



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Trabajo Fin de Grado

Junio 2023

Introducción a la teoría de cuerdas

Autor: Gorca Prieto Varela

Tutor: Yolanda Lozano Gómez

Grado: Física

Índice

1. Introduction	3
2. Fundamento teórico	4
2.1. Relatividad especial	4
2.2. Mecánica Lagrangiana	8
2.3. Funciones especiales: la función Gamma y la función Zeta	10
3. Gravedad y Electromagnetismo en dimensión arbitraria	12
3.1. Electromagnetismo en dimensión arbitraria	12
3.2. Gravedad en dimensión arbitraria	15
3.3. Dimensiones extra	17
4. Partícula puntual relativista	18
4.1. Invariancia bajo reparametrizaciones	19
4.2. Ecuaciones del movimiento	19
4.3. Partícula puntual con carga eléctrica	20
4.4. Dinámica del campo electromagnético	21
5. Cuerda relativista	22
5.1. La acción	22
5.2. Gauge estático	25
5.3. Soluciones a las ecuaciones del movimiento	29
6. Cuerdas relativistas en las coordenadas del cono de luz	33
6.1. Familia de parametrizaciones	34
6.2. Condiciones de contorno y soluciones	35
6.3. Gauge del cono de luz	37
6.4. Acción de Polyakov	38
7. Campos y Cuantización	39
7.1. Campo escalar	39
7.2. Campo electromagnético	45
7.3. Campo gravitacional	46
7.4. Campo de Kalb-Ramond	48
7.5. Partícula puntual	49
8. Cuantización de la cuerda abierta	57
8.1. Operadores y Conmutadores	57
8.2. Operadores Transversos de Virasoro	61
8.3. Generadores Lorentz	65
8.4. Estados	67

9. Cuantización de la cuerda cerrada	70
9.1. Operadores y Conmutadores	72
9.2. Operadores Transversos de Virasoro	73
9.3. Estados	77
10. Más allá de la teoría de cuerdas bosónicas	80
10.1. Conclusiones	80
10.2. Acción y operadores	81
10.3. Supercuerdas abiertas	84
10.4. Supercuerdas cerradas	85
10.5. Otras Teorías de Supercuerdas	85
Referencias	88

1. Introduction

Hoy en día se conocen 4 interacciones fundamentales en la naturaleza. Los modelos físicos actuales que mejor describen estas interacciones son el modelo estándar y la relatividad general. Aunque ambos modelos supusieron un salto conceptual y avance teórico en el momento de su formulación y posterior comprobación experimental, se sabe que ninguno de los dos es completo.

La relatividad general explica los fenómenos gravitatorios como consecuencia de las distorsiones en el espacio-tiempo causadas por la presencia de materia y energía en el mismo espacio-tiempo. La noción de tiempo absoluto de las teorías previas deja de tener sentido y el tablero de juego pasa a ser un ente dinámico que interactúa con la materia que contiene.

El modelo estándar describe 3 de las 4 interacciones fundamentales de la naturaleza: la interacción electromagnética, la interacción débil y la interacción fuerte. Describe estas 3 interacciones mediante partículas bosónicas que actúan como mediadores de dichas interacciones entre las distintas partículas de materia: el fotón mediador de la interacción electromagnética, los bosones Z^0 , W^+ y W^- mediadores de la interacción débil y los 8 gluones mediadores de la fuerza fuerte. Además, el modelo estándar también incluye todas las partículas de materia: los 12 leptones y 36 quarks.

Ambas teorías son intrínsecamente distintas. La relatividad general es una teoría clásica, descrita mediante la geometría; mientras que el modelo estándar es una teoría puramente cuántica. Cualquier teoría completa de la Física, que pretenda unificar la gravedad con el resto de interacciones fundamentales, debe modelar la gravedad como una interacción cuántica más. La teoría de cuerdas modela todas las partículas, tanto las de materia como las mediadoras, como distintos estados vibracionales de una misma cuerda fundamental. Debido a que es una teoría intrínsecamente cuántica y a esta unicidad a la hora de describir las distintas partículas e interacciones, la teoría de cuerdas es un excelente candidato como teoría de unificación de todas las interacciones.

El objetivo de este trabajo será ver como partiendo de una acción muy simple, la generalización más sencilla de la acción de una masa puntual relativista, se obtienen, una vez cuantizada la teoría, unos estados que se pueden identificar con estados de fotones y otros estados que se pueden identificar con estados del hipotético gravitón. De esta forma se ve que de una forma muy simple y natural esta teoría puede servir como base para desarrollar una teoría de cuerdas que describa toda la física teórica que se conoce hasta el momento.

Este trabajo se trata de una recopilación bibliográfica, en ningún caso se trata de una aportación original. El desarrollo general está basado en el libro *A First Course in String Theory* [1], salvo que se indique expresamente. Cualquier otra fuente será citada en el momento que se use.

2. Fundamento teórico

En esta sección se van a discutir y exponer varios aspectos referentes a la notación que se usará a lo largo del resto del trabajo y algunas nociones de distintos formalismos que serán útiles para el desarrollo del trabajo.

2.1. Relatividad especial

La relatividad especial surge de la consideración de que la velocidad de la luz ($c=299\,792\,458$ m/s) es la misma medida en cualquier sistema de referencia inercial. El formalismo originalmente se construyó en 1+3 dimensiones, aunque es fácilmente extrapolable a $D=d+1$ dimensiones, donde D , el número total de dimensiones, es el número de dimensiones espaciales, d , más la dimensión temporal. Como se pretende que la teoría de cuerdas reproduzca las predicciones de esta teoría, se impondrán invariancias y simetrías propias de la relatividad especial.

2.1.1. Convenciones y nociones básicas

Los eventos o puntos en el espacio-tiempo, vistos por cierto observador inercial, serán etiquetados por el conjunto de valores: t el tiempo en el que sucede el evento y \vec{x} el punto del espacio en el que sucede. Se agrupan todos estos valores en un solo objeto vectorial (usualmente estos objetos se denominan cuadvectores ya que la teoría se suele desarrollar en 4 dimensiones, en contraposición de los trivectores usados en el espacio euclídeo usual). Se va a generalizar esto a un espacio $d+1$ dimensional

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (ct, x^1, \dots, x^d) = (x^0, x^1, \dots, x^d). \quad (2.1)$$

Donde el índice μ toma los valores $0,1,2,\dots,d$. En caso de que sea necesario especificarlo, se llamará vectores Lorentz a los vectores $d+1$ dimensionales x , mientras que se llamarán vectores espaciales a los vectores formados con sus últimas d componentes \vec{x} . Dados dos eventos infinitesimalmente cercanos x^μ y $x^\mu + dx^\mu$ se define el intervalo infinitesimal ds de la siguiente manera

$$-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^d)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en $d+1$ dimensiones y toma la siguiente forma

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id_d \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

La métrica define el producto escalar en el espacio-tiempo para cualesquiera dos vectores a^μ y b^μ

$$a \cdot b = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu. \quad (2.4)$$

Como caso particular de transformacion de coordenadas entre dos sistemas de referencia iner-

ciales se va a estudiar el caso en el que los dos observadores tienen todos los ejes alineados de la misma forma y el sistema S' se mueve a lo largo de la dirección positiva del eje x del sistema S de forma que en $t=t'=0$ los dos sistemas coinciden

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad y \quad x'^\mu = x^\mu \quad si \quad \mu = 2, \dots, d, \quad (2.5)$$

donde el factor Lorentz γ y el factor β se definen

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad y \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.6)$$

Este tipo de transformación de coordenadas se suele llamar boost en el eje x. La transformación inversa se puede encontrar despejando las coordenadas x^μ en función de las $(x')^\mu$, pero simplemente por simetría se tiene que la transformación inversa viene dada al intercambiar x y x' en las ecuaciones y β por $-\beta$. Es fácil comprobar que esta transformación deja invariante los intervalos

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu &= -(x'^0)^2 + (x'^1)^2 + \dots + (x'^d)^2 = -\gamma^2(x^0 - \beta x^1)^2 + \gamma^2(x^1 - \beta x^0)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^d)^2 = \\ &= -\gamma^2(1 - \beta^2)(x^0)^2 + \gamma^2(1 - \beta^2)(x^1)^2 + \dots + (x^d)^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^d)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Los cambios de coordenadas que dejan invariante el intervalo se llaman, por definición, transformaciones de Lorentz. En general son transformaciones lineales

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu. \quad (2.8)$$

De esta forma el boost anterior se puede representar mediante

$$(L) = L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & Id_{d-1} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Imponiendo la invariancia del intervalo se obtiene la condición que debe satisfacer una transformación de Lorentz general

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} L^\mu_\rho x^\rho L^\nu_\sigma x^\sigma \iff L^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} L^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \iff L^T \eta L = \eta. \quad (2.10)$$

Tomando determinante en esta ecuación se tiene que $|\det L|=1$ y por lo tanto todas las transformaciones de Lorentz son invertibles. Cabe notar que las rotaciones son casos particulares de transformaciones de Lorentz y que cualquier transformación de Lorentz en $p+1$ dimensiones está contenida en las transformaciones de Lorentz en $d+1$ dimensiones para todo p tal que $p < d$.

2.1.2. Energía, momento y velocidad

Para una partícula puntual de masa m se verifica la ecuación

$$E^2 = (\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2, \quad (2.11)$$

siendo E su energía y \vec{p} su momento espacial. Definiendo el momento p^μ , se determina fácilmente su cuadrado a partir de la ecuación anterior

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \gamma m(c, \vec{v}) \implies p^2 = p \cdot p = -(mc)^2. \quad (2.12)$$

El tiempo propio de una partícula, un concepto fundamental en relatividad, se puede definir como el tiempo medido por un observador inercial pegado a la misma. Para este observador $dx = 0$ y $dt = d\tau$

$$-ds^2 = -(cdt)^2 + d\vec{x}^2 = -c^2 dt^2(1 - \beta^2) = -c^2 d\tau^2. \quad (2.13)$$

Como toda trayectoria de una partícula masiva da $-ds^2 < 0$ se pueden cancelar los signos negativos y tomar raíces. Por lo tanto, para una partícula masiva el tiempo propio viene dado por ds/c . Además

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\gamma}{c}. \quad (2.14)$$

Al ser ds un escalar Lorentz, nos permite definir nuevos vectores Lorentz a partir de vectores ya conocidos. El vector velocidad se obtiene

$$u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds} = c \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{ds} = c(c, \vec{v}) \frac{\gamma}{c} = \gamma(c, \vec{v}). \quad (2.15)$$

Lo cual permite reescribir el momento p

$$p^\mu = \gamma m(c, \vec{v}) = mu^\mu. \quad (2.16)$$

Todos los vectores Lorentz transforman igual que las coordenadas bajo una transformación. En particular, bajo un boost en el eje x la energía y momento usual de la partícula transforman

$$E' = \gamma(E - \beta cp^1) \quad y \quad p'^1 = \gamma(p^1 - \beta \frac{E}{c}). \quad (2.17)$$

2.1.3. Coordenadas del cono de luz

Este sistema de referencia (light-cone coordinates en inglés) será el usado principalmente a lo largo del posterior desarrollo de la teoría. Se definen dos nuevas coordenadas como combinaciones linealmente independientes de las coordenadas x^0 y x^1

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1). \quad (2.18)$$

Mientras que el resto de coordenadas no se ven afectadas. Este sistema de referencia recibe este nombre debido a que las rectas definidas por $x^+ = 0$ y $x^- = 0$ se identifican con las trayectorias de rayos de luz emitidos desde el origen y moviéndose hacia la izquierda y derecha respectivamente, si se ignoraran las coordenadas diferentes a t y x .

Por definición se tomará x^+ como coordenada temporal y por lo tanto x^- se tomará como otra coordenada espacial. Diferenciando las ecuaciones que definen estas nuevas coordenadas y sustituyendo el resultado en la expresión del intervalo se tiene

$$2dx^+dx^- = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 \implies -ds^2 = -2dx^+dx^- + dx^I dx^I = \hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.19)$$

Los índices con letras latinas y mayúsculas toman a partir de ahora los valores $I = 2, \dots, d$. De esta expresión se obtiene la métrica en estas nuevas coordenadas

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id_{d-1} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Cualquier otro vector Lorentz se puede expresar en esta nueva base

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 \pm a^1). \quad (2.21)$$

De forma que el producto escalar también se puede expresar en la nueva base

$$a \cdot b = \eta^{\mu\nu} a^\mu b^\nu = \hat{\eta}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^- b^+ - a^+ b^- + a^I b^I. \quad (2.22)$$

Nótese

$$a_- = -a^+ \quad y \quad a_+ = -a^- \quad (2.23)$$

En particular el vector momento también se puede expresar en esta nueva base

$$-p_\mp = p^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 \pm p^1). \quad (2.24)$$

Será la cantidad p^- la que haga el papel de energía

$$p^- = \frac{E_{lc}}{c}, \quad (2.25)$$

donde E_{lc} hace referencia a la energía en el sistema de coordenadas del cono de luz.

2.2. Mecánica Lagrangiana

Toda la mecánica Lagrangiana se formula en torno de la función $L = T - V$, donde T es la energía cinética del sistema y V su energía potencial, y su extremización a lo largo de la trayectoria del sistema. El lagrangiano L es explícitamente una función de las coordenadas x y dx/dt e implícitamente de t . El objeto a extremizar suele denotarse como la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(t) dt. \quad (2.26)$$

El formalismo Lagrangiano es particularmente útil a la hora de desarrollar teorías de campos, como es el caso de las teorías de cuerdas.

2.2.1. Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones del movimiento se encuentran extremizando la acción

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_i}^{t_f} L(t) dt \right) = 0. \quad (2.27)$$

Para ello se considera un desplazamiento infinitesimal respecto de la trayectoria que realmente toma la partícula $\delta x(t)$ (normalmente toma el nombre de desplazamiento virtual), de forma que los extremos queden fijos: $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$. Este desplazamiento se realiza a tiempo fijo de forma que $\delta(\dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}(\delta x(t))$

$$0 = \delta \left(\int_{t_i}^{t_f} L dt \right) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) \delta x dt. \quad (2.28)$$

El término evaluado en t_i y t_f se anula ya que $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$. Por lo tanto las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (2.29)$$

Si en lugar de una sola coordenada x y su derivada temporal el lagrangiano dependiera de un conjunto de coordenadas $\{q_j\}_{j=1}^n$ y sus correspondientes derivadas las ecuaciones del movimiento serían

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.30)$$

Es bastante usual trabajar con densidades lagrangianas en lugar de lagrangianos, sobre todo al estudiar campos en lugar de partículas. En tal caso la acción tomará la forma

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^d \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a), \quad (2.31)$$

donde ξ^α son las coordenadas, $\{\phi^a\}_{a=1}^k$ los campos de los que depende la densidad lagrangiana

y $\partial_\alpha \phi^a \equiv \frac{\partial \phi^a}{\partial \xi^\alpha}$ las derivadas de los campos. En este caso las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \right) = 0, \quad a = 1, \dots, k. \quad (2.32)$$

2.2.2. Cantidades conservadas y simetrías

Si dada un transformación de coordenadas infinitesimal

$$q_i(t) \longrightarrow q_i(t) + \delta q_i(t), \quad \text{con} \quad \delta q_i(t) = \epsilon h(q_i(t); t), \quad (2.33)$$

donde ϵ es una constante infinitesimal y h una función, el lagrangiano cambia en una derivada total

$$\delta L = \frac{d}{dt} (\epsilon \Lambda), \quad (2.34)$$

con Λ una función de las coordenadas, velocidades y el tiempo, entonces la cantidad Q definida a continuación se conserva en el tiempo

$$\epsilon Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \epsilon \Lambda = \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h(q_i(t); t) - \Lambda \right). \quad (2.35)$$

Veamos que de hecho Q se conserva

$$\begin{aligned} 0 = \delta L - \frac{d}{dt} (\epsilon \Lambda) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} (\epsilon \Lambda) \stackrel{(2.30)}{=} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} (\epsilon \Lambda) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \epsilon \Lambda \right) = \epsilon \frac{dQ}{dt} \implies \frac{dQ}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

En el caso en el lagrangiano que se considera no dependa de la coordenada q_i , la carga conservada asociada a la transformación $\delta q_i = \epsilon$ se llama momento canónico asociado a la coordenada q_i . Como el lagrangiano no depende de q_i se tiene que $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ y como δq_i es una constante se tiene que $\delta \dot{q}_i = 0$. Por lo tanto, $\delta L = 0$ y en consecuencia $\Lambda = 0$, de forma que

$$Q = P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.37)$$

En el caso en el que se esté trabajando con densidades lagrangianas y se dé una transformación infinitesimal de los campos

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \delta \phi^a = \phi^a + \epsilon^i h_i^a(\phi), \quad (2.38)$$

donde ϵ^i son unas constantes infinitesimales y las $h_i^a(\phi)$ unas funciones, de forma que la densidad lagrangiana cambie en una derivada total

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha \left(\epsilon^i \Lambda_i^\alpha \right), \quad (2.39)$$

con Λ_i^α ciertas funciones de los campos y sus derivadas, entonces las cantidades j_α^i definidas a continuación son corrientes conservadas

$$\epsilon^i j_i^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)} \delta\phi^a - \epsilon^i \Lambda_i^\alpha. \quad (2.40)$$

Veamos que de hecho son corrientes conservadas

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} - \partial_\alpha \left(\epsilon^i \Lambda_i^\alpha \right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)} \delta(\partial_\alpha\phi^a) - \partial_\alpha \left(\epsilon^i \Lambda_i^\alpha \right) \stackrel{(2.32)}{=} \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)} \right) \delta\phi^a + \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)} \partial_\alpha(\delta\phi^a) - \partial_\alpha \left(\epsilon^i \Lambda_i^\alpha \right) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)} \delta\phi^a - \epsilon^i \Lambda_i^\alpha \right) = \epsilon^i \partial_\alpha j_i^\alpha \implies \partial_\alpha j_i^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Estas corrientes definen unas cargas conservadas definidas de la siguiente manera

$$Q_i = \int_V j_i^0 \, dvol. \quad (2.42)$$

Donde normalmente se suele extender la integral a todo el espacio (*). De forma que

$$\frac{dQ_i}{dt} = \int_V \partial_0 j_i^0 \, dvol \stackrel{(2.41)}{=} - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i \, dvol = - \int_{\partial V} \vec{j}_i \cdot \vec{n} \, ds \stackrel{(*)}{=} 0, \quad (2.43)$$

donde \vec{n} es un vector unitario perpendicular a ∂V . En el caso en el que la densidad lagrangiana no dependa de un campo ϕ^a , la corriente conservada asociada a la variación $\delta\phi^a = \epsilon^a$ se llama densidad de momento. Al ser la densidad lagrangiana independiente del campo ϕ^a se tiene que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} = 0$ y al ser $\delta\phi^a$ constante se tiene que $\partial_\beta(\delta\phi^a) = 0$. De forma que $\delta\mathcal{L} = 0$ y, por lo tanto, $\Lambda_\alpha^i = 0$. De forma que las corrientes conservadas, denominadas densidades de momento en este caso, se expresan

$$j_a^\alpha = \mathcal{P}_a^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}. \quad (2.44)$$

Los momentos totales son las cargas asociadas a dichas densidades

$$P_\alpha = \int_V \mathcal{P}_\alpha^0 \, dvol. \quad (2.45)$$

2.3. Funciones especiales: la función Gamma y la función Zeta

En el desarrollo de la teoría será necesario el uso de la continuación analítica de la función zeta de Riemann para determinar cierto parámetro. Para ello, basándose en los resultados del capítulo 18 del libro *Complex Analysis* [2], se obtendrá una continuación analítica de la función zeta, que originalmente viene definida por la siguiente suma infinita

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (2.46)$$

Esta función está bien definida para $\Re(s) > 1$. Partiendo de la función gamma (su representación integral definida para $\Re(s) > 0$) y haciendo el cambio de variable $t \rightarrow nt$ se tiene:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} n^s dt. \quad (2.47)$$

Por lo tanto $\forall s/\Re(s) > 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} n^s dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nt} \right) t^{s-1} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} t^{s-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \end{aligned} \quad (2.48)$$

(*) El teorema de la convergencia monótona permite intercambiar el sumatorio y la integral [3]. Trabajando un poco más el término de la exponencial para $t < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^t - 1} &= \frac{1}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots} = \frac{1}{t(1 + P(t))} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n P^n(t) = \\ &= \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + O(t^3) \right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} + O(t^2). \end{aligned}$$

Permitiendo reescribir la ec. (2.48)

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 t^{s-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{12} \right) dt \\ &+ \int_0^1 t^{s-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} \right) dt + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 t^{s-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{12} \right) dt \\ &+ \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Esta expresión define una extensión analítica de $\Gamma(s)\zeta(s)$ a $\Re(s) > -2$ y por el Teorema de Unicidad es única. Teniendo en cuenta que la función gamma tiene polos simples en los enteros no positivos con residuos $\text{Res}(\Gamma(z), z = -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$:

$$\zeta(-1) = \frac{\frac{1}{12}}{\text{Res}(\Gamma(z), z = -1)} = \frac{\frac{1}{12}}{-1} = -\frac{1}{12} \quad y \quad (2.50)$$

$$\zeta(0) = \frac{-\frac{1}{2}}{\text{Res}(\Gamma(z), z = 0)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}. \quad (2.51)$$

El valor de la función zeta (más propiamente hablando el valor de su extensión analítica) en estos dos puntos será muy importante más adelante.

3. Gravedad y Electromagnetismo en dimensión arbitraria

El objetivo de esta sección es estudiar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los dos campos que se pretenden replicar mediante la teoría de cuerdas que se va a construir. Para ello se escribirán dichas ecuaciones en formalismo tensorial y se extenderán a dimensión arbitraria.

3.1. Electromagnetismo en dimensión arbitraria

Dado que unos de los estados que se pretenden reproducir son los de los fotones, es conveniente estudiar el electromagnetismo en una dimensión arbitraria. Para ello se generalizarán las ecuaciones de Maxwell (expresadas en unidades Heaviside-Lorentz)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Se puede observar que \vec{E} y \vec{B} se miden con las mismas unidades y las magnitudes ρ y \vec{j} son las densidades de carga eléctrica por unidad de volumen y de corriente por unidad de área respectivamente. La dinámica de una partícula en el seno de estos campos viene determinada por la ley de Lorentz

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (3.5)$$

Como \vec{B} tiene divergencia nula se puede expresar como el rotacional de un potencial vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.6)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (3.1)

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Lo que permite escribir el campo eléctrico como

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi, \quad (3.8)$$

donde Φ es el potencial escalar. En el caso independiente del tiempo, esta última ecuación junto con la ec. (3.3) permiten escribir la siguiente ecuación para el potencial escalar

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = \rho \implies \nabla^2 \Phi = -\rho \quad (3.9)$$

Estos potenciales permiten describir el lagrangiano y el hamiltoniano de los campos y por lo tanto son más fundamentales que éstos. Sin embargo, no están determinados unívocamente. Sea ϵ una función del espacio y del tiempo arbitraria (suficientemente regular) se definen los potenciales prima

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}, \quad \vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \epsilon \quad (3.10)$$

Veamos que estos potenciales reproducen los mismos campos \vec{E} y \vec{B} que los potenciales originales

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \epsilon) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}; \\ \vec{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla \Phi' = \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \epsilon) + \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) = \vec{E} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Este es un ejemplo de una transformación gauge, de parámetro ϵ en este caso. Dos potenciales conectados mediante una transformación gauge son físicamente equivalentes y dan lugar a los mismos campos. Las transformaciones gauge son manifestaciones de simetrías internas del sistema que se está describiendo.

3.1.1. Electrodinámica manifiestamente relativista

Los potenciales Φ y \vec{A} pueden combinarse para dar un vector Lorentz

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}) \quad (3.12)$$

y su dual

$$A_\mu = (-\Phi, \vec{A}). \quad (3.13)$$

A partir de este nuevo vector se puede definir el tensor del campo electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.14)$$

que es claramente un tensor antisimétrico. Es fácil ver que

$$F_{0i} = -E_i \quad y \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k. \quad (3.15)$$

Esto permite escribir explícitamente todas las componentes del tensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

El cuadrivector potencial permite expresar la transformación gauge dada en ec. (3.10) de forma más compacta

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \epsilon. \quad (3.17)$$

De forma que es inmediato ver que los campos son invariantes ya que

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \epsilon - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \epsilon = F_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Además este tensor permite reescribir las ecuaciones de Maxwell de forma más compacta. Definiendo

$$T_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}, \quad (3.19)$$

$T=0$ encapsula las ecuaciones (3.1) y (3.2). Para recuperar las otras dos ecuaciones es necesario definir el vector Lorentz corriente

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}), \quad (3.20)$$

que, teniendo en cuenta que $\vec{j} = \rho\vec{v}$, se puede expresar como

$$j^\mu = (c\rho, \rho\vec{v}) = \rho(c, \vec{v}) = \rho_0\gamma(c, \vec{v}) = \rho_0 u^\mu, \quad (3.21)$$

donde ρ_0 es la densidad de carga en reposo. De esta forma, las ecuaciones (3.3) y (3.4) son equivalentes a

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu. \quad (3.22)$$

Que en ausencia de cargas se reduce a

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial^2 A^\mu = 0. \quad (3.23)$$

Esta es la ecuación del movimiento que se tratará de replicar con la teoría de cuerdas.

