



Universidad de Oviedo

UNA VUELTA DE TUERCA  
AL EXPERIMENTO DE LA COPA DEL MUNDO

Jorge Álvarez Reyero

Dirigido por Enrique Miranda Menéndez

UNIVERSIDAD DE OVIEDO  
Facultad de Ciencias  
Grado en Matemáticas

Junio de 2023

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Modelos de probabilidades imprecisas . . . . .	5
1.1.1. Probabilidades inferiores y superiores . . . . .	6
1.1.2. Evitar la pérdida segura . . . . .	7
1.1.3. Coherencia . . . . .	7
1.1.4. Previsiones inferiores y superiores . . . . .	8
1.1.5. Conjuntos de apuestas deseables . . . . .	10
1.1.6. Intervalos de probabilidad . . . . .	11
1.1.7. Modelos de distorsión . . . . .	12
1.2. El experimento de la Copa del Mundo . . . . .	12
<b>2. Diseño y desarrollo del experimento</b>	<b>14</b>
2.1. Modelos de imprecisas considerados . . . . .	15
2.2. Modelos de puntuación . . . . .	15
2.3. Interfaz web . . . . .	16
2.4. Desarrollo del experimento . . . . .	17
<b>3. Análisis estadístico</b>	<b>20</b>
3.1. Análisis descriptivo de los participantes . . . . .	20
3.1.1. Análisis descriptivo de los participantes por género . .	20
3.1.2. Análisis descriptivo de los participantes según su edad	21
3.1.3. Análisis descriptivo de los participantes según su for-	
mación . . . . .	22
3.1.4. Análisis descriptivo de los participantes según sus co-	
nocimientos de probabilidades imprecisas . . . . .	22
3.2. Evolución de la puntuación . . . . .	24
3.2.1. Evolución de la clasificación . . . . .	25
3.2.2. Máximas ganancias y pérdidas por jornada . . . . .	28
3.3. Evolución de la imprecisión en las asignaciones . . . . .	30
3.3.1. Precisión en las asignaciones por jornada . . . . .	31
3.3.2. Precisión en las asignaciones por participante . . . . .	31

3.3.3. Margen medio de imprecisión por jornada . . . . .	33
<b>4. Análisis de la consistencia</b>	<b>35</b>
4.1. Evitar la pérdida segura . . . . .	38
4.1.1. Análisis según el campo de formación . . . . .	39
4.1.2. Análisis por género . . . . .	42
4.1.3. Análisis según el conocimiento previo en probabilidades imprecisas . . . . .	44
4.2. Coherencia . . . . .	45
4.2.1. Análisis según el campo de formación . . . . .	47
4.2.2. Análisis por género . . . . .	49
4.2.3. Análisis según el conocimiento previo en probabilidades imprecisas . . . . .	51
<b>5. Análisis de la consistencia a partir de funciones de penalización</b>	<b>53</b>
5.1. Análisis por campo de formación . . . . .	59
5.2. Análisis por género . . . . .	61
5.3. Análisis según el conocimiento previo en probabilidades imprecisas . . . . .	63
5.4. Discusión y comparación entre las condiciones de coherencia .	64
<b>6. Comparación de estrategias</b>	<b>66</b>
6.1. Resultados con estrategias ficticias . . . . .	66
6.2. Explotación de asignaciones . . . . .	74
<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>

# Resumen

El Mundial de Fútbol es uno de los mayores eventos deportivos que podemos disfrutar en la actualidad. Ya sea por su eterna espera de cuatro años, por los cánticos de las fervientes aficiones que alientan a sus naciones hasta la extenuación, o por el mero hecho de complacerse viendo un gran partido de fútbol de selecciones, lo cierto es que poca gente puede mantenerse al margen del deporte estrella mientras esté en juego el campeonato. Nosotros, insatisfechos con todas las emociones descritas anteriormente, hemos decidido llevar a cabo un experimento en el que los participantes se juegan puntos entre sí intentando vaticinar el resultado de cada partido del Mundial de Fútbol. Para ello, deberán asignar la probabilidad de los posibles sucesos del partido: *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*. En función de las asignaciones del resto de participantes y de los resultados de los partidos, podrán obtener más o menos puntos, y optar a los premios destinados a los tres primeros clasificados al final de la competición. Como novedad, las asignaciones pueden ser probabilidades *imprecisas*: esto es, pueden dar un rango de probabilidades para los resultados de los partidos.

Los objetivos que perseguimos con este estudio son los siguientes:

- Analizar si las condiciones de consistencia de probabilidades imprecisas desarrolladas por Peter Walley se cumplen en un contexto de asignación de probabilidades subjetivas.
- Estudiar si la aproximación de Teddy Seidenfeld en términos de funciones de penalización puede caracterizarse de forma sencilla en este contexto.
- Comparar los resultados de los participantes con asignaciones precisas e imprecisas, y además en función de su campo de formación.
- Investigar si existe una estrategia óptima para este experimento.

Esta memoria cuenta con seis capítulos principales. El Capítulo 1 incluye una introducción en donde se presentarán los conceptos más relevantes sobre los que trabajaremos, así como un resumen sobre experimentos similares llevados a cabo en el pasado. En el Capítulo 2 se mostrará el diseño de la interfaz web y los métodos de puntuación considerados, además de un

breve resumen del desarrollo del experimento. El Capítulo 3 tendrá como objetivo realizar un análisis descriptivo de los participantes, así como observar sus posiciones a lo largo del experimento y estudiar la evolución en la precisión de las asignaciones. En el Capítulo 4 se analizará si se cumplen las condiciones de consistencia de probabilidades imprecisas basadas en la primera de las dos caracterizaciones de las probabilidades finitamente aditivas descritas en [7] por Bruno de Finetti, la cual en el caso impreciso da lugar a las llamadas condiciones de *evitar la pérdida segura y coherencia*. Estudiaremos si estas condiciones se cumplieron en las asignaciones realizadas por los participantes, y si hubo diferencias estadísticas significativas entre grupos. Posteriormente, en el Capítulo 5 se llevará a cabo el análisis de la segunda caracterización de probabilidades finitamente aditivas de Bruno de Finetti tratada en [7], la cual da lugar a la condición de consistencia de Teddy Seidenfeld. A continuación, en el Capítulo 6 se indagará acerca de si existe alguna estrategia con la que se consiga una mayor puntuación. Por último, daremos las principales conclusiones de este trabajo y examinaremos las posibles líneas de trabajo futuro.

A lo largo del trabajo hemos desarrollado varios programas en *MATLAB* y hemos utilizado algunas herramientas de *RStudio* para determinar en qué casos se cumplen las distintas condiciones de consistencia, calcular la evolución de las puntuaciones a lo largo del experimento, realizar análisis estadísticos y obtener representaciones gráficas que nos ayuden a reforzar los razonamientos e ideas de cada capítulo. Los códigos de los programas utilizados se pueden encontrar en el Apéndice adjunto a este documento.

# Capítulo 1

## Introducción

Con el fin de que este proyecto sea lo más autocontenido posible, en este capítulo vamos a recordar una serie de conceptos básicos de la teoría de la probabilidad y de los modelos de probabilidades imprecisas, para después explicar brevemente las características de experimentos similares llevados a cabo en el pasado.

### 1.1. Modelos de probabilidades imprecisas

En esta memoria, trabajaremos sobre un espacio finito  $\Omega$ . La forma más habitual de modelizar nuestra incertidumbre acerca de un experimento con valores en  $\Omega$  es a través de una medida de probabilidad:

**Definición 1.1.** *Dado un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , se dice que  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad si se verifican las siguientes condiciones:*

i)  $P(\Omega) = 1$

ii)  $P(\emptyset) = 0$

iii) *Dados  $\{A_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  con  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ , entonces:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$$

**Observación 1.** *La definición anterior se establece de forma más general en la literatura en dos sentidos: por un lado, cuando  $\Omega$  es infinito, se distingue entre probabilidades finititamente aditivas y  $\sigma$ -aditivas, según que la condición iii) de la definición anterior se cumpla para familias finitas o numerables de conjuntos disjuntos dos a dos; y por otro lado, el dominio de  $P$  puede considerarse un álgebra o  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , y no necesariamente  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Estas dos distinciones no serán relevantes para este trabajo.*

Las medidas de probabilidad tienen varias interpretaciones distintas como modelos de incertidumbre [5]. Una de las más importantes es la llamada interpretación *subjetiva*, en la cual la probabilidad de un suceso es una medida de la evidencia a favor de la ocurrencia de ese suceso, y que puede por tanto variar entre unos sujetos y otros. Si bien esta interpretación amplía el campo de uso de la teoría de la probabilidad, surge también el problema de la asignación de estas probabilidades. En este sentido, Bruno de Finetti [7] estableció dos caracterizaciones de las probabilidades finitamente aditivas:

- La primera de ellas se establece en términos de apuestas deseables para un sujeto, y significa que una combinación lineal de apuestas deseables no debería de dar lugar a otra apuesta con la que el sujeto pierda dinero, sea cual sea el resultado del experimento.
- La segunda se basa en la introducción de funciones de penalización (las llamadas *scoring rules*) sobre las asignaciones.

A pesar de ello, y especialmente en el contexto de la probabilidad subjetiva, no es sencillo determinar la media de probabilidad asociada a un experimento cuando la información disponible es imprecisa o ambigua. Para tratar esta situación, han surgido una serie de modelos matemáticos que suelen agruparse con el término común de *probabilidades imprecisas*[1].

Existen una gran cantidad de modelos diferentes, más o menos restrictivos. La gran mayoría se pueden considerar como casos particulares de las llamadas medidas *difusas* o *no aditivas*:

**Definición 1.2.** *Dado un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , se denomina medida difusa o no aditiva a cualquier función  $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  que verifique:*

$$i) \quad \mu(\emptyset) = 0.$$

$$ii) \quad \mu(\Omega) = 1.$$

$$iii) \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ tal que } A \subseteq B, \text{ entonces } \mu(A) \leq \mu(B).$$

Si comparamos esta última definición con la Definición 1.1 de probabilidad finitamente aditiva, observamos que difieren únicamente en la condición de aditividad:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall A, B \text{ con } A \cap B = \emptyset$ , la cual no tiene por qué cumplirse. De esta forma, la familia de las medidas difusas contiene como caso particular a las probabilidades finitamente aditivas.

A continuación introducimos los principales modelos de probabilidades imprecisas como casos particulares de medidas difusas.

### 1.1.1. Probabilidades inferiores y superiores

La interpretación más sencilla de una medida difusa en el contexto de imprecisión sobre un experimento aleatorio es considerar que es una cota

inferior o superior de una medida de probabilidad  $P$ . En ese caso, suele denominarse *probabilidad inferior* o *superior*, respectivamente, y se denota por  $\underline{P}$  y  $\overline{P}$ , respectivamente.

Formalmente, a partir de una probabilidad inferior en  $\mathcal{P}(\Omega)$  podemos determinar una probabilidad superior y viceversa, considerando la siguiente relación de *conjugación*:

$$\overline{P}(A) = 1 - \underline{P}(A^c) \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

Es por ello que en la práctica suele considerarse únicamente uno de los dos modelos (habitualmente las probabilidades inferiores). Se puede interpretar la probabilidad inferior de un suceso  $A$ ,  $\underline{P}(A)$ , como una medida de la evidencia a favor de la ocurrencia de dicho suceso. Por su parte, la interpretación de la probabilidad superior del suceso  $A$ ,  $\overline{P}(A)$  sería una medida de la falta de evidencia en contra de la ocurrencia de dicho suceso.

### 1.1.2. Evitar la pérdida segura

Si consideramos la interpretación anterior de las probabilidades inferiores/superiores como cotas inferiores/superiores de la distribución de probabilidad desconocida  $P$  que modeliza la incertidumbre del experimento, una de las condiciones básicas que podremos exigirles sería su compatibilidad con alguna medida de probabilidad. Surge así una condición denominada en la literatura como *evitar la pérdida segura*. Esto es:

**Definición 1.3.** *Se dice que una probabilidad inferior  $\underline{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  evita la pérdida segura si:*

$$\mathcal{M}(\underline{P}) := \{P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \text{ probabilidad} \mid P(A) \geq \underline{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\} \neq \emptyset.$$

De forma análoga:

**Definición 1.4.** *Se dice que una probabilidad superior  $\overline{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  evita la pérdida segura si:*

$$\mathcal{M}(\overline{P}) := \{P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \text{ probabilidad} \mid P(A) \leq \overline{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\} \neq \emptyset.$$

Al conjunto  $\mathcal{M}(\underline{P})$  se le denomina *conjunto credal* asociado a la probabilidad inferior  $\underline{P}$ ; análogamente,  $\mathcal{M}(\overline{P})$  sería el *conjunto credal* asociado a la probabilidad superior  $\overline{P}$ .

### 1.1.3. Coherencia

El conjunto credal asociado a una probabilidad inferior o superior  $\mu$  contiene toda la información acerca de la probabilidad  $P$  asociada al experimento. Modelizando tal información, vamos a exigir una condición que nos permita asegurar que la probabilidad inferior o superior sea tan precisa como conjunto credal asociado: el concepto de *coherencia*.

**Definición 1.5.** Una medida no aditiva  $\mu$  que evita la pérdida segura se dice coherente si es la envolvente de un conjunto convexo y cerrado de probabilidades.

Así, en función de si se interpreta como probabilidad inferior o superior, respectivamente, una medida no aditiva *coherente* se caracterizará por verificar:

$$\underline{P}(A) = \min_{P \in \mathcal{M}(P)} P(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

$$\overline{P}(A) = \max_{P \in \mathcal{M}(\overline{P})} P(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

La interpretación de esta condición es que las cotas inferiores o superiores de la probabilidad de un suceso  $A$  establecidas por  $\mu$  son tan precisas como sea posible, en el sentido de que no existe un  $\mu'$  más preciso que esté asociado al mismo conjunto credal.

Se deduce que toda medida no aditiva *coherente evita la pérdida segura*; como veremos más adelante, el recíproco no es cierto en general.

#### 1.1.4. Previsiones inferiores y superiores

Si bien en el caso preciso resulta equivalente trabajar con una medida de probabilidad  $P$  o con su operador esperanza asociado  $E_P$ , en el caso impreciso sí existe diferencia entre ambas situaciones. Para aclarar esto, introducimos el concepto de apuesta.

**Definición 1.6.** Dado un espacio finito  $\Omega$ , se llama apuesta a cualquier función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

En lo que sigue, denotaremos por  $\mathcal{L}(\Omega) := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$  como el conjunto de apuestas definidas en  $\Omega$ .

Como decíamos, dada una medida de probabilidad  $P$  definida en  $\mathcal{P}(\Omega)$ , la esperanza de una apuesta  $X$  viene dada por:

$$E_P(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}).$$

Recíprocamente, conocido el operador esperanza  $E_P$  en  $\mathcal{L}(\Omega)$ , podemos deducir la medida de probabilidad  $P$  sin más que considerar su restricción a funciones indicadores de sucesos: esto es, la funciones  $I_A$  dadas por

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Al igual que una probabilidad inferior puede interpretarse como una función que nos da cotas inferiores para las probabilidades de los sucesos por el modelo desconocido  $P$ , también podemos definir una función que nos dé cotas inferiores de las esperanzas de un conjunto de apuestas:

**Definición 1.7.** Una previsión inferior definida sobre un conjunto de apuestas  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una función  $\underline{P} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ .

A partir de ella se puede definir una *previsión superior conjugada*,  $\overline{P}$ , mediante la fórmula

$$\overline{P}(X) = -\underline{P}(-X) \quad \forall X \in \mathcal{L}(\Omega).$$

Esta previsión superior representaría una cota superior de la esperanza de una apuesta  $X$  con respecto a la probabilidad  $P$  desconocida.

Además de esta interpretación, las *previsiones inferiores y superiores* pueden entenderse en términos de la disposición a aceptar una apuesta; de aquí surge la terminología de *evitar la pérdida segura y coherencia* introducida anteriormente. Más específicamente, la previsión inferior  $\underline{P}(X)$  de una apuesta  $X$  se puede interpretar como el supremo de los precios de compra aceptables por  $X$ , en el sentido de que se considera que la transacción  $X - k$  es beneficiosa para nosotros (y por lo tanto estamos dispuestos a aceptarla) para todo  $k < \underline{P}(X)$ . Análogamente, la previsión superior  $\overline{P}(X)$  de una apuesta  $X$  se interpreta como el ínfimo de los precios de venta aceptables por  $X$ , en el sentido de que se considera que la transacción  $k - X$  es beneficiosa para nosotros (y por lo tanto estamos dispuestos a aceptarla) para todo  $k > \overline{P}(X)$ .

A partir de esta interpretación surgen las siguientes definiciones:

**Definición 1.8.** Sea  $\underline{P}$  una previsión inferior definida en  $\mathcal{L}(\Omega)$ . Se dice que  $\underline{P}$  evita la pérdida segura si:

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n (X_i(\omega) - \underline{P}(X_i)) \geq 0 \quad \text{para cualesquiera } X_1, \dots, X_n \in \mathcal{L}(\Omega)$$

Dicho de otro modo, si no existe ningún  $\epsilon > 0$  tal que:

$$\sum_{i=1}^n (X_i(w) - (\underline{P}(X_i) - \epsilon)) < -\epsilon.$$

La idea es que, de hacerlo, la suma de las apuestas  $X_i - (\underline{P}(X_i) - \epsilon)$ , cada una de las cuales debería ser aceptable según la interpretación que hemos dado de la previsión inferior, da lugar a una apuesta mediante la que perdemos la cantidad  $\epsilon$ , sea cual sea el resultado del experimento; se incurre en ese caso en una pérdida segura.

En cuanto a la *coherencia*, en el caso de *previsiones inferiores* se define como sigue:

**Definición 1.9.** Sea una previsión inferior  $\underline{P}$  en  $\mathcal{L}(\Omega)$ , se dice que es coherente cuando, dados  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{L}(\Omega)$  y dado  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{i=1}^n (X_i(w) - \underline{P}(X_i)) \geq m (X_0(w) - \underline{P}(X_0)) \quad \text{para algún } w \in \Omega.$$

Es decir, si no existe ningún  $\epsilon > 0$  tal que:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - (\underline{P}(X_i) - \epsilon)) < m(X_0 - (\underline{P}(X_0) + \epsilon));$$

de hacerlo, la suma de las apuestas  $X_i - (\underline{P}(X_i) - \epsilon)$ , cada una de las cuales es deseable, debería ser también deseable; como consecuencia, la apuesta  $X_0 - (\underline{P}(X_0) + \epsilon)$  que da una ganancia mayor también es deseable; y esto implica que deberíamos estar dispuestos a comprar  $X_0$  por un precio superior al establecido en la previsión inferior.

Puede comprobarse que, si el dominio  $\mathcal{K}$  de una previsión inferior  $\underline{P}$  coincide con la clase de los indicadores de los subconjuntos de  $\Omega$ , entonces  $\underline{P}$  evita la pérdida segura en el sentido de la Definición 1.8 si y solo si lo hace en el sentido de la Definición 1.3, esto es, si y solo si existe alguna medida de probabilidad que domine a la probabilidad inferior. Análogamente,  $\underline{P}$  es coherente en el sentido de la Definición 1.9 si y solo si lo es en el sentido de la Definición 1.5, es decir, si y solo si es la envolvente de un conjunto de medidas de probabilidad.

### 1.1.5. Conjuntos de apuestas deseables

En las definiciones anteriores subyace la idea de que una apuesta es deseable cuando, si bien para algún resultado del experimento puede hacernos perder dinero, en media la consideramos una transacción beneficiosa. Es decir, cuando, para la probabilidad  $P$  que modeliza el experimento, consideramos que se cumple  $E_P(X) \geq 0$ .

Esta idea lleva a extender la idea de *coherencia* para conjuntos de apuestas considerados deseables, partiendo de los siguientes axiomas:

- Una apuesta que nos haga perder dinero, sin importar el resultado, será considerada como no deseable.
- Por el contrario, una apuesta que nunca nos haga perder dinero será deseable.
- Las modificaciones escalares no afectan a la deseabilidad.
- Si dos apuestas son deseables, su suma también debe serlo.

Surge así la siguiente definición:

**Definición 1.10.** *Dado un espacio  $\Omega$ , un conjunto de apuestas deseables  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$  es coherente si verifica:*

- i) Si  $X \leq 0$ , entonces  $X \notin \mathcal{D}$ .
- ii) Si  $X \succeq 0$ , entonces  $X \in \mathcal{D}$ .

iii) Si  $X, Y \in \mathcal{D}$ , entonces  $X + Y \in \mathcal{D}$ .

iv) Si  $X \in \mathcal{D}$  y  $\lambda > 0$ , entonces  $\lambda X \in \mathcal{D}$ .

Un conjunto de apuestas deseables *coherente* determina a su vez una previsión inferior *coherente*, mediante la fórmula

$$\underline{P}(X) = \{\mu/X - \mu \in \mathcal{D}\}$$

Recíprocamente, a partir de una previsión inferior *coherente*  $\underline{P}$  podemos determinar un conjunto *coherente* de apuestas deseables, por ejemplo mediante

$$\mathcal{D} := \{X/\underline{P}(X) > 0\} \cup \{X \geq 0\}.$$

Sin embargo, la correspondencia no es biunívoca, y conjuntos distintos de apuestas deseables pueden determinar la misma previsión inferior; es por ello que se suele decir que los *conjuntos de apuestas deseables* son un modelo *más informativo* que las *previsiones inferiores*.

### 1.1.6. Intervalos de probabilidad

En nuestro experimento, trabajaremos fundamentalmente con un modelo de probabilidades imprecisas que constituye un caso particular de probabilidades inferiores/superiores: los llamados *intervalos de probabilidad*. Sea  $X$  una variable que toma valores en el conjunto finito  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , y una familia de intervalos  $L = \{[l_i, u_i] / i = 1, 2, \dots, n\}$  verificando  $0 \leq l_i \leq u_i \leq 1$  para todo  $i$ .

Podemos interpretar estos intervalos como las probabilidades inferior y superior de cada uno de los posibles resultados del experimento. De esta forma, el conjunto credal asociado sería el conjunto de medidas de probabilidad  $P$  sobre  $\Omega$  tales que

$$\mathcal{V} = \{P \text{ probabilidad} \mid l_i \leq P(\{\omega_i\}) \leq u_i, \forall i\}.$$

Observamos que  $\mathcal{V}$  es un conjunto convexo. Cuando es no vacío, diremos que el intervalo de probabilidades  $L$  *evita la pérdida segura*. Esto ocurre [2] si y solo si

$$\sum_{i=1}^n l_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^n u_i$$

Por otro lado, si  $\mathcal{V}$  es no vacío, podemos considerar las probabilidades inferior y superior que determina como vemos a continuación:

$$l(A) = \inf_{P \in \mathcal{V}} P(A) \quad \forall A \subseteq \Omega$$

y

$$u(A) = \sup_{P \in \mathcal{V}} P(A) \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

Diremos entonces que la asignación  $L$  es *coherente* cuando se cumple  $l_i = l(\{\omega_i\})$  y  $u_i = u(\{\omega_i\})$ , esto es, cuando las cotas inferior y superior determinadas por  $L$  en los unipuntuales coinciden con las determinadas por el conjunto credal asociado. Esto se cumple si y solo si [2]

$$\sum_{i \neq j} l_j + u_i \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i \neq j} u_j + l_i \geq 1, \quad \forall i.$$

### 1.1.7. Modelos de distorsión

Un caso particular de probabilidades inferiores *coherentes* que surge de manera natural consiste en considerar una bola alrededor de una medida de probabilidad, y tomar la envolvente de este conjunto credal. Surgen así los llamados *modelos de distorsión* [8, 9]. Estos vienen determinados por una medida de probabilidad inicial  $P_0$  y un factor de distorsión  $\delta$ . Entre los muchos modelos de distorsión existentes en la literatura, en este trabajo consideraremos los siguientes:

- Los modelos de *contaminación*, dados por

$$\underline{P}(A) = (1 - \delta)P_0(A) \quad \forall A \neq \Omega, \quad \underline{P}(\Omega) = 1.$$

- Los modelos *pari-mutuel*, dados por

$$\underline{P}(A) = \max\{(1 + \delta)P_0(A) - \delta, 0\} \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

- Los modelos de *variación total*, dados por

$$\underline{P}(A) = \max\{P_0(A) - \delta, 0\} \quad \forall A \neq \Omega, \quad \underline{P}(\Omega) = 1.$$

Concluimos esta breve introducción a las *probabilidades imprecisas* señalando que existen muchos otros modelos, como pueden ser las capacidades 2-monótonas, las funciones de creencia o las medidas de posibilidad, que no consideraremos en este trabajo; nos referimos a [1] para una presentación más general.

