Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

TEORÍA DE GRADO TOPOLÓGICO Y APLICACIONES

Clara Sánchez de Posada Orihuela

Dirigido por
Alfonso Ruiz Herrera

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Facultad de Ciencias
Grado en Matemáticas

Enero de 2023

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y Objetivos

Todas las ecuaciones se pueden escribir de la forma $f(x) = b$, donde x es el conjunto de variables, f la manera en que interaccionan y b el resultado de esa interacción. En la mayor parte de ellas, no somos capaces de encontrar la solución. Sin embargo, si sabemos que esta existe, podemos seguir su estudio sin necesidad de conocer su expresión analítica.

Entre las ecuaciones de nuestro interés se encuentran las ecuaciones diferenciales, ya que describen muchos de los procesos que ocurren en la naturaleza. Se mencionan habitualmente las ecuaciones de ondas, las de osciladores armónicos, los problemas de Poisson, etc. Cuando no podemos calcular la solución, conseguir demostrar su existencia es un progreso importante.

En este trabajo vamos a construir una aplicación llamada "grado". El grado asigna a cada ecuación un número entero. Veremos que si el grado es no nulo, la ecuación tendrá solución. El estudio de la teoría del grado comenzó con Brower a principios del siglo XX. Este lo introdujo aplicado a ecuaciones descritas por funciones continuas. Más adelante, Schauder y Leray lo extendieron a operadores compactos.

Es clara la utilidad que el grado tiene en los problemas de ecuaciones diferenciales, pero se puede aplicar también a las ramas del álgebra y la topología. Nos permite dar una demostración sencilla de resultados como el teorema fundamental del álgebra o el teorema de Bolzano en más dimensiones.

Para introducir la forma que va a tener esta aplicación, tomemos un conjunto de funciones $f_\alpha(x) = x^2 + \alpha$ donde α es un número real. En los números complejos, la ecuación $f_\alpha(x) = 0$ tiene dos soluciones, para cualquier valor de α. Sin embargo, en $\mathbb{R}$ puede tener una, dos o ninguna solución, en función de α. Con el fin de perder la dependencia con respecto a α, el grado se definirá a partir de las derivadas parciales de la función.

1.2. Estructura del trabajo

Comenzaremos el acercamiento al grado topológico considerando funciones continuas definidas sobre conjuntos de Jordan en $\mathbb{R}^2$ y que no se anulen en el borde. En ese capítulo, definiremos también el argumento y el índice de una curva.

Seguiremos el análisis extendiendo la noción de grado a cualquier dimensión finita. Para ello, utilizaremos y demostraremos el teorema de Sard. En el capítulo quinto, presentaremos algunos ejemplos del uso del grado en ecuaciones diferenciales.

A lo largo de los capítulos, demostraremos algunos resultados topológicos y algebraicos: el teorema fundamental del álgebra (capítulo 3), el teorema del punto fijo de Brouwer (capítulo 4) y el teoroma de Bolzano en $\mathbb{R}^n$ (capítulo 5).

Utilizaremos las notas dadas por el tutor, además de la bibliografía que se irá citando. Antes de comenzar con el trabajo, haremos una introducción teórica en la que se expondrán notación y conceptos que conviene conocer.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo nos centraremos en algunos preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo. Estos han sido tomados de [1] y [6]. Comenzamos con notación y resultados generales.

La bola de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$, se denotará por

$$B_r(x) \equiv B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

La norma de los elementos de $\mathbb{R}^n$ será la norma euclídea, $\|\cdot\|_2$, y para las funciones, la norma del supremo o del máximo, $\|\cdot\|_\infty$. Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios normados, acotada en su dominio,

$$\|f\|_\infty = sup\{\|f(x)\|_Y : x \in X\}.$$

En general, no se va a especificar la norma utilizada, y se escribirá $\|\cdot\|$.

Definición 2.1. Sean $f_n, f : X \to Y$ funciones, para $n \in \mathbb{N}$, con X, Y dos espacios normados:

- $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a f, si dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$;
- $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$ y $x \in X$.

Definición 2.2 (Convexidad)**.** Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, decimos que es convexo si $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$ para cualesquiera $x, y \in D$ y $\lambda \in [0,1]$.

Recordemos que la intersección de dos conjuntos convexos es convexa.

Por otro lado, llamamos envolvente convexa de D, $convD$, al conjunto convexo más pequeño que contiene a D. Puede definirse también como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a D.

A continuación, presentamos un resultado notable sobre funciones.

Teorema 2.1 (Teorema de extensión de Tietze). *Sean X un subconjunto cerrado de un espacio topológico Y y $f : X \to \mathbb{R}^n$ una función continua, entonces existe una función continua $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}^m$ que cumple $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. La función $\tilde{f}$ se llama extensión de f.*

2.1. Ecuaciones diferenciales

En este apartado incluiremos un pequeño recordatorio de definiciones y resultados de ecuaciones diferenciales. Para más detalle sobre lo expuesto consular [7].

De manera general, toda $F : A \to \mathbb{R}^m$, siendo $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(k+1)n}$ un subconjunto abierto, determina una ecuación diferencial ordinaria

$$F(t, x, x', \dots, x^{(k)}) = 0, \tag{2.1}$$

siendo $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función incógnita y $x^{(k)}$ su derivada k-ésima. Una función u es solución de dicha ecuación diferencial si cumple

- u está bien definida y es derivable k veces en el intervalo I,
- $(t, u(t), u'(t), \dots u^{(k)}(t)) \in A$, para cada $t \in I$,
- $F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0$, para todo $t \in I$.

Aparecerán ecuaciones diferenciales lineales escalares de diferentes órdenes. En general, las de orden n son de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \tag{2.2}$$

donde $a_j, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. A la hora de estudiarlas resulta útil escribirlas como un sistema de ecuaciones, concretamente, haciendo $x_0(t) = x(t)$, $x_1(t) = x'(t)$, $\dots x_{n-1}(t) = x^{(n-2)}(t)$. Obtenemos,

$$\begin{cases} x_0 = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1}, \\ x_{n-1}' = -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \dots - a_{n-1}(t)x_{n-1} + b(t). \end{cases}$$

Introducimos el operador diferencial lineal

$$L(t)x = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x, \quad x \in \mathcal{C}^n(I).$$

Definición 2.3 (Problema de Cauchy)**.** Sean a_j, $j = 1, \ldots, n-1$ y b funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y fijado $t_0 \in I$ y $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, diremos que la función u es solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} L(t)x = b(t), \\ x(t_0) = \xi_1, x'(t_0) = \xi_2, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = \xi_n, \end{cases} \tag{2.3}$$

con

$$L(t)x = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x, \quad x \in \mathcal{C}^n(I),$$

si se verifican las siguientes condiciones:

(a) $u \in \mathcal{C}^n(I)$,

(b) $L(t)u(t) = b(t)$, para todo $t \in I$,

(c) $u(t_0) = \xi_1$, $u'(t_0) = \xi_2$, $\ldots$, $u^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$.

Al problema (2.3) se lo denomina también problema de valores iniciales. De forma más general lo podemos escribir como sigue.

Sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ con $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $(t_0, x_0) \in A$, la función u es solución al siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

si existe $I_u \subset \mathbb{R}$ no vacío y se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $u : I_u \to \mathbb{R}^n$ es derivable en I_u,

(b) $t_0 \in I_u$ y $u(t_0) = x_0$,

(c) $(t, u(t)) \in A$, para todo $t \in I_u$,

(d) $u'(t) = f(t, u(t))$, para todo $t \in I_u$.

Para poder expresar el teorema de existencia y solución del problema de Cauchy, conviene conocer la definición de función lipschitziana.

Definición 2.4. Sea $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}^n$:

- decimos que la función f es localmente lipschitziana en x, y lo denotamos por $f \in Lip^x_{loc}(A, \mathbb{R}^n)$, si para cada conjunto compacto $K \subset A$, existe una constante $L \geq 0$, tal que
$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \text{para cada } (t,x),(t,y) \in K;$$
- decimos que f es lipchitziana en x, y se denota por $f \in Lip^x(A, \mathbb{R}^n)$, si la constante $L \geq 0$ no depende del compacto K.

Proposición 2.2. *Sea $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ cumpliendo que*
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x) \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}), \quad \textit{para todo } i,j = 1, \ldots, n,$$
entonces $f \in Lip^x_{loc}(A, \mathbb{R}^n)$.

La solución al problema de Cauchy admite una formulación en forma integral.

Proposición 2.3 (Formulación integral)**.** *Sean $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ y $(t_0, x_0) \in A$, $u : I_u \to \mathbb{R}^n$ es solución la problema (2.4) si y sólo si se cumplen*

(a) $u \in \mathcal{C}(I_u, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I_u$ y $(t, u(t)) \in A$, para todo $t \in I_u$,

(b) $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds$, para todo $t \in I_u$.

Teorema 2.4 (Teorema de existencia y unicidad en hipótesis de Lipschitz)**.** *Sean $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n) \cap Lip^x_{loc}(A, \mathbb{R}^n)$, entonces, para cada $(t_0, x_0) \in A$, existe $\delta > 0$ y $u \in \mathcal{C}^1(I_\delta, \mathbb{R}^n)$, con $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, solución al problema (2.4). Esta solución es única.*

El teorema de existencia y unicidad es conocido también por los nombres de teorema de Cauchy, teorema de Cauchy-Lipschitz, teorema de Picard y teorema de Picard-Lindelöf.

Teorema 2.5. *Sean $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n) \cap Lip^x_{loc}(A, \mathbb{R}^n)$, $A \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y L la constante de Lipschitz de f en A. Fijamos t_0 como el tiempo inicial y dados dos datos iniciales x_0 y x_1, tomamos las soluciones al problema de Cauchy (2.4) $u(t; t_0, x_0)$ y $u(t; t_0, x_1)$, con $t \in I$, entonces*
$$\|u(t; t_0, x_0) - u(t; t_0, x_1)\| \leq \|x_0 - x_1\| e^{L|t - t_0|}.$$

Este teorema nos da una dependencia continua de las soluciones al problema de Cauchy con respecto a las condiciones iniciales.