3.1.2. Campo eléctrico en dimensión arbitraria

Las ecuaciones de Maxwell descritas mediante el tensor F son validas en cualquier dimensión. Como ejemplo se va a resolver un caso simple en dimensión $d+1$. Suponiendo la existencia de una carga puntual, la componente 0 de la ec. (3.22) da

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \partial_i E^i = \rho. \quad (3.24)$$

Integrando esta ecuación en una bola B^d de radio r centrada en la carga

$$\int_{B^d(r)} d\text{vol} \nabla \vec{E} = \int_{B^d(r)} d\text{vol} \rho = q. \quad (3.25)$$

Aplicando el teorema de la divergencia y suponiendo que el campo generado por la carga puntual tiene simetría radial

$$\int_{B^d(r)} d\text{vol} \nabla \vec{E} = \int_{S^{d-1}(r)} \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \int_{S^{d-1}(r)} ds E(r) = E(r) \text{vol}(S^{d-1}(r)) = E(r) \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (3.26)$$

Por lo tanto

$$E(r) = \frac{q}{r^{d-1}} \frac{\Gamma(d/2)r^{d-1}}{2\pi^{d/2}}. \quad (3.27)$$

Particularizando esta última expresión del campo eléctrico al caso $d = 3$ se obtiene la conocida expresión

$$E(r) = \frac{q}{r^2} \frac{\Gamma(3/2)}{2\pi^{3/2}} = \frac{q}{r^2} \frac{\sqrt{\pi}/2}{2\pi^{3/2}} = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (3.28)$$

3.2. Gravedad en dimensión arbitraria

En el marco de la Relatividad General la gravedad se manifiesta en la dinámica de los sistemas mediante la métrica, que deja de ser constante

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (3.29)$$

La métrica $g_{\mu\nu}(x)$ es un tensor simétrico dependiente de las coordenadas. En los casos en los que los fenómenos gravitatorios son débiles se puede expresar la métrica como una perturbación respecto de la métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (3.30)$$

donde $h_{\mu\nu}(x)$ son funciones "pequeñas", es decir, se considera que $h_{\mu\nu}^2 \approx 0$. En ausencia de fuentes se pueden linealizar las ecuaciones de Einstein

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha(\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h = 0, \quad (3.31)$$

donde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Esta es la ecuación del movimiento para el campo gravitatorio que se intentará reproducir mediante la teoría de cuerdas. Este campo, al igual que los electromagnéticos, presenta simetrías gauge. El estudio de estas simetrías resultará útil a la hora de estudiar las cuerdas ya que proporciona grados de libertad que se pueden usar para fijar los sistemas de coordenadas de la forma que resulte más adecuada. Una transformación infinitesimal de las coordenadas

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \quad (3.32)$$

se puede interpretar como un cambio infinitesimal de la métrica, que a su vez induce un cambio en $h^{\mu\nu}$

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu + O(\epsilon, h). \quad (3.33)$$

La ec. (3.31) es invariante bajo esta transformación, que es una transformación gauge para las ecuaciones del movimiento de la métrica. Nótese que en este caso el parámetro gauge es un vector, mientras que el parámetro gauge para las ecuaciones de Maxwell era un escalar.

A bajas energías y velocidades la dinámica gravitatoria se puede modelizar con las leyes de Newton. En tal caso la atracción entre dos masas m_1 y m_2 viene dada por

$$|\vec{F}^{(4)}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.34)$$

donde la constante G toma el valor $G = 6.674 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. El sistema Planckiano de unidades se define de forma que las constantes G , \hbar y c sean iguales a uno. Esto define una masa, una longitud y un tiempo que se suelen denominar de Planck:

$$G = \frac{l_p^3}{m_p t_p^2}, \quad \hbar = \frac{m_p l_p^2}{t_p} \quad y \quad c = \frac{l_p}{t_p}. \quad (3.35)$$

Al igualar estas constantes a uno y despejar se obtienen las expresiones y valores de l_p , m_p y t_p

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} cm \quad (3.36)$$

$$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,391 \times 10^{-44} s \quad (3.37)$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,176 \times 10^{-5} g \quad (3.38)$$

Estas magnitudes son características de un sistema en el que los efectos cuánticos de la gravedad empiezan a ser apreciables. Como se argumentará a continuación, las unidades y valor de G dependen de la dimensión D del espacio-tiempo, por lo tanto también lo hacen las constantes definidas a partir de ella l_P , t_P y m_P . En las siguientes subsecciones se va a estudiar este efecto.

3.2.1. Potencial gravitatorio

Introduciendo el campo \vec{g} , la fuerza gravitacional por unidad de masa, y asumiendo que puede ser derivado de un potencial

$$\vec{g} = -\nabla V_g, \quad (3.39)$$

tal y como sucede en 1+3 dimensiones, vamos a generalizar esta ecuación a dimensión arbitraria. Se sabe que el potencial 4 dimensional satisface una ecuación de Poisson análoga a la ec. (3.9)

$$\nabla^2 V_g^{(4)} = 4\pi G \rho_m, \quad (3.40)$$

donde ρ_m es la densidad de materia. Al tratar de generalizar esta ecuación a dimensión arbitraria, es obvio que la constante $G^{(D)}$ tendrá unidades distintas dependiendo de la dimensión D . Por lo tanto la generalización apropiada que generaliza la gravedad Newtoniana a dimensión arbitraria es

$$\nabla^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m. \quad (3.41)$$

3.2.2. Longitud de Planck en dimensión arbitraria

Las unidades de $G^{(D)}\rho_m$ tienen que ser las mismas independientemente de la dimensión D . Por lo tanto

$$[G^{(D)}] \frac{M}{L^{D-1}} = [G] \frac{M}{L^3} \implies [G^{(D)}] = [G] L^{D-4} \stackrel{(3.36)}{=} [G^{(D)}] = \frac{[c^3] L^2}{[\hbar]} L^{D-4} = \frac{[c^3]}{[\hbar]} L^{D-2}. \quad (3.42)$$

Como la longitud de Planck en cualquier dimensión está unívocamente determinada mediante potencias de G , c y \hbar se puede sustituir $l_P^{(D)}$ por L quitando los corchetes que indican las unidades

$$G^{(D)} = \frac{c^3}{\hbar} (l_P^{(D)})^{D-2} \implies (l_P^{(D)})^{D-2} = \frac{\hbar}{c^3} G^{(D)} = (l_P)^2 \frac{G^{(D)}}{G} \quad (3.43)$$

3.3. Dimensiones extra

Para que la teoría de cuerdas sea correcta es necesario que el espacio-tiempo tenga más dimensiones que las 4 que experimentamos. Por lo tanto, vamos a asumir que el espacio-tiempo tiene más de 4 dimensiones y que probablemente algunas de ellas sean compactas, es decir, tengan dimensión finita.

3.3.1. Dimensiones compactas

La dimensión compacta más sencilla de construir se puede tratar como un círculo. Para ello se parte de una variable no restringida $x \in (-\infty, \infty)$ y se establece la relación

$$x \sim x + 2\pi R, \quad (3.44)$$

donde R define el radio de la dimensión. Un dominio fundamental para cualquier tipo de relación debe satisfacer que todo punto debe estar relacionado con algún punto del dominio fundamental y que no puede haber dos puntos en el dominio fundamental que estén relacionados entre sí. En este caso sencillo un dominio fundamental para x sería $0 \leq x < 2\pi R$. En el caso de que se den varias dimensiones p compactas de este tipo simultáneamente, cada una con su relación $x_i \sim x_i + 2\pi R_i$, el espacio resultante sería un toro p -dimensional.

Para estudiar el efecto de estas dimensiones compactas sobre el campo gravitatorio se va a estudiar el caso en el que el espacio-tiempo consta de las 4 dimensiones ordinarias que experimentamos (x^0, x^1, x^2, x^3) (extensas) y el resto de dimensiones (x^4, \dots, x^d) compactas. Considerando una masa total M colocada en $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ y distribuida uniformemente en las dimensiones compactas, la densidad de masa se puede escribir

$$\rho^{(D)} = m \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3), \quad (3.45)$$

donde $m = \frac{M}{V_C}$ es la densidad de masa en las dimensiones compactas y V_C el volumen total de

las dimensiones compactas. Al integrar esta densidad en todo el espacio se obtiene la masa total

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx^3 \int dx^4 \dots dx^d \rho^{(D)} = \\ & = m \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \delta(x^1) \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \delta(x^2) \int_{-\infty}^{\infty} dx^3 \delta(x^3) \int dx^4 \dots dx^d = mV_C = M. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Un observador que no es capaz de discernir la dimensión compacta verá la masa como un objeto puntual con densidad

$$\rho^{(4)} = M\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) = \rho^{(D)} \cdot V_C. \quad (3.47)$$

Por lo tanto la ec. (3.41) toma la forma

$$\nabla^2 V^{(D)}(x^1, x^2, x^3) = 4\pi G^{(D)} \rho^{(D)} = 4\pi \frac{G^{(D)}}{V_C} \rho^{(4)} \implies \frac{G^{(5)}}{G} = V_C. \quad (3.48)$$

Considerando que todas las dimensiones compactas tienen longitud igual l_C , a partir de la ec. (3.43) y haciendo uso de la ec. (3.48)

$$(l_P^{(D)})^{D-2} = (l_P)^2 \frac{G^{(D)}}{G} = (l_P)^2 (l_C)^{D-4} \implies l_C = l_P^{(D)} \left(\frac{l_P^{(D)}}{l_P} \right)^{\frac{2}{D-4}}. \quad (3.49)$$

Esto da un abanico de posibilidades para la longitud de las dimensiones compactas, lo que podría explicar porqué no se han detectado todavía.

4. Partícula puntual relativista

La propuesta de la acción para una cuerda relativista es una generalización directa de la acción de una partícula puntual relativista, por lo tanto estudiar este caso antes de generalizarlo resulta de ayuda para entender el formalismo. La acción de una partícula puntual de masa $m>0$ viene dada por

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} ds, \quad (4.1)$$

donde \mathcal{P} representa la trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo. Veamos que de hecho esta acción recupera la energía de una partícula libre, para ello se obtendrá el Hamiltoniano asociado a la acción.

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} ds = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.2)$$

Calculando ahora los momentos asociados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.3)$$

Por lo tanto se obtiene el hamiltoniano

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.4)$$

Recuperándose la expresión de la energía de una partícula libre relativista y así comprobando que la acción propuesta realmente tiene sentido.

4.1. Invariancia bajo reparametrizaciones

Independientemente de la parametrización escogida para la trayectoria \mathcal{P} el valor de la acción debería ser el mismo, ésta es una propiedad que también se tendrá que comprobar cuando se trabaje con la acción propuesta para las cuerdas. Comprobemos que la acción es invariante bajo reparametrizaciones. Sean τ y λ dos parametros, de forma que $x_i^\mu = x^\mu(\tau_i) = x^\mu(\lambda_i)$ y $x_f^\mu = x^\mu(\tau_f) = x^\mu(\lambda_f)$. Expresando ds de forma conveniente

$$ds^2 \stackrel{v \leq c}{=} (ds)^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 \implies ds = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau, \quad (4.5)$$

reexpresando la acción con esta parametrización y teniendo en cuenta que por la regla de la cadena $\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}$ se tiene que

$$\begin{aligned} S &= -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = -mc \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau \\ &= -mc \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Quedando así demostrado que la acción es invariante bajo reparametrizaciones.

4.2. Ecuaciones del movimiento

Vamos a calcular ahora las ecuaciones del movimiento para comprobar que se recupera lo esperado. Para ello se va a variar la acción

$$\delta S = -mc \int_{\mathcal{P}} \delta(ds). \quad (4.7)$$

Para encontrar la variación de ds se variará ds^2 partiendo de la ec. (4.5)

$$\delta(ds^2) = 2ds\delta(ds) = -\eta_{\mu\nu} \left(\delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \right) d\tau^2 = -2\eta_{\mu\nu} \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau^2, \quad (4.8)$$

donde en la última igualdad se ha hecho uso de la simetría de $\eta_{\mu\nu}$. Por lo tanto teniendo en cuenta que $\delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau}$

$$\begin{aligned} \delta(ds) &= -\eta_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{ds} d\tau = -\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} d\tau \implies 0 = \delta S = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} d\tau = \\ (2.16) \implies \int_{\tau_i}^{\tau_f} p_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} d\tau &= p_\mu \delta x^\mu \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{dp_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau \stackrel{(*)}{=} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{dp_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau \implies \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

(*) los extremos se mantienen fijos por lo tanto $\delta x^\mu(\tau_i) = \delta x^\mu(\tau_f) = 0$. Las ecuaciones del movimiento indican que los momentos son constantes sobre la trayectoria. Esta ecuación es válida para cualquier parámetro τ , particularizándola al parámetro s

$$0 = \frac{dp^\mu}{ds} = mc \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) \implies \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \implies \frac{dx^\mu}{ds} \text{ cte.} \quad (4.10)$$

Ambas formas de las ecuaciones del movimiento son lo esperado para una partícula libre (momento y velocidad constantes). Sin embargo una partícula libre no es de gran interés, y ya que el objetivo de este desarrollo es el de reproducir el electromagnetismo y la gravedad se va a estudiar la acción de una partícula puntual de masa m y carga eléctrica q que interactúa con un campo electromagnético.

4.3. Partícula puntual con carga eléctrica

El objetivo de este apartado es el de reproducir la expresión de la fuerza de Lorentz a partir de una acción. Se plantea la siguiente acción de interacción entre la partícula cargada y el campo electromagnético

$$S_{int} = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} d\tau A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu. \quad (4.11)$$

Por lo tanto la acción total es

$$S = S_0 + S_{int} = -mc \int_{\mathcal{P}} ds + \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu. \quad (4.12)$$

La variación de la primera parte de la acción ya ha sido calculada, por lo que para calcular la variación de la acción total falta calcular la variación de la acción de interacción. Dada una variación de las coordenadas δx^μ , induce una variación en los campos $\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu = \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu$. Así

$$\delta(A_\mu dx^\mu) = \left(\partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} + A_\mu \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \right) d\tau = \frac{d}{d\tau} (A_\mu \delta x^\mu) d\tau + [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau. \quad (4.13)$$

Por lo tanto la variación total de la acción es

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= p_\mu \delta x^\mu \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + A_\mu \delta x^\mu \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} - \int_{\mathcal{P}} \left[-\frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \delta x^\mu d\tau = \\ &= - \int_{\mathcal{P}} \left[-\frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \delta x^\mu d\tau \implies \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Esta última ecuación es la expresión relativista de la fuerza de Lorentz, por lo que la acción propuesta reproduce correctamente las ecuaciones del movimiento esperadas.

4.4. Dinámica del campo electromagnético

La última acción que se ha estudiado modela el efecto del campo electromagnético sobre una partícula cargada. Sin embargo no tiene en cuenta el efecto de la carga de la partícula sobre el propio campo electromagnético. Para modelar esto se propone la siguiente acción.

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} ds + \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu - \frac{1}{4c} \int d^D x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.15)$$

Estudiando la variación de la acción respecto de una variación en los campos δA_μ se encontrarán las ecuaciones del movimiento que rigen la dinámica de los campos. Primero veamos que para una partícula puntual la corriente j^μ se puede expresar por

$$j^\mu = qc \int \delta^D(x - x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (4.16)$$

ya que

$$qc \int \delta^D(x - x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau = qc \int \delta^D(x - x(\tau)) u^\mu(\tau) d\tau = qc u^\mu(x) = j^\mu(x). \quad (4.17)$$

Teniendo en cuenta que $\delta(F_{\mu\nu}) = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2\delta(F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} = 4\partial_\mu(\delta A_\nu) F^{\mu\nu} = -4\partial_\mu(F^{\mu\nu}) \delta A_\nu \quad (4.18)$$

y reescribiendo el segundo sumando de la acción

$$\frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} A_\mu(x) dx^\mu = \int d^D x \frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} \delta^D(x - x(\tau)) A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau, \quad (4.19)$$

se puede calcular la variación de la acción al completo

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^D x \left[\frac{q}{c} \int_{\mathcal{P}} \delta^D(x - x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau + \frac{1}{c} \partial_\nu F^{\nu\mu} \right] \delta A_\mu \implies \\ \partial_\nu F^{\mu\nu} &= q \int_{\mathcal{P}} \delta^D(x - x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau \stackrel{(4.16)}{=} \frac{1}{c} j^\mu. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Recuperándose así la ec. (3.22).

5. Cuerda relativista

Como se comentaba en la introducción, la acción que se va a estudiar es la generalización más simple de la acción de una partícula relativista libre. La acción de la partícula libre es proporcional a la longitud de la trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo. Como el objeto que vamos a tratar tiene una dimensión, su trayectoria en el espacio-tiempo barre un área y por lo tanto se puede identificar con una superficie. Es decir, la acción de una cuerda relativista es proporcional a la superficie de la variedad dos dimensional que define su trayectoria. Esta superficie suele llamarse hoja de universo de la cuerda (del inglés *worldsheet*).

5.1. La acción

5.1.1. Volumen de una subvariedad

A partir del desarrollo de *Spacetime and Geometry* [4], se va a derivar una expresión útil del área de la variedad deseada. Dada una variedad \mathcal{M} pseudoriemanniana de dimensión n , su hipervolumen viene dado por

$$Vol(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \nu, \quad (5.1)$$

donde $\nu = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ es la n -forma de volumen expresada en las coordenadas x^i y g representa el determinante de la métrica definida en la variedad expresada en dichas coordenadas. Cabe resaltar que el volumen es independiente de las coordenadas elegidas para su cálculo.

Si \mathcal{M} se trata de una subvariedad de dimensión m de otra variedad \mathcal{N} de dimensión $n > m$, los puntos sobre \mathcal{N} se pueden identificar mediante un mapa $\varphi: U \subseteq \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{N}$, donde U es el espacio de los posibles valores de los parámetros u^i de los que depende φ . La métrica g_{ij} sobre \mathcal{M} viene inducida por la de \mathcal{N} , h_{ab} , de la siguiente manera

$$g_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = \frac{\partial \varphi^a}{\partial u^i} \frac{\partial \varphi^b}{\partial u^j} h_{ab}. \quad (5.2)$$

Particularizando esto al caso que nos atañe, es decir: la variedad \mathcal{M} es la superficie barrida por la cuerda y por lo tanto $m = 2$, la variedad \mathcal{N} es el espacio-tiempo y por lo tanto $n = d + 1$, se denotarán $u^1 = \tau$ y $u^2 = \sigma$, las componentes del mapa φ se denotarán X^μ (las denominaremos coordenadas de la cuerda) con $\mu = 0, \dots, d$ y la métrica h_{ab} se trata de $\eta_{\mu\nu}$. Debido a la signatura de las métricas del espacio-tiempo $|\eta| = -\eta$ y $|g| = -g$. Al tener solo dos parámetros, es fácil desarrollar el determinante de g_{ij}

$$-g = -(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}. \quad (5.3)$$

Por lo tanto, el área de la hoja de universo de la cuerda viene dada por

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{|g|} = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}}. \quad (5.4)$$

Estudiamos las unidades de este funcional A . Las unidades de las derivadas en τ y σ se cancelan con las de sus correspondientes diferenciales. Aún así, se va a tomar τ con unidades de tiempo (se verá que este parámetro está relacionado con el flujo del tiempo sobre la hoja de universo) y σ con unidades de distancia. Las X^μ tienen unidades de distancia. Como aparecen términos en X^4 dentro de la raíz, al final las unidades de A son las esperadas de distancia al cuadrado.

5.1.2. Acción para una cuerda relativista

La acción que se va a proponer, como se ha dicho ya, tiene que ver con el área de la hoja de universo de la cuerda. Sin embargo, tal y como pasaba con la partícula puntual, es necesaria una constante de normalización. La acción que se propone es la siguiente

$$S = -\frac{T_0}{c}A = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{|g|} = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}}, \quad (5.5)$$

donde T_0 es la tensión de la cuerda y tiene unidades de fuerza. En total S tiene las unidades deseadas de una acción. El signo negativo se corresponde con el signo de la acción de la partícula puntual en ec. (4.1). La invariancia bajo reparametrizaciones de esta acción viene garantizada por la unicidad de la forma de volumen a partir de la que se ha definido. Esta acción suele llamarse acción de Nambu-Goto y es la primera propuesta de una acción para una teoría de cuerdas bosónicas. Definiendo $\frac{\partial X}{\partial \tau} = \dot{X}$ y $\frac{\partial X}{\partial \sigma} = X'$, se puede reescribir la acción

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}, \text{ donde } \mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}. \quad (5.6)$$

A partir de esta densidad lagrangiana se pueden definir las densidades de momento

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - \dot{X}_\mu X'^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - X'_\mu \dot{X}^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}. \quad (5.8)$$

5.1.3. Ecuaciones del movimiento

Para obtener las ecuaciones del movimiento se iguala a cero la variación de la acción

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta(\dot{X}^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \delta(X'^\mu) \right] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \partial_\tau (\delta X^\mu) + \mathcal{P}_\mu^\sigma \partial_\sigma (\delta X^\mu) \right] \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\partial_\tau (\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu) + \partial_\sigma (\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu) - (\partial_\tau \mathcal{P}_\mu^\tau + \partial_\sigma \mathcal{P}_\mu^\sigma) \delta X^\mu \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por lo tanto las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$\partial_\tau \mathcal{P}_\mu^\tau + \partial_\sigma \mathcal{P}_\mu^\sigma = 0 \text{ para todo } \mu = 0, \dots, d, \text{ ya que:} \quad (5.10)$$

Al variar las acciones se consideran variaciones con los extremos fijos, es decir, $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$. Por lo tanto la primera integral se anula

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \partial_\tau (\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} \right) = 0. \quad (5.11)$$

La segunda integral se puede desarrollar

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \partial_\sigma (\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma_1} \right). \quad (5.12)$$

Para que la variación sea exactamente cero, se tienen que cumplir las condiciones de contorno

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma_1} = 0 \text{ para todo } \mu = 0, \dots, d. \quad (5.13)$$

En el caso de una cuerda cerrada esta condición se satisface automáticamente ya que los puntos $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_1$ coinciden. En el caso de una cuerda abierta habrá que imponer una de las siguientes condiciones de contorno

- Condiciones de Dirichlet:

$$\partial_\tau X^\mu(\tau, 0) = \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma_1) = 0. \quad (5.14)$$

Es decir, los extremos de la cuerda están fijos en las dimensiones para las cuales se imponga esta condición. Esto implica $X^\mu(\tau, 0) = \text{constante}$ y $X^\mu(\tau, \sigma_1) = \text{constante}$ y por lo tanto $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \sigma_1) = 0$. Satisfaciéndose así la condición dada en ec. (5.13).

- Condiciones de extremos libres:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_1) = 0 \quad (5.15)$$

En las dimensiones para las que se imponga esta condición, los extremos de la cuerda no estarán fijados.

A la hora de resolver las ecuaciones de movimiento para una cuerda abierta se tendrá que imponer una de estas dos condiciones para cada valor de $\mu = 0, \dots, d$, es decir, en total son necesarias $2D = 2(d + 1)$ condiciones de contorno. En el caso $\mu = 0$ se tendrá que imponer necesariamente la condición de extremos libres ya que, como se estudiará más adelante, este parámetro τ está relacionado con el tiempo y por lo tanto $\partial_\tau X^0 \neq 0$.

Definición (Dp -branas). Una Dp -brana es una subvariedad del espacio-tiempo $p + 1$ dimensional definida por $D - (p + 1)$ condiciones de Dirichlet. Esto se hace fijando los extremos de la cuerda en $D - (p + 1)$ de las coordenadas de forma que queden confinados a una subvariedad de dimensión

$D - (D - (p + 1)) = p + 1$. La subvariedad resultante en la que pueden moverse los extremos de la cuerda tiene p dimensiones espaciales y una temporal.

5.2. Gauge estático

Una de las simetrías de este problema reside en la invariancia bajo reparametrizaciones de la acción. Para poder resolver las ecuaciones del movimiento es necesario fijar una parametrización. En primera aproximación se va a usar una parametrización concreta, bastante arbitraria, pero más adelante se generalizará a toda una familia de parametrizaciones que incluye esta primera elección.

Considerando un sistema de referencia inercial, se toma el parámetro τ de forma que coincida con el tiempo t de este sistema de referencia. Para un observador en dicho sistema de referencia, la cuerda será la intersección de los hiperplanos $t = t_0$ con la superficie descrita por la trayectoria de la cuerda en el espacio-tiempo. La arbitrariedad de esta parametrización reside en la elección del sistema de referencia. El parámetro σ será cualquiera que identifique los extremos de la cuerda con $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_1$ de forma que varíe de forma suave. En el caso de una cuerda cerrada de longitud σ_c se realiza la identificación $(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + \sigma_c)$ por lo tanto es suficiente definirlo para $\sigma \in (0, \sigma_c)$. De esta manera las coordenadas de la cuerda se pueden expresar

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = (ct, \vec{X}(t, \sigma)) \quad (5.16)$$

y sus respectivas derivadas

$$X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right), \quad (5.17)$$

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial t} = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \quad (5.18)$$

Habiendo definido el gauge estático, vamos a utilizarlo para estudiar, en un caso concreto, cómo se relacionan la tensión, masa y energía de una cuerda. Considerando una cuerda abierta estática confinada en la dirección espacial X^1 ($X^\mu = 0$ para $\mu = 2, \dots, d$) y con los extremos fijos en $X^1(\tau, 0) = 0$ y $X^1(\tau, \sigma_1) = a$ para cierto a . Al ser estática $X^1(t, \sigma) = X^1(\sigma) = f(\sigma)$ con f una función estrictamente creciente de forma que $f(0) = 0$ y $f(\sigma_1) = a$. Se tiene entonces

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}), \text{ y } X'^\mu = (0, f'(\sigma), \vec{0}), \quad (5.19)$$

donde el vector $\vec{0}$ en esta última ecuación es un vector $d - 1$ dimensional con todas sus componentes iguales a cero. Por lo tanto

$$\dot{X}^2 = -c^2, \quad X'^2 = (f')^2 \quad \text{y} \quad \dot{X} \cdot X' = 0. \quad (5.20)$$

Esto nos permite evaluar la acción

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{0 - (-c^2)(f'(\sigma))^2} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma f'(\sigma) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt(-T_0 a) = \int_{t_i}^{t_f} dt L. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como se trata de una cuerda estática su energía cinética es cero y $L = -V$. Por lo tanto se tiene $V = T_0 a$. La densidad de energía por unidad de longitud de la cuerda viene dada por

$$\mu_0 c^2 = \frac{V}{a} = T_0 \implies \mu_0 = \frac{T_0}{c^2}. \quad (5.22)$$

Estas relaciones tan sencillas indican que las magnitudes relevantes de la cuerda vienen definidas por un sólo parámetro libre. Sin embargo la configuración de la cuerda escogida es totalmente arbitraria, veamos que por lo menos satisface las condiciones de contorno y las ecuaciones del movimiento. Para $\mu \geq 2$ se satisfacen de forma trivial ya que $X^\mu = 0$. Como \dot{X}^μ y X'^μ son independientes de t las ecuaciones del movimiento se reducen a

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (5.23)$$

Lo que implica que \mathcal{P}_μ^σ debe ser independiente de σ

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -T_0 \frac{X'_\mu}{f'} \quad (5.24)$$

$\mu \neq 1$ lo satisface ya que en este caso $X'^\mu = 0$, lo que implica $\mathcal{P}_0^\sigma = 0$ y por lo tanto satisface las condiciones de contorno. Para $\mu = 1$ $X'^1 = f'$ y por lo tanto

$$\mathcal{P}_1^\sigma = -T_0 \frac{X'_1}{f'} = -T_0. \quad (5.25)$$

Para $\mu = 1$ también se satisfacen las condiciones de contorno ya que los extremos están fijos en $x^1 = 0$ y $x^1 = a$.

