



Universidad de Oviedo

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN FÍSICA

DEFECTOS Y TEXTURAS EN FÍSICA DE LA
MATERIA CONDENSADA

Autor: JULIO GÓMEZ ZAPICO

Supervisores: JAIME FERRER RODRÍGUEZ

JOSÉ ÁNGEL RODRÍGUEZ MÉNDEZ

13 de julio de 2023

Índice

1. INTRODUCCIÓN	5
1.1. Teoría de Landau	5
1.1.1. Transiciones de primer y segundo orden	6
1.1.2. Sistema ferromagnético: Hamiltoniano de Heisenberg	9
1.2. Materiales topológicos: protección topológica de las texturas	10
1.3. Primer ejemplo de textura: monopolo de Belavin-Polyakov	11
2. DEFECTOS Y TEXTURAS TOPOLÓGICOS	13
2.1. Introducción a la superfluidez	13
2.2. Superconductores y He^4 superfluido	15
2.3. Consideración general sobre las texturas topológicas	17
2.4. Defectos en cristales nemáticos	20
2.5. Texturas en He^3 -A superfluido	21
3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	25
3.1. Preliminares y conceptos básicos	25
3.2. Grupos de homología	31
3.3. Grupos de homotopía	49
4. CLASIFICACIÓN DE TEXTURAS Y DEFECTOS TOPOLÓGICOS	77
4.1. Defectos de línea en cristales nemáticos	77
4.2. Defectos puntuales en cristales nemáticos	78
4.3. Texturas de los cristales nemáticos en dimensiones superiores	79
4.4. Defectos de línea y vórtices no singulares en He^3 -A	80
4.5. Monopolo de Shankar en He^3 -A	81
4.6. Objetos extendidos del modelo clásico de Heisenberg en \mathbb{R}^2	83
5. CONCLUSIONES	85

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo del *siglo XX*, la topología cobró vital importancia en la explicación de la estructura de la materia condensada. La geometría diferencial, que describe propiedades en entornos *locales*, no es suficiente para clasificar sistemas *globalmente*. La topología general sí permite explicar propiedades *globales* de los sistemas en relación a sus simetrías. Nuestro objetivo será desarrollar la teoría topológica que permite describir los distintos sistemas de materia condensada en los que es posible definir un *parámetro de orden*, un objeto matemático útil para diferenciar distintas fases de la materia.

Este trabajo se fundamenta en la lectura y comprensión de los cuatro primeros capítulos del libro de MIKIO NAHAHARA ‘Geometría, topología y física’ [1], en el cual se describen herramientas matemáticas de la topología que permiten introducirse en los problemas físicos de las texturas y defectos topológicos en materiales como pueden ser los superfluidos o superconductores. El objetivo de esta tarea es desarrollar de manera precisa y eminentemente práctica los conceptos topológicos necesarios, especialmente el del grupo de homotopía, para poder exponer los problemas de defectos en materia condensada como los monopolos (defectos puntuales), vórtices (defectos de línea) y defectos de superficie. Dichos defectos pueden ser clasificados a través de los grupos de homotopía. Toda esta construcción parte de la Teoría de Landau que describe de manera general las transiciones de fase en sistemas físicos.

1.1. Teoría de Landau

La teoría de Landau se introdujo como intento de formular una teoría general de las transiciones de fase de *segundo orden* [2]. Utiliza el concepto de **parámetro de orden** Δ como principal variable del proceso de transición de fase que distingue una fase *ordenada* a baja temperatura ($\Delta \neq 0$) de una *desordenada* ($\Delta = 0$) a alta temperatura.

El parámetro de orden Δ puede ser un objeto matemático muy general, aunque usualmente pertenecerá a un espacio de escalares, vectores o matrices. En la figura 1 se representan algunos ejemplos de espacios de parámetro de orden para modelos importantes, como el espacio de las fases de la circunferencia $U(1)$, la esfera unidad S^2 o el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ sobre los que se discutirá a lo largo del estudio.

Desarrollaremos este apartado partiendo de los principios de Landau y explicando el ejemplo más simple de sistema ordenado en un sistema de física de la materia condensada: el ferromagnetismo.

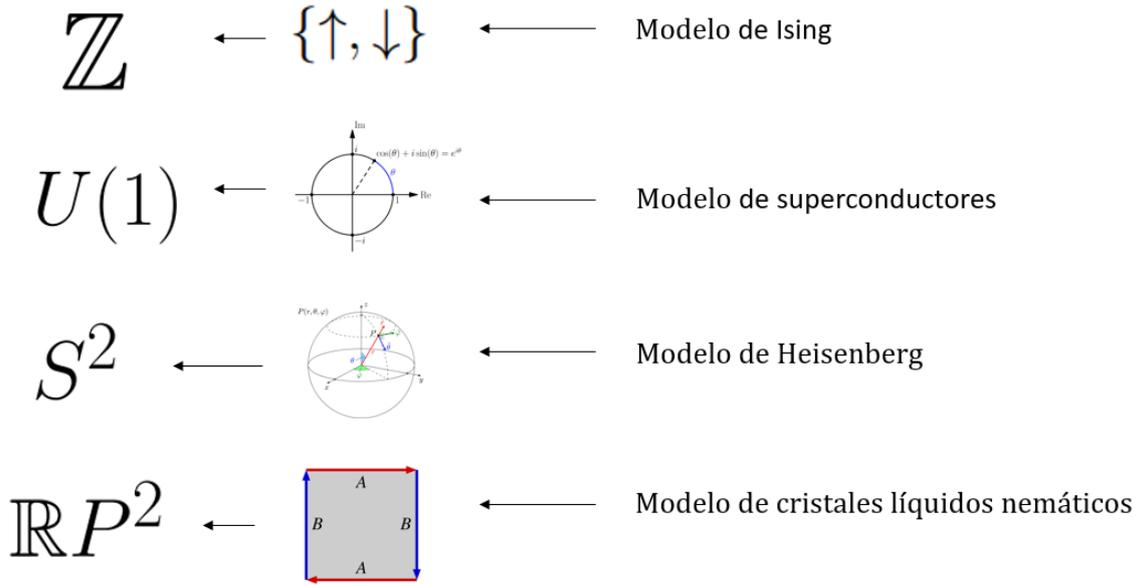


Figura 1: Ejemplos de espacios en los que se definen los parámetros de orden Δ de diferentes modelos.

1.1.1. Transiciones de primer y segundo orden

Landau propuso que la energía libre F de un sistema debía obedecer dos condiciones:

- Ser analítica en el parámetro de orden Δ y sus gradientes.
- Obedecer la simetría del Hamiltoniano.

Dadas esas dos condiciones, puede postularse, en el entorno de la temperatura crítica T_c , una expresión fenomenológica de la energía libre como expansión de Taylor respecto al parámetro de orden:

considérese un sistema que rompe alguna simetría bajo una cierta transición de fase caracterizada por el parámetro de orden $\Delta(T)$. Éste es una medida del orden antes y después de la transición de fase; el parámetro de orden se anula por encima de cierta temperatura crítica y no se anula por debajo de esa temperatura. En el sistema ferromagnético que describiremos posteriormente, el parámetro de orden es la magnetización neta \vec{M} , la cual se convierte espontáneamente en diferente de cero por debajo de una temperatura crítica T_c .

En muchos sistemas con ciertos tipos de simetrías, que satisfagan $F(\Delta) = F(-\Delta)$, la energía libre solamente será una función de potencias pares del parámetro de orden [3], de modo que la podemos expresar de la siguiente manera:

$$F(T, \Delta) - F_0 = a(T)\Delta^2 + \frac{b(T)}{2}\Delta^4 + \frac{c(T)}{6}\Delta^6 + \dots \quad (1)$$

Donde $F_0 = F(T_c, \Delta = 0)$. En el caso de las transiciones de *primer orden* se tiene que $a, c > 0$ y $b(T) < 0$ en el entorno de la temperatura crítica y podrá ocurrir una circunstancia como la que se refleja en la fig. 2(a) con un mínimo relativo de la energía libre. En estas transiciones lo que tendremos

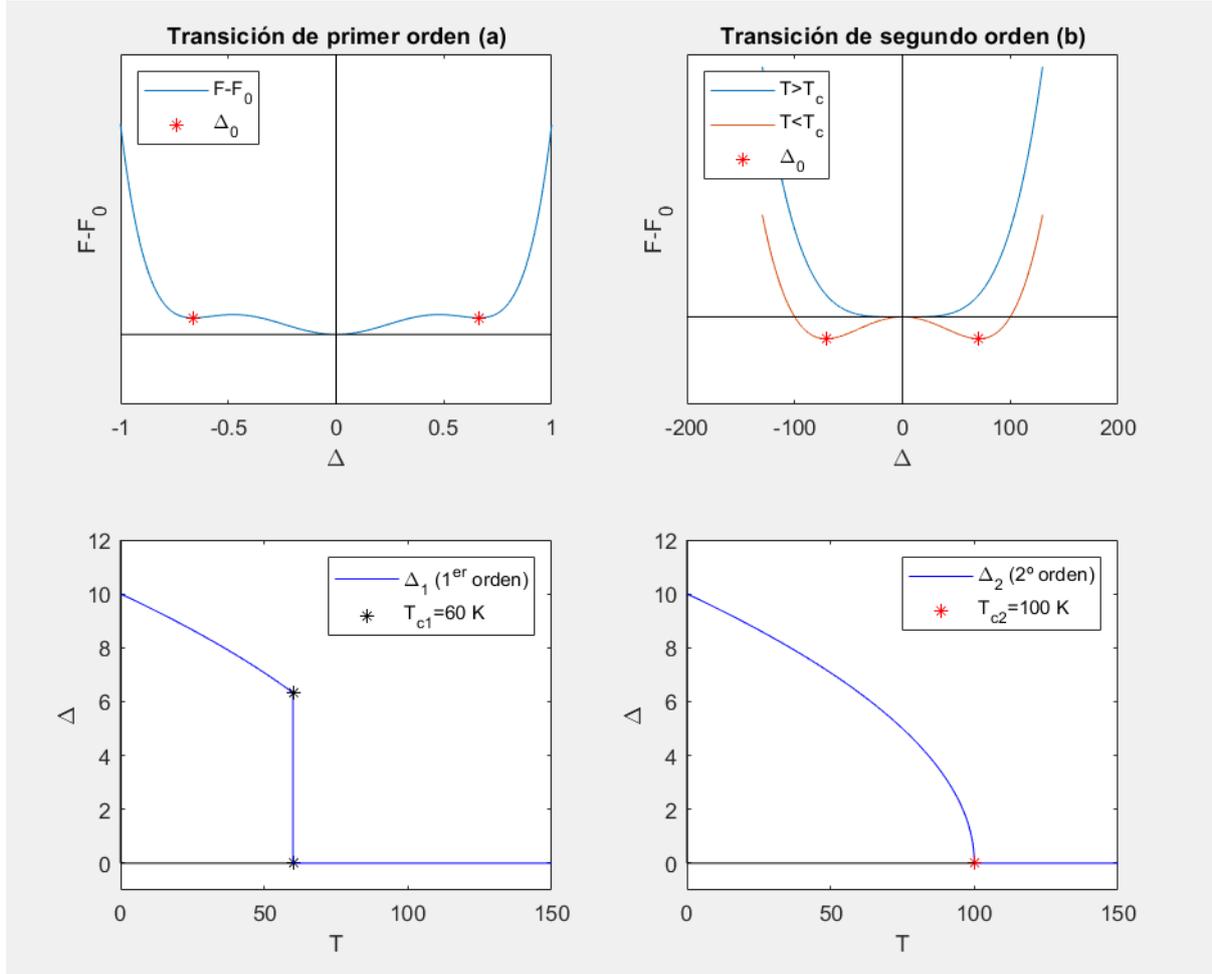


Figura 2: Esquema de la energía libre $F - F_0$ en función del parámetro de orden Δ y del parámetro de orden respecto a la temperatura para transiciones de primer y segundo orden.

será un cambio brusco en el parámetro de orden al llegar a la temperatura crítica en que pasará del mínimo absoluto en $\Delta = 0$ a dicho mínimo relativo Δ_0 . Este cambio repentino es lo que caracteriza las transiciones de *primer orden*.

A continuación, sólo se estudiará detenidamente el caso de las transiciones de *segundo orden*, en el que sólo se considerarán términos de la energía hasta el cuarto orden de aproximación, suponiendo que Δ es pequeño suficientemente cerca de T_c . Esta situación se corresponde con la gráfica de la figura 2(b).

Para un sistema termodinámicamente estable (el sistema no requiere un parámetro de orden infinito para minimizar la energía), el coeficiente de la potencia par más elevada debe ser positivo, esto es, $b(T) > 0$. Por simplicidad, se puede asumir que $b(T) = b_0$, una constante, en un entorno de la temperatura crítica. Además, dado que $a(T)$ cambia su signo al atravesar la temperatura crítica, se puede aproximar que $a(T) \approx a_0(T - T_c)$, de forma que $a > 0$ para la fase de alta temperatura, mientras que para la fase de baja temperatura $a < 0$. Con estas asunciones, minimizar la energía

libre requiere:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta} = 2a(T)\Delta + 2b(T)\Delta^3 = 0 \quad (2)$$

La solución para el parámetro de orden es que o bien $\Delta = 0$, o bien:

$$\Delta_0^2 = -a/b = -\frac{a_0}{b_0}(T - T_c) \quad (3)$$

Es claro que la solución existe para $T < T_c$, en cualquier otro caso $\Delta = 0$ es la única solución. De hecho, $\Delta = 0$ es la solución mínima para $T > T_c$, pero la solución Δ_0 minimiza la energía libre para $T < T_c$, y esto es una fase estable.

Finalmente, se puede establecer que el parámetro de orden sigue la siguiente relación por debajo de la temperatura crítica (véase Fig. 2(b)).

$$\Delta(T) = |T - T_c|^{1/2} \quad (4)$$

Por lo que podemos expresar la energía libre como función de la temperatura de la siguiente manera:

$$F - F_0 = \begin{cases} -\frac{a_0^2}{2b_0}(T - T_c)^2 & T < T_c \\ 0 & T > T_c \end{cases} \quad (5)$$

De esta forma, se observa cómo cuando la temperatura es menor que la temperatura crítica aparecen dos mínimos absolutos de la energía libre, de los cuales el sistema tiene que *elegir* uno, rompiendo la simetría original. Dado que la relación entre la temperatura y el parámetro de orden resulta ser una función continua, se concluye que se trata de una transición *suave* o de *segundo orden*.

Finalmente, en la figura 3 se representa la energía libre en el caso en el que la temperatura es inferior a la temperatura crítica cuando el parámetro de orden Δ es un número complejo, de modo, que la energía libre depende del módulo de ese número complejo $|\Delta|$. En dicho caso aparece una representación con simetría radial en el que existen infinitos puntos de equilibrio para un determinado valor de módulo $|\Delta|$. Puesto que el sistema tiene que encontrarse en un único punto de equilibrio se producirá una *ruptura espontánea de simetría*.

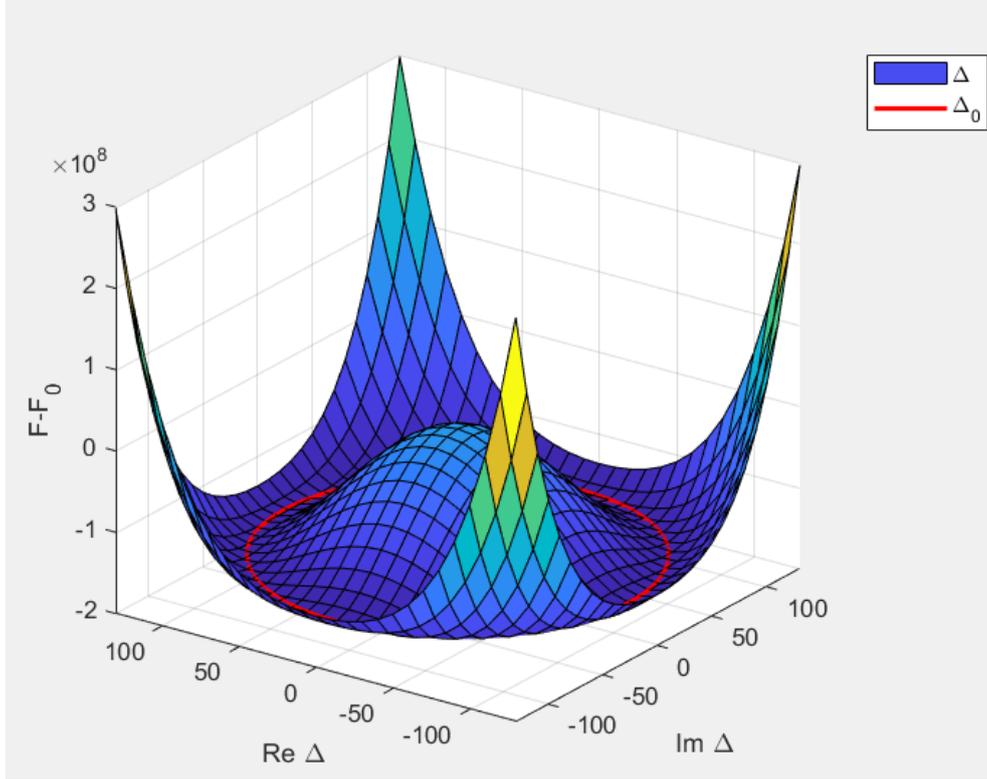


Figura 3: Esquema de la energía libre en función del parámetro de orden en el plano complejo.

1.1.2. Sistema ferromagnético: Hamiltoniano de Heisenberg

Un sistema ferromagnético se define a través de los valores de sus spines y de su interacción, según el Hamiltoniano de Heisenberg:

$$H = -J \sum_{(i,j)} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \vec{h} \cdot \sum_i \vec{S}_i \quad (6)$$

describe un sistema de N spines $\{\vec{S}_i\} \in \mathbb{R}^3$ que interactúan entre sí. Esa interacción hace que los vectores \vec{S}_i se alineen entre sí, ya que el parámetro J que mide la intensidad de la interacción es positivo.

El sumatorio se realiza sobre todas las parejas de vecinos cercanos (i, j) y \vec{h} es el campo magnético externo uniforme.

La función de partición es $Z = \text{tr}(e^{-\beta H})$, donde $\beta = \kappa_B/T$ es inversamente proporcional a la temperatura absoluta. La energía libre $F = E - TS$ se define a través de la función de partición como $\exp(-\beta F) = Z$. Además, $E = \langle H \rangle$, donde $\langle \dots \rangle \equiv \text{tr}(\dots e^{-\beta H})/Z$.

Finalmente, la magnetización media por spin viene dada por

$$\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial F}{\partial \vec{h}} \quad (7)$$

Se va a considerar el límite $h \rightarrow 0$. Aunque H es invariante bajo el grupo de rotaciones de \mathbb{R}^3 , $SO(3)$, generado por las matrices ortogonales 3×3 , de todos los \vec{S}_i en ese límite, es bien conocido que \vec{M} no se anula para valores muy grandes de β y, por lo tanto, el sistema no tiene la simetría del grupo $SO(3)$. Nos encontramos ante una **ruptura espontánea de simetría**.

En este caso, se tiene que el sistema exhibe una magnetización espontánea y que la temperatura máxima, tal que $\vec{M} \neq 0$, se llama temperatura crítica T_c . El vector \vec{M} se denomina **parámetro de orden**. Dicho parámetro describe la transición de fase entre el estado ordenado ($\vec{M} \neq 0$) donde los spines apuntan, en término medio, hacia una dirección preferente, frente al estado desordenado en el que los spines están apuntando en direcciones aleatorias por lo que $\vec{M} = 0$. El sistema seguirá siendo simétrico bajo rotaciones $SO(2) = U(1)$ respecto al eje de magnetización \vec{M} . Algebraicamente, el grupo $SO(3)$ puede ser descrito tal que $SO(3) \equiv SO(2) \otimes S^2$. Al elegir un vector $\vec{M} \in S^2$ estaríamos eliminando la parte de simetría de S^2 y manteniendo la correspondiente a $SO(2)$.

¿Cuál es el mecanismo subyacente a la transición de fase? La clave resulta en la minimización de la energía libre $F = \langle H \rangle - TS$, siendo S la entropía. A baja temperatura, el término TS en F puede ser despreciable y el mínimo de F se obtiene minimizando $\langle H \rangle$, lo cual ocurre cuando todos los \vec{S}_i apuntan en la misma dirección. Por otra parte, a altas temperaturas, el término de entropía domina F y el mínimo de F se obtiene maximizando S , esto es, cuando las direcciones de \vec{S}_i son completamente aleatorias.

1.2. Materiales topológicos: protección topológica de las texturas

Los estados de la materia pueden ser clasificados en diferentes fases que, a menudo, pueden ser distinguidas por sus parámetros de orden *localmente*.

Sin embargo, aunque el parámetro de orden pueda coincidir *localmente*, pueden existir grandes diferencias a nivel *global*. A este respecto, juegan un papel fundamental las *condiciones de contorno*, que definen las características *globales*.

Observad, por ejemplo, una cinta cilíndrica y una banda de Möbius como las que se representan en la figura 4. Si sobre ambas superficies se definieran vectores binarios del tipo $\{\uparrow, \downarrow\}$, el comportamiento de dichos vectores en un entorno *local* de los puntos de ambas superficies sería completamente idéntico. Sin embargo, es claro que los campos son *globalmente* muy diferentes ya que en el caso de la banda de Möbius se produce un cambio de sentido en la unión de los extremos de la cinta mientras que en el cilindro se mantiene siempre constante.

La identificación de las diferentes fases de la materia, generalmente, requiere introducir ciertas simetrías. Por ejemplo, en el modelo de *Ising* de spines ferromagnéticos que se define de modo que los spines sólo toman los valores $\{\uparrow, \downarrow\}$, es decir, estados binarios de sí o no que son, simplemente, distinguibles por la ausencia o presencia de la simetría \mathbb{Z}_2 de inversión del spín. En ausencia de dicha simetría, las dos fases podrían estar conectadas sin una transición de fases y esto no permitiría

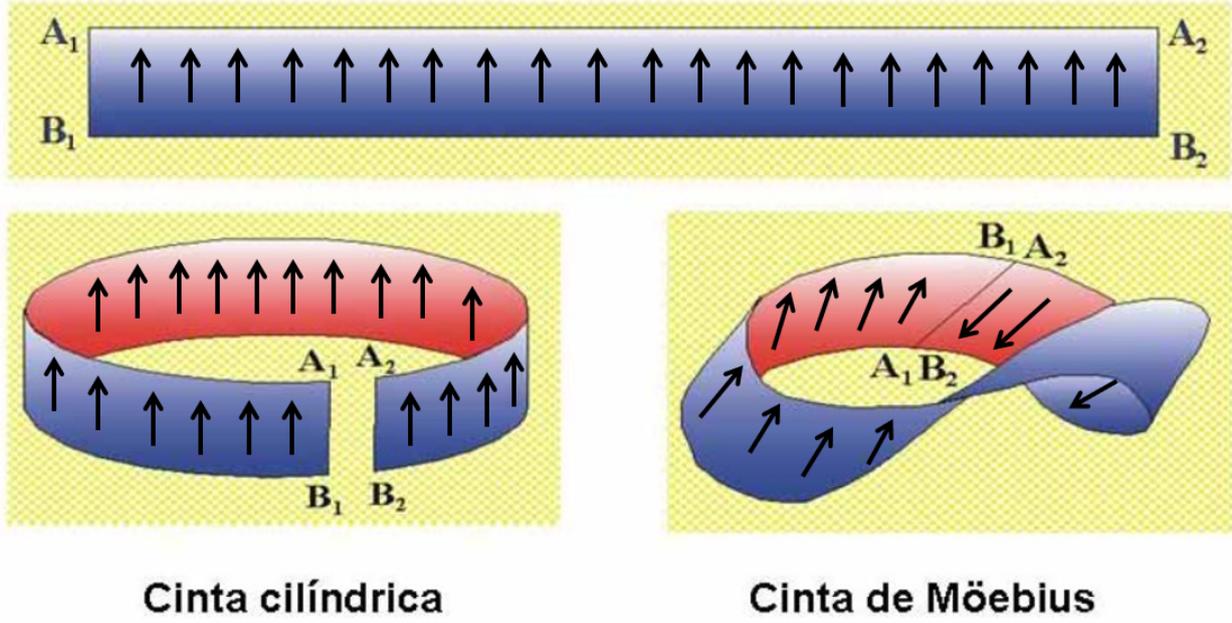


Figura 4: Esquema de una banda cilíndrica y una banda de Möbius. Aunque **localmente** el campo de vectores se defina siempre hace arriba, las propiedades topológicas de la banda de Möbius hace que **globalmente** se tengan objetos distintos.

distinguir las. Este cambio de fase se correspondería con una ruptura espontánea de la simetría \mathbb{Z}_2 . Por tanto, es natural que la simetría \mathbb{Z}_2 es necesaria en este ejemplo para *proteger* la fase ordenada como una fase bien definida y distinta de la fase desordenada.

Incluso si no hay simetría que pudiera distinguir las dos fases, ambas pueden estar separadas por una transición como en el caso de las fases líquido/gas. En dicho caso existe una transición abrupta (cambia el volumen), en ausencia de rupturas de simetría, son las transiciones de *primer orden*. [7]

1.3. Primer ejemplo de textura: monopolo de Belavin-Polyakov

Vamos a partir del caso de un sistema físico de N spines de Heisenberg ferromagnéticos descrito por el Hamiltoniano de Heisenberg de la ec. (6). Se tiene que cuando el sistema se mantiene a una temperatura uniforme, el módulo de la magnetización $|\vec{M}|$ es independiente de la posición, por lo que \vec{M} se especifica solamente por su dirección (parámetro de orden en S^2). En el estado fundamental, \vec{M} se espera que sea independiente de la posición. A continuación, se introducen coordenadas esféricas (θ, ϕ) para determinar la posición de \vec{M} . Existe una biyección entre \vec{M} y cada punto de la esfera S^2 . Supóngase que \vec{M} varía como función de la posición $\vec{M} = \vec{M}(x)$. Para cada punto del espacio x , se le puede asignar a través de la aplicación \vec{M} un punto de la esfera $(\theta(x), \phi(x)) \in S^2$.

Además del estado fundamental y las pequeñas oscilaciones del mismo (ondas de spin), el sistema puede exhibir diferentes configuraciones, las cuales no pueden obtenerse como pequeñas perturbacio-

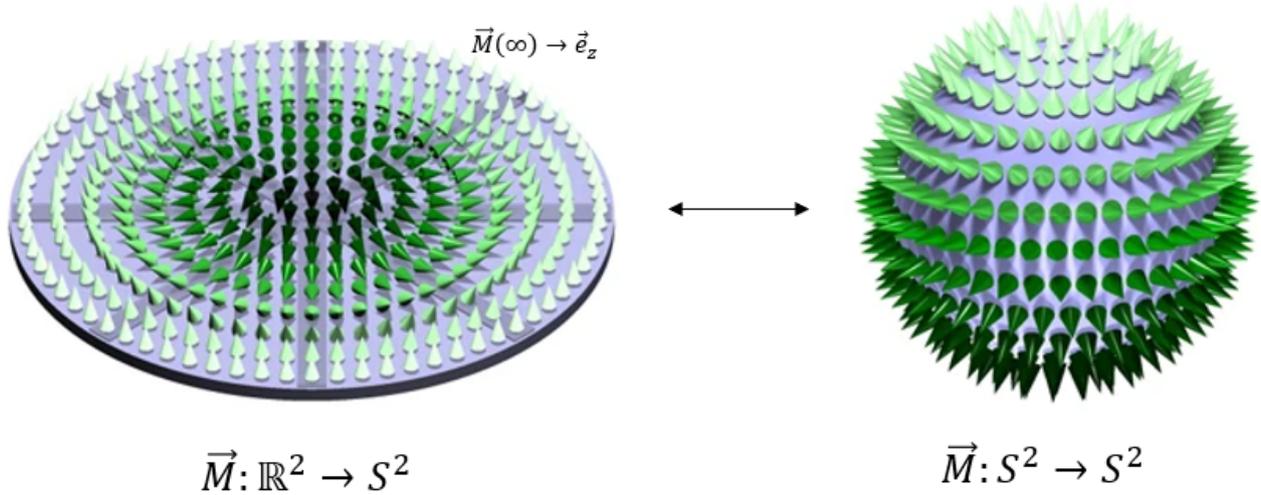


Figura 5: Campo de vectores del monopolo de Belavin-Polyakov donde \vec{M} define una aplicación $\vec{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ en la figura de la izquierda y una aplicación $\vec{M} : S^2 \rightarrow S^2$ en el espacio compactificado a la derecha. Fuente: [5].

nes del estado fundamental. Los tipos de excitaciones que son posibles dependen de la dimensión del espacio y del parámetro de orden.