## 1.2. El experimento de la Copa del Mundo

Antes de proseguir, debemos señalar que algunos experimentos de asignación de probabilidades imprecisas como el que hemos llevado a cabo en este trabajo ya fueron considerados en el pasado.

- En 1982, Peter Walley llevó a cabo un primer experimento basándose en análisis previos de Bruno de Finetti en [6]. Los detalles acerca del experimento pueden encontrarse en [14, Apéndice I]. Dicho experimento contó con un total de 17 participantes. Consideraba, al igual

que haremos nosotros, que las asignaciones de los participantes debieran ser *intervalos de probabilidad*. Además, el modelo de puntuación estimado por Walley será el mismo que utilizaremos nosotros y que procederemos a describir en la Sección 2.2. Este experimento contó con un total de 216 predicciones y analizó únicamente los aspectos que nosotros estudiaremos en el Capítulo 4.

- En 2014, Erik Quaeghebeur, Chris Wesseling, Emma Beauxis-Aussalet, Teresa Piovesan y Tom Sterkenburg [11] reeditaron el experimento, contando en esa ocasión con un total de 80 participantes. La principal novedad en ese caso fue que se pidió a los participantes que asignasen para cada partido un *conjunto de apuestas deseables*. El modelo de puntuación estimado por Erik Quaeghebeur et al. consistía en activar únicamente una apuesta cuando era considerada deseable para todos los participantes o para un número máximo de los mismos.

Si bien es cierto que el experimento del Mundial de Fútbol de 2014 contó con un mayor número de participantes, la realidad es que el hecho de considerar las asignaciones de los mismos como *conjuntos de apuestas deseables*, en lugar de *intervalos de probabilidad*, complicó en exceso la participación a aquellos usuarios que no disponían de conocimientos previos en probabilidades imprecisas. Asimismo, la complejidad del método de puntuación, basado en considerar apuestas que fuesen deseables para un número máximo de participantes, daba lugar a un problema sin solución única. Esto hacía a su vez que los participantes no fuesen en ocasiones capaces de desarrollar una estrategia que reflejase sus actitudes frente al riesgo. Como consecuencia, a pesar del elevado número de participantes únicamente se realizaron 194 predicciones y se activaron un centenar de apuestas.

Nosotros, teniendo en cuenta esto, replicaremos el experimento de 1982 de Peter Walley con el fin de facilitar, en la medida de lo posible, la labor de asignación a los participantes.

## Capítulo 2

# Diseño y desarrollo del experimento

El experimento World Cup Competition fue llevado a cabo durante el Mundial de Fútbol de Qatar 2022 en los meses de noviembre y diciembre. Con el fin de conseguir la mayor difusión posible, se convocó 12 días antes del comienzo del experimento una presentación en el salón de actos de la Facultad de Ciencias para todas aquellas personas interesadas en participar. También se creó una cuenta en redes sociales (Twitter) para promocionar e instar a cualquier usuario de la plataforma a que formase parte del proyecto (@WCCQatar2022), como apreciamos en la siguiente imagen:



## 2.1. Modelos de imprecisas considerados

Tal y como estableció Peter Walley en su experimento de 1982, requeriremos que las asignaciones de los participantes sean *intervalos de probabilidad*, pues los usuarios del experimento de 2014 llevado a cabo por Erik Quaeghebeur et al. se encontraron con diversas complicaciones a la hora de fijar sus asignaciones a través de los *conjuntos de apuestas deseables*.

En este caso, al tener únicamente tres resultados posibles, la asignación de un intervalo de probabilidad para cada resultado es equivalente a definir una probabilidad inferior para todas las combinaciones de los mismos, siendo por otro lado nuestra aproximación algo más intuitiva para el participante. Además, desde el punto de vista técnico, el uso de *intervalos de probabilidad* permite analizar de forma más sencilla la *coherencia* de las asignaciones, como vimos en la Sección 1.1.6.

## 2.2. Modelos de puntuación

El modelo de puntuación que hemos considerado es idéntico al utilizado por Walley en el experimento de 1982: se activa una apuesta entre dos participantes para un resultado de un partido cuando sus asignaciones probabilísticas entran en contradicción, en el sentido de que producen intervalos disjuntos. La cantidad en juego dependerá tanto de la distancia entre sus asignaciones (a mayor discrepancia entre ellos, mayor puntuación en juego) como a los valores asignados (estimando probabilidades altas se juegan más puntos que introduciendo probabilidades bajas).

Más específicamente, el **Jugador 1** que haya asignado un intervalo de probabilidad  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$  para un posible resultado de un partido, apuesta puntos contra otro **Jugador 2**, cuya asignación para ese mismo resultado y partido es  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$ , si se cumple:

$$[\underline{p}_1, \overline{p}_1] \cap [\underline{p}_2, \overline{p}_2] = \emptyset.$$

En tal caso la cantidad en juego es

$$\begin{cases} (\underline{p}_1 - \overline{p}_2) \cdot \frac{(\underline{p}_1 + \overline{p}_2)}{2} & \text{si } \overline{p}_2 < \underline{p}_1; \\ (\underline{p}_2 - \overline{p}_1) \cdot \frac{(\underline{p}_2 + \overline{p}_1)}{2} & \text{si } \overline{p}_1 < \underline{p}_2, \end{cases}$$

de tal forma que esa cantidad iría a parar al participante que haya asignado mayor probabilidad a ese resultado, en caso de darse, o al participante que haya otorgado menor probabilidad, en caso de que este no se haya llegado a dar. Pongamos algún ejemplo real dado durante la competición para visualizarlo con mayor claridad:

**Ejemplo 2.1.** En el partido Japón-España, el participante Papauba asignó al resultado Victoria local el intervalo de probabilidad  $[0, 0]$ . Por su parte, el participante Miguel asignó para ese mismo resultado y partido el intervalo de probabilidad  $[0, 0.3]$ . Por ser  $[0, 0] \cap [0, 0.3] = \{0\} \cap [0, 0.3] = \{0\} \neq \emptyset$ , se tiene que Papauba y Miguel no apostarán entre sí en el resultado Victoria local del partido Japón-España, al tener al menos una probabilidad compatible entre sus intervalos.

Por el contrario, en el partido Bélgica-Canadá, el participante Babioca25 asignó al resultado Victoria local el intervalo de probabilidad  $[0.5, 0.8]$ , mientras que el participante NinjaDiegui asignó para ese mismo resultado y partido el intervalo de probabilidad  $[0.9, 1]$ . Por ser  $[0.5, 0.8] \cap [0.9, 1] = \emptyset$ , los participantes Babioca25 y NinjaDiegui apostarán entre sí en el resultado Victoria local del partido Bélgica-Canadá y lo harán por la cantidad de  $(0.9 - 0.8) \cdot \frac{(0.9 + 0.8)}{2} = 0.085$  puntos. Más aún, como el partido terminó con Bélgica como victoriosa, la cantidad en juego de 0.085 puntos fue para NinjaDiegui por haber asignado mayor probabilidad que Babioca25 al suceso Victoria local.

## 2.3. Interfaz web

La página web del experimento fue creada y diseñada con la herramienta *Blogger*. Esta es especialmente útil por no requerir de complicados conocimientos de programación o de diseño web. Además, puesto que es un servicio integrado a Google, permite fácilmente la sincronización con herramientas (a las que debimos recurrir) como las hojas de cálculo *Google Sheets* o los formularios *Google Forms*, entre otros. La página web fue desarrollada durante el mes de octubre, de modo que cualquier participante pudiera entrar a la versión definitiva de la web, ya sea para registrarse o para informarse del experimento, a partir del 8 de noviembre. Cuenta con dos versiones: una en castellano (<https://worldcupcompetition2022.blogspot.com/>) y otra en inglés (<https://worldcupcompetition2022eng.blogspot.com/>), pues el objetivo era llegar al máximo número de participantes posible, extendiéndonos si fuera necesario al público extranjero (contando finalmente con 5 participantes de habla no hispana).



Se decidió dividir la página web en seis secciones que procedemos a describir:

- **Inicio / Home:** Se incluye una pequeña presentación, un correo de contacto y la cuenta en redes sociales del experimento.
- **¿Cómo funciona? / How does it work?:** Se explica el funcionamiento del experimento y los procedimientos a seguir para poder participar. Planteada a modo de preguntas que le puedan surgir al participante, seguidas de sus respectivas y detalladas respuestas.
- **Apuesta / Bet:** Se encuentra el calendario de partidos. Haciendo click en el partido deseado, se redirecciona automáticamente al formulario específico de ese partido para poder depositar la asignación.
- **Ránking / Ranking:** Contiene la clasificación (actualizada día a día), con su respectiva puntuación y unos enlaces a vídeos de Youtube que pretenden simbolizar el estado del participante que ocupa cada posición.
- **Regístrate / Register:** Se encuentra el formulario de registro que se debe cumplimentar para poder participar en el experimento. Una vez registrado, no será posible crear otro usuario con el mismo correo validado en el formulario.
- **English Website / Web en castellano:** Se indica el enlace a la versión en inglés (o en castellano), si es que el participante tiene mayor preferencia por ese idioma.

## 2.4. Desarrollo del experimento

El experimento contó con una gran interacción y participación por parte de los usuarios registrados, recogiendo un total de 2387 asignaciones provistas por 45 participantes. De entre esas 2387 asignaciones, 206 fueron descartadas por haber introducido los datos en un formato que incumplía las normas establecidas, quedándonos entonces con 2137 asignaciones válidas.

En la siguiente tabla podemos ver a los usuarios registrados en la competición:

Jorgeargi19	Fingelmo	Kalmanhorof	Miquel_bs	paula_alv16
petaquin66	Babieca25	Manuel.martin	YSale	Mazepin
Gloria234	Cokedean	pablofj31	Tina	Javistmd
Walley4Ever	Keano	Kolmogorov Smirnov	RPF	ceca
Javier	IRubenPC	Manute Bol	juanolo	Valbuena
maciuerspepi	Toni	Arthur Van Camp	Bea	Miguel
Eldepoli	Pedromv	Ionescu-TulceaVence	Davidjk_56	choru
NinjaDiegui	MOJI	Grislydiamond	maraloncas	Sgs
Papauba	MF34	DiegoReyer	NachoM	Imc
Eloyzinho	SantosD	pablo_mentri	IvanGlezM	Asier

Para cada partido, realizaban la asignación del mismo una media de 33.39 participantes, siendo el partido *Argentina-Arabia Saudí* el que más asignaciones comprendió, con un total de 41, y los partidos *Camerún-Serbia* y *Países Bajos-Estados Unidos* los partidos con menos asignaciones, con 29. En la siguiente gráfica podemos observar cómo evolucionó la participación a lo largo del experimento:

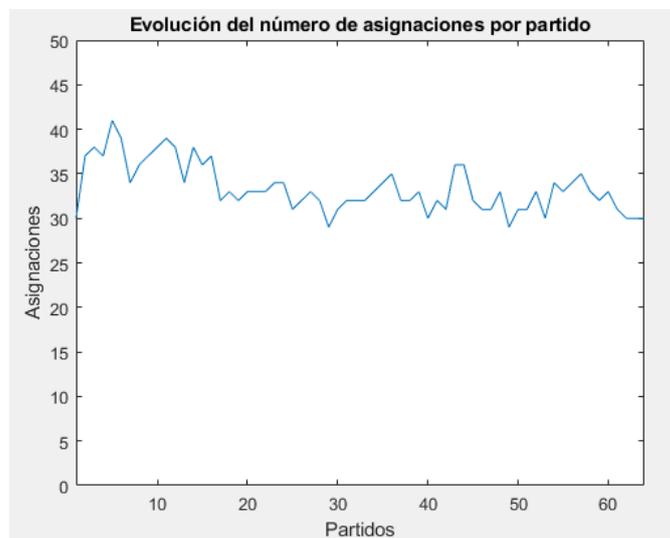


Figura 2.1: Representación de las asignaciones realizadas para cada partido a lo largo del experimento.

Como indica la gráfica, el número de asignaciones por partido se vio ligeramente reducido a medida que avanzaba la competición. En el transcurso del experimento se tomaron medidas para incentivar la participación de los

usuarios registrados en la competición: realizar un boletín diario con el análisis de las variaciones sucedidas durante la jornada, modificar las cantidades en juego para favorecer una mayor volatilidad en la clasificación (como veremos en la Sección 3.2), premios por valor de 50, 40 y 30 euros para el primer, segundo y tercer clasificado, etc.

También durante el experimento los participantes fueron elaborando tácticas en las asignaciones de cara a conseguir una mayor puntuación, ya sea realizando asignaciones precisas (tal y como veremos la Sección 3.3.1) o con alguna de las estrategias que estudiaremos en el Capítulo 6. El experimento finalizó con la siguiente clasificación general:

Posición final en la clasificación									
1º	DiegoReyer	11º	NinjaDiegui	21º	Walley4Ever	31º	pablofj31	41º	maraloncas
2º	Kolmogorov Smirnov	12º	NachoM	22º	juanolo	32º	Javistmd	42º	Valbuena
3º	Manute Bol	13º	Davidjk_56	23º	Eloyzinho	33º	Pedromv	43º	lmc
4º	Eldepoli	14º	IvanGlezM	24º	Manuel.martin	34º	maciuerspepi	44º	ceca
5º	RPF	15º	Kalmanhorof	25º	YSale	35º	Babieca25	45º	MF34
6º	Gloria234	16º	Arthur Van Camp	26º	choru	36º	paula_alv16	46º	Asier
7º	IRubenPC	17º	Jorgeargi19	27º	Grislydiamond	37º	Keano	47º	Javier
8º	Miguel	18º	Toni	28º	Sgs	38º	Tina	48º	Miquel_bs
9º	SantosD	19º	Papauba	29º	Cokedean	39º	Fingelmo	49º	Mazepin
10º	petaquin66	20º	pablo_mentri	30º	MOJI	40º	Bea	50º	Ionescu-TulceaVence

En la Sección 3.2 analizaremos la evolución en la clasificación de varios de los participantes para comprender cómo acabaron en la posición que vemos en la tabla anterior.

## Capítulo 3

# Análisis estadístico

En este capítulo realizaremos un primer análisis estadístico del experimento. Comenzaremos con un análisis descriptivo de los participantes, a los que clasificaremos por grupos según su edad, género, formación o conocimientos previos en probabilidades imprecisas.

Seguidamente, indagaremos en la evolución del experimento en dos aspectos: por un lado, analizaremos la proporción de asignaciones precisas entre los participantes según avanzaba la competición, así como el margen de imprecisión utilizado en los intervalos; y en segundo lugar, estudiaremos cómo han ido variado las puntuaciones en juego a lo largo del experimento.

### 3.1. Análisis descriptivo de los participantes

Empecemos realizando un análisis descriptivo de los participantes en función de su edad, género y formación con ayuda del código de RStudio que podremos encontrar en Apéndice B.1. En este sentido, si bien la difusión principal se hizo dentro de la Facultad de Ciencias, hubo muchos participantes de otros ámbitos, como veremos más adelante.

#### 3.1.1. Análisis descriptivo de los participantes por género

De entre los 50 participantes, 43 eran de género masculino y las 7 restantes eran de género femenino. Es decir, el experimento se componía en un 86% de hombres y en un 14% de mujeres, como se puede ver en el siguiente diagrama de sectores:

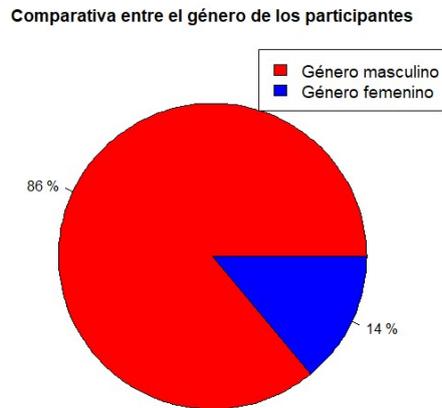


Figura 3.1: Representación de los participantes según su género.

### 3.1.2. Análisis descriptivo de los participantes según su edad

Los rangos de edad de los participantes que tomaron parte en la competición son los siguientes:

- Menor de 25 años: 24 personas, lo que constituye un 48 % del total.
- Entre 25 y 44 años: 17 personas, lo que constituye un 34 % del total.
- Mayor de 44 años: 9 personas, lo que constituye un 18 % del total.

Dichos datos se esclarecen en el diagrama de sectores:



Figura 3.2: Representación de los participantes según su edad.

### 3.1.3. Análisis descriptivo de los participantes según su formación

En cuanto al ámbito de formación de los participantes, los segregaremos en los siguientes campos:

- Matemáticas y/o Física: 22 personas, lo que constituye un 44 % de los participantes.
- Ingeniería: 15 personas, lo que constituye un 30 % de los participantes.
- ESO, Bachillerato o Grado Superior: 5 personas, lo que constituye un 10 % de los participantes.
- Ciencias Sociales y Jurídicas: 4 personas, lo que constituye un 8 % de los participantes.
- Ciencias Biosanitarias: 4 personas, lo que constituye un 8 % de los participantes.

El diagrama de sectores correspondiente es:

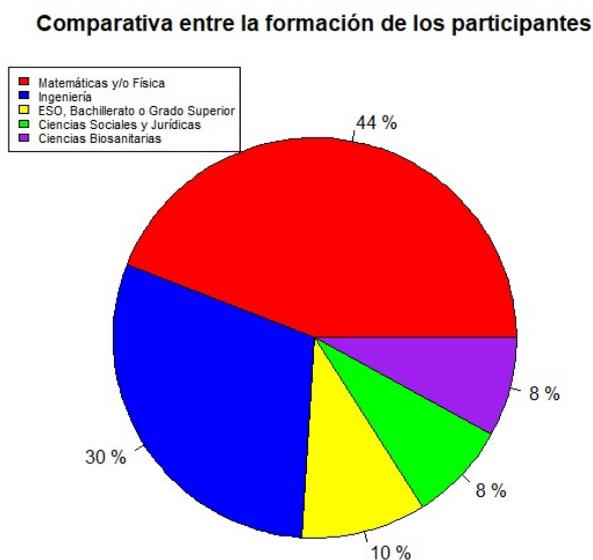


Figura 3.3: Representación de los participantes según su formación.

### 3.1.4. Análisis descriptivo de los participantes según sus conocimientos de probabilidades imprecisas

Por otro lado, también es importante mencionar que algunos de los participantes (*Walley4Ever*, *Arthur Van Camp*, *Kalmanhorof*, *Keano*, *YSale*,

MOJI, NachoM) contaban con conocimientos previos de modelos de probabilidades imprecisas, lo que a priori les ayudaba a la hora de realizar asignaciones consistentes. En este sentido, 7 de los 50 participantes se considerarán como parte del grupo de ‘expertos’ en imprecisas, frente a los 43 que no tenían conocimiento sobre este campo, como vemos en el siguiente diagrama de sectores:

**Comparativa entre expertos e inexpertos en imprecisas**

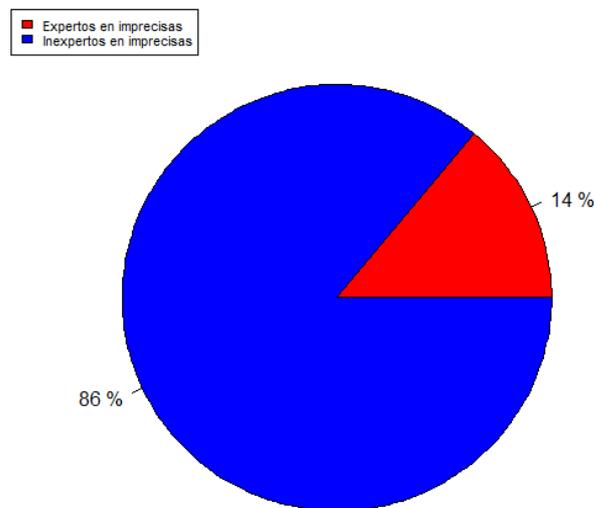


Figura 3.4: Representación de los participantes según sus conocimientos previos en probabilidades imprecisas.

Finalizamos la Sección 3.1 mostrando la tabla que resume las características de los participantes con mejor y peor puntuación al final de la competición, de acuerdo con los diferentes grupos tomados en consideración en los análisis anteriores:

Puesto	Nombre	Género	Formación	Edad	Conocimientos previos en probabilidades imprecisas
1º	DiegoReyer	Masculino	Ingeniería Industrial	24 años	No
2º	Kolmogorov Smirnov	Masculino	Matemáticas	24 años	No
3º	Manute Bol	Masculino	Doble Grado en Matemáticas y Física	22 años	No
48º	Miquel_bs	Masculino	Ingeniería Industrial	44 años	No
49º	Mazepin	Masculino	Ingeniería Informática	22 años	No
50º	Ionescu-TulceaVence	Masculino	Matemáticas	22 años	No

## 3.2. Evolución de la puntuación

En esta sección analizaremos el sistema de puntuación utilizado durante la competición, así como su evolución a lo largo de la misma.

Recordemos que, como vimos anteriormente en la Sección 2.2, para dos asignaciones  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$ ,  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$  de un mismo resultado y partido verificando  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1] \cap [\underline{p}_2, \overline{p}_2] = \emptyset$ , la cantidad en juego es

$$\begin{cases} (\underline{p}_1 - \overline{p}_2) \cdot \frac{(\underline{p}_1 + \overline{p}_2)}{2} & \text{si } \overline{p}_2 < \underline{p}_1 \\ (\underline{p}_2 - \overline{p}_1) \cdot \frac{(\underline{p}_2 + \overline{p}_1)}{2} & \text{si } \overline{p}_1 < \underline{p}_2. \end{cases}$$

Es decir, se activa una apuesta cuando sus respectivos *intervalos de probabilidad* son disjuntos; la cantidad apostada es igual al producto de la distancia entre los intervalos, medida como la diferencia entre el extremo superior del que queda por debajo y el extremo inferior del que queda por encima, por el punto medio entre los mismos.

De la fórmula anterior se deduce que la cantidad en juego entre dos asignaciones distintas para un mismo resultado de un partido es, a lo sumo, de 0.5 puntos: en efecto, si suponemos, s.p.g,  $\overline{p}_1 < \underline{p}_2$ , entonces se tiene:

$$(\underline{p}_2 - \overline{p}_1) \cdot \frac{(\underline{p}_2 + \overline{p}_1)}{2} = \frac{\underline{p}_2^2 - \overline{p}_1^2}{2} \leq \frac{\underline{p}_2^2}{2} \leq \frac{1}{2} = 0.5,$$

donde hemos usado que  $-\overline{p}_1^2 \leq 0$  y que  $\underline{p}_2^2 \in [0, 1]$ .