5.2.1. Velocidad transversa

Para expresar la acción de forma que sea más evidente la similitud con la de una partícula puntual va a ser necesario definir unas magnitudes. Sea $s(\sigma)$ la longitud de la cuerda en el intervalo $(0, \sigma)$ para cierto t fijo. Se tiene $s(0) = 0$ y $s(\sigma_1) =$ la longitud total de la cuerda.

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| d\sigma. \quad (5.26)$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = 1. \quad (5.27)$$

Entonces $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ es un vector unitario tangente a la cuerda, ya que la derivada se hace a t fijo. Se define entonces la velocidad transversa \vec{v}_\perp , como la componente de $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ perpendicular a la cuerda, es decir

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}. \quad (5.28)$$

Para expresar la acción en función de \vec{v}_\perp es necesario primero calcular \vec{v}_\perp^2

$$\vec{v}_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 - 2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2. \quad (5.29)$$

Teniendo en cuenta que en el gauge estático

$$\dot{X}^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2, \quad X'^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \quad \text{y} \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}, \quad (5.30)$$

la cantidad dentro de la raíz en la acción se puede escribir

$$(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 (c^2 - \vec{v}_\perp^2). \quad (5.31)$$

La acción se puede expresar entonces

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \implies L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} = -\mu_0 c^2 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}. \quad (5.32)$$

Por lo tanto el lagrangiano tiene la expresión del lagrangiano de una partícula puntual integrado a cada elemento de masa $\mu_0 ds$ y queda demostrado que la acción de Nambu-Goto es la generalización de la acción de una partícula puntual. Veamos cómo se expresan las densidades de momento en función de esta velocidad transversa. Particularizando la ec. (5.8)

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}^\mu - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) X'^\mu}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = -\frac{T_0 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}^\mu - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}},$$

en particular $\mathcal{P}^{\sigma 0} = -\frac{T_0 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)}{c \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (5.33)$

Y particularizando la ec. (5.7)

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = -\frac{T_0 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) X'^\mu - \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \dot{X}^\mu}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = \frac{T_0 ds \dot{X}^\mu - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{c^2 \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}, \quad \text{es decir,}$$

$$\mathcal{P}^{\tau 0} = \frac{T_0 ds}{c d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \quad \text{y} \quad \vec{\mathcal{P}}^\tau = \frac{T_0 ds}{c^2 d\sigma} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (5.34)$$

A partir de estas expresiones de las densidades de momento vamos a estudiar cómo se comportan los extremos libres de una cuerda abierta. Al tratarse de extremos libres se debe cumplir $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$, en particular $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$ y por lo tanto $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$ en los extremos. Esto quiere decir que los extremos se mueven de forma perpendicular a la cuerda. Además, en los extremos se tiene $\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{v}$. Por lo tanto la expresión general de $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ en los extremos es

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s} \implies \vec{P}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \quad (5.35)$$

que, al ser $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ un vector unitario, implica

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies |\vec{v}| = c \quad \text{en los extremos.} \quad (5.36)$$

En resumidas cuentas, los extremos libres de las cuerdas abiertas se mueven a la velocidad de la luz de forma perpendicular a la cuerda.

5.2.2. Hamiltoniano

Vamos a obtener la expresión del hamiltoniano del sistema para compararlo con el de la partícula puntual. Haciendo uso de la ec. (5.34), se obtiene la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \vec{P}^\tau \cdot \dot{\vec{X}} - \mathcal{L} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\vec{v}_\perp^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} + T_0 \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} = T_0 \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}}. \quad (5.37)$$

El hamiltoniano total es por lo tanto

$$H = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{H} = T_0 \int ds \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} = \mu_0 c^2 \int ds \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}}. \quad (5.38)$$

Que de nuevo es la integral del hamiltoniano de la partícula puntual en cada elemento de masa $\mu_0 ds$.

5.2.3. Parametrización de la cuerda

Hasta ahora sólo se ha escogido uno de los dos parámetros de la hoja de universo de la cuerda. El otro parámetro se fija de forma que para todo punto

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0. \quad (5.39)$$

Esto equivale a fijar la dirección y sentido de variación del parámetro σ de forma que sea perpendicular a la del parámetro τ . Con esta elección de σ , se particulariza la ec. (5.28) de forma

que

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}. \quad (5.40)$$

También se pueden simplificar las expresiones de $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ y $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$.

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\dot{X}^\mu}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s}. \quad (5.41)$$

Se ha fijado el sentido en el que aumenta σ , pero todavía se tiene la libertad de fijar la tasa en la que varía. Para ello, se toma σ de forma que $\sigma = 0$ coincida con un extremo de la cuerda y $\sigma = \sigma_1$ con el otro extremo y de forma que cada aumento ds de cuerda corresponda con un incremento $d\sigma$ tal que

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = \frac{dE}{T_0}. \quad (5.42)$$

Es decir, se va a utilizar la energía para parametrizar la cuerda de forma que cada incremento $d\sigma$ contenga la misma energía. Esta parametrización tiene sentido ya que se ha comprobado que la cantidad $\frac{dE}{T_0}$ es constante en el tiempo. Esto implica en particular que $\sigma_1 = \frac{E}{T_0}$, donde E representa la energía total de la cuerda. De esta forma las densidades de momento toman la forma todavía más simple

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (5.43)$$

5.3. Soluciones a las ecuaciones del movimiento

En esta subsección se van a desarrollar las ecuaciones del movimiento tanto para la cuerda abierta como para la cuerda cerrada y se va a encontrar una solución general a las mismas teniendo en cuenta las condiciones de contorno que deben cumplir.

5.3.1. Cuerda abierta

Primero vamos a reescribir la ec. (5.42) de una forma más útil

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{v_\perp^2}{c}\right)^2 = 1 \stackrel{(5.27)}{\implies} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1. \quad (5.44)$$

La condición $\vec{\mathcal{P}}^\sigma|_{\sigma=0} = \vec{\mathcal{P}}^\sigma|_{\sigma=\sigma_1} = 0$ se traduce en $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}|_{\sigma=0} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}|_{\sigma=\sigma_1} = 0$, por la ec. (5.43). Las ecuaciones del movimiento toman ahora la forma

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.45)$$

Si recordamos que se ha fijado σ de forma que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0$, tenemos las cuatro condiciones que tienen que satisfacer las soluciones:

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0, \quad (5.47)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_1} = 0. \quad (5.49)$$

Nótese que la coordenada X^0 ya está fijada por $X^0 = ct$. La primera de las condiciones ec. (5.46) es la ecuación de ondas clásica que se resuelve por

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma) \right), \quad (5.50)$$

con \vec{F} y \vec{G} funciones vectoriales arbitrarias. Imponiendo la primera de las condiciones de contorno dadas por la ec. (5.49)

$$\vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) = 0 \implies \vec{F}(u) + \vec{a}_0 = \vec{G}(u) \implies \vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) \right). \quad (5.51)$$

Imponiendo la segunda de estas condiciones se tiene

$$\vec{F}'(ct + \sigma_1) - \vec{F}'(ct - \sigma_1) = 0 \iff \vec{F}'(u + 2\sigma_1) = \vec{F}'(u). \quad (5.52)$$

Es decir, \vec{F}' es $2\sigma_1$ periódica. Esto es equivalente a

$$\vec{F}'(u + 2\sigma_1) = \vec{F}'(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}. \quad (5.53)$$

donde el vector constante se ha escrito de esa manera porque se va a ver que está relacionado con la velocidad de la cuerda. Estudiando ahora la condición ec. (5.48)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 &= 1 \stackrel{(5.47)}{\implies} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \pm 2 \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1 \\ &\implies \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right| = 1. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) - \vec{F}'(ct - \sigma) \right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) + \vec{F}'(ct - \sigma) \right), \quad (5.55)$$

la ecuación anterior equivale a

$$|\vec{F}'(u)| = 1. \quad (5.56)$$

Estudiando ahora ciertos puntos vamos a obtener información sobre lo que representan la función \vec{F} y el vector constante \vec{v}_0 .

$$\vec{X}(ct, 0) = \vec{F}(ct). \quad (5.57)$$

Por lo tanto $\vec{F}(u)$ es la posición del extremo $\sigma = 0$ en el instante $\frac{u}{c}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \vec{X}\left(\frac{2\sigma_1}{c}, \sigma\right) &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}(2\sigma_1 + \sigma) + \vec{F}(2\sigma_1 - \sigma) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}(\sigma) + \vec{F}(-\sigma) \right) + \frac{2\sigma_1}{c} \vec{v}_0 = \vec{X}(0, \sigma) + \frac{2\sigma_1}{c} \vec{v}_0. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Es decir, \vec{v}_0 es la velocidad media de cualquiera de los puntos de la cuerda. En resumidas cuentas, la resolución de las ecuaciones del movimiento se ha reducido a encontrar funciones \vec{F} tales que $|\vec{F}'| = 1$ y \vec{F}' sea $2\sigma_1$ periódica. Nótese que la dinámica de toda la cuerda queda determinada observando cualquiera de los puntos de la cuerda durante un intervalo de tiempo $\Delta t = \frac{2\sigma_1}{c} = \frac{2E}{T_0c}$.

5.3.2. Cuerda cerrada

A la hora de resolver las ecuaciones del movimiento para una cuerda cerrada, de las cuatro condiciones a imponer a las soluciones hay que reemplazar ec. (5.49) por una condición de periodicidad

$$\vec{X}(t, \sigma + \sigma_1) = \vec{X}(t, \sigma). \quad (5.59)$$

Igual que en el caso anterior la ecuación de ondas se resuelve mediante

$$\vec{X} = \vec{F}(u) + \vec{G}(v), \quad (5.60)$$

donde se han definido $u = ct + \sigma$ y $v = ct - \sigma$. De forma que las derivadas de \vec{X} se pueden relacionar con las de \vec{F} y \vec{G} de la siguiente manera

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{F}'(u) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = -\vec{G}'(v). \quad (5.61)$$

De esta forma la condición ec. (5.48), haciendo uso también de la ec. (5.47), se impone a través de

$$|\vec{F}'(u)| = |\vec{G}'(v)| = 1. \quad (5.62)$$

La periodicidad de \vec{X} se traduce en

$$\vec{F}(u + \sigma_1) - \vec{F}(u) = \vec{G}(v) - \vec{G}(v + \sigma_1). \quad (5.63)$$

Lo que quiere decir que en cada periodo σ_1 , ambas funciones cambian en el mismo vector constante. Equivalentemente, \vec{F}' y \vec{G}' son σ_1 periódicas. Por lo tanto la resolución de las ecuaciones del movimiento en el caso de una cuerda cerrada se reduce a encontrar funciones \vec{F} y \vec{G} que satisfagan ec. (5.62) y ec. (5.63).

5.3.3. Momentos y corrientes conservadas

Como se ha estudiado en la subsección 2.2, las simetrías de una densidad lagrangiana dan lugar a corrientes y momentos conservados. En este apartado se va a estudiar cómo las simetrías del grupo de Lorentz inducen unos momentos en la hoja de universo de las cuerdas. En este contexto, los campos son las coordenadas X^μ y las coordenadas de las que dependen los campos τ y σ . Consideremos primero una variación de la forma $\delta X^\mu = \epsilon^\mu$, que se trata de una traslación en el espacio-tiempo. Como la densidad lagrangiana sólo depende de las derivadas de las coordenadas: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\alpha X^\mu)$ para $\alpha = \tau, \sigma$, la densidad lagrangiana es invariante bajo esta familia de variaciones. Esto induce una corriente conservada definida por

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \epsilon^\mu \implies j_\mu^\alpha = \mathcal{P}_\mu^\alpha. \quad (5.64)$$

La ecuación que define que sea una corriente conservada implica

$$\partial_\alpha j_\mu^\alpha = 0 \implies \partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = \partial_\tau \mathcal{P}_\mu^\tau + \partial_\sigma \mathcal{P}_\mu^\sigma = 0, \quad (5.65)$$

que recupera las ecuaciones del movimiento. Los momentos, que son cargas conservadas, vienen entonces dados por las integrales de la componente $\alpha = \tau$ de estas corrientes

$$p_\mu = \int_0^{\sigma_1} d\sigma j_\mu^\tau = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{P}_\mu^\tau. \quad (5.66)$$

Al igual que en la mecánica clásica, las cantidades conservadas asociadas a las traslaciones son los momentos lineales. Comprobemos que p_μ se conserva

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} = - \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = -\mathcal{P}_\mu^\sigma \Big|_0^{\sigma_1}. \quad (5.67)$$

Si la cuerda es cerrada el último término se anula y en el caso de una cuerda abierta a la que se han impuesto condiciones de extremos libres también. Sin embargo, si se han impuesto condiciones de Dirichlet, puede ser que el momento de la cuerda no se conserve, pero el momento total de la cuerda y de la Dp -brana a la que sus extremos están fijados siempre se tiene que conservar. Considerando ahora una transformación de Lorentz infinitesimal, es decir $\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu$ de forma que $\delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = 0$, veamos qué condiciones debe satisfacer $\epsilon^{\mu\nu}$

$$0 = \delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = \eta_{\mu\nu} (\epsilon^{\mu\rho} X_\rho X^\nu + X^\mu \epsilon^{\nu\rho} X_\rho) = 2\epsilon^{\mu\nu} X_\mu X_\nu. \quad (5.68)$$

Por lo tanto $\epsilon^{\mu\nu}$ debe ser antisimétrico. Como los términos que intervienen en la densidad lagrangiana son de la forma $\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$, basta ver que sus variaciones son nulas para concluir que las transformaciones de Lorentz son simetrías de la densidad lagrangiana.

$$\delta(\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu) = \epsilon^{\mu\rho} \partial_\alpha X_\rho \partial_\beta X_\nu + \partial_\alpha X_\mu \epsilon^{\nu\rho} \partial_\beta X_\rho = (\epsilon^{\mu\nu} + \epsilon^{\nu\mu}) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu = 0. \quad (5.69)$$

Las corrientes conservadas asociadas a esta simetría vienen dadas por

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha} X^{\rho})} \delta X^{\rho} = \mathcal{P}_{\rho}^{\alpha} \epsilon^{\rho\delta} X_{\delta} \implies j_{\mu\nu}^{\alpha} = \mathcal{P}_{\mu}^{\alpha} X_{\nu}. \quad (5.70)$$

Al ser todas corrientes conservadas, una combinación lineal de ellas también lo es. Por analogía con los sistemas clásicos conocidos, se definen las corrientes conservadas de la siguiente manera

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^{\alpha} = X_{\mu} \mathcal{P}_{\nu}^{\alpha} - X_{\nu} \mathcal{P}_{\mu}^{\alpha}. \quad (5.71)$$

Las cargas conservadas asociadas son, por lo tanto,

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\tau}. \quad (5.72)$$

Las cargas M_{0i} corresponden con las cargas conservadas bajo un boost en la dirección x^i , mientras que cada una de las cargas M_{ij} es la carga conservada asociada a una rotación en el plano (X^i, X^j) . En el caso de trabajar en el espacio-tiempo 4 dimensional, se tiene que $L_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}$, donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita y L_i las componentes del momento angular.

6. Cuerdas relativistas en las coordenadas del cono de luz

Antes de introducir la familia de parametrizaciones mencionada en la sección anterior, se va a realizar una redefinición del único parámetro que aparece en la acción, T_0 . Por convención, en lugar de la tensión T_0 se suele usar el parámetro α' definido por

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}. \quad (6.1)$$

La definición de este parámetro, que parece tan arbitraria, se basa en el hecho de que para una cuerda rígida rotando con momento angular J se puede demostrar que

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2. \quad (6.2)$$

A partir de esta ecuación se deducen las unidades de este nuevo parámetro $[\alpha'] = [E]^{-2}$. De manera análoga a como se construye la longitud de Planck a partir de las constantes c , \hbar y G , se puede construir una longitud, denominada longitud de la cuerda, de manera única usando c , \hbar y α'

$$l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}. \quad (6.3)$$

De ahora en adelante se trabajará en unidades naturales, es decir, $\hbar = c = 1$. Esto implica que el tiempo y las distancias se medirán ambas con la misma unidad $[L] = [T]$, usualmente de distancia, y que las distancias y energías tendrán unidades inversas, es decir, $[E] = [L]^{-1}$. Además, se tomarán los parámetros σ y τ de forma que sean adimensionales. Con estas consideraciones y el

nuevo parámetro α' , la acción toma la forma

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}. \quad (6.4)$$

6.1. Familia de parametrizaciones

6.1.1. Cuerdas abiertas

En el caso de tratar con cuerdas abiertas se tomarán parametrizaciones que satisfagan

$$n \cdot X = 2\alpha'(n \cdot p)\tau, \quad (6.5)$$

donde n^μ es un vector Lorentz constante. Esta expresión es invariante Lorentz ya que está expresada en función de productos escalares y además el vector p (definido en ec. (5.66)) es constante si se impone la condición de que $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ en los extremos. Por lo tanto esto define τ de forma unívoca para cada elección de n . La constante α' se introduce para que las unidades sean consistentes. El 2 es arbitrario. Esta elección de parametrización para τ es tal que los puntos de igual τ son aquellos que están en la intersección de la hoja de universo de la cuerda y el hiperplano perpendicular a n .

Para fijar el parámetro σ se impone que la cantidad $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ sea constante. Esta es la generalización de haber impuesto que $\mathcal{P}^{\tau 0}$ fuera constante al imponer la ec. (5.42). Si un parámetro σ hace que $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ sea constante el parámetro $b\sigma$ también lo hace, esto permite tomar σ de forma que tome valores en $[0, \pi]$. Por lo tanto

$$n \cdot p = \int_0^\pi d\sigma n \cdot \mathcal{P}^\tau = \pi n \cdot \mathcal{P}^\tau \implies n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\pi}. \quad (6.6)$$

Es decir, $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ es una constante de la hoja de universo. Tomando el producto escalar de n con las ecuaciones del movimiento se tiene

$$\partial_\tau(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \partial_\sigma(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = \partial_\sigma(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0 \implies n \cdot \mathcal{P}^\sigma \quad \text{es independiente de } \sigma. \quad (6.7)$$

Y como ya se ha impuesto que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ en los extremos, se cumple que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ en toda la cuerda.

6.1.2. Cuerdas cerradas

En el caso de las cuerdas cerradas la ec. (6.5) se cambia por

$$n \cdot X = \alpha'(n \cdot p)\tau. \quad (6.8)$$

Para fijar el parámetro σ se fija también de forma que $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ sea constante. En este caso, en analogía con la parametrización de una circunferencia, se toma el parámetro σ de forma que tome

valores en el intervalo $[0, 2\pi]$. De esta forma la ec. (6.6) se reduce a

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi}. \quad (6.9)$$

En resumen, la parametrización escogida en ambos casos es tal que

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0, \quad (6.10)$$

$$n \cdot X = \beta\alpha'(n \cdot p)\tau, \quad (6.11)$$

$$n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau, \quad (6.12)$$

donde β toma el valor 1 para las cuerdas cerradas y el valor 2 para las cuerdas abiertas.

6.2. Condiciones de contorno y soluciones

Aunque ya se han obtenido soluciones de las ecuaciones del movimiento para ambas cuerdas, abierta y cerrada, haciendo uso de este nuevo gauge se pueden obtener expresiones de las soluciones mucho más útiles para cuantizar más adelante la teoría. Además, se van a obtener expresiones de los momentos más simples. La condición ec. (6.10) implica que

$$\begin{aligned} n \cdot \mathcal{P}^\sigma &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') n \cdot \partial_\tau X - n \cdot \partial_\sigma X (\dot{X}^2)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \stackrel{(6.11)}{=} -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} = 0 \\ &\implies \dot{X} \cdot X' = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Por lo tanto el momento $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ se puede expresar

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^\mu (X'^2)}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}. \quad (6.14)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec. (6.12)

$$\begin{aligned} n \cdot p &= \frac{2\pi}{\beta} \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \stackrel{(6.11)}{=} \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \beta\alpha' (n \cdot p) \implies \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} = 1 \\ &\implies \dot{X}^2 + X'^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Combinando estos resultados se obtiene la condición equivalente

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (6.16)$$

Como $X'^2 > 0$, la ec. (6.15) permite reescribir el término $\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2} = \sqrt{X'^4} = X'^2$. De forma que las expresiones de los momentos se pueden simplificar

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu. \quad (6.17)$$

Esto permite expresar las ecuaciones del movimiento de la siguiente forma simplificada

$$\partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial_\tau \dot{X}^\mu - \partial_\sigma X'^{\mu}) = 0 \implies \ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0. \quad (6.18)$$

Es decir, las ecuaciones de movimiento son simplemente ecuaciones de ondas que se resuelven por

$$X^\mu = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)), \quad (6.19)$$

con f y g dos funciones arbitrarias. Centrándonos en el caso de una cuerda abierta y haciendo uso de la condición $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ en los extremos se tiene

$$\left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0 \implies f'^\mu(\tau) = g'^\mu(\tau). \quad (6.20)$$

Por lo tanto f^μ y g^μ difieren en una constante y la solución se puede reescribir como

$$X^\mu = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)). \quad (6.21)$$

Imponiendo ahora la condición en el extremo $\sigma = \pi$

$$\left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\pi} = 0 \implies f'^\mu(\tau + \pi) = f'^\mu(\tau - \pi). \quad (6.22)$$

Esto quiere decir que las funciones f'^μ son 2π periódicas y por lo tanto se pueden expandir en series de la forma

$$f^\mu(u) = x_0^\mu + b_0^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^\mu e^{-inu} + (b_n^\mu)^* e^{inu}). \quad (6.23)$$

Donde x_0^μ es una constante de integración. De forma que las soluciones toman la forma

$$X^\mu = x_0^\mu + b_0^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^\mu e^{-in\tau} + (b_n^\mu)^* e^{in\tau}) \cos(n\sigma). \quad (6.24)$$

Vamos a dar sentido a algunos de los parámetros que aparecen en estas soluciones.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(b_0^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} -in(b_n^\mu e^{-in\tau} - (b_n^\mu)^* e^{in\tau}) \cos(n\sigma) \right) \\ \implies p^\mu &= \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\alpha'} b_0^\mu \implies b_0^\mu = 2\alpha' p^\mu. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Las constantes b_n^μ son, a priori, arbitrarias, por lo que se van a definir unas nuevas constantes α_n^μ con una normalización distinta, más conveniente para cuantizar más adelante la teoría, que no afectan a la forma de la solución

$$X^\mu = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (6.26)$$

Para que la solución siga siendo real es necesario que $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$. La constante α_0^μ sí que está fijada, ya que el valor de b_0^μ había quedado fijado, y viene dado por

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu. \quad (6.27)$$

Expresando las soluciones X^μ de esta forma sus derivadas se pueden expresar

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad \text{y} \quad X'^\mu = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (6.28)$$

De forma que

$$\dot{X}^\mu \pm X'^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (6.29)$$

6.3. Gauge del cono de luz

El gauge del cono de luz se fija tomando el vector $n = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$ de forma que

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+ \quad \text{y} \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+, \quad (6.30)$$

de forma que

$$X^+ = \beta\alpha' p^+ \tau \quad \text{y} \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}. \quad (6.31)$$

Por lo que en este gauge la coordenada X^+ queda automáticamente determinada de esta manera simple. Teniendo en cuenta que $\dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+$ y $X'^+ = 0$, en este gauge la condición ec. (6.16) se traduce en

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+) (\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \implies \dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2\beta\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2. \quad (6.32)$$

Se ha supuesto $p^+ \neq 0$, el único caso en el que se podría dar $p^+ = 0$ es en el de una cuerda sin masa moviéndose en la dirección X^1 y este caso habría que estudiarlo a parte, aunque la solución sería tan sencilla como tomar como X^1 cualquiera de las otras direcciones en las que la cuerda no se estuviera moviendo mediante un simple reetiquetado de las coordenadas. Esto implica que conociendo X^I , p^+ y x_0^- se puede determinar totalmente la dinámica de la cuerda. Veamos como se expresa entonces X^- en función del resto de parámetros en el caso de una cuerda abierta

$$\begin{aligned} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 &= (\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)})^2 = 2\alpha' \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \alpha_j^I \alpha_k^I e^{-i(j+k)(\tau \pm \sigma)} = \\ &= 2\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j^I \alpha_{n-j}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Esto permite expresar las α_n^- como

$$\alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \frac{1}{L_n^\perp}, \quad \text{donde} \quad L_n^\perp := \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-j}^I \alpha_j^I. \quad (6.34)$$

las cantidades L_n^\perp que se han definido se denominan los modos transversos de Virasoro. Nótese que en particular se tiene $L_0^\perp = 2\alpha' p^- p^+$. Se llega entonces a la siguiente expresión de X^- en función de estos modos, la constante de integración x^- y el momento p^+

$$X^- = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (6.35)$$

6.4. Acción de Polyakov

Aunque la generalización directa de la acción de la partícula puntual relativista sea la acción de Nambu-Goto y las soluciones que se obtienen de la misma sean plausibles, a la hora de cuantizar la teoría no es ésta la acción que se va a usar. La acción que se usará para cuantizar las cuerdas relativistas es la acción de Polyakov, dada por

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\dot{X}^2 - X'^2). \quad (6.36)$$

Es decir, se va a considerar la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} (\dot{X}^2 - X'^2). \quad (6.37)$$

Se reemplaza la acción de Nambu-Goto por la de Polyakov, ya que ésta última es más fácil de cuantizar al ser lineal y no tener una raíz cuadrada como la acción de Nambu-Goto. Además, como veremos más adelante, el hamiltoniano que emerge de forma natural al cuantizar las cuerdas es el dado por la acción de Polyakov. Para ver que clásicamente estas dos acciones son equivalentes, comprobemos primero que dan lugar a las mismas ecuaciones del movimiento. Para ello se iguala a cero la variación de la acción

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(2\dot{X}_\mu \partial_\tau (\delta X^\mu) - 2X'_\mu \partial_\sigma (\delta X'^\mu) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\partial_\tau (\dot{X}_\mu \delta X^\mu) + \partial_\sigma (X'_\mu \delta X'^\mu) - (\ddot{X}_\mu - X''_\mu) \delta X^\mu \right]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

El primer sumando se anula al integrarlo en τ ya que $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$. Al integrar en sigma el segundo término impone la condición de contorno $X'^\mu \delta X'^\mu|_{\sigma=0} = 0$, que en cuanto se calculen las densidades de momento asociadas a la densidad lagrangiana veremos que es equivalente a la condición de contorno impuesta por la acción de Nambu-Goto. Por último, el último sumando da la ecuación de movimiento $\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0$. Si calculamos ahora los momentos

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{1}{4\pi\alpha'} 2\dot{X}_\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}_\mu \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} 2X'_\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'_\mu, \quad (6.39)$$

se puede observar que también coinciden tanto en forma como en normalización con los dados por la acción de Nambu-Goto. Además, la condición de contorno que impone esta acción se puede reescribir entonces de la forma $\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X'^\mu|_{\sigma=0} = 0$, es decir, de la misma forma que la que impone la acción de Nambu-Goto. Para calcular el hamiltoniano asociado a esta acción es necesario calcular

primero la densidad hamiltoniana que viene dada por

$$\mathcal{H} = \dot{X}^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau - \mathcal{L} = 2\pi\alpha' \mathcal{P}_\mu^\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} - \frac{1}{4\pi\alpha'} (\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu - X'_\mu X'^\mu) = \pi\alpha' \left(\mathcal{P}_\mu^\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'_\mu X'^\mu \right). \quad (6.40)$$

Por lo tanto el hamiltoniano es

$$H = \pi\alpha' \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\mathcal{P}_\mu^\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'_\mu X'^\mu \right). \quad (6.41)$$

7. Campos y Cuantización

En esta sección se va a estudiar cómo se cuantizan algunos de los campos más representativos que esperamos recuperar al cuantizar la cuerda, así como la partícula puntual relativista, de forma que queden sentadas las bases para poder cuantizar la acción de la cuerda propuesta en la sección anterior y para una vez cuantizada la cuerda relativista poder identificar los estados que surgen con los distintos campos que ya se conocen y se quieren recuperar.