El primer ejemplo que se va a introducir es el **monopolo de Belavin-Polyakov** el cual aparece en un espacio de dos dimensiones para el caso de Hamiltoniano ferromagnético de Heisenberg. En dicho caso, \vec{M} se aproxima a un vector constante en el infinito, de modo que la energía no diverge ($\vec{M}(\infty) \rightarrow \vec{e}_z$). Esta *condición de contorno* garantiza la estabilidad de la excitación, de modo que es imposible deformar esta configuración a otra uniforme con \vec{M} fijado en el infinito. Estos tipos de excitaciones, cuya estabilidad depende de argumentos topológicos, son las llamadas **configuraciones topológicas**. Dicho de otra manera, existen determinadas configuraciones de equilibrio que resultan más difíciles de romper debido a las propiedades topológicas de las mismas. Este fenómeno también se conoce como *protección topológica* y es el objetivo a lograr en diversas áreas como el de los superfluidos y superconductores. Nótese que en el caso anterior y siempre que las condiciones de contorno en el infinito sean las mismas, $\vec{M}(x)$ define una aplicación entre espacios topológicos $\vec{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$, que también puede verse como una aplicación $\vec{M} : S^2 \rightarrow S^2$ debido a que puede identificarse $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ con S^2 . Nos encontraríamos ante la *compactificación* de \mathbb{R}^2 , un concepto que se explicará con más detalle en la siguiente sección. En la figura 5 se representa el campo de vectores del monopolo Belavin-Polyakov, tanto desde el punto de vista del plano \mathbb{R}^2 como la esfera compactificada S^2 , donde ambos pueden ser identificados.

Este tipo de aplicaciones, como $\vec{M} : S^2 \rightarrow S^2$, se denominan **texturas** y pueden ser clasificadas mediante los **grupos de homotopía** asociados al espacio imagen. Es a partir de aquí cuando debemos comenzar a introducir los conceptos matemáticos topológicos que serán imprescindibles para el entendimiento y clasificación de los parámetros de orden de diversos sistemas físicos.

2. DEFECTOS Y TEXTURAS TOPOLÓGICOS

En esta sección, se va a profundizar en la definición y aclaración del concepto de *texturas* y *defectos* topológicos sobre la base de ejemplos como los superfluidos o los cristales líquidos nemáticos. Se analiza cómo, a partir de la estructura cuántica atómica o molecular, surgen parámetros de orden con determinadas simetrías. Estos parámetros de orden definen, de manera natural, *texturas*, que no son más que funciones que a cada punto de un medio le asignan el valor del parámetro de orden. Los *defectos* son las singularidades que pueden aparecer en dichas *texturas*, es decir, regiones en las que la textura no está bien definida. La clasificación de dichos *defectos* será vital para entender las distintas formas que podrán encontrarse. Los grupos de *homotopía* serán la herramienta para dicha clasificación.

2.1. Introducción a la superfluididad

La superfluididad de un medio líquido ocurre cuando en un fluido existe una ausencia total de viscosidad (diferente de una sustancia muy fluida, con viscosidad próxima a cero, pero distinta de cero), de modo que en un circuito cerrado fluiría interminablemente sin fricción. Existen diferentes fases de los dos isótopos estables de Helio (Helio-4 y Helio-3) que no se congelan a las temperaturas a las que es posible este estado de superfluididad. Los dos isótopos, que son líquidos cuánticos, se comportan de modos muy diferentes, lo cual sirve para examinar los efectos de las dos estadísticas cuánticas, la estadística de Fermi-Dirac, a la que obedecen las partículas de espín semi-entero, y la estadística de Bose-Einstein, que siguen las partículas de espín entero.

En el caso del He^4 como hay dos protones, cada uno con espín $1/2$, y dos neutrones, cada uno con espín $1/2$, el espín total del He^4 es la suma de los espines de todos sus componentes, lo que resulta en un espín total entero de $S = 0, 1, 2$. Nos encontramos ante el producto directo de cuatro espines $1/2$, que algebraicamente se representa como:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \oplus 2 \quad (8)$$

En el caso del He^4 superfluido la configuración que toman los espines es tal que $S = 0$ debido a que es la que tiene una menor energía. En la fig. 7 se representa el diagrama de fases del He^4 . Se observa como en el caso del Helio 4 la temperatura necesaria para alcanzar la fase de superfluididad ($He - II$) es del orden de $1 K$.

En el caso del He^3 se tendrá un comportamiento como partícula fermiónica de espín $1/2$ dado que tenemos una suma de un número impar de términos semienteros. Algebraicamente se representa

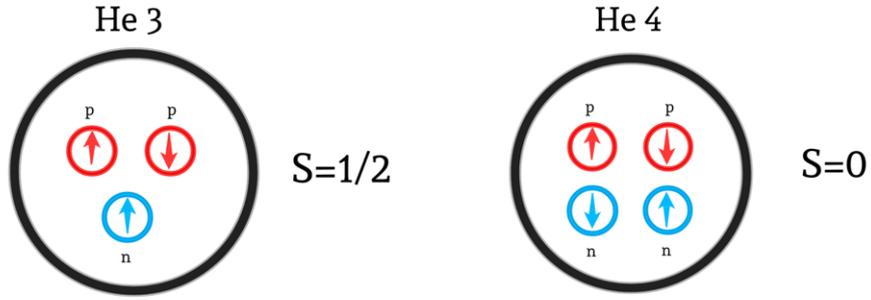


Figura 6: Diagrama de composición de los núcleos de He^3 y He^4 .

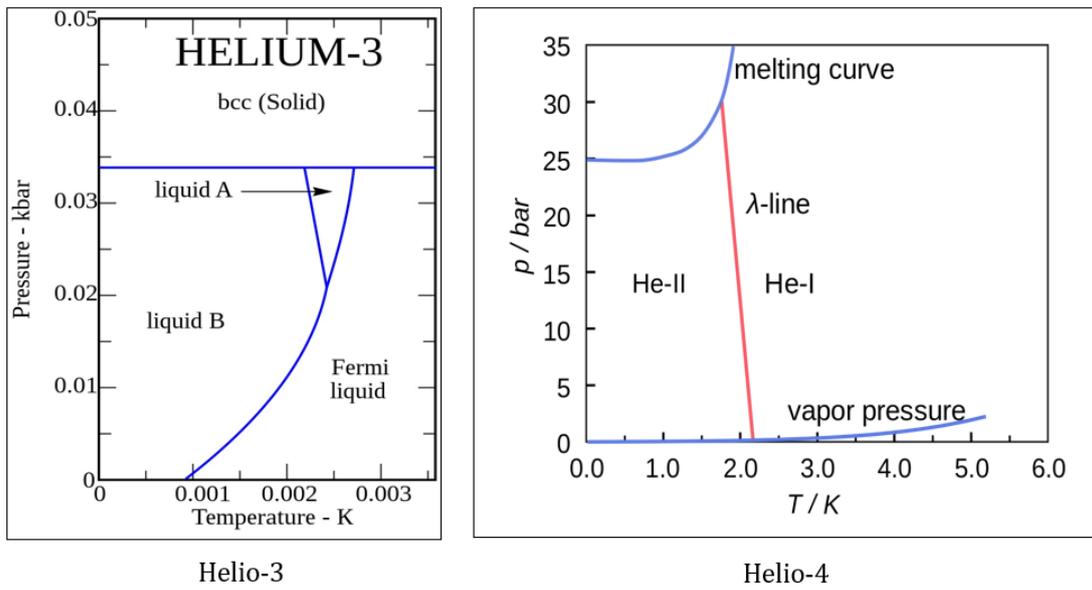


Figura 7: Diagrama de fases del He^3 y del He^4 .

como:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \quad (9)$$

En el He^3 superfluido el spín total que tomará será el de $S = 1/2$. En la figura 7, se muestra el diagrama de fase del He^3 . Se observa como en el caso del Helio-3 la temperatura necesaria para fase superfluida (liquid B) es del orden de 1 mK , bastante menor al caso del He^4 .

El descubrimiento experimental de la superfluidez en He^3 data de 1972 a la temperatura de 2.61 mK que venía precedido de predicciones de temperatura crítica T_c para esta transición menores a 0.1 K la cual era inferior al límite de temperatura experimental.

En la figura 6, se esquematiza la composición y configuración de spín de ambos átomos en fases superfluidas.

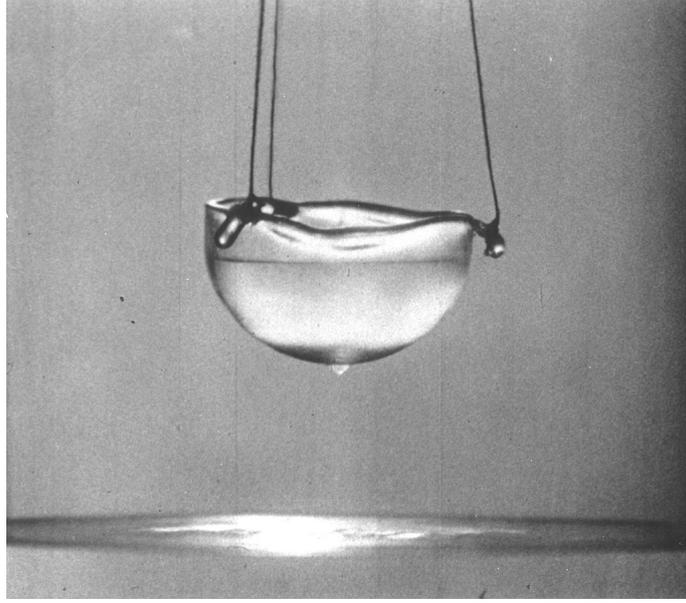


Figura 8: Helio líquido en su fase superfluida. Una fina capa de helio sube por la pared interior del recipiente y baja por la pared exterior hasta formar una gota que cae al exterior. Este proceso ocurre indefinidamente hasta que el recipiente se vacía por completo. Fuente: [8].

2.2. Superconductores y He^4 superfluido

En la teoría BCS de superconductores, el parámetro de orden se corresponde con el siguiente valor esperado (Tsuneto 1982) [9], donde $\Psi_{\alpha\beta}$ es una matriz 2×2 :

$$\Psi_{\alpha\beta} \equiv \langle \psi_\alpha(x) \psi_\beta(x) \rangle \quad (10)$$

donde $\psi_\alpha(x)$ es el operador de campo del electrón de espín $\alpha = (+1/2, -1/2)$. En el caso de la existencia de pares de electrones lo que tenemos es que un par de fermiones se comportará como un bosón. Para dichos bosones ocurrirá la condensación de Bose-Einstein. Es importante darse cuenta de que esta expresión no es una representación irreducible del álgebra de spin. Las funciones de onda de los electrones pueden descomponerse en la parte espacial y de espín de la siguiente forma:

$$\psi_\alpha(\vec{x}) \psi_\beta(\vec{x}) = \Phi_{\alpha\beta}(\vec{x}) \otimes \chi_{12} \quad (11)$$

¿Qué formas pueden tomar dichas funciones? Dado que el operador $\Psi_{\alpha\beta}$ es un operador impar, se tiene que o bien $\Phi_{\alpha\beta}$ es par y χ_{12} es impar o viceversa. Si $\Phi(x_1, x_2) = C$ es una función par, entonces la parte de espín deberá ser impar y tomar la expresión antisimétrica:

$$\chi_{12} = (\chi_{+1/2}^1 \chi_{-1/2}^2 - \chi_{-1/2}^1 \chi_{+1/2}^2) / \sqrt{2} \quad S = 0 \quad (12)$$

Nos encontramos ante el caso del *pairing spin-singlete* formada por el par de espín total igual a 0.

En el caso de tener Φ simetría impar estará formada por armónicos esféricos Y_{lm} y la parte de espín χ_{12} tendrá simetría par, por lo se darán los tres casos posibles con $S = 1$ y $s_z = -1, 0, 1$:

$$\chi_{12} = \begin{cases} \chi_{+1/2}^1 \chi_{+1/2}^2 & s_z = 1 \\ (\chi_{+1/2}^1 \chi_{-1/2}^2 + \chi_{-1/2}^1 \chi_{+1/2}^2) / \sqrt{2} & s_z = 0 \\ \chi_{-1/2}^1 \chi_{-1/2}^2 & s_z = -1 \end{cases} \quad (13)$$

En este caso se tiene el *pairing spin-triplete* formada por los pares de espín total igual a $S = 1$. Para poder distinguir los dos estados, se puede examinar el comportamiento de $\Psi_{\alpha\beta}$ bajo una rotación de spin. Considerando el operador de rotación del espín alrededor de un eje \vec{n} y un ángulo θ , cuya representación matricial es: $R = I_2 + i\frac{\theta}{2}n^\mu\sigma_\mu$, donde σ_μ son las matrices de **Pauli**. Dado que ψ_α se transforma por una rotación de la siguiente manera $\psi_\alpha \rightarrow R_\alpha^\beta\psi_\beta$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta} &\rightarrow R_\alpha^{\alpha'}\Psi_{\alpha'\beta}R_\beta^{\beta'} = (R\Psi R^t)_{\alpha\beta} = \\ &= [\Psi + i\frac{\delta}{2}\vec{n}(\vec{\sigma}\Psi\sigma_2 - \Psi\sigma_2\vec{\sigma})] \end{aligned}$$

donde se observa que $\sigma_\mu^t = -\sigma_2\sigma_\mu\sigma_2$ por las propiedades de las matrices de Pauli. Supongamos ahora que $\Psi_{\alpha\beta} \propto i(\sigma_2)_{\alpha\beta}$. En ese caso se tendría que Ψ es invariante bajo esta rotación, en cuyo caso representaría el *pairing spin-singlete*. En este caso se escribirá como:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Delta(\vec{x})(i\sigma_2)_{\alpha\beta} = \Delta_0(\vec{x})e^{i\phi(\vec{x})}(i\sigma_2)_{\alpha\beta} \quad (14)$$

Sin embargo, si tomamos un vector general en el espacio de espín Δ^μ se tendrá que:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Delta^\mu(\vec{x})i(\sigma_\mu\sigma_2)_{\alpha\beta} \quad (15)$$

$$\Psi_{\alpha\beta} \rightarrow [\Delta^\mu + \delta\epsilon^{\mu\nu\lambda}n_\nu\Delta_\lambda](i\sigma_\mu\sigma_2)_{\alpha\beta} \quad (16)$$

En este caso la expresión final representa un *pairing spin-triplete*.

El parámetro de orden de un superconductor convencional responde a la forma de la ecuación (14) y será al que restringiremos nuestro análisis por el momento. En el caso de un superfluido como el átomo de He^4 también se tiene una situación análoga, al ser un bosón de espín $S = 0$. En (14), $\Delta(\vec{x})$ tomará la misma forma que $\Psi(\vec{x})$ como superfluido y la energía libre viene dada de nuevo por la expresión de Landau $F_0 = \frac{\alpha}{2!}|\Psi(x)|^2 + \frac{\beta}{4!}|\Psi(x)|^4$. Esta semejanza se atribuye al **Par de Cooper** que forman los electrones.

En el estado superfluido, un número macroscópico de átomos de He^4 ocupan el estado fundamental (Condensado de Bose-Einstein), el cual se comporta como una molécula gigante debido a la coherencia cuántica. En este estado, crear excitaciones elementales requiere una cantidad finita de energía

y la fluctuación no puede decaer a menos que esa energía crítica sea suministrada. Como el electrón es un fermión, no habrá, en primera vista, condensación de Bose-Einstein. La observación clave es el par de Cooper. Debido al intercambio de fonones, una pareja de electrones puede sentir una fuerza de atracción que apenas supere la repulsión de Coulomb. Esta diminuta atracción hace posible para los electrones formar un par (en el espacio de momentos) que obedezca la estadística de Bose. Los pares entonces se condensan en el estado superfluido de pares de Cooper eléctricos de carga $2e$. Los superconductores pueden ser divididos en dos tipos de acuerdo a su comportamiento al aplicar campos magnéticos. Los superconductores de tipo-I forman un estado intermedio en el cual las regiones normales y de superconducción coexisten en presencia de fuertes campos magnéticos. Los superconductores de tipo-II forman una red de vórtices (**Red de Abrikosov**) donde se confinan los campos magnéticos dentro de los núcleos de los vórtices, mientras que las otras regiones permanecen en el estado de superconducción. Una red de vórtices similar ha sido observada en He^4 superfluido en rotación en un cilindro.

2.3. Consideración general sobre las texturas topológicas

Como se ha visto en la sección previa, cuando un sistema de materia condensada tiene una transición de fase, la simetría del sistema se reduce y esta reducción pueda ser descrita por el parámetro de orden. Se va a considerar un medio tridimensional de un superconductor. El parámetro de orden toma la forma $\Psi(\vec{x}) = \Delta_0 e^{i\phi_0}$. Se va a considerar un sistema homogéneo con condiciones externas uniformes (presión, temperatura, etc.). La amplitud Δ_0 es únicamente determinado por la minimización de la condensación de energía libre. Observar que ϕ_0 puede tomar cualquier valor por lo que Ψ puede tomar cualquier valor en el círculo unidad $S^1 \cong U(1)$ determinada por la fase $e^{i\phi}$. De esta manera, un sistema uniforme toma su valor en una cierta región M llamada **espacio del parámetro de orden**. Para un superconductor $M = U(1)$.

En el sistema de espín de Heisenberg se tiene que $M = S^2$. Un cristal nemático tendrá $M = \mathbb{R}P^2$, el denominado **plano proyectivo**, espacio que se estudiará en profundidad en la parte de fundamentos matemáticos, así como para el superfluido $He^3 - A$ que tendrá un espacio $M = S^2 \times SO(3)$.

Si el sistema es un estado inhomogéneo, el gradiente de energía libre no es despreciable y Ψ quizás no esté en M . Si el tamaño característico de la variación del parámetro de orden es mucho mayor que la longitud de coherencia, sin embargo, quizás puede asumirse que el parámetro de orden toma su valor en M , donde el valor es una función de la posición en esta ocasión. Si nos encontramos en esta caso, pueden existir puntos, líneas o superficies en el medio en los cuales el parámetro orden no esté definido de manera única. Estos conjuntos son los llamados **defectos**. Se tienen **defectos puntuales (monopolos)**, **defectos de línea (vórtices)** y **defectos de superficie (barreras de dominios)** de acuerdo con su dimensión. En la figura 9, se representa esquemáticamente un ejemplo de dichos tipos de defectos. Estos defectos son clasificados por los grupos de **homotopía**.

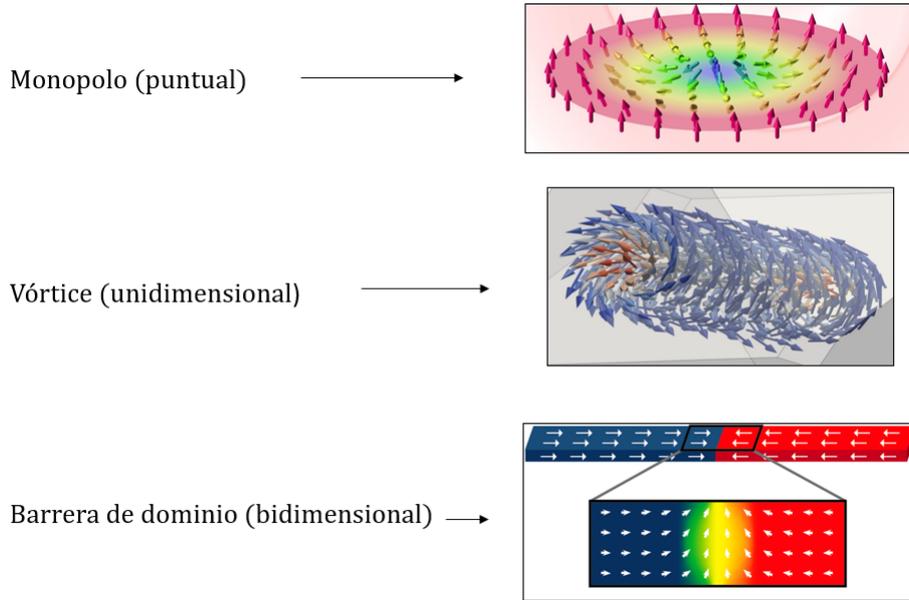


Figura 9: Representación esquemática de un ejemplo de cada tipo de defecto: monopolo, vórtice y barrera de dominio.

De manera formal, sea X un espacio el cual es rellenado por el medio que se está considerando. El parámetro de orden es un campo clásico $\Psi(x)$, el cual es entendido como una *aplicación* $\Psi : X \rightarrow M$. Supongamos que existe un defecto en ese medio. Para concretar, vamos a considerar un defecto de línea en un medio tridimensional de un superconductor. Sea un círculo S^1 que rodea el defecto de línea. Si cada parte de S^1 está lo suficientemente lejos del defecto de línea, mucho más de la longitud de coherencia ξ , tenemos que asumir que el parámetro de orden dentro de S^1 toma valores en el espacio de parámetro de orden $M = U(1)$ (Véase Fig. 10). Aquí es donde aparecerá el *grupo fundamental* o *primer grupo de homotopía* a la hora de estudiar el problema; se trata de entender los *lazos* en el espacio topológico $U(1)$. La aplicación $S^1 \rightarrow U(1)$ es clasificada por las clases de homotopía.

Tómese un punto $r_0 \in S^1$ y se supone que la imagen de r_0 es un punto $x_0 \in M$. Posteriormente se verá que el *grupo fundamental* de S^1 en cualquier punto x_0 será \mathbb{Z} , es decir, $\pi_1(U(1), x_0) = \mathbb{Z}$. Se ve como de esta manera se puede asignar un número entero al defecto de línea. Este entero es el **número de vueltas** que da la fase de Ψ , es decir, proporciona el número de veces que la imagen de S^1 rodea al espacio $U(1)$. Si dos defectos de línea tienen el mismo número de vueltas, ambos pueden ser deformados de manera continua para llegar al otro y viceversa. Si los defectos de línea A y B se fusionan, el número del defecto de línea será el de la clase de homotopía del producto de las clases de homotopía a las que pertenecían A y B previamente. Dado que la operación de grupo en \mathbb{Z} es la suma, el nuevo número de vueltas será la suma de los anteriores números de vueltas.

Una distribución uniforme de los parámetros de orden corresponde a la aplicación constante $\Psi(x) = x_0 \in M$, la cual pertenece al elemento neutro $0 \in \mathbb{Z}$. Si dos defectos de línea con números de

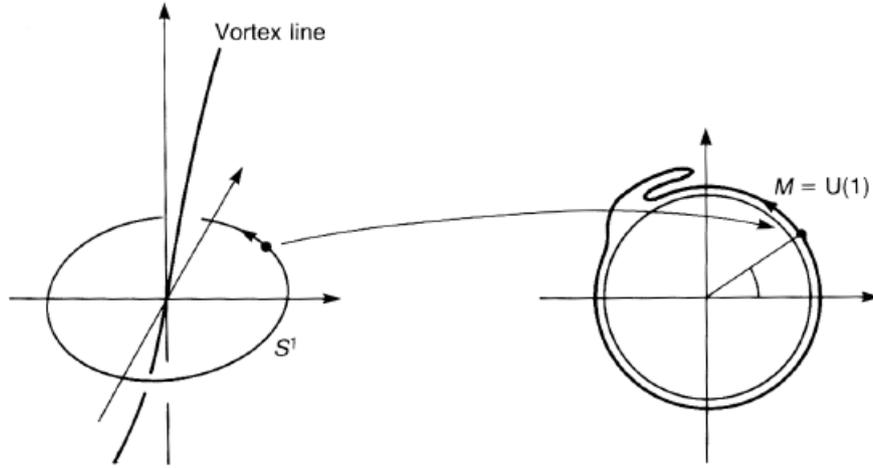


Figura 10: Un círculo S^1 rodeando un defecto de línea (vórtice) que es mapeado al espacio $U(1) = S^1$ de las fases. Esta aplicación se clasifica por el grupo fundamental $\pi_1(U(1))$.

vueltas opuestas se fusionan, el nuevo defecto de línea podrá ser deformado de manera continua a una configuración sin defectos.

En otro contexto aparecerán los grupos de homotopía de orden superior. Se considera la dimensión del defecto y una n -esfera S^n que lo rodea. Por ejemplo, considerar un defecto puntual en un medio tridimensional. Este punto puede ser envuelto por S^2 y el defecto se clasificará mediante el grupo de homotopía de orden **2** que se denotará $\pi_2(M, x_0)$.

Tómese, por ejemplo, un espacio tridimensional del modelo ferromagnético de Ising [4] en el que los spines toman el valor $S = +1/2$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ si $x > 0$ y $S = -1/2$ si $x < 0$, en este caso se tiene que $M = \{+1/2\} \cup \{-1/2\}$ y aparece una barrera de dominio, el plano XY ($x = 0$), en el cual el parámetro de orden no está definido.

En general, un defecto m -dimensional se clasifica por el grupo de homotopía $\pi_n(M, x_0)$ donde n indica el orden del grupo de homotopía. El orden del grupo de homotopía que clasificará los distintos tipos de defectos dependerán de la dimensión d del medio y de la dimensión del defecto m , dada por la relación:

$$n = d - m - 1 \tag{17}$$

Por ejemplo, en el caso de la barrera de dominio del modelo de Ising, $d = 3$ y $m = 2$ por lo que el grupo de homotopía tendrá orden $n = 0$.

Con dicha relación podemos clasificar los defectos en los distintos medios:

$$\text{Defectos en un medio tridimensional } (d = 3) \begin{cases} \text{Puntuales (monopolos): } m = 0 \longrightarrow n = 2 \longrightarrow \pi_2(M) \\ \text{De línea (vórtices): } m = 1 \longrightarrow n = 1 \longrightarrow \pi_1(M) \\ \text{Barreras de dominio: } m = 2 \longrightarrow n = 0 \longrightarrow \pi_0(M) \end{cases}$$

Por tanto, se observa cómo el estudio de los grupos $\pi_2(M)$, $\pi_1(M)$ y $\pi_0(M)$ será necesario para la

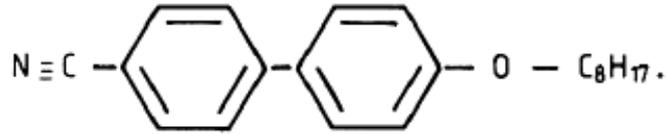


Figura 11: Molécula de cristal líquido nemático.

clasificación de los diferentes tipos de defectos en medios tridimensionales.

También podrán aparecer grupos de orden superior en el caso en el que el espacio sobre el que definamos la textura tenga dimensión superior a 3. Esto puede ocurrir cuando la simetrías de un sistema aparecen en un espacio de dimensión superior al del medio y se denominarán *objetos extendidos*. En general, dado un medio de dimensión d existirán d tipos de defectos (no extendidos).