Consecuentemente, la máxima puntuación que un participante puede sustraer a otro serán 1.5 puntos por partido (0.5 puntos por cada posible resultado del mismo).

Antes de comenzar el experimento, subestimamos la volatilidad de la competición bajo este sistema de puntuación. Pudimos presenciar múltiples casos de insólitas subidas (o bajadas) de posición en la clasificación por parte de los participantes de un día para otro. Sin ir más lejos, el participante *Fingelmo*, que ocupaba la plaza de colista de la clasificación al finalizar el primer día de competición, conseguía hacerse con el segundo puesto al día siguiente.

Además, el método de puntuación fue modificado dos veces durante el transcurso la competición:

- La primera vez: Establecida una vez finalizada la fase de grupos. La puntuación en juego para las eliminatorias de octavos de final, cuartos de final y semifinales se duplicó con respecto a la puntuación inicial. Esto es, dadas dos asignaciones  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$ ,  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$  de un mismo resultado y partido verificando  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1] \cap [\underline{p}_2, \overline{p}_2] = \emptyset$ , la cantidad en juego pasó

a ser

$$\begin{cases} 2 \cdot (\underline{p}_1 - \overline{p}_2) \cdot \frac{(\underline{p}_1 + \overline{p}_2)}{2} & \text{si } \overline{p}_2 < \underline{p}_1 \\ 2 \cdot (\underline{p}_2 - \overline{p}_1) \cdot \frac{(\underline{p}_2 + \overline{p}_1)}{2} & \text{si } \overline{p}_1 < \underline{p}_2. \end{cases}$$

- La segunda y última vez: Instaurada únicamente para el último partido. La puntuación en juego para la final del Mundial se triplicó con respecto a la puntuación inicial. Esto es, dadas las dos asignaciones  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$ ,  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$  de un mismo resultado y partido verificando  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1] \cap [\underline{p}_2, \overline{p}_2] = \emptyset$ , la cantidad en juego pasó a ser

$$\begin{cases} 3 \cdot (\underline{p}_1 - \overline{p}_2) \cdot \frac{(\underline{p}_1 + \overline{p}_2)}{2} & \text{si } \overline{p}_2 < \underline{p}_1 \\ 3 \cdot (\underline{p}_2 - \overline{p}_1) \cdot \frac{(\underline{p}_2 + \overline{p}_1)}{2} & \text{si } \overline{p}_1 < \underline{p}_2. \end{cases}$$

El objetivo perseguido con estas modificaciones del modelo de puntuación era conseguir que la participación de los usuarios que no estaban obteniendo los resultados deseados no se viese reducida, pues de esta forma, todos ellos serían susceptibles de lograr una puntuación mucho más elevada que les permitiese remontar puestos en la clasificación. En cambio, también debían de ser cautelosos con las asignaciones, pues en caso de perder una apuesta, lo harían dejando una deuda del doble (o triple) de puntos de lo que perderían antes del cambio del modelo de puntuación. Si bien estas modificaciones no afectan a las condiciones de *coherencia* probabilística que estudiaremos en los próximos capítulos, sí que pueden influir en las actitudes frente al riesgo de los participantes, las cuales a su vez pueden variar los márgenes de imprecisión asignados. Veremos al final de este capítulo si hay evidencias de comportamientos en este sentido.

### 3.2.1. Evolución de la clasificación

A continuación presentamos la evolución de la posición de los participantes durante la competición (jornada a jornada). Entenderemos por **jornada** aquellos días en los que hubo al menos un partido del Mundial; de este modo, en total tendremos 23 jornadas.

Centrémosnos primero en los tres ganadores del experimento: *DiegoReyer*, *Kolmogorov Smirnov* y *Manute Bol*. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos:

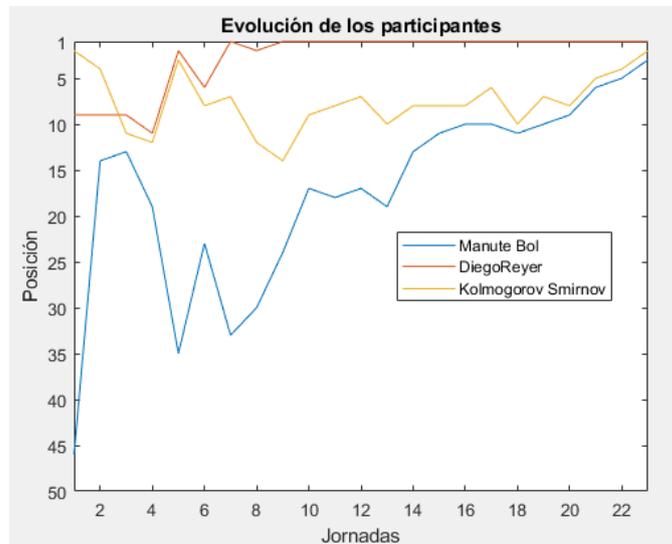


Figura 3.5: Evolución de *DiegoReyer*, *Kolmogorov Smirnov* y *Manute Bol* a lo largo de la competición.

Como podemos observar, el participante *DiegoReyer* se mantuvo en primera posición desde la jornada 9, a pesar de haber modificado el modelo de puntuación en dos ocasiones. Además, tanto *Kolmogorov Smirnov* como *Manute Bol* afrontaron la última jornada fuera del podio, muestra de lo reñida que estuvo la competición hasta el último momento. De hecho, tras finalizar la última jornada *Manute Bol* ocupó por primera vez en toda la competición un puesto entre los tres primeros.

Veamos ahora la evolución de los tres participantes que acabaron en las tres últimas posiciones: *Miquel.bs*, *Mazepin* y *Ionescu-TulceaVence*. De nuevo, ejecutamos el código de MATLAB que se encuentra en Apéndice A.2 y obtenemos:

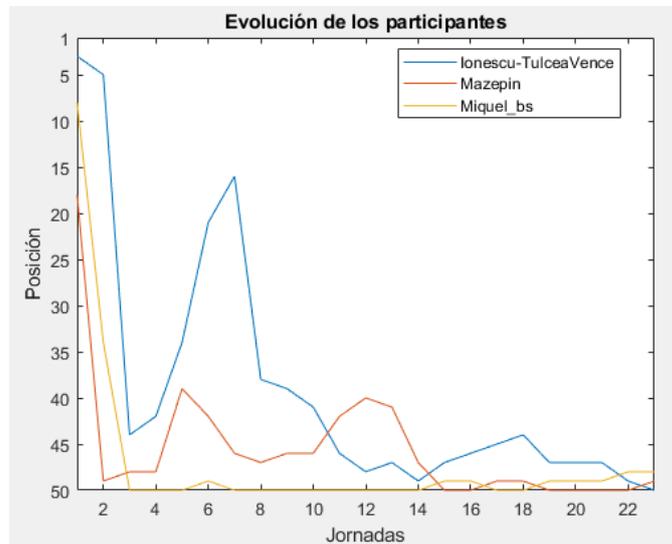


Figura 3.6: Evolución de *Miquel\_bs*, *Mazepin* y *Ionescu-TulceaVence* a lo largo de la competición.

Observamos cómo *Miquel\_bs* ocupó durante prácticamente toda la competición la parte baja de la tabla. *Mazepin* contó con alguna leve mejoría en las jornadas 5 y 12, pero insuficientes como para poder afianzarse en la parte media de la tabla. La suerte no acompañó a *Ionescu-TulceaVence*, que llegó a apropiarse la tercera posición tras la primera jornada y acaba ocupando, por primera vez en toda la competición, el puesto de colista tras finalizar la última jornada.

Comparemos por último la evolución de tres participantes con bastante irregularidad a lo largo de la competición: *Fingelmo*, *maraloncas* y *SantosD*. Ejecutando el código de MATLAB que encontraremos en Apéndice A.2, obtenemos:

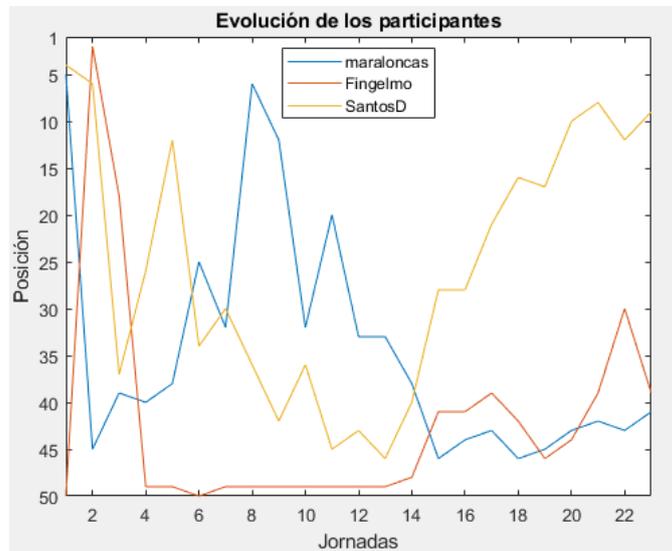


Figura 3.7: Evolución de *Fingelmo*, *maraloncas* y *SantosD* a lo largo de la competición.

Como vemos, los tres participantes comparten una gran cantidad de altibajos durante todo el transcurso de la competición. El mejor parado fue *SantosD*, protagonizando una meritoria remontada en la segunda mitad de la competición que le hizo valer de la 9<sup>o</sup> posición. *Fingelmo* y *maraloncas* no corrieron con tanta suerte y acabaron en las posiciones 39 y 41, respectivamente.

### 3.2.2. Máximas ganancias y pérdidas por jornada

Una vez analizada la evolución de la posición de los participantes a lo largo de la competición, estudiaremos ahora las máximas ganancias y pérdidas que se han dado en cada jornada. En ambos casos, corresponden a participantes que entran en conflicto con la mayor parte del resto de jugadores, apostando a que se va a producir un resultado inesperado para la mayoría; el que este se produzca o no, da lugar a ganancias o pérdidas abultadas.

Empezaremos analizando las máximas ganancias obtenidas por un participante en cada jornada. Para ello, ayudándonos del código de MATLAB que se encuentra en Apéndice A.2, podemos obtener la siguiente gráfica:

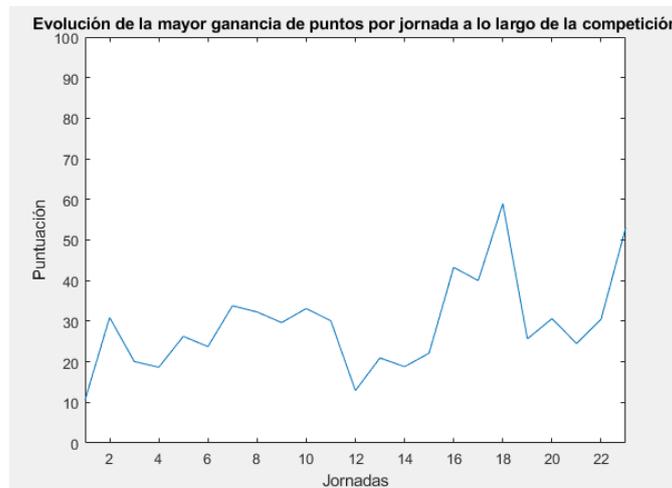


Figura 3.8: Evolución de la máxima ganancia por jornada a lo largo de la competición.

La media de la máxima ganancia de cada jornada es de unos 29.16 puntos. También observamos en la gráfica que a partir de la jornada 14, que es cuando se modificó el modelo de puntuación por primera vez, la ganancia máxima tuvo una repentina subida (lo mismo ocurrió en la última jornada tras modificar de nuevo el modelo de puntuación). La máxima ganancia de toda la competición ocurrió en la jornada 18, con valor de 58.98 puntos, de la mano del participante *maciuerspepi* con las asignaciones  $[0.3, 0.3]$  (para *Victoria local*),  $[0, 1]$  (para *Empate*) y  $[0.4, 0.4]$  (para *Derrota local*) en el partido *Croacia-Brasil* (con resultado final *Empate* tras acabar el tiempo reglamentario) y  $[0, 0]$  (para *Victoria local*),  $[1, 1]$  (para *Empate*) y  $[0, 0]$  (para *Derrota local*) en el partido *Países Bajos-Argentina* (con resultado final *Empate* tras acabar el tiempo reglamentario).

Por su parte, las máximas pérdidas por jornada de la competición se ven reflejadas en la gráfica siguiente:

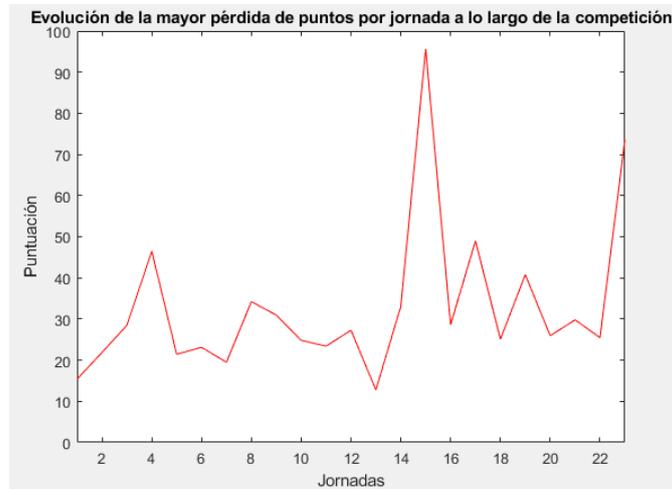


Figura 3.9: Evolución de la máxima pérdida por jornada a lo largo de la competición.

La media de la máxima pérdida de cada jornada es de unos 32.9 puntos. Volvemos a observar en la nueva gráfica cómo a partir jornada 14, que es cuando se modificó el modelo de puntuación por primera vez, la pérdida máxima tuvo una repentina subida (y vuelve a ocurrir exactamente lo mismo en la última jornada tras modificar de nuevo el modelo de puntuación). La máxima pérdida de toda la competición ocurrió en la jornada 15, con valor de 95.63 puntos, de la mano del participante *Valbuena* con las asignaciones  $[0, 0]$  (para *Victoria local*),  $[1, 1]$  (para *Empate*) y  $[0, 0]$  (para *Derrota local*) en el partido *Francia-Polonia* (con resultado final *Victoria local* tras acabar el tiempo reglamentario) y  $[0, 0]$  (para *Victoria local*),  $[0, 0]$  (para *Empate*) y  $[1, 1]$  (para *Derrota local*) en el partido *Inglaterra-Senegal* (con resultado final *Victoria local* tras acabar el tiempo reglamentario).

### 3.3. Evolución de la imprecisión en las asignaciones

En esta sección estudiaremos la precisión de las asignaciones de los participantes, así como su evolución a lo largo de la competición y el margen medio de imprecisión por jornada.

Empecemos definiendo qué entendemos por asignación precisa:

**Definición 3.1.** Una asignación  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$ ,  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$ ,  $[\underline{p}_3, \overline{p}_3]$ , se dirá precisa si  $\underline{p}_1 = \overline{p}_1$ ,  $\underline{p}_2 = \overline{p}_2$ ,  $\underline{p}_3 = \overline{p}_3$ .

De entre el total de 2137 asignaciones válidas, 804 fueron asignaciones precisas, lo que representa una proporción del 37.62%.

### 3.3.1. Precisión en las asignaciones por jornada

Veamos ahora si los participantes han tendido a hacerse más precisos (o imprecisos) conforme iba avanzando la competición. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos ver en Apéndice A.2 y obtenemos la siguiente gráfica:

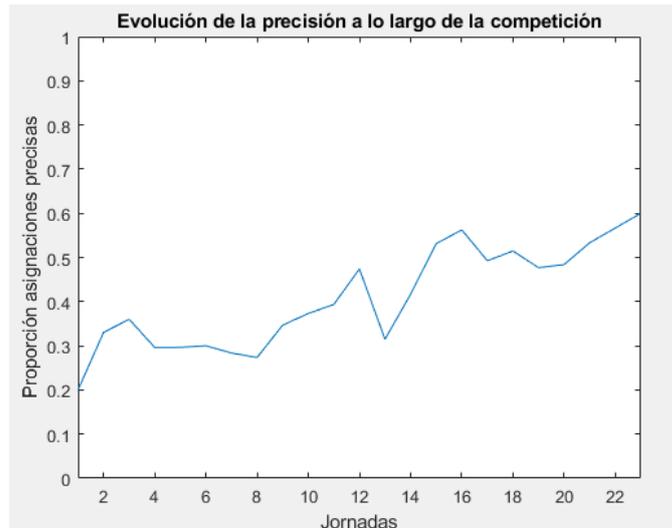


Figura 3.10: Evolución de la precisión de los participantes a lo largo de la competición.

Como vemos, los participantes sí que han tendido a hacerse más precisos a lo largo del experimento. Esto es principalmente debido al sistema de puntuación utilizado, ya que un intervalo de cierta longitud positiva tendrá menos opciones de ser disjunto con la asignación de otro participante que un intervalo de longitud cero (un punto), lo que se traduce en menos apuestas activadas con el resto de usuarios y menor puntuación en juego. De modo que, según iba avanzando la competición, los participantes insatisfechos con su puntuación asignaban intervalos cada vez más precisos para poder activar apuestas con el mayor número de usuarios posible.

### 3.3.2. Precisión en las asignaciones por participante

Estudiemos si la proporción de las asignaciones precisas varía (o se mantiene) en función del participante. De nuevo, ejecutamos el código de MATLAB que se encuentra en Apéndice A.2 y obtenemos por salida el gráfico de barras:

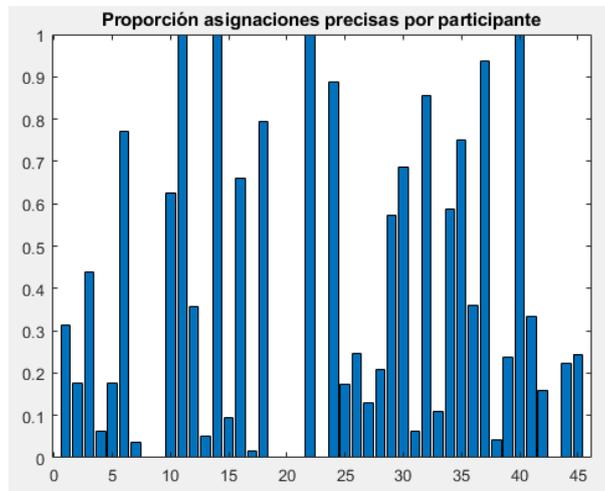


Figura 3.11: Proporción de asignaciones precisas por participante.

Podemos observar cómo ha habido gran diversidad de proporciones de asignaciones precisas entre los participantes. Por ejemplo, tenemos 4 participantes que únicamente han introducido asignaciones precisas a lo largo de la competición: *Kalmanhorof*, *Kolmogorov Smirnov*, *Javistmd* y *maraloncas*. Por el contrario, ha habido 7 personas que no han introducido ninguna asignación precisa en todo el experimento y estos son: *Cokedean*, *Arthur Van Camp*, *juanolo*, *paula\_alv16*, *pablo\_mentri*, *ceca* y *Miguel*. Sus posiciones en la clasificación final pueden verse en la siguiente tabla:

Nombre	Asignó únicamente probabilidades	Posición final
<b>Kalmanhorof</b>	Precisas	15 <sup>º</sup>
<b>Kolmogorov Smirnov</b>	Precisas	2 <sup>º</sup>
<b>Javistmd</b>	Precisas	32 <sup>º</sup>
<b>maraloncas</b>	Precisas	41 <sup>º</sup>
<b>Cokedean</b>	Imprecisas	29 <sup>º</sup>
<b>Arthur Van Camp</b>	Imprecisas	16 <sup>º</sup>
<b>juanolo</b>	Imprecisas	22 <sup>º</sup>
<b>paula_alv16</b>	Imprecisas	36 <sup>º</sup>
<b>pablo_mentri</b>	Imprecisas	20 <sup>º</sup>
<b>ceca</b>	Imprecisas	44 <sup>º</sup>
<b>Miguel</b>	Imprecisas	8 <sup>º</sup>

### 3.3.3. Margen medio de imprecisión por jornada

Comencemos introduciendo la definición de *margen medio de imprecisión* para poner en contexto lo que veremos a continuación:

**Definición 3.2.** El margen medio de imprecisión de una asignación  $[p_1, \bar{p}_1]$ ,  $[p_2, \bar{p}_2]$ ,  $[p_3, \bar{p}_3]$  es la media de las longitudes positivas de sus intervalos.

**Ejemplo 3.1.** Dado un jugador cuya asignación sea  $[0.1, 0.3]$ ,  $[0.2, 0.2]$ ,  $[0.3, 0.7]$ , su margen medio de imprecisión será  $\frac{l_1 + l_3}{2}$  (pues el segundo intervalo tiene longitud cero), donde  $l_1 := 0.3 - 0.1 = 0.2$  y  $l_3 := 0.7 - 0.3 = 0.4$ .

Estamos entonces en condiciones de estudiar si el *margen medio de imprecisión* por jornada de los participantes ha ido variando a lo largo de la competición. Introduciendo el código de MATLAB que encontraremos en Apéndice A.2 tenemos como salida:

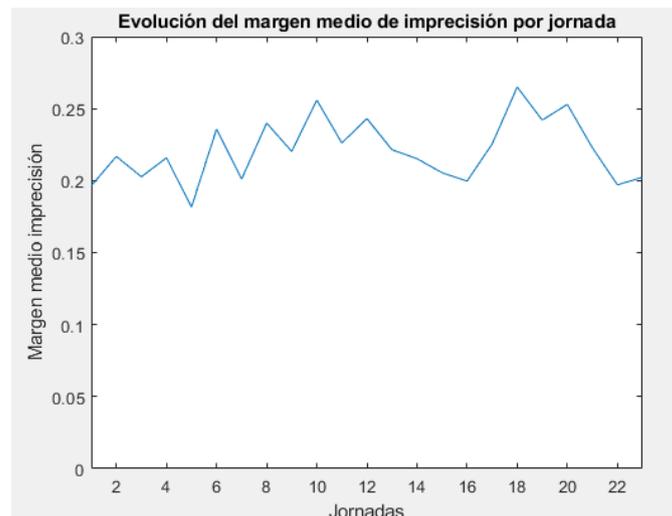


Figura 3.12: Evolución del margen medio de imprecisión a lo largo de la competición.

Como podemos observar, el *margen medio de imprecisión* no ha variado demasiado durante el experimento, lo que quiere decir que los participantes mantuvieron una longitud de intervalo similar en sus asignaciones imprecisas (de aproximadamente 0.2).

Pero, ¿y si en vez de mirar el *margen medio de imprecisión*, estudiamos el *margen medio total de imprecisión*? ¿Habrá variado a lo largo de la competición?

**Definición 3.3.** El margen medio total de imprecisión de una asignación  $[p_1, \bar{p}_1]$ ,  $[p_2, \bar{p}_2]$ ,  $[p_3, \bar{p}_3]$ , es la media de todas las longitudes (positivas o no) de sus intervalos.

**Ejemplo 3.2.** Dado un jugador cuya asignación sea  $[0.1, 0.3]$ ,  $[0.2, 0.2]$ ,  $[0.3, 0.7]$ , su margen medio total de imprecisión sería  $\frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}$ , donde  $l_1 := 0.3 - 0.1 = 0.2$ ,  $l_2 := 0.2 - 0.2 = 0$  y  $l_3 := 0.7 - 0.3 = 0.4$ .