7.1. Campo escalar

La formulación de una teoría de campos para un campo escalar ϕ de masa m surge de intentar cuantizar directamente la relación entre masa, energía y momento dada por la ec. (2.12). Para ello se sustituyen en la ecuación los momentos p^μ por $-i\eta^{\mu\nu}\partial_\nu$, de forma que se tiene

$$\mathcal{L} = -\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\eta_{\mu\rho}\partial^\rho\phi - m^2\phi^2 = -\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2. \quad (7.1)$$

En realidad, para que la forma de la densidad lagrangiana coincida con la del lagrangiano clásico no relativista $L = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$, se introduce un factor de $\frac{1}{2}$. Nótese que un factor global no altera las ecuaciones del movimiento. De forma que la acción para un campo escalar resulta en

$$S = \int d^D x \mathcal{L} = \int d^D x \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2} m^2\phi^2 \right). \quad (7.2)$$

Para obtener la densidad hamiltoniana y el hamiltoniano del campo es necesario calcular la densidad de momento

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi. \quad (7.3)$$

De forma que

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (7.4)$$

y

$$H = \int d^d x \mathcal{H} = \int d^d x \left(\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right). \quad (7.5)$$

7.1.1. Soluciones Clásicas

Para obtener las ecuaciones del movimiento para el campo, se iguala a cero la variación de la acción respecto del campo

$$\delta S = \int d^D x \left(-\partial^\mu \phi \partial_\mu (\delta \phi) - m^2 \phi \delta \phi \right) = \int d^D x \left(\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi \right) \delta \phi = 0. \quad (7.6)$$

Definiendo el operador $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$, se obtienen las ecuaciones del movimiento

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = (\partial^2 - m^2) \phi = 0. \quad (7.7)$$

Suponiendo una solución de la forma

$$\phi(x) = a e^{ip \cdot x} = a e^{-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}} = \phi(t, \vec{x}), \quad (7.8)$$

es decir, una onda plana, las ecuaciones del movimiento fijan los posibles valores de E y \vec{p}

$$(\partial^2 - m^2) \phi = (E^2 - \vec{p}^2 - m^2) a e^{-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}} = 0 \implies E = \pm E_p = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (7.9)$$

Esta relación que determina los posibles valores del momento suele denominarse condición *on shell* para la masa o condición *mass-shell*, ya que define una hipersuperficie (o shell en inglés) en el espacio de momentos. Por la linealidad de las ecuaciones del movimiento, una combinación lineal de funciones de la forma ec. (7.8) también es solución. Así, una solución general a las ecuaciones del movimiento vendría dada al superponer ondas planas con todos los posibles momentos p

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \phi(p), \quad (7.10)$$

donde los momentos p satisfacen la condición dada por ec. (7.9) y la función $\phi(p)$ es la transformada de Fourier del campo. Imponiendo que la solución sea real

$$\begin{aligned} 0 = \phi(x) - \phi^*(x) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \phi(p) - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} \phi^*(p) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} (\phi(-p) - \phi^*(p)) \\ &\implies \phi(-p) = \phi^*(p). \end{aligned} \quad (7.11)$$

La última condición es la expresión de la imposición de que el campo sea real en el espacio de momentos. Las ecuaciones del movimiento toman entonces la forma

$$\begin{aligned} (\partial^2 - m^2) \phi(x) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (\partial^2 - m^2) e^{ip \cdot x} \phi(p) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (-p^2 - m^2) e^{ip \cdot x} \phi(p) \\ &\implies (-p^2 - m^2) \phi(p) = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Es decir, para todo valor de p o se cumple la condición de mass-shell o $\phi(p)$ se anula. Como a la hora de resolver las ecuaciones del movimiento de la cuerda relativista se ha hecho uso del sistema

de coordenadas del cono de luz, resultará útil ver la expresión de las ecuaciones del movimiento y sus soluciones en dicho sistema de coordenadas. Las ecuaciones del movimiento se expresan

$$\left(-2\partial_+\partial_- + \partial_I\partial_I - m^2\right)\phi(x) = 0 \quad (7.13)$$

y las soluciones, expresándolas como transformadas de Fourier solamente de las coordenadas espaciales,

$$\phi(x^+, x^-, \vec{x}_T) = \int \frac{dp^+}{2\pi} \int \frac{d^{D-2}\vec{p}_T}{(2\pi)^{D-2}} e^{-ix^-p^+ + i\vec{x}_T \cdot \vec{p}_T} \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T). \quad (7.14)$$

Nótese que solamente se ha realizado la transformada de Fourier en las coordenadas espaciales. Esto se hace con el objetivo de obtener una ecuación del movimiento para el campo que tenga la forma de una ecuación de Schrödinger. La condición ec. (7.12) en estas coordenadas toma la forma

$$(2i\partial_+(p^+) - \vec{p}_T^2 - m^2)\phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) = 0. \quad (7.15)$$

Haciendo uso de

$$0 = p^2 + m^2 = -2p^+p^- + p^L p^L \implies p^- = \frac{1}{2p^+} p^L p^L \quad (7.16)$$

y reescalando la coordenada $\tau = \frac{m^2}{p^+} x^+$, la ec. (7.15) se reescribe

$$(i\partial_\tau - \frac{1}{2m^2}(p^L p^L + m^2))\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0. \quad (7.17)$$

7.1.2. Cuantización

Para cuantizar este campo se va a partir de la siguiente configuración clásica

$$\phi_p(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a^*(t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right). \quad (7.18)$$

La dependencia temporal $e^{-iE_p t}$ se ha sustituido por una más general introduciendo la función $a(t)$. También se ha introducido un factor de normalización $\frac{1}{\sqrt{V}}$, donde V es el volumen en el que el campo está definido. Por simplicidad se va a tomar este volumen como un hipercubo de lados L_i , de forma que $V = L_1 \dots L_d$. El confinamiento del campo a este volumen induce unas condiciones de periodicidad que se imponen mediante

$$L_i p_i = 2\pi n_i, \quad \text{con } n_i \in \mathbb{Z}. \quad (7.19)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(\partial_0\phi_p)^2 &= \frac{1}{V2E_p} \left(\dot{a}^2 e^{2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + (\dot{a}^*)^2 e^{-2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + 2\dot{a}\dot{a}^* \right) \\(\partial_j\phi_p)^2 &= -\frac{1}{V2E_p} p_j^2 \left(a^2 e^{2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + (a^*)^2 e^{-2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + 2aa^* \right) \\ \phi_p^2 &= \frac{1}{V2E_p} \left(a^2 e^{2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + (a^*)^2 e^{-2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + 2aa^* \right)\end{aligned}\tag{7.20}$$

y que las integrales espaciales de los términos proporcionales a $e^{\pm 2i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ se anulan ya que

$$\int_0^{L_i} dx^i e^{\pm 2i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{\pm 2ip_i} e^{\pm 2i\vec{p}\cdot\vec{x}} \Big|_0^{L_i} = 0,\tag{7.21}$$

se evalua la acción dada en ec. (7.2) para esta configuración del campo

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \int dt \int d^d x \left((\partial_0\phi_p)^2 - (\partial_j\phi_p)^2 - m^2\phi_p^2 \right) = \frac{1}{2} \int dt \frac{1}{2E_p} \left(2\dot{a}\dot{a}^* + 2aa^*(-\vec{p}^2 - m^2) \right) \\ &= \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}\dot{a}^* - \frac{E_p}{2} aa^* \right).\end{aligned}\tag{7.22}$$

De forma que $L = \frac{1}{2E_p} \dot{a}\dot{a}^* - \frac{E_p}{2} aa^*$. Calculando los momentos canónicos asociados

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{1}{2E_p} \dot{a}^* \quad y \quad p_{a^*} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}^*} = \frac{1}{2E_p} \dot{a},\tag{7.23}$$

se obtiene el hamiltoniano

$$H = p_a \dot{a} + p_{a^*} \dot{a}^* - L = \frac{1}{2E_p} \dot{a}\dot{a}^* + \frac{E_p}{2} aa^*.\tag{7.24}$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}^*} \right) = \frac{\partial L}{\partial a^*} \implies \frac{1}{2E_p} \ddot{a} = -\frac{E_p}{2} a \implies \ddot{a} = -E_p^2 a.\tag{7.25}$$

Esta ecuación se resuelve por $a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t}$, donde a_p y a_{-p}^* son constantes arbitrarias. Así

$$\begin{aligned}H &= \frac{E_p}{2} \left(a_p a_p^* + a_{-p} a_{-p}^* - a_{-p}^* a_p^* e^{2iE_p t} - a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} + a_p a_p^* + a_{-p} a_{-p}^* + a_{-p}^* a_p^* e^{2iE_p t} + a_{-p} a_p e^{-2iE_p t} \right) \\ &= E_p (a_p a_p^* + a_{-p} a_{-p}^*).\end{aligned}\tag{7.26}$$

De forma que el hamiltoniano es constante, es decir, la energía se conserva. Particularizando ec. (2.44) y ec. (2.45), se tiene que el momento total del campo viene dado por

$$\mathcal{P}_j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \partial_j \phi - \delta_j^0 \mathcal{L} = -\partial_0 \phi \partial_j \phi\tag{7.27}$$

y

$$\vec{P} = - \int d^d x \partial_0 \phi \nabla \phi. \quad (7.28)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \partial_0 \phi_p &= \frac{iE_p}{\sqrt{V2E_p}} \left[(-a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + (a_p^* e^{iE_p t} - a_{-p} e^{-iE_p t}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right] \\ \partial_j \phi_p &= \frac{ip_j}{\sqrt{V2E_p}} \left[(a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - (a_p^* e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right], \end{aligned} \quad (7.29)$$

se puede reexpresar el momento total (se han ignorado los términos proporcionales a $e^{\pm 2i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ ya que su integral se anula)

$$\vec{P} = - \int d^d x \frac{i^2 E_p \vec{p}}{V E_p} (a_p a_p^* - a_{-p} a_{-p}^*) = \vec{p} (a_p a_p^* - a_{-p} a_{-p}^*). \quad (7.30)$$

Por la forma del hamiltoniano ec. (7.26) (tiene la forma del hamiltoniano de un oscilador armónico $H \propto a^* a$), la cuantización se lleva a cabo elevando a_p y a_p^* a operadores a_p y a_p^\dagger e imponiendo las siguientes relaciones de conmutación canónicas

$$[a_p, a_p^\dagger] = [a_{-p}, a_{-p}^\dagger] = 1 \quad (7.31)$$

y cualquier conmutador con un operador con subíndice p y otro operador con subíndice $-p$ se anula. De forma que los únicos conmutadores no nulos son

$$[a, \dot{a}^\dagger] = [a^\dagger, \dot{a}] = 2iE_p. \quad (7.32)$$

Los operadores hamiltoniano y momento toman entonces la forma

$$H = E_p (a_p^\dagger a_p + a_{-p}^\dagger a_{-p}) \quad \text{y} \quad \vec{P} = \vec{p} (a_p^\dagger a_p - a_{-p}^\dagger a_{-p}). \quad (7.33)$$

Si se considera un estado más general

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}), \quad (7.34)$$

las relaciones de conmutación son la generalización inmediata de la ec. (7.31) dadas por

$$[a_p, a_q^\dagger] = \delta_{pq} \quad \text{y} \quad [a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0. \quad (7.35)$$

Los operadores a_p y a_p^\dagger reciben los nombres de operadores de aniquilación y creación respectivamente. Considerando el momento canónico asociado al campo

$$\Pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{iE_p}{\sqrt{2E_p}} (-a_p e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}), \quad (7.36)$$

las reglas de conmutación entre los operadores a_p y a_q^\dagger inducen la siguiente relación de conmutación entre el campo y su momento asociado

$$\begin{aligned}
[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{x}')] &= \frac{i}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \left[a_p e^{-iE_p t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}}, -a_q e^{-iE_q t + i\vec{q} \cdot \vec{x}'} + a_q^\dagger e^{+iE_q t - i\vec{q} \cdot \vec{x}'} \right] \\
&= \frac{i}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \left([a_p, a_q^\dagger] e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{x}')} - [a_p^\dagger, a_q] e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{x}')} \right) \\
&= \frac{i}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \left(\delta_{pq} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{x}')} - (-\delta_{pq}) e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \vec{q} \cdot \vec{x}')} \right) \\
&= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} + \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \right) = \frac{i}{2} (\delta^d(\vec{x} - \vec{x}') + \delta^d(\vec{x} - \vec{x}')) = i\delta^d(\vec{x} - \vec{x}').
\end{aligned} \tag{7.37}$$

La expresión correcta de los operadores H y \vec{P} es también la generalización de la ec. (7.33)

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p a_p^\dagger a_p \quad y \quad \vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_p^\dagger a_p. \tag{7.38}$$

El espacio de los posibles estados se construye suponiendo la existencia de un estado de mínima energía o de vacío $|\Omega\rangle$ tal que $a_p |\Omega\rangle = 0$ para todo \vec{p} . Esto implica que $H |\Omega\rangle = 0$. El estado de vacío se interpreta como un estado sin partículas. Los estados $a_p^\dagger |\Omega\rangle$ se interpretan como estados que representan una partícula de momento \vec{p} y energía E_p ya que, haciendo uso de $a_q a_k^\dagger = a_k^\dagger a_q + \delta_{qk}$, se tiene

$$\vec{P} a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_q^\dagger a_q a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_q^\dagger [a_q a_p^\dagger] |\Omega\rangle = \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_q^\dagger \delta_{qp} |\Omega\rangle = \vec{p} a_p^\dagger |\Omega\rangle \tag{7.39}$$

y

$$H a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{q}} E_q a_q^\dagger a_q a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{q}} E_q a_q^\dagger [a_q a_p^\dagger] |\Omega\rangle = \sum_{\vec{q}} E_q a_q^\dagger \delta_{qp} |\Omega\rangle = E_p a_p^\dagger |\Omega\rangle. \tag{7.40}$$

Así, un estado de la forma $a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_n}^\dagger |\Omega\rangle$ representa n partículas con momentos $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ y energías E_{p_1}, \dots, E_{p_n} . Veamos con detalle el caso $n = 2$, ya que el caso general se sigue por inducción.

$$\begin{aligned}
\vec{P} a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle &= \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_q^\dagger a_q a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_q^\dagger (a_{p_1}^\dagger a_q a_{p_2}^\dagger + \delta_{qp_1} a_{p_2}^\dagger) |\Omega\rangle \\
&= \vec{p}_1 a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle + \sum_{\vec{q}} \vec{q} a_q^\dagger a_{p_1}^\dagger (a_{p_2}^\dagger a_q + \delta_{qp_2}) |\Omega\rangle = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle
\end{aligned} \tag{7.41}$$

$H a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle$ se calcula exactamente igual sustituyendo E_q por \vec{q} en la ecuación anterior, obteniéndose así $H a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle = (E_1 + E_2) a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle$. En general un operador de la forma $\sum_{\vec{p}} f(p) a_p^\dagger a_p$ actuando sobre un estado de n partículas devuelve el valor propio $\sum_{j=1}^n f(p_j)$. De forma que el operador $N = \sum_{\vec{p}} a_p^\dagger a_p$ actuando sobre un estado de n partículas devuelve el valor propio $\sum_{j=1}^n 1 = n$,

es decir, cuenta el número de partículas del estado. Particularizando todo esto al caso en el que se trabaje con coordenadas del cono de luz, los estados vendrán descritos por los momentos \vec{p}_T y p^+ , es decir, $a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle$ y los operadores que se usarán serán

$$\begin{aligned} P^+ &= \sum_{p^+, \vec{p}_T} p^+ a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{p}_T}, \\ P^I &= \sum_{p^+, \vec{p}_T} p^I a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{p}_T} \\ \text{y } P^- &= \sum_{p^+, \vec{p}_T} \frac{1}{2p^+} (\vec{p}_T^2 + m^2) a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{p}_T}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

7.2. Campo electromagnético

En este apartado se va estudiar cómo cuantizar el campo electromagnético en el caso de ausencia de cargas. Para ello se parte de la ec. (3.23) que dicta la dinámica del campo clásico. Expresando las componentes del potencial como transformadas de Fourier

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} A^\mu(p), \quad (7.43)$$

imponer que el campo $A^\mu(x)$ sea real equivale a que $A^\mu(-p) = (A^\mu(p))^*$. Sustituyendo la transformada de Fourier en la ecuación del movimiento se tiene

$$\begin{aligned} \partial^2 A^\mu(x) - \partial^\mu (\partial \cdot A(x)) = 0 &\implies - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} (p^2 A^\mu(p) - p^\mu (p \cdot A(p))) = 0 \\ &\implies p^2 A^\mu(p) - p^\mu (p \cdot A(p)) = 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

La transformación gauge dada en ec. (3.17), se puede expresar en el espacio de momentos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \delta A_\mu(p) = \delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x) = \partial_\mu \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \epsilon(p) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} i p_\mu \epsilon(p) \\ \implies \delta A_\mu(p) = i p_\mu \epsilon(p). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Haciendo uso del gauge del cono de luz, se cumple que $p^+ \neq 0$, por lo tanto se puede escoger $\epsilon(p)$ tal que

$$A'^+(p) = A^+(p) + i p^+ \epsilon(p) = 0, \implies \epsilon(p) = i \frac{A^+}{p^+}. \quad (7.46)$$

Es decir, siempre se puede escoger el parámetro gauge $\epsilon(p)$ de forma que $A^+(p) = 0$. Esta será a partir de ahora la condición gauge del cono de luz para el campo electromagnético. Este gauge permite simplificar la ec. (7.44), en particular tomando $\mu = +$ se tiene

$$p^2 A^+ - p^+ (p \cdot A) = -p^+ (p \cdot A) = 0 \implies p \cdot A = 0. \quad (7.47)$$

Esto permite escribir A^- en función de los A^I ya que

$$0 = p \cdot A = -p^+ A^- - p^- A^+ + p^I A^I \implies A^- = \frac{1}{p^+} p^I A^I. \quad (7.48)$$

De forma que haciendo uso del gauge del cono de luz se han reducido los grados de libertad de D a $D - 2$. Teniendo en cuenta la condición dada por la ec. (7.47), la ec. (7.44) toma la forma

$$p^2 A^\mu = 0. \quad (7.49)$$

$\mu = +$ la satisface ya que $A^+ = 0$. Para $\mu = I$ implica que si p^2 no se anula, los A^I se deben anular. Para $\mu = -$ se satisface ya que $p^2 A^- = p^2 \frac{1}{p^+} p^I A^I$, que se anula por el caso anterior. En resumen, si $p^2 \neq 0$ todos los $A^\mu = 0$ y si $p^2 = 0$ todos los A^I no tienen restricciones, $A^+ = 0$ y $A^- = \frac{1}{p^+} p^I A^I$. Para cuantizar este campo, de forma análoga al caso del campo escalar, se introducen operadores de creación y aniquilación $a_p^{I\dagger}$ y a_p^I para cada uno de los grados de libertad. Por lo que, suponiendo la existencia de un estado de vacío $|\Omega\rangle$, un estado fotónico general tiene la forma

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_p^{I\dagger} |\Omega\rangle, \quad (7.50)$$

donde ξ_I es un vector llamado vector de polarización. Este estado representa un fotón polarizado en la dirección ξ_I . Hay, por lo tanto, $D - 2$ estados fotónicos linealmente independientes.

7.3. Campo gravitacional

Recordamos que en el límite de campo débil y en ausencia de cargas la métrica se puede expresar como $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$, con $h_{\mu\nu}^2(x) \approx 0$ y las ecuaciones del movimiento vienen dadas por la ec. (3.31). Expresando las $h_{\mu\nu}(x)$ como sus transformadas de Fourier, las ecuaciones del movimiento se expresan como

$$S^{\mu\nu}(p) = p^2 h^{\mu\nu}(p) - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha}(p) + p^\nu h^{\mu\alpha}(p)) + p^\mu p^\nu h(p) = 0, \quad (7.51)$$

donde $h(p) = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}(p)$. Veamos que $S^{\mu\nu}$ es invariante bajo las transformaciones gauge dadas por $\delta h^{\mu\nu}(p) = i(p^\mu \epsilon^\nu + p^\nu \epsilon^\mu)$. Para ello calculemos primero δh

$$\delta h = \eta_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} i(p^\mu \epsilon^\nu + p^\nu \epsilon^\mu) = 2ip \cdot \epsilon. \quad (7.52)$$

De forma que

$$\begin{aligned} \delta S^{\mu\nu} &= p^2 \delta h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu \delta h^{\nu\alpha} + p^\nu \delta h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu \delta h \\ &= p^2 i(p^\mu \epsilon^\nu + p^\nu \epsilon^\mu) - ip_\alpha (p^\mu (p^\nu \epsilon^\alpha + p^\alpha \epsilon^\nu) + p^\nu (p^\mu \epsilon^\alpha + p^\alpha \epsilon^\mu)) + 2ip^\mu p^\nu p \cdot \epsilon \\ &= i(p^2 p^\mu \epsilon^\nu + p^2 p^\nu \epsilon^\mu + 2p^\mu p^\nu p \cdot \epsilon) - i(p^\mu p^\nu p \cdot \epsilon + p^\nu p^\mu p \cdot \epsilon + p^2 p^\mu \epsilon^\nu + p^2 p^\nu \epsilon^\mu) = 0 \end{aligned} \quad (7.53)$$

De forma análoga a como en el apartado anterior se escogió el gauge tal que $A^+(p) = 0$, se va a escoger ahora el gauge de forma que $h_{\mu\nu}(p) = 0$ para cualquier combinación de índices en la que al

menos uno de ellos sea $+$. Examinando las variaciones de las distintas componentes con un índice $+$

$$\begin{aligned}\delta h^{++} &= 2ip^+\epsilon^+ \\ \delta h^{+-} &= ip^+\epsilon^- + ip^-\epsilon^+ \\ \delta h^{+I} &= ip^+\epsilon^I + ip^I\epsilon^+.\end{aligned}\tag{7.54}$$

Por lo tanto, ϵ^+ se puede fijar de forma que $h^{++} = 0$, ϵ^- de forma que $h^{+-} = 0$ y el resto de los ϵ^I de forma que $h^{+I} = 0$. Esta es la condición gauge del cono de luz para el campo gravitacional. Esto fija todos los valores de ϵ^μ . De forma que los grados de libertad restantes son las componentes h^{--} , h^{-I} y h^{IJ} . Volviendo ahora a la ec. (7.51), tomando los índices $\mu = \nu = +$

$$S^{++} = p^+p^+h = 0 \xrightarrow{(p^+ \neq 0)} h = -2h^{+-} + h^{II} = h^{II} = 0.\tag{7.55}$$

Tomando ahora $\mu = +$ y ν arbitrario

$$S^{+\nu} = p^2h^{+\nu} - p_\alpha(p^+h^{\nu\alpha}(p) + p^\nu h^{+\alpha}(p)) = -p_\alpha p^+h^{\nu\alpha} = 0 \xrightarrow{(p^+ \neq 0)} p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0.\tag{7.56}$$

Estas dos condiciones simplifican las ecuaciones del movimiento aún más a

$$S^{\mu\nu} = p^2h^{\mu\nu} = 0.\tag{7.57}$$

La condición ec. (7.56) permite expresar $h^{-\nu}$ en función de las h^{LJ} ya que

$$0 = p_\alpha h^{L\alpha} = -p^-h^{L+} - p^+h^{L-} + p_J h^{LJ} \implies h^{L-} = \frac{1}{p^+} p_J h^{LJ}\tag{7.58}$$

y

$$0 = p_\alpha h^{-\alpha} = -p^+h^{--} - p^-h^{+-} + p_J h^{-J} \implies h^{--} = \frac{1}{p^+} p_J h^{-J} = \frac{1}{p^+} p_J p_K h^{JK}.\tag{7.59}$$

El resultado final se resume, de forma análoga al caso del campo electromagnético, a h^{IJ} arbitrarios siempre que $p^2 = 0$. Como una matriz simétrica $m \times m$ tiene $\frac{1}{2}m(m+1)$ componentes independientes, hay $\frac{1}{2}(D-2)(D-1)$ componentes h^{IJ} , pero como deben cumplir la condición $h^{II} = 0$, los grados de libertad se reducen a $\frac{1}{2}(D-2)(D-1) - 1 = \frac{1}{2}(D^2 - 3D + 2) - 1 = \frac{1}{2}D(D-3)$. Como es ya usual, para cuantizar este campo se introducen los operadores de creación y aniquilación $a_p^{IJ\dagger}$ y a_p^{IJ} y se supone la existencia de un estado de vacío $|\Omega\rangle$ de forma que el estado general de un gravitón es

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_p^{IJ\dagger} |\Omega\rangle,\tag{7.60}$$

donde ξ_{IJ} es un tensor simétrico tal que $\xi_{II} = 0$. Por lo tanto, considerando el número de componentes independientes de ξ_{IJ} , hay $\frac{1}{2}D(D-3)$ estados de gravitones linealmente independientes.