2.4. Defectos en cristales nemáticos

Ciertos cristales orgánicos muestran propiedades ópticas muy interesantes cuando se muestran en sus fases fluidas. Estos son los llamados cristales líquidos y son caracterizados por la anisotropía óptica. En este trabajo se estudiará el caso de los llamados cristales líquidos nemáticos. Los nemáticos tienen una fluidez similar a la de los líquidos comunes (isotrópicos), pero pueden ser fácilmente alineados por un campo eléctrico o magnético externo. Los cristales líquidos nemáticos alineados tienen las propiedades ópticas de los cristales monoaxiales y esto los hace muy útiles en pantallas de cristal líquido (LCD).[10]

Un ejemplo de cristal líquido nemático es el *octyloxy-cyanobiphenyl* cuya estructura molecular es la que se muestra en la figura 11. La molécula de un cristal nemático se asemeja a una barra y el parámetro de orden, llamado **director**, se da como la dirección media de dicha barra. Incluso aunque la molécula por sí misma tenga cabeza y cola, el director posee la simetría de *inversión*, ya que no se puede distinguir la dirección $n = \leftarrow$ de la opuesta $-n = \rightarrow$. Resulta tentador asignar un punto de S^2 al director, sin embargo, esta relación falla en un aspecto. Dos puntos antipodales, es decir, en las antípodas de la esfera, dados por $n = (\theta, \phi)$ y $-n = (\pi - \theta, \pi + \phi)$, en coordenadas esféricas, representarán el mismo estado. Este problema nos conduce inevitablemente a que el parámetro de orden no puede estar en S^2 sino que habrá que buscar un espacio en el que los puntos antipodales sean equivalentes. Aquí es donde aparece el **plano proyectivo** $\mathbb{R}P^2$ como espacio del parámetro de orden. El campo director (parámetro de orden para este ejemplo) depende en general de la posición \vec{r} . Se puede entonces definir una aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Esta aplicación es una **textura**. La configuración real del parámetro de orden en \mathbb{R}^3 también se denomina **textura**.

En los fundamentos matemáticos se estudiarán con detalle las propiedades generales del plano proyec-

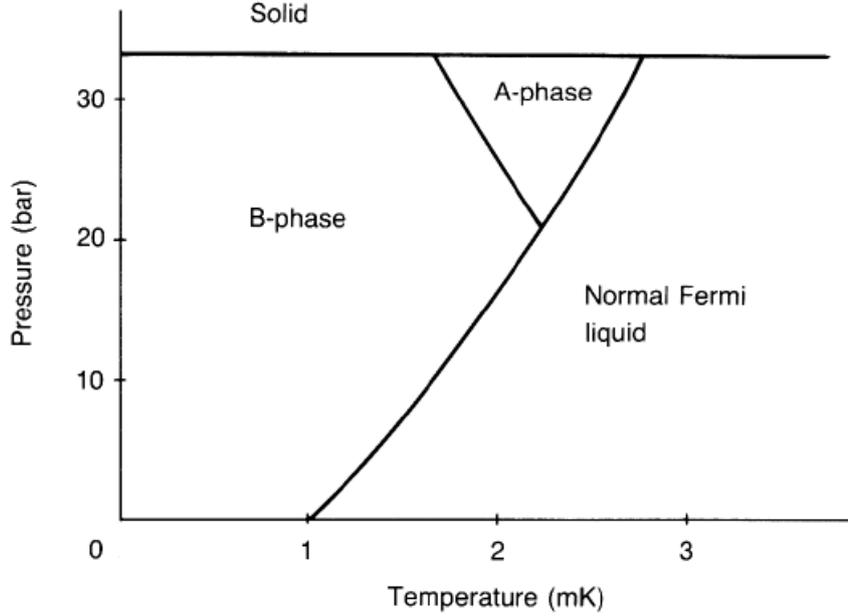


Figura 12: Digrama de fases de He^3 superfluido.

tivo y de los grupos de homotopía. Con los grupos de homotopía de primer orden del plano proyectivo se podrán clasificar los *defectos de línea* ($m = 1, n = 1$) en los cristales nemáticos. Con los grupos de homotopía de orden 2 se podrán clasificar los *defectos puntuales* ($m = 0, n = 2$) en dichos cristales. Finalmente, utilizando el tercer grupo de homotopía se descubrirá una textura sin singularidades la cual es imposible deformar hasta una configuración uniforme. Todas estas cuestiones se abordarán una vez se hallan desarrollado las herramientas topológicas necesarias para poder abordar dichos problemas.

2.5. Texturas en He^3 -A superfluido

El último y más interesante ejemplo que se estudiará será el del He^3 -A superfluido.

En la figura 12, se muestra el diagrama de fase del He^3 -A superfluido. Por resonancia nuclear magnética y otras observaciones, resulta que el superfluido está en el estado **spin-triplete**, onda-p. En lugar de utilizar operadores de campo como en la ecuación 15, se define el parámetro de orden en términos de los operadores creación y aniquilación. La forma más general para el parámetro de orden del triplete superfluido, donde $c_{\alpha,k}$ equivale a $\psi_{\alpha}(\vec{x})$ para cuando se trabaja en el espacio de momentos, es la siguiente:

$$\langle c_{\alpha,k} c_{\beta,-k} \rangle \propto \sum_{\mu=1}^3 (i\sigma_2 \sigma_{\mu})_{\alpha\beta} d_{\mu}(\vec{k}) \quad (18)$$

donde α y β son los índices de spin. El par de Cooper forma un estado onda-p donde $d_{\mu}(\vec{k})$ es proporcional a $Y_{1m} \sim k_i$ (Armónico esférico). El momento angular total será $l = s = 1 \rightarrow m =$

$-1, 0, 1$ y $s_z = -1, 0, 1$

$$d_\mu(\vec{k}) = \sum_{i=1}^3 \Delta_0 A_{\mu i} k_i^0 \quad (19)$$

La energía total tiene varios mínimos. El mínimo absoluto depende de la presión y la temperatura. Estamos particularmente interesados en la fase A de la figura 12. En la fase A , el parámetro de orden toma la forma:

$$A_{\mu i} = d_\mu (\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2)_i \quad (20)$$

donde \vec{d} es un vector unitario a lo largo de la proyección de spín del par de Cooper que se va reduciendo y $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)$ es una pareja de vectores unitarios ortonormales. El vector \vec{d} toma valores en S^2 . Si se define $\vec{l} \equiv \vec{\Delta}_1 \times \vec{\Delta}_2$, la tríada $(\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \vec{l})$ forma una base ortonormal para cada punto del medio. Dado que cada base ortonormal puede ser obtenida desde una base ortonormal canónica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ mediante la aplicación de una matriz de rotación tridimensional, se puede concluir que el espacio de parámetro de orden del He^3 -A superfluido es $S^2 \times SO(3)$, donde $S^2 \equiv \vec{\sigma}$ por el spín y $SO(3) \equiv \vec{d}_\mu$. El vector \vec{l} introducido aquí es el eje del momento angular del par de Cooper. Por simplicidad, vamos a obviar la variación del vector \hat{d} (de hecho, \hat{d} está bloqueado a lo largo de \hat{l} debido a la fuerza de dipolo). Aplicando esta suposición, el parámetro de orden pasa a asumir la forma:

$$A_i = \Delta_0 (\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2)_i \quad (21)$$

donde $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ y $\hat{l} \equiv \hat{\Delta}_1 \times \hat{\Delta}_2$ forman una base ortonormal en cada punto del medio. Vamos a considerar la base ortonormal canónica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Entonces la base $(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l})$ se obtiene mediante la aplicación de un elemento $g \in SO(3)$ a la base canónica, es decir:

$$g : (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \mapsto (\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l}) \quad (22)$$

Dado que g depende de la coordenada x , la configuración $(\hat{\Delta}_1(x), \hat{\Delta}_2(x), \hat{l}(x))$ define una aplicación $\Psi : X \rightarrow SO(3)$ tal que $x \mapsto g(x)$. La aplicación Ψ se denomina **textura** de un superfluido He^3 . Los grupos de homotopía que será relevantes para clasificar los defectos en un superfluido He^3 -A serán $\pi_n(SO(3))$. Si un recipiente es rellenado con He^3 -A, la frontera plantea unas ciertas condiciones en la textura que obligan al vector \hat{l} a ser perpendicular a la barrera.

Si la barrera fuera *difusa* la trayectoria de los pares de Cooper es perturbada y hay una depresión en la amplitud del parámetro de orden en un entorno de la barrera. Se asume, por simplicidad que la barrera es *especularmente lisa* de modo que los pares de Cooper puedan ejecutar una trayectoria sin perturbaciones. Existen diversos tipos de energía libre y la textura se determina resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas del total de energía libre bajo las condiciones de contorno dadas. Existen análisis de superfluidos He^3 en Anderson y Brinkman y Legget (Premio Nobel en el año 2003) [16], [15].

Se ha expuesto el razonamiento por el cual para clasificar los defectos del He^3 -A será necesario

estudiar los grupos de homotopía de $SO(3)$ (grupo de matrices de rotación de \mathbb{R}^3). El estudio del grupo de homotopía de primer orden llevará a la modelización de las **dislocaciones**. El estudio del grupo de homotopía de tercer orden llevará a introducir un nuevo tipo de estructura asemejada a una puntual llamada el **monopolo de Shankar**. Para analizar estos casos con profundidad serán necesarios los estudios correspondientes de los grupos de homotopía de $SO(3)$ que se detallarán al final de la siguiente sección.

3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

En esta sección, se van a exponer, sin ánimo de ser exhaustivos, los fundamentos matemáticos topológicos para la comprensión de los grupos de homología y homotopía. Tal y cómo se espera haber motivado correctamente en la sección anterior, los grupos de homotopía son fundamentales para la comprensión de fenómenos físicos como el ferromagnetismo o la superfluidez. Los grupos de homología se exponen de manera complementaria, ayudando a la comprensión de los espacios topológicos y mostrando cómo el análisis de objetos lineales como los poliedros puede generalizarse a espacios no lineales.

Se van a presentar los resultados necesarios de topología algebraica para aplicar a la posterior clasificación de defectos y texturas en física de la materia condensada. Serán principalmente resultados de homología y homotopía.

Se dividirá la sección en tres apartados: un primer apartado, recoge conceptos básicos y resultados preliminares de álgebra y topología. La teoría de homología será desarrollada en el apartado segundo. El tercer apartado tratará de la teoría de homotopía.

3.1. Preliminares y conceptos básicos

Puesto que los dos próximos apartados giran respectivamente en torno al concepto de grupo de homología y de grupo de homotopía, iniciaremos esta sección recordando el concepto de grupo.

Definición 1.1. Dado un conjunto G y una operación binaria interna que usualmente se presentará por $*$: $G \times G \rightarrow G$, se dice que $(G, *)$ es un grupo si satisface las siguientes propiedades:

- (i) Propiedad asociativa: para cualesquiera $x, y, z \in G$ se cumple que $(x * y) * z = x * (y * z)$
- (ii) Existencia elemento neutro: para todo $x \in G$ existe $e \in G$ tal que $x * e = e * x = x$
- (iii) Existencia elemento inverso: para todo $x \in G$ existe $x^{-1} \in G$ tal que $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$, siendo e el elemento neutro.

Si además se verifica

- (iv) Propiedad conmutativa: para todo $x, y \in G$ $x * y = y * x$ se dice que el grupo G es abeliano o conmutativo.

En el caso de grupos abelianos denotaremos usualmente la operación interna por $+$.

Un subconjunto H de G se dice un *subgrupo* de G si la operación $*$ es cerrada en H , verificando las propiedades (ii) y (iii).

Un grupo G se dice *finitamente generado* si existe un número finito de elementos x_1, \dots, x_p tales

que G es el subgrupo más pequeño que los contiene.

Cuando un grupo es generado por un único elemento se dice que el grupo es *cíclico*.

En general, para cualquier número entero $k > 0$ denotaremos $x^k = \underbrace{x * \cdots * x}_k$. Para $k < 0$ $x^k = \underbrace{x^{-1} * \cdots * x^{-1}}_{-k}$. Para grupos abelianos se denota $kx = \underbrace{x + \cdots + x}_k$.

Un elemento g de un grupo G se denomina *elemento de torsión* si existe un número entero m tal que $\underbrace{g + \cdots + g}_m = mg = 0$.

Un grupo es llamado *grupo de torsión* si todos sus elementos son elementos de torsión.

Un grupo abeliano se dirá que es *libre* cuando los elementos de dicho grupo puedan escribirse de manera unívoca como combinación lineal con coeficientes enteros de elementos de un conjunto base, es decir, existen $x_1 \dots x_p$ tales que para todo $x \in G$ se tiene que $x = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$ siendo k_1, \dots, k_p números enteros únicos. Al conjunto $\{x_1, \dots, x_p\}$ se le denomina *base*. El cardinal de la base se denomina *rango*.

Definición 1.4. Sean G_1 y G_2 dos grupos. Se dice que $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un homomorfismo si para todo $x, y \in G$

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad (23)$$

Se dirá que un homomorfismo f es un *isomorfismo* si f es además una aplicación biyectiva. Cuando exista un isomorfismo entre dos grupos se dirá que los grupos son *isomorfos* y la relación *ser isomorfo a* se denotará por \cong .

Lema 1.1. Sea $f : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorfismo. Entonces:

- (a) El núcleo de f dado por $\ker f = \{x \in G_1 | f(x) = 0\}$ es un subgrupo de G_1
- (b) La imagen de f dada por $\text{im} f = \{x \in f(G_1) \subseteq G_2\}$ es un subgrupo de G_2

Definición 1.5. Una relación de equivalencia \sim definida en un conjunto G es una relación binaria que satisface para todo $a, b, c \in G$:

- (i) $a \sim a$
- (ii) Si $a \sim b$, entonces $b \sim a$
- (iii) si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$

Una relación de equivalencia \sim define una partición de G en subconjuntos disjuntos denominados *clases de equivalencia*. Cada clase de equivalencia $[a]$ se define como:

$$[a] = \{x \in G | x \sim a\} \quad (24)$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia se llama *conjunto cociente* y se denota por G / \sim .

Ejemplo 1.1. Sea $H \subseteq G$, subgrupo de G , la relación $x \sim y \iff x * y^{-1} \in H$ es una relación de equivalencia y el correspondiente conjunto cociente que denotaremos por G/H tiene también estructura de grupo definiendo la operación como: $[x] * [y] = [x * y]$.

Teorema 1.1. (Teorema de isomorfía de grupos) Si $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un homomorfismo entonces:

$$G_1/\text{Ker } f \cong \text{Im } f \quad (25)$$

El siguiente resultado es de fácil demostración.

Lema 1.2. Sea G un grupo abeliano libre de rango r y sea $H \subseteq G$ un subgrupo no trivial de G . Entonces pueden elegirse p generadores x_1, \dots, x_p de entre los r generadores de G tales que k_1x_1, \dots, k_px_p generan H . Es decir, $H \cong k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus k_p\mathbb{Z}$ y H es de rango p .

Enunciemos a continuación el teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados cuya demostración es una consecuencia del lema anterior.

Teorema 1.2 Sea G un grupo abeliano finitamente generado (no necesariamente libre) con m generadores. Entonces G es isomorfo a la suma directa de grupos cíclicos,

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_r \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_p} \quad (26)$$

donde $m = r + p$. El número r se denomina *rango* de G .

Los resultados anteriores involucran exclusivamente conceptos algebraicos. Los siguientes resultados de esta sección serán de naturaleza topológica y ello justifica la inclusión del concepto de *espacio topológico*.

Definición 1.6. Sea X un conjunto y $\tau = \{U_i | i \in I\}$ una colección de subconjuntos de X . La pareja (X, τ) es un **espacio topológico** si τ satisface que:

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) La unión arbitraria de cualquier colección de conjuntos $\{U_j | j \in J\} \subseteq \tau$ cumple que $\cup_{j \in J} U_j \in \tau$

(iii) La intersección de cualquier subcolección finita $K = \{U_k | k \in K \text{ finita}\} \subseteq \tau$, satisface que $\cap_{k \in K} U_k \in \tau$

Abreviadamente se dirá que X es un espacio topológico. La colección τ se llamará *topología* de X y los conjuntos U_i se dicen *conjuntos abiertos*.

Definición 1.7. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Una familia $\{A_i\}$ de subconjuntos de X se denomina recubrimiento de A si

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \tag{27}$$

Si todos los A_i son abiertos, el recubrimiento se dice *abierto*.

Definición 1.8. Sea τ una topología sobre X . Se dice que N es un entorno de $x \in X$ si N es un subconjunto de X que contiene algún conjunto abierto $U_i \in \tau$ tal que $x \in U_i$.

Definición 1.9. Un espacio topológico (X, τ) es un espacio de Hausdorff si para cualquier par de puntos distintos $x, x' \in X$, existen entornos U_x de x y $U_{x'}$ de x' tales que $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$.

Definición 1.10. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de X se dice que es cerrado si su complementario es abierto. La clausura de A es el cerrado más pequeño que contiene a A y se denotará por $Cl(A)$. El interior de A es el mayor abierto contenido en A , se denotará por $int(A)$. La frontera $b(A)$ de A es el complementario del interior de A en A ; $b(A) = A - int(A)$.

Los puntos de la frontera son a veces identificados, mediante una relación de equivalencia, para construir conjuntos cociente que heredan la topología del espacio, generando la llamada *topología cociente*. Estos conjuntos cociente con la correspondiente topología cociente se denominan *espacios cociente*. Se introducen así interesantes ejemplos de espacios topológicos que serán protagonistas en las próximas secciones.

Ejemplos 1.1.

- Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| \leq 1, 0 \leq |y| \leq 1\}$ un cuadrado, si se identifican los puntos de las caras opuestas, de modo que $(-1, y) \sim (1, y)$, se obtiene un cilindro. Si se identifican los puntos $(-1, -y) \sim (1, y)$, se obtiene una banda de Möbius. La banda de Möbius es un ejemplo de superficie *no orientable*.
- Sean (x_1, y_1) y sean (x_2, y_2) dos puntos en \mathbb{R}^2 y se introduce una relación de equivalencia dada por: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $x_2 = x_1 + 2\pi n_x$ y $y_2 = y_1 + 2\pi n_y$ con $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$. Entonces \sim es una relación de equivalencia. El espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim es el *toro* T^2 .
- Si se identifican los lados del rectángulo de las otras maneras posibles se obtienen la *botella de Klein* y el *plano proyectivo*. (Véase Figura 22). Ninguna de estas superficie puede ser representada en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^3 sin autointersecciones. Son ejemplos conocidos de superficies no

orientables.

El plano proyectivo se denota por $\mathbb{R}P^2$ y puede representarse como una esfera S^2 en el que los puntos antipodales $n = (\theta, \phi)$ y $-n = (\pi - \theta, \pi + \phi)$ representan el mismo estado. Puede tomarse el hemisferio norte como espacio cociente S^2 / \sim dado que solo se requiere la mitad de la esfera. Sin embargo, el espacio cociente no es un hemisferio ordinario, ya que los puntos antipodales del ecuador también estarían identificados.

Definición 1.11. *El conjunto $A \subseteq X$ se dice compacto si para todo recubrimiento abierto $\{U_i | i \in I\}$ de A , existe un subconjunto finito J de I tal que $\{U_j | j \in J\}$ es también un recubrimiento de A*

Un resultado muy importante y bien conocido es el siguiente:

Teorema 1.3. *Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . A es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Normalmente, los sistemas físicos resultan confinados en un volumen V finito, por ejemplo, en el caso de los electrones en un espacio de Hilbert, se suele suponer que sus funciones de onda se anulan en las barreras del volumen V o bien se imponen condiciones de contorno periódicas de modo que el sistema se confina en un toro T^2 . En cualquier caso, estamos hablando de que el sistema se sitúa en un espacio *compacto*. De manera importante, en Física, la compacidad se encuentra en objetos como el monopolo de Belavin-Polyakov. En las teorías de campo, normalmente se asume que el campo se aproxima asintóticamente a un valor en diversas direcciones del espacio. En estos casos, aparece una clase de distribuciones de parámetro de orden en las cuales los diversos infinitos, en las direcciones del espacio, tienen un parámetro de orden igual. Dado que todos esos puntos del infinito se asignan a un único valor del parámetro de orden, lo que se tiene es una compactificación del espacio no compacto \mathbb{R}^n para obtener el espacio compacto $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. A este espacio se le puede, efectivamente, dotar de una topología que lo convierte en compacto, este procedimiento se conoce como *compactificación por un punto*.

Otra propiedad topológica fundamental para el desarrollo de este capítulo es la conexión.

Definición 1.12.

(a) *Un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico X se dice conexo si se no puede escribir como unión disjunta de conjuntos abiertos no vacíos, es decir, si $A = A_1 \cup A_2$, donde A_1 y A_2 son ambos conjuntos abiertos tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $A_1 = \emptyset$ o bien $A_2 = \emptyset$. En otro caso A se dice no conexo.*

(b) *Un subconjunto A de X se dice conexo por caminos si, para cada par de puntos $x, y \in A$, existe una aplicación continua $s : [0, 1] \rightarrow A$ tal que $s(0) = x$ y $s(1) = y$. La aplicación continua $s : [0, 1] \rightarrow X$ define un camino en X .*

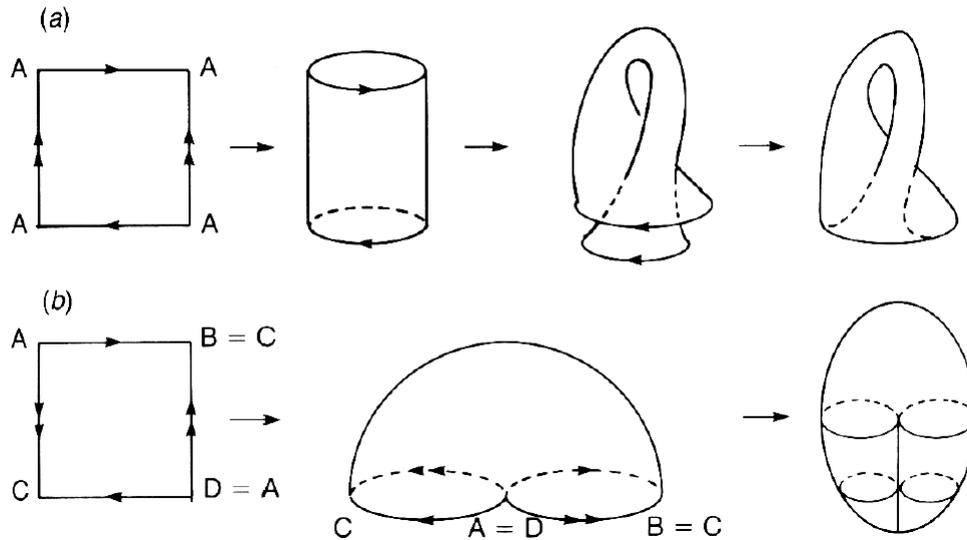


Figura 13: La botella de Klein (a) y el plano proyectivo (b).

Si $s(0) = s(1)$ el camino se dice que es un *lazo*. Después de que sea introducido el concepto de homotopía en el tercer apartado, se estudiará cuando todo lazo de un espacio topológico X se puede deformar de manera continua hasta contraerlo a un punto. En dicho caso se dice que el lazo es *contráctil* a un punto. Si el espacio topológico X es conexo y todo lazo es contráctil se dice que X es *simplemente conexo*.

Definición 1.13. Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un homeomorfismo si es continua y su inversa $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ es también continua. Si existe un homeomorfismo entre X_1 y X_2 , se dice que X_1 es homeomorfo a X_2 y viceversa.

Las propiedades de los espacios topológicos que se conservan mediante homeomorfismos se dicen *propiedades topológicas*.

El carácter abierto, cerrado, compacto y conexo de un conjunto son claramente propiedades topológicas. Los dos próximos apartados aportarán otros invariantes topológicos como los grupos de homología y los grupos de homotopía.

3.2. Grupos de homología

Uno de los invariantes topológicos definido por un número es la característica de Euler de un poliedro, el cual se define a través de la suma de aristas, caras y vértices. Los grupos de homología son un refinamiento de la característica de Euler, es más, la característica de Euler se definirá de un modo más natural al entender los grupos de homología.

La idea principal de los grupos de homología es tratar de diferenciar los invariantes de figuras geométricas, ¿que diferencia a un triángulo incluyendo el interior de uno que no lo incluye? El aspecto clave a tener en cuenta será encontrar regiones sin fronteras que a su vez no sean frontera de otra región del propio espacio. Las clases de equivalencia de regiones sin frontera que no sean frontera de otra región serán los elementos de los grupos de homología. Estos grupos permitirán entender las propiedades topológicas básicas, desde el número de agujeros o la orientabilidad, proporcionando una comprensión más precisa de objetos como la esfera, el toro, la banda de Möbius o el plano proyectivo. La característica de Euler de una superficie X se calcula a través de un poliedro K homeomorfo a dicha superficie. Dado el número de vértices $V(K)$ de K , el número de aristas $A(K)$ de K y el número de caras $C(K)$ de K la característica de Euler de X viene dada por la siguiente ecuación:

$$\chi(X) = \chi(K) = V(K) - A(K) + C(K) \quad (28)$$

Para generalizar este procedimiento debemos representar cada parte de una figura con un objeto estandarizado. Si tomamos la analogía a los triángulos en dimensiones superiores, nos lleva a elegir los símplex como los objetos a estandarizar, de modo que podamos asignar a cada figura propiedades de grupo abeliano. Los símplex son los bloques que forman un poliedro. Un 0-símplex $\langle p_0 \rangle$ es un punto, o un vértice, y un 1-símplex $\langle p_0 p_1 \rangle$ es una arista o segmento. Un 2-símplex $\langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ es un triángulo que incluye el interior y un 3-símplex $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$ es un tetraedro sólido. Examinad la figura 14.

Un 0-símplex también se puede denotar sin corchetes, simplemente como p_0 . Es fácil continuar la construcción para un r -símplex $\langle p_0 p_1 \dots p_r \rangle$. Observar que para que un r -símplex represente un objeto en dimensión r , los vértices p_i deben ser todos geoméricamente independientes, es decir, ningún hiperplano de dimensión $r - 1$ debe contener los $r + 1$ puntos.

Definición 2.1. Sean p_0, p_1, \dots, p_r puntos geoméricamente independientes en \mathbb{R}^m donde $r \leq m$. El r -símplex $\sigma_r = \langle p_0, \dots, p_r \rangle$ es el conjunto:

$$\sigma_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^r c_i p_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\} \quad (29)$$

(c_0, \dots, c_r) se denominan *coordenadas baricéntricas* de x . Dado que σ_r es un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^m es compacto.

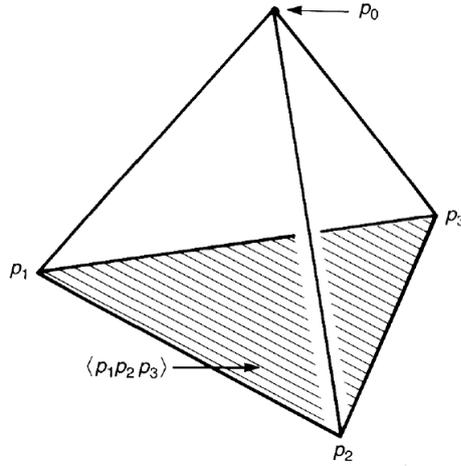


Figura 14: Una 0-cara p_0 y una 2-cara $\langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ de un 3-símplex $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$.

Sea q un entero tal que $0 \leq q \leq r$. Si escogemos $q + 1$ puntos $p_{i_0} \dots p_{i_q}$ de entre esos p_0, p_1, \dots, p_r esos $q + 1$ puntos definen un q -símplex $\sigma_q = \langle p_{i_0} \dots p_{i_q} \rangle$, que se llama q -cara de σ_r . Escribimos $\sigma_q \leq \sigma_r$ si σ_q es una cara de σ_r . Si $\sigma_q \neq \sigma_r$, decimos que es una *cara propia* de σ_r , denotada como $\sigma_q < \sigma_r$. Se puede verificar que el número de q -caras en un r -símplex es el número combinatorio $\binom{r+1}{q+1}$.

Definición 2.2. Sea K un conjunto de un número finito de símplex en \mathbb{R}^m . Si estos símplex están bien unidos, K se denomina un *cóplex simplicial*. Se entiende por bien unidos:

(i) Una cara arbitraria de un símplex de K pertenece a K , esto es, si $\sigma \in K$ y $\sigma' \leq \sigma$ entonces $\sigma' \in K$.

(ii) si σ y σ' son dos símplex de K , la intersección $\sigma \cap \sigma'$ es o bien vacío o bien una cara común de σ y σ' , esto es, si $\sigma, \sigma' \in K$ entonces $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ o $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ y $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$.

En la fig. 15 se puede comprobar como (a) es un cóplex simplicial mientras que (b) no lo es.

La *dimensión* de un cóplex simplicial K se define como la mayor dimensión de los símplex en K , donde la dimensión de un símplex indica el número de coordenadas linealmente independientes de dicho símplex.

