua azul  $I_j$ . Al imponer unas condiciones iniciales en las que la solución  $S$  se encuentra muy cerca de la variedad crítica, la condición (3.36) sabemos que resulta una buena aproximación de  $I_j$ . Sin embargo, cuando alejamos la condición inicial de la variedad crítica, como en la Figura 3.7d, podemos ver que el momento asintótico de salto ocurre antes del  $I_j$  calculado. Esto es debido al tiempo que tiene que transcurrir para que  $S$  se acerque a la variedad crítica, y se encuentre a una distancia de orden  $O(\epsilon)$ , el transitorio previo no lleva parejo un retardo posterior. Como complemento, en la Figura 3.7 se representan las ramas de bifurcación de las soluciones periódicas entre las cuales oscila la solución  $S$  representadas por las curvas rojas  $P$ . El punto de bifurcación  $I_-$  viene representado por la línea discontinua negra, y al depender solo de los valores de  $a, b, \gamma$  es común en las cuatro figuras.

# Conclusiones

En este trabajo se han estudiado bifurcaciones de Hopf y el retardo que se produce en modelos donde los parámetros varían lentamente con el tiempo atravesando puntos de bifurcación de Hopf. El interés de este escenario es más que notable.

Los pases lentos por una bifurcación de Hopf juegan un papel clave en la descripción de muy diversos fenómenos. En [3] y [18], los pases lentos se estudian en el contexto del modelo de FitzHugh-Nagumo de dinámica neuronal y, en efecto, el paso por bifurcaciones de Hopf es una de las piezas claves en la comprensión del fenómeno del bursting en las señales neuronales. La neurona responde con una señal periódica en la que se pasa por dos fases diferentes, una estacionaria y otra oscilatoria; la transición de una a otra se explica, en muchas ocasiones, por el paso por una bifurcación de Hopf.

En [5] y [16] (ver también [2]) se consideran pases lentos en modelos climáticos. A través de modelos conceptuales se intenta explicar una de las antiguas cuestiones todavía abiertas en el campo de la Paleoclimatología: la aparición de las glaciaciones o, mejor dicho, el paso de periodos interglaciares de 41000 años a periodos de 100000 años, hace aproximadamente 1000000 de años. La radiación solar puede explicar el comportamiento en el pasado (el espectro de potencias de la radiación solar incluye una oscilación de periodo  $\sim 41000$  años), pero no el comportamiento moderno (el periodo de 100000 años no está presente en la señal de radiación). El fenómeno de pasos lentos por una bifurcación de Hopf parece estar presente en el momento de la transición o, para ser más precisos, en algún tiempo anterior al cambio en la frecuencia.



# Apéndice A

## Reescalados temporales

En el capítulo 2, en la demostración del Lema 2.5, multiplicamos un campo  $\dot{x} = f(x)$  por una función positiva  $g(x)$  obteniendo el sistema  $\dot{x} = g(x)f(x)$ . Esto se corresponde con una *reparametrización temporal*, pues los sistemas poseen un retrato de fases idéntico, pero con órbitas recorridas a distintas velocidades. Este resultado, intuitivamente claro, se sigue directamente de la siguiente proposición:

**Proposición A.1.** *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suficientemente regular, y  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función positiva regular. Sean los sistemas*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{x} = g(x)f(x) \quad (\text{A.2})$$

*Si  $J \subset \mathbb{R}$  es un intervalo abierto conteniendo al origen y  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  es solución de (A.1) con  $\gamma(0) = x_0 \in U$ , entonces la función  $B : J \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$B(t) = \int_0^t \frac{1}{g(\gamma(s))} ds$$

*es invertible en su rango  $K \subseteq \mathbb{R}$ . Si  $\rho : K \rightarrow J$  es la inversa de  $B$ , entonces la identidad*

$$\rho'(t) = g(\gamma(\rho(t)))$$

*se cumple para todo  $t \in K$ , y la función  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\sigma(t) = \gamma(\rho(t))$  es la solución de (A.2) con condición inicial  $\rho(0) = x_0$*