Cuando trabajemos con sistemas de ecuaciones diferenciales, demostraremos que existe solución para un intervalo de tiempo dado, luego conviene saber que la solución se puede extender para todo tiempo. Así introducimos el concepto de prolongación.

Definición 2.5. Sea $u : I_u \to \mathbb{R}^n$ una solución de $x' = f(t, x)$, decimos que $v : I_v \to \mathbb{R}^n$ es una prolongación de u si cumple:

(a) $I_u \subset I_v$ y v es solución de $x' = f(t, x)$ en I_v,

(b) $u(t) = v(t)$ para todo $t \in I_u$.

La función u se dice maximal si no admite ninguna prolongación no trivial, es decir, si para todo v prolongación de u, $I_v = I_u$.

En las hipótesis del problema de Cauchy, la prolongación maximal siempre existe y es única. La demostración se encuentra en [7, pág 115]. Basta tomar el conjunto de todas las prolongaciones de la solución a la ecuación diferencial, u, con sus respectivos intervalos de tiempo:

$$\mathcal{P} = \{(y, I_y) : y : I_y \to \mathbb{R}^n, y \text{ prolongación de } u\}.$$

Tomamos como intervalo de la prolongación maximal la unión de intervalos. Para los valores de un intervalo I_y asociado a una prolongación cualquiera, definimos la maximal como $\tilde{u}(t) = y(t)$, $t \in I_y$. La función así construida está bien definida, es solución a la ecuación diferencial y es una prolongación maximal de u.

Teorema 2.6. *Sean $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n) \cap Lip^x_{loc}(A, \mathbb{R}^n)$ y $u : (T_{min}, T_{max}) \to \mathbb{R}^n$ la solución maximal del problema de Cauchy (2.4), entonces,*

- *o bien $T_{max} = +\infty$,*
- *o bien*
$$\lim_{t \to T_{max}^-} \left(\|u(t)\| + \frac{1}{d((t, u(t)), \partial A)} \right) = +\infty.$$

Como conclusión del teorema anterior se tiene que una prolongación es solución al problema mientras esté acotada y bien definida en el dominio de Lipschitz de f.

Definición 2.6. Sea $f \in \mathcal{C}(I \times D, \mathbb{R}^n)$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, D subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, decimos que la función u es una solución global de $x' = f(t,x)$, si $I_u = I$.

Teorema 2.7 (Teorema de prolongación de solución)**.** *Sean $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap Lip^x_{loc}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $t_0 \in I$ y $u : I_u \to \mathbb{R}^n$ la solución maximal del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Supongamos que existe una función $\alpha \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, tal que

$$\|u(t)\| \leq \alpha(t), \quad \textit{para todo } t \in I_u,$$

entonces u es solución global al sistema.

Capítulo 3

Grado en $\mathbb{R}^2$

Comenzaremos nuestro estudio del grado topológico con el caso más sencillo y más visual: funciones en $\mathbb{R}^2$. A lo largo de este capítulo, definiremos dos conceptos que están relacionados: el índice de una curva y el grado de una función en un dominio de Jordan. Para el desarrollo de este capítulo se ha utilizado [9].

Supongamos que tenemos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida sobre un dominio de Jordan Ω. Imponemos $f(x) \neq c$, para cualquier $x \in \partial\Omega$. Nuestro propósito es ver si existe algún valor $x \in Int\Omega$ para el cual se cumpla que $f(x) = c$. Cualquier ecuación de esta forma se puede reescribir como $\tilde{f}(x) = 0$ siendo $\tilde{f}(x) = f(x) - c$, con $x \in \Omega$, por tanto no es restrictivo considerar la ecuación $f(x) = 0$ imponiendo $0 \notin f(\partial\Omega)$. Centraremos el estudio en comprobar si esta última tiene solución.

Empezaremos demostrando que a cada curva le podemos asignar de forma única un argumento, bajo ciertas condiciones. A partir del argumento,

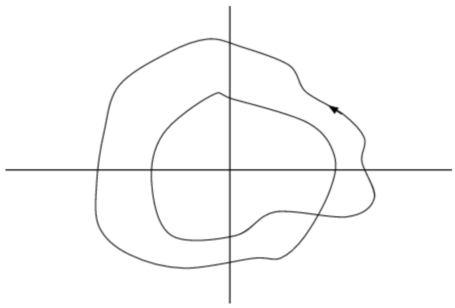


Figura 3.1: Ejemplo de una curva en $\mathbb{R}^2$.

definiremos el índice de la curva. Cualitativamente, el índice es un contador del número de vueltas que la curva da en torno al origen. En la figura 3.1 aparece una curva parametrizada positivamente, que nos sirve como ejemplo para ilustrar que el índice, en este caso, es 2.

3.1. Argumento de una curva

El argumento de una curva está relacionado con el número de vueltas que esta da con respecto a un punto, y por tanto, con su índice. Veamos que, bajo ciertas condiciones, podemos asignar a cada curva un argumento continuo.

Proposición 3.1. *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ una curva continua, entonces existe una función $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua, verificando*

$$\alpha(t) = r(t)(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t)), \tag{3.1}$$

para todo $t \in [a, b]$ y $r(t) = \|\alpha(t)\|$. A la función θ se la denomina argumento de α y está definida de forma única salvo adición de un múltiplo de 2π.

Demostración. En primer lugar, demostramos la unicidad del argumento. Supongamos que existen θ_1, $\theta_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuas, verificando (3.1). Dado $t \in [a, b]$, se cumple

$$(\cos\theta_1(t), \operatorname{sen}\theta_1(t)) = (\cos\theta_2(t), \operatorname{sen}\theta_2(t)),$$

luego,

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) + 2\pi k(t),$$

para cierta función $k : [a, b] \to \mathbb{Z}$. Por hipótesis, los argumentos son continuos, entonces $k(t) = (\theta_1(t) - \theta_2(t))/2\pi$ debe ser continua en $[a, b]$. Concluimos que $k(t)$ debe ser constante para todo $t \in [a, b]$.

En segundo lugar, vamos a demostrar la existencia del argumento para cualquier curva continua. Comenzamos suponiendo que α es de clase $\mathcal{C}^{(1)}([a, b], \mathbb{R}^2)$. Escribiendo $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, definimos

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_a^t \frac{-\alpha_2(s)\alpha_1'(s) + \alpha_2'(s)\alpha_1(s)}{\alpha_1^2(s) + \alpha_2^2(s)} ds, \tag{3.2}$$

para todo $t \in [a, b]$ y siendo $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(a) = \|\alpha(a)\|(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$. La función θ así definida es de clase $\mathcal{C}^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$.

Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' = -\theta'(t)x_2, \\ x_2' = \theta'(t)x_1, \end{cases} \tag{3.3}$$

con $t \in [a, b]$.

La función $u(t) = (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$ es solución de (3.3) en $[a, b]$, ya que

$$u_1'(t) = -\theta'(t)\operatorname{sen}\theta(t) \quad \text{y} \quad u_2'(t) = \theta'(t)\cos\theta(t),$$

para cualquier $t \in [a, b]$.

Definimos la función $v : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $v(t) = (\alpha_1(t)/r(t), \alpha_2(t)/r(t))$, con $t \in [a, b]$. Dado $t \in [a, b]$, se cumple que

$$r^2(t) = \|\alpha(t)\|^2 = \alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t)$$

y

$$r(t)r'(t) = \alpha_1(t)\alpha_1'(t) + \alpha_2(t)\alpha_2'(t).$$

Derivamos las componentes de la función v:

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= \frac{\alpha_1'(t)r(t) - \alpha_1(t)r'(t)}{r^2(t)} = \frac{\alpha_1'(t)r^2(t) - \alpha_1(t)r'(t)r(t)}{r^3(t)} \\ &= \frac{\alpha_1'(t)r^2(t) - \alpha_1^2(t)\alpha_1'(t) - \alpha_1(t)\alpha_2(t)\alpha_2'(t)}{r^3(t)} \\ &= \frac{\alpha_2^2(t)\alpha_1'(t) - \alpha_1(t)\alpha_2(t)\alpha_2'(t)}{r^3(t)} \\ &= \frac{\alpha_2(t)\alpha_1'(t) - \alpha_1(t)\alpha_2'(t)}{r^2(t)}\frac{\alpha_2(t)}{r(t)} = -\theta'(t)v_2(t). \end{aligned}$$

De forma análoga, llegamos a que $v_2'(t) = \theta(t)v_1(t)$, por tanto $v(t)$ es también solución a (3.3) en $[a, b]$.

Consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\theta'(t)x_2(t), \\ x_2'(t) = \theta'(t)x_1(t), \\ x_1(a) = \cos\theta_0, \\ x_2(a) = \operatorname{sen}\theta_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Por definición, $u(0) = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0) = v(0)$, luego u y v son soluciones al problema (3.4). Por el teorema de unicidad de solución del problema de

Cauchy, debe cumplirse que $u(t) = v(t)$, para todo $t \in [a,b]$. Equivalentemente, $\alpha(t) = r(t)(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$, con $t \in [a,b]$.

Suponemos ahora que la curva α es continua en $[a,b]$. Construimos una sucesión de funciones $\alpha_n \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b],\mathbb{R}^2)$ que converjan uniformemente a α. Como $\alpha(t) \neq 0$, para cualquier $t \in [a,b]$, tomando un n grande, tenemos que $\alpha_n(t) \neq 0$, para todo $t \in [a,b]$. Construimos los argumentos θ_n como en la ecuación (3.1).

La sucesión $\{\alpha_n\}$ es convergente. Además, las funciones continuas en $\mathbb{R}$ con la norma del máximo son un espacio completo, por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ será de Cauchy. Dado $\varepsilon = \pi/(8\sqrt{2})$, sabemos que existe N_0 tal que

$$\left\| \frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n(t)\|} - \frac{\alpha_m(t)}{\|\alpha_m(t)\|} \right\| < \frac{\pi}{8\sqrt{2}},$$

si $n, m \geqslant N_0$ y $t \in [a,b]$.