Un cóplex simplicial K es un conjunto donde cada elemento es un símplex. Si cada símplex es visto como un subconjunto de \mathbb{R}^m ($m \geq \dim K$), la unión de todos los símplex se convierte en un subconjunto de \mathbb{R}^m . Este subconjunto se denomina *poliedro* $|K|$ de un cóplex simplicial. (La dimensión de $|K| \subseteq \mathbb{R}^m$ es la misma que la dimensión de K , $\dim |K| = \dim K$).

Sea X un espacio topológico. Si existe un cóplex simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$, X se dice *triangulable* y el par (K, f) es llamado *triangulación* de X . Dado un espacio topológico X , su triangulación no es única. Los espacios que nos interesarán serán los triangulables.

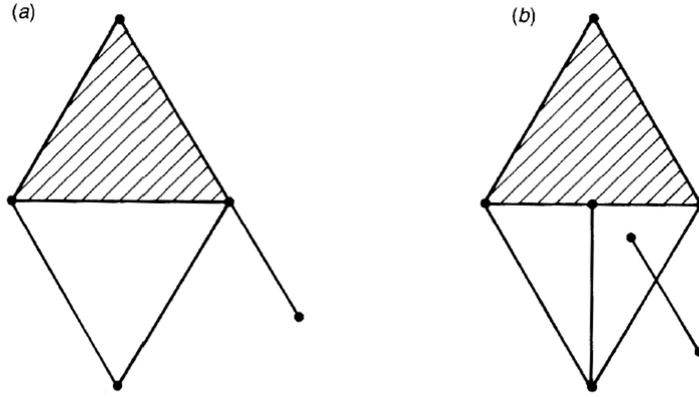


Figura 15: (a) es un c3mplex simplicial pero (b) no lo es.

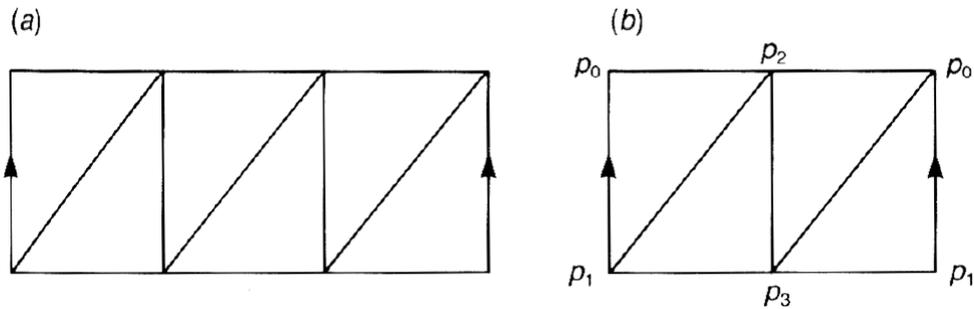


Figura 16: (a) es una triangulaci3n de un cilindro mientras que (b) no lo es.

Ejemplo 2.1. Es importante darse cuenta que debido a la definici3n de c3mplex simplicial, a la hora de realizar una triangulaci3n hay que tener cuidado de que los s3mplex involucrados cumplan las condiciones de la definici3n de c3mplex simplicial. Hasta en una figura tan simple como un cilindro puede resultar no trivial la definici3n de una triangulaci3n correcta. Observad la figura 16, mientras que (a) es una triangulaci3n correcta de un cilindro $S^1 \times [0, 1]$, (b) no ser3a una triangulaci3n v3lida, aunque a priori fuera m3s simple. De hecho, no es una triangulaci3n debido a que para $\sigma = \langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ y $\sigma'_2 = \langle p_1 p_2 p_3 \rangle$ se comprueba que $\sigma_2 \cap \sigma'_2 = \langle p_0 \rangle \cup \langle p_2 \rangle$, que es una uni3n de v3rtices que no es ni el conjunto vac3o ni un s3mplex.

Podemos asignar orientaciones a un r -s3mplex para $r \geq 1$. En lugar de $\langle \dots \rangle$ para un s3mplex sin orientaci3n, se usar3 (\dots) para denotar un s3mplex orientado. El s3mbolo σ_r es usado para denotar ambos tipos de s3mplex. Un 1-s3mplex orientado $\sigma_1 = (p_0 p_1)$ es un segmento lineal orientado en la direcci3n $p_0 \rightarrow p_1$ (figura 17 (a)). Ahora $(p_0 p_1)$ deber3 distinguirse de $(p_1 p_0)$. Se requiere que:

$$(p_0 p_1) = -(p_1 p_0) \quad (30)$$

El signo $-$ delante de $(p_1 p_0)$ deber3 ser entendido en el sentido de un grupo abeliano finitamente generado. De hecho, $(p_1 p_0)$ debe entenderse como el inverso de $(p_0 p_1)$. Yendo desde p_0 a p_1 seguido

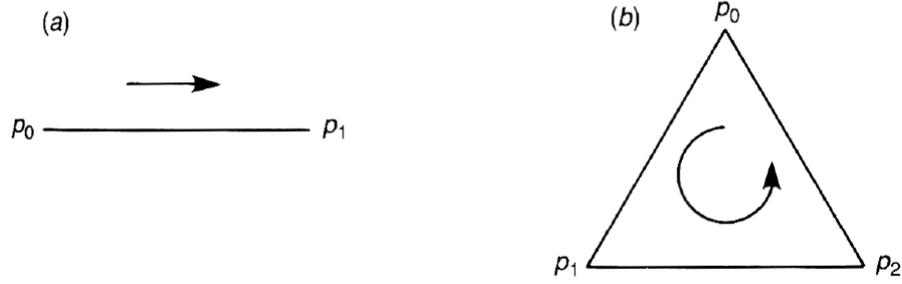


Figura 17: Un 1-símplex orientado (a) y un 2-símplex orientado (b).

de ir de p_1 a p_0 significa quedarse quieto, el elemento neutro 0. Similarmente, un 2-símplex orientado $\sigma_2 = (p_0p_1p_2)$ es una región triangular $p_0p_1p_2$ con una orientación descrita a través de las aristas (figura 17(b)).

Advertir que la orientación dada por $p_0p_1p_2$ es la misma que la dada por $p_2p_0p_1$ o $p_1p_2p_0$ pero la opuesta a $p_0p_2p_1$, $p_2p_1p_0$ o $p_1p_0p_2$.

Las relaciones se pueden resumir como:

$$(p_i p_j p_k) = \text{sgn}(P)(p_0 p_1 p_2) \quad (31)$$

donde $\text{sgn}(P)$ es la *signatura* de la permutación P que es $+1$ si se trata de una permutación par y -1 si es una permutación impar.

Vamos a definir un r -símplex orientado para cualquier $r \geq 1$. Sea $r + 1$ puntos geoméricamente independientes $p_0, \dots, p_r \in \mathbb{R}^m$. Sea $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_r}\}$ una secuencia obtenida como una permutación de los puntos p_0, \dots, p_r . Se dirá que $\{p_0, \dots, p_r\}$ y $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_r}\}$ son equivalentes si

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & r \\ i_0 & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix} \quad (32)$$

es una permutación par. Claramente se trata de una relación de equivalencia, cuyas clases se denominan *r -símplex orientado*. Sólo hay dos clases de equivalencias, de permutaciones pares e impares.

Sea $K = \{\sigma_\alpha\}$ un n -dimensional cómplex simplicial. Cada símplex se representará por σ_α independientemente de su orientación.

Definición 2.3. El grupo r -cadena $C_r(K)$ de un cómplex simplicial K es el grupo abeliano libre generado por los r -símplex orientados de K . Si $r > \dim K$, $C_r(K)$ se define como el grupo trivial. Un elemento de $C_r(K)$ se denomina r -cadena.

Sea I_r el número de r -símplex en K . Denotemos por $\{\sigma_{r,i} | (1 \leq i \leq I_r)\}$ al conjunto de los I_r símplex. Entonces $c \in C_r(K)$ se puede expresar como:

$$c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \quad c_i \in \mathbb{Z} \quad (33)$$

Los enteros c_i se llaman coeficientes de c . La estructura de grupo se genera a partir de la siguiente definición de la suma de dos r -cadenas, $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$ y $c' = \sum_i c'_i \sigma_{r,i}$ dada por:

$$c + c' = \sum_i (c_i + c'_i) \sigma_{r,i} \quad (34)$$

El elemento neutro es $0 = \sum_i 0 \sigma_{r,i}$, mientras que el elemento opuesto de c es $-c = \sum_i (-c_i) \sigma_{r,i}$. A partir de esta definición, queda claro que $C_r(K)$ es un grupo abeliano libre de rango I_r .

$$C_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{I_r} \quad (35)$$

Antes de definir el grupo de ciclos y el grupo de fronteras, necesitamos introducir el operador frontera. Vamos a denotar la frontera de un r -símplex σ_r por $\partial_r \sigma_r$. ∂_r debería ser entendido como un operador que actúa sobre σ_r llevándolo a su frontera. Antes de definir formalmente este operador, vamos a calcular las fronteras de símplex en dimensiones bajas. Sea p_0 un 0-símplex, dado que un punto no tiene frontera, se definirá $\partial_0 p_0 = 0$. Para un 1-símplex $(p_0 p_1)$, define:

$$\partial_1(p_0 p_1) = p_1 - p_0 \quad (36)$$

El signo $-$ delante de p_0 está relacionado con la orientación, de modo que estamos de acuerdo que la frontera de $(p_0 p_1)$ debe ser $\{p_0\} \cup \{p_1\}$. El signo $-$ se añade para que si por ejemplo dividimos un intervalo en dos segmentos, el operador frontera conserve la estructura de grupo, de modo que si $(p_0 p_2) = (p_0 p_1) + (p_1 p_2)$ entonces se cumple que $\partial_1(p_0 p_2) = \partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 = p_2 - p_0 = \partial_1(p_2 p_0)$.

Otro ejemplo interesante sería un triángulo de segmentos orientados $(p_0 p_1)$, $(p_1 p_2)$ y $(p_2 p_0)$ que no tiene frontera. Utilizando la definición propuesta para el operador frontera de 1-símplex tendremos que $\partial_1(p_0 p_1) + \partial_1(p_1 p_2) + \partial_2(p_2 p_0) = p_1 - p_0 + p_2 - p_1 + p_0 - p_2 = 0$ tal como debería ser. Vamos ahora con la definición formal.

Definición 2.4. Sea $\sigma_r = (p_0 p_1 \dots p_r)$ ($r > 0$) un r -símplex orientado. La frontera $\partial_r \sigma_r$ de σ_r es una $(r - 1)$ -cadena definida por

$$\partial_r \sigma_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) \quad (37)$$

donde el punto \hat{p}_i se omite en la suma, de modo que se trata de una $(r - 1)$ -cadena. De manera formal, se define $\partial_0\sigma_0 = 0$ para $r = 0$.

El operador ∂_r actúa linealmente sobre los elementos del grupo de r -cadenas $c = \sum_i c_i\sigma_{i,r} \in C_r(K)$;

$$\partial_r c = \sum_i c_i \partial_r \sigma_{i,r} \quad (38)$$

Observar que el lado derecho de la ecuación es un elemento del grupo $C_{r-1}(K)$, de modo que el operador ∂_r , denominado *operador frontera* es una aplicación:

$$\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K) \quad (39)$$

Es fácil comprobar que el operador frontera es un homomorfismo de grupos. A continuación, vamos a definir la *cadena de cómplex* asociada a un cómplex simplicial K de dimensión n . Debido a las propiedades de ∂_r existe una secuencia de grupos abelianos libres y homomorfismos tales que:

$$0 \xrightarrow{i} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(K) \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (40)$$

donde $i : 0 \hookrightarrow C_n(K)$ es la aplicación inclusión. Esta secuencia se denomina *cadena de cómplex* asociada a K y se denota $C(K)$. Dado que estamos estudiando un homomorfismo de grupos, resultará interesante ver las propiedades de la imagen y el núcleo de los homomorfismos frontera ∂_r .

Definición 2.5. Si $c \in C_r(K)$ satisface

$$\partial_r c = 0 \quad (41)$$

c se denomina r -ciclo. El conjunto de los r -ciclos $Z_r(K)$ es un subgrupo de $C_r(K)$ denominado grupo de r -ciclos. Notar que $Z_r(K) = \ker \partial_r$.

Definición 2.6. Sea K un n -cómplex simplicial y sea $c \in C_r(K)$. Si existe un elemento $d \in C_{r+1}(K)$ tal que

$$c = \partial_{r+1} d \quad (42)$$

entonces c se dice que es una r -frontera.

El conjunto de las r -fronteras $B_r(K)$ es un subgrupo de $C_r(K)$ y se llama *grupo de r -fronteras*. Notar que $B_r(K) = \text{im} \partial_{r+1}$. Recordar que $B_n(K)$ se define como 0. Del *Lema 1.1*, se tiene que $Z_r(K)$ y $B_r(K)$ son subgrupos de $C_r(K)$. A continuación se probará una relación fundamental entre $Z_r(K)$ y $B_r(K)$ que permitirá definir el grupo de homología.

Lema 2.3. La aplicación composición $\partial_r \circ \partial_{r+1} : C_{r+1}(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ es la aplicación constan-

te a 0. Es decir, $\partial_r(\partial_{r+1}c) = 0 \forall c \in C_{r+1}(K)$.

Dem. Dado que ∂_r es un operador lineal en C_r basta probar la afirmación para un conjunto de generadores de $C_{r+1}(K)$. Si $r = 0$ entonces el resultado es trivial por definición. Supongamos $r > 0$ y sea $\sigma = (p_0 \dots p_r p_{r+1}) \in C_{r+1}(K)$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_r(\partial_{r+1}\sigma) &= \partial_r \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r(p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \right) = \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) - \sum_{j > i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) = 0 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1. Sean $Z_r(K)$ y $B_r(K)$ los grupos de r -ciclos y r -fronteras de $C_r(K)$, entonces:

$$B_r(K) \subseteq Z_r(K) \quad (\subseteq C_r(K)) \quad (43)$$

Dem: Es obvio usando el *Lema 2.3*. Cualquier elemento $c \in B_r(K)$ por definición se escribe como $c = \partial_{r+1}d$ para algún $d \in C_{r+1}(K)$. Por el lema se tiene que $\partial_r c = \partial_r(\partial_{r+1}d)$ por lo que $c \in Z_r(K)$ para cualquier c . ■

¿Cómo podemos interpretar geoméricamente los r -ciclos y las r -fronteras? Nuestro operador calcula la frontera de un r -cadena. Si se trata de un r -ciclo entonces no tendrá frontera. Por otra parte, si tenemos una r -frontera entonces sabemos que es la frontera de una cadena en una dimensión superior $r + 1$. La intuición geométrica nos lleva a pensar que una frontera no tiene frontera, y este es precisamente el *teorema 2.1* que acabamos de probar y que nos permite definir el concepto de *grupo de homología*. Los grupos de homología están formados por las clases de equivalencia de aquellos ciclos que no son fronteras de ninguna cadena en dimensión superior en K .

Ya se han definido los tres grupos $C_r(K)$, $Z_r(K)$ y $B_r(K)$ asociados a un cómplex simplicial K . Ahora cabe preguntarse cómo se relacionan esos grupos con las propiedades topológicas de K o con un espacio topológico cuya triangulación sea el propio K . Sabemos que, por ejemplo, las aristas de un triángulo son homeomorfas a las de un cuadrado, ¿qué ocurre con los grupos de cadenas?, ¿qué ocurre con los grupos de fronteras? Nuestra misión es definir un objeto con propiedad de invariante topológico, es decir, que bajo homeomorfismos conserve estas propiedades. Está claro que en el caso de los grupos cadena $C_r(K)$ no se tendrá esta invariancia, ya que, si por ejemplo, tomamos K_1 un triángulo y K_2 un cuadrado tendremos que:

$C_1(K_1) = \{i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, mientras que, de manera similar, se

llega a que para el cuadrado $C_1(K_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Definición 2.7. Sea K un n -cómplex simplicial. Se define el r -ésimo grupo de homología $H_r(K)$, $0 \leq r \leq n$, asociado a K como:

$$H_r(K) \equiv Z_r(K)/B_r(K) \quad (44)$$

Si fuera necesario se define $H_r(K) = 0$ para cualquier $r > n$ o $r < 0$. Si queremos remarcar que la estructura de grupo se define con coeficientes enteros podemos escribir $H_r(K; \mathbb{Z})$. También se podrían definir grupos de homología con coeficientes en \mathbb{R} o en \mathbb{Z}_2 .

Dado que $B_r(K)$ es un subgrupo de $Z_r(K)$, $H_r(K)$ está bien definido. El grupo $H_r(K)$ es el conjunto de clases de equivalencia de r -ciclos,

$$H_r(K) \equiv \{[z] | z \in Z_r(K)\} \quad (45)$$

donde cada clase de equivalencia $[z]$ se llama *clase de homología*. Dos r -ciclos z y z' son equivalentes si y solo si $z - z' \in B_r(K)$, en ese caso decimos que z es *homólogo* a z' . Geométricamente $z - z'$ sería la frontera de algún espacio.

El siguiente teorema prueba que los grupos de homología son invariantes topológicos. Si tenemos dos espacios topológicos diferentes homeomorfos X e Y como, por ejemplo, el triángulo y el cuadrado y dos triangulaciones respectivas donde K y L serían los cómplex simpliciales asociados, entonces tendríamos que los grupos de homología son isomorfos. Osea, existe entre ambos un homomorfismo de grupos biyectivo entre ambos, por lo que esencialmente, son el mismo grupo.

Teorema 2.2. Los grupos de Homología son invariantes topológicos. Sean X e Y dos espacios topológicos homeomorfos y sean (K, f) y (L, g) respectivas triangulaciones de X e Y . Se tiene entonces que:

$$H_r(K) \cong H_r(L) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

En particular, si (K, f) y (L, g) son dos triangulaciones de X , entonces

$$H_r(K) \cong H_r(L) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (47)$$

De acuerdo con este *teorema 2.2.*, a partir de ahora tiene sentido hablar de grupos de homología de espacios topológicos generales X que sean triangulables sin referirse a un poliedro concreto. Para una triangulación arbitraria (K, f) podemos definir el grupo de homología de X como

$$H_r(X) \equiv H_r(K) \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (48)$$

El teorema prueba que el grupo no dependerá de la triangulación escogida.

Ejemplo 2.2. Sea $K = p_0$. La 0-cadena es $C_0(K) = \{ip_0 | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Claramente $Z_0(K) = C_0(K)$ y $B_0(K) = 0$. Por tanto:

$$H_0(K) \cong Z_0(K)/B_0(K) = C_0(K) \cong \mathbb{Z} \quad (49)$$

Ejemplo 2.3. Sea $K = \{p_0, p_1\}$ un c3mplex simplicial. Por una parte se tiene que $C_0(K) = \{ip_0 + kp_1 | i, k \in \mathbb{Z}\}$.

Es claro que $Z_0(K) = C_0(K)$ y adem3s $B_0(K) = \{0\}$ ya que dos puntos aislados no pueden ser nunca frontera. Se tendr3 entonces que $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por otra parte, para $r > 0$ se tiene que $C_r(K) = \{0\}$ por lo que se tendr3 que $H_r(K) = \{0\}$ para todo $r > 0$.

Ejemplo 2.4. Sea $K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_0)\}$ un c3mplex simplicial formado por las aristas orientadas y los puntos de un tri3ngulo. Se trata de una triangulaci3n de la circunferencia S^1 . Vamos a calcular sus grupos de homolog3a. Dado que no hay 2-s3mplex en K se tiene que $B_1(K) = 0$, por lo que $H_1(K) = Z_1(K)$

$$Z_1(K) = \{\sigma_1 = i(p_0p_1) + k(p_1p_2) + l(p_2p_0) | \partial_1\sigma_1 = 0\} \quad (50)$$

La condici3n $\partial_1\sigma_1 = 0$ implica que:

$$\partial_1\sigma_1 = i(p_1 - p_0) + k(p_2 - p_1) + l(p_0 - p_2) = (l - i)p_0 + (i - k)p_1 + (k - l)p_2 = 0 \quad (51)$$

De donde se deduce que $i = k = l$, por tanto se tendr3 que

$$H_1(K) = Z_1(K) = \{i((p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)) | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \quad (52)$$

Para $H_0(K)$ se tiene que $Z_0(K) = C_0(K)$ y que

$$B_0(K) = \partial_1(C_1(K)) = \{(l - i)p_0 + (i - k)p_1 + (k - l)p_2 | i, k, l \in \mathbb{Z}\} \quad (53)$$

Observando nos damos cuenta que podemos expresar este conjunto como n3cleo del siguiente homomorfismo de grupos suprayectivo $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(ap_0 + bp_1 + cp_2) = a + b + c$.

Se cumple que $\text{Ker } f = f^{-1}(0) = B_1(K)$. Aplicando el *teorema 1.1*, se tiene que

$$H_0(K) = Z_0(K)/\text{Ker } f \cong \text{Im } f \cong \mathbb{Z} \quad (54)$$

Dado que K es una triangulaci3n de la circunferencia S^1 se tendr3 que estos son los grupos de homolog3a de S^1 . De manera similar puede probarse que para un c3mplex simplicial de un cuadrado $K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_3), (p_3p_0)\}$ se tiene que los grupos de homolog3a son los mismos que para el tri3ngulo y S^1 , tal como cab3a esperar por ser homeomorfos.

En los próximos ejemplos se tratará el cálculo de algunos grupos de homología, mostrando también resultados de aplicación general.

El siguiente teorema relaciona una propiedad topológica importante como la conexión con los grupos de homología asociados.

Teorema 2.3. *Sea K un cómplex simplicial conexo. Entonces:*

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z} \quad (55)$$

Dem. Dado que K es conexo para cada pareja de 0-símplex p_i y p_j , existe una secuencia de 1-símplex $(p_i p_k), (p_k p_l), \dots, (p_m, p_j)$ tales que $\partial_1((p_i p_k) + \dots + (p_m p_j)) = p_i - p_j$. Por tanto esto implica que $p_i - p_j \in \text{im} \partial_1$, luego, son homólogos, osea, están en la misma clase de equivalencia: $[p_i] = [p_j]$. Sea $z \in Z_0(K)$ arbitrario, $z = \sum_{i=1}^{I_0} n_i p_i \in Z_0(K)$ donde I_0 es el número de 0-símplex en K . De modo que la clase de homología de z será:

$$[z] = \left[\sum_{i=1}^{I_0} n_i p_i \right] = \sum_{i=1}^{I_0} n_i [p_i] = \sum_{i=1}^{I_0} n_i [p_1] \quad (56)$$

En concreto, la clase de z está generada por la clase un único punto arbitrario, al ser todos equivalentes. Por tanto tendremos que $[z] = 0$ si $\sum_i n_i = 0$.

Sean ahora $\sigma_j = (p_{j,1} p_{j,2})$ ($1 \leq j \leq I_1$) los 1-símplex en K . Vamos a calcular $B_0(K)$

$$B_0(K) = \{ \partial_1(n_1 \sigma_1 + \dots + n_{I_1} \sigma_{I_1}) \mid n_1, \dots, n_{I_1} \in \mathbb{Z} \} = \quad (57)$$

$$= \{ (n_1 - n_2) p_{1,2} + (n_2 - n_3) p_{2,1} \dots (n_{I_1-1} - n_{I_1}) p_{I_1,1} \mid n_1, \dots, n_{I_1} \in \mathbb{Z} \} \quad (58)$$

Por consiguiente, si un elemento es de la forma $z = \sum_j n_j p_j \in B_0(K)$ entonces se tiene que $\sum_j n_j = 0$ por la relación que cumplen los coeficientes de los elementos de $B_0(K)$ de manera similar al *ejemplo 2.4*.

Hemos probado que para un cómplex conexo K se tiene que $z = \sum n_i p_i \in B_0(K)$ si y solo si $\sum n_i p_i = 0$.

Ahora podemos expresar el conjunto $B_0(K)$ como el núcleo del siguiente homomorfismo de grupos suprayectivo:

Sea $f : Z_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ definido por $f(n_1 p_1 + \dots + n_{I_0} p_{I_0}) = \sum_{i=1}^{I_0} n_i$.

Entonces tenemos que $\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K)$. Utilizando el Teorema 1.1. se deduce que:

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \text{im} f \cong \mathbb{Z} \quad \blacksquare \quad (59)$$

A continuación, nos centraremos en calcular los grupos de homología de espacios no orientables como la banda de Möbius y el plano proyectivo.

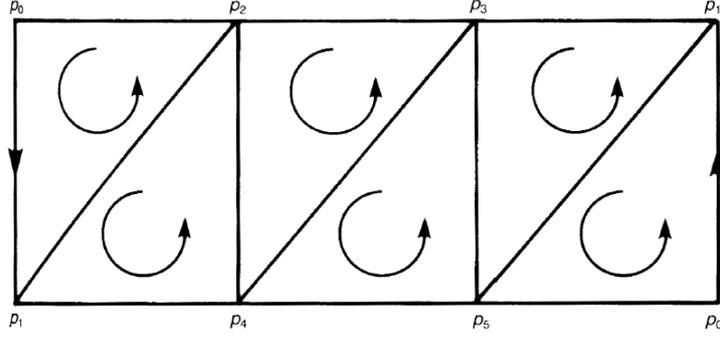


Figura 18: Una triangulación de una banda de Möbius.

Ejemplo 2.5. La figura 18 representa la triangulación de una banda de Möbius. Recordar que la triangulación debe cumplir los puntos de la *definición 2.2.* de cómplex simplicial tal como recordamos en la figura 16 asociada a la triangulación del cilindro y que no es del todo trivial.

Al no tener ningún 3-símplex claramente $B_2(K) = 0$.

Tomemos un ciclo $Z_2(K)$

$$z = i(p_0p_1p_2) + j(p_2p_1p_4) + k(p_2p_4p_3) + l(p_3p_4p_5) + m(p_3p_5p_1) + n(p_1p_5p_0) \quad (60)$$

Su frontera satisface que:

$$\partial_2 z = i\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} + k\{(p_1p_4) - (p_2p_4) + (p_2p_1)\} + j\{(p_4p_3) - (p_2p_3) + (p_2p_4)\} + l\{(p_4p_5) - (p_3p_5) + (p_3p_4)\} + m\{(p_5p_1) - (p_3p_1) + (p_3p_5)\} + n\{(p_5p_0) - (p_1p_0) + (p_1p_5)\} = 0$$

Dado que cada pareja $(p_i p_j)$ aparece una y solo una vez, todos los coeficientes deben ser 0. Esto implica que $z = 0$. Por lo cual, $Z_2(K) = \{0\}$ y, consecuentemente, $H_2(K) \cong \{0\}$.

Para calcular $H_1(K)$ trataremos de usar la intuición para evitar cálculos tediosos. Sea $z = (p_0p_1) + (p_1p_4) + (p_4p_5) + (p_5p_0)$ un lazo. Se puede verificar que cualquier otro lazo z' es homólogo a un múltiplo de z , de manera que:

$$H_1(K) = \{i[z] | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \quad (61)$$

Nótese que esto resulta inmediato utilizando el *Teorema 2.3.* por ser la banda de Möbius una superficie conexa.

Ejemplo 2.6. El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ se puede definir como el disco D^2 cuyos puntos de la circunferencia S^1 diametralmente opuestos se identifican. En base a esta visión del plano proyectivo se construye la triangulación de la figura 19.

Claramente $B_2(K) = \{0\}$. Tomemos $z \in Z_2(K)$ arbitrario.