7.4. Campo de Kalb-Ramond

El campo de Kalb-Ramond es un hipotético campo que surge en las distintas teorías de cuerdas. En este apartado se va a estudiar su comportamiento, ya que al cuantizar la cuerda relativista aparecerán estados que representan la cuantización de este campo. El campo de Kalb-Ramond viene representado por un tensor $B_{\mu\nu}$ antisimétrico. De forma similar a como se hace con el campo electromagnético, se define la intensidad de este campo como

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}. \quad (7.61)$$

Haciendo uso de la antisimetría de $B_{\mu\nu}$, es fácil comprobar que esta intensidad del campo, $H_{\mu\nu\rho}$, es totalmente antisimétrica. Veamos que $H_{\mu\nu\rho}$ es invariante bajo la transformación gauge $\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu$

$$\delta H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu (\partial_\nu \epsilon_\rho - \partial_\rho \epsilon_\nu) + \partial_\nu (\partial_\rho \epsilon_\mu - \partial_\mu \epsilon_\rho) + \partial_\rho (\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu) = 0. \quad (7.62)$$

Estas transformaciones gauge son particulares ya que los parámetros que las generan tienen al mismo tiempo una invariancia gauge. En particular, veamos que $\epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + \partial_\mu \lambda$ genera la misma transformación que ϵ_μ

$$\delta B'_{\mu\nu} = \partial_\mu (\epsilon_\nu + \partial_\nu \lambda) - \partial_\nu (\epsilon_\mu + \partial_\mu \lambda) = \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu = \delta B_{\mu\nu}. \quad (7.63)$$

Esto permite tomar $\epsilon^+ = 0$ ya que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \epsilon'^\mu(p) &= \epsilon'^\mu(x) = \epsilon^\mu + \partial^\mu \lambda(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} (\epsilon^\mu(p) + ip^\mu \lambda(p)) \\ \implies \epsilon'^\mu(p) &= \epsilon^\mu(p) + ip^\mu \lambda(p) \end{aligned} \quad (7.64)$$

y por lo tanto se puede tomar $\lambda(p) = i \frac{\epsilon^+}{p^+}$ de forma que $\epsilon'^+ = 0$. Por lo tanto la simetría gauge del campo de Kalb-Ramond está generada de manera efectiva por las componentes ϵ^- y ϵ^I . Para obtener las ecuaciones del movimiento para el campo, se asume que la acción para el mismo es la generalización de la del campo electromagnético

$$S \propto \int d^D x \left(-\frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right). \quad (7.65)$$

Dada una variación del campo $\delta B_{\mu\nu}$, la variación de la acción viene dada por

$$\begin{aligned} \delta S &\propto -\frac{1}{6} \int d^D x (\delta H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + H_{\mu\nu\rho} \delta H^{\mu\nu\rho}) = -\frac{1}{3} \int d^D x H^{\mu\nu\rho} \delta H_{\mu\nu\rho} \\ &= -\frac{1}{3} \int d^D x (\partial^\mu B^{\nu\rho} + \partial^\nu B^{\rho\mu} + \partial^\rho B^{\mu\nu}) (\partial_\mu (\delta B_{\nu\rho}) + \partial_\nu \delta (B_{\rho\mu}) + \partial_\rho (\delta B_{\mu\nu})) \\ &= - \int d^D x (\partial^\mu B^{\nu\rho} + \partial^\nu B^{\rho\mu} + \partial^\rho B^{\mu\nu}) \partial_\mu (\delta B_{\nu\rho}) \\ &= \int d^D x \partial_\mu (\partial^\mu B^{\nu\rho} + \partial^\nu B^{\rho\mu} + \partial^\rho B^{\mu\nu}) \delta B_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (7.66)$$

Para encontrar las ecuaciones del movimiento, basta con igualar a cero el término que multiplica a la variación en la última igualdad

$$0 = \partial_\mu (\partial^\mu B^{\nu\rho} + \partial^\nu B^{\rho\mu} + \partial^\rho B^{\mu\nu}) = \partial_\mu H^{\mu\nu\rho}. \quad (7.67)$$

Que, de nuevo, es la generalización de las ecuaciones del movimiento para el campo electromagnético en ausencia de cargas ($\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$). Como se ha discutido anteriormente, ϵ^+ ya está fijado. El resto de las componentes se escogen de forma que ϵ^- haga que $B^{+-} = 0$ y ϵ^I de forma que $B^{+I} = 0$. Este será el gauge del cono de luz para el campo de Kalb-Ramond. Veamos como, una vez expresadas en el espacio de momentos, este gauge permite simplificar las ecuaciones del movimiento notablemente. Expresando la ec. (7.67) en el espacio de momentos se tiene

$$p^2 B^{\nu\rho} + p_\mu p^\nu B^{\rho\mu} + p_\mu p^\rho B^{\mu\nu} = 0. \quad (7.68)$$

Tomando $\nu = +$

$$p^2 B^{+\rho} + p_\mu p^+ B^{\rho\mu} + p_\mu p^\rho B^{\mu+} = p_\mu p^+ B^{\rho\mu} = 0 \implies p_\mu B^{\rho\mu} = 0 \implies B^{\rho-} = \frac{1}{p^+} p_J B^{\rho J}. \quad (7.69)$$

Lo que permite simplificar las ecuaciones del movimiento a

$$p^2 B^{\mu\nu} = 0. \quad (7.70)$$

De manera análoga a los casos anteriores, se tiene que siempre que $p^2 = 0$, las componentes de $B^{\mu\nu}$ son arbitrarias. Teniendo en cuenta el gauge escogido y la relación ec. (7.69), los grados de libertad del campo son los de un tensor antisimétrico con dos índices que toman $(D-2)$ valores, es decir, $\frac{1}{2}(D-2)(D-3)$. Para cuantizar este campo se introducen operadores de aniquilación y destrucción a_p^{IJ} y $a_p^{IJ\dagger}$ que actúan sobre un estado de vacío $|\Omega\rangle$, de forma que un estado general representando una excitación de este campo viene dado por

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_p^{IJ\dagger} |\Omega\rangle, \quad (7.71)$$

donde ξ_{IJ} es un tensor antisimétrico. Esto implica que hay $\frac{1}{2}(D-2)(D-3)$ excitaciones linealmente independientes del campo.

7.5. Partícula puntual

Para cuantizar la partícula puntual relativista descrita por la acción dada en ec. (4.1) de manera similar a como se ha hecho con los campos, primero se va a establecer el gauge del cono de luz para dicha acción para así obtenerse los grados de libertad con los que trabajar.

7.5.1. Soluciones clásicas

Primero resulta útil reescribir la acción como

$$S = \int d\tau L, \quad \text{con } L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}, \quad (7.72)$$

de forma que los momentos se pueden obtener como

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}. \quad (7.73)$$

Claramente se tiene entonces que

$$p^2 + m^2 = p_\mu p^\mu + m^2 = m^2 \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{(\sqrt{-\dot{x}^2})^2} + m^2 = 0. \quad (7.74)$$

Se toma el gauge del cono de luz para la partícula puntual de forma que

$$x^+ = \frac{p^+}{m^2} \tau. \quad (7.75)$$

Nótese que esta elección de τ hace que sea adimensional. La componente $+$ de la ec. (7.73) en este gauge toma la expresión

$$p^+ = m \frac{\dot{x}^+}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = \frac{p^+}{m\sqrt{-\dot{x}^2}} \implies \dot{x}^2 = -\frac{1}{m^2}. \quad (7.76)$$

Esto permite simplificar los momentos

$$p^\mu = m^2 \dot{x}^\mu, \quad (7.77)$$

de forma que las ecuaciones del movimiento $\dot{p}^\mu = 0$ se traducen en

$$\ddot{x}^\mu = 0. \quad (7.78)$$

Por lo tanto las soluciones clásicas a las ecuaciones del movimiento son, salvo para x^+ que ya ha quedado fijada,

$$x^\mu = x_0^\mu + \tau \frac{p^\mu}{m^2}, \quad (7.79)$$

donde x_0^μ son constantes de integración. La ec. (7.74) permite expresar p^- en función del resto de las componentes del momento

$$0 = p^2 + m^2 = -2p^+ p^- + p^I p^I + m^2 \implies p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2). \quad (7.80)$$

Por lo tanto, las variables que realmente representan grados de libertad son x^I , x_0^- , p^I y p^+ .

7.5.2. Cuantización

Para cuantizar la partícula puntual relativista se elevan a operadores las variables que representan grados de libertad mencionadas previamente y se les imponen reglas de conmutación canónicas,

es decir,

$$[x^I, p^J] = i\eta^{IJ} = i\delta^{IJ} \quad \text{y} \quad [x_0^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i. \quad (7.81)$$

Todos los conmutadores que no se han expresado explícitamente se toman nulos. Estas relaciones de conmutación se han impuesto para los operadores en la imagen de Schrödinger, sin embargo, los operadores en la imagen de Heisenberg obedecen las mismas reglas de conmutación

$$[x^I(\tau), p^J(\tau)] = i\eta^{IJ} = i\delta^{IJ} \quad \text{y} \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i. \quad (7.82)$$

El resto de operadores se definen a partir de estos siguiendo las ecuaciones clásicas

$$x^+(\tau) = \frac{\tau}{m^2} p^+, \quad (7.83)$$

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \quad (7.84)$$

$$p^-(\tau) = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2). \quad (7.85)$$

Como p^- es la energía del cono del luz, se espera que genere la evolución de x^+ . Sin embargo, lo que buscamos es evolución del parámetro τ . Esto se resuelve fácilmente ya que la relación $x^+ = \frac{p^+}{m^2} \tau$ implica que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{p^+}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^+}. \quad (7.86)$$

Por lo tanto el generador de la evolución de τ será $\frac{p^+ p^-}{m^2}$, es decir, se postula que el hamiltoniano es

$$H = \frac{p^+(\tau) p^-(\tau)}{m^2} = \frac{1}{2m^2} (p^I(\tau) p^I(\tau) + m^2). \quad (7.87)$$

Como $[p^+(\tau), H] = [p^I(\tau), H] = 0$, se tiene que todos los operadores de momento p^I , p^+ y p^- son constantes. Para comprobar realmente que el hamiltoniano propuesto es el adecuado, vamos a ver si reproduce las ecuaciones del movimiento para los operadores $x^\mu(\tau)$.

$$i \frac{dx^I}{d\tau} = [x^I, H] = \frac{1}{2m^2} [x^I, p^L p^L] = \frac{1}{2m^2} (p^L [x^I, p^L] + [x^I, p^L] p^L) = \frac{1}{2m^2} 2p^L i\eta^{IL} = i \frac{p^I}{m^2}, \quad (7.88)$$

que concuerda con las soluciones clásicas y permite escribir

$$x^I = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau. \quad (7.89)$$

Por otro lado

$$i \frac{dx_0^-}{d\tau} = [x_0^-, H] = \frac{1}{2m^2} [x_0^-, p^L p^L] = 0 \implies x_0^-(\tau) = x_0^- \text{ constante.} \quad (7.90)$$

De forma que

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau \text{ y } \frac{dx^-}{d\tau} = \frac{p^-}{m^2}. \quad (7.91)$$

Por lo tanto el hamiltoniano propuesto es el correcto. Debido a las reglas de conmutación que satisfacen los operadores, un conjunto completo de operadores compatibles se consigue al escoger un operador de cada pareja (x^-, p^+) y (x^I, p^I) . Como es usual trabajar en el espacio de momentos se toma el conjunto completo de operadores compatibles dado por los momentos p^+ y p^I , de forma que un estado propio viene dado por

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (7.92)$$

El hamiltoniano actuando sobre estos estados da

$$H |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2) |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (7.93)$$

Por lo tanto los estados

$$\exp(-i\tau \frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2)) |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (7.94)$$

dependientes del tiempo satisfacen la ecuación de Schrödinger. Un estado general vendrá dado por una superposición arbitraria de estados de este tipo

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (7.95)$$

La función $\Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ es la proyección del estado $|\Psi, \tau\rangle$ en la base dual $\langle p^+, \vec{p}_T|$ de los $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ definida de forma que

$$\langle q^+, \vec{q}_T | p^+, \vec{p}_T \rangle = \delta(q^+ - p^+) \delta(\vec{q}_T - \vec{p}_T). \quad (7.96)$$

Es decir,

$$\Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau \rangle. \quad (7.97)$$

Veamos cómo se expresa la ecuación de Schrödinger para este estado general

$$\begin{aligned} i\partial_\tau |\Psi, \tau\rangle &= H |\Psi, \tau\rangle \implies \\ \int dp^+ d\vec{p}_T i\partial_\tau \Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle &= \int dp^+ d\vec{p}_T \Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) H |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= \int dp^+ d\vec{p}_T \left(\frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2) \right) \Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle \implies \\ i\partial_\tau \Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) &= \left(\frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2) \right) \Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T). \end{aligned} \quad (7.98)$$

Esto permite, de manera natural, identificar los estados de la partícula puntual cuantizada y los del campo escalar. Esto se hace identificando cada estado $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ con el estado $a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle$ e identificando $\Psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ con $\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$, ya que la ec. (7.98) es igual a la ecuación del movimiento del campo ϕ expresada en el espacio de momentos usando el gauge del cono de luz (ec. (7.17)).

7.5.3. Operadores momento y generadores Lorentz

Como el lagrangiano $L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}$ no depende de x^μ , es invariante bajo traslaciones infinitesimales $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$, con ϵ^μ constantes. Se tienen por lo tanto las cargas conservadas

$$\epsilon^\mu Q_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu = p_\mu \epsilon^\mu \implies Q_\mu = p_\mu. \quad (7.99)$$

Es decir, los momentos p^μ son las cargas conservadas asociadas a traslaciones del espacio-tiempo. Al trabajar con los operadores en la cuantización covariante de la teoría, los operadores de momento generan la propia traslación. Sin embargo, como la cuantización que se ha llevado a cabo ha sido con el gauge del cono de luz, no es manifiestamente invariante Lorentz por lo que no es tan inmediato comprobar esto. Aun así, si nos restringimos a las componentes p^I , sí que se cumple que p^μ generan una traslación ϵ^μ ya que tomando ϵ^μ tal que $\epsilon^+ = \epsilon^- = 0$

$$\delta x^J = [i\epsilon^\mu p_\mu, x^J] = i\epsilon^I [p^I, x^J] = i\epsilon^I (-i\delta^{IJ}) = \epsilon^J. \quad (7.100)$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \delta x^+ &= [i\epsilon^\mu p_\mu, x^+] = i\epsilon^I [p^I, \frac{p^+}{m^2}\tau] = 0, \\ \delta x^- &= [i\epsilon^\mu p_\mu, x^-] = i\epsilon^I [p^I, x_0^- + \frac{1}{2m^2 p^+} (p^L p^L + m^2)\tau] = 0. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Por otro lado, vamos a comprobar cómo tomando $\epsilon^+ \neq 0$ y $\epsilon^- = \epsilon^I = 0$, la transformación que se obtiene no es la esperada.

$$\delta x^+ = [i\epsilon^\mu p_\mu, x^+] = -i\epsilon^+ [p^-, \frac{p^+}{m^2}\tau] = 0. \quad (7.102)$$

Lo que esperábamos que generara una traslación en la coordenada x^+ la deja invariante, mientras que sí que cambia las demás.

$$\delta x^I = -i\epsilon^+ [p^-, x^I] = -i\epsilon^+ [\frac{1}{2p^+} (p^L p^L + m^2), x^I] = -i\epsilon^+ \frac{p^L}{p^+} [p^L, x^I] = -\epsilon^+ \frac{p^I}{p^+}. \quad (7.103)$$

Para calcular δx^- es necesario calcular primero $[x_0^-, \frac{1}{p^+}]$

$$\begin{aligned} [x_0^-, \frac{1}{p^+}] &= x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- = \frac{1}{p^+} p^+ x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- p^+ \frac{1}{p^+} \\ &= \frac{1}{p^+} [p^+, x_0^-] \frac{1}{p^+} = \frac{1}{p^+} i \frac{1}{p^+} = \frac{i}{(p^+)^2}, \end{aligned} \quad (7.104)$$

de forma que

$$\begin{aligned}\delta x^- &= -i\epsilon^+[p^-, x^-] = -i\epsilon^+[p^-, x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau] = -i\epsilon^+[\frac{1}{2p^+}(p^J p^J + m^2), x_0^-] \\ &= -i\epsilon^+\frac{1}{2}(p^J p^J + m^2)[\frac{1}{p^+}, x_0^-] = -i\epsilon^+\frac{1}{2}(p^J p^J + m^2)\frac{-i}{(p^+)^2} = -\epsilon^+\frac{p^-}{p^+}.\end{aligned}\quad (7.105)$$

Por lo que p^- genera una reparametrización y una traslación simultáneamente: la reparametrización afecta a todas las coordenadas y la traslación de la coordenada x^+ es tal que compensa la reparametrización haciendo que $\delta x^+ = 0$. Veamos cómo surge esta simetría. Considerando la reparametrización $\tau' = \tau + \lambda(\tau)$, con λ infinitesimal, se tiene que $\delta x^\mu = \lambda\partial_\tau x^\mu = \lambda\dot{x}^\mu$ y por lo tanto $\delta\dot{x}^\mu = \partial_\tau(\lambda\dot{x}^\mu) = \dot{\lambda}\dot{x}^\mu + \lambda\ddot{x}^\mu = \dot{\lambda}\dot{x}^\mu$. La variación del lagrangiano viene dada entonces por

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\delta\dot{x}^\mu = \partial_\tau\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right)\dot{x}^\mu\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{\lambda}\dot{x}^\mu \\ &= \partial_\tau\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu\right)\lambda - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\ddot{x}^\mu\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{\lambda}\dot{x}^\mu = \partial_\tau\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu\right)\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{\lambda}\dot{x}^\mu = \partial_\tau\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu\lambda\right).\end{aligned}\quad (7.106)$$

Como se trata de una derivada total, según se vio en la sección 2.2, se considera que la parametrización es una simetría del lagrangiano. Considerando al mismo tiempo una traslación $x^+ \rightarrow x^+ + \epsilon^+$ de forma que el efecto global sea el de dejar x^+ invariante implica que

$$0 = \delta x^+ = \epsilon^+ + \lambda\dot{x}^+ = \epsilon^+ + \lambda\frac{p^+}{m^2} \implies \lambda = -\epsilon^+\frac{m^2}{p^+}.\quad (7.107)$$

De forma que para todo $\mu \neq +$

$$\delta x^\mu = \lambda\dot{x}^\mu = -\epsilon^+\frac{m^2}{p^+}\dot{x}^\mu = -\epsilon^+\frac{p^\mu}{p^+}.\quad (7.108)$$

Recuperando así las variaciones calculadas al considerar como generador p^- . Además de ser invariante bajo traslaciones, el lagrangiano también es invariante bajo transformaciones Lorentz infinitesimales dadas por $\delta x^\mu = \epsilon^{\mu\nu}x_\nu$, donde $\epsilon^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico constante. Las cargas asociadas son

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu.\quad (7.109)$$

Al considerar los operadores x^μ y p^μ de la cuantización covariante, se tiene que los $M^{\mu\nu}$, definidos como en ec. (7.109), son los generadores covariantes de las transformaciones Lorentz ya que

$$[M^{\mu\nu}, x^\rho] = x^\mu[p^\nu, x^\rho] - x^\nu[p^\mu, x^\rho] = i(\eta^{\mu\rho}x^\nu - \eta^{\nu\rho}x^\mu)\quad (7.110)$$

y por lo tanto

$$\delta x^\rho = \left[\frac{-i}{2}\epsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}, x^\rho\right] = \frac{-i}{2}\epsilon_{\mu\nu}i(\eta^{\mu\rho}x^\nu - \eta^{\nu\rho}x^\mu) = \frac{1}{2}(\epsilon^{\rho\nu}x_\nu - \epsilon^{\rho\mu}x_\mu) = \epsilon^{\rho\mu}x_\mu.\quad (7.111)$$

Calculando ahora los conmutadores de los generadores de las transformaciones de Lorentz se tiene

$$\begin{aligned}
[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] &= [x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha] \\
&= [x^\mu p^\nu, x^\alpha p^\beta] - [x^\mu p^\nu, x^\beta p^\alpha] - [x^\nu p^\mu, x^\alpha p^\beta] + [x^\nu p^\mu, x^\beta p^\alpha] \\
&= x^\mu (-i)\eta^{\nu\alpha} p^\beta + i\eta^{\mu\beta} x^\alpha p^\nu - x^\mu (-i)\eta^{\nu\beta} p^\alpha - i\eta^{\mu\alpha} x^\beta p^\nu \\
&\quad - x^\nu (-i)\eta^{\mu\alpha} p^\beta - i\eta^{\nu\beta} x^\alpha p^\mu + x^\nu (-i)\eta^{\mu\beta} p^\alpha + i\eta^{\nu\alpha} x^\beta p^\mu \\
&= i\eta^{\mu\alpha} (x^\nu p^\beta - x^\beta p^\nu) + i\eta^{\mu\beta} (x^\alpha p^\nu - x^\nu p^\alpha) + i\eta^{\nu\alpha} (x^\beta p^\mu - x^\mu p^\beta) + i\eta^{\nu\beta} (x^\mu p^\alpha - x^\alpha p^\mu) \\
&= i\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} - i\eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} + i\eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} - i\eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha}.
\end{aligned} \tag{7.112}$$

Estos conmutadores definen el álgebra de Lie del grupo de las transformaciones de Lorentz. Para construir generadores Lorentz en el gauge del cono de luz, hay que construir operadores que satisfagan estas relaciones de conmutación a partir de los operadores de posición y momento. Los operadores M^{IJ} coinciden con los de la cuantización covariante ya que las coordenadas involucradas se han tratado de la misma manera, sin embargo, la definición de los $M^{\mu\nu}$ con alguno de sus índices iguales a $+$ o $-$ no es tan trivial. Para definir estos operadores nos debemos basar, según la ec. (7.112), en las relaciones

$$[M^{+-}, M^{+I}] = iM^{+I}, \quad [M^{+-}, M^{-I}] = -iM^{-I} \quad \text{y} \quad [M^{+I}, M^{+J}] = [M^{-I}, M^{-J}] = 0. \tag{7.113}$$

Para definir M^{+-} la primera propuesta podría ser

$$M^{+-} = x^+ p^- - x^- p^+ = \frac{p^+}{m^2} \tau p^- - (x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau) p^+ = -x_0^- p^+. \tag{7.114}$$

Sin embargo, esta definición no tiene sentido físico ya que el operador resultante no es hermítico.

$$(M^{+-})^\dagger - M^{+-} = -p^+ x_0^- + x_0^- p^+ = [x_0^-, p^+] \neq 0 \implies (M^{+-})^\dagger \neq M^{+-}. \tag{7.115}$$

La forma correcta del operador es por lo tanto

$$M^{+-} = -\frac{1}{2}(x_0^- p^+ + p^+ x_0^-). \tag{7.116}$$

Similarmente, la primera propuesta para los M^{-I} sería

$$M^{-I} = x^- p^I - x^I p^- = x_0^- p^I - x_0^I p^-. \tag{7.117}$$

Sin embargo, vuelve a surgir el mismo problema de que este operador no es hermítico ya que $[x^I, p^-] \neq 0$. Para solucionar esto se toma

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I). \tag{7.118}$$

Para ver que estos operadores así definidos cumplen la relación $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$, vamos a reescribirlos primero

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I) = x_0^- p^I - x_0^I p^- + \frac{1}{2}[x_0^I, p^-] = x_0^- p^I - x_0^I p^- + \frac{i}{2} \frac{p^I}{p^+}. \quad (7.119)$$

Así, haciendo uso de $[x_0^I, p^-] = i \frac{p^I}{p^+}$, $[x_0^-, \frac{1}{p^+}] = \frac{i}{(p^+)^2}$ y $[x_0^-, p^-] = i \frac{p^-}{p^+}$,

$$\begin{aligned} [M^{-I}, M^{-J}] &= [x_0^- p^I - x_0^I p^- + \frac{i}{2} \frac{p^I}{p^+}, x_0^- p^J - x_0^J p^- + \frac{i}{2} \frac{p^J}{p^+}] \\ &= -[x_0^- p^I, x_0^J p^-] + [x_0^- p^I, \frac{i}{2} \frac{p^J}{p^+}] - [x_0^I p^-, x_0^- p^J] + [x_0^I p^-, x_0^J p^-] - [x_0^I p^-, \frac{i}{2} \frac{p^J}{p^+}] + [\frac{i}{2} \frac{p^I}{p^+}, x_0^- p^J] \\ &\quad - [\frac{i}{2} \frac{p^I}{p^+}, x_0^J p^-] = -x_0^- [p^I, x_0^J p^-] - [x_0^-, x_0^J p^-] p^I + \frac{i^2}{2} \frac{p^I p^J}{(p^+)^2} - x_0^I [p^-, x_0^- p^J] - [x_0^I, x_0^- p^J] p^- \\ &\quad + x_0^I [p^-, x_0^J p^-] + [x_0^I, x_0^J p^-] p^- - \frac{i}{2} i \eta^{IJ} \frac{p^-}{p^+} + \frac{i}{2} (-i) \frac{p^I p^J}{(p^+)^2} - \frac{i}{2} (-i) \eta^{IJ} \frac{p^-}{p^+} \\ &= -(-i) \eta^{IJ} x_0^- p^- - i x_0^J \frac{p^-}{p^+} p^I - (-i) x_0^I \frac{p^-}{p^+} p^J - i \eta^{IJ} x_0^- p^- - i x_0^I \frac{p^-}{p^+} p^- + i x_0^J \frac{p^-}{p^+} p^- = 0. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Veamos que también cumplen la relación $[M^{+-}, M^{-I}] = -iM^{-I}$

$$\begin{aligned} [M^{+-}, M^{-I}] &= [-\frac{1}{2}(x_0^- p^+ + p^+ x_0^-), x_0^- p^I - x_0^I p^- + \frac{i}{2} \frac{p^I}{p^+}] = \\ &= -\frac{1}{2} \left([x_0^- p^+, x_0^- p^I] - [x_0^- p^+, x_0^I p^-] + \frac{i}{2} [x_0^- p^+, \frac{p^I}{p^+}] + [p^+ x_0^-, x_0^- p^I] - [p^+ x_0^-, x_0^I p^-] + \frac{i}{2} [p^+ x_0^-, \frac{p^I}{p^+}] \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(i x_0^- p^I - i x_0^I p^- - \frac{1}{2} \frac{p^I}{p^+} + i x_0^- p^I - i x_0^I p^- - \frac{1}{2} \frac{p^I}{p^+} \right) \\ &= -i \left(x_0^- p^I - x_0^I p^- + \frac{i}{2} \frac{p^I}{p^+} \right) = -iM^{-I}. \end{aligned} \quad (7.121)$$

Los generadores M^{+I} pueden definirse simplemente como

$$M^{+I} = x^+ p^I - x^I p^+, \quad (7.122)$$

ya que como $[x^+, p^I] = [x^I, p^+] = 0$, se tiene que son hermíticos. La relación $[M^{+I}, M^{+J}] = 0$ se comprueba fácilmente

$$\begin{aligned} [M^{+I}, M^{+J}] &= [x^+ p^I - x^I p^+, x^+ p^J - x^J p^+] \\ &= [x^+ p^I, x^+ p^J] - [x^+ p^I, x^J p^+] - [x^I p^+, x^+ p^J] + [x^I p^+, x^J p^+] \\ &= i \eta^{IJ} x^+ p^+ - i \eta^{IJ} p^+ x^+ = 0. \end{aligned} \quad (7.123)$$

Solamente falta comprobar la relación $[M^{+-}, M^{+I}] = iM^{+I}$

$$\begin{aligned}
[M^{+-}, M^{+I}] &= [-\frac{1}{2}(x_0^- p^+ + p^+ x_0^-), x^+ p^I - x^I p^+] \\
&= -\frac{1}{2} \left([x_0^- p^+, x^+ p^I] - [x_0^- p^+, x^I p^+] + [p^+ x_0^-, x^+ p^I] - [p^+ x_0^-, x^I p^+] \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(-i \frac{\tau}{m^2} p^+ p^I + i p^+ x^I - i p^+ \frac{\tau}{m^2} p^I + i p^+ x^I \right) \\
&= i (x^+ p^I - x^I p^+) = i M^{+I}.
\end{aligned} \tag{7.124}$$

Se han estudiado tan a fondo estas relaciones y se han construido con detalle los operadores que las cumplen porque a la hora de construir estos generadores en el gauge del cono de luz para la cuerda, una vez haya sido cuantizada, es lo que permite fijar la dimensión del espacio-tiempo.