De la misma forma, $\{\theta_n(a)\}$ converge a θ_0. Tomando $\varepsilon = \pi/4$ podemos encontrar otro índice $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geqslant M_0$, se cumple que:

$$|\theta_n(a) - \theta_m(a)| < \frac{\pi}{4}.$$

Llamamos n_0 al máximo entre M_0 y N_0. Probemos que para cualquier $t \in [a,b]$ y $n, m \geqslant n_0$, $|\theta_n(t) - \theta_m(t)| < \pi/4$. Supongamos que existen dos índices, $n', m' > n_0$ y $t' \in (a,b]$ verificando

$$|\theta_{n'}(t) - \theta_{m'}(t)| < \frac{\pi}{4}, \qquad \text{si } t \in [a,t'),$$

y

$$|\theta_{n'}(t') - \theta_{m'}(t')| = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizando la estimación que demostraremos en la nota 3.2, tenemos que

$$|\theta_{n'}(t') - \theta_{m'}(t')| \leq \sqrt{2}|e^{i\theta_{n'}(t')} - e^{i\theta_{m'}(t')}| = \sqrt{2}\left\| \frac{\alpha_{n'}(t')}{\|\alpha_{n'}(t')\|} - \frac{\alpha_{m'}(t')}{\|\alpha_{m'}(t')\|} \right\| < \frac{\pi}{8}.$$

Hemos llegado a una contradicción con $|\theta_{n'}(t') - \theta_{m'}(t')| = \pi/4$. Para todo $n, m \geqslant n_0$ y $t \in [a,b]$, se cumple $|\theta_n(t) - \theta_m(t)| < \pi/4$, luego

$$|\theta_n(t) - \theta_m(t)| \leq \sqrt{2}\left\| \frac{\alpha_n(t)}{\|\alpha_n(t)\|} - \frac{\alpha_m(t)}{\|\alpha_m(t)\|} \right\|,$$

con $t \in [a, b]$ y $n, m \geqslant n_0$.

Hemos demostrado que la sucesión $\theta_n(t)$ es de Cauchy uniformemente en $\mathbb{R}$. Como $\alpha_n(t)/\|\alpha_n(t)\| \to \alpha(t)/\|\alpha(t)\|$ uniformemente en $[a, b]$, concluimos que $(\cos\theta_n(t), \operatorname{sen}\theta_n(t)) \to (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ uniformemente en $[a, b]$. □

Nota 3.2. *Sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, si cumplen que $|\theta_1 - \theta_2| \leq \pi/4$, entonces*

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq \sqrt{2}|e^{i\theta_1} - e^{\theta_2}|.$$

Demostración. Para probarlo basta ver que dado $\theta \in [0, \pi/4]$, $\theta \leq \sqrt{2}|e^{i\theta} - 1|$. De hecho,

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} - 1| =& |cos\theta + i\sin\theta - 1| = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} \\ & \geqslant |\operatorname{sen}\theta| = \operatorname{sen}\theta \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\theta. \end{aligned}$$

□

Si nos fijamos en el final de la demostración del Lema 3.1, queda demostrado el resultado siguiente:

Corolario 3.3. *Sean $\alpha_n, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, con $n \in \mathbb{N}$, funciones continuas tales que $\{\alpha_n\}$ converge α uniformemente en $[a, b]$, si $\theta_n(a)$ converge a $\theta(a)$, entonces $\{\theta_n\}$ converge a θ uniformemente en $[a, b]$.*

Cabe destacar que los resultados obtenidos son válidos para aquellas curvas continuas que no se anulan en el intervalo $[a, b]$. Pero, ¿por qué no podemos tener la imagen de la curva definida en todo $\mathbb{R}^2$? Vamos a ver en el siguiente ejemplo que esta restricción es necesaria para poder tener un argumento continuo de la curva.

Ejemplo 3.4. *Sea una curva $\alpha : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, 1 - t), & si\ t \in [0, 1], \\ (t - 1, 0), & si\ t \in [1, 2]. \end{cases}$$

No existe θ, argumento continuo de la curva. Veámoslo a continuación.

A partir de la definición del argumento en la ecuación (3.2), se observa que $\theta(t) = \theta_0 = \pi/2 = cte$, por tanto la forma de parametrizar la función α debería ser

$$\alpha(t) = |1 - t|(\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2)) = |1 - t| \cdot (0, 1).$$

Esta expresión es cierta cuando estamos en el intervalo [0,1]. Sin embargo, en el intervalo (1,2) no se cumple. Tomamos $t = 1.5$, y aplicamos las dos expresiones que tenemos para la función:

$$(0.5, 0) = \alpha(1.5) = 0.5(0, 1) = (0, 0.5).$$

Es obvio que las anteriores igualdades no son ciertas, por lo que no podemos encontrar un argumento continuo para α.

3.2. Índice de una curva

Como dada una curva podemos definir un argumento, estamos preparados para introducir el índice de una curva.

Definición 3.1 (Índice)**.** Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ una curva continua, definimos el índice de α (alrededor del origen) como

$$\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)), \tag{3.5}$$

donde $\theta(t)$ es, como hasta ahora, un argumento de la curva α.

A partir de la Proposición 3.1, sabemos que el argumento está bien definido salvo la suma de un número entero de veces 2π. Sería interesante comprobar que el índice está bien definido y no depende del argumento que escojamos. El resultado está en la siguiente nota.

Nota 3.5. *El índice de una curva es independiente del argumento escogido.*

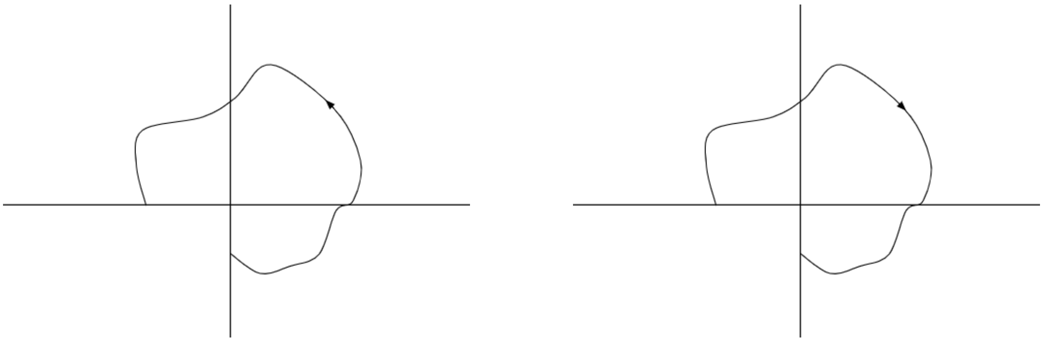
Demostración. Tomamos $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ una curva continua y θ y $\widetilde{\theta}$ dos argumentos de α. Por el Lema 3.1 sabemos que ambos argumentos van a diferir en un número entero de veces 2π. Sin pérdida de generalidad, escribimos $\widetilde{\theta}(t) = n2\pi + \theta(t)$, con $n \in \mathbb{Z}$. Aplicando la definición anterior, el índice de la curva es

$$\frac{1}{2\pi}(\widetilde{\theta}(b) - \widetilde{\theta}(a)) = \frac{1}{2\pi}(n2\pi + \theta(b) - n2\pi - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)).$$

□

Veamos ahora algunos ejemplos que nos aclaren esta noción. Notemos que, para conocer el índice de la curva a estudiar, basta con saber el valor del argumento en los puntos inicial y final del intervalo donde está definida.

Ejemplo 3.6. *En primer lugar, observemos las dos curvas en la figura 3.2. Ambas gráficas muestran la misma curva pero parametrizadas en sentidos distintos. Además, no existe ningún valor para el cual la curva se anule, luego podemos aplicar todos los resultados vistos hasta ahora.*



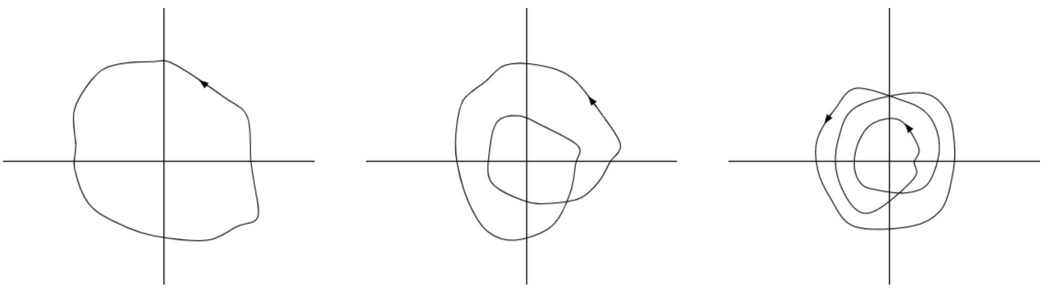
(a) Curva parametrizada en sentido positivo.

(b) Curva parametrizada en sentido negativo.

Figura 3.2: Dos curvas abiertas parametrizadas en sentidos opuestos.

Vamos a llamar θ_I y θ_F a los valores del argumento en el punto inicial y final de las curvas, respectivamente. En el caso de la curva parametrizada positivamente (figura 3.2a), $\theta_I = -\pi/2$ y $\theta_F = \pi$, por tanto su índice vale 3/4. En la figura (3.2b), $\theta_I = \pi$ y $\theta_F = -\pi/2$ y su índice es -3/4.

Fijémonos ahora en lo que ocurre si la curva es cerrada (figura 3.3).



(a) 1 revolución.

(b) 2 revoluciones.

(c) 3 revoluciones.

Figura 3.3: Tres curvas cerradas con distinto número de revoluciones en torno al origen.

Para la primera curva (ver 3.3a), $\theta_I = 0$ y $\theta_F = 2\pi$, entonces su índice es 1. En el caso de la figura 3.3b, $\theta_I = 0$ y $\theta_F = 4\pi$, luego el índice de esta curva es 2. Es fácil comprobar que el índice relativo a la curva de 3.3c es 3.

A partir de los ejemplos anteriores, podemos sacar conclusiones importantes. En primer lugar, si la curva es cerrada, el índice es siempre un número entero. Esto se debe a que la diferencia entre el valor final e inicial del argumento es un múltiplo entero de 2π. Además, en caso de tener la curva parametrizada positivamente, el índice se corresponderá con el número de vueltas que da la función alrededor del origen.

En segundo lugar, cabe destacar que, para conocer el valor del índice asociado a la curva, no es necesario conocer su forma explícita. Basta con saber el valor de su argumento en los extremos del intervalo en los que está definida.