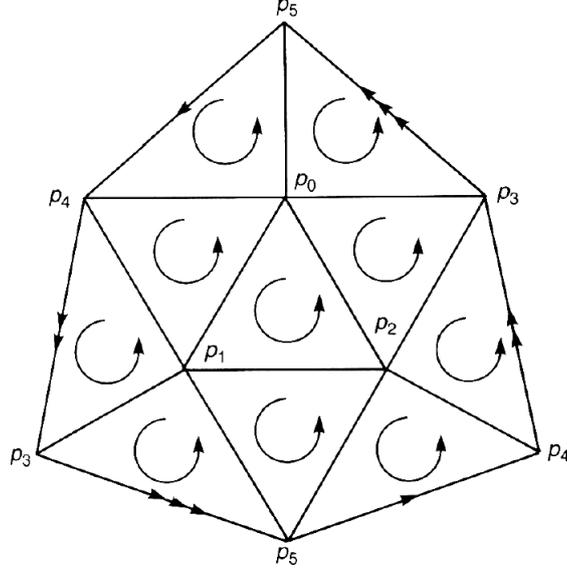


Figura 19: Una triangulación del plano proyectivo.

$$z = m_1(p_0p_1p_2) + m_2(p_0p_4p_1) + m_3(p_0p_5p_4) + m_4(p_0p_3p_5) + m_5(p_0p_2p_3) + \\ + m_6(p_2p_4p_3) + m_7(p_2p_5p_4) + m_8(p_2p_1p_5) + m_9(p_1p_3p_5) + m_{10}(p_1p_4p_3)$$

La frontera de z es:

$$\partial_2 z = m_1\{(p_1p_2) - (p_0p_2) + (p_0p_1)\} + m_2\{(p_4p_1) - (p_0p_1) + (p_0p_4)\} \\ + m_3\{(p_5p_4) - (p_0p_4) + (p_0p_5)\} + m_4\{(p_3p_5) - (p_0p_4) + (p_0p_3)\} \\ + m_5\{(p_2p_3) - (p_0p_3) + (p_0p_2)\} + m_6\{(p_4p_3) - (p_2p_3) + (p_2p_4)\} \\ + m_7\{(p_5p_4) - (p_2p_4) + (p_2p_5)\} + m_8\{(p_1p_5) - (p_2p_5) + (p_2p_1)\} \\ + m_9\{(p_3p_5) - (p_1p_5) + (p_1p_3)\} + m_{10}\{(p_4p_3) - (p_1p_3) + (p_1p_4)\} = 0$$

Si nos fijamos en los coeficientes de cada 1-símplex llegamos a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} -m_1 + m_5 &= 0, & m_4 - m_5 &= 0, & m_2 - m_3 &= 0 \\ m_1 - m_8 &= 0, & m_9 - m_{10} &= 0, & -m_2 + m_{10} &= 0 \\ m_5 - m_6 &= 0, & m_6 - m_7 &= 0, & m_6 + m_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Estas condiciones se cumplen si y solo si $m_i = 0$, $1 \leq i \leq 10$. Esto significa que el grupo $Z_2(K)$ es trivial. Por tanto $H_2(K) = Z_2(k)/B_2(K) \cong \{0\}$.

Antes de calcular $H_1(K)$ examinando $H_2(K)$ desde una perspectiva diferente. Vamos a sumar todos los 2-símplex en K con el mismo coeficiente:

$z \equiv \sum_{i=1}^{10} m\sigma_{2,i}$ $m \in \mathbb{Z}$. Advertir que cada uno de los 1-símplex de K es una cara común de exactamente dos 2-símplex, esto es debido a las propiedades del plano proyectivo. Como consecuencia la frontera de z es

$$\partial_2 z = 2m(p_3p_5) + 2m(p_5p_4) + 2m(p_4p_3) \quad (62)$$

Consecuentemente, si $z \in Z_2(K)$ m debe ser nulo, de modo que deducimos que $H_2(K) = \{0\}$ como comprobamos antes. Esta observación simplifica el cálculo de $H_1(K)$. Notar que ahora cualquier ciclo es homólogo a un múltiplo de $z = (p_3p_5) + (p_5p_4) + (p_4p_3)$.

La ecuación muestra que cualquier múltiplo *par* de z es la frontera de una 2-cadena. De esta forma, z es un ciclo y $z + z$ es homólogo a 0. Entonces:

$$H_1(K) = \{[z] \mid [z] + [z] = [0]\} \cong \mathbb{Z}_2 \quad (63)$$

Este ejemplo muestra que un grupo de homología no tiene por qué ser libre. Finalmente, dado que K es conexo, por el *teorema 2.3.*, se tiene que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Cabe destacar que, esta forma de calcular los grupos de homología basándose en la intuición será muy útil para desarrollar otros ejemplos sin necesidad de realizar grandes cálculos.

Ejemplo 2.7. Vamos a considerar el toro T^2 . Se va a tratar de deducir sus grupos de homología sin un cálculo formal para acercarnos a la intuición geométrica de los mismos. Es importante recordar que el r -ésimo grupo de homología es el generado por las r -cadenas sin fronteras las cuales no son frontera, a su vez, de ninguna $(r + 1)$ -cadena. Por ejemplo, la superficie del toro no tiene frontera, pero no es frontera de ninguna 3-cadena por lo que el segundo grupo de homología estará generado por un único elemento, esto es, $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$.

Vamos a centrarnos ahora en el cálculo de $H_1(T^2)$. Los lazos a y b de la figura 20 no tienen fronteras, pero a su vez no son fronteras de ninguna 2-cadena. Tómese otro lazo a' . Este a' es homólogo a a , observad que $a - a'$ representa el área sombreada en la figura 20, la cual no tiene frontera. Por tanto, $H_1(T^2)$ es un grupo libre generado por a y b de modo que $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Dado que el toro T^2 es conexo, se tiene que $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora se puede extender fácilmente el análisis al toro de tipo Σ_g con g agujeros. Dado que Σ_g no tiene frontera y no hay 3-símplex, la superficie Σ_g es libremente generada por un elemento $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$. El primer grupo de homología $H_1(\Sigma_g)$ es generado por esos lazos no homólogos que no son frontera de algún área. La figura 21 muestra una elección estándar para los generadores. Se encuentra que:

$$H_1(K) = \{i_1[a_1] + j_1[b_1] + \cdots + i_g[a_g] + j_g[b_g]\} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g} \quad (64)$$

Dado que Σ_g es conexo, $H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$. Las $2g$ curvas $\{a_i, b_i\}$ se denominan *sistema canónico de curvas*

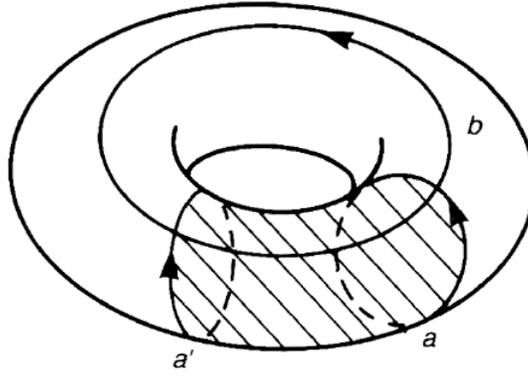


Figura 20: a' es homólogo a a pero no a b . a y b generan $H_1(T^2)$.

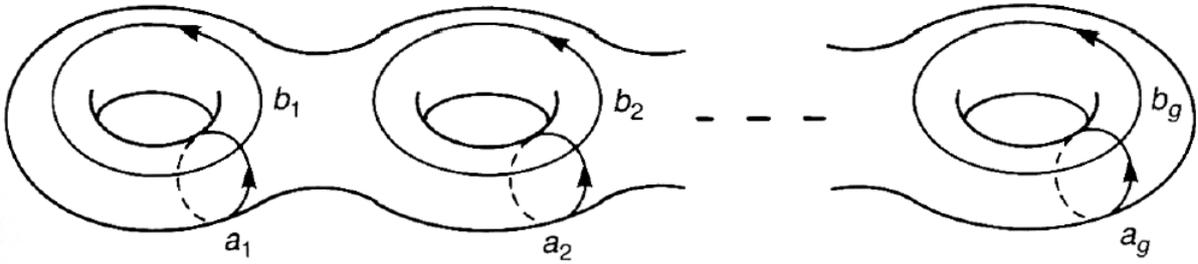


Figura 21: a_i y b_i ($1 \leq i \leq g$) generan $H_1(\Sigma_g)$.

en Σ_g .

Ejemplo 2.8. La figura 22 es una triangulación de la botella de Klein. Los cálculos de los grupos de homología son muy similares a los del plano proyectivo. Dado que $B_2(K) = 0$, se tiene que $H_2(K) = Z_2(K)$. Sea $z \in Z_2(K)$ una combinación de todos los 2-símplex con el mismo coeficiente $z = \sum m\sigma_{2,1}$. Los 1-símplex internos se cancelan para dejar solo los 1-símplex exteriores : $\partial_2 z = -2ma$, donde $a = (p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)$. Para que $\partial_2 z = 0$, el entero m debe anularse, de modo que se tiene que:

$$H_2(K) = Z_2(K) \cong \{0\} \quad (65)$$

Para calcular $H_1(K)$, notar que, en este caso, cada 1-ciclo es homólogo a $ia + jb$ para algunos $i, j \in \mathbb{Z}$. Para que una 2-cadena tenga una frontera consistente en a y b solamente, todos los 2-símplex deben ser sumados con el mismo coeficiente. Como resultado, para dicha 2-cadena $z = \sum m\sigma_{2,i}$, se tiene que $\partial_2 z = 2ma$. Esto prueba que $2ma$ es homólogo al 0. De esta manera, se prueba que $H_1(K)$ es generado por dos ciclos a y b tales que $a + a = 0$, de modo que:

$$H_1(K) = \{i[a] + j[b] | i, j \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \quad (66)$$

Finalmente, se tiene que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ por ser K conexo.

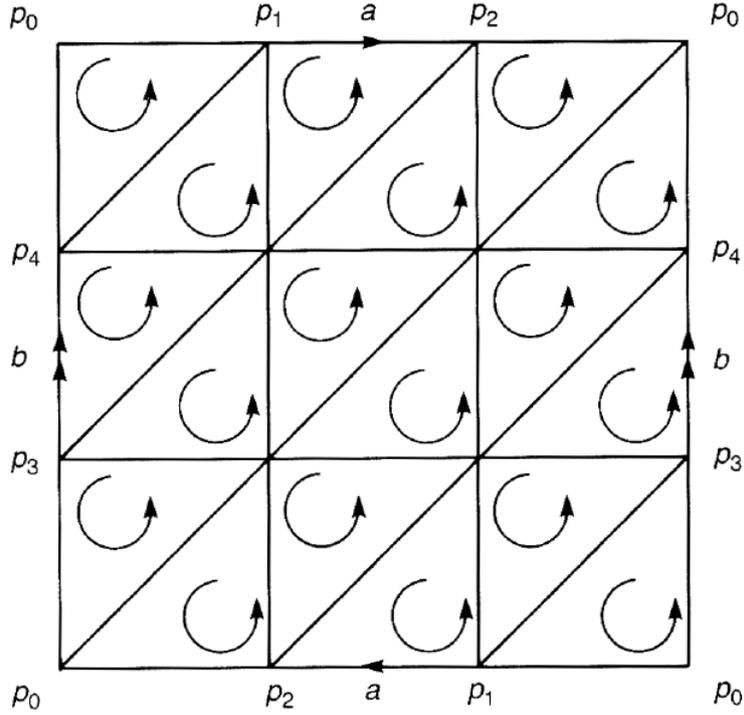


Figura 22: Una triangulación de la botella de Klein.

A continuación, se va a mostrar un resultado que relaciona la conexión y los grupos de homología. Sea $K = \{p_0\}$ y sea $L = \{p_0, p_1\}$. En los primeros ejemplos se ha visto que $H_0(K) = \mathbb{Z}$ y que $H_0(L) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. De manera más general, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Sea K una unión disjunta de N componentes conexas, $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_N$ donde $K_i \cap K_j = \emptyset$. Entonces:*

$$H_r(K) = H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus \dots \oplus H_r(K_N) \quad (67)$$

Dem. Nótese primero que el r -grupo cadena puede ser separado en una suma directa de N r -grupos cadena. Sea $C_r(K) = \{\sum_{i=1}^r c_i \sigma_{r,i} | c_i \in \mathbb{Z}\}$ donde I_r es el número de r -simplex linealmente independientes en K . Siempre es posible reordenar esos r -simplex de modo que los que están en K_1 aparecen primero, los de K_2 después y así sucesivamente. De esta forma, resulta fácil separar $C_r(K)$ en la suma directa de subgrupos:

$$C_r(K) = C_r(K_1) \oplus C_r(K_2) \oplus \dots \oplus C_r(K_N) \quad (68)$$

Esta separación se puede llevar a cabo tanto para $Z_r(K)$ como para $B_r(K)$:

$$Z_r(K) = Z_r(K_1) \oplus Z_r(K_2) \oplus \dots \oplus Z_r(K_N) \quad (69)$$

$$B_r(K) = B_r(K_1) \oplus B_r(K_2) \oplus \cdots \oplus B_r(K_N) \quad (70)$$

Se pueden definir así los grupos de homología de cada componente K_i como $H_r(K_i) = Z_r(K_i)/B_r(K_i)$, que están bien definidos ya que se cumple que $B_r(K_i) \subseteq Z_r(K_i)$

Por último, tenemos que:

$$\begin{aligned} H_r(K) &= Z_r(K)/B_r(K) = (Z_r(K_1) \oplus \cdots \oplus Z_r(K_N))/(B_r(K_1) \oplus \cdots \oplus B_r(K_N)) = \\ &= \{Z_r(K_1)/B_r(K_1)\} \oplus \cdots \oplus \{Z_r(K_N)/B_r(K_N)\} = H_r(K_1) \oplus \cdots \oplus H_r(K_N) \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (71)$$

Corolario 2.1.

(a) Sean K una unión disjunta de N componentes conexas, K_1, K_2, \dots, K_N . Se tiene entonces que:

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \quad (72)$$

(b) Si $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, entonces K es conexo. [Con el teorema 2.3. se concluye que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ si y solo si K es conexo].

$Z_r(K)$ y $B_r(K)$ son grupos abelianos libres por ser subgrupos de un grupo abeliano libre como $C_r(K)$. Esto no significa que $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ sea también abeliano libre. De hecho, de acuerdo con el teorema 1.2., la forma más general de $H_r(K)$ es

$$H_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_f \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p} \quad (73)$$

Desde nuestra experiencia, calculando el número de generadores de $H_r(K)$ lo que se observa es que estos generadores cuentan el número de agujeros $(r + 1)$ dimensionales en $|K|$. Los primeros f sumandos forman un grupo abeliano libre de rango f mientras que los siguientes p sumandos son los llamados *subgrupos de torsión* de $H_r(K)$.

Por ejemplo, para el plano proyectivo se ha visto que $H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2$ y la botella de Klein tiene $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Dicho de otro modo, los grupos de torsión detectan la torsión sobre sí mismo del poliedro $|K|$.

Para concluir, podemos explicar por qué los grupos de homología se estructuran tomando coeficientes en \mathbb{Z} en lugar de \mathbb{Z}_2 o \mathbb{R} . Dado que \mathbb{Z}_2 no tiene subgrupos no triviales, nunca podríamos tener subgrupos de torsión. De manera similar, si empleamos coeficientes en \mathbb{R} , no encontraríamos subgrupos de torsión ya que $\mathbb{R}/m\mathbb{R} \cong \{0\}$ para cada $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. De esta manera, si $H_r(K; \mathbb{Z})$ está dado por

la ecuación anterior, tendríamos que $H_r(K; \mathbb{R})$ es:

$$H_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_f \quad (74)$$

Definición 2.8. Sea K un *cómplex simplicial*. El r -ésimo número de Betti $b_r(K)$ se define como

$$b_r(K) \equiv \dim H_r(K; \mathbb{R}) \quad (75)$$

Dicho de otra forma, $b_r(K)$ es el rango de la parte libre abeliana de $H_r(K; \mathbb{Z})$.

Por ejemplo, para el toro T^2 los números de Betti son:

$$b_0(K) = 1; \quad b_1(K) = 2; \quad b_2(K) = 1 \quad (76)$$

y los de la esfera S^2 son:

$$b_0(K) = 1; \quad b_1(K) = 0; \quad b_2(K) = 1 \quad (77)$$

El siguiente teorema relaciona la característica de Euler con los números de Betti.

Teorema 2.5. (Teorema de Euler-Poincaré) Sea K un *cómplex simplicial n -dimensional* y sea I_r el número de r -símplex en K . Entonces:

$$\chi(K) \equiv \sum_{r=0}^n (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(K) \quad (78)$$

[Nota: La primera igualdad define la característica de Euler de un poliedro general $|K|$.]

Dem. Considerar el homomorfismo frontera:

$$\partial_r : C_r(K; \mathbb{R}) \rightarrow C_{r-1}(K; \mathbb{R}) \quad (79)$$

donde $C_{-1}(K; \mathbb{R})$ se define para ser $\{0\}$.

Dado que se trata de una aplicación entre espacios vectoriales, podemos aplicar un resultado general que relaciona la dimensión del ker y la imagen:

$$I_r = \dim(C_r(K; \mathbb{R})) = \dim(\ker \partial_r) + \dim(\text{im} \partial_r) = \dim Z_r(K; \mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K; \mathbb{R}) \quad (80)$$

donde B_{-1} es definido para ser trivial.

Por otra parte:

$$b_r(K) = \dim H_r(K; \mathbb{R}) = \dim(Z_r(K; \mathbb{R})/B_r(K; \mathbb{R})) = \dim Z_r(K; \mathbb{R}) - \dim B_r(K; \mathbb{R}) \quad (81)$$

De ambas relaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{r=0}^n (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r (\dim Z_r(K; \mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K; \mathbb{R})) = \\ &= \sum_{r=0}^n \{(-1)^r \dim Z_r(K; \mathbb{R}) - (-1)^r \dim B_r(K; \mathbb{R})\} = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(K) \quad \blacksquare\end{aligned}\tag{82}$$

Dado que los números de Betti son invariantes topológicos, $\chi(K)$ también se conserva bajo homeomorfismos. En particular, si $f : |K| \rightarrow X$ y $g : |K'| \rightarrow X$ son dos triangulaciones de X , se tiene que $\chi(K) = \chi(K')$. Esta propiedad hace que tenga sentido definir la característica de Euler de X a través de cualquier triangulación (K, f) de X .

3.3. Grupos de homotopía

En esta sección se van a estudiar los grupos de homotopía, los cuáles serán fundamentales para entender las cuestiones físicas planteadas en las dos primeras.

Si la idea de los grupos de homología era asignar una estructura de grupo a los ciclos que no son fronteras, en el caso de los grupos de homotopía, se trata de estudiar la deformación con continuidad en el conjunto \mathcal{F} de las aplicaciones continuas en un espacio topológico X en otro Y . Se introducirá una relación de homotopía, llamada *ser homotópico a*, si dados dos espacios topológicos X e Y , y dadas dos funciones f y g en \mathcal{F} podemos transformar la imagen de f hasta convertirla en la imagen de g mediante una función continua que llamaremos *homotopía*.

Este tema será la idea central para clasificar los *parámetros de orden* en sistemas físicos. Los parámetros de orden serán aplicaciones que podremos clasificar en función de sus clases de homotopía.

Vamos a fijarnos en la figura 23. Un disco tiene un agujero y el otro no. ¿Cómo se puede caracterizar la diferencia entre esos dos discos? Se puede observar que cualquier lazo en la fig. 23 (b) puede deformarse de manera continua hasta reducirse a un punto, por contra, en el caso del lazo α de la figura 23 (a) no puede ser contraído a un punto debido a la presencia del agujero en él. Se dirá que un lazo es homotópico a otro si puede obtenerse mediante una deformación continua. Por ejemplo, en el disco sin agujero, cualquier lazo será homotópico a un punto, en ese caso solo existirá una clase de equivalencia, y el grupo que se asociará será el trivial. En el caso del círculo con agujero, las clases de homotopía se caracterizarán mediante un número entero, que indicará el número de veces que el lazo rodea al agujero, los signos indicarán el sentido en el que se recorre.

Parece coherente asignar a esos lazos un número y una estructura de grupo aditiva como es \mathbb{Z} , de forma que si se recorre n veces el agujero por un lazo y m veces por otro sea $n + m$ el número de veces que lo recorre la composición de estos dos lazos (entendidos como aplicaciones). Al conjunto de estas clases de homotopía se le podrá dotar de la estructura de grupo.

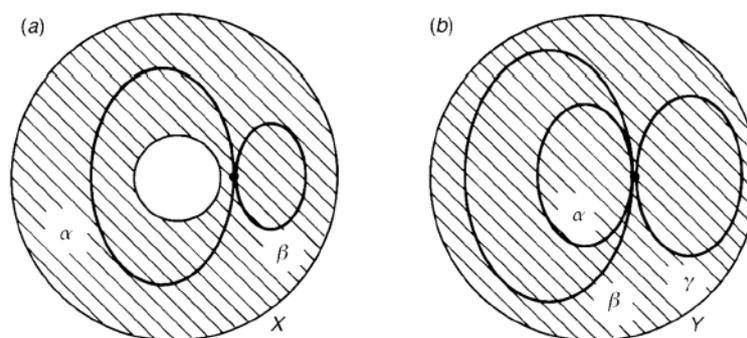


Figura 23: Un disco con un agujero (a) y sin agujero (b). El agujero en (a) evita que el lazo α pueda ser encogido en un punto.

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico y sea $I = [0, 1]$, una aplicación continua $\alpha : I \rightarrow X$ se llama camino con punto inicial x_0 y punto final x_1 si $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Si $x_0 = x_1$ el camino se llama lazo con punto base x_0 (o lazo en x_0).

Para un $x \in X$, un camino constante $c_x : I \rightarrow X$ se define como $c_x(s) = x$, para todo $s \in I$. Un camino constante es también un lazo constante $c_x(0) = c_x(1) = x$.

El conjunto de caminos o lazos en un espacio topológico X puede ser embebido en una estructura algebraica de la manera que se va a explicar.

Definición 3.2. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ caminos tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. El producto de α y β , denotado por $\alpha * \beta$, es un camino en X definido por:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (83)$$

Dado que $\alpha(1) = \beta(0)$, se tiene que $\alpha * \beta$ es una aplicación continua de I a X . Geométricamente corresponde a la unión de las imágenes de α y β parametrizadas con el doble de velocidad.

Definición 3.3. Sea $\alpha : I \rightarrow X$ un camino desde x_0 a x_1 . El camino inverso α^{-1} de α se define como:

$$\alpha^{-1}(s) \equiv \alpha(1 - s) \quad s \in I \quad (84)$$

El camino inverso simplemente corresponde a la imagen de α recorrida en sentido inverso (velocidad opuesta).

Dado que un lazo es un tipo particular de camino en el que el punto inicial y final coinciden, el producto y el inverso de lazos se define de la misma manera.

Nota: Puede parecer que la aplicación constante c_x es el elemento unidad. Sin embargo, no se tiene que $\alpha * \alpha^{-1}$ sea igual a c_x . Es necesario introducir el concepto de homotopía para definir la operación binaria interna del grupo de los lazos.

La operación de producto de camino introducida no resulta demasiado útil, debido a que no se satisfacen propiedades como que el camino constante sea el elemento neutro. Antes de eso es necesario clasificar los caminos y lazos de acuerdo a una relación de equivalencia que admita estructura de grupo y que el producto de caminos sea una operación bien definida dentro de estas clases de equivalencia, es decir, que se cumpla que el producto de clases se igual al producto de las clases.

Se va a comprobar cómo si identificamos caminos y lazos como aquellos que pueden ser deformados

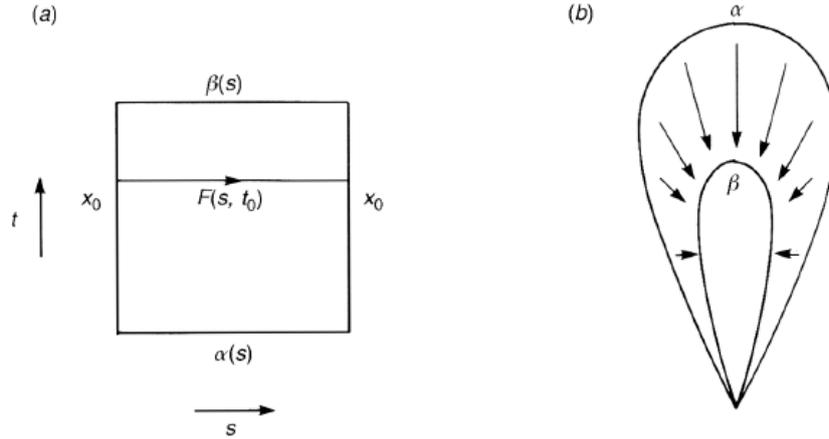


Figura 24: (a) representa una homotopía interpolando los lazos α y β . (b) La imagen de α puede ser deformada de manera continua en la imagen de β en el espacio real X .

de manera continua, las clases de equivalencia tienen estructura de grupo. Dado que nos interesan fundamentalmente los lazos, la mayoría de teoremas y definiciones se van a dar para lazos, pero conviene tener en cuenta que muchas afirmaciones se pueden aplicar para caminos con las modificaciones apropiadas.

Definición 3.4. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ dos lazos en x_0 . Se dicen que son homotópicos, escrito como $\alpha \sim \beta$, si existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que:

$$F(s, 0) = \alpha(s), \quad F(s, 1) = \beta(s) \quad \forall s \in I; \quad ; \quad F(0, t) = F(1, t) = x_0 \quad \forall t \in I \quad (85)$$

La aplicación F se denomina homotopía entre α y β

Es útil representar una homotopía como en la figura 24 (a). Las aristas verticales del cuadrado $I \times I$ son mapeadas a x_0 . El borde inferior es $\alpha(s)$ mientras que el borde superior es $\beta(s)$. En el espacio X , la imagen es continuamente deformada como en la fig. 24 (b).

Proposición 3.1. La relación $\alpha \sim \beta$ es una relación de equivalencia.

Dem. Veamos que se verifican las tres propiedades que definen una relación de equivalencia.

Reflexiva: $\alpha \sim \alpha$. La homotopía es dada por $F(s, t) = \alpha(s)$ para cada $t \in I$.

Simétrica: Sea $\alpha \sim \beta$ con la homotopía $F(s, t)$ tal que $F(s, 0) = \alpha(s)$ y $F(s, 1) = \beta(s)$. Entonces $\beta \sim \alpha$, donde la homotopía es dada por $F(s, 1 - t)$.

Transitiva: Sea $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$. Si $F(s, t)$ es una homotopía entre α y β y $G(s, t)$ es una homotopía

entre β y γ , una homotopía entre α y γ es:

$$H(s, t)(s) = \begin{cases} F(s, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (86)$$

■

La clase de equivalencia de lazos se denota $[\alpha]$ y se denomina *clase de homotopía de α* . El producto entre lazos define de manera natural el producto entre clases de equivalencia.

Definición 3.5. Sea X un espacio topológico. El conjunto de las clases de homotopía de lazos en $x_0 \in X$ se denota por $\pi_1(X, x_0)$ y se llama *grupo fundamental* (o *primer grupo de homotopía*) de X en x_0 . El producto de clases $[\alpha]$ y $[\beta]$ se define por:

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta] \quad (87)$$

Lema 3.1. El producto de clases de homotopía está bien definido, es decir, si $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$. Entonces $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$

Dem. Sea $F(s, t)$ una homotopía entre α y α' y sea $G(s, t)$ una homotopía entre β y β' . Entonces

$$H(s, t)(s) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (88)$$

es una homotopía entre $\alpha * \beta$ y $\alpha' * \beta'$, por lo que $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ como queríamos demostrar. ■

Teorema 3.1. El grupo fundamental es un grupo. Es decir, si α y β son lazos en $x \in X$, se satisface que:

(i) $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$

(ii) $[\alpha] * [c_x] = [\alpha]$ y $[c_x] * [\alpha] = [\alpha]$ (*Elemento unidad*)

(iii) $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x]$, por tanto $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ (*Elemento inverso*)

Dem. (i) Sea $F(s, t)$ una homotopía entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$ dada por:

$$F(s, t)(s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{1+t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta(4s - t - 1) & \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (89)$$

Observad la figura 25 (a) que representa la homotopía geoméricamente.