Veamos entonces la gráfica proporcionada tras la ejecución del código de MATLAB que se encuentra en Apéndice A.2:

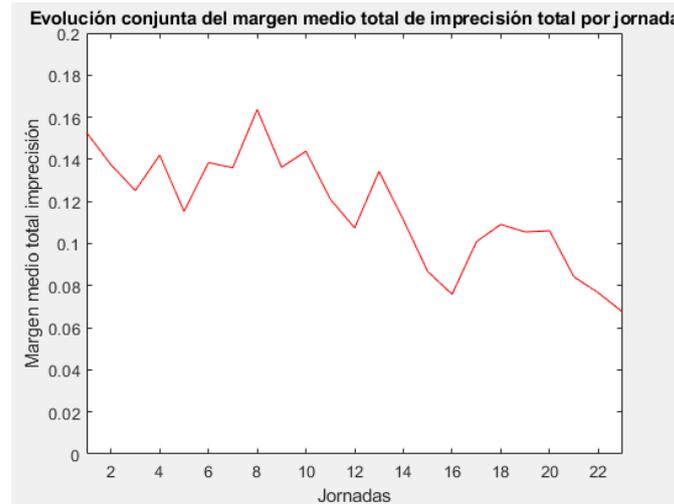


Figura 3.13: Evolución del margen medio total de imprecisión a lo largo de la competición.

Observamos que, en efecto, el *margen medio total de imprecisión* sí que ha bajado conforme iba avanzando la competición. Como por la Figura 3.12 sabemos que la longitud de los intervalos no ha variado demasiado a lo largo de la competición, deducimos que una parte de los usuarios que hacían asignaciones imprecisas han pasado a hacer asignaciones precisas (o al menos, para alguno de los tres posibles resultados) en algún punto del experimento, logrando reducir el *margen medio total de imprecisión*.

Se concluye así que, a medida que modificamos el modelo de puntuación y aumentamos las cantidades en juego entre los participantes, tanto la máxima ganancia de cada jornada, como la máxima pérdida de cada jornada aumentaron considerablemente. También se observa cómo las asignaciones de los participantes tendían a hacerse más precisas a medida que transcurría la competición. Sin embargo, la longitud de los intervalos de las asignaciones imprecisas se mantuvo constante a lo largo del experimento.

## Capítulo 4

# Análisis de la consistencia

En [7], Bruno de Finetti estableció dos caracterizaciones de las probabilidades finitamente aditivas en el contexto de la probabilidad subjetiva. La primera de ellas se establece en términos de apuestas deseables para un sujeto, y significa que una combinación lineal de apuestas deseables no debería de dar lugar a otra apuesta con la que el sujeto pierda dinero, sea cual sea el resultado del experimento.

Como vimos en la Sección 1.1.4 de la Introducción, dicha idea puede extenderse al caso de asignaciones imprecisas, dando lugar a dos condiciones de consistencia: la de *evitar la pérdida segura* y la denominada comúnmente *coherencia*. Ambas pueden ser interpretadas desde el punto de vista epistémico: la condición de *evitar la pérdida segura* es equivalente a que exista una distribución de probabilidad compatible con la asignación imprecisa, y la *coherencia* significa que el conjunto de probabilidades compatibles determina las probabilidades inferior y superior de la asignación imprecisa.

En este capítulo estudiaremos si las asignaciones de los participantes en nuestro experimento son *coherentes* o *evitan la pérdida segura*. También analizaremos, en función de la formación, género o conocimientos previos en probabilidades imprecisas de los participantes, si existen diferencias significativas entre los distintos grupos a la hora de ser consistente en las asignaciones.

Para estudiar estas diferencias estadísticamente, vamos a aplicar el *Test de proporciones para dos muestras* utilizando el programa RStudio. Recordemos que dicho test tiene como objetivo determinar si dos muestras independientes fueron tomadas de dos poblaciones que presentan la misma proporción de elementos con determinada característica. Si denotamos  $p_1$  y  $p_2$  las proporciones de los individuos con dicha característica en cada población, respectivamente, se consideran las siguientes hipótesis nula y alternativa:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

Dados  $n_1, n_2$  los tamaños muestrales de la *Muestra1* y *Muestra2* y  $x_1, x_2$  los individuos que cumplen la característica a estudiar en la primera y segunda muestra, denotaremos por  $\hat{p}_1 := \frac{x_1}{n_1}$  y  $\hat{p}_2 := \frac{x_2}{n_2}$  a las proporciones de elementos con la característica de interés en la *Muestra1* y la *Muestra2*, respectivamente.

El estadístico de contraste que se utiliza es:

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n_1} + \frac{p^*(1-p^*)}{n_2}}}$$

donde  $p^* = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$  es la proporción global de individuos con la característica entre las dos muestras. Se verifica que, bajo la hipótesis nula  $H_0$ ,

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n_1} + \frac{p^*(1-p^*)}{n_2}}} \sim_{H_0} \mathcal{N}(0, 1)$$

Para la correcta validez del test, se requiere que los tamaños muestrales sean lo suficientemente grandes y que las proporciones muestrales no estén muy próximas a 0 ó a 1. Habitualmente, esto se traduce en los siguientes requisitos:

$$\begin{cases} n_1 \geq 30 \\ n_2 \geq 30 \\ \text{mín}\{x_1, n_1 - x_1\} \geq 5 \\ \text{mín}\{x_2, n_2 - x_2\} \geq 5 \end{cases} \quad (4.1)$$

En caso de que no se cumplan estas condiciones, es posible aplicar un factor corrector por continuidad. En el caso de nuestro estudio esto no será necesario excepto en una ocasión, por cumplir en todos los casos los tamaños muestrales y las proporciones muestrales las condiciones requeridas.

Por otro lado, a la hora de estudiar la consistencia según los distintos campos de formación vistos en la Sección 3.1.3, utilizaremos el *Test  $\chi^2$  de homogeneidad*. Este test tiene como objetivo comprobar si una variable se distribuye de manera similar en dos o más muestras diferentes. Se aplica a variables aleatorias discretas con un número finito de valores o agrupadas en una cantidad finita de clases. Sean  $n_1, \dots, n_m$  los tamaños muestrales de *Muestra 1, \dots, Muestra m*, y denotemos  $C_1, \dots, C_k$  las posibles categorías de la variable a estudiar. Se construye la siguiente tabla de contingencia:

	$C_1$	$\dots$	$C_k$	
Muestra 1	$n_{1,1}$	$\dots$	$n_{1,k}$	$n_1$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
Muestra $m$	$n_{m,1}$	$\dots$	$n_{m,k}$	$n_m$
	$n_{\cdot 1}$	$\dots$	$n_{\cdot k}$	$n$

En esta tabla:

- $n_{i,j}$  es el número de individuos observados que pertenecen a la *Muestra*  $i$  y verifican la cualidad determinada en la clase  $C_j$ .
- $n_{\cdot i}$  es el número de individuos que pertenecen a la clase  $C_i$  (es decir, que comparten la cualidad determinada en  $C_i$ ).
- $n = n_1 + \dots + n_m = n_{\cdot 1} + \dots + n_{\cdot k}$  es el número total de individuos entre todas las muestras.

Se define  $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{i,j}}{n}$  como la proporción observada de individuos que pertenecen a la *Muestra*  $i$  y a la clase  $C_j$  y  $p_{ij}^* = \frac{n_{\cdot i} \cdot n_{\cdot j}}{n^2}$  como la proporción esperada de individuos que pertenecen a la *Muestra*  $i$  y a la clase  $C_j$ . Así, las hipótesis nula y alternativa consideradas son las siguientes:

$$\begin{cases} H_0 : p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{mj} \quad \forall j = 1, \dots, k \\ H_1 : \exists u \neq v \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, k\} \text{ verificando } p_{uj} \neq p_{vj} \end{cases}$$

El estadístico de contraste que se utiliza es:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

siendo  $O_{ij} = \hat{p}_{ij} \cdot n = n_{i,j}$  el número de individuos de la *Muestra*  $i$  verificando la cualidad determinada en la clase  $C_j$  y  $E_{ij} = p_{ij}^* \cdot n = \frac{n_{\cdot i} \cdot n_{\cdot j}}{n}$  las frecuencia esperada de individuos de la *Muestra*  $i$  verificando la cualidad determinada en la clase  $C_j$ . Se verifica que, bajo la hipótesis nula  $H_0$ ,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim_{H_0} \chi_{(m-1)(k-1)}^2$$

Para la correcta validez del test, se requiere que las proporciones muestrales no estén muy próximas a 0 ó a 1. Esto se traduce en:

$$E_{ij} = \frac{n_{\cdot i} \cdot n_{\cdot j}}{n} \geq 5 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, k\} \quad (4.2)$$

Ahora sí, podemos proseguir con el devenir del capítulo, empezando por el análisis de *evitar la pérdida segura*.

## 4.1. Evitar la pérdida segura

Tal y como vimos en la Sección 1.1.2 de la Introducción, nos centraremos en estudiar si los participantes *evitan la pérdida segura* a la hora de fijar sus asignaciones. Como ya indicamos, esta condición es equivalente a que exista una medida de probabilidad comprendida entre las probabilidades inferior y superior asignadas para el partido correspondiente. En el caso de nuestro experimento, en el que se asignan las probabilidades inferior y superior de cada uno de los resultados posibles, el modelo de probabilidades imprecisas se corresponde con lo que se denomina en la literatura *intervalos de probabilidad*. En ese caso, podemos utilizar el siguiente resultado, el cual simplificará bastante el transcurso de la sección:

**Proposición 4.1.** [2] *Sea un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  y unos intervalos de probabilidad  $[\underline{p}_i, \bar{p}_i]$  representando las probabilidades inferior y superior de  $\{\omega_i\}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Esta asignación evita la pérdida segura si y solo si*

$$\sum_{i=1}^n \underline{p}_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^n \bar{p}_i.$$

Veamos un par de ejemplos con asignaciones reales llevadas a cabo durante el experimento:

**Ejemplo 4.1.** *El participante Eloyzinho asigna para el partido Estados Unidos-Gales los intervalos  $[0.1, 0.2]$ ,  $[0.2, 0.3]$ ,  $[0.4, 0.7]$  para Victoria local, Empate y Derrota local, respectivamente. Se tiene que su asignación evita la pérdida segura pues verifica:*

$$\sum_{i=1}^3 \underline{p}_i = 0.1 + 0.2 + 0.4 = 0.7 \leq 1 \leq \sum_{i=1}^3 \bar{p}_i = 0.2 + 0.3 + 0.7 = 1.2.$$

*Existe por lo tanto alguna probabilidad compatible con las asignaciones; un ejemplo sería la determinada por la función de masa  $(0.15, 0.25, 0.6)$ .*

*Por el contrario, la participante Tina asigna para el partido Irán-Estados Unidos los intervalos  $[0, 0.1]$  para Victoria local,  $[0, 0.1]$  para Empate y  $[0.5, 0.7]$  para Derrota local. Se tiene que su asignación no evita la pérdida segura pues:*

$$\sum_{i=1}^3 \underline{p}_i = 0 + 0 + 0.5 = 0.5 \leq 1 \not\leq \sum_{i=1}^3 \bar{p}_i = 0.1 + 0.1 + 0.7 = 0.9.$$

*Esto quiere decir que no existe ninguna medida de probabilidad que esté comprendida entre las probabilidades inferiores y superiores asignadas por Tina, ya que, incluso yendo a máximos, la suma de las probabilidades superiores es inferior a 1.*

Podemos entonces, con esta caracterización, analizar todas las asignaciones de los participantes y ver cuáles verifican la condición necesaria.

Globalmente, se obtiene que de entre un total de 2137 asignaciones válidas, 1678 *evitan la pérdida segura*, lo que constituye un 78.5 %. Analicemos ahora por grupos la condición de *evitar la pérdida segura*, para ver si existen diferencias significativas entre ellos.

#### 4.1.1. Análisis según el campo de formación

Comenzaremos comparando la proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* entre participantes con los distintos campos de formación vistos en la Sección 3.1.3. Para ello, renombraremos los grupos como:

- **Grupo 1:** Compuesto por participantes con formación en Matemáticas y/o Física.
- **Grupo 2:** Compuesto por participantes con formación en Ingeniería.
- **Grupo 3:** Compuesto por participantes cuya formación sea ESO, Bachillerato o Grado Superior.
- **Grupo 4:** Compuesto por participantes con formación en Ciencias Sociales y Jurídicas.
- **Grupo 5:** Compuesto por participantes con formación en Ciencias Biosanitarias.

Así, ejecutando el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 obtenemos por salida:

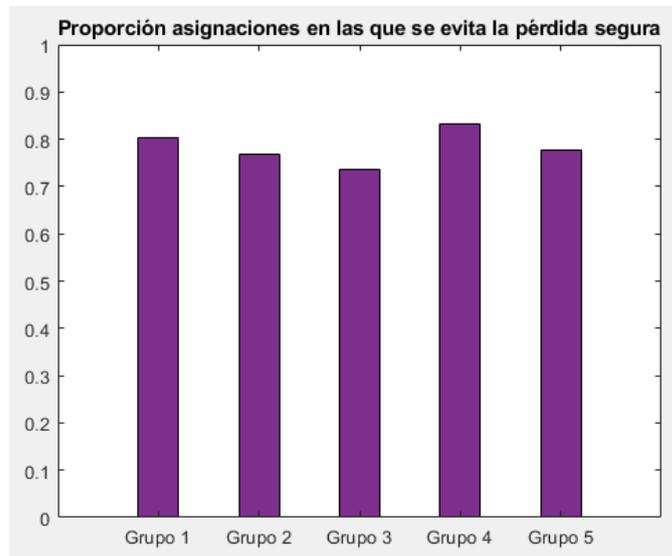


Figura 4.1: Comparación entre la proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* de los participantes con distinta formación.

Las frecuencias y proporciones de cada grupo se ven reflejadas en la siguiente tabla:

Campo de formación	Asignaciones que evitan la pérdida segura	Asignaciones que no evitan la pérdida segura	Proporción de asignaciones que evitan la pérdida segura
Matemáticas y/o Física	761	185	0,80444
Ingeniería	542	164	0,76771
ESO, Bachillerato o Grado Superior	133	48	0,73481
Ciencias Sociales y Jurídicas	85	17	0,83333
Ciencias Biosanitarias	157	45	0,77723

Observamos, tanto en la Figura 4.1 como en la tabla, unas ligeras diferencias entre las proporciones. Podemos ver también cómo el campo de formación con mayor proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* es *Ciencias Sociales y Jurídicas*. Para cerciorarnos de si la formación influye a la hora de *evitar la pérdida segura*, realizaremos un *Test  $\chi^2$  cuadrado de homogeneidad* con el código de RStudio que también hallaremos en Apéndice B.2 (pues se verifica el requisito mencionado en (4.2)):

### Pearson's Chi-squared test

```
data: matriveitarperdidaseguraformacion
X-squared = 7.5602, df = 4, p-value = 0.1091
```

Como vemos, el p-valor es de 0.1091, por lo que a nivel de significación  $\alpha = 0.05$  no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y concluimos que no existen diferencias significativas entre la formación de los participantes a la hora de *evitar la pérdida segura*.

Pero, ¿y si estudiamos la proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* entre participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física y los que tienen formación en otra rama? ¿También concluiremos que no existen diferencias significativas entre las proporciones? Ejecutando el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 obtenemos por salida:

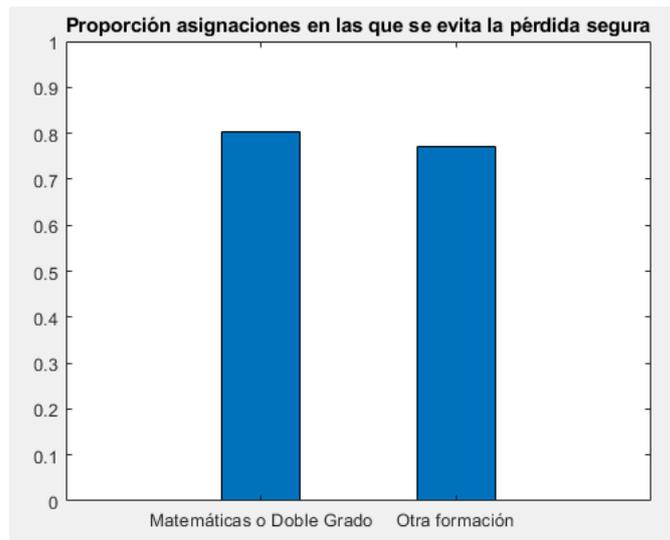


Figura 4.2: Comparación entre la proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* de los participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física, y los que tienen formación en otra rama.

Los participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física realizaron un total de 946 asignaciones, de las cuales 761 *evitaban la pérdida segura*, lo que constituye un porcentaje del 80.4%. Por el contrario, los participantes con otra formación (distinta a la de Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física) realizaron un total de 1191 asignaciones, de las cuales 917 *evitaban la pérdida segura*, lo que constituye un porcentaje del 77.0%. Como podemos observar en la Figura 4.2, parece haber una muy ligera diferencia entre ambas proporciones, pero para cerciorarnos, ejecutaremos el *Test de proporciones* en RStudio (puesto que se verifican las condiciones necesarias resumidas en la ecuación (4.1)) con el código que se halla en Apéndice B.2:

```

2-sample test for equality of proportions without
continuity correction

data:  matrivevitarperdidaseguraformacion
X-squared = 3.7205, df = 1, p-value = 0.02687
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 0.005304261 1.000000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.8044397 0.7699412

```

Puesto que el p-valor es de 0.02687, con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre la formación (o no) en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física de los participantes a la hora de *evitar la pérdida segura*. Observamos también que, pese a que en la Figura 4.2 la diferencia era verdaderamente reducida, los grandes tamaños muestrales con los que trabajamos hacen que sea significativa.

#### 4.1.2. Análisis por género

Estudiemos la comparación *evitar la pérdida segura* entre participantes con distinto género (en nuestro caso entre género masculino y femenino). Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

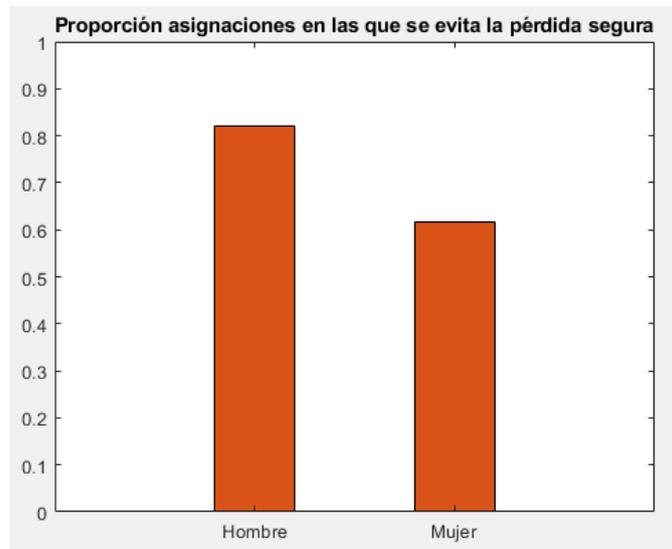


Figura 4.3: Comparación entre la proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* de los participantes con género masculino y género femenino.

Los participantes de género masculino realizaron un total de 1767 asignaciones, de las cuales 1450 *evitaban la pérdida segura*, lo que constituye un porcentaje del 82.1%. En cambio, las participantes de género femenino realizaron un total de 370 asignaciones, de las cuales 228 *evitaban la pérdida segura*, lo que constituye un porcentaje del 61.6%. Como vemos en la Figura 4.3, parece haber una notoria diferencia entre ambas proporciones; para cerciorarnos, ejecutaremos de nuevo un *Test de proporciones* en RStudio (puesto que se verifican las condiciones necesarias (4.1)) con el código ubicado en Apéndice B.2:

```
2-sample test for equality of proportions without
continuity correction
```

```
data: matriveitarperdidaseguragenero
X-squared = 75.776, df = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 0.1601715 1.0000000
sample estimates:
 prop 1    prop 2
0.8205999 0.6162162
```

Dado que el p-valor es inferior a  $2.2 \cdot 10^{-16}$ , con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen

diferencias significativas por género de los participantes a la hora de *evitar la pérdida segura*.

#### 4.1.3. Análisis según el conocimiento previo en probabilidades imprecisas

Por último, vamos a comparar la proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* entre participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas y los que no tenían nociones previas. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

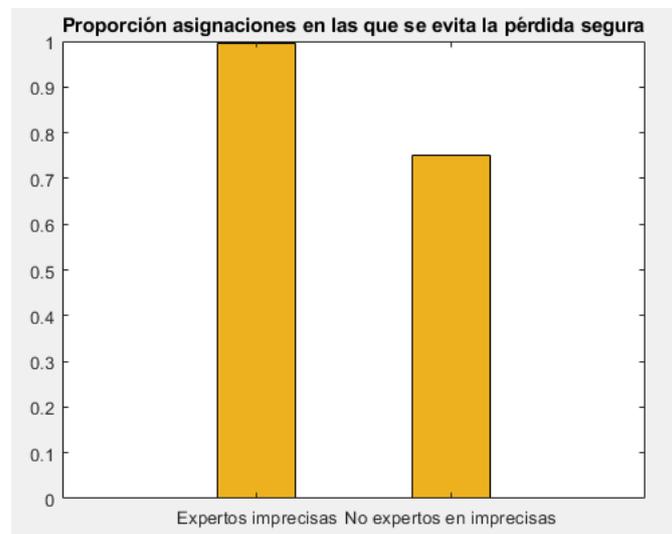


Figura 4.4: Comparación entre la proporción de asignaciones que *evitan la pérdida segura* de los participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas y los que no tenían nociones previas.

Los participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas realizaron un total de 291 asignaciones, de las cuales 290 *evitaban pérdida segura*, lo que constituye un porcentaje del 99.7%. Sin embargo, los participantes sin conocimientos previos en probabilidades imprecisas realizaron un total de 1846 asignaciones, de las cuales 1388 *evitaban pérdida segura*, lo que constituye un porcentaje del 75.2%. Como podemos observar en la Figura 4.4, parece haber una notoria diferencia entre ambas proporciones, pero para cerciorarnos, ejecutaremos de nuevo un *Test de proporciones* en RStudio. Nótese que en este caso sí que vamos a usar la corrección por continuidad, ya que en el primer caso el número de asignaciones que NO cumplen la condición es inferior a 5.

Utilizando el código localizado en Apéndice B.2, se obtiene:

## 2-sample test for equality of proportions with continuity correction

```
data: matriveitarperdidaseguraconocimprecisas
X-squared = 87.778, df = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 0.2252071 1.0000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.9965636 0.7518960
```

Se obtiene que el p-valor es inferior a  $2.2 \cdot 10^{-16}$ , así que con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre los conocimientos previos en probabilidades imprecisas de los participantes a la hora de *evitar la pérdida segura*.

## 4.2. Coherencia

Pasamos a continuación a analizar la proporción de asignaciones que verifican la condición de *coherencia* de Walley. Como ya hemos visto en la Sección 1.1.3 de la Introducción, esta condición significa que no solo el conjunto de probabilidades comprendidas entre las probabilidades inferiores y superiores asignadas es no vacío (es decir, que se *evita la pérdida segura*), sino que tomando las envoltentes por abajo y por arriba de las asignaciones se recuperan las cotas inferior y superior inicialmente asignadas. Esto implica que las cotas son tan precisas como es posible, si modelizamos nuestra información mediante un conjunto de probabilidades.