8. Cuantización de la cuerda abierta

Se va a proceder a cuantizar la cuerda relativista abierta suponiendo una D-brana que cubre todo el espacio-tiempo. El objetivo de esta sección es el de una vez obtenidos los estados de la cuantización, identificarlos con algunos de los campos que se pretende recrear. Para ello se va a trabajar en el gauge del cono de luz, es decir, se toma $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ de forma que las coordenadas están sujetas a la condición $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ y las ecuaciones del movimiento vienen dadas por $\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0$. Además, como se vio en la ec. (6.17), las densidades de momento toman la forma simplificada de

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu. \tag{8.1}$$

Sumando las dos ecuaciones dadas por ec. (6.32) se tiene que

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I). \tag{8.2}$$

Esto permite expresar la densidad de momento $\mathcal{P}^{\tau-}$ en función de las coordenadas X^I y sus densidades de momento

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\tau-} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha' 2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I) \\
&= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha' 2p^+} \left((2\pi\alpha')^2 \mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + X'^I X'^I \right) = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right).
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Esta ecuación será importante un poco más adelante para encontrar la expresión del hamiltoniano.

8.1. Operadores y Conmutadores

Tal y como se ha visto en la sección 6, X^- se puede expresar en función de una constante x_0^- y el resto de coordenadas, de forma que los operadores en la imagen de Schrödinger que se van a elegir para cuantizar la cuerda relativista abierta son $X^I(\sigma)$, x_0^- , $\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)$ y p^+ . Por lo tanto los correspondientes operadores en la imagen de Heisenberg son $X^I(\tau, \sigma)$, $x_0^-(\tau)$, $\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ y $p^+(\tau)$. En

realidad los operadores x_0^- y p^+ se espera que sean independientes de τ , pero habrá que comprobarlo. Las relaciones de conmutación que se imponen son la generalización de las de la partícula puntual dadas en la ec. (7.81)

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau L}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IL}\delta(\sigma - \sigma') \quad \text{y} \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i. \quad (8.4)$$

El resto de conmutadores son nulos. Para encontrar el hamiltoniano se busca un operador que genere traslaciones en τ . Como se vio con la partícula puntual, p^- genera traslaciones en X^+ y teniendo en cuenta que $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+}. \quad (8.5)$$

Por lo tanto se espera que el hamiltoniano de la teoría sea

$$\begin{aligned} H(\tau) &= 2\alpha' p^+(\tau) p^-(\tau) = 2\alpha' p^+(\tau) \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-} \\ &\stackrel{(8.3)}{=} \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X'^I(\tau, \sigma) X'^I(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Que se trata del hamiltoniano que surge de la acción de Polyakov dado por la ec. (6.41) sin considerar las coordenadas X^+ , cuya dinámica queda fijada al fijar el gauge del cono de luz, y X^- , cuya dinámica queda determinada en función de las coordenadas X^I . Si recordamos que clásicamente $L_0^\perp = 2\alpha' p^+ p^-$, se podría pensar que la siguiente expresión simple $H = L_0^\perp$ es la correcta para el hamiltoniano. Sin embargo, esto no es cierto. Los operadores $X'X'$ y $\mathcal{P}\mathcal{P}$ no son tan triviales como parecen y hay que definirlos bien para librarse de cierta ambigüedad. Comprobemos ahora que la expresión obtenida genera realmente evoluciones en τ . Como los operadores X y \mathcal{P} no tienen dependencias explícitas en τ la evolución temporal del hamiltoniano viene dada por

$$i\partial_\tau H(\tau) = [H(\tau), H(\tau)] = 0 \quad (8.7)$$

y por lo tanto el hamiltoniano es independiente de τ . Es claro que x_0^- y p^+ conmutan con el hamiltoniano a partir de la expresión en función de los operadores X y \mathcal{P} de este último y por lo tanto efectivamente se tiene que x_0^- y p^+ son independientes de τ como se esperaba. Para calcular la evolución temporal de los operadores X , nótese primero que

$$[X^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma')] = \frac{\partial}{\partial \sigma'} [X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = 0, \quad (8.8)$$

de forma que

$$\begin{aligned} i\dot{X}^I(\tau, \sigma) &= [X^I(\tau, \sigma), H] = \pi\alpha' [X^I(\tau, \sigma), \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] \\ &= 2\pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' [X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') = 2\pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \\ &= 2\pi\alpha' i\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \implies \dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Recuperando así la primera de las ecuaciones de ec. (8.1). Para obtener la ecuación del movimiento es necesario calcular unos conmutadores previamente.

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = [X^I(\tau, \sigma), 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (8.10)$$

Derivando esta última expresión respecto de σ se obtiene

$$[X'^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (8.11)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} i\partial_\tau \mathcal{P}^{\tau I} &= [\mathcal{P}^{\tau I}, H] = \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^I, \pi\alpha' \int_0^\pi \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'^J(\tau, \sigma') X'^J(\tau, \sigma') \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \int_0^\pi d\sigma' [\dot{X}^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma')] X'^J(\tau, \sigma') = \frac{1}{2\pi\alpha'} i\eta^{IJ} \int_0^\pi d\sigma' \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') X'^J(\tau, \sigma') \\ &= -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' \delta(\sigma - \sigma') \frac{\partial}{\partial \sigma'} X'^I(\tau, \sigma') = -\frac{i}{2\pi\alpha'} \partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = -i\partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma I} \\ &\implies \partial_\tau \mathcal{P}^{\tau I} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma I} = 0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Queda así demostrado que se recuperan las ecuaciones del movimiento con el hamiltoniano propuesto. Además, como $[X^I, X^J] = [\mathcal{P}^{\tau I}, \mathcal{P}^{\tau J}] = 0$, se tiene que

$$[\dot{X}^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = [X'^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma')] = 0. \quad (8.13)$$

De forma que

$$[(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X'^J)(\tau, \sigma')] = \pm i4\pi\alpha' \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (8.14)$$

y

$$[(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X'^J)(\tau, \sigma')] = 0. \quad (8.15)$$

Para estudiar los conmutadores de los modos α_n^μ en los que se expandieron las soluciones X^μ , va a ser útil definir los siguientes operadores

$$A^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} (\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma) & \text{si } \sigma \in [-\pi, 0] \\ (\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma) & \text{si } \sigma \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (8.16)$$

Es decir, haciendo uso de la ec. (6.29),

$$A^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \quad \text{para todo } \sigma \in [-\pi, \pi]. \quad (8.17)$$

Para calcular los conmutadores de $A^I(\tau, \sigma)$ es necesario distinguir cuatro casos

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = \begin{cases} [(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X'^J)(\tau, -\sigma')] & \text{si } \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0] \\ [(\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J - X'^J)(\tau, -\sigma')] & \text{si } \sigma \in [0, \pi], \sigma' \in [-\pi, 0] \\ [(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma), (\dot{X}^J + X'^J)(\tau, \sigma')] & \text{si } \sigma \in [-\pi, 0], \sigma' \in [0, \pi] \\ [(\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X'^J)(\tau, \sigma')] & \text{si } \sigma, \sigma' \in [0, \pi] \end{cases} \quad (8.18)$$

El primer y último caso vienen dados por la ec. (8.14), mientras que el segundo y tercero son nulos por la ec. (8.15). En resumen se tiene que

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = i4\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad \text{para todo } \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]. \quad (8.19)$$

Haciendo uso de la expresión de A^I dada por la ec. (8.17), esta última ecuación toma la forma

$$\begin{aligned} i4\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') &= [A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = 2\alpha' \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} e^{-im(\tau+\sigma')} [\alpha_n^I, \alpha_m^J] \\ \implies \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} e^{-im(\tau+\sigma')} [\alpha_n^I, \alpha_m^J] &= i2\pi\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Realizando la integración $\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{iq\sigma'} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{ik\sigma}$ en ambos lados de la última igualdad y teniendo en cuenta que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(r-s)\sigma} = \delta_{r,s}$, se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-i(k+q)\tau} [\alpha_k^I, \alpha_q^J] &= \frac{i}{2\pi} \eta^{IJ} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{iq\sigma'} e^{ik\sigma} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \frac{i}{2\pi} \eta^{IJ} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{iq\sigma'} e^{ik\sigma} (-ik) \delta(\sigma - \sigma') = \eta^{IJ} k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{i(k+q)\sigma'} = \eta^{IJ} k \delta_{k+q,0} \\ \implies [\alpha_k^I, \alpha_q^J] &= e^{i(k+q)\tau} \eta^{IJ} k \delta_{k+q,0} = \eta^{IJ} k \delta_{k+q,0}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

En particular se tiene $[\alpha_0^I, \alpha_n^I] = 0$ para todo n . Esto era de esperar por ser α_0^I proporcional al momento p^I . Para determinar completamente los conmutadores de los operadores involucrados en las expansiones en modos, falta ver cómo conmutan los x_0^I con los modos α_n^J . Para ello se integra la ec. (8.10) respecto de $\int_0^\pi d\sigma$,

$$\begin{aligned} i2\pi\alpha'\eta^{IJ} &= \left[\int_0^\pi d\sigma \left(x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] \\ &= \pi [x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

\dot{X}^J sólo contiene términos proporcionales a los modos α_n^J y por lo tanto se tiene que $[\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 0$. De forma que, expandiendo \dot{X}^J en sus modos,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} [x_0^I, \alpha_n^J] = i\sqrt{2\alpha'} \eta^{IJ}. \quad (8.23)$$

Realizando la integración $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \cos(m\sigma)$ en ambos lados de esta última ecuación se tiene

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ} \quad y \quad [x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad \forall n \neq 0. \quad (8.24)$$

Es decir,

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = \delta_{0,n} i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}. \quad (8.25)$$

Además, recordando que $\alpha_0^J = \sqrt{2\alpha'}p^J$, se obtiene el esperado conmutador

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}. \quad (8.26)$$

Todas las relaciones de conmutación calculadas hasta el momento indican que los operadores α_n^I son operadores de aniquilación y creación. Para hacer esto más explícito se definen para todo $n \geq 1$

$$a_n^I = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_n^I \quad y \quad a_n^{I\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{-n}^I. \quad (8.27)$$

De forma que los conmutadores dados por la ec. (8.21) se traducen en

$$[a_n^I, a_m^J] = [a_n^{I\dagger}, a_m^{J\dagger}] = 0 \quad y \quad [a_n^I, a_m^{J\dagger}] = \delta_{n,m}\eta^{IJ}. \quad (8.28)$$

8.2. Operadores Transversos de Virasoro

En la última sección se han estudiado los operadores involucrados en las expansiones de las X^I , pero no los operadores involucrados en las expansiones de las coordenadas X^+ y X^- . La expansión de X^+ es muy simple

$$X^+ = 2\alpha'p^+\tau = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^+\tau. \quad (8.29)$$

Es decir, $\alpha_n^+ = 0$ para todo $n \neq 0$ y $x_0^+ = 0$. La expansión de X^- es la más compleja de todas que viene dada, según la ec. (6.35), por

$$X^- = x_0^- + \frac{1}{p^+}L_0^\perp\tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (8.30)$$

donde

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-j}^I \alpha_j^I. \quad (8.31)$$

Clásicamente, los modos L_n^\perp estaban perfectamente definidos, ya que no hay que preocuparse por el orden de los α_n^I en las multiplicaciones. Sin embargo, a la hora de definirlos como operadores, hay que tener cuidado ya que los operadores α_n^I siguen ciertas reglas de conmutación. Como los α_n^I no conmutan sólo cuando los subíndices suman cero, el único operador transverso de Virasoro definido de forma ambigua es L_0^\perp , que en cierta manera es el más importante ya que se espera una

relación similar a $H = L_0^\perp$. Expandiendo la definición de L_0^\perp

$$\begin{aligned} L_0^\perp &= \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p^I\alpha_{-p}^I = \alpha'p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}[\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I] \\ &= \alpha'p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I + \frac{1}{2}\eta^{IJ}\sum_{p=1}^{\infty}p = \alpha'p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I + \frac{1}{2}(D-2)\zeta(-1). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Por lo tanto, se redefine el operador

$$L_0^\perp = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I = \alpha'p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty}pa_p^{I\dagger}a_p^I = (L_0^\perp)^\dagger, \quad (8.33)$$

que es equivalente a redefinir la relación

$$H = 2\alpha'p^+p^- = L_0^\perp + a, \quad (8.34)$$

donde $a = \frac{1}{2}(D-2)\zeta(-1) = -\frac{D-2}{24}$ es una contante que se determinará completamente más adelante cuando se fije la dimensión del espacio-tiempo D . Ésto induce también una redefinición del operador masa al cuadrado ya que

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'}(L_0^\perp + a) - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'}\left(a + \sum_{p=1}^{\infty}pa_p^{I\dagger}a_p^I\right). \quad (8.35)$$

Como el resto de modos satisfacen la relación $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$, comprobemos que los operadores transversos de Virasoro también cumple la relación análoga $(L_n^\perp)^\dagger = L_{-n}^\perp$. El caso $n = 0$ ya se ha comprobado. Para todo $n \neq 0$

$$L_{-n}^\perp = \frac{1}{2}\sum_{j \in \mathbb{Z}}\alpha_{-n-j}^I\alpha_j^I = \frac{1}{2}\sum_{j \in \mathbb{Z}}(\alpha_j^{I\dagger}\alpha_{-n-j}^I)^\dagger \stackrel{(p=-j)}{=} \frac{1}{2}\sum_{p \in \mathbb{Z}}(\alpha_p^I\alpha_{n-p}^I)^\dagger = \left(\frac{1}{2}\sum_{p \in \mathbb{Z}}\alpha_{n-p}^I\alpha_p^I\right)^\dagger = (L_n^\perp)^\dagger \quad (8.36)$$

Los operadores transversos de Virasoro y sus relaciones de conmutación conforman un álgebra de Lie muy importante en todas las teorías de cuerdas y por lo tanto se van a calcular estos conmutadores. Para ello veamos primero sus relaciones de conmutación con los operadores α_n^I

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, \alpha_n^J] &= \frac{1}{2}\sum_{j \in \mathbb{Z}}[\alpha_{m-j}^I\alpha_j^I, \alpha_n^J] = \frac{1}{2}\sum_{j \in \mathbb{Z}}\left(\alpha_{m-j}^I[\alpha_j^I, \alpha_n^J] + [\alpha_{m-j}^I, \alpha_n^J]\alpha_j^I\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j \in \mathbb{Z}}\left(\alpha_{m-j}^I j\eta^{IJ}\delta_{j+n,0} + (m-j)\eta^{IJ}\delta_{m-j+n,0}\alpha_j^I\right) = \frac{1}{2}\left(-n\alpha_{m+n}^J - n\alpha_{m+n}^J\right) = -n\alpha_{m+n}^J. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Nótese que este resultado es también cierto para $m = 0$ ya que L_0^\perp toma la misma forma que el resto de L_m^\perp más una constante, que no afecta al resultado de un conmutador. Para calcular el conmutador de dos operadores transversos de Virasoro, vamos a asegurarnos de expresarlos siempre de forma que los operadores de creación estén a la derecha en los productos y los de aniquilación

a la izquierda, es decir,

$$L_m^\perp = \frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} \alpha_{m-j}^I \alpha_j + \frac{1}{2} \sum_{j < 0} \alpha_j^I \alpha_{m-j}. \quad (8.38)$$

De esta forma los resultados obtenidos serán también válidos para L_0^\perp . Considerando $n + m \neq 0$

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_n^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} \left(\alpha_{n-j}^I [L_m^\perp, \alpha_j^I] + [L_m^\perp, \alpha_{n-j}^I] \alpha_j^I \right) + \frac{1}{2} \sum_{j < 0} \left(\alpha_j^I [L_m^\perp, \alpha_{n-j}^I] + [L_m^\perp, \alpha_j^I] \alpha_{n-j}^I \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} \left((-j) \alpha_{n-j}^I \alpha_{m+j}^I + (j-n) \alpha_{m+n-j}^I \alpha_j^I \right) + \frac{1}{2} \sum_{j < 0} \left((j-n) \alpha_j^I \alpha_{m+n-j}^I + -j \alpha_{m+j}^I \alpha_{n-j}^I \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (m-j) \alpha_{m+n-j}^I \alpha_j^I + (j-n) \alpha_{m+n-j}^I \alpha_j^I = (m-n) L_{m+n}^\perp. \end{aligned} \quad (8.39)$$

En el caso $m + n = 0$ hay que realizar unos cálculos más ya que aparecen operadores α_n^I que no conmutan entre ellos y es necesario reordenar las sumas. El resultado que se obtiene en este caso es

$$[L_n^\perp, L_{-n}^\perp] = 2n L_0^\perp + \frac{D-2}{12} (n^3 - n). \quad (8.40)$$

Por lo tanto el resultado general es

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp + \delta_{m+n,0} \frac{D-2}{12} (m^3 - m). \quad (8.41)$$

Los operadores $\{L_m^\perp\}_{m \in \mathbb{Z}}$ junto con estas últimas relaciones de conmutación definen el álgebra centralmente extendido de Virasoro. El concepto centralmente extendido hace referencia a que el término proporcional a $\delta_{m+n,0}$ es el resultado de extender centralmente el álgebra de Witt. Este álgebra es, de hecho, un álgebra de Lie. Claramente es antisimétrico y no es difícil comprobar que satisface la identidad de Jacobi. También es importante estudiar cómo conmutan estos operadores con los X^I . Para ello falta estudiar los siguientes conmutadores

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, x_0^I] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_{m-p}^J [\alpha_p^J, x_0^I] + [\alpha_{m-p}^J, x_0^I] \alpha_p^J \right) \\ &\stackrel{(8.25)}{=} -\frac{1}{2} i \sqrt{2\alpha'} \eta^{IJ} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_{m-p}^J \delta_{p,0} + \delta_{m-p,0} \alpha_p^J \right) = -i \sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I. \end{aligned} \quad (8.42)$$

De forma que

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, X^I] &= [L_m^\perp, x_0^I] + i \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} [L_m^\perp, \alpha_n^I] \\ &= -i \sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I - i \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I = -i \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Expresando ahora el coseno como combinación de exponenciales complejas y haciendo uso de

la ec. (6.29) se tiene

$$\begin{aligned}
[L_m^\perp, X^I] &= -i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-in(\tau+\sigma)}\alpha_{m+n}^I + \sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-in(\tau-\sigma)}\alpha_{m+n}^I\right) \\
&= -i\frac{1}{2}e^{im\tau}(\dot{X}^I + X'^I) - i\frac{1}{2}e^{im(\tau-\sigma)}(\dot{X}^I - X'^I) \\
&= \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X'^I,
\end{aligned} \tag{8.44}$$

donde se han definido

$$\xi_m^\tau = -ie^{im\tau}\cos(m\sigma) \quad y \quad \xi_m^\sigma = e^{im\tau}\sin(m\sigma). \tag{8.45}$$

Los resultados de estos conmutadores demuestran que los operadores L_m^\perp generan las reparametrizaciones de la hoja de universo de la cuerda dadas por

$$\tau \longrightarrow \tau + \xi_m^\tau \epsilon \quad y \quad \sigma \longrightarrow \sigma + \xi_m^\sigma \epsilon \tag{8.46}$$

con ϵ infinitesimal. Es decir,

$$X^I(\tau + \xi_m^\tau \epsilon, \sigma + \xi_m^\sigma \epsilon) = X^I(\tau, \sigma) + \epsilon[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] \tag{8.47}$$

En particular, tomando $m = 0$, se tiene

$$X^I(\tau + i\epsilon, \sigma) = X^I(\tau, \sigma) + \epsilon[L_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)]. \tag{8.48}$$

Equivalentemente,

$$i\partial_\tau X^I = [X^I, L_0^\perp]. \tag{8.49}$$

Esto era de esperar ya que L_0^\perp y el hamiltoniano sólo difieren en una constante y por esto el caso $m = 0$ acaba funcionando correctamente. Sin embargo, el resto de los L_m^\perp generan traslaciones en general complejas. Para solucionar esto se definen para cada pareja L_m^\perp y L_{-m}^\perp los operadores anti-hermíticos

$$A_m = L_m^\perp - L_{-m}^\perp \quad y \quad B_m = i(L_m^\perp + L_{-m}^\perp). \tag{8.50}$$

De forma que las reparametrizaciones que generan estos últimos operadores son respectivamente

$$\begin{aligned}
\tau \longrightarrow \tau + 2\sin(m\tau)\cos(m\sigma)\epsilon \quad \sigma \longrightarrow \sigma + 2\cos(m\tau)\sin(m\sigma)\epsilon \\
y \\
\tau \longrightarrow \tau + 2\cos(m\tau)\cos(m\sigma)\epsilon \quad \sigma \longrightarrow \sigma - 2\sin(m\tau)\sin(m\sigma)\epsilon.
\end{aligned} \tag{8.51}$$

Al haber construido los operadores A_m y B_m como combinaciones lineales de los L_m de forma que fueran anti-hermíticos, las transformaciones que generan son reales. Cabe destacar que los operadores $\{A_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ definen un subálgebra del álgebra de Virasoro ya que son cerrados bajo el

producto de Lie del álgebra

$$\begin{aligned} [A_m, A_n] &= [L_m - L_{-m}, L_n - L_{-n}] = [L_m, L_n] - [L_m, L_{-n}] - [L_{-m}, L_n] + [L_{-m}, L_{-n}] \\ &= (m-n)L_{m+n} - (m+n)L_{m-n} - (m-n)L_{m-n} - (-m-n)L_{-m+n} + (-m+n)L_{-m-n} \\ &= (m-n)A_{m+n} - (m+n)A_{m-n}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

8.3. Generadores Lorentz

Tal y como se discutió en la cuantización de la partícula puntual relativista, encontrar los generadores Lorentz de la teoría en el gauge del cono de luz va a ser muy importante. Recordemos que las cargas conservadas en el caso de la cuerda abierta vienen dadas según la ec. (5.72) por

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma. \quad (8.53)$$

Haciendo uso de la expresión de los momentos en función de las derivadas dada por la ec. (8.1) se pueden reescribir las cargas como

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma. \quad (8.54)$$

Recordando las expansiones de X^μ y \dot{X}^μ dadas en las ecuaciones (6.26) y (6.28)

$$X^\mu = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad \text{y} \quad \dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (8.55)$$

se tiene que

$$X^\mu \dot{X}^\nu = x_0^\mu \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu \cos^2(n\sigma) + O(\tau), \quad (8.56)$$

donde $O(\tau)$ representa todos los términos dependientes de τ , que se cancelan al realizar la integración en σ y por lo tanto se han omitido. Como resultado de que todos los términos dependientes de τ se cancelen, se tiene que $M^{\mu\nu}$ es independiente de τ , tal y como debe ser al tratarse de una carga conservada. Por lo tanto la expresión de los generadores Lorentz clásicos en función de los modos α_n^μ es

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \left(x_0^\mu \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu - i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu \cos^2(n\sigma) \right. \\ &\quad \left. - x_0^\nu \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu \cos^2(n\sigma) \right) d\sigma = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \end{aligned} \quad (8.57)$$

Tal y como se vio al construir los generadores Lorentz al cuantizar la partícula puntual, los generadores más delicados de definir son M^{-I} . La primera idea podría ser tomar directamente los operadores clásicos tratando x_0^μ , p^μ y α_n^μ como operadores. Sin embargo, el operador resultante no

sería hermítico, ya que, como hemos visto previamente, x_0^I y p^- no conmutan. Para solucionar esto bastaría tomar

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-). \quad (8.58)$$

Nótese que este operador es hermítico, ya que $(\alpha_n^\mu)^\dagger = \alpha_{-n}^\mu$. Además, todos los operadores de aniquilación aparecen a la derecha de los operadores de creación. Recordando que $p^- = \frac{1}{2\alpha' p^+} (L_0^\perp + a)$ y $\alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha' p^+}} L_n^\perp$, estos operadores se pueden expresar como

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I) - i \frac{1}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp). \quad (8.59)$$

Por lo tanto, ésta es la propuesta más factible para los generadores Lorentz M^{-I} . Aceptando esta propuesta, el siguiente paso es ver las condiciones que surgen de imponer las relaciones dadas en la ec. (7.112), en particular $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$. Haciendo uso de todos los conmutadores y relaciones que se han calculado previamente, se obtiene que el valor del conmutador $[M^{-I}, M^{-J}]$ es

$$-\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left\{ m \left(1 - \frac{1}{24} (D-2) \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24} (D-2) + a \right) \right\}. \quad (8.60)$$

Al ser los operadores en cada término de esta suma no nulos, los factores que los multiplican deben anularse para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ para que la teoría conserve la simetría Lorentz. Esto implica que se deben cumplir las relaciones

$$1 - \frac{1}{24} (D-2) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{24} (D-2) + a = 0. \quad (8.61)$$