*Demostración.* Es fácil ver que la función  $s \mapsto 1/g(\gamma(s))$  es continua en  $J$  ( $\gamma$  es continua y  $g$  es positiva), de forma que  $B$  está definida en  $J$  y su derivada es positiva en todo punto. Por tanto,  $B$  es invertible en su rango. Sea  $\rho$  su inversa, por el Teorema de la Función Inversa se cumple

que

$$\rho'(t) = \frac{1}{B'(\rho(t))} = g(\gamma(\rho(t))),$$

y consecuentemente,

$$\sigma'(t) = \rho'(t)\gamma'(\rho(t)) = g(\gamma(\rho(t)))f(\gamma(\rho(t))) = g(\sigma(t))f(\sigma(t)).$$

□

Resulta lógico entonces, a partir de la demostración de [A.1](#), que los sistemas [\(A.1\)](#) y [\(A.2\)](#) poseen el mismo retrato de fases, pues en ambos la solución viene dada por la función  $\gamma$ , con la diferencia de que el primer sistema es recorrido con un tiempo parametrizado por  $t$ , y el segundo por  $\rho(t)$ .

# Bibliografía

- [1] V.I. Arnold, N. Kazarinoff, V.S. Afrajmovich, Y.S. Il'yashenko y L.P. Shil'nikov. *Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer, Berlin-Heidelberg, 2013.
- [2] P. Ashwin y P. Ditlevsen. The middle pleistocene transition as a generic bifurcation on a slow manifold. *Climate dynamics*, 45:2683–2695, 2015.
- [3] S. M. Baer, T. Erneux y J Rinzel. The slow passage through a Hopf bifurcation: Delay, memory effects, and resonance. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 49(1):55–71, 1989.
- [4] A. Dhooge, W. Govaerts, Yu. A. Kuznetsov, H. G.E. Meijer y B. Sautois. New features of the software Matcont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 14(2):147–175, 2008.
- [5] H. Engler, H. G. Kaper, T. J. Kaper y T. Vo. Dynamical systems analysis of the Maasch–Saltzman model for glacial cycles. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 359:1–20, 2017.
- [6] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 31(1):53–98, 1979.
- [7] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volumen 42 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1990. Edición revisada y corregida del original de 1983.
- [8] M. G. Hayes, T. J. Kaper, P. Szmolyan y M. Wechselberger. Geometric desingularization of degenerate singularities in the presence of fast rotation: A new proof of known results for slow passage through Hopf bifurcations. *Indagationes Mathematicae*, 27(5):1184–1203, 2016.
- [9] M. W Hirsch, C. Pugh y M. Shub. *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, volumen 583. Springer, 2006.
- [10] E. M. Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience: The geometry of excitability and bursting*. The MIT Press, 2007.

- 
- [11] C. Kuehn. *Multiple time scale dynamics*, volumen 191 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2015.
- [12] Y. A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volumen 112 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 3<sup>a</sup> edición, 2004.
- [13] A. Neishtadt. Persistence of stability loss for dynamical bifurcations. I. *Differential Equations*, 23(12):1385–1391, 1987.
- [14] A. Neishtadt. Persistence of stability loss for dynamical bifurcations. II. *Differential Equations*, 24(2):171–176, 1988.
- [15] A. Neishtadt. On stability loss delay for dynamical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series S*, 2(4):897–909, 2009.
- [16] K. H. M. Nyman y P. D. Ditlevsen. The middle pleistocene transition by frequency locking and slow ramping of internal period. *Climate Dynamics*, 53:3023–3038, 2019.
- [17] M. A. Shishkova. A discussion of a certain system of differential equations with a small parameter multiplying the highest derivatives. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 209:576–579, 1973.
- [18] J. Su. Delayed oscillation phenomena in the FitzHugh Nagumo equation. *Journal of Differential Equations*, 105(1):180–215, 1993.