Si bien la comprobación de la *coherencia* no siempre es sencilla, en nuestro contexto echaremos mano de un resultado que simplificará bastante el devenir de la sección:

**Proposición 4.2.** [2] *Sea un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  y unos intervalos de probabilidad  $[\underline{p}_i, \overline{p}_i]$  representando las probabilidades inferior y superior de  $\{\omega_i\}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Diremos que la asignación es coherente si y solo si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$*

$$\sum_{i \neq j} \underline{p}_i + \overline{p}_j \leq 1$$

$$\sum_{i \neq j} \overline{p}_i + \underline{p}_j \geq 1$$

Veamos de nuevo un par de ejemplos con asignaciones reales llevadas a cabo durante el experimento:

**Ejemplo 4.2.** El participante NachoM asigna para el partido Argentina-Croacia los intervalos  $[0, 0]$ ,  $[0.2, 0.3]$ ,  $[0.7, 0.8]$  para Victoria local, Empate y Derrota local, respectivamente. Se tiene que su asignación es coherente pues verifica:

$$\begin{cases} \sum_{i \neq j} \underline{p}_i + \overline{p}_j = \begin{cases} 0 + 0.2 + 0.7 \leq 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 + 0.3 + 0.7 \leq 1 & \text{si } j = 2 \\ 0 + 0.2 + 0.8 \leq 1 & \text{si } j = 3 \end{cases} \\ \sum_{i \neq j} \overline{p}_i + \underline{p}_j = \begin{cases} 0 + 0.3 + 0.8 \geq 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 + 0.2 + 0.8 \geq 1 & \text{si } j = 2 \\ 0 + 0.3 + 0.7 \geq 1 & \text{si } j = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Se concluye así que si consideramos las medidas de probabilidad compatibles con estas asignaciones, sus envolventes inferior y superior determinan estas probabilidades inferiores y superiores; vemos por ejemplo que esto es así considerando las probabilidades  $(0, 0.3, 0.7)$  y  $(0, 0.2, 0.8)$ .

Por el contrario, el participante maciuerspepi asigna para el partido Croacia-Brasil los intervalos  $[0.3, 0.3]$  para Victoria local,  $[0, 1]$  para Empate y por último  $[0.4, 0.4]$  para Derrota local. Se tiene que su asignación no es coherente pues por ejemplo:

$$\sum_{i \neq j} \underline{p}_i + \overline{p}_j = 0.3 + 1 + 0.4 = 1.7 \not\leq 1$$

para  $i \in \{1, 3\}, j = 2$ . Esto quiere decir que la probabilidad superior de 1 que asigna para Empate no es alcanzable por las probabilidades comprendidas entre sus intervalos: al asignar una probabilidad mínima de Victoria local de 0.3 y de Derrota local de 0.4, la máxima probabilidad posible para Empate sería de 0.3.

Globalmente, de entre un total de 2137 asignaciones válidas, 1128 son *coherentes*, lo que constituye un 52.8%. Se trata de un porcentaje significativamente más bajo de las que *evitaban la pérdida segura* (el 78.5%). Esto muestra cómo la asignación de probabilidades imprecisas debe hacerse con cuidado, ya que en muchos casos podemos ser más precisos de lo inicialmente asignado: si por ejemplo consideramos los *intervalos de probabilidad*

$$(0.25, 0.35), (0.25, 0.35), (0.25, 0.35),$$

es fácil ver que contienen a la distribución de probabilidad  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , pero no cumplen la condición de *coherencia* ya que el valor 0.25 de la probabilidad inferior no es alcanzable: si consideramos las probabilidades comprendidas entre estos valores, sus envolventes por abajo y por arriba darían lugar a

$$(0.3, 0.35), (0.3, 0.35), (0.3, 0.35),$$

que sí es *coherente*.

Analicemos ahora si existen diferencias significativas en las proporciones de asignaciones *coherentes* entre los grupos.

#### 4.2.1. Análisis según el campo de formación

Estudiemos la comparación ser *coherente* en las asignaciones entre participantes con los distintos campos de formación vistos en la Sección 3.1.3 y bajo los mismos grupos definidos en la Sección 4.1.1. Ejecutando el código de MATLAB que se encuentra en Apéndice A.2, obtenemos por salida:

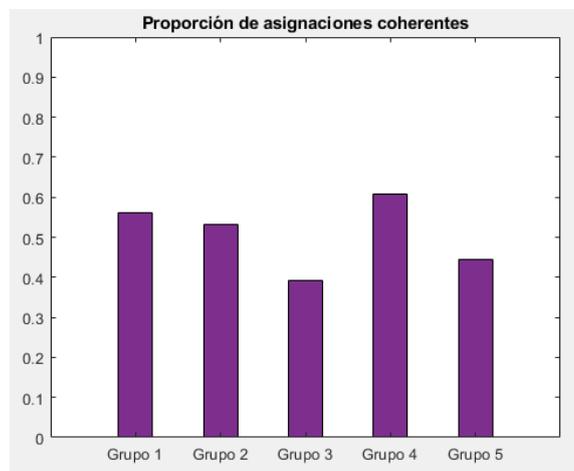


Figura 4.5: Comparación entre la proporción de asignaciones que *coherentes* de los participantes con distinta formación.

Las frecuencias y proporciones de cada grupo se ven reflejadas en la siguiente tabla:

Campo de formación	Asignaciones coherentes	Asignaciones no coherentes	Proporción de asignaciones coherentes
Matemáticas y/o Física	530	416	0,56025
Ingeniería	375	331	0,53116
ESO, Bachillerato o Grado Superior	71	110	0,39227
Ciencias Sociales y Jurídicas	62	40	0,60784
Ciencias Biosanitarias	90	112	0,44554

Observamos, tanto en la Figura 4.2.1 como en la tabla, que existe bastante más disparidad de la que habíamos encontrado en la comparativa de *evitar la pérdida segura* según formación. De nuevo, los participantes con formación en el campo *Ciencias Sociales y Jurídicas* son los que mayor proporción de asignaciones *coherentes* comprenden. Aunque en este caso parece evidente, realizaremos, al igual que en la anterior sección, un *Test  $\chi^2$  cuadrado de homogeneidad* para confirmar nuestras sospechas acerca de si la formación influye a la hora ser *coherente* en las asignaciones (pues se verifica el requisito mencionado en (4.2)). De nuevo, con el código de RStudio del Apéndice B.2 obtenemos:

Pearson's Chi-squared test

```
data: matrizcoherenciagruposformacion
X-squared = 25.477, df = 4, p-value = 4.034e-05
```

Como el p-valor es de  $4.034 \cdot 10^{-5}$ , a nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre la formación de los participantes a la hora de ser *coherente* en las asignaciones.

De nuevo, tal y como hicimos en la Sección 4.1.1, estudiaremos la proporción de asignaciones *coherentes* entre participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física y los que tienen formación en otra rama. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

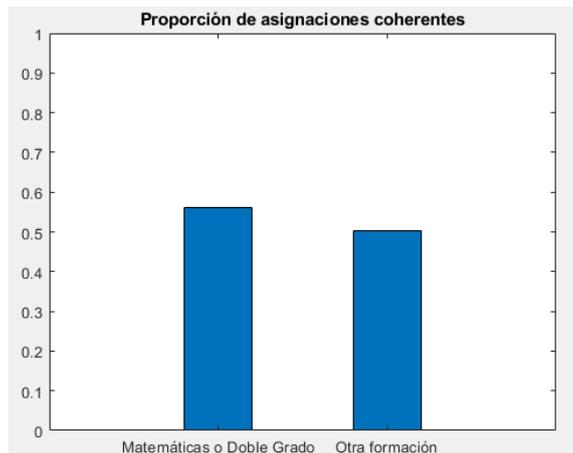


Figura 4.6: Comparación entre la proporción de asignaciones que *coherentes* de los participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física, y los que tienen formación en otra rama.

Se observa cómo los participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física realizaron un total de 946 asignaciones, de las cuales 530 eran asignaciones *coherentes*, lo que constituye un porcentaje del 56.0%. Por el contrario, los participantes con otra formación (distinta a la de Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física) realizaron un total de 1191 asignaciones, de las cuales 598 eran asignaciones *coherentes*, lo que constituye un porcentaje del 50.2%. Como podemos observar en la Figura 4.6, parece haber cierta diferencia entre ambas proporciones, pero para cerciorarnos, ejecutaremos un *Test de proporciones* en RStudio sin corrección de continuidad (puesto que se verifican las condiciones necesarias (4.1)) con el código que se halla en Apéndice B.2:

```

2-sample test for equality of proportions without
continuity correction

data: matrizcoherenciaformacion
X-squared = 7.1544, df = 1, p-value = 0.003739
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 0.02248227 1.00000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.5602537 0.5020991

```

Dado que el p-valor es de 0.003739, con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre la formación (o no) en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física de los participantes a la hora de ser *coherente* en las asignaciones.

#### 4.2.2. Análisis por género

Estudiemos la comparación ser *coherente* en las asignaciones entre participantes con distinto género (en nuestro caso entre género masculino y femenino). Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

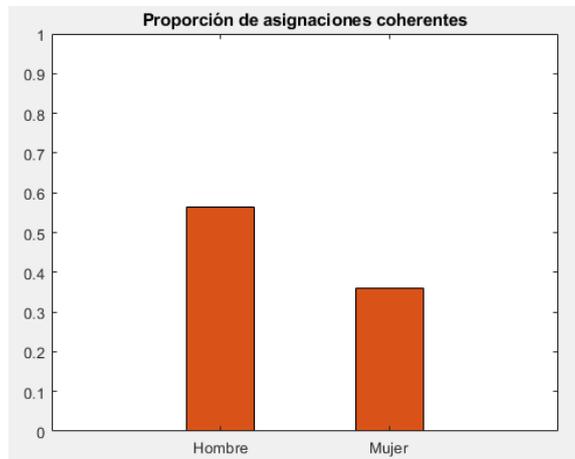


Figura 4.7: Comparación entre la proporción de asignaciones *coherentes* de los participantes con género masculino y género femenino.

Los participantes de género masculino realizaron un total de 1767 asignaciones, de las cuales 995 eran asignaciones *coherentes*, lo que constituye un porcentaje del 56.3%. En cambio, las participantes de género femenino realizaron un total de 370 asignaciones, de las cuales 133 eran asignaciones *coherentes*, lo que constituye un porcentaje del 35.9%. Como vemos en la Figura 4.7, parece haber cierta diferencia entre ambas proporciones, pero para cerciorarnos, ejecutaremos de nuevo un *Test de proporciones* en RStudio sin corrección por continuidad (puesto que se verifican las condiciones necesarias (4.1)) con el código ubicado en Apéndice B.2:

```
2-sample test for equality of proportions without
continuity correction
```

```
data: matrizcoherenciagenero
X-squared = 50.907, df = 1, p-value = 4.843e-13
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 0.158251 1.00000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.5631013 0.3594595
```

Puesto que el p-valor es de  $4.843 \cdot 10^{-13}$ , con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre el género de los participantes a la hora de ser *coherente* en las asignaciones.

### 4.2.3. Análisis según el conocimiento previo en probabilidades imprecisas

A continuación comparamos la proporción de asignaciones *coherentes* entre los participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas y los que no tenían nociones previas. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

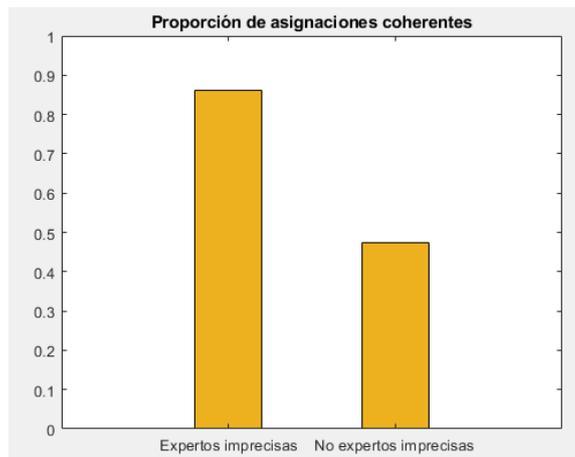


Figura 4.8: Comparación entre la proporción de asignaciones *coherentes* de los participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas y los que no tenían nociones previas.

Los participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas realizaron un total de 291 asignaciones, de las cuales 251 eran asignaciones *coherentes*, lo que constituye un porcentaje del 86.3%. Sin embargo, los participantes sin conocimientos previos en probabilidades imprecisas realizaron un total de 1846 asignaciones, de las cuales 877 eran asignaciones *coherentes*, lo que constituye un porcentaje del 47.5%. Como podemos observar en la Figura 4.8, parece haber cierta diferencia entre ambas proporciones; para cerciorarnos, ejecutaremos de nuevo un *Test de proporciones* en RStudio sin corrección por continuidad (puesto que se verifican las condiciones necesarias (4.1)) con el código localizado en Apéndice B.2:

```
2-sample test for equality of proportions without
continuity correction
```

```
data: matrizcoherenciaconocimprecisas
X-squared = 151.42, df = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
```

```

0.3491496 1.00000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.8625430 0.4750813

```

Se obtiene un p-valor inferior a  $2.2 \cdot 10^{-16}$ , así que con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre los conocimientos previos en probabilidades imprecisas de los participantes a la hora de ser *coherente* en las asignaciones.

Es decir, de los seis contrastes de *Test de proporciones* que hemos realizado a lo largo del capítulo, se ha rechazado la hipótesis nula  $H_0 : p_1 = p_2$  en todos ellos. Por consiguiente, existen diferencias significativas a la hora de ser consistente en las asignaciones en los grupos con formación (o no) en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física, los grupos de distinto género y los grupos con conocimientos previos (o no) en probabilidades imprecisas. Por el contrario, de los dos contrastes de *Test  $\chi^2$  de homogeneidad* que analizamos, aceptamos la hipótesis nula  $H_0 : p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{mj} \quad \forall j = 1, \dots, k$  en uno de ellos y la rechazamos en el otro, concluyendo así que no existen diferencias significativas a la hora de *evitar la pérdida segura* en las asignaciones según el campo de formación, pero sí a la hora de ser *coherente*.

Si bien estas condiciones de *coherencia* fueron las analizadas en ediciones previas del experimento de 1982 y 2014, en nuestro caso hemos ido más allá, y hemos estudiado también la consistencia a partir de una segunda condición de *coherencia* también introducida por Bruno de Finetti: la basada en las llamadas *scoring rules*. Este es el objetivo de nuestro próximo capítulo.

## Capítulo 5

# Análisis de la consistencia a partir de funciones de penalización

Bruno de Finetti estableció dos caracterizaciones de las probabilidades finitamente aditivas. La primera ya fue tratada en el capítulo anterior: se basaba en la combinación de las apuestas determinadas como deseables a partir de las asignaciones de las probabilidades, y dio lugar a los conceptos de *evitar la pérdida segura* y *coherencia* analizados en el capítulo anterior.

En este capítulo nos centraremos en la segunda caracterización, la cual se basa en la introducción de funciones de penalización (las llamadas *scoring rules*) sobre las asignaciones. Comenzaremos introduciendo la caracterización de Bruno de Finetti para a continuación explicar cómo fue generalizada al caso impreciso por Seidenfeld et al.

**Definición 5.1.** *Dado un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  y unos valores  $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  representando las probabilidades de  $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, n}$ , se define el riesgo asociado a  $\omega_i$  como:*

$$\begin{cases} (1 - p_i)^2 & \text{si ocurre } \omega_i \\ (0 - p_i)^2 = p_i^2 & \text{si no ocurre } \omega_i. \end{cases}$$

El concepto de riesgo se basa en introducir una función de penalización, basada en el cuadrado de la diferencia entre lo que ha ocurrido (1 si ocurre  $\omega_i$  y 0 si no lo hace) y la probabilidad  $p_i$  de ocurrencia que habíamos asignado. A partir de los riesgos asociados a cada resultado, y teniendo en cuenta que únicamente ocurrirá uno de ellos, podemos definir el riesgo global:

**Definición 5.2.** *Sea un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  y unos valores  $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  representando las probabilidades de  $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, n}$ . Si únicamente ocurre el suceso  $\omega_j$  y no ocurren el resto de  $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, n}$  con  $i \neq j$ , se define*

el riesgo total de la asignación  $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  como:

$$(1 - p_j)^2 + \sum_{i \neq j} p_i^2.$$

Para simplificar la notación, definiremos entonces la función de riesgo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$f(\vec{p}) = \left( (1 - p_1)^2 + \sum_{i=2}^n p_i^2, (1 - p_2)^2 + \sum_{i \neq 2} p_i^2, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + (1 - p_n)^2 \right). \quad (5.1)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, procedemos a enunciar el teorema de Bruno de Finetti que sentará las bases de la segunda caracterización de consistencia:

**Teorema 5.1.** [7] *Dado un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  y unos valores  $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , se cumple que la asignación  $\{p_i\}_{i=1, \dots, n}$  es una función masa de probabilidad si y solo si no existe otra asignación  $\{q_i\}_{i=1, \dots, n}$  verificando*

$$f(\vec{q}) \leq f(\vec{p}) \text{ y } f(\vec{q})_k < f(\vec{p})_k \text{ para algún } k \in \{1, \dots, n\},$$

donde  $f(\vec{p}), f(\vec{q})$  se definen a partir de la ecuación (5.1).

Tal y como hizo Walley extendiendo la primera caracterización de consistencia de de Finetti a probabilidades imprecisas, Seidenfeld et al. [12] estudiaron cómo extender al caso impreciso las ideas del Teorema 5.1. Para ello, en primer lugar extendieron la idea del riesgo asociado a una asignación (imprecisa) de la siguiente forma:

**Definición 5.3.** *Dado un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  y unos intervalos  $[p_i, q_i]$  representando las probabilidades inferior y superior de  $\{\omega_i\}$  para  $i = 1, \dots, n$ , se define el riesgo asociado a  $\omega_i$  como:*

$$\begin{cases} (1 - q_i)^2 & \text{si ocurre } \omega_i \\ (0 - p_i)^2 = p_i^2 & \text{si no ocurre } \omega_i. \end{cases}$$

De nuevo la idea es medir el cuadrado de la diferencia entre lo que ha ocurrido (1 si se da  $\omega_i$  y 0 si no lo hace) y la asignación que hemos realizado; la diferencia al dar un intervalo de probabilidad es que se considera la distancia mínima entre el 1, el 0 y los valores del intervalo; por ello, en el primer caso se considera la diferencia con la probabilidad superior y en el segundo la diferencia con la probabilidad inferior.

Análogamente al caso preciso, teniendo en cuenta que solo se dará un resultado, podemos definir el riesgo total asociado a cada resultado concreto:

**Definición 5.4.** Sea un espacio finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  y unos intervalos  $[p_i, q_i]$  representando las probabilidades inferior y superior de  $\{\omega_i\}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Supongamos que únicamente ocurre  $\omega_j$  y no ocurren el resto de  $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, n}$  con  $i \neq j$ . Entonces, se define el riesgo total de la asignación como:

$$p_1^2 + \dots + (1 - q_j)^2 + \dots + p_n^2$$

Aplicado a nuestro caso, dada una asignación de un participante  $[p_1, q_1]$ ,  $[p_2, q_2]$ ,  $[p_3, q_3]$  para *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*, respectivamente, tenemos que el riesgo total de la asignación será:

$$\begin{cases} (1 - q_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 & \text{si ocurre Victoria local;} \\ p_1^2 + (1 - q_2)^2 + p_3^2 & \text{si ocurre Empate;} \\ p_1^2 + p_2^2 + (1 - q_3)^2 & \text{si ocurre Derrota local.} \end{cases}$$

**Definición 5.5.** Dada una asignación  $[p_1, q_1]$  para *Victoria local*,  $[p_2, q_2]$  para *Empate* y  $[p_3, q_3]$  para *Derrota local*, se define su vector de riesgo total asociado  $\vec{R}$ , como:

$$\vec{R} = \left( (1 - q_1)^2 + p_2^2 + p_3^2, p_1^2 + (1 - q_2)^2 + p_3^2, p_1^2 + p_2^2 + (1 - q_3)^2 \right),$$

donde cada componente representa el riesgo total en caso de que ocurra *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*, respectivamente.

Este vector es una extensión al caso impreciso de la función  $f$  definida en la ecuación (5.1).

Así, dadas dos asignaciones  $[p_1, q_1]$ ,  $[p_2, q_2]$ ,  $[p_3, q_3]$  (*Asignación1*) y  $[p'_1, q'_1]$ ,  $[p'_2, q'_2]$ ,  $[p'_3, q'_3]$  (*Asignación2*) para *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*, respectivamente, cuyos vectores asociados al riesgo total son  $\vec{R}_1 = (r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})$  y  $\vec{R}_2 = (r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3})$ , decimos que *Asignación1* tiene uniformemente menos riesgo que *Asignación2* si y solo si:

$$r_{1,i} \leq r_{2,i} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \text{ y además } \exists j \in \{1, 2, 3\} \text{ con } r_{1,j} < r_{2,j}.$$

Nuestra primera idea para extender el resultado de Bruno de Finetti al caso impreciso sería entonces proponer que una asignación es *coherente tipo 2* si es imposible encontrar otra que tenga uniformemente menos riesgo. Sin embargo, esta aproximación al problema no es útil en el caso impreciso, como veremos a continuación:

**Proposición 5.2.** Dada una asignación  $[p_1, q_1]$ ,  $[p_2, q_2]$ ,  $[p_3, q_3]$  para *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*. Cualquier asignación  $[p'_1, q'_1]$ ,  $[p'_2, q'_2]$ ,  $[p'_3, q'_3]$  para *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local* verificando  $[p_i, q_i] \subseteq [p'_i, q'_i] \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$  y además  $\exists j \in \{1, 2, 3\}$  con  $[p_j, q_j] \subsetneq [p'_j, q'_j]$ , tiene uniformemente menos riesgo.

*Demostración.* Es suficiente con observar que la inclusión  $[p_i, q_i] \subseteq [p'_i, q'_i]$  implica que

$$(1 - q'_i)^2 \leq (1 - q_i)^2 \text{ y } p_i'^2 \leq p_i^2;$$

es decir, el riesgo asociado a la ocurrencia de  $\omega_i$  con  $[p'_i, q'_i]$  es menor o igual asociado con  $[p_i, q_i]$ . Teniendo en cuenta que el riesgo total es la suma de los riesgos con cada resultado del experimento, se deduce que  $\vec{R}_2 \leq \vec{R}_1$ . Por otro lado, como

$$q'_i > q_i \Rightarrow (1 - q'_i)^2 < (1 - q_i)^2 \quad \text{y} \quad p'_i < p_i \Rightarrow (p'_i)^2 < (p_i)^2$$

para todo  $0 \leq p'_i \leq p_i \leq q_i \leq q'_i \leq 1$ , deducimos que si alguna inclusión  $[p_i, q_i] \subseteq [p'_i, q'_i]$  es estricta, entonces  $\vec{R}_2 \not\leq \vec{R}_1$ .  $\square$

Es decir, si solamente nos basamos en la idea de reducir el riesgo, deducimos de la Proposición 5.2 que la única asignación consistente sería asignar  $[0, 1]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, 1]$  para *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*, respectivamente, pues es la menos inconsistente al tener vector asociado al riesgo total,

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \left( (1 - 1)^2 + 0^2 + 0^2, 0^2 + (1 - 1)^2 + 0^2, 0^2 + 0^2 + (1 - 1)^2 \right) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Es por ello que pediremos, además de la condición de tener uniformemente menos riesgo, otra condición referente a la precisión, para poder decir que una asignación es inconsistente. Esta condición se basará en el concepto de score:

**Definición 5.6.** *Definimos el score de una asignación  $[p_1, q_1]$ ,  $[p_2, q_2]$ ,  $[p_3, q_3]$  para Victoria local, Empate y Derrota local, respectivamente, como el conjunto:*

$$S = \{(p_1, p_2, p_3), (p_1, q_2, p_3), (q_1, p_2, p_3)\}.$$

Teniendo en cuenta los desarrollos anteriores, las distintas componentes del vector de riesgo total  $\vec{R}$  se obtienen calculando el cuadrado de la distancia euclídea entre las componentes del score  $S$  y los extremos  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  del conjunto de probabilidades finitamente aditivas.