Por último, si consideramos las parametrizaciones positiva y negativa de una curva, observamos que el valor absoluto del índice es el mismo. Sin embargo, para una de las parametrizaciones tenemos índice positivo y para la otra, negativo.

3.3. Grado en $\mathbb{R}^2$

Empezamos recordando algunas nociones básicas.

Definición 3.2 (Curva cerrada)**.** Sea $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una función continua en todo su dominio, decimos que es cerrada si $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Definición 3.3 (Curva simple)**.** Sea $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una función continua en todo su dominio, decimos que es simple, si es inyectiva en el intervalo [0,1]. Esto equivale a decir que una curva es simple si no se corta a sí misma.

Definición 3.4 (Curva de Jordan)**.** Una curva $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ es de Jordan, si es cerrada y simple.

Una curva de Jordan divide el plano en dos conjuntos conexos y disjuntos. Como resultado tenemos un conjunto acotado y otro no acotado. Al primero se lo conoce como dominio de Jordan.

Supongamos que tenemos una función, f, definida en el dominio de Jordan Ω (ver figura 3.4). Esta función puede tener cualquier forma. Tomamos α una parametrización del borde de Ω y hacemos la composición de α con f. El resultado es una curva cerrada que, a cada punto de $\partial\Omega$, le asigna su imagen por la función f. El cálculo del índice de esta curva nos dará idea de los ceros que la función f tiene en el dominio de Jordan. Con esta idea definimos el grado en $\mathbb{R}^2$.

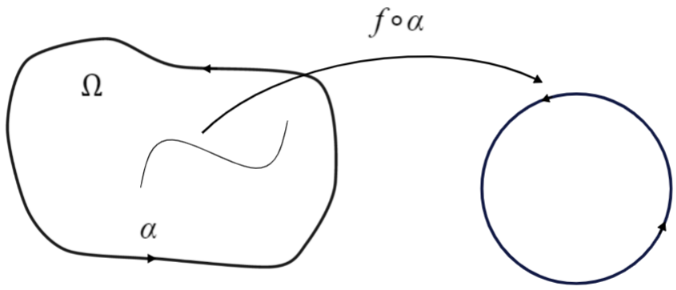


Figura 3.4: Idea gráfica de la noción de índice.

Definición 3.5 (Grado en $\mathbb{R}^2$). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio de Jordan, α una parametrización positiva de $\partial\Omega$ y $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ una función continua que no se anula en $\partial\Omega$, definimos el grado de la función f en Ω, y lo denotamos por $deg(f, \Omega)$, como el índice de $f \circ \alpha$ alrededor del origen.

Al considerar una composición de una curva cerrada con una función, el resultado va a ser una curva cerrada, entonces el grado será siempre un número entero. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 3.7. *El dominio de Jordan que vamos a considerar es el disco unidad y su parametrización positiva $\alpha(t) = (cos(t), sin(t))$. Supongamos que tenemos la función $f(x, y) = (x, -y)$ definida en todo el disco. La composición de ambas es $(f \circ \alpha)(t) = (cos(t), -sin(t))$, que resulta ser una parametrización negativa del borde del disco unidad. Procediendo igual que en los ejemplos de la sección anterior, ejemplo 3.6, obtenemos que el índice de α es 1 mientras que el de $f \circ \alpha$ es -1. Por definición, el grado de la función f en el disco unidad es -1.*

Tomamos, de nuevo, el disco unidad, pero esta vez sobre $\mathbb{C}$, y la función $f(z) = z^n$. Cogemos la parametrización anterior, escrita esta vez en forma de exponencial compleja: $\alpha(t) = e^{i2\pi t}$. Nuestra composición ahora es $(f \circ \alpha)(t) = e^{in2\pi t} = (e^{i2\pi t})^n$, es decir, es una curva que recorre la frontera del disco unidad n veces, por tanto su índice, y por ende, el grado de f, es n.

El grado tiene una definición sencilla y será una herramienta potente a la hora de estudiar los ceros de una función en un dominio de Jordan de forma cualitativa.

3.4. Homotopía

En topología algebraica hay ciertas propiedades que son invariantes topológicos y que se conservan cuando dos objetos son homótopos. Una de dichas propiedades es el grado de una función. Intuitivamente, podemos decir que dos aplicaciones son homótopas, si somos capaces de trazar caminos entre los valores que toman cada una de ellas. Recordemos la definición de homotopía.

Definición 3.6 (Homotopía)**.** Dadas dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos, $f, g : X \to Y$, decimos que son homótopas si existe otra aplicación continua $H : [0,1] \times X \to Y$ cumpliendo que $H(0,x) = f(x)$ y $H(1,x) = g(x)$, para todo $x \in X$. A la aplicación H se la denomina homotopía.

La relación de homotopía es una relación de equivalencia. Es fácil comprobar que se cumplen las propiedades de reflexividad y simetría. Veamos la transitividad de manera resumida. Tomamos tres funciones continuas entre espacios topológicos $f, g, h : X \to Y$. Supongamos que f y g son homótopas y g y h también. Existen $F, G : [0,1] \times X \to Y$ continuas, cumpliendo $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = g(x)$, $G(0,x) = g(x)$ y $G(1,x) = h(x)$, para todo $x \in X$. Construimos la aplicación $H : [0,1] \times X \to Y$, tal que para cada $(\lambda, x) \in [0,1] \times X$,

$$H(\lambda, x) = \begin{cases} F(2\lambda, x), & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}, \\ G(2\lambda - 1, x), & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que $H(0,x) = F(0,x) = f(x)$ y $H(1,x) = G(1,x) = h(x)$, para todo $x \in X$. Además, H es continua, por tanto H es una homotopía entre f y h.

A partir de la definición, se puede ampliar el concepto a dos espacios topológicos, X e Y. Decimos que X e Y son homótopos si, dadas dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$, sus composiciones son homótopas a la identidad del espacio que corresponda. Por ejemplo: si tomamos la homotopía que asigna, a cada $(\lambda, x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$, $H(\lambda, x) = \lambda x$, podemos ver que $\mathbb{R}^n$ es homótopo al conjunto $\{0\}$, es decir, a un punto.

Nosotros nos centraremos en homotopías definidas sobre conjuntos de Jordan. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de Jordan y $H : \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una homotopía que cumple $H(x, \lambda) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, se dice que H es una homotopía admisible. Veremos que si somos capaces de encontrar una homotopía admisible entre dos funciones definidas sobre conjuntos de Jordan, el grado de ambas concidirá. Antes de este resultado, demostraremos el siguiente lema.

Lema 3.8. *Sea Ω un dominio de Jordan, y $f_n, f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ funciones continuas verificando $f_n \neq 0, f \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$, y $n \in \mathbb{N}$. Si $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en $\partial\Omega$, entonces $deg(f_n, \Omega)$ converge a $deg(f, \Omega)$.*

Demostración. Tomamos $\alpha : [a, b] \to \partial\Omega$ una parametrización positiva del borde de Ω. Por hipótesis, sabemos que $f_n \to f$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces $f_n(\alpha(t))$ converge a $f(\alpha(t))$, para todo $t \in [a, b]$ y $f_n \circ \alpha$ converge uniformemente a $f \circ \alpha$ en $[a, b]$.

Tomamos θ_n el argumento de $f_n \circ \alpha$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y θ el de $f \circ \alpha$. Cuando $n \to \infty$, se cumple

$$deg(f_n, \Omega) = \frac{\theta_n(b) - \theta_n(a)}{2\pi} \longrightarrow \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = deg(f, \Omega)$$

□

Teorema 3.9 (Invarianza homotópica)**.** *Sean un dominio de Jordan Ω y una aplicación continua $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, cumpliendo que $H(x, \lambda) \neq 0$, para todo $(x, \lambda) \in \partial\Omega \times [0, 1]$, entonces el grado de $H(\cdot, \lambda)$ en Ω es independiente del valor de λ.*

Demostración. Tomamos α una parametrización positiva del borde de Ω. Notemos que, dado un valor de $\lambda \in [0, 1]$, la composición $H \circ \alpha$ va a ser una curva cerrada, y por tanto $deg(H(\cdot, \lambda), \Omega)$ será un número entero.

Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} deg : [0, 1] &\to \mathbb{Z} \\ \lambda &\to deg(H(\cdot, \lambda), \Omega) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Los conjuntos conexos de $\mathbb{Z}$ son los puntos y sabemos que la imagen por una aplicación continua de un conjunto conexo es conexo. El intervalo $[0, 1]$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, por tanto, si vemos que la aplicación que a cada valor λ asigna el grado de la homotopía es continua, los valores que toma el grado darán lugar a un conjunto conexo.

Tomamos una sucesión $\{\lambda_n\} \subseteq [0, 1]$ que converja a un valor λ_0 en el intervalo [0,1]. Vamos a probar que el grado de $H(\cdot, \lambda_n)$ converge a $H(\cdot, \lambda_0)$

en Ω. Definimos las aplicaciones $f_n(x) = H(x, \lambda_n)$ y $f(x) = H(x, \lambda_0)$, con $x \in \bar{\Omega}$. Veamos que f_n converge uniformemente a f en $\partial\Omega$.

Fijado un valor $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|H(x, \lambda_n) - H(x, \lambda_0)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo $n \geqslant n_0$ y $x \in \partial\Omega$.

Como $H(x,t)$ es continua uniformemente en $\partial\Omega \times [0,1]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|H(x_1, t_1) - H(x_2, t_2)| < \varepsilon,$$

para todo $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \partial\Omega \times [0,1]$, verificando $|x_1 - x_1| < \delta$ y $|t_1 - t_2| < \delta$. Además, $\{\lambda_n\}$ converge a λ_0, entonces, para dicho δ, existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n - \lambda_0| < \delta$ cuando $n \geqslant m_0$. Si tomamos $n_0 = m_0$, tenemos que $|H(x, \lambda_n) - H(x, \lambda_0)| < \varepsilon$, para cualquier $x \in \partial\Omega$ y $n \geqslant n_0$.