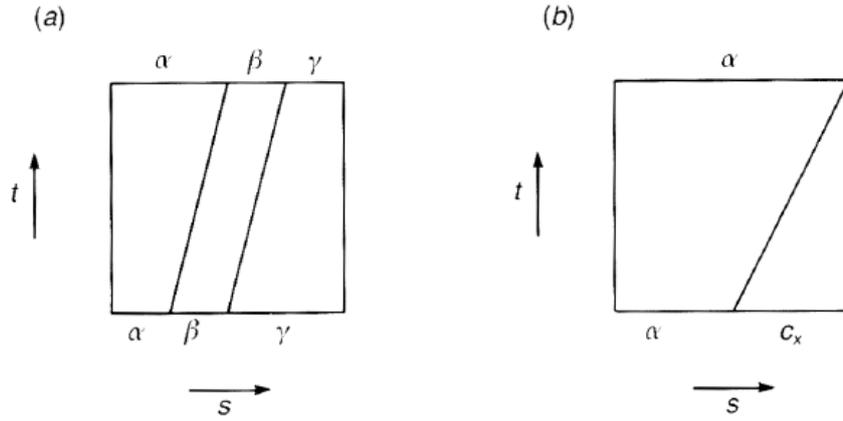


Figura 25: (a) Una homotopía entre $(\alpha * \beta) * \gamma$. (b) Una homotopía entre $\alpha * c_x$ y α .

(ii) Sea $F(s, t)$ la siguiente homotopía (véase Fig. 25(b)).

$$F(s, t)(s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{1+t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ x & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (90)$$

Claramente se trata de una homotopía entre $\alpha * c_x$ y α . Similarmente una homotopía entre $c_x * \alpha$ y α viene dada por:

$$F(s, t)(s) = \begin{cases} x & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha\left(\frac{2s-1+t}{1+t}\right) & \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (91)$$

De modo que queda probado que $[\alpha] * [c_x] = [\alpha] = [c_x] * [\alpha]$.

(iii) Sea la aplicación $F : I \times I \rightarrow X$ definida por:

$$F(s, t)(s) = \begin{cases} \alpha(2s(1-t)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)(1-t)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (92)$$

Claramente $F(s, 0) = \alpha * \alpha^{-1}$ y $F(s, 1) = c_x$, por lo que

$$[\alpha * \alpha^{-1}] = [\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x] \quad (93)$$

Esto demuestra que $[\alpha^{-1}] = [\alpha]^{-1}$.

Resumiendo, $\pi_1(X, x)$ es un grupo cuyo elemento unidad es la clase de homotopía del lazo constante c_x . El producto de clases está bien definido y satisface los axiomas de la definición de grupo. ■

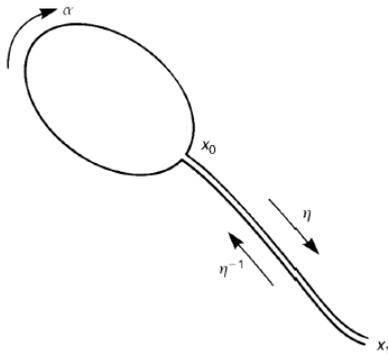


Figura 26: Desde un lazo α en x_0 , un lazo $\eta^{-1} * \alpha * \eta$ en x_1 se puede construir.

Recordemos el concepto espacio topológico conexo por caminos dado en la *definición 1.12*.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos y sean $x_0, x_1 \in X$. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Dem. Sea $\eta : I \rightarrow X$ un camino tal que $\eta(0) = x_0$ y $\eta(1) = x_1$. Si α es un lazo en x_0 , entonces $\eta^{-1} * \alpha * \eta$ es un lazo en x_1 . (Véase fig. 26). Dado un elemento $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, esta correspondencia induce un único elemento $[\alpha'] = [\eta^{-1} * \alpha * \eta] \in \pi_1(X, x_1)$. Se denota esta aplicación por $P_\eta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ de modo que $[\alpha'] = P_\eta([\alpha])$.

Vamos a demostrar que P_η es un isomorfismo. Primero, P_η es un homomorfismo, de modo que si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, se tiene que:

$$P_\eta([\alpha] * [\beta]) = [\eta^{-1}] * [\alpha] * [\beta] * [\eta] = [\eta^{-1}] * [\alpha] * [\eta] * [\eta^{-1}] * [\beta] * [\eta] = P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]) \quad (94)$$

Para probar que P_η es biyectiva, se va a introducir la inversa de P_η . Sea $P_\eta^{-1} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ cuya acción en $[\alpha']$ es $P_\eta^{-1}([\alpha']) = [\eta * \alpha' * \eta^{-1}]$.

Claramente se tiene que P_η^{-1} es la inversa de P_η dado que:

$$P_\eta^{-1} \circ P_\eta([\alpha]) = P_\eta^{-1}([\eta^{-1} * \alpha * \eta]) = [\eta * \eta^{-1} * \alpha * \eta * \eta^{-1}] = [\alpha] \quad (95)$$

Esto prueba que $P_\eta^{-1} \circ P_\eta = id_{\pi_1(X, x_0)}$. De manera análoga, por simetría se tiene que: $P_\eta \circ P_\eta^{-1} = id_{\pi_1(X, x_1)}$. ■

A partir de ahora y, de acuerdo con este resultado, si X es un espacio topológico conexo por caminos no es necesario especificar el punto base dado que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ para cualesquiera $x_0, x_1 \in X$, y de manera simple se denotará $\pi_1(X)$.

A continuación, se va a estudiar la relación de homotopía como propiedad topológica, la relación de equivalencia homotópica entre caminos y lazos es fácilmente generalizable a aplicaciones arbitrarias. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, f se dirá que es *homotópica* a g y se denotará $f \sim g$. La aplicación F se denomina *homotopía* entre f y g .

Definición 3.6. Sean X e Y espacios topológicos. X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, escrito como $X \simeq Y$, si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g \sim id_Y$ y $g \circ f \sim id_X$. La aplicación f se llama *homotopía de equivalencia* y g , su *homotopía inversa*.

Nota: Si X es homeomorfo a Y entonces X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, pero el recíproco no es necesariamente cierto. Por ejemplo, un punto $\{p\}$ y la recta real \mathbb{R} tienen el mismo tipo de homotopía pero no son homeomorfos.

Proposición 3.2. Tener el mismo tipo de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de espacios topológicos.

Dem. Reflexiva: $X \simeq X$ donde id_X es la homotopía de equivalencia.

Simétrica: Sea $X \simeq Y$ con la homotopía de equivalencia $f : X \rightarrow Y$. Entonces $Y \simeq X$ siendo la homotopía de equivalencia la inversa de f .

Transitiva: Sea $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$. Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ son homotopía de equivalencias y $f' : Y \rightarrow X$, $g' : Z \rightarrow Y$ sus homotopías inversas. Entonces:

$$(g \circ f)(f' \circ g') = g(f \circ f')g' \sim g \circ id_Y \circ g' = g \circ g' \sim id_Z \quad (96)$$

$$(f' \circ g')(g \circ f) = f'(g' \circ g)f \sim f' \circ id_Y \circ f = f' \circ f \sim id_X \quad (97)$$

de donde se tiene que $X \simeq Z$. ■

Una de las propiedades más importantes de los grupos fundamentales es que dos espacios topológicos con el mismo tipo de homotopía tienen el mismo grupo fundamental.

Teorema 3.3. Sean X e Y dos espacios topológicos con el mismo tipo de homotopía. Si $f : X \rightarrow Y$ es una homotopía de equivalencia, $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(Y, f(x_0))$.

Puesto que dos espacios homeomorfos tienen el mismo tipo de homotopía, del teorema anterior se sigue directamente el siguiente resultado.

Corolario 3.1. Un grupo fundamental es invariante bajo homeomorfismos, por lo que es un invariante topológico.

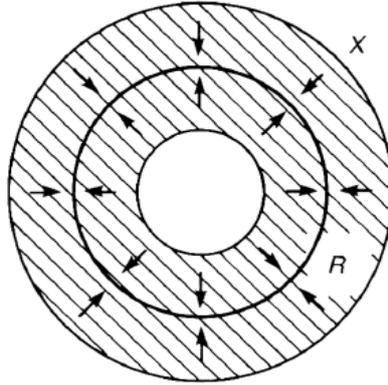


Figura 27: El círculo R es una retracto del anillo X . Las flechas muestran cómo actúa la retracción.

riante topológico.

Se trata de una propiedad menos general que el *teorema 3.3.*, por lo que de alguna manera debe decirse que los grupos fundamentales clasifican los espacios topológicos de una manera menos estricta que los homeomorfismo. Si X e Y tienen diferentes grupos de homotopía lo único que se puede afirmar es que no son homeomorfos. Sin embargo, aunque coincidieran sus grupos de homotopía no tendrían porque ser homeomorfos.

En las aplicaciones a la Física que veremos posteriormente, se observará como nuestro objetivo con los grupos de homotopía no es clasificar espacios topológicos sino aplicaciones entre espacios o configuraciones de campo. De manera general, no hay una intuición geométrica clara entre dos espacios que tengan el mismo tipo de homotopía, más allá de que se pueden obtener por una deformación continua.

Definición 3.7. Sea $R(\neq \emptyset)$ un subespacio de X . Si existe una aplicación continua $f : X \rightarrow R$ tal que $f|_R = id_R$, R se llama un retracto de X y f una retracción.

Notar en la figura 27 que todo el conjunto X es mapeado a R manteniendo los puntos de R fijos.

Definición 3.8. Sea R un subespacio de X . Si existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$H(x, 0) = x; \quad H(x, 1) \in R \quad \forall x \in X \quad (98)$$

$$H(x, t) = x \quad \forall x \in R \quad \forall t \in I \quad (99)$$

El espacio R se dice una *deformación retráctil de X* . Notar que H es una homotopía entre id_x y la retracción $f : X \rightarrow R$, que deja fijos los puntos en R durante la deformación.

Un retracto no es necesariamente una deformación retráctil. En la figura 28, el círculo R es un retracto de X pero no una deformación retráctil, ya que el agujero en X es un obstáculo para

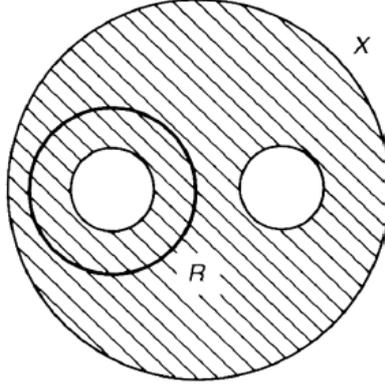


Figura 28: EL círculo R no es una deformación retráctil de X .

mantener la continuidad de la deformación de id_x a la retracción. Dado que X y R son del mismo tipo de homotopía, se tiene que:

$$\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(R, a) \quad (100)$$

Ejemplo 3.1. Sea X el círculo unidad y sea Y el siguiente anillo:

$$X = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (101)$$

$$Y = \{re^{i\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi, \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3}\} \quad (102)$$

Observad la figura 28. Se define $f : X \hookrightarrow Y$ por $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ y $g : Y \rightarrow X$ por $g(re^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Entonces $f \circ g : re^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$ y $g \circ f : e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$. Observad que $f \circ g \sim id_Y$ y que $g \circ f = id_X$. Existe una homotopía:

$$H(re^{i\theta}, t) = \{1 + (r - 1)(1 - t)\}e^{i\theta} \quad (103)$$

la cual interpola entre id_X y $f \circ f$, manteniendo los puntos de X fijados. Por tanto, X es una deformación retráctil de Y , por lo que para los grupos fundamentales tendremos que $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(Y, a)$ donde $a \in X$.

Definición 3.9. Si un punto $a \in X$ es una deformación retráctil de X , X se dice que es *contráctil*.

Sea $c_a : X \rightarrow \{a\}$ una aplicación constante. Si X es contráctil, entonces existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = c_a(x) = a$ y $H(x, 1) = x$ para cada $x \in X$ y, más aún, $H(a, t) = a$ para todo $t \in I$. La homotopía H se denomina *contracción*.

Ejemplo 3.2. $X = \mathbb{R}^n$ es contráctil hacia el origen 0. De hecho, se define $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$H(x, t) = tx$, se tiene que (i) $H(x, 0) = 0$ y $H(x, 1) = x$ para todo $x \in X$ y además (ii) $H(0, t) = 0$ para cada $t \in I$. Ahora es claro que todo conjunto convexo de \mathbb{R}^n es contráctil.

Teorema 3.4. *El grupo fundamental de un espacio contráctil X es trivial, $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$. En particular, el grupo fundamental de \mathbb{R}^n es trivial.*

Un espacio contráctil tiene el mismo grupo fundamental que el de un punto $\{e\}$ y el grupo fundamental de un punto es trivial.

Si un espacio topológico X conexo por caminos tiene como grupo fundamental el trivial, se dice que X es *simplemente conexo*.

No existe un algoritmo o procedimiento rutinario para calcular grupos fundamentales en general. Sin embargo, en ciertos casos pueden obtenerse realizando observaciones sencillas. Un caso particularmente interesante resulta los grupos fundamentales de la circunferencia unidad S^1 .

Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Se define una aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ por $x \mapsto e^{ix}$. Bajo p , el punto $0 \in \mathbb{R}$ se lleva al $1 \in S^1$, el cual es tomado como punto base. Imaginamos ahora que \mathbb{R} se enrolla sobre S^1 bajo la acción de p (véase la figura 29). Si $x, y \in \mathbb{R}$ satisfacen que $x - y = 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$), ambos son mapeados al mismo punto de S^1 . Entonces podemos definir una relación de equivalencia y denotar $x \sim y$. Definimos las clases de equivalencia como $[x] = \{y \mid x - y = 2\pi m \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\}$, la cual podemos identificar con un punto $e^{ix} \in S^1$. Usando esta relación podemos expresar que $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Sea $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que $\tilde{f}(0) = 0$ y que $\tilde{f}(x + 2\pi) \sim \tilde{f}(x)$. Es obvio que $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde n es un entero fijo. Si $x \sim y$, entonces se tiene que

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y + 2\pi m) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y) + 2\pi mn - \tilde{f}(y) = 2\pi mn \quad (104)$$

Entonces $\tilde{f}(x) \sim \tilde{f}(y)$. Consecuentemente, \tilde{f} define una aplicación continua $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dada por $f([x]) = p \circ \tilde{f}$ (véase fig. 29). Observad que f mantiene el punto fijo $1 \in S^1$. En resumen, se tiene una correspondencia uno a uno entre el conjunto de aplicaciones de S^1 a S^1 que mantienen fijo el 1 y el conjunto de aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} tales que $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$. El entero n se llama *grado* de f y se denota por $\deg(f)$. Mientras que x rodea al círculo S^1 una vez, $f(x)$ rodea a S^1 n veces.

Lema 3.2. (1) Sean $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ tales que $f(1) = g(1) = 1$. Entonces $\deg(f) = \deg(g)$ si y solo si f es homotópica a g .

(2) Para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe una aplicación $f : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $\deg(f) = n$

Dem.

(1) Sea $\deg(f) = \deg(g)$ y sean \tilde{f}, \tilde{g} sus correspondientes aplicaciones. Sea $\tilde{F}(x, t) \equiv t\tilde{f}(x) + (1-t)\tilde{g}(x)$

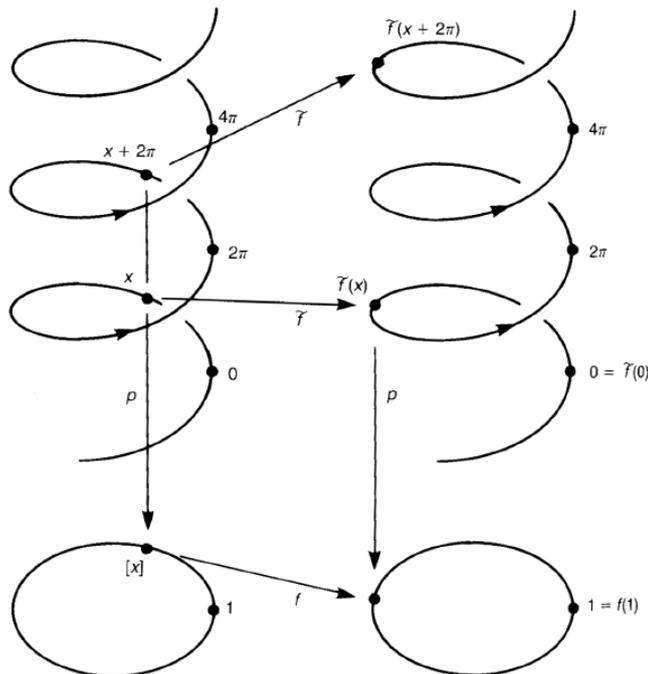


Figura 29: La aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $x \mapsto e^{ix}$ proyecta $x + 2m\pi$ al mismo punto en S^1 , mientras $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$ para algún n fijo, define una aplicación $f : S^1 \rightarrow S^1$. El entero n especifica la clase de homotopía a la cual f pertenece.

una homotopía entre $\tilde{f}(x)$ y $\tilde{g}(x)$. Es fácil ver que $F \equiv p \circ \tilde{F}$ es una homotopía entre f y g . Inversamente, si $f \sim g : S^1 \rightarrow S^1$, entonces existe una homotopía $F : S^1 \times I \rightarrow S^1$ tal que $F(1, t) = 1$ para cada $t \in I$. La correspondiente homotopía $\tilde{F} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ entre \tilde{f} y \tilde{g} satisface $\tilde{F}(x + 2\pi, t) = \tilde{F}(x, t) + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\deg(f) = \deg(g)$.

(2) $\tilde{f} : x \mapsto nx$ induce una aplicación $f : S^1 \rightarrow S^1$ con $\deg(f) = n$

El lema 3.2. nos habla de la asignación de un entero $\deg(f)$ a una aplicación de S^1 en S^1 tal que $f(1) = 1$, hay por tanto una biyección entre $\pi_1(S^1, 1)$ y \mathbb{Z} . Además, esto es un isomorfismo. De hecho, para $f, g : S^1 \rightarrow S^1$, $f * g$ definido como producto de caminos, satisface que $\deg(f * g) = \deg(f) + \deg(g)$. [Notar que $*$ es un producto de caminos y no una composición de aplicaciones]

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n; \quad \tilde{g}(x + 2\pi) = \tilde{g}(x) + 2\pi m \tag{105}$$

Entonces $(f * g)(x + 2\pi) = (f * g)(x) + 2\pi(m + n)$. De esta manera se ha probado el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *El grupo fundamental de S^1 es isomorfo a \mathbb{Z} ,*

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \tag{106}$$

[Dado que S^1 es conexo por caminos, puede ignorarse el punto base.]

El teorema puede comprenderse fácilmente. Supongamos que enrollamos un cilindro con una goma elástica, si lo rodeamos n veces, la configuración no podrá deformarse de manera continua en un enrollamiento de $m \neq n$ veces. Si la goma elástica lo rodea n veces y después m veces, lo rodeará $n + m$ veces en total.

Teorema 3.6. Sean X e Y espacios conexos por caminos. Entonces $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$.

Dem. Se definen las aplicaciones proyección $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$. Si α es un lazo en $X \times Y$ en (x_0, y_0) , $\alpha_1 \equiv p_1(\alpha)$ es un lazo de X en x_0 y $\alpha_2 \equiv p_2(\alpha)$ es un lazo de Y en y_0 . De manera inversa, para cada par de lazos α_1 de X en x_0 y α_2 de Y en y_0 determinan un único lazo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ de $X \times Y$ en (x_0, y_0) . Se define un homomorfismo $\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$ por $\phi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$.

Por construcción, ϕ tiene inversa, por tanto es el isomorfismo deseado y entonces:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \quad (107)$$

■

Ejemplo 3.3. (1) Sea $T^2 = S^1 \times S^1$ un toro. Entonces:

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (108)$$

(2) Sea $X = S^1 \times \mathbb{R}$ un cilindro. Dado que $\pi_1(\mathbb{R}) \cong \{e\}$, se tiene que:

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \{e\} \cong \mathbb{Z} \quad (109)$$

El cálculo de ciertos grupos fundamentales como el círculo o el disco resultan muy importantes, pero es necesario encontrar un método algorítmico que permita, de alguna manera, conocer los grupos fundamentales de espacios triangulables X arbitrarios. Por consiguiente, bastará fijar un procedimiento para el cálculo del grupo fundamental de un poliedro K .

Grupos definidos por relaciones

Los grupos libres que se definen a continuación no son necesariamente abelianos. Un conjunto $X = \{x_j\}$ de un grupo G se llama *conjunto libre de generadores* si cada elemento $g \in G - \{e\}$ puede ser

escrito de manera *única* como:

$$g = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad (110)$$

donde n es finito y $i_k \in \mathbb{Z}$. Se asume que los términos adyacentes iguales son cancelados, de manera que g se escribe de la manera más reducida posible. Si G tiene un conjunto libre de generadores, se dirá que es un grupo *libre*. De manera inversa, dado un conjunto X podemos construir un grupo libre G cuyo conjunto de generadores libre esté en X . Cada elemento de X es una *letra*. El producto

$$w = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad (111)$$

se llama *palabra*, donde $x_j \in X$ y $i_j \in \mathbb{Z}$. Si $i_j \neq 0$ y $x_j \neq x_{j+1}$ la palabra se dice *palabra reducida*. Es siempre posible llegar a palabras reducidas mediante un número finito de pasos.

Una palabra sin letras es llamada *palabra vacía* y se denota por 1. Por ejemplo, si es obtenida reduciendo $w = a * a^{-1} = a^0$.

El conjunto de todas las palabras reducidas forman un grupo libre bien definido llamado grupo libre generado por X , denotado por $F[X]$. La multiplicación es la yuxtaposición de dos palabras seguida por su reducción.

Ejemplo 3.4. Sea $X = \{a\}$. Es fácil ver que el grupo libre generado por X es isomorfo a \mathbb{Z} .

En general, un grupo arbitrario G se puede definir a través de sus generadores y unas ciertas restricciones que deben satisfacer dichos generadores. Si $\{x_i\}$ es el conjunto de generadores, las restricciones se escriben usualmente como:

$$r = x_{k_1}^{i_1} x_{k_2}^{i_2} \dots x_{k_n}^{i_n} = 1 \quad (112)$$

y se llaman *relaciones*. Por ejemplo, el grupo cíclico de orden n es generado por un único elemento x que satisface la relación $x^n = 1$.

De manera formal, sea G un grupo generado por $X = \{x_k\}$. Cualquier elemento $g \in G$ se escribe como $g = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$, donde no es necesaria que la expresión sea única (G no tiene por qué ser libre). Sea $F[X]$ el grupo libre generado por X . Entonces existe un homomorfismo natural φ desde $F[X]$ hasta G definido como:

$$\varphi : x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \longmapsto x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad (113)$$

Observar que no tiene por qué ser un isomorfismo ya que la expresión del dominio no tiene por qué ser única. φ es suprayectiva dado que X genera $F[X]$ y G . Aunque $F[X]$ no es isomorfo a G se tiene que:

$$F[X]/\ker\varphi \simeq G \quad (114)$$

En este sentido, el conjunto de generadores X y $\ker\varphi$ determinan completamente el grupo G .

En este sentido, un grupo G generado por X es especificado por sus relaciones. La yuxtaposición de los generadores y las relaciones

$$(x_1, \dots, x_p; r_1, \dots, r_q) \tag{115}$$

se denomina *presentación* de G . Por ejemplo, $\mathbb{Z}_n = (x; x^n)$ y $\mathbb{Z} = (x; \emptyset)$.

Ejemplo 3.5. Sea $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{x^n y^m | n, m \in \mathbb{Z}\}$ un grupo abeliano libre generado por $X = \{x, y\}$. Entonces se tiene que $xy = yx$. Dado que $xyx^{-1}y^{-1} = 1$, se tiene una relación $r = xyx^{-1}y^{-1}$. La presentación de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sería $(x, y; xyx^{-1}y^{-1})$.

Cálculo de grupos en poliedros

Al igual que se vio en el apartado previo, un poliedro $|K|$ es una buena aproximación de un espacio topológico X mediante un homeomorfismo. Dado que los grupos fundamentales son invariantes topológicos, se tendrá que $\pi_1(X) = \pi_1(|K|)$. Se asume que X es un espacio conexo por caminos, por lo que si se encuentra una manera sistemática de calcular $\pi_1(|K|)$, también se puede calcular $\pi_1(X)$. Primero se define el grupo de aristas de un cómplex simplicial, el cual corresponde al grupo fundamental de un espacio topológico, después se desarrollará una forma de calcularlo.

Sea $f : |K| \rightarrow X$ una triangulación de un espacio topológico X . Si se observa que un elemento del grupo fundamental puede ser representado mediante lazos en X , se espera que existan lazos similares en $|K|$ de manera análoga. Dado que un lazo en $|K|$ sólo puede ser construido con 1-símplex, debemos analizar el conjunto de todos los 1-símplex en $|K|$, el cual puede ser entendido dentro de una estructura de grupo conocida como el grupo de aristas de K .

Un *camino de aristas* en un cómplex simplicial K es una secuencia $v_0 v_1 \dots v_k$ de vértices de $|K|$, en las cuales las parejas consecutivas $v_i v_{i+1}$ es o bien un 0-símplex o bien un 1-símplex de $|K|$. Si $v_0 = v_k (= v)$, el camino de aristas se dice *lazo de aristas* en v . Se clasifican estos lazos de acuerdo a una relación de equivalencia. Se dirá que dos lazos de aristas α y β son equivalentes si uno de ellos es obtenido del otro mediante la repetición de las siguientes operaciones un número finito de veces:

- (1) Si los vértices u, v y w forman un 2-símplex en K , el camino de aristas uvw puede ser reemplazado por uw y viceversa (véase figura 30 (a)).
- (2) Como caso especial, si $u = w$ en (1), el camino de aristas uvw corresponder a la transversal a lo largo de uv primero de dar vuelta desde v a $w = u$. Este camino de aristas uvw puede ser reemplazado por un 0-símplex u y viceversa. (Véase figura 30(b)).

Se van a denotar las clases de equivalencia de los lazos de aristas en v , a la cual $vv_1 \dots v_{k-1}v$ pertenece, por $\{vv_1 \dots v_{k-1}v\}$. El conjunto de las clases de equivalencia forman un grupo bajo la operación

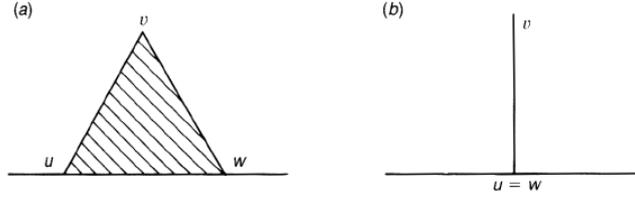


Figura 30: Las posibles deformaciones de lazos de aristas. En (a), uvw es reemplazado por uw . En (b), uvu es reemplazado por u .

producto definida como:

$$\{vu_1 \dots u_{k-1}v\} * \{vv_1 \dots v_{i-1}v\} = \{vu_1 \dots u_{k-1}vv_1 \dots v_{i-1}v\} \quad (116)$$

El elemento unidad del producto es la clase de equivalencia $\{v\}$ mientras que el inverso de $\{vv_1 \dots v_{k-1}v\}$ es $\{vv_{k-1} \dots v_1v\}$. Este grupo se denomina el *grupo de aristas de K en v* y se denota por $E(K; v)$.

Teorema 3.7. $E(K; v)$ es isomorfo a $\pi_1(|K|; v)$.

La demostración se encuentra en Armstrong (1983) [11].

El isomorfismo $\phi : E(K; v) \rightarrow \pi_1(|K|; v)$ dado en el teorema anterior se obtiene identificando cada lazo de aristas en K con un lazo en $|K|$. Para encontrar $E(K; v)$, se necesitan especificar los generadores y relaciones. Sea L un subcómplex simplicial de K tal que:

- (a) L contiene todos los vértices (0-símplex de K);
- (b) El poliedro $|L|$ es *conexo por caminos* y *simplemente conexo*.

Dado un cómplex simplicial conexo por caminos K , siempre existe un subcómplex L que satisface estas condiciones. Un cómplex simplicial unidimensional que es conexo por caminos y simplemente conexo se denomina *árbol*. Un árbol T_M se llama *árbol maximal* de K si no es un subconjunto propio de otros árboles.

Lema 3.3. Un árbol maximal T_M contiene todos los vértices de K y además satisface las condiciones (a) y (b) mencionadas justo antes.