Consideremos entonces dos asignaciones  $[p_1, q_1]$ ,  $[p_2, q_2]$ ,  $[p_3, q_3]$  (*Asignación1*) y  $[p'_1, q'_1]$ ,  $[p'_2, q'_2]$ ,  $[p'_3, q'_3]$  (*Asignación2*) para *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*, respectivamente, cuyos scores asociados sean

$$S_1 = \{(p_1, p_2, p_3), (p_1, q_2, p_3), (q_1, p_2, p_3)\}$$

y

$$S_2 = \{(p'_1, p'_2, p'_3), (p'_1, q'_2, p'_3), (q'_1, p'_2, p'_3)\}.$$

**Definición 5.7.** [12] Diremos que *Asignación2* es, al menos, tan indeterminada como *Asignación1* si la envolvente convexa de  $S_1$  es isomorfa (bajo transformaciones que no modifican la forma ni el tamaño) a un subconjunto de la envolvente convexa de  $S_2$ .

En nuestro caso, por la estructura de  $S_1$  y  $S_2$ , la condición anterior es equivalente a que se pueda incrustar el triángulo determinado por el score asociado a *Asignación1*,  $S_1$ , en el triángulo determinado por el score asociado a *Asignación2*,  $S_2$ .

Ahora sí, estamos en condiciones de definir cuándo una asignación se considera *coherente de tipo 2*:

**Definición 5.8.** Dada una *Asignación1*:  $[p_1, q_1]$  para Victoria local,  $[p_2, q_2]$  para Empate y  $[p_3, q_3]$  para Derrota local, se dice que es *coherente de tipo 2* si de entre todas las asignaciones que se hicieron para ese mismo partido no existe una *Asignación2* verificando simultáneamente:

- (i) *Asignación2* tiene uniformemente menos riesgo que *Asignación1*.
- (ii) *Asignación1* es, al menos, tan indeterminada como *Asignación2*.

**Observación 2.** Una definición alternativa de consistencia consistiría en estudiar si existe otra asignación posible que tenga menos riesgo y sea al menos igual de indeterminada, aunque no haya sido realizada por los participantes en el experimento. Sin embargo, el estudio de esta condición da lugar a un problema que es considerablemente más complejo; por este motivo, en el trabajo de Seidenfeld et al. [12] se consideran unos casos particulares, y se dice que una asignación es *incoherente* cuando es mejorable en el sentido de la Definición 5.8 dentro de la clase de interés. Nosotros consideramos entonces una idea análoga, sienta en nuestro caso la clase de interés las asignaciones hechas para el mismo partido por el resto de participantes.

Si bien la condición (i) de la Definición 5.8 es fácilmente comprobable, la condición (ii) es más compleja, puesto que se relaciona con el problema de inclusión entre polígonos, el cual no tiene siempre una solución sencilla [15]. Afortunadamente, sí es factible su comprobación en el contexto de nuestro experimento. En efecto, al estar en un espacio de cardinal 3, necesitamos condiciones que nos determinen si es posible o no incrustar el triángulo determinado por  $S_2$  en el triángulo determinado por  $S_1$ . Esto puede comprobarse con la ayuda del siguiente teorema:

**Teorema 5.3.** [10] Sean  $T_1, T_2$  dos triángulos y  $F_1, F_2$  sus áreas, respectivamente. Sean además  $a_1, b_1, c_1$  los lados de  $T_1$  y  $a_2, b_2, c_2$  los lados de  $T_2$ . Entonces  $T_2$  se puede incrustar en  $T_1$  si y solo si al menos una de las 18 desigualdades que se obtienen al permutar  $a_1, b_1, c_1$  y permutar cíclicamente

$a_2, b_2, c_2$  en la siguiente expresión es correcta:

$$\begin{aligned} \max\{F_1(b_2^2+c_2^2-a_2^2), F_2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)\} + \max\{F_1(a_2^2+c_2^2-b_2^2), F_2(a_1^2+c_1^2-b_1^2)\} \\ \leq 2F_1c_1c_2. \end{aligned}$$

Procedemos entonces a estudiar la proporción de asignaciones *coherentes de tipo 2* dentro de nuestro experimento. Para ello, vamos a distinguir en primer lugar varios casos:

1. Si tenemos una asignación precisa (es decir,  $[p_1, p_1], [p_2, p_2], [p_3, p_3]$ ) con  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ , entonces es *coherente de tipo 2*. Nos encontramos con un total de 755 asignaciones de este tipo.
2. Si tenemos una asignación precisa (es decir,  $[p_1, p_1], [p_2, p_2], [p_3, p_3]$ ) pero no es una probabilidad ( $p_1 + p_2 + p_3 \neq 1$ ) entonces no es *coherente de tipo 2*. Se dieron 49 asignaciones de este tipo.
3. Si tenemos una asignación  $[p_1, q_1], [p_2, q_2], [p_3, q_3]$  que es imprecisa en únicamente uno de los tres resultados (es decir,  $\exists! j \in \{1, 2, 3\}$  con  $p_j \neq q_j$ ), entonces el score asociado a esta asignación sería un conjunto bipuntual que produce un segmento y según el Teorema 5.3 la desigualdad se cumpliría siempre por ser  $F_1 = 0$ . No obstante, si dos de las tres asignaciones son precisas existe una sola probabilidad posible para la tercera asignación, por lo que esta no debería ser imprecisa. Estimamos por lo tanto que en esta situación se contradice el espíritu del concepto de *coherencia* tratado en el artículo de Seidenfeld et al.[12] y por ello consideraremos que la asignación no es *coherente tipo 2*. Contamos con 101 asignaciones en estas condiciones.
4. Si tenemos una asignación en la que al menos dos intervalos son imprecisos, entonces el score asociado a la asignación sería un conjunto con tres elementos (que determinaría un triángulo) y la desigualdad del Teorema 5.3 no sería trivial. En esta ocasión además, habría que comprobar que para cada asignación no existe otra con uniformemente menos riesgo. Este caso fue el más predominante con un total de 1232 asignaciones.

Una vez distinguidos los diferentes casos, obtenemos que globalmente, de entre un total de 2137 asignaciones válidas, 1930 son *coherentes tipo 2*, lo que constituye un 90.3%. Nótese que es un porcentaje muy elevado, puesto que solo estamos considerando como incoherentes a aquellas que son mejorables (en el sentido de tener menos riesgo sin aumentar la imprecisión) por otra asignación efectuada *para el mismo partido en el experimento*.

Al igual que procedimos en el capítulo anterior, estudiaremos si influye la formación, el género y los conocimientos previos en probabilidades imprecisas de los participantes a la hora de ser *coherentes tipo 2* en las asignaciones.

## 5.1. Análisis por campo de formación

Comenzamos comparando la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* entre participantes con los distintos campos de formación vistos en la Sección 3.1.3 y bajo los mismos grupos definidos en la Sección 4.1.1 y Sección 4.2.1. Para ello, ejecutaremos el código de MATLAB que se encuentra en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

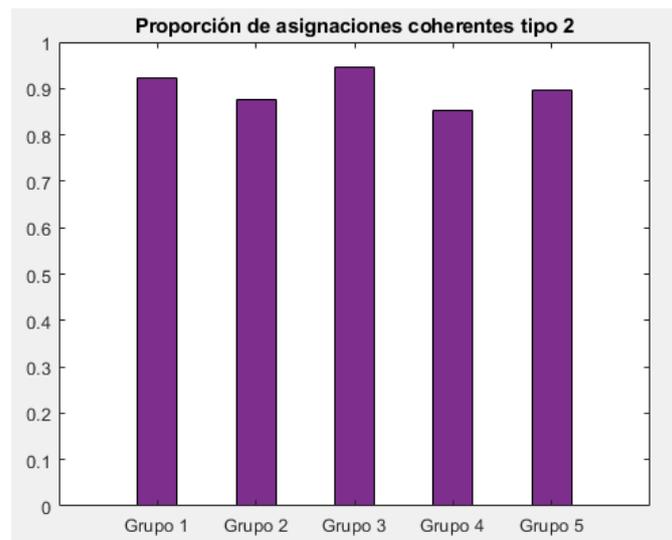


Figura 5.1: Comparación entre la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* de los participantes con distinta formación.

Las frecuencias y proporciones de cada grupo se ven reflejadas en la siguiente tabla:

Campo de formación	Asignaciones coherentes tipo 2	Asignaciones no coherentes tipo 2	Proporción de asignaciones coherentes tipo 2
Matemáticas y/o Física	873	73	0,92283
Ingeniería	618	88	0,87535
ESO, Bachillerato o Grado Superior	171	10	0,94475
Ciencias Sociales y Jurídicas	87	15	0,85294
Ciencias Biosanitarias	181	21	0,89604

Observamos, tanto en la Figura 5.1 como en la tabla, unas ligeras di-

ferencias entre las proporciones. En esta ocasión, los participantes con formación *ESO, Bachillerato o Grado Superior* son los que mayor proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* han realizado. Ante tal similitud en las proporciones, nos vemos obligados a realizar un *Test  $\chi^2$  cuadrado de homogeneidad* para conocer si la formación influye a la hora de ser *coherente tipo 2* en las asignaciones (pues se verifica el requisito mencionado en (4.2)). De nuevo, con el código de RStudio del Apéndice B.2 obtenemos:

Pearson's Chi-squared test

```
data: matrizcoherencia2gruposformacion
X-squared = 17.061, df = 4, p-value = 0.001881
```

Dado que el p-valor es de 0.001881, con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre la formación de los participantes a la hora de ser *coherente tipo 2* en las asignaciones.

Tal y como hicimos en la Sección 4.1.1 y la Sección 4.2.1, ahora estudiaremos si la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* entre participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física y los que tienen formación en otra rama. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

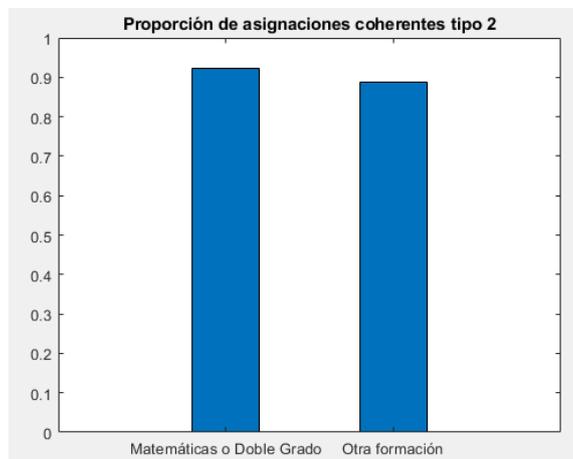


Figura 5.2: Comparación entre la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* de los participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física, y los que tienen formación en otra rama.

Los participantes con formación en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física realizaron un total de 946 asignaciones, de las cuales 873 eran *coherentes tipo 2*, lo que constituye un porcentaje del 92.3%. Por el contrario, los participantes con otra formación (distinta a la de Matemáticas /

Doble Grado de Matemáticas-Física) realizaron un total de 1191 asignaciones, de las cuales 1057 eran *coherentes tipo 2*, lo que constituye un porcentaje del 88.7%. Como podemos observar en la Figura 5.2, parece haber una muy ligera diferencia entre ambas proporciones, pero para cerciorarnos, ejecutaremos un *Test de proporciones* en RStudio sin corrección por continuidad (puesto que se verifican las condiciones de (4.1)) con el código que se halla en Apéndice B.2:

```

2-sample test for equality of proportions without
continuity correction

data:  matrizscoringformacion
X-squared = 7.5283, df = 1, p-value = 0.003037
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 0.0145951 1.0000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.9228330 0.8874895

```

Se obtiene un p-valor de 0.003037, así que con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre la formación (o no) en Matemáticas / Doble Grado de Matemáticas-Física de los participantes a la hora de ser *coherente tipo 2* en las asignaciones. De nuevo, pese a que la Figura 5.2 no muestra una gran disparidad entre ambas proporciones, los grandes tamaños muestrales hacen que la diferencia sea significativa.

## 5.2. Análisis por género

Comparamos a continuación la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* por género. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

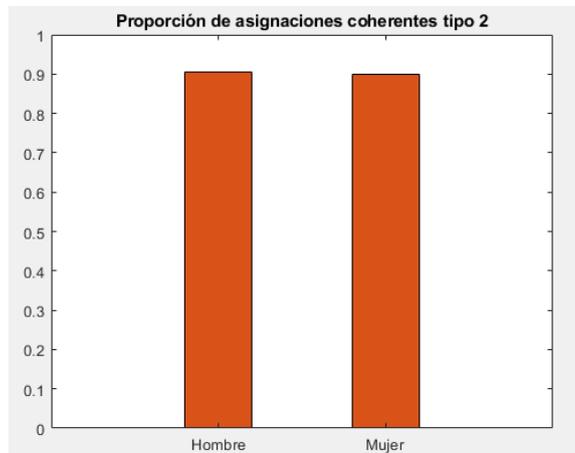


Figura 5.3: Comparación entre la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* de los participantes con género masculino y género femenino.

Los participantes de género masculino realizaron un total de 1767 asignaciones, de las cuales 1597 eran asignaciones *coherentes tipo 2*, lo que constituye un porcentaje del 90.4%. En cambio, las participantes de género femenino realizaron un total de 370 asignaciones, de las cuales 333 eran asignaciones *coherentes tipo 2*, lo que constituye un porcentaje del 90.0%. Como vemos en la Figura 5.3, no parece haber prácticamente diferencia entre ambas proporciones, pero para cerciorarnos, ejecutaremos de nuevo un *Test de proporciones* en RStudio sin corrección por continuidad (puesto que se verifican las condiciones de (4.1)) con el código ubicado en Apéndice B.2:

```
2-sample test for equality of proportions without
continuity correction
```

```
data: matrizscoringgenero
X-squared = 0.05028, df = 1, p-value = 0.4113
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
 -0.02433729  1.00000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.9037917 0.9000000
```

Puesto que el p-valor es de 0.4113, con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y concluimos que no existen diferencias significativas entre el género de los participantes a la hora de ser *coherente tipo 2* en las asignaciones.

### 5.3. Análisis según el conocimiento previo en probabilidades imprecisas

Por último, comparamos las proporciones de asignaciones *coherentes tipo 2* entre participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas y los que no tenían nociones previas. Para ello, ejecutamos el código de MATLAB que podemos encontrar en Apéndice A.2 y obtenemos por salida:

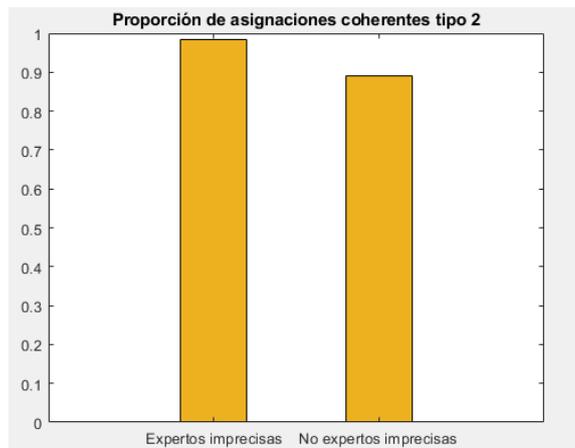


Figura 5.4: Comparación entre la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* de los participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas y los que no tenían nociones previas.

Los participantes con conocimientos previos en probabilidades imprecisas realizaron un total de 291 asignaciones, de las cuales 286 eran asignaciones *coherentes tipo 2*, lo que constituye un porcentaje del 98.3%. Sin embargo, los participantes sin conocimientos previos en probabilidades imprecisas realizaron un total de 1846 asignaciones, de las cuales 1644 eran asignaciones *coherentes tipo 2*, lo que constituye un porcentaje del 89.1%. Como podemos observar en la Figura 5.4, parece haber cierta diferencia entre ambas proporciones, pero para cerciorarnos, ejecutaremos de nuevo un *Test de proporciones* en RStudio con el código localizado en Apéndice B.2:

```
2-sample test for equality of proportions without
continuity correction
```

```
data: matrizscoringconocimprecisas
X-squared = 24.45, df = 1, p-value = 3.814e-07
alternative hypothesis: greater
95 percent confidence interval:
```

```

0.074928 1.000000
sample estimates:
  prop 1    prop 2
0.9828179 0.8905742

```

Se obtiene un p-valor de  $3.814 \cdot 10^{-7}$ , así que con nivel de significación  $\alpha = 0.05$  hay evidencias para rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que existen diferencias significativas entre los conocimientos previos en probabilidades imprecisas de los participantes a la hora de ser *coherente tipo 2* en las asignaciones.

## 5.4. Discusión y comparación entre las condiciones de coherencia

En definitiva, de los tres contrastes de *Test de proporciones* realizados en este capítulo, tan solo en uno se mantiene la hipótesis nula  $H_0 : p_1 = p_2$ ; y es, concretamente, en el que se compara la proporción de asignaciones *coherentes tipo 2* entre participantes de género masculino y género femenino. En consecuencia, deducimos que no existen evidencias que nos hagan pensar que un género es más *coherente tipo 2* que otro en sus asignaciones. Por el contrario, en los otros dos contrastes analizados (tanto en la comparación según la formación, o no, en Matemáticas / Doble Grado en Matemáticas-Física del participante, como en la comparación según los conocimientos previos en probabilidades imprecisas), se rechaza  $H_0 : p_1 = p_2$  (y por consiguiente adoptamos  $H_1 : p_1 \neq p_2$ ). Es decir, sí que influye la formación en Matemáticas / Doble Grado Matemáticas-Física y los conocimientos previos en probabilidades imprecisas del participante al fijar asignaciones *coherentes tipo 2*.

Además, en el único contraste de *Test  $\chi^2$  de homogeneidad* llevado a cabo en este capítulo, rechazamos la hipótesis nula  $H_0 : p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{mj} \quad \forall j = 1, \dots, k$ , concluyendo así que existen diferencias significativas a la hora de ser *coherentes tipo 2* en las asignaciones entre los grupos con distinta formación descritos en la Sección 3.1.3.

Una cuestión a resolver en el futuro sería el análisis de la condición de *coherencia de tipo 2* considerando todas las posibles asignaciones que podrían hacerse, y no solo las que hayamos observado dentro del experimento. Un análisis preliminar de esta condición nos permite establecer una relación entre las condiciones de *coherencia* de Walley y la condición de *coherencia de tipo 2*, en el sentido siguiente:

- Una asignación *coherente* en el sentido de Walley no es necesariamente *coherente de tipo 2*.
- Una asignación *coherente de tipo 2*, en el sentido de no ser mejorable

por ninguna otra asignación posible, siempre *evita la pérdida segura*, pero no es necesariamente *coherente* en el sentido de Walley.

- En el caso particular en el que  $\bar{p}_i + \sum_{j \neq i} \underline{p}_j < 1$  para todo  $i$ , entonces una asignación *coherente de tipo 2*, en el sentido de no ser mejorable por ninguna otra asignación posible, es también *coherente* en el sentido de Walley.

Nótese no obstante que, para la definición que nosotros hemos considerado (no ser mejorable por las otras asignaciones del experimento), sí es posible que sea *coherente de tipo 2* sin que *evite la pérdida segura* o sea *coherente* en el sentido de Walley, como los porcentajes observados en nuestro experimento atestiguan.

## Capítulo 6

# Comparación de estrategias

Tal y como hemos visto anteriormente, los participantes idearon una serie de estrategias que fueron posteriormente modificando a lo largo de la competición con el fin de obtener el mayor éxito posible (en lo que a puntuación se refiere). Es por ello que en este capítulo nos centraremos en estudiar si existe alguna estrategia que sea óptima para esta competición.

### 6.1. Resultados con estrategias ficticias

En esta sección compararemos los resultados que obtendríamos con 8 estrategias diferentes, así como su evolución a lo largo del experimento. Pero antes de proceder a describirlas, conviene tener en cuenta lo siguiente:

**Nota 6.1.** *Cuando nos disponemos a jugar dinero contra una casa de apuestas, observamos que para cada partido nos proporcionan tres cuotas, una para cada posible resultado: Victoria local, Empate y Derrota local. Esas cuotas simbolizan la cantidad que percibiríamos por cada euro apostado en caso de que se dé ese resultado.*

*Intuitivamente, parece lógico pensar que la cantidad a percibir por euro apostado sea menor cuanto más factible sea el resultado al que se esté apostando (y por el contrario, mayor cantidad cuanto menos factible). Es por ello que las cuotas se calculan partir de las probabilidades de cada posible resultado del partido (Victoria local, Empate o Derrota local), dando un margen de beneficio para la casa de apuestas de aproximadamente el 5%. Por ejemplo, siempre se verifica que alguna de las tres cuotas está por debajo de 3 euros por cada euro apostado, pues de lo contrario, asignando un euro a cada posible resultado del partido podríamos obtener ganancia (o al menos garantizaríamos no perder).*

*Lo realmente interesante es que se pueden calcular las probabilidades  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  de Victoria local, Empate y Derrota local, respectivamente, a partir de las cuotas  $(a_1, a_2, a_3)$  asociadas a los resultados, de acuerdo con las siguientes fórmulas:*

- *Probabilidad Victoria local:*

$$p_1 = \frac{\frac{1}{a_1}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} \quad (6.1)$$

- *Probabilidad Empate:*

$$p_2 = \frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} \quad (6.2)$$

- *Probabilidad Derrota local:*

$$p_3 = \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} \quad (6.3)$$

Ahora ya estamos en condiciones de proceder a introducir las estrategias ficticias que estudiaremos:

- **Estrategia1:** Consistente en asignar probabilidad 1 al resultado con mayor probabilidad estimada según las cuotas de ganancia de las casas de apuestas referidas en la Nota 6.1 y probabilidad 0 a los otros dos resultados con menor probabilidad. Esta estrategia fue sin duda una de las más utilizadas por los participantes una vez estaba finalizando la competición (*DiegoReyer, SantosD, Fingelmo, lRubenPC...*). Es la que mayores beneficios reporta en caso de que se dé el resultado (hipotéticamente) más probable, pero también de las que mayores pérdidas puede llegar a ocasionar en caso de que no llegue a darse.
- **Estrategia2:** Consistente en asignar probabilidad 1 al resultado con menor probabilidad estimada según las cuotas de ganancia de las casas de apuestas referidas en la Nota 6.1 y probabilidad 0 a los otros dos resultados con mayor probabilidad. Esta estrategia fue utilizada en muy escasas ocasiones, y siempre por participantes de la parte baja de la clasificación, que buscaban, con la ayuda de un golpe de suerte, cambiar la mala dinámica que llevaban acarreado durante la competición (*Ionescu-TulceVence, Asier o Mazepin*, principalmente). Es la que mayores beneficios reporta en caso de que se dé el resultado (hipotéticamente) menos probable, pero también de las que mayores pérdidas puede llegar a ocasionar en caso de que no llegue a darse (la mayoría de las veces).
- **Estrategia3 :** Consistente en asignar las probabilidades precisas que se calculan a partir de las cuotas de ganancia de las casas de apuestas explicadas en la Nota 6.1. Esta estrategia no ha sido llevada a cabo por ningún participante.

- **Estrategia4:** Consistente en asignar probabilidad 1 al resultado con mayor probabilidad estimada según las cuotas de ganancia de las casas de apuestas referidas en la Nota 6.1 y asignar los intervalos  $[0,1]$  a los otros dos resultados con menor probabilidad (es decir, no entrar en la apuesta de esos dos resultados). Es una estrategia algo más conservadora que *Estrategia1*, ya que no reporta tantos beneficios en caso de darse el resultado (hipotéticamente) más probable, pero suele generar menos pérdidas en caso de que no llegue a darse.
- **Estrategia5:** Consistente en asignar probabilidad 0 a los tres posibles resultados del partido, de tal manera que se garantiza ganar dos de las tres apuestas en juego. Utilizada únicamente por dos participantes (*Imc* y *Jorgeargi19*), es una estrategia especialmente útil en los partidos en los que no haya un favorito claro, o en aquellos en los que se dio un resultado inesperado (poco probable). Aún así, la cantidad de puntos que se percibe en esas situaciones suele ser menor que con las estrategias descritas anteriormente.