Hemos llegado a que la sucesión de aplicaciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en el borde de Ω, luego $\{f_n \circ \alpha\}$ converge también uniformemente a $f \circ \alpha$ en [0,1]. Llamamos θ_n y θ a los argumentos de las curvas $f_n \circ \alpha$ y $f \circ \alpha$, respectivamente. Igual que en la demostración anterior, obtenemos que

$$deg(f_n, \Omega) = \frac{\theta_n(1) - \theta_n(0)}{2\pi} \to \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} = deg(f, \Omega).$$

Queda demostrado que $deg(H(\cdot, \lambda_n), \Omega)$ converge a $deg(H(\cdot, \lambda_0), \Omega)$ y por tanto la aplicación definida en (3.6) es una aplicación continua y debe tener un valor constante.

□

Nos centramos ahora en demostrar el siguiente teorema, que relaciona los ceros de una función en un dominio de Jordan con su grado.

Teorema 3.10 (Existencia)**.** *Sea Ω un dominio de Jordan y sea $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ una función continua con $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Si $deg(f, \Omega) \neq 0$, entonces f tiene un cero en Ω.*

Demostración. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad (cerrado) centrado en el origen, definimos $h : D \to \bar{\Omega}$ un homeomorfismo. Tomamos la función $g : D \to \mathbb{R}^2$ verificando que $g = f \circ h$.

Por ser h un homeomorfismo, es biyectivo, por lo tanto lleva el borde de D al borde de $\bar{\Omega}$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que h mantiene el

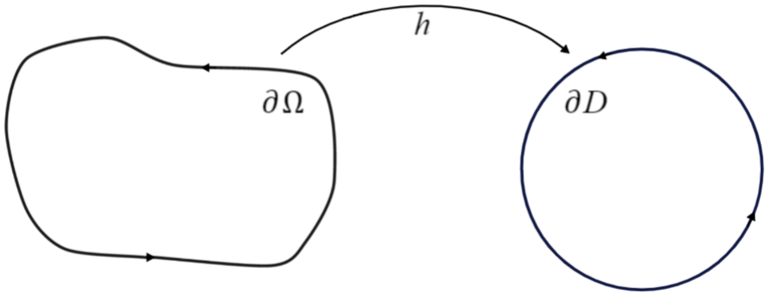


Figura 3.5: Esquema de la actuación del homeomorfismo h.

sentido de giro de la parametrización, como se observa gráficamente en la figura 3.5. Además, decir $g(p) = 0$ es equivalente a decir que $f(h(p)) = 0$ y a su vez que $h(p)$ es un cero de f. Concluimos que dar una vuelta alrededor del disco es lo mismo que dar una vuelta en el dominio de Jordan, luego $deg(f, \bar{\Omega}) = deg(g, D)$.

Supongamos que la aplicación g no tienen ningún cero en el disco unidad y definimos

$$\begin{aligned} H : & D \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, \lambda) \to g(\lambda x). \end{aligned}$$

Es claro que H es continua por serlo g. Además, es una homotopía, de tal forma que la función g original y la que toma el valor constante $g(0)$ son homótopas. Dado un elemento $(x, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]$, es necesario que λx esté en ∂D, por lo tanto $\lambda = 1$, λx debe ser no nulo y se cumple $H(x, \lambda) = g(\lambda x) \neq 0$, para todo $(x, \lambda) \in \partial D \times [0, 1]$. La homotopía es admisible y por la propiedad de invarianza homotópica,

$$deg(H(\cdot, 0), D) = deg(H(\cdot, 1), D).$$

Como $H(0, x) = g(0)$ es una función constante y distinta de 0, llegamos a que $deg(g(0), D) = 0$, entonces $deg(g, D) = 0$.

$\square$

Con el fin de exponer la importancia de estos dos últimos resultados, vamos a enunciar y demostrar, por medio de la noción de grado, el teorema fundamental del álgebra.

Teorema 3.11 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio complejo y no constante, se anula en algún punto de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, cualquiera pero fijo, tomamos el polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

con $a_i \in \mathbb{C}$.

Si $a_0 = 0$, el polinomio resulta

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z \\ &= z(a_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + \ldots a_1). \end{aligned}$$

En particular, $z = 0$ es solución a este polinomio y el teorema estaría demostrado.

Supongamos que $a_0 \neq 0$ y $a_n = 1$, ya que si no lo es, basta con dividir todo el polinomio por a_n. Utilizando la desigualdad triangular y que $|a+b| \geq |a| - |b|$, acotamos el polinomio inferiormente:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |z^n| - \left(|a_{n-1}||z^{n+1}| + \ldots + |a_1||z| + |a_0|\right) \\ &\geq |z^n| - \text{máx}\{a_i : i = 0, \ldots, n-1\} \left(|z|^{n-1} + \ldots + |z| + 1\right). \end{aligned}$$

Podemos encontrar $R > 0$ tal que

$$R^n > \text{máx}\{a_i : i = 0, \ldots, n-1\} \left(R^{n-1} + \ldots + R + 1\right),$$

luego, tomando $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$, $p(z) > 0$.

Llamamos $\Omega = B(0, R)$, un conjunto de Jordan cumpliendo que $p(z) \neq 0$, para todo $z \in \partial\Omega$. Construimos la homotopía $H : \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que, para cada $(z, \lambda) \in \Omega \times [0,1]$, $H(z, \lambda) = z^n + \lambda(a_{n-1} z^{n-1} + \ldots, a_1 z + a_0)$. Usando la acotación anterior, se tiene que $H(z, \lambda) \neq 0$, para todo $(z, \lambda) \in \partial\Omega \times [0,1]$. Esta homotopía cumple las hipótesis del teorema 3.9, luego

$$deg(p, \Omega) = deg(H(\cdot, 1)\Omega) = deg(H(\cdot, 0), \Omega) = n > 0.$$

Por el teorema 3.10, el polinomio p tiene un cero en $\Omega \subset \mathbb{C}$. $\square$

Capítulo 4

Grado en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo vamos a generalizar la noción de grado vista en el capítulo anterior. El problema surge en que muchos de los conceptos usados en $\mathbb{R}^2$ no se pueden extender a $\mathbb{R}^n$. Utilizaremos la función signo que viene definida como

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Para formalizar la idea de grado distinguimos el desarrollo en tres pasos. Los resultados de este capítulo pueden consultarse en [2] y en [5]. Antes de comenzar, introducimos la noción de punto crítico, punto regular y raíz simple:

Definición 4.1 (Punto crítico y punto regular)**.** Sea $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{U}$ un abierto, decimos que un punto $p \in \mathcal{U}$ es un punto crítico, si el rango de la matriz jacobiana de la función en dicho punto, $J_f(p)$, es menor que n. Equivalentemente, podemos caracterizar los puntos críticos como aquellos $p \in \mathcal{U}$ que cumplen $det J_f(p) = 0$. Si el punto no es crítico, se llama regular.

Definición 4.2 (Raíz simple)**.** Dados $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{U}$ un abierto, decimos que los puntos $p \in \mathcal{U}$ que cumplen $f(p) = 0$ son raíces (o ceros) simples de f, si $det(J_f(p)) \neq 0$.

4.1. Caso 1: $f \in \mathcal{C}^{(1)}$ y raíces simples

Recordemos el enunciado del teorema de la función inversa.

Teorema 4.1. *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, Ω abierto y supongamos que existe $a \in \Omega$ tal que $det(J_f(a)) \neq 0$, entonces existe $\mathcal{U} \subset \Omega$, abierto, con $a \in \mathcal{U}$, tal que $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$, es un difeomorfismo*[1].

En esta primera sección vamos a considerar que tenemos una función $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y que todos sus ceros son raíces simples. Como antes, Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto, acotado y no vacío y $f(x) \neq 0$, para cualquier x en $\partial\Omega$. Como todos los ceros simples, si $x \in \Omega$ es un cero de f, se cumple $det(J_f(x)) \neq 0$.

Definimos $S = f^{-1}(\{0\}) = \{\xi \in \Omega : f(\xi) = 0\}$, el conjunto de ceros distintos de f. Bajo estas condiciones veamos que S es un conjunto finito. Por reducción al absurdo, supongamos que S es un conjunto infinito. Tomamos $\{\xi_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset S$ una sucesión de puntos con $\xi_n \neq \xi_m$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$. Como $\bar{\Omega}$ es acotado y cerrado (compacto), existe una subsucesión convergente, $\{\xi_{\sigma(N)}\} \subset \{\xi_N\}$, es decir,

$$\xi_{\sigma(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} p,$$

para cierto $p \in \bar{\Omega}$.

Por hipótesis, $f(\xi_{\sigma(N)}) = 0$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Como f es una función continua, tenemos que $f(p) = 0$. También sabemos que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$, luego, necesariamente, $p \in Int\Omega$. Además, como p es un cero de f y todos los ceros son simples, se cumplirá que $det(J_f(p)) \neq 0$.

Nos encontramos bajo las condiciones del teorema de la función inversa, por tanto existe $\mathcal{U} \subset \Omega$, con $p \in \mathcal{U}$, tal que $f|_{\mathcal{U}}$ es un difeomorfismo. La figura 4.1 es un esquema de lo que hemos visto hasta ahora. Como la sucesión $\{\xi_{\sigma(N)}\}$ converge a p, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_{\sigma(N)} \in \mathcal{U}$, para todo $N \geq N_0$.

Hemos llegado a una contradicción, ya que $f|_{\mathcal{U}}$ es una función biyectiva y tenemos una colección de ceros distintos de f en $\mathcal{U}$. Concluimos pues, que si todos los ceros son simples, deben formar un conjunto finito.

Bajo estas condiciones, queda bien definido el grado de f en Ω de la

[1]Decimos que una función es un difeomorfismo si es una aplicación diferenciable y biyectiva en todo su dominio.

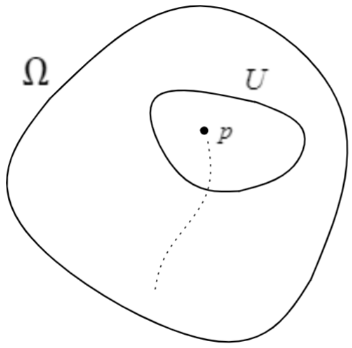


Figura 4.1: Esquema que representa $\Omega, \mathcal{U}$ y la sucesión $\{\xi_{\sigma(N)}\}$ que converge a p.

siguiente forma:

$$deg(f,\Omega) = \sum_{i=1}^{m} sign\{det(J_f(x_i))\}, \tag{4.1}$$

donde $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ es el número finito de ceros de la función.