Es decir,

$$D = 26 \quad \text{y} \quad a = -1. \quad (8.62)$$

Se ha conseguido fijar la dimensión del espacio-tiempo a $D = 26$, un número de dimensiones muy superior a las 4 que estamos acostumbrados a experimentar. Necesariamente la mayoría de estas dimensiones extra deben ser compactas si se pretende recrear la realidad que experimentamos con esta teoría. Además, se ha obtenido el valor de la constante $a = -1$. Este valor de a concuerda con el obtenido utilizando la función zeta, que era $a = -\frac{D-2}{24}$, una vez fijado $D = 26$. Por lo tanto, queda por fin definido p^- por la expresión

$$p^- = \frac{1}{2\alpha' p^+} (L_0^\perp - 1). \quad (8.63)$$

Además, esto también fija el hamiltoniano

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = L_0^\perp - 1 = \alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I\dagger} \alpha_n^I - 1. \quad (8.64)$$

8.4. Estados

Una vez definidos correctamente todos los operadores, se puede pasar a definir los estados de la base y construir el espacio de estados. Tenemos las parejas de operadores canónicamente conjugados (x_0^I, p^I) para $I = 2, \dots, 25$ y (x_0^-, p^+) . Para construir el conjunto completo de operadores compatibles se toman los operadores de momento p^I y p^+ , de forma que los estados propios vienen etiquetados por $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. Estos estados son estados de vacío ya que satisfacen

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0 \quad \forall I = 2, \dots, 25 \quad \forall n \geq 1. \quad (8.65)$$

Los estados base generales se construyen actuando sobre estos estados con los operadores de creación, de forma que un estado base general se representa por

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (8.66)$$

donde los $\lambda_{n,I}$ denotan el número de veces que aparece el operador $a_n^{I\dagger}$ en el estado. Por lo tanto, los estados quedan caracterizados por estos $\lambda_{n,I}$. Para clasificar estos estados, reescribamos el operador de masa al cuadrado ahora que sabemos el valor de la constante a

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right) = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp), \quad (8.67)$$

donde se ha definido el operador de número de partículas $N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$. Este operador es importante ya que, como se verá un poco más adelante, cuenta el número de osciladores en los estados $|\lambda\rangle$ de la forma dada por la ec. (8.66), además de aparecer como sumando en el operador L_0^\perp y en el hamiltoniano. Veamos que de hecho estas afirmaciones son ciertas. Para ello es necesario calcular algunos conmutadores

$$[N^\perp, a_n^{I\dagger}] = \sum_{m=1}^{\infty} m [a_m^{J\dagger} a_m^J, a_n^{I\dagger}] = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m^{J\dagger} \delta_{m,n} \eta^{JI} = n a_n^{I\dagger} \quad (8.68)$$

y, de manera similar,

$$[N^\perp, a_n^I] = -n a_n^I. \quad (8.69)$$

Además, por la construcción del operador,

$$N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (8.70)$$

También cabe notar que este operador permite expresar L_0^\perp de manera simplificada

$$L_0^\perp = \alpha' p^I p^I + N^\perp \quad (8.71)$$

y por lo tanto también el hamiltoniano

$$H = L_0^\perp - 1 = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1. \quad (8.72)$$

Al actuar con este operador sobre un estado general de la forma dada en la ec. (8.66) se tiene

$$N^\perp |\lambda\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=1}^{25} n \lambda_{n,I} |\lambda\rangle. \quad (8.73)$$

Introduciendo los bras $\langle p^+, \vec{p}_T |$ asociados a los elementos de la base $|p^+, \vec{p}_T\rangle$, se tiene un producto interior definido sobre el espacio de estados de manera natural dado por

$$\langle q^+, \vec{q}_T | p^+, \vec{p}_T \rangle = \delta(q^+ - p^+) \delta(\vec{q}_T - \vec{p}_T). \quad (8.74)$$

Este producto se extiende por linealidad a los estados generales. Por ejemplo, considerando $|\lambda\rangle = a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ y $|\xi\rangle = a_1^{J\dagger} |q^+, \vec{q}_T\rangle$ se tiene

$$\langle \xi | \lambda \rangle = \langle q^+, \vec{q}_T | a_1^J a_1^{I\dagger} | p^+, \vec{p}_T \rangle = \langle q^+, \vec{q}_T | (a_1^{I\dagger} a_1^J + \delta^{IJ}) | p^+, \vec{p}_T \rangle = \delta^{IJ} \delta(q^+ - p^+) \delta(\vec{q}_T - \vec{p}_T). \quad (8.75)$$

Para cada estado $|\lambda\rangle$ se construye el estado dependiente del tiempo

$$\exp(-i\tau H) |\lambda\rangle = \exp(-i\tau(L_0^\perp - 1)) |\lambda\rangle, \quad (8.76)$$

que por construcción satisface la ecuación de Schrödinger dada por el hamiltoniano. Los estados que satisfacen la ecuación de Schrödinger son llamados estados físicos. Ahora que se han sentido las bases del estado de espacios, se van a estudiar los estados más sencillos que surgen.

8.4.1. Taquión

Considerando los estados de la base $|p^+, \vec{p}_T\rangle$, se tiene que $N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$. Por lo tanto

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (8.77)$$

Esto indica que la teoría predice estados con masa al cuadrado igual a $-\frac{1}{\alpha'}$, es decir, taquiones. Un estado taquiónico general vendrá dado por una superposición de estados de la base

$$|\text{taquión}, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (8.78)$$

de forma que satisfaga la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_\tau \psi = H\psi = (\alpha' p^I p^I - 1)\psi. \quad (8.79)$$

Realizando la identificación $m^2 = -\frac{1}{\alpha'}$ y el cambio de variable $x^+ = 2\alpha' p^+ \tau$, esta ecuación se traduce en

$$i\partial_+ \psi = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \psi. \quad (8.80)$$

Se trata exactamente de la ecuación que satisface el campo escalar estudiado en la sección 7.1.

Además, los estados taquiónicos y los estados del campo escalar $a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle$ tienen los mismos índices Lorentz (niguno) y el mismo momento. Por lo tanto, se pueden identificar los estados taquiónicos con estados de un campo escalar de masa al cuadrado igual a $-\frac{1}{\alpha'}$. Es decir,

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle. \quad (8.81)$$

La existencia de estos estados indica que la D-brana que llena todo el espacio sobre la que se ha cuantizado la cuerda abierta es inestable.

8.4.2. Estados fotónicos

Los estados de la forma $a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$, y en general una combinación lineal de estos estados

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (8.82)$$

son tales que el operador M^2 actuando sobre ellos se anula. Es decir, estos estados representan partículas sin masa. Un estado general de este tipo viene dado por

$$|\psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \psi_I(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (8.83)$$

donde las funciones ψ_I satisfacen la ecuación de Schrödinger para todo $I = 2, \dots, 25$

$$i\partial_\tau \psi_I = H \psi_I = (\alpha' p^J p^J + N^\perp - 1) \psi_I = \alpha' p^J p^J \psi_I. \quad (8.84)$$

Recordando que la dinámica del campo de Maxwell en el cono de luz viene descrita por la ecuación $\partial^2 A^\mu = 0$, es decir,

$$(i\partial_+ - \frac{1}{2p^+} p^J p^J) A^\mu = 0, \quad (8.85)$$

y realizando el cambio de variable $x^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ se tiene

$$(i\partial_\tau - \alpha' p^J p^J) A^\mu = 0. \quad (8.86)$$

Como se puede observar, ambos campos satisfacen las mismas ecuaciones del movimiento. Además, los estados $a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ de la cuerda abierta con $N^\perp = 1$ y los estados fotónicos $a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$ tienen los mismos índices Lorentz, el mismo momento y ambos tienen masas nulas. Por lo tanto, se puede realizar la identificación

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle. \quad (8.87)$$

Además, el vector ξ_I que describe la combinación lineal dada en la ec. (8.82) se puede identificar con el vector de polarización de la cuantización del campo de Maxwell. Esto implica que la teoría predice estados fotónicos ($D - 2 = 24$ estados linealmente independientes, igual que la cuantización de la teoría de Maxwell) como las excitaciones de más baja energía de la cuerda abierta.

8.4.3. Estados de orden superior

El número de estados para cada valor de N^\perp crece muy rápidamente. Se va a estudiar el caso $N^\perp = 2$ como ejemplo de este crecimiento tan rápido. Para obtener este tipo de estados hay que actuar sobre la base $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ con operadores de la forma $a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger}$ o $a_2^{I\dagger}$. Al haber $D - 2$ operadores distintos $a_1^{I\dagger}$ y conmutar entre ellos, éstos dan lugar a un número de estados igual al número de entradas de una matriz cuadrada simétrica de dimensión $D - 2$, es decir, $\frac{1}{2}(D - 2)(D - 1)$. Junto con los $D - 2$ estados dados por los $a_2^{I\dagger}$, dan lugar a un total de $\frac{1}{2}(D - 2)(D - 1) + D - 2 = \frac{1}{2}(D - 2)(D + 1) = 324$. Se puede comprobar también que para $N^\perp = 3$ hay 2600 estados. Comparando estos números con los 24 estados para el caso $N^\perp = 1$, es obvio que el número de estados crece rápidamente con el valor de N^\perp .

Todos estos estados de orden superior no se van a considerar en la discusión ya que sus masas al cuadrado son de orden $\frac{1}{\alpha'}$, es decir, sus masas son del orden de la masa de Planck. Por lo tanto, este tipo de estados no serían observables en los experimentos de aceleradores con las resoluciones de hoy en día ya que las energías disponibles en estos experimentos son mucho menores que la masa de Planck.

9. Cuantización de la cuerda cerrada

El procedimiento general para cuantizar la cuerda cerrada es el mismo que el utilizado para cuantizar la cuerda abierta, pero con ciertas diferencias que surgen de la imposibilidad de escoger unívocamente un punto especial para fijar completamente la parametrización en σ . Recordando lo visto en la sección 6, la familia de gauges utilizada para la cuerda cerrada viene descrita por

$$n \cdot X = \alpha'(n \cdot p)\tau \quad \text{y} \quad n \cdot p = 2\pi n \cdot \mathcal{P}^\tau. \quad (9.1)$$

Como se va a trabajar en el gauge del cono de luz, en particular se tiene

$$X^+ = \alpha' p^+ \tau \quad \text{y} \quad p^+ = 2\pi \mathcal{P}^{\tau+}. \quad (9.2)$$

El parámetro sigma toma valores en $[0, 2\pi]$ y las condiciones sobre las coordenadas son $\dot{X} \cdot X' = 0$ y $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$, que juntas dan lugar a $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$. El gauge escogido también implicaba

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu. \quad (9.3)$$

Las ecuaciones del movimiento para todas las coordenadas vienen dadas por

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = (\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu = 0 \quad (9.4)$$

y la solución clásica viene dada por

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v), \quad (9.5)$$

donde $u = \tau + \sigma$ y $v = \tau - \sigma$. Las funciones X_L^μ y X_R^μ representan ondas avanzando en sentido de σ decreciente y creciente (normalmente asociadas a izquierda y derecha o left y right en inglés, de ahí los subíndices) respectivamente. Debido a la estructura de la cuerda cerrada, es necesario realizar la identificación $\sigma \sim \sigma + 2\pi$. En realidad, teniendo en cuenta los dos parámetros la identificación es $(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + 2\pi)$, por lo que el espacio de parámetros es un cilindro (en contraposición, el espacio de parámetros para la cuerda abierta es un rectángulo). Esto se traduce en la condición de periodicidad

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad \forall(\tau, \sigma). \quad (9.6)$$

La identificación se traduce en esta condición tan simple porque el espacio sobre el que se está trabajando (el espacio-tiempo de Minkowski) es simplemente conexo. Si no lo fuera, la forma de implementar la identificación se complicaría. La periodicidad de las coordenadas implica que

$$X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) = X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi) \iff X_L^\mu(u) - X_L^\mu(u + 2\pi) = X_R^\mu(v - 2\pi) - X_R^\mu(v). \quad (9.7)$$

Esto implica que $X_L^{\prime\mu}(u)$ y $X_R^{\prime\mu}(v)$ son 2π periódicas y, por lo tanto, se pueden expresar como series de Fourier

$$X_L^{\prime\mu}(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \quad y \quad X_R^{\prime\mu}(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv}. \quad (9.8)$$

Nótese que las primas en $X_L^{\prime\mu}(u)$ y $X_R^{\prime\mu}(v)$ representan derivadas respecto de u y v respectivamente. La normalización, como ya se mencionó con la cuerda abierta, es arbitraria y por ello se escoge ésta que va a resultar útil más adelante. Integrando estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) &= \frac{1}{2} x_{0L}^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \\ X_R^\mu(v) &= \frac{1}{2} x_{0R}^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-inv}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Donde x_{0L}^μ y x_{0R}^μ son constantes de integración. La condición dada por la ec. (9.7) implica que

$$2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu \implies \bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu. \quad (9.10)$$

Y así

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (x_{0L}^\mu + x_{0R}^\mu) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} + \alpha_n^\mu e^{-inv}). \quad (9.11)$$

Como x_{0L}^μ y x_{0R}^μ son constantes de integración arbitrarias y aparecen sumando en la solución, se pueden tomar ambas iguales de forma que definiendo $x_0^\mu = \frac{1}{2}(x_{0L}^\mu + x_{0R}^\mu)$ se tiene

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} + \alpha_n^\mu e^{-inv}). \quad (9.12)$$

Esto permite expresar la densidad de momento

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \text{términos proporcionales a } e^{-in\sigma}). \quad (9.13)$$

De forma que

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0^\mu \implies \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu. \quad (9.14)$$

Las derivadas de las coordenadas X^μ se pueden obtener a partir de las derivadas de X_L^μ y X_R^μ de la siguiente manera

$$\dot{X}^\mu(\tau, \sigma) = X_L'^\mu(u) + X_R'^\mu(v) \quad y \quad X'^\mu(\tau, \sigma) = X_L'^\mu(u) - X_R'^\mu(v). \quad (9.15)$$

De forma que

$$\begin{aligned} (\dot{X}^\mu + X'^\mu)(\tau, \sigma) &= 2X_L'^\mu(u) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \\ (\dot{X}^\mu - X'^\mu)(\tau, \sigma) &= 2X_R'^\mu(v) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Como se puede observar la normalización escogida es tal que estas combinaciones de las derivadas coinciden en forma con las de la cuerda abierta.

9.1. Operadores y Conmutadores

De forma análoga a como se ha hecho con la cuerda abierta, se elevan a operadores X^I , x_0^- , $\mathcal{P}^{\tau I}$ y p^+ y se imponen las reglas de conmutación canónicas

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{IJ} \quad y \quad [x_0^-, p^+] = i\eta^{+-} = -i. \quad (9.17)$$

Como $\dot{X}^I \pm X'^I$ tienen la misma forma que en el caso de la cuerda abierta, se tiene inmediatamente que

$$\begin{aligned} [(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X'^J)(\tau, \sigma')] &= \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \\ [(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X'^J)(\tau, \sigma')] &= 0 \end{aligned} \quad (9.18)$$

Además, en este caso no es necesario definir operadores auxiliares como en el caso de la cuerda abierta ya que para la cuerda cerrada los operadores ya están bien definidos para todo $\sigma \in [0, 2\pi]$. Del primero de estos conmutadores, llevando a cabo el mismo desarrollo que con la cuerda abierta, se obtienen las relaciones de conmutación

$$[\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ} \quad \text{y} \quad [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\delta_{m+n,0}\eta^{IJ}. \quad (9.19)$$

Del segundo conmutador se obtienen además las relaciones

$$[\bar{\alpha}_m^I, \alpha_n^J] = 0. \quad (9.20)$$

De manera también análoga al desarrollo de la cuerda abierta, a partir del conmutador $[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{IJ}$, se llega a las relaciones

$$[x_0^I, \bar{\alpha}_n^J] = [x_0^I, \alpha_n^J] = \delta_{0,n}[x_0^I, \alpha_0^J] = \delta_{0,n}i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\eta^{IJ}, \quad (9.21)$$

que haciendo uso de la ec. (9.14) y tomando $n = 0$, implican

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}. \quad (9.22)$$

Igual que con la cuerda abierta los conmutadores que se obtienen para los modos $\bar{\alpha}_n^I$ y α_n^I indican que se tratan de operadores de creación y aniquilación. Para ponerlo de manifiesto más explícitamente, se definen para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \bar{a}_n^{I\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{n}} = \bar{\alpha}_{-n}^I, & \bar{a}_n^I &= \frac{1}{\sqrt{n}}\bar{\alpha}_n^I, \\ a_n^{J\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{-n}^J, & a_n^J &= \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_n^J, \end{aligned} \quad (9.23)$$

de forma que las relaciones de conmutación para estos nuevos operadores vienen dadas por

$$[\bar{a}_n^I, \bar{a}_m^{J\dagger}] = \delta_{n,m}\eta^{IJ} \quad \text{y} \quad [a_n^I, a_m^{J\dagger}] = \delta_{n,m}\eta^{IJ} \quad (9.24)$$

con todos los demás posibles conmutadores nulos. Por lo tanto, los operadores de la cuantización de la cuerda cerrada son equivalentes a los de dos cuerdas abiertas con los mismos operadores x_0^μ y p^μ y la condición $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$. El siguiente paso en la cuantización de la cuerda cerrada es encontrar la expresión del hamiltoniano. Como en el gauge del cono de luz $X^+ = \alpha'p^+\tau$, se tiene que $\partial_\tau = \alpha'p^+\partial_+$. Por lo tanto, el hamiltoniano viene dado por

$$H = \alpha'p^+p^-. \quad (9.25)$$

El objetivo de la siguiente sección será, por lo tanto, el de encontrar la expresión correcta de p^- para el caso de la cuerda cerrada de manera análoga a como se ha hecho para la cuerda abierta reordenando los operadores necesarios.

9.2. Operadores Transversos de Virasoro

Al tener dos conjuntos de operadores de aniquilación y creación para cada coordenada, es razonable suponer que habrá también dos conjuntos de operadores transversos de Virasoro. Sin

embargo, la condición $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$ va a imponer una condición sobre estos operadores. Particularizando la ec. (6.32) para el caso de la cuerda cerrada, es decir, $\beta = 1$, se tiene

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2\alpha'p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2. \quad (9.26)$$

Haciendo uso de la ec. (9.16)

$$(\dot{X}^I + X'^I)^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (9.27)$$

y

$$(\dot{X}^I - X'^I)^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau-\sigma)} = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}. \quad (9.28)$$

Donde se han definido los operadores transversos de Virasoro asociados a cada uno de los dos conjuntos de osciladores

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I \quad y \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I. \quad (9.29)$$

Sustituyendo estos resultados en la ec. (9.26)

$$\dot{X}^- + X'^- = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)} \quad y \quad \dot{X}^- - X'^- = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}. \quad (9.30)$$

Comparando estas expresiones con las dadas por la ec. (9.16) para el caso $\mu = -$, se tiene para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp = \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- \quad y \quad \frac{2}{p^+} L_n^\perp = \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^-. \quad (9.31)$$

Equivalentemente,

$$\bar{\alpha}_n^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{p^+} \bar{L}_n^\perp \quad y \quad \alpha_n^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{p^+} L_n^\perp. \quad (9.32)$$

En particular, como por la ec. (9.10) se cumple que $\bar{\alpha}_0^- = \alpha_0^-$,

$$\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp. \quad (9.33)$$

De manera análoga a lo que sucedía con los operadores transversos de Virasoro de la cuerda abierta, los operadores \bar{L}_n^\perp y L_n^\perp están bien definidos para todo n distinto de cero ya que dado n distinto de cero $[\bar{\alpha}_p^I, \bar{\alpha}_{n-p}^I] = 0$ y $[\alpha_p^I, \alpha_{n-p}^I] = 0$ para todo entero p y, por lo tanto, los factores de \bar{L}_n^\perp y L_n^\perp se pueden reordenar de forma que los operadores de aniquilación aparezcan a la derecha de los operadores de creación sin necesidad de ningún factor de corrección. Los casos \bar{L}_0^\perp y L_0^\perp son cada uno de ellos análogos al caso L_0^\perp de la cuerda abierta. Es decir, se redefinen los operadores

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^I\bar{\alpha}_0^I + \sum_{p=1}^{\infty}\bar{\alpha}_{-p}^I\bar{\alpha}_p^I = \frac{\alpha'}{4}p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty}p\bar{a}_p^{I\dagger}\bar{a}_p^I = \frac{\alpha'}{4}p^I p^I + \bar{N}^\perp \quad (9.34)$$

y

$$L_0^\perp = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I = \frac{\alpha'}{4}p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty}p a_p^{I\dagger} a_p^I = \frac{\alpha'}{4}p^I p^I + N^\perp, \quad (9.35)$$

donde se han introducido los operadores número de partículas asociados a cada uno de los conjuntos de osciladores $\bar{N}^\perp = \sum_{n=1}^{\infty}n\bar{a}_n^{I\dagger}\bar{a}_n^I$ y $N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty}n a_n^{I\dagger} a_n^I$. La condición $\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp$ se traduce entonces en la condición

$$\bar{N}^\perp = N^\perp. \quad (9.36)$$

La redefinición de estos operadores implica que

$$\sqrt{2\alpha'}\bar{\alpha}_0^- = \frac{2}{p^+}(\bar{L}_0^\perp - 1) \quad \text{y} \quad \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = \frac{2}{p^+}(L_0^\perp - 1). \quad (9.37)$$

Teniendo en cuenta que $\bar{\alpha}_0^- = \alpha_0^-$, se promedian estas dos últimas expresiones de forma que

$$\alpha' p^- = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = \frac{1}{p^+}(\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp - 2). \quad (9.38)$$

Es decir,

$$p^- = \frac{1}{\alpha' p^+}(\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp - 2) \quad (9.39)$$

y por lo tanto

$$H = \alpha' p^+ p^- = \bar{L}_0^\perp + L_0^\perp - 2 = \frac{\alpha'}{2}p^I p^I + \bar{N}^\perp + N^\perp - 2. \quad (9.40)$$

Además de

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'}(\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp - 2) - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'}(\bar{N}^\perp + N^\perp - 2). \quad (9.41)$$

Los operadores con barra están asociados a ondas que se propagan a la izquierda y los operadores sin barra con ondas que se propagan hacia la derecha. Como la asignación de derecha e izquierda se hace de forma arbitraria, la teoría resultante debe ser invariante bajo esta elección, es decir, debe ser invariante bajo el intercambio de operadores con barra y sin barra. Se realiza este promedio respecto de los operadores con barra y sin barra para imponer esta invariancia.

Para finalizar el estudio de los operadores transversos de Virasoro, vamos a ver cómo actúan sobre las coordenadas. Ambos conjuntos, $\{\bar{L}_m^\perp\}_{m \in \mathbb{Z}}$ y $\{L_m^\perp\}_{m \in \mathbb{Z}}$, satisfacen las reglas de conmutación de un álgebra de Virasoro. Además, $[\bar{\alpha}_m^I, \alpha_n^J] = 0$ implica que

$$[\bar{L}_m^\perp, L_n^\perp] = 0 \quad (9.42)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, la teoría contiene dos álgebras de Virasoro conmutantes. En particular, de manera análoga al caso de la cuerda abierta, se tienen las relaciones de conmutación

$$[\bar{L}_m^\perp, \bar{\alpha}_n^I] = -n\bar{\alpha}_{m+n}^I \quad y \quad [L_m^\perp, \alpha_n^I] = -n\alpha_{n+m}^I. \quad (9.43)$$

Los conmutadores de los operadores transversos de Virasoro con los operadores x_0^I también son importantes y se obtienen mediante un cálculo exactamente análogo al realizado con la cuerda abierta

$$[\bar{L}_m^\perp, x_0^I] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_m^I \quad y \quad [L_m^\perp, x_0^I] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_m^I. \quad (9.44)$$

De forma que se tienen los conmutadores

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, X^I] &= [L_m^\perp, x_0^I] + \sqrt{2\alpha'}[L_m^\perp, \alpha_0^I]\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left([L_m^\perp, \bar{\alpha}_n^I]e^{-inu} + [L_m^\perp, \alpha_n^I]e^{-inv} \right) \\ &= -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_m^I + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left(-\alpha_{n+m}^I e^{-inv} \right) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n+m}^I e^{-inv} \end{aligned} \quad (9.45)$$

y similarmente

$$[\bar{L}_m^\perp, X^I] = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n+m}^I e^{-inu}. \quad (9.46)$$

De forma que tomando $m = 0$ y haciendo uso de la ec. (9.16) se tiene

$$\begin{aligned} [\bar{L}_0^\perp, X^I] &= -\frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^I e^{-inu} = -\frac{i}{2}(\dot{X}^I + X'^I), \\ [L_0^\perp, X^I] &= -\frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-inv} = -\frac{i}{2}(\dot{X}^I - X'^I). \end{aligned} \quad (9.47)$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones se tiene

$$[\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp, X^I] = -i\dot{X}^I, \quad (9.48)$$

que era de esperar ya que el hamiltoniano difiere de $\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp$ en una constante. Al restarlas se obtiene la relación

$$[L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp, X^I] = iX'^I. \quad (9.49)$$

Es decir, $P = L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ genera traslaciones en σ dejando τ constante. Es decir, para ϵ infinitesimal se tiene

$$X^I(\tau, \sigma + \epsilon) = X^I(\tau, \epsilon) - i\epsilon[P, X^I(\tau, \sigma)]. \quad (9.50)$$

En general, dado σ_0 arbitrario

$$X^I(\tau, \sigma + \sigma_0) = e^{-iP\sigma_0} X^I(\tau, \sigma) e^{iP\sigma_0}. \quad (9.51)$$

Como para cualquier estado físico $|\psi\rangle$ se cumple que $\bar{L}_0^\perp |\psi\rangle = L_0^\perp |\psi\rangle$, se sigue que $P|\psi\rangle = 0$ y por lo tanto $e^{-iP\sigma_0} |\psi\rangle = |\psi\rangle$ para todo σ_0 . Esto pone de manifiesto la invariancia de la teoría bajo la elección del punto desde el que empezar a medir el parámetro σ , que era uno de los principales cabos sueltos a la hora de trabajar con la cuerda cerrada. Cabe notar, que como el operador $P = L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ genera traslaciones en el parámetro σ , es decir, traslaciones espaciales, el momento de la cuerda debe ser proporcional a este operador.