Las tres siguientes estrategias se construyen mediante la manipulación de las tres probabilidades precisas  $p_1, p_2$  y  $p_3$  obtenidas a partir de las cuotas de ganancia de las casas de apuestas en la Nota 6.1. Más concretamente, las construiremos a través de los *Modelos de distorsión*, que suelen depender de cierto  $\epsilon$ , en nuestro caso con valor 0.1 fijado para las tres estrategias. Únicamente un participante recurrió a los *Modelos de distorsión* para elaborar sus asignaciones, *Arthur Van Camp*. Las distintas estrategias son:

- **Estrategia6:** Basada en el modelo de distorsión denominado *Modelo de contaminación*, asigna intervalos imprecisos que se construyen de la siguiente manera:

- Asignación *Victoria local*:  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_1 &= (1 - \epsilon) \cdot p_1 \\ \overline{p}_1 &= (1 - \epsilon) \cdot p_1 + \epsilon\end{aligned}$$

- Asignación *Empate*:  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_2 &= (1 - \epsilon) \cdot p_2 \\ \overline{p}_2 &= (1 - \epsilon) \cdot p_2 + \epsilon\end{aligned}\tag{6.4}$$

- Asignación *Derrota local*:  $[\underline{p}_3, \overline{p}_3]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_3 &= (1 - \epsilon) \cdot p_3 \\ \overline{p}_3 &= (1 - \epsilon) \cdot p_3 + \epsilon\end{aligned}$$

- **Estrategia7:** Basada en el modelo de distorsión denominado *Pari-mutuel*, asigna intervalos imprecisos que se construyen de la siguiente manera:

- Asignación *Victoria local*:  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_1 &= \text{máx}\{(1 + \epsilon) \cdot p_1 - \epsilon, 0\} \\ \overline{p}_1 &= \text{mín}\{(1 + \epsilon) \cdot p_1, 1\}\end{aligned}$$

- Asignación *Empate*:  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_2 &= \text{máx}\{(1 + \epsilon) \cdot p_2 - \epsilon, 0\} \\ \overline{p}_2 &= \text{mín}\{(1 + \epsilon) \cdot p_2, 1\}\end{aligned}\tag{6.5}$$

- Asignación *Derrota local*:  $[\underline{p}_3, \overline{p}_3]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_3 &= \text{máx}\{(1 + \epsilon) \cdot p_3 - \epsilon, 0\} \\ \overline{p}_3 &= \text{mín}\{(1 + \epsilon) \cdot p_3, 1\}\end{aligned}$$

- **Estrategia8:** Basada en el modelo de distorsión denominado *Variación total*, asigna intervalos imprecisos que se construyen de la siguiente manera:

- Asignación *Victoria local*:  $[\underline{p}_1, \overline{p}_1]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_1 &= \text{máx}\{p_1 - \epsilon, 0\} \\ \overline{p}_1 &= \text{mín}\{p_1 + \epsilon, 1\}\end{aligned}$$

- Asignación *Empate*:  $[\underline{p}_2, \overline{p}_2]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_2 &= \text{máx}\{p_2 - \epsilon, 0\} \\ \overline{p}_2 &= \text{mín}\{p_2 + \epsilon, 1\}\end{aligned}\tag{6.6}$$

- Asignación *Derrota local*:  $[\underline{p}_3, \overline{p}_3]$ , donde

$$\begin{aligned}\underline{p}_3 &= \text{máx}\{p_3 - \epsilon, 0\} \\ \overline{p}_3 &= \text{mín}\{p_3 + \epsilon, 1\}\end{aligned}$$

Una vez introducidos unos usuarios ficticios que lleven a cabo esas estrategias en todos los partidos y tras haber ejecutado el programa en MATLAB que podemos ver en Apéndice A.3, los resultados obtenidos se recogen en la siguiente tabla:

	Posición	Puntuación
<b>Estrategia1</b>	6º	138,493674
<b>Estrategia2</b>	58º	-802,336104
<b>Estrategia3</b>	19º	58,810214
<b>Estrategia4</b>	38º	-9,567153
<b>Estrategia5</b>	27º	14,6899708
<b>Estrategia6</b>	21º	54,5075894
<b>Estrategia7</b>	9º	87,9279471
<b>Estrategia8</b>	11º	80,5165926

Figura 6.1: Posición (de entre 58 participantes) y puntuación finales de cada estrategia.

Observamos la superioridad de la *Estrategia1* con respecto a las demás, siendo aún así una puntuación insuficiente para entrar en el podio. La *Estrategia2*, pese a haber contado en este Mundial con varios partidos en los que se materializó el resultado menos probable (hipotéticamente), es de lejos la peor de todas, ocupando la última posición. Por otra parte, de entre los modelos de distorsión, parece que el que mejores resultados ha obtenido ha sido *Pari-mutuel*, correspondiente a la *Estrategia7*, que supera incluso a *Estrategia3*, cuyas probabilidades servían para definir los intervalos imprecisos sobre los que se construye la propia *Estrategia7*. También el modelo *Variación total*, correspondiente a la *Estrategia8*, obtuvo mejores resultados que *Estrategia3*. Esto es debido a que el margen de imprecisión permite atenuar las pérdidas, ya que, como indicamos anteriormente, un intervalo de cierta longitud positiva tendrá menos opciones de ser disjunto con la asignación de otro participante que un intervalo de longitud cero (un punto), lo que se traduce en menos apuestas activadas con el resto de usuarios y menor puntuación en juego.

Con el propósito de observar la evolución de cada estrategia a lo largo de la competición, construimos unas gráficas que representan la posición en la clasificación al finalizar la jornada de un participante que siga cada una de las estrategias.

Compararemos primero las posiciones a lo largo de la competición de *Estrategia1*, *Estrategia2*, *Estrategia4* y *Estrategia5*, todas ellas precisas (exceptuando a *Estrategia4*, que recordemos que asignaba probabilidad 1 al suceso más probable y no entraba en la apuesta de los otros dos resultados):

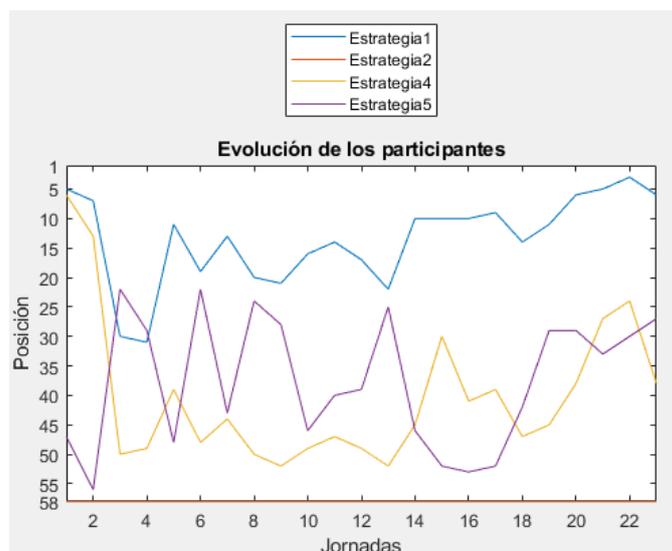


Figura 6.2: Posición al finalizar la jornada (de entre 58 participantes) de Estrategia1, Estrategia2, Estrategia4, Estrategia5.

En la gráfica, se puede ver reflejada la irregularidad de la *Estrategia5*. Además, *Estrategia2* parece haberse mantenido siempre en última posición pese a los múltiples partidos con resultados inesperados que se dieron a lo largo del Mundial. Por el contrario, *Estrategia1* mantuvo una gran dinámica ascendente durante casi toda la competición. *Estrategia4* permaneció en puestos bajos durante gran parte de la competición y logró una leve mejoría en el último tramo, aún así insuficiente para permitirle acabar en la primera mitad de la tabla.

**Observación 3.** Como curiosidad, la bajada de posición tan repentina de *Estrategia1* y *Estrategia4* entre la jornada dos y la jornada tres, se debe al partido Argentina-Arabia Saudí, donde ambas asignaron probabilidad 1 al suceso Victoria local, que era el más probable (hipotéticamente). De hecho, *Estrategia4*, que inicialmente consideramos algo más conservadora que *Estrategia1*, en este partido obtuvo bastantes más pérdidas.

Comparemos ahora la posición a lo largo de la competición entre *Estrategia3*, *Estrategia6*, *Estrategia7* y *Estrategia8* (recordemos que las tres últimas se construyen a partir de los *Modelos de distorsión* y de las probabilidades asignadas en *Estrategia3*):

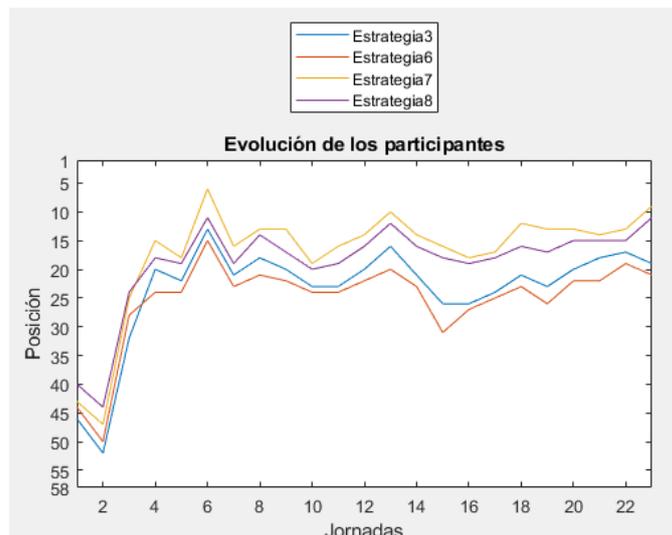


Figura 6.3: Posición al finalizar la jornada (de entre 58 participantes) de Estrategia3, Estrategia6, Estrategia7, Estrategia8.

Observamos en la Figura 6.3 que no siempre la estrategia precisa de partida (*Estrategia3*) es menos conveniente que las otras, ya que el orden fue variando sobre todo entre las jornadas 2 y 4, para después aposentarse el resto de la competición. Además, al ser *Estrategia6*, *Estrategia7* y *Estrategia8* unas manipulaciones de las probabilidades asignadas en *Estrategia3* que dependen de un parámetro de dispersión  $\epsilon$  (en nuestro caso  $\epsilon = 0.1$ ), a medida que hagamos a  $\epsilon$  tender a cero, las estrategias asignarán intervalos cada vez más similares entre sí, y por tanto, las líneas de las gráficas tenderán a solaparse. Esto es debido a que Estrategia6, Estrategia7 y Estrategia8 convergen a Estrategia3 siempre que  $\epsilon$  tienda a cero (como se puede ver fácilmente en (6.4), (6.5), (6.6)). La Figura 6.4 muestra qué ocurre si tomamos como parámetro de dispersión  $\epsilon = 0.0001$ .

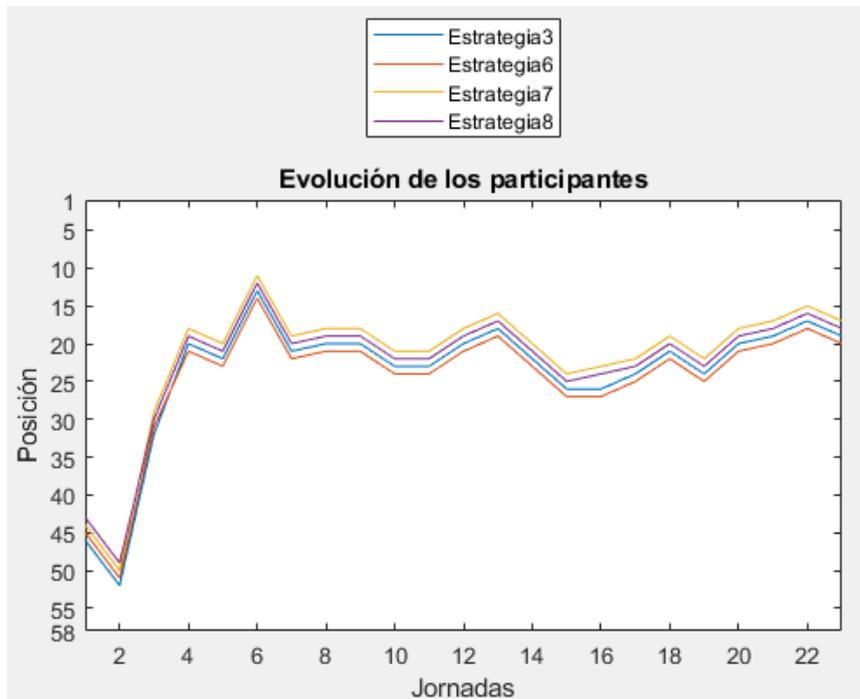


Figura 6.4: Posición al finalizar la jornada (de entre 58 participantes) de Estrategia3, Estrategia6, Estrategia7, Estrategia8 para  $\epsilon = 0.0001$ .

También podemos ver que tanto en la anterior gráfica como en esta, el orden final de las estrategias se conserva y para este método de puntuación considerado es el siguiente:

1. *Pari-mutuel-Estrategia7*
2. *Variación total-Estrategia8*
3. *Asignación precisa-Estrategia3*
4. *Modelo de contaminación-Estrategia6*

## 6.2. Explotación de asignaciones

Para poner en contexto la motivación de esta sección, plasmemos un ejemplo real sucedido durante el transcurso de la competición:

**Ejemplo 6.1.** *En el partido correspondiente a la final del Mundial, Argentina - Francia, el participante pablofj31 asigna los intervalos  $[0.4, 0.5]$ ,  $[1, 1]$ ,  $[0.6, 0.8]$  para Victoria local, Empate y Derrota local, respectivamente. Por su parte, el participante Eldepoli asigna los intervalos  $[0.2, 0.2]$  para Victoria local,  $[0.8, 0.9]$  para Empate y  $[0.3, 0.3]$  para Derrota local. Así, las cantidades en juego son las siguientes:*

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{0.4^2 - 0.2^2}{2} = 0.06 \\x_2 &= \frac{1^2 - 0.9^2}{2} = 0.095 \\x_3 &= \frac{0.6^2 - 0.3^2}{2} = 0.135\end{aligned}$$

*Observamos que en caso de que el partido acabe en Victoria local, Eldepoli percibirá la cantidad:  $-x_1 + x_2 + x_3 = 0.17$  puntos (pierde la apuesta de Victoria local por haber asignado menor probabilidad, pero gana la de Empate y Derrota local pues les asignó también menor probabilidad y no se llegaron a dar). De igual forma, si el partido acaba en Empate, Eldepoli percibirá  $x_1 - x_2 + x_3 = 0.1$  puntos y si acaba sucediendo Derrota local, obtendrá  $x_1 + x_2 - x_3 = 0.02$  puntos. Es decir, independientemente del resultado final del partido, Eldepoli le sustrae puntos a pablofj31.*

La pregunta que nos planteamos es entonces:

*Dada una predicción conocida de un participante, ¿existe alguna asignación para la cual podamos ganarle el máximo número de puntos independientemente del resultado del partido?*

Abordemos pues el problema:

Supongamos que un **Jugador 1** asigna para un partido cualquiera la probabilidad  $p_1$  para *Victoria local*, la probabilidad  $p_2$  para *Empate* y la probabilidad  $p_3$  para *Derrota local*. Veamos que existen  $p'_1, p'_2$  y  $p'_3$  tales que maximizan la ganancia con respecto a **Jugador 1**.

En primer lugar demostraremos que nuestra estrategia debe pasar por considerar probabilidades más pequeñas que las asignadas por el **Jugador 1**.

**Proposición 6.1.** *Si  $\exists i \in \{1, 2, 3\}$  tal que  $p'_i > p_i$ , entonces no se puede garantizar ganancia.*

*Demostración.* Distingamos tres casos:

- Caso 1:  $p'_1 > p_1$ ,  $p'_2 > p_2$ ,  $p'_3 > p_3$ :

En este caso garantizamos perder dos de las tres apuestas (por haber asignado mayor probabilidad y no haber sucedido) y para garantizar ganancia necesitaríamos que las cantidades en juego  $x_1, x_2, x_3$  verificasen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 > 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 > 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 > 0 \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{aligned} x_1 &:= (p'_1 - p_1) \cdot \frac{(p_1 + p'_1)}{2} = \frac{p_1'^2 - p_1^2}{2} > 0 \\ x_2 &:= (p'_2 - p_2) \cdot \frac{(p_2 + p'_2)}{2} = \frac{p_2'^2 - p_2^2}{2} > 0 \\ x_3 &:= (p'_3 - p_3) \cdot \frac{(p_3 + p'_3)}{2} = \frac{p_3'^2 - p_3^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

y no existen  $x_1, x_2, x_3$  en esas condiciones, pues, sin más que sumar la primera y segunda ecuación del sistema se obtiene  $-2x_3 > 0$ , lo que contradice el hecho de  $x_3 > 0$ .

- Caso 2:  $\exists! i \in \{1, 2, 3\}$  tal que  $p'_i \leq p_i$ :

Supongamos, por comodidad en la notación, s.p.g.,  $p'_1 \leq p_1$ ,  $p'_2 > p_2$ ,  $p'_3 > p_3$ :

Para garantizar ganancia necesitaríamos que las cantidades en juego  $x_1, x_2, x_3$  verificasen:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 > 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 > 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 > 0 \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{aligned} x_1 &:= (p_1 - p'_1) \cdot \frac{(p_1 + p'_1)}{2} = \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2} \geq 0 \\ x_2 &:= (p'_2 - p_2) \cdot \frac{(p_2 + p'_2)}{2} = \frac{p_2'^2 - p_2^2}{2} > 0 \\ x_3 &:= (p'_3 - p_3) \cdot \frac{(p_3 + p'_3)}{2} = \frac{p_3'^2 - p_3^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

lo cual es absurdo, pues por la primera ecuación del sistema tendríamos que  $-x_1 - x_2 - x_3 > 0$ , lo que contradice  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . En otras palabras, en este caso si se da el primer resultado tendremos una pérdida.

- Caso 3:  $\exists! i \in \{1, 2, 3\}$  con  $p'_i > p_i$  :  
Supongamos, s.p.g.,  $p'_1 > p_1$ ,  $p'_2 \leq p_2$ ,  $p'_3 \leq p_3$  :  
Para garantizar ganancia necesitaríamos que las cantidades en juego  $x_1, x_2, x_3$  verificasen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 > 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 > 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 > 0 \end{cases}$$

siendo ahora:

$$\begin{aligned} x_1 &:= (p'_1 - p_1) \cdot \frac{(p_1 + p'_1)}{2} = \frac{p_1'^2 - p_1^2}{2} > 0 \\ x_2 &:= (p_2 - p'_2) \cdot \frac{(p_2 + p'_2)}{2} = \frac{p_2^2 - p_2'^2}{2} > 0 \\ x_3 &:= (p_3 - p'_3) \cdot \frac{(p_3 + p'_3)}{2} = \frac{p_3^2 - p_3'^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

lo que de nuevo no es posible, pues por la segunda ecuación del sistema tendríamos que  $x_3 > x_1 + x_2$ , que combinada con la tercera ecuación nos daría:  $x_3 > x_1 + x_2 > x_1 + x_1 + x_3 = 2x_1 + x_3$ , que contradice el hecho de  $x_1 > 0$ .  $\square$

Teniendo en cuenta este resultado, vamos a considerar

$$p'_1 \leq p_1, \quad p'_2 \leq p_2, \quad p'_3 \leq p_3$$

pues, de esta forma nos aseguraremos (al menos) no perder dos de las tres apuestas (recordemos que en caso de haber asignado menor probabilidad a un resultado y que ese resultado no haya llegado a darse, la cantidad en juego iría a nuestro favor).

**Nota 6.2.** *En caso de que **Jugador 1** hubiese asignado probabilidades imprecisas  $[p_1, q_1]$ ,  $[p_2, q_2]$ ,  $[p_3, q_3]$  para Victoria local, Empate y Derrota local, respectivamente, el razonamiento sigue siendo válido sin más que considerar únicamente las probabilidades inferiores  $p_1, p_2, p_3$ .*

Dados  $p_1, p_2$  y  $p_3$ , debemos encontrar  $p'_1, p'_2$  y  $p'_3$  de manera que

$$\begin{cases} x_1 < x_2 + x_3 \\ x_2 < x_1 + x_3 \\ x_3 < x_1 + x_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

siendo:

$$x_1 := (p_1 - p'_1) \cdot \frac{(p_1 + p'_1)}{2} = \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2} \quad (6.8)$$

$$x_2 := (p_2 - p'_2) \cdot \frac{(p_2 + p'_2)}{2} = \frac{p_2^2 - p'^2_2}{2} \quad (6.9)$$

$$x_3 := (p_3 - p'_3) \cdot \frac{(p_3 + p'_3)}{2} = \frac{p_3^2 - p'^2_3}{2} \quad (6.10)$$

los puntos en juego para los resultados *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local*, respectivamente. Supongamos también en lo que sigue, s.p.g., que

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq 1.$$

Una posible idea para garantizar una ganancia consiste en establecer, si es factible, la existencia de valores  $p'_1, p'_2, p'_3$  en  $[0, 1]$  de manera que las puntuaciones asociadas que determinan verifiquen  $x_1 = x_2 = x_3 > 0$ ; de esta forma, se cumplirá trivialmente el sistema de ecuaciones (6.7).

Nótese también que, si asignamos  $p'_i \leq p_i$  para  $i = 1, \dots, 3$  y consideramos las cantidades apostadas  $x_1, x_2, x_3$  determinadas por las ecuaciones (6.8)– (6.10), entonces las ganancias obtenidas vendrán dadas por el vector

$$\vec{y} := (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3), \quad (6.11)$$

teniendo en cuenta que siempre ganaremos dos de las apuestas (las de los resultados que no se den) y perderemos una (la del resultado que ocurra). Nuestro objetivo se reduce por lo tanto a encontrar un vector de asignaciones  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  de manera que el vector de ganancias  $\vec{y}$  que acaba determinando a través de la ecuación (6.11) sea no negativo.

Empecemos enunciando y probando un lema que nos será de gran utilidad a lo largo de la sección:

**Lema 6.2.** *Si para un resultado el **Jugador 1** asigna una probabilidad  $p^* > 0$ , entonces para todo  $x \in \left[0, \frac{p^{*2}}{2}\right]$  existe  $p' \in [0, p^*]$  de manera que asignando  $p'$  a ese resultado apostamos al mismo la cantidad  $x$ .*

*Demostración.* Basta con observar que la cantidad apostada cuando asignamos una cantidad  $p' \leq p^*$  viene dada por la función continua y estrictamente decreciente  $f(p') := \frac{p^{*2} - p'^2}{2}$ . Al ser  $f(0) = \frac{p^{*2}}{2}$ ,  $f(p^*) = 0$  se concluye el resultado.  $\square$

**Proposición 6.3.** *Dados  $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq 1$ :*

- a) *Si  $p_1 > 0$ , existe alguna asignación  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  cuyo vector de ganancias  $\vec{y}$  determinado por (6.11) verifica  $\min \vec{y} > 0$ .*
- b) *Si  $p_1 = 0 < p_2$ , existe alguna asignación  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  cuyo vector de ganancias  $\vec{y}$  determinado por (6.11) verifica  $\min \vec{y} = 0 < \max \vec{y}$ .*

- c) Si  $p_1 = p_2 = 0$ , la única asignación  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  cuyo vector de ganancias  $\vec{y}$  determinado por (6.11) verifica  $\min \vec{y} \geq 0$  es  $p'_i = p_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

*Demostración.* a) Consideremos en primer lugar el caso en el que  $p_1 > 0$ , y sea la asignación

$$(p'_1, p'_2, p'_3) = \left( 0, \sqrt{p_2^2 - p_1^2}, \sqrt{p_3^2 - p_1^2} \right).$$

Utilizando las ecuaciones (6.8)– (6.10), se obtiene que las cantidades en juego con cada resultado vienen dadas por

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{p_1^2}{2}, \frac{p_1^2}{2}, \frac{p_1^2}{2} \right),$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta que vamos a ganar dos de las apuestas y perder otra, que tenemos una ganancia garantizada de  $\frac{p_1^2}{2}$ .