La expresión $sign\{det(J_f(x))\}$ alude al signo del determinante de la matriz jacobiana. Por convenio, $deg(f,\Omega) = 0$ cuando f no tiene ningún cero, es decir, cuando $S = \emptyset$.

Ejemplo 4.2. *Vamos a considerar la bola sobre $\mathbb{C}$ de radio 1 y centro el origen: $\Omega = B_1(\mathbb{C})$. Tomamos la función $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ tal que, para $z \in \bar{\Omega}$, $f(z) = z^2 - \varepsilon$. Dado $z \in \Omega$ podemos escribir $z = x + iy$ con $(x,y) \in B_1(R^2)$.*

La función es continua, derivable y sus derivadas parciales continuas. El jacobiano de la función viene dado por

$$J_f((x,y)) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

para cada $(x,y) \in B_1(\mathbb{R}^2)$. El conjunto de valores regulares de la función es $S = \{\pm\sqrt{\varepsilon}\}$. Considerando $\varepsilon > 0$, es fácil ver que $deg(f,\Omega) = 2$.

4.2. Caso 2: $f \in \mathcal{C}^{(1)}$

En esta sección quitamos la restricción de que todos los cero sean simples. No podemos afirmar que el determinante de la matriz jacobiana en esos puntos sea distinto de cero. Para darle solución a este problema, buscamos valores regulares de la función f. A continuación enunciamos un resultado que nos da la existencia de los valores regulares.

Teorema 4.3 (Teorema de Sard)**.** *Sean $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, y S el conjunto de puntos críticos de f, entonces $f(S)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^N$.*

La demostración del teorema de Sard se verá en la última sección de este capítulo, sección 4.5. El teorema de Sard se puede enunciar, también, diciendo que el conjunto formado por los valores regulares es denso en $\mathbb{R}^n$. Intuitivamente, nos dice que la mayor parte de elementos en nuestro conjunto Ω, son valores regulares de f.

Partimos de nuevo de una función $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, Ω abierto y S el conjunto de puntos críticos de f. Por el teorema de Sard, $f(S) \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero, luego podemos tomar $\{v_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, una sucesión, de manera que $\{v_N\} \to 0$ y $v_N \notin f(S)$, para cualquier $N \in \mathbb{N}$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos las funciones

$$f_N(x) = f(x) - v_N,$$

con $x \in \Omega$. Los ceros de f_N son simples, para todo $N \in \mathbb{N}$. De hecho, dado $N \in \mathbb{N}$ y sea $p \in \Omega$ tal que $f_N(p) = 0$, se tiene que $f(p) = v_N$, luego $v_N \notin f(S)$ y $p \notin S$. Concluimos que $det(J_{f_N}(p)) = det(J_f(p)) \neq 0$.

Cada función f_N, con $N \in \mathbb{N}$, se encuentra en las condiciones del caso 1 de la sección anterior. Definimos el grado de la función f en Ω como

$$deg(f, \Omega) = \lim_{N\to\infty} deg(f_N, \Omega). \tag{4.2}$$

En un principio, esta definición del grado depende de la elección de $\{v_N\}$ al depender las funciones f_N, con $N \in \mathbb{N}$. Se puede ver que si tomamos $\{\tilde{v}_N\}$ otra sucesión con $\tilde{v}_N \notin f(S)$ y $\{\tilde{v}_N\} \to 0$, el valor $\lim_{N\to\infty} deg(f_N, \Omega)$ no cambia y el grado de f en Ω está bien definido.

Ejemplo 4.4. *Recuperamos el ejemplo de la sección anterior, pero imponiendo $\varepsilon = 0$. Nos centramos en calcular el grado de la función $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, dada por $f(z) = z^2$, siendo Ω la bola unidad en $\mathbb{C}$.*

Definimos las funciones $f_n(z) = f(z) - \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{1/n\}$ converge a cero cuando $n \to \infty$, por tanto $\{f_n\}$ converge uniformemente a f. El grado de f_n es 2, para todo n natural (por el ejemplo (4.2)) y

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega) = 2.$$

4.3. Caso 3: f función continua

Rebajamos las condiciones de las secciones anteriores y consideramos una función $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua. Tomamos $\{f_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ de manera que $f_N \to f$ uniformemente en Ω.

Para valores de $N \in \mathbb{N}$ grandes, se cumple que, dado cualquier $x \in \partial\Omega$, $f_N(x) \neq 0$. Cada una de estas funciones se encuentra en las condiciones del caso 2, por lo cual conocemos el grado de f_N en Ω. Tomando el límite en N, definimos el grado de f como

$$deg(f, \Omega) = \lim_{n \to \infty} deg(f_n, \Omega). \tag{4.3}$$

Si bien queda fuera de los contenidos de este trabajo, puede verse que el grado así definido no depende de la sucesión $\{f_N\}$ de funciones tomada.

Ejemplo 4.5. *Tomamos* $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \ldots \times (-1, 1)$ *la bola unidad en* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una función tal que* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (|x_1|, x_2, \ldots, x_n)$*, para cada* $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$*.*

Dado $m \in \mathbb{N}$*, consideramos* $f_m : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una función tal que, para cada* $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$*,* $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\sqrt{x_1^2 + 1/m}, x_2, \ldots, x_n)$*. La sucesión de funciones* $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f*. Los ceros de* f_m *son* $(\pm i, 0, \ldots, 0)$ *que no están en* $\mathbb{R}^n$*, por tanto* $deg(f_m, \Omega) = 0$*, para cualquier* $m \in \mathbb{N}$*. Conlcuimos que*

$$deg(f, \Omega) = \lim_{m \to \infty} deg(f_m, \Omega) = 0.$$

Hasta ahora hemos estudiado si una función $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, con Ω abierto y acotado, tenía algún cero en Ω. ¿Y si ahora quisiésemos ver si la ecuación $f(x) = p$ tiene alguna solución? Parece coherente que podamos definir una nueva función de la forma $g(x) = f(x) - p$ y estudiar cuándo $g(x) = 0$. El grado de g está definido si $g(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$, lo que se traduce en la condición $f(x) \neq p$, cuando $x \in \partial\Omega$. Para evidenciar esto, podemos añadir otro argumento al grado y escribirlo como

$$deg(f, p, \Omega) = deg(f - p \cdot Id, 0, \Omega) = deg(g, 0, \Omega),$$

siendo Id la aplicación identidad. En gran parte de la literatura se define el grado como una aplicación que depende de estos tres parámetros. De forma rigurosa, si por ejemplo nos encontrásemos en el caso en que $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

y p fuese un valor regular de f,

$$deg(f, p, \Omega) = \sum_{i=1}^{n} sign\{det(J_f(x_i))\},$$

siendo $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x \in \Omega : f(x) = p\}$.

En el trabajo continuaremos estudiando la ecuación $f(x) = 0$ y usando la notación $deg(f, \Omega)$ para expresar el grado de f en Ω.

4.4. Propiedades del Grado de Brouwer

En las secciones anteriores hemos construido el grado, también llamado grado de Brouwer, y en esta nos centraremos en sus propiedades. Sea Ω un subconjutno abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, definimos $\mathcal{C}_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las funciones $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, continuas, que cumplen $f(x) \neq 0$, para todo x en $\partial\Omega$.

Sea $f \in \mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, el grado verifica las siguientes propiedades:

(a) **Aditividad**. Sea $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ una partición de Ω, es decir, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, se cumple

$$\deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1) + deg(f, \Omega_2).$$

Demostración. La demostración es sencilla a partir de la definición constructiva que hemos ido haciendo del grado. Supongamos que f es una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y que todas sus raíces son simples. Como vimos en la sección 4.1, S es un conjunto finito.

Supongamos que $S \subset \Omega_1$. Como $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, la función no tendrá ningún cero en Ω_2, luego se cumplirá que $deg(f, \Omega_2) = 0$ y $deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega_1)$.

Si $S = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{n+1}, \ldots \eta_m\}$, con $\xi_i \in \Omega_1$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\eta_i \in \Omega_2$ si $i = n+1, \ldots, m$ los ceros de f, entonces

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega) &= \sum_{i=1}^{n} sign(detJ_f(\xi_i)) + \sum_{i=n+1}^{m} sign(detJ_f(\eta_i)) \\ &= deg(f, \Omega_1) + deg(f, \Omega_2). \end{aligned}$$

Si la función pertenece a alguno de los casos de las secciones 4.2 o 4.3, aplicamos el algoritmo para obtener las funciones que la aproximan y usamos el procedimiento de arriba sobre estas funciones. □

(b) **Invarianza por homotopías**. Sea $H : [0,1] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua y cumpliendo $H(\lambda, x) \neq 0$ para cualquier $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega$, entonces $deg(H(\lambda, \cdot))$ es independiente del valor de λ. Recordemos que este tipo de homotopías reciben el nombre de homotopías admisibles.

(c) **Normalización**. Si $0 \in \Omega$ y f es la función identidad restringida a Ω, entonces $deg(f, \Omega) = 1$.

Demostración. La demostración de este caso es clara ya que la identidad pertenece a las funciones del primer caso, sección 4.1. De hecho, $f(x) = Id(x) = x$ se anula si y sólo si $x = 0 \in \Omega$ y su matriz Jacobiana es la matriz identidad. □

(d) **Existencia**. Si $deg(f, \Omega) \neq 0$, existe, al menos, un elemento $x \in \Omega$ tal que $f(x) = 0$.

Demostración. Al igual que en el desarrollo del grado, diferenciamos tres casos. En primer lugar, supongamos que f es una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y todos sus ceros son simples. Recordemos que si $S = \emptyset$, siendo S el conjunto de ceros de f en Ω, $deg(f, \Omega) = 0$. Por hipótesis, $deg(f, \Omega) \neq 0$, luego la función tiene, al menos, un cero en Ω.