9.3. Estados

Para construir el espacio de estados se procede de manera análoga a como se ha hecho con la cuerda abierta. De las parejas de operadores (x_0^-, p^+) y (x_0^I, p^I) se toman los momentos p^+ y \vec{p}_T como operadores para construir el conjunto completo de operadores compatibles, de forma que los estados propios vienen etiquetados por $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ y satisfacen

$$\bar{a}_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0 \quad \forall I = 2, \dots, 25 \quad \forall n \geq 1. \quad (9.52)$$

De forma que un estado general de la base viene dado por

$$|\bar{\lambda}, \lambda\rangle = \left(\prod_{I=2}^{25} \prod_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n^{I\dagger})^{\bar{\lambda}_{n,I}} \right) \left(\prod_{J=2}^{25} \prod_{m=1}^{\infty} (a_m^{J\dagger})^{\lambda_{m,J}} \right) |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (9.53)$$

Donde $\bar{\lambda}_{n,I}, \lambda_{m,J} \in \mathbb{N}$ son los números de ocupación asociados a los operadores de creación $\bar{a}_n^{I\dagger}$ y $a_m^{J\dagger}$. Se sigue directamente de la definición de los operadores \bar{N}^\perp y N^\perp que

$$\bar{N}^\perp |\bar{\lambda}, \lambda\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \bar{\lambda}_{n,I} |\bar{\lambda}, \lambda\rangle \quad \text{y} \quad N^\perp |\bar{\lambda}, \lambda\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} |\bar{\lambda}, \lambda\rangle \quad (9.54)$$

Recordando que $\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp$ imponía que $\bar{N}^\perp = N^\perp$, un estado $|\bar{\lambda}, \lambda\rangle$ se considerará como elemento de la base si cumple esta última igualdad. Los estados posibles más sencillos son los que cumplen $\bar{N}^\perp = N^\perp = 0$, es decir, los estados $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. La masa al cuadrado de estos estados viene dada por

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (\bar{N}^\perp + N^\perp - 2) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{4}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle \implies M^2 = -\frac{4}{\alpha'}. \quad (9.55)$$

Por lo tanto, en el caso de la cuerda cerrada también surgen estados taquiónicos, completamente análogos a los de la cuerda abierta. El siguiente caso posible es el de $\bar{N}^\perp = N^\perp = 1$, es decir, el de los estados del tipo $\bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$. Al haber $D - 2$ opciones para cada uno de los osciladores, hay un total de $(D - 2)^2$ estados de este tipo. Todos estos estados tienen masa nula ya que

$$M^2 a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (\bar{N}^\perp + N^\perp - 2) a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (9.56)$$

Una combinación lineal general de estos estados viene dada por

$$R_{IJ} a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (9.57)$$

donde R_{IJ} es una matriz cuadrada de dimensión $D - 2$. Toda matriz cuadrada se puede descomponer en su parte simétrica $S_{IJ} = \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI})$ y su parte antisimétrica $A_{IJ} = \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI})$, de forma que

$$R_{IJ} = S_{IJ} + A_{IJ}. \quad (9.58)$$

Además, la matriz simétrica S_{IJ} se puede descomponer en una matriz simétrica sin traza $\hat{S}_{IJ} = S_{IJ} - \frac{1}{D-2} S \delta_{IJ}$, donde $S = \delta^{IJ} S_{IJ}$, y en una matriz proporcional a la identidad $S' \delta_{IJ}$, donde $S' = S \frac{1}{D-2}$, de forma que

$$S_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + S' \delta_{IJ} \quad (9.59)$$

y

$$R_{IJ} = A_{IJ} + \hat{S}_{IJ} + \frac{1}{D-2} S \delta_{IJ}. \quad (9.60)$$

Esto permite separar los estados de masa nula en tres bloques linealmente independientes

$$\begin{aligned} & \hat{S}_{IJ} \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ & A_{IJ} \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ & S' \delta_{IJ} \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = S' \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \end{aligned} \quad (9.61)$$

9.3.1. Gravitón

Los estados del primer tipo corresponden con estados de gravitón ya que recordando que los estados de un gravitón vienen representados por $\xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$ con ξ_{IJ} simétrico y sin traza, se pueden identificar los estados

$$\hat{S}_{IJ} \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (9.62)$$

ya que tienen los mismos índices Lorentz y mismos momentos, además de venir ambos caracterizados por matrices simétricas sin traza. Esto implica que las cuerdas cerradas reproducen la dinámica del espacio-tiempo tal y como predicen las ecuaciones de Einstein, es decir, estos estados son estados de gravedad cuántica.

9.3.2. Estados de Kalb-Ramond

Los estados del segundo tipo corresponden con estados del campo de Kalb-Ramond, ya que si recordamos que estos estados vienen dados por $\xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$ con ξ_{IJ} antisimétrica, se pueden identificar los estados

$$A_{IJ} \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (9.63)$$

ya que ambos llevan el mismo momento y tienen los mismos índices Lorentz, además de estar ambos caracterizados por matrices antisimétricas. El campo de Kalb-Ramond surge del acoplo de un campo gauge dado por una dos forma a una variedad dos dimensional, como lo es la hoja de universo de una cuerda, que es la generalización del campo electromagnético que es el acoplo de un campo gauge dado por una uno forma a una variedad uno dimensional, como lo es la hoja de universo de una partícula puntual:

$$S_{EM} \sim \int A_\mu dx^\mu \quad y \quad S_{KR} \sim \int B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (9.64)$$

Esto quiere decir que el hecho de que surjan estos estados del campo de Kalb-Ramond implica que las cuerdas poseen una carga análoga a las carga eléctrica.

9.3.3. Dilatón

Los estados del último tipo se corresponden con estados de un campo escalar ϕ sin masa $a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle$ realizando la identificación

$$S' \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle. \quad (9.65)$$

Esta identificación tiene sentido ya que ambos estados tienen el mismo momento y ningún índice Lorentz (nótese que los índices en los estados de la izquierda están sumados). Estos estados de un campo escalar sin masa se identifican como estados del campo del dilatón. Este campo es especialmente interesante ya que su valor controla la intensidad de la interacción entre las cuerdas mediante la relación

$$g \sim e^\phi. \quad (9.66)$$

En otras teorías la intensidad de interacción es una constante que se fija a mano y es un parámetro libre más de la teoría. Sin embargo, en la teoría de cuerdas bosónica el parámetro que regula la intensidad de las interacciones es a su vez una variable dinámica de la teoría. Esto es muy interesante ya que g pasa de ser una constante que ha de fijarse a mano, a ser una variable que se determina junto con el resto de variables al resolver la dinámica del sistema.

El resto de estados que surgen se dan con $\bar{N}^\perp = N^\perp \geq 2$. De forma similar a como sucedía con los estados de mayor excitación de la cuerda abierta, estos estados tienen masas al cuadrado del orden $\frac{1}{\alpha'}$. Por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento que con los estados de la cuerda abierta,

estos estados no se van a estudiar porque no son observables con los experimentos disponibles hoy en día.

9.3.4. Dinámica

Para poder realizar estas identificaciones de forma totalmente rigurosa, es necesario cerciorarse de que la ecuación de Schrödinger que obedecen las funciones de onda asociadas a los estados de la cuerda cerrada corresponden con las ecuaciones que rigen la dinámica de los campos con los que los queremos identificar. Para ello se considera un estado general sin masa

$$|\psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (9.67)$$

y se impone que satisfaga la ecuación de Schrödinger dada por el hamiltoniano para que represente un estado físico

$$i\partial_\tau |\psi, \tau\rangle = H |\psi, \tau\rangle = \frac{\alpha'}{2} p^K p^K |\psi, \tau\rangle. \quad (9.68)$$

Es decir,

$$i\partial_\tau \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T). \quad (9.69)$$

Tal y como se vio en la sección 7, todas las componentes de los campos, tanto gravitacional, de Kalb-Ramond y escalar sin masa, satisfacen, en el gauge del cono de luz, la ecuación

$$p^2 \phi = 0, \quad (9.70)$$

donde ϕ representa cualquiera de las componentes de los campos mencionados. Esta ecuación es equivalente a

$$(i\partial_+ - \frac{1}{2p^+} p^K p^K) \phi = 0 \quad (9.71)$$

y realizando el cambio de variable $x^+ = \alpha' p^+ \tau$ esta última ecuación se reescribe como

$$(i\partial_\tau - \frac{\alpha'}{2} p^k p^k) \phi = 0. \quad (9.72)$$

Que se trata exactamente de la ecuación que satisfacen las funciones de onda. Por lo tanto, quedan totalmente justificadas las identificaciones realizadas de las funciones de onda con los campos.

10. Más allá de la teoría de cuerdas bosónicas

10.1. Conclusiones

Como se ha visto en las dos últimas secciones, la cuantización de la cuerda relativista da lugar tanto a estados fotónicos como a estados de gravitones. Éste era el objetivo principal de este

trabajo, ver como a partir de una acción bastante simple y razonable surgen de forma natural estados relacionados con la gravedad y estados relacionados con el electromagnetismo, una de las interacciones descritas por el modelo estándar de la física de partículas. Esto indica que las teorías de cuerdas parecen ir por el buen camino para unificar la gravedad con el resto de interacciones bajo un mismo marco teórico.

Sin embargo, la teoría de cuerdas bosónica que se ha construido no puede ser correcta, entre otros motivos, por la existencia de los estados taquiónicos y la ausencia de estados fermiónicos. Es decir, según la teoría que se ha construido no hay partículas de materia. Además, en la cuantización de la teoría solamente han surgido campos gauge abelianos (fotones), mientras que sabemos que existen campos gauge no abelianos descritos por el modelo estándar y observados experimentalmente, que no surgen con esta teoría.

Las teorías con las que se trabaja hoy en día en investigación, llamadas teorías de supercuerdas, son teorías supersimétricas que solucionan los problemas que han surgido al desarrollar la teoría de cuerdas bosónica y son una propuesta viable como teorías de unificación, ya que reproducen el modelo estándar a bajas energías. En esta sección se va a explicar el esquema que se sigue para construir la base de estas teorías. Una de las principales diferencias de las teorías de supercuerdas respecto de la teoría de cuerdas bosónica es que al imponer que los conmutadores $[M^{-I}, M^{-J}]$ se anulen no se obtiene la condición $D = 26$, sino que se obtiene que la dimensión del espacio-tiempo ha de ser $D = 10$.

10.2. Acción y operadores

El primer paso para construir las teorías de supercuerdas es el de añadir a la acción de Polyakov con la que se ha trabajado hasta ahora otro término dependiente de unas nuevas variables. Sobre estas nuevas variables se impondrán relaciones de anticonmutación con el objetivo de reproducir estados fermiónicos, ya que hasta ahora sólo se han considerado relaciones de conmutación. Considerando la acción

$$S = S_B + S_\psi, \quad (10.1)$$

donde S_B es la acción de Polyakov de la teoría de cuerdas bosónica y S_ψ la acción de Dirac en una variedad de dos dimensiones dada por

$$S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left(\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I \right) \quad (10.2)$$

La acción S_ψ ya se ha expresado obviando las componentes + y - ya que trabajando en el gauge del cono de luz su dinámica queda determinada en función de las demás componentes. Se impone además que las variables ψ_α^I sean anticonmutantes, es decir,

$$\{\psi_\alpha^I, \psi_\beta^J\} = \psi_\alpha^I \psi_\beta^J + \psi_\beta^J \psi_\alpha^I = 0. \quad (10.3)$$

Esto implica en particular que

$$(\psi_\alpha^I)^2 = 0. \quad (10.4)$$

La variación de la acción (sólo se va a variar el nuevo término de la acción porque ya se conocen los resultados de variar la acción de Polyakov) da lugar a las ecuaciones del movimiento

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I = 0 \quad \text{y} \quad (\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I = 0 \quad (10.5)$$

y a las condiciones de contorno

$$\psi_1^I(\tau, \sigma^*)\delta\psi_1^I(\tau, \sigma^*) - \psi_2^I(\tau, \sigma^*)\delta\psi_2^I(\tau, \sigma^*) = 0 \quad (10.6)$$

para todo τ y para $\sigma^* = 0, \pi$. Las soluciones son de la forma

$$\psi_1^I(\tau, \sigma) = \psi_1^I(\tau - \sigma) \quad \text{y} \quad \psi_2^I(\tau, \sigma) = \psi_2^I(\tau + \sigma). \quad (10.7)$$

Como las ψ_α^I aparecen de forma cuadrática en la acción, su signo no es físicamente relevante. Esto permite tomarlas $\psi_1^I(\tau, 0) = \psi_2^I(\tau, 0)$, de forma que las condiciones de contorno en $\sigma^* = 0$ se satisfacen. Aunque el signo de las ψ_α^I no es relevante per se, sí que lo es la relación entre el signo de las ψ_1^I y ψ_2^I . Por lo tanto hay dos opciones para satisfacer la condición de contorno en $\sigma^* = \pi$

$$\psi_1^I(\tau, \pi) = \pm\psi_2^I(\tau, \pi). \quad (10.8)$$

Construyendo las variables

$$\Psi^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} \psi_1^I(\tau, \sigma) & \text{si } \sigma \in [0, \pi] \\ \psi_2^I(\tau, -\sigma) & \text{si } \sigma \in [-\pi, 0], \end{cases} \quad (10.9)$$

cumplen que $\Psi^I(\tau, \sigma) = \Psi^I(\tau - \sigma)$ y $\Psi^I(\tau, \pi) = \psi_1^I(\tau, \pi) = \pm\psi_2^I(\tau, \pi) = \pm\Psi(\tau, -\pi)$. Cuando $\Psi^I(\tau, \pi) = +\Psi^I(\tau, -\pi)$, se dice que satisface condiciones de contorno de Ramond y en el caso $\Psi^I(\tau, \pi) = -\Psi^I(\tau, -\pi)$ se dice que satisface condiciones de contorno de Neveu-Schwarz. Cada una de estas condiciones de contorno da lugar a estados diferentes al cuantizar la teoría.

10.2.1. Condiciones Neveu-Schwarz

En este caso las funciones Ψ^I cumplen la relación $\Psi^I(\tau, \sigma + 2\pi) = -\Psi(\tau, \sigma)$ y como dependen de $\tau - \sigma$ se pueden expandir

$$\Psi^I(\tau, \sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^I e^{-ir(\tau - \sigma)} \quad (10.10)$$

ya que

$$e^{ir(\sigma + 2\pi)} = e^{ir\sigma} e^{i(n + \frac{1}{2})2\pi} = e^{ir\sigma} e^{in2\pi} e^{i\pi} = -e^{ir\sigma}. \quad (10.11)$$

Las reglas de anticonmutación de las ψ_α^I inducen las reglas de anticonmutación

$$\{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ}. \quad (10.12)$$

Por lo que se interpretan $b_{\frac{1}{2}}^I, b_{\frac{3}{2}}^I, \dots$ como operadores de aniquilación y $b_{-\frac{1}{2}}^I, b_{-\frac{3}{2}}^I, \dots$ como operadores de creación. Suponiendo la existencia de un estado de vacío $|NS\rangle$ sobre el que estos operadores actúan, los estados del sector Neveu-Schwarz vienen dados por los siguientes productos tensoriales que incluyen los estados de la cuerda bosónica

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{I,n}} \prod_{J=2}^9 \prod_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} (b_{-r}^J)^{\rho_{J,r}} |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (10.13)$$

donde $\lambda_{I,n}$ son los números de ocupación conocidos de la cuerda bosónica y $\rho_{J,r}$ son los números de ocupación fermiónicos que sólo pueden tomar valores 0 o 1 ya que $(b_r^I)^2 = 0$. La masa al cuadrado de los estados de este sector, tras reordenar algunas sumas, viene dada por

$$M_{NS}^2 = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - \frac{1}{2}), \quad (10.14)$$

donde

$$N^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^J b_r^J. \quad (10.15)$$

De esta forma, los primeros estados son

- Para $N^\perp = 0$ se tiene el estado $|NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ con $M^2 = -\frac{1}{2\alpha'}$.
- Para $N^\perp = \frac{1}{2}$ se tienen los 8 estados $b_{-\frac{1}{2}}^I |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ con $M^2 = 0$.
- Para $N^\perp = 1$ se tienen los 8 estados $\alpha_{-1}^I |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ y los estados $b_{-\frac{1}{2}}^I b_{-\frac{1}{2}}^J |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ con $I \neq J$ que cumplen $M^2 = \frac{1}{2\alpha'}$.

Introduciendo el operador $(-1)^F$, donde F es el número fermiónico, y declarando que el estado de vacío es un fermión

$$(-1)^F |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle = - |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (10.16)$$

se tiene que los estados con N^\perp semientero son bosónicos y los estados con N^\perp entero son fermiónicos. De forma que surgen 8 estados bosónicos sin masa.

10.2.2. Condiciones Ramond

Para construir este sector se procede de manera análoga, sólo que como en este caso se cumple $\Psi^I(\tau, \sigma + 2\pi) = \Psi^I(\tau, \sigma)$, la expansión es de la forma

$$\Psi^I(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^I e^{-in(\tau - \sigma)}. \quad (10.17)$$

Las relaciones de anticonmutación son análogas a las obtenidas con las condiciones Neveu-Schwarz

$$\{d_n^I, d_m^J\} = \delta_{n+m,0} \delta^{IJ}. \quad (10.18)$$

Los ocho operadores d_0^I se pueden combinar linealmente para dar 4 operadores de creación ξ_1, ξ_2, ξ_3 y ξ_4 y sus respectivos operadores de aniquilación. Suponiendo un estado de vacío $|0\rangle$ para estos operadores, se pueden construir ocho estados de vacío con un número par de operadores ξ denotados por $|R_a\rangle$ con $a = 1, \dots, 8$ y otros 8 estados de vacío con un número impar de operadores ξ denotados por $|R_{\bar{a}}\rangle$ con $\bar{a} = 1, \dots, 8$. Entonces, un estado general tiene la forma

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{I,n}} \prod_{J=2}^9 \prod_{m=1}^{\infty} (d_{-m}^J)^{\rho_{J,m}} |R_A\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (10.19)$$

donde $|R_A\rangle$ es uno de los estados $|R_a\rangle$ o $|R_{\bar{a}}\rangle$. La masa al cuadrado de estos estados viene dada por

$$M_R^2 = \frac{1}{\alpha'} N^\perp, \quad (10.20)$$

donde

$$N^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n d_{-n}^J d_n^J. \quad (10.21)$$

Introduciendo de nuevo el operador $(-1)^F$ y declarando que el estado $|0\rangle$ es un fermión, se tiene que todos los estados $|R_a\rangle$ son fermiónicos y los estados $|R_{\bar{a}}\rangle$ son bosónicos, todos ellos sin masa.

10.3. Supercuerdas abiertas

Para construir los estados de la supercuerda abierta se van a truncar los estados obtenidos en los dos apartados anteriores, de forma que el espacio final de estados sea consistente y contenga la misma cantidad de estados bosónicos y fermiónicos, obteniéndose así una teoría de supercuerdas abiertas supersimétrica.

Los estados $|R_a\rangle$ y $|R_{\bar{a}}\rangle$ transforman entre ellos como espinores sin mezclarse. La estrategia usual es considerar solamente los estados que surgen de actuar con los operadores de creación sobre los estados $|R_a\rangle$, de forma que se obtienen 8 fermiones sin masa y 128 estados fermiónicos masivos en el primer estado excitado. Este sector suele denominarse $R-$. El sector $R+$, construido actuando sobre los $|R_{\bar{a}}\rangle$ con los operadores de creación, no se tiene en cuenta en el caso de las supercuerdas abiertas.

Los estados construidos con condiciones de Neveu-Schwarz también se truncan. Teniendo en cuenta que ya se han obtenido fermiones a partir de los estados que satisfacen las condiciones de Ramond, se van a considerar solamente los estados bosónicos. Es decir, se van a considerar los estados del sector $N+$ que son los que tienen valor de N^\perp semientero y, por lo tanto, son bosónicos como ya se ha discutido previamente. Los estados fermiónicos del sector $N-$ con N^\perp entero no se tienen en cuenta.

10.4. Supercuerdas cerradas

Las teorías de supercuerdas cerradas se construyen ya que el gravitón no aparece al cuantizar cuerdas abiertas. Las supercuerdas cerradas, de manera análoga a como se vió al cuantizar la cuerda cerrada de la teoría de cuerdas bosónica, es una combinación de una supercuerda abierta que avanza hacia la derecha y otra hacia la izquierda, con cada una de las cuerdas que se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda siendo una supercuerda de uno de los sectores $R+$, $R-$, $NS+$ o $NS-$. Dos de las teorías de supercuerdas más fáciles de contruir, la teoría tipo IIA y la tipo IIB, se construyen considerando supercuerdas cerradas con diferentes combinaciones de este tipo.

Más concretamente, la teoría tipo IIA se construye considerando las combinaciones: $(NS+, NS+)$, $(NS+, R+)$, $(R-, NS+)$ y $(R-, R+)$ y la teoría tipo IIB considerando las combinaciones: $(NS+, NS+)$, $(NS+, R-)$, $(R-, NS+)$ y $(R-, R-)$. En ambas teorías los estados sin masa del sector $(NS+, NS+)$ dan lugar a 64 campos bosónicos

$$g_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}, \quad \phi, \quad (10.22)$$

es decir, dan lugar a gravitones, al campo de Kalb-Ramond y al dilatón. En ambas teorías, los dos sectores que mezclan un sector R con un sector NS dan lugar a un total de 128 estados fermiónicos sin masa en el nivel fundamental. La principal diferencia entre estas dos teorías surge del último sector en el que se combinan dos sectores R . En la teoría tipo IIA el sector $(R-, R+)$ da lugar a los campos A_μ y $A_{\mu\nu\rho}$, mientras que el sector $(R-, R-)$ de la teoría IIB da lugar a los campos A , $A_{\mu\nu}$ y $A_{\mu\nu\rho\tau}$. Todos estos campos son totalmente antisimétricos y sin masa. Pese a esta diferencia, en ambos casos se añaden otros 64 estados bosónicos sin masa a la teoría, dando un total de 128 bosones y 128 fermiones en ambas teorías.

Igual que en el caso de las cuerdas bosónicas, en todos los sectores surgen estados de masa superior que no se tienen en cuenta ya que sus masas son del orden de la masa de Planck y por lo tanto no son observables.

10.5. Otras Teorías de Supercuerdas

Hoy en día se conocen cinco teorías de cuerdas supersimétricas consistentes. Dos de ellas son la teoría tipo IIA y la teoría tipo IIB discutidas previamente. Las otras tres teorías son la heterótica $E_8 \times E_8$, la heterótica $SO(32)$ y la tipo I. Las dos teorías heteróticas se contruyen combinando una cuerda abierta bosónica y una supercuerda abierta y reciben sus nombres en función del grupo de simetría gauge de la propia teoría. La teoría tipo I se construye con cuerdas abiertas y cerradas, con la particularidad de que estas cuerdas son no orientadas, mientras que todas las demás cuerdas y supercuerdas consideradas hasta el momento eran orientadas. Estas cinco teorías de supercuerdas predicen todas que la dimensión del espacio-tiempo ha de ser 10.

Aunque estas cinco teorías se construyan de formas distintas, hay dualidades, transformaciones que permiten relacionar teorías aparentemente distintas, que las relacionan entre ellas. Las prin-

principales transformaciones de dualidad en teoría de cuerdas son la dualidad T y la dualidad S. La dualidad T relaciona cuerdas propagándose en distintos espacio-tiempos, mientras que la dualidad S relaciona una teoría de cuerdas en el régimen de acoplamiento fuerte con otra teoría de cuerdas, aunque también puede ser con la misma, en el régimen de acoplamiento débil. La teoría tipo IIA y la tipo IIB están relacionadas por dualidad T, al igual que las dos teorías heteróticas. Por otro lado, la teoría heterótica $SO(32)$ y la tipo I están relacionadas mediante dualidad S. Además de todas estas relaciones, la teoría tipo I se puede entender como una proyección de tipo “orientifold” de la teoría tipo IIB. Mientras que las dualidades tipo T pueden ser verificadas perturbativamente, las de tipo S son mucho más difíciles de verificar por trabajar en el régimen de acoplamiento fuerte de una de las teorías involucradas. Todos los indicios apuntan, sin embargo, a que deben ser ciertas.

Además de todas estas relaciones entre las distintas teorías, se ha visto que los límites de bajas energías de las teorías tipo IIA y heterótica $E_8 \times E_8$ se pueden entender como diferentes compactificaciones de la teoría de supergravedad, SUGRA, en 11 dimensiones en el régimen de acoplamiento fuerte. Ésto es especialmente alentador ya que existe una única teoría de supergravedad en 11 dimensiones. La existencia de estos dos límites da pie a definir la teoría M como la teoría que a baja energía recupera SUGRA en 11 dimensiones y que en el régimen de acoplamiento débil da lugar a la teoría tipo IIA o a la heterótica $E_8 \times E_8$ bajo compactificación. El siguiente diagrama ilustra las dualidades y relaciones mencionadas.

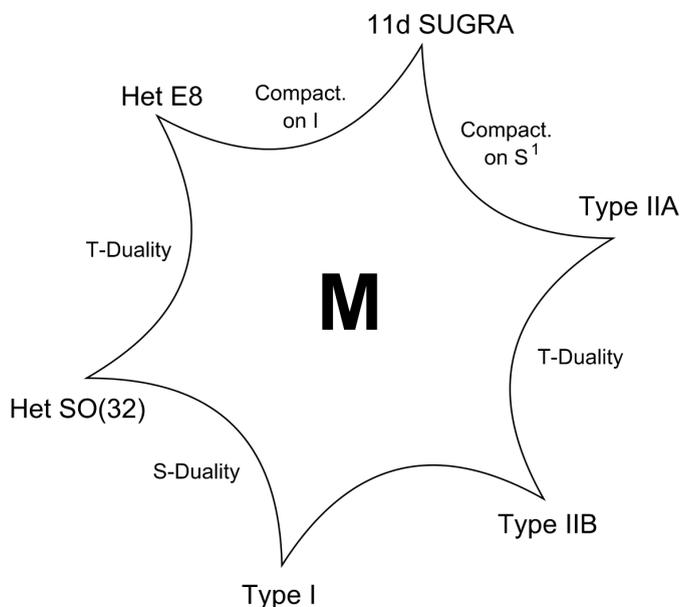


Figura 1: Dualidades en Teoría de Cuerdas

La conexión que hay entre todas las teorías sugiere que, a pesar de que se construyen de formas diferentes, todas ellas son diferentes representaciones de una misma teoría, la teoría M. Ésto, junto al hecho de que teoría de cuerdas permite recuperar a bajas energías la física del modelo estándar

de partículas, sitúa a esta teoría como la mejor candidata que existe en la actualidad a “teoría del todo”.

Referencias

- [1] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2 edition, 2009.
- [2] Joseph Bak and Donald J. Newman. *Analytic Continuation; The Gamma and Zeta Functions*. In: *Complex Analysis*, pages 257–272. Springer New York, New York, NY, 2010.
- [3] Luigi Ambrosio, Giuseppe Da Prato, and Andrea Menzucchi. *Integration*. In: *Introduction to Measure Theory and Integration*, pages 23–43. Edizioni della Normale, Pisa, 2011.
- [4] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry*, pages 48–90. Cambridge University Press, 2019.