Dem: Supongamos T_M no contiene algún vértice w . Dado que K es conexo por caminos, existe un 1-símplex vw en K tal que $v \in T_M$ y $w \notin T_M$. $T_M \cup \{vw\} \cup \{w\}$ es un subcómplex unidimensional de K que es conexo por caminos, simplemente conexo y que contiene a T_M , lo cual contradice la asunción inicial de ser T_M maximal. ■

Supongamos que se ha obtenido, de algún modo, el subcómplex L . Dado que $|L|$ es simplemente conexo, los lazos de aristas en $|L|$ no contribuyen a $E(K; v)$. Por tanto, podemos ignorar los símplex

en L en nuestros cálculos. Sea $v_0(=v), v_1, \dots, v_n$ los vértices de K . Se va a asignar un ‘elemento’ g_{ij} para cada par de vértices ordenados v_i, v_j si $\langle v_i v_j \rangle$ es un 1–simplex de K . Sea $G(K; L)$ un grupo que es generado por todos los g_{ij} . ¿Qué se puede decir de las relaciones? Se tiene lo siguiente:

- (1) Dado que estamos ignorando aquellos simplex en L , se asignarán $g_{ij} = 1$ si $\langle v_i v_j \rangle \in L$.
- (2) Si $\langle v_i v_j v_k \rangle$ es un 2–simplex de K , existen unos lazos no triviales alrededor de $v_i v_j v_k$ y se tiene la relación $g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$.

Los generadores $\{g_{ij}\}$ y el conjunto de relaciones determinan completamente el grupo $G(K : L)$ ■.

Teorema 3.8. $G(K; L)$ es isomorfo a $E(K; v) \simeq \pi_1(|K|; v)$.

De hecho, se puede ser más eficiente de lo que parece. Por ejemplo, g_{ii} debería ser igual a 1 dado que g_{ii} corresponde al vértice v_i el cual es un elemento de L . Más aún, dado que $g_{ij} g_{ji} = g_{ii} = 1$, se tiene que $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$. Por tanto, solo podemos introducir esos generadores g_{ij} para cada par de vértices v_i, v_j tales que $\langle v_i v_j \rangle \in K - L$ y $i < j$. Dado que no hay generadores g_{ij} tales que $\langle v_i v_j \rangle \in L$, se puede ignorar el primer tipo de relación. Si $\langle v_i v_j v_k \rangle$ es un 2–simplex de $K - L$ tal que $i < j < k$, la relación correspondiente es únicamente especificada por $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ dado que sólo estamos interesados en los simplex $\langle v_i v_j \rangle$ tal que $i < j$. Para resumir, las reglas del cálculo son las siguientes:

- (1) Primero, encontrar una triangulación $f : |K| \rightarrow X$.
- (2) Encontrar el subcómplex L que es conexo por caminos, simplemente conexo y que contiene todos los vértices de K .
- (3) Asignar un generador g_{ij} a cada 1–simplex $\langle v_i v_j \rangle$ de $K - L$, para cada $i < j$.
- (4) Imponer una relación $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ si hay un 2–simplex $\langle v_i v_j v_k \rangle$ tal que $i < j < k$. Si dos de los vértices v_i, v_j y v_k forman un 1–simplex de L , el correspondiente generador debería ser igual a 1.
- (5) Ahora $\pi_1(X)$ es isomorfo a $G(K; L)$ el cual es un grupo generado por $\{g_{ij}\}$ con las relaciones obtenidas en (4).

Vamos a estudiar algunos ejemplos, centrándonos especialmente en los que serán de utilidad en la clasificación de defectos topológicos.

Ejemplo 3.5. Desde nuestra construcción, debería ser claro que $E(K; v)$ y $G(K; L)$ involucran solo los 0–, 1–, y 2–simplex de K . De acuerdo con esto, si $K^{(2)}$ denota un 2–esqueleto de K , el cual es definido como el conjunto de todos los 0–, 1– y 2–simplex en K por lo que:

$$\pi_1(|K|) \simeq \pi_1(|K^{(2)}|) \tag{117}$$

Esto es bastante útil en los cálculos reales. Por ejemplo, un 3–simplex y su frontera tiene el mismo

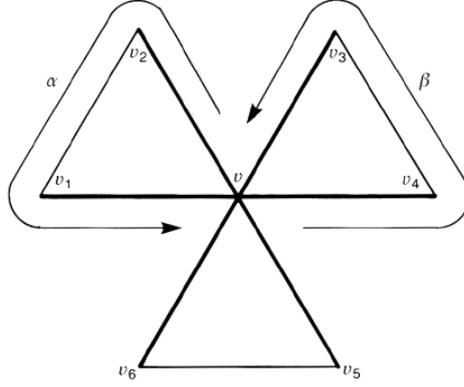


Figura 31: Una triangulación de un 3-ramo. Las líneas oscuras indican el árbol maximal L .

2-esqueleto. Un 3-símplex es un poliedro $|K|$ de una bola sólida D^3 , mientras que su frontera $|L|$ es un poliedro de la esfera S^2 . Dado que D^3 es contráctil, $\pi_1(|K|) \simeq \{e\}$. Utilizando (117) se tiene que $\pi_1(S^2) \simeq \pi_1(|K|) \simeq \{e\}$. En general, para $n \geq 2$, los $(n+1)$ -símplex σ_{n+1} y la frontera de σ_{n+1} tiene el mismo 2-esqueleto. Si se nota que σ_{n+1} es contráctil y la frontera de σ_{n+1} es un poliedro de S^n , tenemos la fórmula:

$$\pi_1(S^n) \simeq \{e\} \quad n \geq 2 \quad (118)$$

Ejemplo 3.6. Sea $K \equiv \{v_1, v_2, v_3, \langle v_1v_2 \rangle, \langle v_1v_3 \rangle, \langle v_2v_3 \rangle\}$ un cómplex simplicial de un círculo S^1 . Si se toma v_1 como punto base, un árbol maximal puede ser $L = \{v_1, v_2, v_3, \langle v_1v_2 \rangle, \langle v_1v_3 \rangle\}$. Hay solo un generador g_{23} . Dado que no hay 2-símplex en K , la relación es vacía. Por tanto:

$$\pi_1(S^1) \simeq G(K; L) = (g_{23}; \emptyset) \simeq \mathbb{Z} \quad (119)$$

de acuerdo con el *teorema 3.8*.

Ejemplo 3.7. Un n -ramo se define por un punto de unión de n círculos. Por ejemplo, la figura 31 es una triangulación de un 3-ramo. Tómesese el punto común v como punto base. Las líneas negras de la figura 31 forman un árbol maximal L . Los generadores de $G(K; L)$ son g_{12} , g_{34} y g_{56} . Como no hay relaciones se tiene que:

$$\pi_1(3\text{-ramo}) = G(K; L) = (x, y, z; \emptyset). \quad (120)$$

Observar que es un grupo libre, pero no es *abeliano*. La no conmutatividad puede mostrarse de la siguiente manera. Sean los lazos α y β que rodean diferentes agujeros. Obviamente, el producto $\alpha\beta\alpha^{-1}$ no puede ser deformado de manera continua en β , por lo que $[\alpha] * [\beta] * [\alpha]^{-1} \neq [\beta]$, o lo que

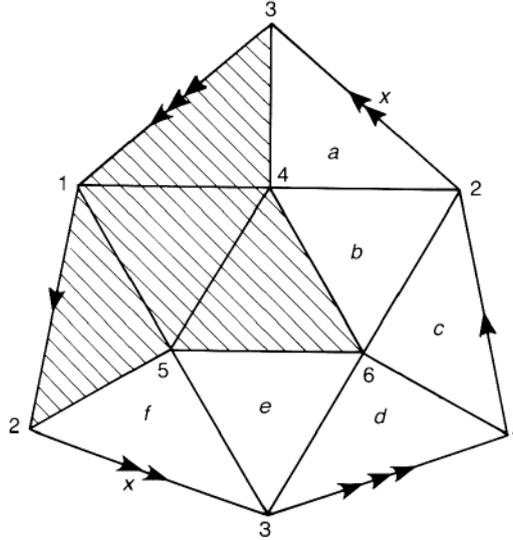


Figura 32: Una triangulación del plano proyectivo.

es igual:

$$[\alpha] * [\beta] \neq [\beta] * [\alpha] \quad (121)$$

En general, un n -ramo tiene n generadores $g_{12}, \dots, g_{2n-1, 2n}$ y el grupo fundamental es isomorfo al grupo libre con n generadores sin relaciones.

Ejemplo 3.8 Sea D^2 un disco bidimensional. Una triangulación K de D^2 es dada por un triángulo incluyendo su interior. Claramente K puede ser L y $K-L$ es vacío. Por lo que se tiene que $\pi_1(K) \simeq \{e\}$.

Ejemplo 3.9. La figura 32 es la triangulación del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$. El área sombreada es el subcómplex L . Hay siete generaciones y seis relaciones.

Sea $x = g_{23}$ y se escriben a continuación las relaciones:

1. $g_{23} g_{34} = g_{24} \rightarrow g_{24} = x$
2. $g_{24} g_{46} = g_{26} \rightarrow g_{26} = x$
3. $g_{12} g_{26} = g_{16} \rightarrow g_{16} = x$
4. $g_{13} g_{36} = g_{16} \rightarrow g_{36} = x$
5. $g_{35} g_{56} = g_{36} \rightarrow g_{35} = x$
6. $g_{23} g_{35} = g_{25} x^2 = 1$

Aquí, encontramos que:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq (x; x^2) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad (122)$$

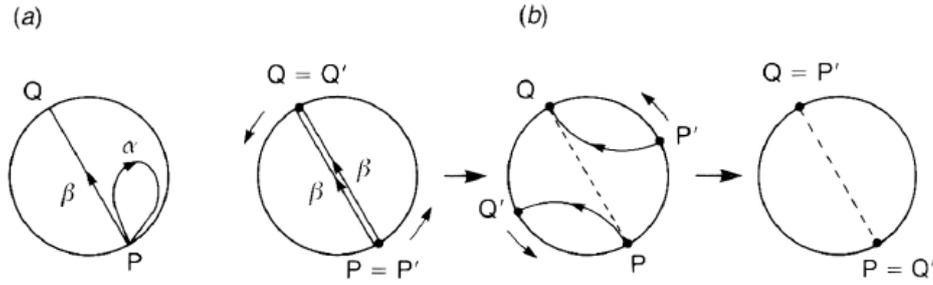


Figura 33: (a) es un lazo trivial mientras que el lazo β no puede ser encogido en un punto. (b) $\beta * \beta$ es reducido a un punto de manera continua.

Intuitivamente, la apariencia de un grupo cíclico es entendida de la siguiente manera. La figura 33 es un esquema de la imagen del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$. Tómense los lazos α y β . Es fácil ver que α puede ser deformado de manera continua a un punto y, por lo tanto, es el elemento trivial de $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Dado que los puntos diametralmente opuestos son identificados en $\mathbb{R}P^2$, β es realmente un lazo cerrado. Dado que no puede ser encogido a un punto, se trata del elemento no trivial de $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. ¿Qué podemos decir del producto $\beta * \beta$ es un lazo que atraviesa desde P a $Q \sim P$ dos veces? Esto puede ser entendido en la figura 33 (b) observando que $\beta * \beta$ puede ser encogido de manera continua en un punto, por lo que pertenecería a la clase trivial. Esto muestra que el generador correspondiente a la clase de homotopía del lazo β , satisface la relación $x^2 = 1$, el cual siempre verifica nuestro resultado. Con imágenes similares se puede mostrar que:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^3) \simeq \mathbb{Z}_2 \tag{123}$$

donde $\mathbb{R}P^3$ se representa con S^3 con los puntos diametralmente opuestos identificados, $\mathbb{R}P^3 = S^3/(x \sim -x)$. Si tomamos el hemisferio de S^3 como representación, $\mathbb{R}P^3$ puede ser expresado como una bola sólida D^3 con los puntos superficiales diametralmente opuestos identificados. Si los discos (D^2) en la figura 33 son interpretados como bolas sólidas las mismas imágenes muestran que $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \simeq \mathbb{Z}_2$.

A continuación se responderá a la pregunta sobre cuál es la relación entre el grupo de homología $H_1(K)$ y el de homotopía $\pi_1(|K|)$.

El lector quizás haya notado que existe cierta similitud entre el primer grupo de homología $H_1(K)$ y el grupo fundamental $\pi_1(|K|)$. Por ejemplo, los grupos fundamentales de muchos espacios (círculo, disco, n -esferas, toros,...) son idénticos al correspondiente primer grupo de homología. En algunos casos, sin embargo, son diferentes: $H_1(2-rama) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $\pi_1(2-rama) = (x, y; \emptyset)$. Analizar que $H_1(2-rama)$ es un grupo abeliano libre mientras que $\pi_1(2-rama)$ es un grupo libre no abeliano.

Teorema 3.9. Sea K un *cóplex simplicial conexo*. Entonces $H_1(K)$ es isomorfo a $\pi_1(|K|)/F$, don-

de F es el subgrupo conmutador de $\pi_1(|K|)$.

Sea G un grupo cuya presentación es $(x_i; r_m)$. El subgrupo conmutador F de G es el grupo generado por los elementos de la forma $x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$. Entonces, G/F es un grupo generado por $\{x_i\}$ con el conjunto de relaciones $\{r_m\}$ y $\{x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}\}$. El teorema formula que si $\pi_1(|K|) = (x_i; r_m)$, entonces $H_1(K) \simeq (x_i; r_m, x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})$. Por ejemplo, de $\pi_1(2 - rama)$ se tiene que:

$$\pi_1(2 - rama)/F \simeq (x, y; xyx^{-1}y^{-1}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (124)$$

el cual es isomorfo a $H_1(2 - rama)$.

La demostración se puede encontrar en Greenberg y Harper (1981) [6].

Ejemplo 3.10. Dado que $\pi_1(Klein) \simeq (x, y; xyxy^{-1})$, se tiene

$$\pi_1(Klein)/F \simeq (x, y; xyxy^{-1}, xyx^{-1}y^{-1}) \quad (125)$$

Las dos relaciones son reemplazadas por $x^2 = 1$ y $xyx^{-1}y^{-1} = 1$. Se muestra que:

$$\pi_1(Klein)/F \simeq (x, y; xyx^{-1}y^{-1}, x^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq H_1(Klein) \quad (126)$$

Corolario 3.2. Sea X un espacio topológico conexo. Entonces $\pi_1(X)$ es isomorfo a $H_1(K)$ si y solo si $\pi_1(X)$ es conmutativo. En particular si $\pi_1(X)$ es generado por un solo generador, $\pi_1(X)$ es siempre isomorfo a $H_1(X)$.

Corolario 3.3. Si X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, los primeros grupos de homología son idénticos: $H_1(X) = H_1(Y)$.

Grupos de homotopía de orden superior

El grupo fundamental clasifica las clases de homotopía de lazos en un espacio topológico X . Existen otras formas de asignar grupos a X . Por ejemplo, quizás podríamos clasificar las clases de homotopía de esferas en X o las clases de homotopía de toros en X . Resulta que las clases de homotopía de la esfera S^n ($n \geq 2$) forman unos grupos con características similares al grupo fundamental.

Sea I^n ($n \geq 1$) para denotar el n -cubo $I \times \cdots \times I$,

$$I^n = \{(s_1, \dots, s_n) \mid 0 \leq s_i \leq 1 \mid (1 \leq i \leq n)\} \quad (127)$$

La frontera ∂I^n es la frontera geométrica de I^n ,

$$\partial I^n = \{(s_1, \dots, s_n) \in I^n \mid s_i = 0 \cup 1\} \quad (128)$$

Nótese que en el caso del grupo fundamental, la frontera de I se mapea al punto base x_0 . Similarmente, se asume que se tendrán aplicaciones continuas $\alpha : I^n \rightarrow X$ tales que la imagen de ∂I^n es un punto $x_0 \in X$.

Esta aplicación α se denomina *n-lazo* en x_0 . A continuación, se realiza una generalización directa de la *definición 3.4*.

Definición 3.10. Sea X un espacio topológico y sean $\alpha, \beta : I^n \rightarrow X$ *n-lazos* en $x_0 \in X$. La aplicación α es homotópica a β , denotado por $\alpha \sim \beta$, si existe una aplicación continua $F : I^n \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{cases} F(s_1, \dots, s_n, 0) = \alpha(s_1, \dots, s_n) \\ F(s_1, \dots, s_n, 1) = \beta(s_1, \dots, s_n) \\ F(s_1, \dots, s_n, t) = x_0 \quad \forall (s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n, t \in I \end{cases} \quad (129)$$

F se llama *homotopía* entre α y β .

Nota: Puede probarse que $\alpha \sim \beta$ es una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de α se llama *clase de homotopía* de α y se denota $[\alpha]$.

Vamos a definir ahora las operaciones de grupo.

El producto $\alpha * \beta$ de *n-lazos* se define por:

$$\alpha * \beta(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, \dots, s_n) & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s_1 - 1, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases} \quad (130)$$

El producto puede entender mejor observando la figura 34(a). Es útil representarlo como en la figura 34(b).

Se define el lazo inverso como:

$$\alpha^{-1}(s_1, \dots, s_n) \equiv \alpha(1 - s_1, \dots, s_n) \quad (131)$$

que satisface que:

$$\alpha^{-1} * \alpha(s_1, \dots, s_n) \sim \alpha * \alpha^{-1}(s_1, \dots, s_n) \sim c_{x_0}(s_1, \dots, s_n) \quad (132)$$

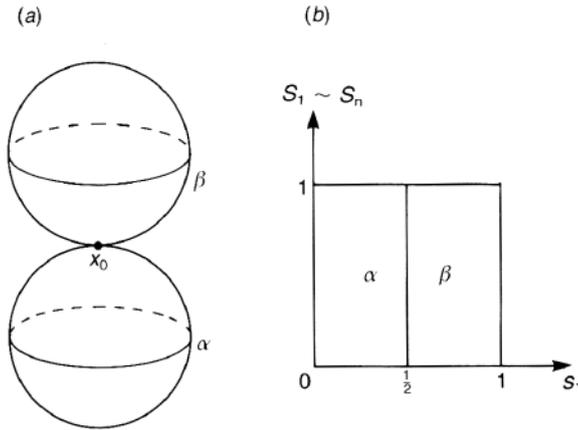


Figura 34: Un producto $\alpha * \beta$ de n -lazos α y β .

donde c_{x_0} es un n -lazo constante en $x_0 \in X$.

Definición 3.11. Sea X un espacio topológico. El conjunto de las clases de homotopía de los n -lazos en $x_0 \in X$ se denota por $\pi_n(X, x_0)$ y se llama n -ésimo grupo de homotopía en x_0 . $\pi_n(x, x_0)$ se denomina grupo de homotopía de orden superior si $n \geq 2$.

El producto $[\alpha] * [\beta]$ se define de manera natural como::

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta] \quad (133)$$

donde α y β son n -lazos en x_0 .

Proposición 3.3. El n -ésimo grupo de homotopía es un grupo.

Una propiedad muy importante de los grupos de homotopía de orden superior es que son siempre abelianos. Es decir para cualquier par de n -lazos α y β en $x_0 \in X$, $[\alpha]$ y $[\beta]$ se cumple que:

$$[\alpha] * [\beta] = [\beta] * [\alpha] \quad (134)$$

Para verificar esta aseveración obsérvese al figura 35. Claramente la deformación es homotópica en cada paso de la secuencia. Esto prueba que $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$.

Si un espacio topológico X es conexo por caminos, $\pi_n(X, x_0)$ será isomorfo a $\pi_n(X, x_1)$ para cualquier pareja x_0, x_1 . La prueba es similar al teorema equivalente en grupos de homotopía de primer orden.

Teorema 3.10. (Invariancia homotópica de los grupos de homotopía de orden superior):

Sean X e Y dos dos espacios topológicos con el mismo tipo de homotopía. Si $f : X \rightarrow Y$ es una

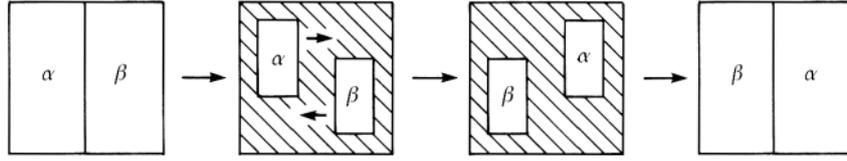


Figura 35: Los grupos de homotopía de orden superior son siempre conmutativos, $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$.

homotopía de equivalencia, el grupo de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_n(Y, f(x_0))$.

La invariancia topológica de los grupos de homotopía de orden superior es una consecuencia directa de este hecho. En particular si X es contráctil, los grupos de homotopía son todos triviales: $\pi_n(X, x_0) = \{e\}, n > 1$.

Teorema 3.11. Sean X e Y dos espacios topológicos conexos por caminos. Entonces:

$$\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \quad (135)$$

Existen varios casos en los cuales los grupos de homotopía de un espacio son dados por los grupos de homotopía conocidos de otro espacio. Esto es una propiedad interesante entre los grupos de homotopía de orden superior y su *espacio de recubrimiento universal*.

Definición 3.12. Sean X y \tilde{X} dos espacios topológicos conexos. La pareja (\tilde{X}, p) o simplemente, \tilde{X} se denomina *espacio recubrimiento de X* si existe una aplicación continua $p: \tilde{X} \rightarrow X$ tal que:

- (1) p es suprayectiva.
- (2) Para todo $x \in X$ existe un conjunto abierto conexo $U \subset X$ conteniendo a x , tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos en \tilde{X} , cada uno de los cuales es identificado de manera homeomorfa a U mediante la aplicación p .

En particular, si \tilde{X} es simplemente conexo, (\tilde{X}, p) se denomina *espacio recubrimiento universal de X* .

Nota: ciertos grupos son también conocidos como espacios topológicos, son los llamados grupos topológicos. Por ejemplo, $SO(n)$ y $SU(n)$ son grupos topológicos. Si X y \tilde{X} son grupos topológicos y la aplicación p es un homomorfismo de grupos, entonces el espacio recubrimiento (universal) se dirá *grupo recubrimiento (universal)*.

Ejemplo 3.11. \mathbb{R} es un espacio de recubrimiento universal de S^1 . Dado que S^1 se identifica con $U(1)$, \mathbb{R} es un grupo de recubrimiento universal de $U(1)$ si \mathbb{R} es entendido como un grupo aditivo. La aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow U(1)$ tal que $p : x \mapsto e^{i2\pi x}$. Claramente p es suprayectiva y si $U = \{e^{i2\pi x} | x \in (x_0 - 0.1, x_0 + 0.1)\}$, entonces

$$p^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (x_0 - 0.1 + n, x_0 + 0.1 + n) \quad (136)$$

la cual es una unión disjunta de conjuntos abiertos de \mathbb{R} . Es fácil mostrar que p es también un homomorfismo de grupos respecto a la adición en \mathbb{R} y el producto en $U(1)$. Por tanto, (\mathbb{R}, p) es un grupo de recubrimiento universal de $U(1) = S^1$.

Teorema 3.12. *Sea (\tilde{X}, p) un espacio de recubrimiento universal de un espacio topológico conexo X . Si $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ son puntos base tales que $p(\tilde{x}_0) = x_0$, el homomorfismo inducido*

$$p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \quad (137)$$

es un isomorfismo para $n \geq 2$. [Importante: Este teorema no es de aplicación si $n = 1$. Contraejemplo: $\pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$ mientras que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.]

La prueba se encuentra en Croom (1978) [13].

Este teorema permite probar que:

$$\pi_n(S^1) \simeq \pi_n(U(1)) = \{e\} \quad n \geq 2 \quad (138)$$

Ejemplo 3.12. Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | |x|^2 = 1\}$. El plano proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ se obtiene identificando los pares de puntos antipodales $(x, -x)$ de S^n . Es fácil ver que S^n es un espacio de recubrimiento de $\mathbb{R}P^n$ para $n \geq 2$. Dado que $\pi_1(S^n) = \{e\}$ para $n \geq 2$, S^n es el espacio de recubrimiento de $\mathbb{R}P^n$ y se tiene que:

$$\pi_n(\mathbb{R}P^n) \simeq \pi_n(S^n) \quad (139)$$

Es importante señalar que $\mathbb{R}P^3$ se identifica con $SO(3)$. Para ver esto es necesario especificar cada elemento de $SO(3)$ con una rotación a lo largo de un eje \vec{n} un ángulo θ ($0 < \theta < \pi$) y asignar un ‘vector’ $\vec{\Omega} \equiv \theta \vec{n}$ a este elemento. $\vec{\Omega}$ toma valores en el disco D^3 de radio π . Además, $\pi \vec{n}$ y $-\pi \vec{n}$ representan la misma rotación y deberían ser identificadas. Por tanto, el espacio al que $\vec{\Omega}$ pertenece es un disco D^3 cuyos puntos antipodales en la superficie S^2 están identificados. Advertir también que podemos expresar $\mathbb{R}P^3$ como el hemisferio norte D^3 de S^3 , cuyos puntos antipodales en la frontera S^2 son identificados. Esto también muestra que $\mathbb{R}P^3$ se identifica con $SO(3)$.

Es también interesante ver que S^3 se identifica con $SU(2)$. Primero hay que observar que cualquier

elemento $g \in SU(2)$ se escribe como:

$$g = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (140)$$

Si escribimos $a = u + iv$ y $b = x + iy$, esto se convierte en S^3 ya que se cumple que:

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1 \quad (141)$$

Utilizando todos estos resultados se comprueba que:

$$\pi_n(SO(3)) = \pi_n(\mathbb{R}P^3) = \pi_n(S^3) = \pi_n(SU(2)) \quad n \geq 2. \quad (142)$$

Para ser más general, el grupo de recubrimiento universal, $Spin(n)$ de $SO(n)$ se llama *grupo de spin*. Para n pequeños estos grupos son:

$$Spin(3) = SU(2) \quad (143)$$

$$Spin(4) = SU(2) \times SU(2) \quad (144)$$

$$Spin(5) = USp(4) \quad (145)$$

$$Spin(6) = SU(4) \quad (146)$$

Aquí $USp(4)$ está formado por el grupo compacto de $2N \times 2N$ matrices que satisfacen $A^t J A = J$,

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$

En general, no existen algoritmos para calcular grupos de homotopía de orden superior $\pi_n(X)$. Son necesarios métodos *ad hoc* para cada espacio topológico si $n \geq 2$. Aquí se van a mostrar algunos ejemplos en los cuales los grupos de homotopía de orden superior pueden ser obtenidos mediante argumentos intuitivos. En la tabla 36 del libro de Nakahara [1] se encuentran resultados para grupos que pueden ser de utilidad.

Ejemplo 3.13. Si nos damos cuenta de que $\pi_n(X, x_0)$ es el conjunto de las clases de homotopía de n -lazos S^n en X , inmediatamente vemos que:

$$\pi_n(S^n, x_0) \simeq \mathbb{Z} \quad n \geq 1 \quad (147)$$

Si α mapea S^n a un punto $x_0 \in S^n$, $[\alpha]$ es el elemento unidad $0 \in \mathbb{Z}$. Dado que $I^n/\partial I^n$ y S^n son

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
SO(3)	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
SO(4)	\mathbb{Z}_2	0	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12} + \mathbb{Z}_{12}$
SO(5)	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0
SO(6)	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
SO(n) $n > 6$	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0	0
U(1)	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0
SU(2)	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
SU(3)	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_6
SU(n) $n > 3$	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
S^2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
S^3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
S^4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
G_2	0	0	\mathbb{Z}	0	0	\mathbb{Z}_3
F_4	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0
E_6	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0
E_7	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0
E_8	0	0	\mathbb{Z}	0	0	0

Figura 36: Tabla de algunos grupos de homotopía de utilidad

orientables, se pueden asignar orientaciones a ellas. Si α mapea $I^n/\partial I^n$ de manera homeomorfa a S^n en el mismo sentido de orientación, entonces $[\alpha]$ es asignada a un elemento $1 \in \mathbb{Z}$. Si un homeomorfismo α mapea $I^n/\partial I^n$ hacia S^n con una orientación de sentido opuesto, $[\alpha]$ correspondería al elemento -1 . Por ejemplo, sea $n = 2$. Dado que $I^2/\partial I^2 \simeq S^2$, el punto en I^2 puede ser expresado mediante coordenadas polares (θ, Φ) , observad la figura 37.