En segundo lugar, tomamos $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Podemos construir una sucesión $\{f_N\}$ de funciones tales que $f_N : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sean clase $\mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, con todos sus ceros simples, para todo $N \in \mathbb{N}$, y $f_N \to f$ uniformemente en Ω. Por definición, $deg(f, \Omega) = \lim_{N\to\infty} deg(f_N, \Omega)$. Como el grado de una función es siempre un número entero, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \neq deg(f, \Omega) = deg(f_N, \Omega)$, para todo $N \geq N_0$. Con el mismo argumento que el caso anterior, para cada $N \geq N_0$, existe $x_N \in \bar{\Omega}$ tal que $f_N(x_N) = 0$. El conjunto $\bar{\Omega}$ es compacto, luego podemos encontrar $\{x_{\sigma(N)}\}$ subsucesión de $\{x_N\}$, convergente a un cierto valor $p \in \bar{\Omega}$, siempre con $N \geq N_0$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
&|f_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) - f(p)| \\
&\qquad = |f_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) - f(x_{\sigma(N)}) + f(x_{\sigma(N)}) - f(p)| \\
&\qquad \leq |f_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) - f(x_{\sigma(N)})| + |f(x_{\sigma(N)}) - f(p)|.
\end{aligned}
$$

Por la convergencia uniforme, $f_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) \to f(x_{\sigma(N)})$ y por la continuidad de f, $f(x_{\sigma(N)}) \to f(p)$, para todo $N \geq N_0$, entonces se cumple que $0 = f_{\sigma(N)}(x_{\sigma(N)}) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(p)$ y $f(p) = 0$ con $p \in \bar{\Omega}$. De hecho, $p \in Int\Omega$, ya que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Por último, consideramos f una función continua. Recordemos que definíamos el grado como $deg(f, \Omega) = \lim_{N\to\infty} deg(f_N, \Omega)$, siendo $\{f_N\}$ una sucesión de funciones de clase $\mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, cumpliendo $f_N \to f$ uniformemente en Ω. La demostración de este caso es igual a la anterior, puesto que tenemos la continuidad de f y la convergencia uniforme en Ω. □

(e) **Escisión**. Sea Ω' un subconjunto abierto de Ω. Si la función f tiene todos sus ceros en Ω', entonces $deg(f, \Omega) = deg(f, \Omega')$. La demostración de esta sigue el mismo procedimiento que la de (a).

(f) **Dependencia de los valores del borde**. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado y $f, g \in \mathcal{C}_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ dos funciones que satisfacen $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, entonces $deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega)$.

Demostración. Definimos la función $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $H(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)$, para cada $(x, \lambda) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$. Como $H(\lambda, x) = f(x) = g(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial\Omega$, H es una homotopía admisible entre las funciones f y g. Por la propiedad de invarianza homotópica, $deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega)$. □

El grado puede ser definido de manera axiomática como la única función $deg : \mathcal{C}_0 \to \mathbb{N}$ cumpliendo las propiedades *(a), (b), (c)*. La propiedad *(c)* nos permite darle un valor al grado en el caso trivial. Las últimas tres propiedades se obtienen de forma sencilla a partir de las tres primeras. La propiedad de escisión nos permite acotar el dominio de definición de la función y la última propiedad, afirma que el grado de una función depende únicamente de sus valores frontera.

Otro resultado importante vine dado por el siguiente teorema.

Teorema 4.6 (Rouché)**.** *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $f, g \in \mathcal{C}_0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ dos funciones que satisfacen*

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \|f(x)\|,$$

para todo $x \in \partial\Omega$, entonces

$$deg(f, \Omega) = deg(g, \Omega).$$

Demostración. Definimos la aplicación $H : \Omega \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tal que, para cada $(x, \lambda) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$, $H(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)$. Veamos que H es una homotopía admisible. Supongamos que existe $(x_0, \lambda_0) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ cumpliendo $H(x_0, \lambda_0) = 0$, entonces $f(x_0) = \lambda_0(g(x_0) - f(x_0))$. Tomando normas y aplicando la hipótesis del teorema llegamos a la siguiente desigualdad

$$\|f(x_0)\| = \lambda_0\|g(x_0) - f(x_0)\| \leq \lambda_0\|f(x_0)\|.$$

Hay dos posibilidades:

- Si $\lambda_0 < 1$, $\|f(x_0)\| < \|f(x_0)\|$ y llegamos a una contradicción;
- si $\lambda_0 = 1$, $f(x_0) = g(x_0) - f(x_0)$, por lo que $g(x_0) = 0$ con $x_0 \in \partial\Omega$. Llegamos también a una contradicción debido a que g cumple que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Concluimos que H es una homotopía admisible y $deg(f, \Omega) = deg(g, \lambda)$. □

De la misma forma, veamos que se verifica la siguiente proposición.

Proposición 4.7. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y $M > 0$ un escalar cumpliendo*

$$\|f(x) - x\| \leq M,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces f tiene un cero en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Tomamos un escalar $R > M$ y definimos $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ la bola centrada en 0 de radio R. Construimos la homotopía $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, tal que a cada $(x, \lambda) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$ le asigna $H(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)x$. Veamos que esta homotopía es admisible. Supongamos que existen $x_0 \in \partial\Omega$ y $\lambda_0 \in [0, 1]$ tal que $H(x_0, \lambda_0) = 0$. Como $x_0 \in \partial\Omega = \partial B(0, R)$,

$$\|x_0\| = R > M. \tag{4.4}$$

A partir de $H(x_0, \lambda_0) = 0$, obtenemos que $\lambda_0 f(x_0) + (1 - \lambda_0)x_0 = 0$, entonces $\lambda_0(f(x_0) - x_0) = -x_0$. Tomando normas, $\lambda_0\|f(x_0) - x_0\| = \|x_0\|$. Por hipótesis, $\|f(x_0) - x_0\| \leq M$, luego $\|x_0\| \leq M$, lo que se contradice con (4.4). Hemos demostrado que H es una homotopía admisible, luego $deg(f, \Omega) = deg(Id, \Omega) = 1$. Como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f tiene al menos un cero en $\mathbb{R}^n$.

□

Nota 4.8. *En la demostración anterior hemos trabajado con una bola de dimensión n. Podemos restringir el enunciado de la proposición anterior a una función $f : B(r, 0) \to \mathbb{R}^n$, siempre que la cota M cumpla $M < r$.*

Por último, veamos el teorema del punto fijo de Brouwer. Recordemos que un punto fijo de una función, $f : X \to Y$, es aquel $x \in X$ que cumple $f(x) = x$.

Teorema 4.9 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Sea $D = \bar{B}(\mathbf{0}$[2]$, r) \subset \mathbb{R}^n$, la bola cerrada de centro $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$, y $f : D \to D$ una función continua, entonces f tiene, al menos, un punto fijo en D.*

Demostración. Si existe $x \in \partial D$ tal que $f(x) = x$, el teorema ya está demostrado. Supongamos que $f(x) \neq x$, para todo $x \in \partial D$ y veamos que f tiene un punto fijo en $IntD$. Definimos la función $g : D \to D$ tal que $g(x) = x - f(x)$, con $x \in D$. Notemos que $g \in \mathcal{C}_0(D, \mathbb{R}^n)$. Construimos la homotopía $H : D \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que, a cada $(x, \lambda) \in D \times [0,1]$, le asigne $H(x, \lambda) = \lambda g(x) + (1 - \lambda)x = x - \lambda f(x)$. Veamos que es una homotopía admisible. Tomamos $(x, \lambda) \in \partial D \times [0,1]$, entonces

- si $\lambda = 1$, $\|H(x, \lambda)\| = \|x - f(x)\| \neq 0$, ya que si $\|x - f(x)\| = 0$, tenemos que $f(x) = x$ lo que es una contradicción con lo que supusimos al principio;
- si $\lambda = 0$, $\|H(x, \lambda)\| = \|x\| = r > 0$;
- si $\lambda \in (0,1)$, $\|H(x, \lambda)\| \geq \|x\| - \lambda \|f(x)\| > 0$.

Como H es una homotopía admisible, $deg(g, D) = deg(Id, D) = 1$, siendo $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la identidad, y existe $x_0 \in IntD$ tal que $g(x_0) = 0$, o equivalentemente, $f(x_0) = x_0$.

□

Nota 4.10. *El resultado anterior puede extenderse a cualquier conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a una bola.*

[2] $\mathbf{0}$ es el elemento neutro de $\mathbb{R}^n$. En esta resultado se consideran tanto el cero de $\mathbb{R}^n$ como el cero de $\mathbb{R}$ y escribimos el primero en negrita para que no dé lugar a confusión.

4.5. Teorema de Sard

En esta sección, vamos a demostrar el teorema de Sard (ver (4.3)). Se sigue [10] para desarrollar la demostración.

Primero vamos a introducir la noción de paraleloótopo: una generalización del paralelogramo y del paralelepípedo. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n vectores independientes en $\mathbb{R}^n$. El paraleloótopo, P, de vértice x_0 y vectores $\{a_1, \ldots, a_n\}$ que lo delimitan viene dado por

$$P = \left\{ x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : 0 \leqq \lambda_i \leq 1, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

El centro del paraleloótopo es $x_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$. Dado un $j \in \{1, \ldots, n\}$ fijo, el conjunto de puntos del paraleloótopo para los cuales $\lambda_k = 0$ ó 1, se llama cara de P y tiene dimensión $n-1$. P tiene $2n$ caras y el punto $x_0 + \lambda_k a_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$ es el centro de la cara.

Si tomamos como vértice $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ y los vectores canónicos $\{e_1, \ldots, e_n\}$, el paraleloótopo resultante coincide con el cubo unidad de dimensión n:

$$C = \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Es más, si consideramos $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación no singular dada por $h(x) = \sum_{i=1}^{m} x^i a_i$ para cualquier $x \in C$ y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vectores independientes, obtenemos un punto de un paraleloótopo, entonces la imagen por h del cubo unidad, $h(C)$, es un paraleloótopo.

Para demostrar el teorema de Sard vamos a comenzar por los lemas siguientes:

Lema 4.11. *Sea $F \in \mathbb{R}^n$ contenido en el hiperplano[3] H, x_0 un punto fijo de F, y $\|x - x_0\| \leq d$ para todo $x \in F$. Dado $\delta > 0$ y*

$$G_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, F) < \delta\},$$

entonces G_δ es medible y

$$m(G_\delta) \leq 2^n (d + \delta)^{n-1} \delta. \tag{4.5}$$

[3] Un hiperplano es una generalización a más dimensiones del plano en $\mathbb{R}^2$. En el caso n-dimensional, la ecuación que describe el hiperplano es de la forma $a_n x_n + \ldots a_1 x_1 = b$, con algún $a_i \neq 0$.