- b) Supongamos ahora que  $0 = p_1 < p_2 \leq p_3$ , y consideremos la asignación

$$(p'_1, p'_2, p'_3) = \left( 0, 0, \sqrt{p_3^2 - p_2^2} \right).$$

De nuevo utilizando las ecuaciones (6.8)– (6.10), se obtiene que las cantidades en juego con cada resultado vienen dadas por

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( 0, \frac{p_2^2}{2}, \frac{p_2^2}{2} \right),$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta que vamos a ganar dos de las apuestas y perder otra, que las ganancias con cada uno de los tres resultados son, respectivamente,  $(p_2^2, 0, 0)$ .

- c) Finalmente, si  $p_1 = p_2 = 0$ , deducimos de la Proposición 6.1 que para que una asignación  $(p'_1, p'_2, p'_3)$  nos garantice no perder puntos ha de ser de la forma  $(0, 0, p'_3)$  para  $p'_3 \leq p_3$ ; sin embargo, si  $p'_3 < p_3$  perdemos  $\frac{p_3^2 - p_3'^2}{2}$  puntos si se da el resultado *Derrota local*. Por lo tanto, en este caso la única opción con la que no hay riesgo de perder puntos es tomar  $(p'_1, p'_2, p'_3) = (p_1, p_2, p_3)$ , que hace que ni ganemos ni perdamos puntuación.  $\square$

En otras palabras, si todas las probabilidades asignadas por el **Jugador 1** son estrictamente positivas podemos garantizar una ganancia positiva; si solamente una de ellas es igual a 0 podemos garantizar no perder y quizás ganar; mientras que si dos de ellas son iguales a 0 lo único que podemos hacer es garantizar no perder, replicando la misma asignación.

Una vez establecido lo anterior, vamos a estudiar si es posible determinar la asignación que, además de garantizar que no vayamos a perder puntos sea cual sea el resultado del partido, nos garantice ganar la mayor cantidad de puntos posible. Es decir, nuestro objetivo es encontrar  $p'_1, p'_2, p'_3$  que maximicen la ganancia mínima  $\min \vec{y}$ , donde  $\vec{y}$  es el vector de posibles ganancias que se determina mediante la ecuación (6.11) a partir de las puntuaciones en juego  $x_1, x_2, x_3$  dadas por (6.8)– (6.10).

**Nota 6.3.** *La ganancia mínima asociada a una asignación es siempre inferior (o igual) a  $\min\{x_1, x_2, x_3\}$ : en efecto, supongamos que  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  son las cantidades en juego con  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . Por ser  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$  tenemos*

$$\begin{aligned} \min\{x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3\} &= x_1 + x_2 - x_3 \\ &\leq x_1 = \min\{x_1, x_2, x_3\}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $x_2 - x_3 \leq 0$ . De aquí se deduce que para que sea  $\min \vec{y} = \min\{x_1, x_2, x_3\}$  ha de ser  $x_2 = x_3$ .

De acuerdo con esto, parece que nos conviene hacer  $\min\{x_1, x_2, x_3\}$  tan grande como sea posible; teniendo en cuenta las fórmulas (6.8)–(6.10), para aumentar esas cantidades se requiere que los valores de  $p'_1, p'_2, p'_3$  sean lo más pequeños posible. Esto nos lleva a plantearnos si podemos realizar un procedimiento iterativo, con el que progresivamente vamos ganando puntuaciones hasta llegar a una asignación que no es mejorable. Para formalizar esto, definimos la siguiente relación:

**Definición 6.1.** *Dadas dos asignaciones  $\vec{p} := (p_1, p_2, p_3)$  y  $\vec{p}' := (p'_1, p'_2, p'_3)$ , se define la relación  $\succeq$  como*

$$\vec{p}' \succeq \vec{p} \iff \vec{y}_{\vec{p}', \vec{p}} \geq \vec{0},$$

siendo  $\vec{y}_{\vec{p}', \vec{p}}$  es el vector de ganancias determinado por las asignaciones  $\vec{p}', \vec{p}$  a partir de (6.11).

Introduzcamos un lema que nos será de gran utilidad más adelante:

**Lema 6.4.** *La relación  $\succeq$  es transitiva. Además, si  $\vec{p}'' \succeq \vec{p}' \succeq \vec{p}$ , se cumple que*

$$\vec{y}_{\vec{p}'', \vec{p}} = \vec{y}_{\vec{p}'', \vec{p}'} + \vec{y}_{\vec{p}', \vec{p}}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$  ha sido asignado por el Jugador A,  $\vec{p}' = (p'_1, p'_2, p'_3)$  ha sido asignado por el Jugador B y  $\vec{p}'' = (p''_1, p''_2, p''_3)$  ha sido asignado por el Jugador C. De acuerdo con la Proposición 6.1, de la relación de preferencias se deduce que  $p''_i \leq p'_i \leq p_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$ .

Las cantidades en juego de *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local* entre Jugador A y Jugador B quedan recogidas en la primera, segunda y tercera componente, respectivamente, del vector:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) := \left( \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2}, \frac{p_2^2 - p_2'^2}{2}, \frac{p_3^2 - p_3'^2}{2} \right),$$

verificando por hipótesis:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < x_3 \\ x_1 + x_3 < x_2 \\ x_2 + x_3 < x_1 \end{cases} \quad (6.12)$$

De igual forma, las cantidades en juego de *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local* entre Jugador B y Jugador C quedan recogidas en la primera, segunda y tercera componente, respectivamente, del vector:  $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3) := \left( \frac{p_1'^2 - p_1''^2}{2}, \frac{p_2'^2 - p_2''^2}{2}, \frac{p_3'^2 - p_3''^2}{2} \right)$ , verificando por hipótesis:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 < x'_3 \\ x'_1 + x'_3 < x'_2 \\ x'_2 + x'_3 < x'_1 \end{cases} \quad (6.13)$$

El objetivo es ver que el vector que representa las cantidades en juego de *Victoria local*, *Empate* y *Derrota local* entre el Jugador A y el Jugador C:

$$\vec{x}'' = (x''_1, x''_2, x''_3) := \left( \frac{p_1^2 - p_1''^2}{2}, \frac{p_2^2 - p_2''^2}{2}, \frac{p_3^2 - p_3''^2}{2} \right), \text{ verifica lo siguiente:}$$

$$\begin{cases} x''_1 + x''_2 < x''_3 \\ x''_1 + x''_3 < x''_2 \\ x''_2 + x''_3 < x''_1 \end{cases}$$

lo cual es inmediato sin más que tener en cuenta que  $x''_i = x_i + x'_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$  y aplicando (6.12) y (6.13).

Por otro lado, si denotamos por  $\vec{y}_{p, \vec{p}} = (y_1, y_2, y_3)$  al vector de posibles ganancias del Jugador B frente a Jugador A, se tiene que:  $\vec{y}_{p, \vec{p}} = (y_1, y_2, y_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$ . De igual forma, el vector  $\vec{y}'_{p, \vec{p}} = (y'_1, y'_2, y'_3) = (-x'_1 + x'_2 + x'_3, x'_1 - x'_2 + x'_3, x'_1 + x'_2 - x'_3)$  representa vector de posibles ganancias del Jugador C frente a Jugador B.

Por todo ello, el vector de posibles ganancias del Jugador C frente al Jugador A verificará:

$$\begin{aligned}\vec{y}_{\vec{p}, \vec{p}} &= (y_1'', y_2'', y_3'') = (-x_1'' + x_2'' + x_3'', x_1'' - x_2'' + x_3'', x_1'' + x_2'' - x_3'') = \\ &= \left( -\left(x_1 + x_1'\right) + \left(x_2 + x_2'\right) + \left(x_3 + x_3'\right), \right. \\ &\quad \left. \left(x_1 + x_1'\right) - \left(x_2 + x_2'\right) + \left(x_3 + x_3'\right), \right. \\ &\quad \left. \left(x_1 + x_1'\right) + \left(x_2 + x_2'\right) - \left(x_3 + x_3'\right) \right) \\ &= (y_1 + y_1', y_2 + y_2', y_3 + y_3'),\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $x_i'' = x_i + x_i' \forall i \in \{1, 2, 3\}$  y la definición de  $y_i$  e  $y_i'$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .  $\square$

Antes de empezar a enunciar (y demostrar) los resultados acerca de la maximización de la ganancia mínima garantizada, conviene tener en cuenta que los valores  $p_1', p_2', p_3'$  que maximizan la ganancia mínima garantizada no son únicos, como podemos comprobar en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 6.2.** *Supongamos que un participante asigna  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = 0.3$ ,  $p_3 = 0.5$ . Entonces, tanto la asignación  $p_{1,1}' = 0$ ,  $p_{2,1}' = \sqrt{0.05}$ ,  $p_{3,1}' = \sqrt{0.21}$  con cantidades en juego  $x_{1,1} = x_{2,1} = x_{3,1} = 0.02$ , como la asignación  $p_{1,2}' = 0$ ,  $p_{2,2}' = 0$ ,  $p_{3,2}' = 0.4$  con cantidades en juego  $x_{1,2} = 0.02$ ,  $x_{2,2} = \frac{0.09}{2}$ , nos garantizan la misma ganancia mínima:  $x_{1,1} + x_{2,1} - x_{3,1} = x_{1,2} + x_{2,2} - x_{3,2} = x_{1,1} = x_{1,2} = 0.02$ . Aún así, observamos que en caso de que el resultado final del partido sea Victoria local percibimos  $-x_1 + x_2 + x_3$  puntos, que con la primera asignación nos reportaría 0.05 puntos y con la segunda asignación 0.09. Por tanto, pese a que ambas garanticen la misma ganancia mínima, nos conviene más asignar la segunda terna probabilística, pues existen casos en los que reporta mayores beneficios.*

Debido a lo anterior, nuestra búsqueda de una estrategia óptima constará de dos partes: en primer lugar, determinaremos cuál es la ganancia mínima que podemos garantizar; y en segundo lugar, de entre todas las asignaciones que garanticen esa ganancia, determinaremos cuál maximiza la ganancia máxima posible.

Para establecer nuestra estrategia óptima, consideraremos tres casos, en función del número de probabilidades de la asignación que sean iguales a 0. Comenzamos por el caso más sencillo:

**Proposición 6.5.** *Consideremos una asignación  $\vec{p} = (0, 0, p_3)$ , con  $p_3 \geq 0$ . Entonces,  $\mathcal{H} := \{\vec{p}' \succeq \vec{p}\} = \vec{p}$ , y por lo tanto*

$$\max_{\vec{p}' \succeq \vec{p}} \min_{\vec{p}} \vec{y}_{\vec{p}', \vec{p}} = 0 = \max_{\vec{p}' \succeq \vec{p}} \max_{\vec{p}} \vec{y}_{\vec{p}', \vec{p}}.$$

*Demostración.* Es una consecuencia de la Proposición 6.3(c).  $\square$

A continuación, consideramos el caso en el que únicamente una de las tres probabilidades es igual a 0:

**Proposición 6.6.** *Consideremos una asignación  $\vec{p} = (0, p_2, p_3)$ , donde  $p_2 \leq p_3$ . Entonces, se cumple*

$$\max_{\vec{p}' \succeq \vec{p}} \min_{\vec{p}, \vec{p}'} \bar{y}_{\vec{p}, \vec{p}'} = 0$$

y

$$\max_{\vec{p}' \succeq \vec{p}} \max_{\vec{p}, \vec{p}'} \bar{y}_{\vec{p}, \vec{p}'} = p_2^2.$$

*Demostración.* Por la Proposición 6.1, tenemos que necesariamente  $p_1' = 0$ , de modo que  $x_1 = 0$ . Teniendo en cuenta la Nota 6.3, deducimos que si  $\vec{p}' \succeq \vec{p}$  entonces ha de ser  $\min_{\vec{p}, \vec{p}'} \bar{y}_{\vec{p}, \vec{p}'} = 0$ , y ha de cumplirse además que  $x_2 = x_3$ , donde  $x_2, x_3$  vienen determinados por (6.9)– (6.10). De aquí se deduce que el vector de posibles ganancias será

$$(2x_2, 0, 0),$$

siendo  $2x_2 = p_2^2 - p_2'^2$ . Este vector se maximizará cuando se maximice el valor de  $x_2$  lo que, teniendo en cuenta el Lema 6.2, se obtiene con el valor  $x_2 = \frac{p_2^2}{2}$ .

Por lo tanto, en este caso la asignación óptima de entre las que garantizan no perder puntuación corresponde a  $(0, 0, \sqrt{p_3^2 - p_2^2})$ , cuyo vector de ganancias asociado es  $(p_2^2, 0, 0)$ .  $\square$

Por último, consideramos el caso en el que todas las probabilidades de la asignación son estrictamente positivas:

**Proposición 6.7.** *Consideremos una asignación  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , con  $0 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq 1$ . Entonces, se cumple*

$$\max_{\vec{p}' \succeq \vec{p}} \min_{\vec{p}, \vec{p}'} \bar{y}_{\vec{p}, \vec{p}'} = \frac{p_1^2}{2}.$$

Además, dado

$$\mathcal{H} := \left\{ \vec{p}' \succeq \vec{p} : \min_{\vec{p}, \vec{p}'} \bar{y}_{\vec{p}, \vec{p}'} = \frac{p_1^2}{2} \right\} \quad (6.14)$$

se cumple

$$\max_{\vec{p}' \in \mathcal{H}} \max_{\vec{p}, \vec{p}'} \bar{y}_{\vec{p}, \vec{p}'} = p_2^2 - \frac{p_1^2}{2}.$$

*Demostración.* De la Nota 6.3 y del Lema 6.2 se deduce que

$$\max_{\vec{p} \succeq \vec{p}} \min_{\vec{p}, \vec{p}} \vec{y}_{\vec{p}, \vec{p}} \leq \frac{p_1^2}{2},$$

puesto que

$$\min_{\vec{p}, \vec{p}} \vec{y}_{\vec{p}, \vec{p}} \leq x_1 = \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2} \leq \frac{p_1^2}{2}.$$

Para ver que este valor se alcanza, es suficiente con considerar la asignación  $(0, \sqrt{p_2^2 - p_1^2}, \sqrt{p_3^2 - p_1^2})$ , tal y como se demostró en la Proposición 6.3(a).

Por lo tanto, se deduce que el conjunto  $\mathcal{H}$  definido por 6.14 es no vacío. Además, en todo elemento  $(p_1', p_2', p_3')$  de  $\mathcal{H}$  ha de cumplirse, de acuerdo con el razonamiento anterior, que  $p_1 = 0$ . De entre todos los vectores de  $\mathcal{H}$ , el que tiene un vector de ganancias esperadas más pequeño es precisamente  $\vec{p}' = (p_1', p_2', p_3') = (0, \sqrt{p_2^2 - p_1^2}, \sqrt{p_3^2 - p_1^2})$ , el cual está asociado a  $\vec{y} = (\frac{p_1^2}{2}, \frac{p_1^2}{2}, \frac{p_1^2}{2})$ . Esto quiere decir que los elementos  $p_2', p_3'$  son los más próximos a  $p_2, p_3$ , respectivamente, y, como consecuencia, los que hacen  $x_2, x_3$  lo más pequeño posible.

De aquí se deduce que cualquier otro vector  $\vec{p}''$  de  $\mathcal{H}$  ha de estar dominado por  $\vec{p}'$ . Aplicando la Proposición 6.6, de entre todos estos vectores el que garantiza una mayor ganancia es el vector

$$\left(0, 0, \sqrt{p_3'^2 - p_2'^2}\right) = \left(0, 0, \sqrt{p_3^2 - p_2^2}\right),$$

que garantiza una ganancia respecto a  $\vec{p}'$  de  $(p_2', 0, 0) = (p_2^2 - p_1^2, 0, 0)$ . Aplicando el Lema 6.4 deducimos que la ganancia que garantiza  $(0, 0, \sqrt{p_3^2 - p_2^2})$  frente a la asignación  $(p_1, p_2, p_3)$  es

$$\left(p_2^2 - \frac{p_1^2}{2}, \frac{p_1^2}{2}, \frac{p_1^2}{2}\right).$$

Resta por ver que

$$\max_{\vec{p}' \in \mathcal{H}} \max_{\vec{p}, \vec{p}} \vec{y}_{\vec{p}, \vec{p}} = p_2^2 - \frac{p_1^2}{2}.$$

Para ello, observemos que en todo vector  $\vec{q}$  de  $\mathcal{H}$ , si su vector de puntuaciones asociado es  $(x_1, x_2, x_3)$ , necesariamente  $x_1 = \frac{p_1^2}{2}$ , y por tanto el vector de ganancias asociado es

$$(x_2 + x_3 - x_1, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3),$$

el cual, teniendo en cuenta que  $x_1 = \min\{x_1, x_2, x_3\}$  y la Nota 6.3, ha de cumplir  $x_2 = x_3$ , y por lo tanto es igual a

$$(2x_2 - x_1, x_1, x_1).$$

Así,

$$\max(2x_2 - x_1, x_1, x_1) = 2x_2 - x_1 \leq p_2^2 - \frac{p_1^2}{2},$$

donde la última desigualdad se sigue del Lema 6.2.  $\square$

Podemos entonces terminar la sección con un teorema que resuma lo que hemos visto:

**Teorema 6.8.** *Dada una asignación  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$  con  $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq 1$ :*

- a) *Si  $p_1 = p_2 = 0$ , la única asignación que garantiza no perder es la asignación  $p'_i = p_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$ .*
- b) *Si  $p_1 = 0 < p_2$ , la asignación  $p'_1 = p_1 = 0$ ,  $p'_2 = 0$  y  $p'_3 = \sqrt{p_3^2 - p_2^2}$  es la asignación con mayor ganancia potencial de entre todas las que garantizan no perder.*
- c) *Si  $0 < p_1$ , la asignación  $p'_1 = 0$ ,  $p'_2 = 0$  y  $p'_3 = \sqrt{p_3^2 - p_2^2}$  es la asignación con mayor ganancia potencial de entre todas las que maximizan la ganancia garantizada.*

*Demostración.* Inmediata sin más que aplicar la Proposición 6.5, la Proposición 6.6 y la Proposición 6.7.  $\square$

# Conclusiones

En este trabajo hemos replicado el experimento llevado a cabo por Peter Walley en el Mundial de Fútbol de 1982, añadiendo además nuevos objetivos y campos de estudio que enriquecen y otorgan una mayor perspectiva. Las conclusiones generales del experimento serían las siguientes:

- Los participantes han tendido a hacerse más precisos en las asignaciones a medida que avanzaba la competición, lo que, a su vez, les situaba progresivamente en posiciones más extremas.
- Existen diferencias significativas a la hora de ser consistente en las asignaciones en los grupos con formación (o no) en Matemáticas/Doble Grado de Matemáticas-Física, los grupos de distinto género y los grupos con conocimientos previos (o no) en probabilidades imprecisas. Además, no existen diferencias significativas a la hora de *evitar la pérdida segura* en las asignaciones entre los grupos con distinta formación descritos en la Sección 3.1.3, pero sí que existen diferencias significativas a la hora de ser *coherente* en las asignaciones entre esos mismos grupos.
- Existen diferencias significativas a la hora de ser *coherente tipo 2* en las asignaciones en los grupos con formación (o no) en Matemáticas/Doble Grado de Matemáticas-Física, los grupos con conocimientos previos (o no) en probabilidades imprecisas y los grupos con distinta formación descritos en la Sección 3.1.3. Por el contrario, no existen evidencias para asegurar que un género es más *coherente tipo 2* que otro.
- A la hora de idear una estrategia, suele ser más conveniente asignar mayor probabilidad al equipo favorito.
- Dada una asignación conocida de un participante, existe otra asignación que maximiza la ganancia mínima frente a ese participante.

Por otra parte, observamos varias líneas en las que el estudio llevado a cabo en esta memoria podría verse ampliado:

- En primer lugar, sería interesante considerar la dependencia de los resultados del modelo de puntuación considerado, en particular en lo que se refiere a la eficacia de asignaciones precisas o imprecisas.

- En segundo lugar, convendría analizar la consistencia de tipo 2 estudiando si existe alguna asignación mejor, aunque no haya sido realizada por ningún participante para ese partido.
- Y finalmente, de cara al análisis estadístico, podría enriquecerse el experimento replicando el estudio con un mayor número de participantes en algunos de los grupos considerados.

Concluimos la memoria señalando que un resumen de este trabajo ha sido aceptado para su presentación en forma de póster en el próximo congreso internacional en probabilidades imprecisas (ISIPTA'2023) <https://isipta23.sipta.org/>. Confiamos en que de la interacción con los participantes en el congreso surjan ideas para su mejora además de las ya mencionadas anteriormente.

# Bibliografía

- [1] T. Augustin, F. Coolen, G. de Cooman y M. Troffaes (eds.) An introduction to imprecise probabilities. Wiley, 2014.
- [2] L. M. de Campos, J. F. Huete y S. Moral. *Probability intervals: a tool for uncertain reasoning*. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol.2, No. 2, 167-196, 1994.
- [3] A.P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38, 325-339.
- [4] R. Fagin y J. Halpern. A new approach to updating beliefs. *Actas del congreso UAI*, 347-374, 1991.
- [5] T. Fine. Theories of probability. Academic Press, 1973.
- [6] B. de Finetti. *Probability, induction and statistics*. Wiley, 1972.
- [7] B. de Finetti. *Theory of probability*. Wiley, 1974.
- [8] I. Montes, E. Miranda y S. Destercke. Unifying neighbourhood and distortion models: Part I-New results on old models. *International Journal of General Systems*, 49(6):602–635, 2020.
- [9] I. Montes, E. Miranda y S. Destercke. Unifying neighbourhood and distortion models: Part II-New models and synthesis. *International Journal of General Systems*, 49(6):636–674, 2020.
- [10] K. A. Post. Triangle in a triangle: On a problem of Steinhaus. *Geometriae Dedicata*, Vol. 45:115-120, 1993.
- [11] E. Quaeghebeur, C. Wesseling, E. Beauxis-Aussalet, T. Piovesan y T. Sterkenburg. *Eliciting sets of acceptable gambles: CWI World Cup competition*. En “Proceedings of the Ninth International Symposium on Imprecise Probabilities: Theories and Applications (ISIPTA’2015)”.
- [12] T. Seidenfeld, M. J. Schervish y J. B. Kadane. *Forecasting with imprecise probabilities*. International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 53, No. 8, 1248-1261, 2012.

- [13] P. Walley. Coherent lower and upper probabilities. Documento de trabajo, Universidad de Warwick, 1981.
- [14] P. Walley. *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. Chapman and Hall, 1991.
- [15] J. E. Wetzel. *Fits and covers*. Mathematics Magazine, University of Illinois, Vol. 76, No. 5, 349-363, 2003.