Similarmente, $X = S^2$ puede ser expresado con las coordenadas polares (θ', Φ') . Sea $\alpha : (\theta, \Phi) \rightarrow (\theta', \Phi')$ un 2-lazo en X . Si $\theta' = \theta$ y $\Phi' = \Phi$, el punto (θ', Φ') recorre S^2 una vez mientras que el punto (θ, Φ) barre también una vez I^2 con la misma orientación. Este lazo pertenece a la clase $+1 \in \pi_2(S^2, x_0)$.

Si $\alpha : (\theta, \Phi) \rightarrow (\theta', \Phi')$ es dada por $\theta' = \theta$ y $\Phi' = 2\Phi$, el punto (θ', Φ') recorre S^2 dos veces mientras que (θ, Φ) solo barre I^2 una vez. Este 2-lazo pertenece a la clase $2 \in \pi_2(S^2, x_0)$. En general, la aplicación $(\theta, \Phi) \mapsto (\theta, k\Phi)$, $k \in \mathbb{Z}$, corresponde a la clase $k \in \pi_2(S^2, x_0)$. Un argumento similar hace que $\pi_n(S^n, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ se verifique para $n > 2$.

Ejemplo 3.14. Notar que S^n es un espacio de recubrimiento universal de $\mathbb{R}P^n$ para $n > 2$, por lo que se tiene que:

$$\pi_n(\mathbb{R}P^n) \simeq \pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \quad n \geq 2 \quad (148)$$

Esta afirmación también es cierta para $n = 1$ ya que $\mathbb{R}P = S^1$. Por ejemplo, se tendrá que $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \simeq$

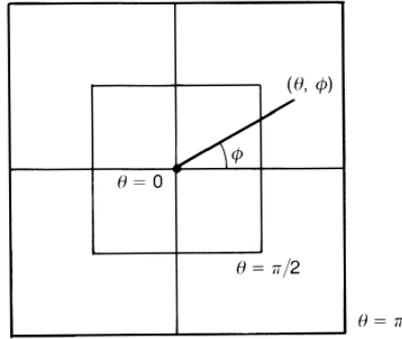


Figura 37: Un punto en I^2 puede ser expresado en coordenados polares (θ, ϕ) .

$\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$. Dado que $SU(2) = S^3$ es un grupo de recubrimiento universal de $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, del *teorema 3.12*. se sigue que:

$$\pi_3(SO(3)) \simeq \pi_3(SU(2)) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z} \quad (149)$$

El **monopolo de Shankar** en el He^3 -A superfluido va a corresponder a uno de estos elementos no triviales de las clases de homotopía. Estos cálculos serán de vital utilidad en la explicación de los defectos de dicho He^3 -A superfluido.

4. CLASIFICACIÓN DE TEXTURAS Y DEFECTOS TOPO-LÓGICOS

En esta sección, se resuelven algunos de los problemas enunciados en la sección 2, clasificando definitivamente algunas de las texturas y defectos que se habían propuesto. El objetivo será ejemplificar algunas utilidades de la teoría topológica expuesta en línea con los problemas físicos planteados. Lejos de pretender exhaustividad, se busca exponer la enorme complejidad que requiere el cálculo e inteligibilidad de los tipos de texturas y defectos. Se mostrarán ejemplos de texturas en dimensiones superiores (mayores a tres), que lejos de ser un divertimento matemático, manifiestan sus consecuencias en sistemas físicos reales.

4.1. Defectos de línea en cristales nemáticos

En el *ejemplo 3.9.* se ha visto que $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Por consiguiente, existirán dos defectos de línea en cristales nemáticos; uno puede ser deformado de manera continua en una configuración uniforme mientras que el otro no. Este último representa un vórtice estable, el cual se esquematiza en la figura 38. Debería observarse como el lazo α es mapeado al plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ mediante esta textura.

En el plano proyectivo no existen otros defectos puntuales, ya que la clase del 0 representaría una configuración uniforme. Cabe preguntarse qué ocurre cuando se fusionan dos defectos de línea de tipo 1 como los de la figura 39. En este caso puede decirse que dicha configuración puede deformarse hasta llegar a una uniforme, lo que representa la operación $1+1=0 \in \mathbb{Z}_2$. Esta deformación continua implica que, a medida que las líneas proyectivas se mueven y se estiran, el punto de intersección se

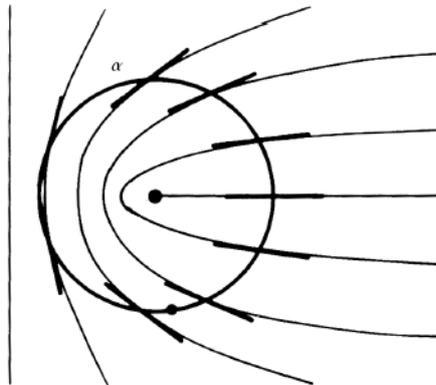


Figura 38: Un vórtice en un cristal nemático líquido, que corresponde al elemento no trivial de $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$.

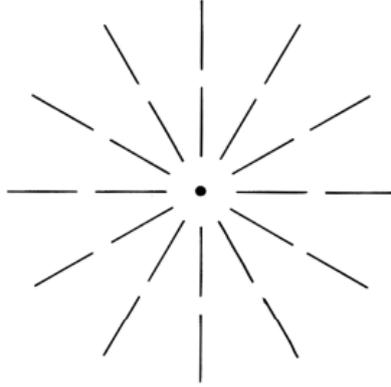


Figura 39: Un defecto de línea que puede ser deformado de manera continua en una configuración uniforme. Corresponde a la operación $1 + 1 = 0 \in \mathbb{Z}_2$.

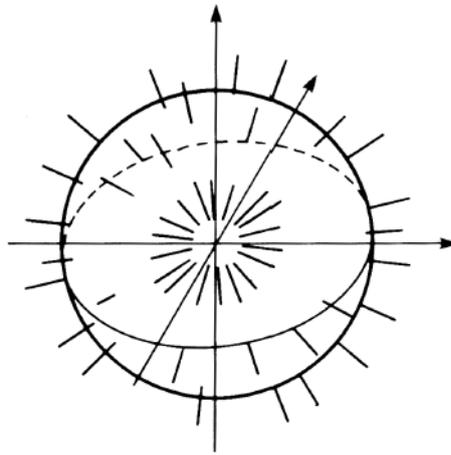


Figura 40: La textura de un defecto puntual en un cristal líquido nemático.

separa gradualmente y se distribuye uniformemente a lo largo de las líneas proyectivas. La clave para comprender esta deformabilidad continua radica en la topología del plano proyectivo. En el plano proyectivo, se considera que los puntos del borde superior e inferior están identificados y se pegan entre sí, lo que significa que el plano proyectivo no tiene un borde o límite fijo. Esto permite que las líneas proyectivas se deformen de manera continua y se extiendan al infinito en ambas direcciones.

4.2. Defectos puntuales en cristales nemáticos

En el *ejemplo 3.14.*, se muestra que $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$. De acuerdo con esto, existen defectos puntuales estables en el cristal nemático. La figura 40 muestra la textura de un defecto puntual que pertenece a la clase $1 \in \mathbb{Z}$.

Es interesante apuntar que un defecto de línea y un defecto puntual pueden ser combinados en un **defecto de anillo**, el cual es especificado tanto por $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ y $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$ (ver Mineev (1980) [12]). Si el anillo se observa desde lejos, parece como un defecto puntual, mientras que su estructura local es

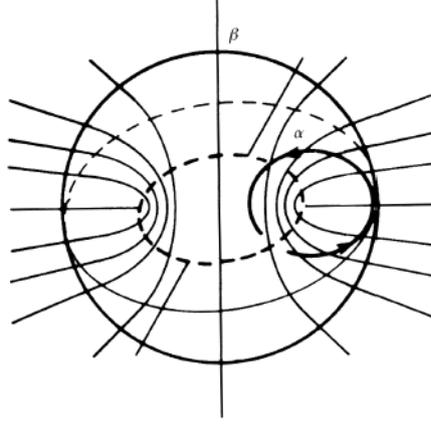


Figura 41: La textura de un defecto de anillo en un cristal nemático líquido. El lazo α clasifica $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ mientras que la esfera (2-lazo) β clasifica $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$.

especificada por $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. La figura 41 es un ejemplo de dicho defecto de anillo. El lazo α clasifica $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$ mientras que la esfera (2-lazo) β clasifica $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$.

4.3. Texturas de los cristales nemáticos en dimensiones superiores

El tercer grupo de homotopía $\pi_3(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}$ nos lleva a una interesante textura libre de singularidades en un medio tridimensional de un cristal nemático. Supongamos que el campo director se aproxima asintóticamente a una configuración, por ejemplo, $\vec{n} = (1, 0, 0)^t$ si $|\vec{r}| \rightarrow \infty$. Entonces el medio se ha compactificado en una esfera tridimensional S^3 y la estructura topológica de la textura es clasificada por $\pi_3(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}$. ¿Cuál es la textura correspondiente a un elemento no trivial del grupo de homotopía?

Una rotación arbitraria en \mathbb{R}^3 es determinada por un vector unitario \vec{e} a lo largo del que se produce la rotación y el ángulo de rotación α . Es posible asignar un ‘vector’ $\Omega = \alpha\vec{e}$ a esta rotación. No es exactamente un vector ya que $\Omega = \pi\vec{e}$ y $-\Omega = -\pi\vec{e}$ representan la misma rotación y, por tanto, deberían ser identificadas. Por consiguiente, Ω se encuentra dentro del espacio proyectivo real tridimensional $\mathbb{R}P^3$. Supongamos que se toma $\vec{n}_0 = (1, 0, 0)^t$ como el director estándar. Entonces una configuración de director arbitraria es especificada mediante la rotación de \vec{n}_0 alrededor de algún eje \vec{e} y algún ángulo α , es decir: $\vec{n} = R(\vec{e}, \alpha)\vec{n}_0$, donde $R(\vec{e}, \alpha)$ es la correspondiente matriz de rotación en $SO(3)$. Supongamos una textura cuyo campo es dado por la aplicación de la rotación

$$\alpha\vec{e}(\vec{r}) = f(r)\hat{r} \tag{150}$$

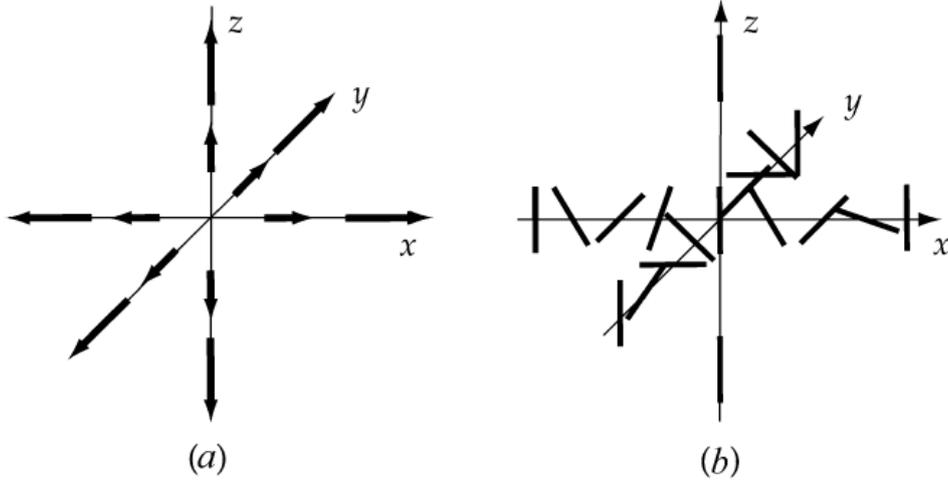


Figura 42: La textura de un elemento no trivial de $\pi_3(\mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}$. (a) muestra que el vector de rotación $\alpha\vec{e}$. La longitud α se aproxima a π cuando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$. (b) muestra el correspondiente campo director.

hacia \vec{n}_0 , donde \hat{r} es el vector unitario en la dirección del vector posición \vec{r} y la función

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ \pi & \text{si } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (151)$$

La figura 42 muestra el campo director de esta textura. Observar que al pertenecer a la clase no trivial $1 \in \mathbb{Z}$, aunque no existen singularidades en la textura, es imposible deformarla hasta una configuración uniforme.

4.4. Defectos de línea y vórtices no singulares en He^3-A

El grupo fundamental de $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$ es $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq \{0, 1\}$. Las texturas que pertenecen a la clase 0 pueden ser deformadas de manera continua en una configuración uniforme. Las configuraciones en la clase 1 se denominan **dislocaciones** y han sido analizadas por Maki y Tsuneto (1977) [9]. La figura 43 describe estas dislocaciones en sus configuraciones de mínima energía libre.

Una propiedad importante de \mathbb{Z}_2 es la suma $1 + 1 = 0$; la fusión de dos dislocaciones produce una textura trivial. Fusionando dos dislocaciones se puede construir una textura que parece un vórtice de doble vorticidad (clase de homotopía 2) sin singularidad en el núcleo. Si observamos la figura 44 (a) es fácil verificar que la imagen del lazo α atraviesa $\mathbb{R}P^3$ dos veces mientras que el lazo menor β puede ser deformado de manera continua en un punto. Esta textura se llama **vórtice de Anderson-Toulouse** [16]. Por otra parte, Mermin y Ho (1976) [18] han mostrado que si el medio es un cilindro, la frontera tiene la condición $\hat{l} \perp$ (frontera) y el vórtice es cortado en la superficie, véase figura 44(b)

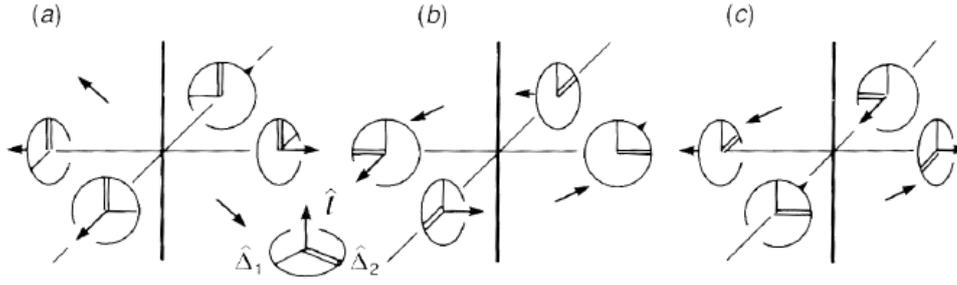


Figura 43: Dislocaciones en He^3-A .

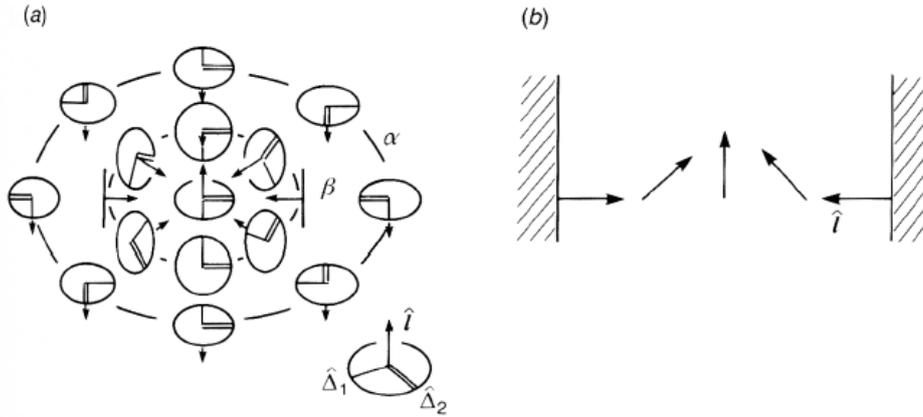


Figura 44: El vórtice Anderson-Toulouse (a) y el vórtice de Mermin-Ho. En (b) la frontera fuerza \hat{l} a ser perpendicular a la barrera.

(el **vórtice de Mermin-Ho**).

Dado que $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \simeq \{e\}$, no hay defectos puntuales en $He^3 - A$. Sin embargo, $\pi_3(\mathbb{R}P^3) \simeq \mathbb{Z}$ introduce un nuevo tipo similar a la estructura de defecto puntual llamada monopolo de Shankar, que se estudiará en el siguiente apartado.

4.5. Monopolo de Shankar en He^3-A

Shankar (1977) [17] mostró que existe un defecto similar a uno puntual libre de singularidades en He^3-A . Consideren un medio infinito de He^3-A . Se asume que el medio es asintóticamente uniforme, esto es, $(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l})$ se aproxima a la base ortonormal estándar $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ cuando $|r| \rightarrow \infty$. Dado que todos los puntos lejanos del origen son mapeados a un único punto, se ha compactificado \mathbb{R}^3 en S^3 . Entonces esta textura se clasifica de acuerdo a $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}$. Vamos a especificar un elemento de $SO(3)$ por un ‘vector’ $\vec{\Omega} = \theta\vec{n}$ en $\mathbb{R}P^3$ como antes. (Recuérdese el *Ejemplo 3.14*.)

$$\vec{\Omega}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} f(r) \quad (152)$$

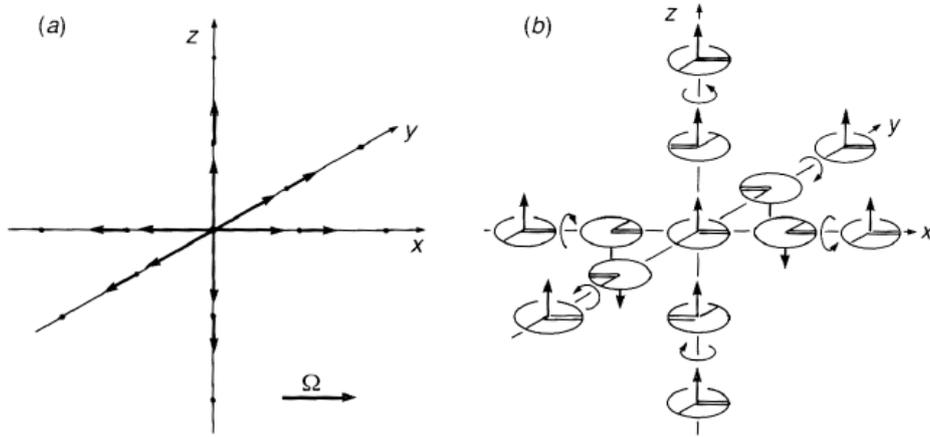


Figura 45: El monopolo de Shankar: (a) muestra que el campo de vectores $\vec{\Omega}(\vec{r})$ y (b) muestran la triada $(\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2, \hat{l})$. Notar que si $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ la triada se aproxima a la misma configuración.

donde $f(r)$ es una función monótona decreciente tal que:

$$f(r) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (153)$$

Formalmente se extiende el radio de $\mathbb{R}P^3$ a 2π y se define una rotación con ángulo módulo 2π . Esta textura se denomina **Monopolo de Shankar** (véase figura 45). A primera vista parece que existe una singularidad en el origen, sin embargo, la longitud de $\vec{\Omega}$ es 2π y es equivalente a la rotación unitaria de $SO(3)$. La figura 45(b) describe el campo trifásico. Dado que $\vec{\Omega}(\vec{r}) = 0$ si $r \rightarrow \infty$, independientemente de la dirección, el espacio \mathbb{R}^3 es compactificado a S^3 . Mientras obtenemos la imagen de todo el espacio, $\vec{\Omega}(\vec{r})$ rodea $SO(3)$ dos veces y esta textura corresponde a la clase 1 de $\pi_3(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}$.

Cabe preguntarse cómo se esquematiza el monopolo de Shankar que pertenece a la clase -1 de $\pi_3(\mathbb{R}P^3)$.

Las clases de homotopía sobre el espacio proyectivo se basan en la idea de que los elementos positivos del grupo de homotopía son los que no cambian la orientación de la superficie, por lo que el ángulo mínimo que necesitas darle al punto cero para que no cambie la orientación será 2π , cualquier otro ángulo cambiará esta orientación. Todos los múltiplos positivos de 2π tampoco cambiarán la orientación, por lo que estos múltiplos pertenecerán a las clases positivas de $\pi_3(\mathbb{R}P^3) \simeq \mathbb{Z}$. Los elementos negativos serán pues los múltiplos de π dado que estos sí que cambiarán la orientación. La aplicación que habría que definir para la clase $-1 \in \mathbb{Z}$ sería tal que $f(0) = \pi$ en lugar de 2π y que intercambie la orientación modificando alguna de las coordenadas como por ejemplo $\Omega_{-1}(x, y, z) = \Omega_1(x, -y, z)$. [19]

4.6. Objetos extendidos del modelo clásico de Heisenberg en \mathbb{R}^2

Se van a considerar los spines clásicos de Heisenberg definidos en \mathbb{R}^2 , los cuales supongamos que toman el valor asintótico:

$$\vec{S}(x) \rightarrow e_z \quad |x| \geq L \quad (154)$$

para que la energía total sea finita. Este hecho nos permite pasar al estudio de las aplicaciones del tipo $\alpha : I^2 \rightarrow S^2$, es decir de $2 - lazos$. Donde se puede suponer que $I^2 = [-L, L]^2 = [0, 1]^2$ sin pérdida de generalidad. Estas aplicaciones se clasifican según el grupo de homotopía $\pi_2(S^2)$. Dado que nos encontramos ante un sistema en dimensión $d = 2$, este grupo de homotopía clasifica *objetos extendidos*.

Tal como se analizó en el *ejemplo 3.13*, este grupo es isomorfo a \mathbb{Z} por lo que existirán un número infinito de clases de equivalencia. ¿Cómo serán dichas clases de equivalencia y, por consiguiente, las distintas configuraciones de spín equivalentes?

Este problema se aborda de manera más sencilla aplicando coordenadas polares tanto al espacio de salida I^2 como al espacio imagen de spines S^2 . En dichas coordenadas se comprueba como las aplicaciones del tipo $\alpha_k : (\theta, \Phi) \mapsto (\theta, k\Phi)$, $k \in \mathbb{Z}$, corresponden a la clase $k \in \pi_2(S^2, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.

Si k es negativo lo que ocurre es que el espacio S^2 se recorre en una orientación opuesta a que si k es positivo. El valor absoluto de $|k|$ estaría indicando el número de veces que se recorre dicho espacio, esto es, si $k = 2$ estaríamos barriendo dos veces S^2 al recorrer una única vez I^2 . Sería una configuración de spines en los que se toman todos los valores de S^2 dos veces. Los siguientes valores de k indicarían el número de veces que se recorre de manera completa S^2 , de esta manera quedarían clasificadas todas las posibles configuraciones de spín en un espacio bidimensional acotado o de energía finita.

Trivialmente, la configuración constante $\vec{S}_i = \vec{e}_z$ sería aquella perteneciente a la clase $0 \in \pi_2(S^2)$.

5. CONCLUSIONES

La teoría de Landau de las transiciones de fase de sistemas físicos ha sido el detonante de la explosión del conocimiento de las teorías topológicas en Física de la Materia Condensada. La definición precisa de parámetro de orden permite construir aplicaciones llamadas *texturas* que podemos clasificar en base al concepto de grupo de *homotopía*.

El grupo de *homotopía* clasifica, de manera esencial, dichas *texturas*. De forma que aquellas que pertenecen a clases diferentes no se pueden obtener como *deformaciones continuas* de otras. Esta imposibilidad permite hablar de que ciertas configuraciones tienen una *protección topológica*. Esta propiedad nos da información *global* del sistema.

Mientras que la Física ampliamente estudiada se construye sobre condiciones *locales* dadas por ecuaciones *diferenciales*, la topología permite descubrir propiedades *globales* que se relacionan estrechamente con las *condiciones de contorno* y las *simetrías*.

En este estudio se ha podido desarrollar de manera breve la introducción a respuestas acerca de diferentes manifestaciones físicas, como, por ejemplo:

- Ferromagnetismo y modelo de Heisenberg: el *monopolo de Belavin-Polyakov* muestra la existencia de defectos puntuales en sistemas de spines magnéticos cuando las condiciones de contorno se compactifican en el infinito. Se ha mostrado cómo los defectos pueden fusionarse o añadirse en función de la clase $n \in \mathbb{Z}$.
- Cristales líquidos nemáticos: se ha comprendido cómo la simetría de una molécula que forma los cristales nemáticos nos lleva a tener que definir el parámetro de orden dentro del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$. Se han podido clasificar sus posibles *defectos* en diferentes dimensiones al estudiar los grupos de homotopía en el plano proyectivo.
- He^3 Superfluido: se ha mostrado cómo la naturaleza cuántica del He^3 lleva a la introducción del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^3$ al tener simetría $SO(3)$. Analizando dicho espacio se ha comprobado cómo surgen las *dislocaciones* como la clase no trivial de defecto de línea. Se ha expuesto cómo pueden surgir defectos puntuales sin singularidades en dimensiones superiores, definiendo el denominado *Monopolo de Shankar*.

En conclusión, en este trabajo se ha partido de un problemas físicos concretos con los que se justifica el complejo desarrollo de la teoría topológica de los grupos de homotopía y cómo estos pueden dar respuesta a realidades físicas presentes en distintos materiales o fases de la materia. La investigación en este campo no resulta tan popular cómo pueden resultar las matemáticas del cálculo diferencial, pero, no por ello, debe resultar de menor interés. Espero que este texto haya ahondado en la importancia de profundizar en el estudio de las propiedades topológicas en la Física de la Materia Condensada.

Referencias

1. MIKIO NAKAHARA: 'GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS' SECOND EDITION
Department of Physics Kinki University, Osaka, Japan ISBN 0 7503 0606 8
2. L. LANDAU: 'ON THE THEORY OF PHASE TRANSITIONS' Translated and reprinted from
Landau L.D. "Collected Papers" (Nauka, Moscow, 1969), Vol. 1, pp. 234–252. Originally published
in Zh. Eksp. Teor. Fiz. 7, pp. 19–32 (1937)
3. LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M. (2013). Statistical Physics. Vol. 5. Elsevier. ISBN 978-
0080570464.
4. ERNEST ISING, Contribution to the Theory of Ferromagnetism This excerpt of the Hamburg
dissertation (1924) was first published in «Zeitschrift für Physik», vol. XXXI, 1925 (received on 9
December 1924).
5. HOFFMANN M, ZIMMERMANN B, MÜLLER GP, SCHÜRHOFF D, KISELEV NS, MELCHER C,
BLÜGEL S (August 2017). Antiskyrmions stabilized at interfaces by anisotropic Dzyaloshinskii-
Moriya interactions .Nature Communications. 8
6. GREENBERG M. J. AND HARPER J. R. 1981 Algebraic Topology: A First Course (Reading,
MA: Benjamin/Cummings)
7. FRANK POLLMANN, EREZ BERG, ARI M. TURNER, MASAKI OSHIKAWA Symmetry protection
of topological order in one-dimensional quantum spin systems; arXiv:0909.4059
8. ALFRED LEITNER photograph as part of my movie "Liquid Helium,Superfluid"
9. TSUNETO T. 1982 The Structure and Properties of Matter ed T Matsubara (Berlin: Springer)
p 101
10. CASTELLANO, JOSEPH A. (2005). Liquid Gold: The Story of Liquid Crystal Displays and the
Creation of an Industry. World Scientific Publishing. ISBN 978-981-238-956-5.
11. ARMSTRONG M. A. 1983 Basic Topology (New York: Springer)
12. MINEEV V. P. 1980 Sov. Sci. Rev. A 2 173
13. CROOM F. H. 1978 Basic Concepts of Algebraic Topology (New York: Springer)
14. MARIO RABINOWITZ Basic Connection between Superconductivity and Superfluidity Electric
Power Research Institute and Armor Research 715 Lakemead Way, Redwood City, CA 94062-3922
15. LEGGETT A. J. 1975 Rev. Mod. Phys. 47 331
16. ANDERSON P. W. AND TOULOUSE G. 1977 Phys. Rev. Lett. 38 408

17. SHANKAR R. 1977 J. Physique 38 1405
18. MERMIN N. D. AND HO T-L 1976 Phys. Rev. Lett. 36 594
19. MIKIO NAKAHARA Toy-Skyrmions in Superfluid $^3\text{He-A}$ Physics Institute, Faculty of Liberal Arts Shizuoka University, Shizuoka 422*) and School of Mathematical and Physical Sciences The University of Sussex, Brighton, BN1 9QH (Received November 20, 1986)