Demostración. $F \subset H$, luego, G_δ se encuentra entre los hiperplanos H_1 y H_2, paralelos a H y que están a una distancia δ el uno del otro. Construimos un paraleloótopo, P, que contenga a G_δ tal que dos de sus caras sean H_1 y H_2. Suponemos que el origen de P está en H. Si no lo está, basta hacer una traslación.

H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $(n-1)$, luego existe un vector a_1 en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \cdot a_1 = 0$, para todo $x \in H$. Tomamos $\{a_2, \ldots, a_n\}$ una base de H y como a_1 es ortogonal a H, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que los vectores a_i están normalizados, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Sea $y \in G_\delta$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ no nulos tales que

$$y - x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

siendo x_0 el punto de F fijado en el enunciado. Como $y \in G_\delta$, tomamos $x \in F$ tal que $\|y - x\| < \delta$. Además, como a_i y a_j son ortonormales para $i, j = 1, \ldots, n$ con $i \neq j$,

$$a_1(y - x_0) = a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_1 a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{1i} = \lambda_1.$$

Podemos escribir

$$\lambda_1 = a_1(y - x_0) = a_1(y - x) - a_1(x - x_0) = a_1(y - x),$$

luego

$$|\lambda_1| \leq \|a_1\| \|y - x\| = \|y - x\| < \delta.$$

Para $i = 2, \ldots, n$,

$$|\lambda_i| = \|a_i(y - x_0)\| \leq \|a_i\| \left(\|y - x\| + \|x - x_0\|\right) < \delta + d.$$

Como $y = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ para todo $y \in G_\delta$, G_δ está contenido en el paraleloótopo de vértice x_0 y vectores $2\delta a_1, 2(d+\delta)a_i$ con $i = 2, \ldots, n$. La medida de este paraleloótopo es $2^n(d+\delta)^{n-1}\delta$,

$$m(G_\delta) \leq 2^n (d+\delta)^{n-1} \delta.$$

$\square$

Lema 4.12. *Tomamos $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal,*

$$C = \{x = (x^1, \dots, x^n) : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, \dots, n\},$$

el cubo unidad de dimensión n y $P = h(C)$ un paraleloótopo. Dada $\delta > 0$, definimos

$$Q_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, P) < \delta\},$$

entonces Q es medible y

$$m(Q) \leq |det(h)| + A(n)(\|h\| + \delta)^{n-1}\delta, \tag{4.6}$$

siendo $A(n)$ una constante que depende únicamente de n.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $det(h) = 0$[4]. Luego, h es una transformación singular, es decir, la matriz asociada a la transformación h tiene rango menor que n. Por tanto, la dimensión de $P = h(C)$ es menor que n y P va a estar contenido en un hiperplano H de dimensión $n - 1$.

Aplicamos el lema 4.11a P. Para ello, tomamos w_0 centro del cubo y $x_0 = h(w_0)$. Dada $\delta > 0$,

$$m(Q_\delta) \leq 2^n(d + \delta)^{n-1}\delta.$$

Sea $x \in P$ cualquiera, existe $w \in C$ tal que $h(w) = x$. Además,

$$d = \|x - x_0\| = \|h(w) - h(w_0)\| = \|h(w - w_0)\| \leq \|h\|\|w - w_0\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}\|h\|.$$

En la última desigualdad se ha utilizado que la diagonal más larga de un cubo unidad de dimensión n tiene una longitud $\sqrt{n}$ y $\|x - x_0\|$ mide la distancia entre un punto del cubo y el centro, por lo que va a ser menor que $\sqrt{n}/2$.

Por último, se cumple

$$m(Q_\delta) \leq 2^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{n}\|h\| + \delta\right)^{n-1} \delta \leq A(n) \left(\|h\| + \delta\right)^{n-1} \delta,$$

para una cierta constante $A(n)$ que no depende de δ.

[4]Como h es una transformación lineal, lleva asociada una matriz. Por $det(h)$ entendemos el determinante de la matriz de la transformación.

Supongamos ahora que $det(h) \neq 0$, entonces el paraleloótopo P tiene medida $m(P) = |det(h)|$. Tomamos el conjunto $Q \setminus P$ y veamos que $m(Q \setminus P) \leq A(n)(\|h\| + \delta)^{n-1}\delta$. Como P es compacto en $\mathbb{R}^n$, para cada $y \in Q \setminus P$, existe $x \in P$ tal que $\|y - x\| = dist(y, P)$. Dicho punto x pertenece a la frontera de P, luego estará en, al menos, una de las caras de P.

Como h es una transformación lineal, la imagen por h de una cara de C es una cara de P. Dada B una cara de C, $h(B)$ va a ser una cara de P contenida en un hiperplano H. Tomamos x_0 el centro de la cara $h(B)$, por tanto

$$\|x - x_0\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n-1}\|h\|,$$

para todo $x \in h(B)$.

Dado $\delta > 0$, definimos $E = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, h(B)) < \delta\}$, aplicando el lema anterior,

$$m(E) \leq 2^n \left(\frac{1}{2}\sqrt{n-1}\|h\| + \delta\right)^{n-1} \delta \leq A(n)\left(\|h\| + \delta\right)^{n-1} \delta.$$

Concluimos que

$$m(Q) \leq |det(h)| + A(n)\left(\|h\| + \delta\right)^{n-1} \delta,$$

para una cierta constante $A(n)$ independiente de δ. □

En las hipótesis de este lema, el cubo n-dimensional es unitario. Podemos generalizar el resultado a cualquier cubo con el siguiente lema, cuya demostración se deduce de manera sencilla de la anterior.

Lema 4.13. *Sea C un cubo cerrado en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y de longitud α, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y sea $\delta > 0$,*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, h(C)) < \alpha\delta\},$$

entonces Q es medible y

$$m(Q) \leq m(C)\left\{|det(h)| + A(n)\left(\|h\| + \delta\right)^{n-1} \delta\right\}, \tag{4.7}$$

para una cierta constante $A(n)$ que depende sólo de dimensión n.

Lema 4.14. *Sea $C \in \mathbb{R}^n$ un cubo cerrado, con centro x_0 y lados paralelos a los ejes, $f : C \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, entonces*

$$m^*(f(C)) \leq m(C)\{|det\{J_f(x_0)\}| + A(n)(\|f'(x_0)\| + \eta)^{n-1}\eta\}, \tag{4.8}$$

donde $\eta = \sup_{x \in C}\|f'(x) - f'(x_0)\|$, $A(n)$ es una constante que depende sólo de n, $J_f(x_0)$ el jacobiano de f en x_0 y m^* denota la medida exterior de Lebesgue.

Demostración. Consideramos la transformación lineal $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, aplicación diferencial en x_0. Llamamos P a la imagen por $df(x_0)$ de C. Aplicamos el teorema del valor medio y obtenemos que

$$\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\| \leq \eta\|x - x_0\| < \eta\alpha\sqrt{n},$$

para cualquier $x \in C$, con $\eta = \sup\limits_{x\in C}$. Esta desigualdad nos indica que el punto $f(x) - f(x_0) + df(x_0)(x_0)$ que pertenece al cubo trasladado $f(C) - f(x_0) + df(x_0)(x_0)$ y el punto $df(x_0)(x)$ distan menos de $\eta\alpha\sqrt{n}$. Entonces, podemos aplicar el lema 4.13 a $P = df(x_0)(C)$ y resulta que

$$\begin{aligned} m(P) &\leq m(C)\{|det(J_f(x_0))| + B(n)(\|df(x_0)\| + \eta\sqrt{n})^{n-1}\eta\sqrt{n}\} \\ &\leq m(C)\{|det(J_f(x_0))| + A(n)(\|df(x_0)\| + \eta\sqrt{n})^{n-1}\eta\sqrt{n}\}. \end{aligned}$$

En particular, se cumple

$$m^*(P) \leq m(C)\{|det(J_f(x_0))| + A(n)(\|df(x_0)\| + \eta\sqrt{n})^{n-1}\eta\sqrt{n}\}.$$

□

Lema 4.15. *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con diferencial continua, y $J_f(x)$ la matriz jacobiana de f en $x \in D$. Para todo conjunto medible $E \subset D$,*

$$m^*(f(E)) \leq \int_E |det(J_f(x))|dx. \tag{4.9}$$

Demostración. En primer lugar, supongamos que $E \in D$ es un cubo cerrado con lados paralelos a los ejes. Pasaremos a llamarlo C para mantener la notación. Por hipótesis, df es continua. Luego, podemos dividir C en un número finito de cubos, $C_1, \ldots, C_N$, con centros $x_1, \ldots, x_N$ y lados paralelos a los ejes. Además, cumplen que $\|f'(x) - f'(x_k)\| \leq \varepsilon$, para todo $x \in C_k$, con $k = 1, \ldots, N$ y para un cierto $\varepsilon > 0$.

Aplicando el lema 4.14 a cada cubo C_k, tenemos que

$$m^*(f(C_k)) \leq m(C_k)\{|det(J_f(x_k))| + A\varepsilon\}, \quad \text{con } k = 1, \ldots, N,$$

para una cierta A independiente de k, entonces,

$$m^*(f(C)) \leq \sum_{k=1}^{N} m^*(f(C_k)) > \sum_{k=1}^{n} |det(J_f(x_k))|m(C_k) + A\varepsilon m(C).$$

Si hacemos tender el diámetro de los cubos a cero, el sumatorio se puede aproximar por una integral de Riemann, de forma que

$$m^*(f(E)) = m^*(f(C)) \leq \int_E |det(J_f(x_0))|dx. \tag{4.10}$$

En segundo lugar, supongamos que E es medible en D. Por ser medible, podemos encontrar $\bar{E}$ un conjunto tal que $E \subset \tilde{E}$ tal que $m(E) = m(\tilde{E})$. Además, $\tilde{E}$ será intersección de conjuntos abiertos en D, $\{\mathcal{U}_n\}_n$. Tomamos $C \subset D$ un cubo cerrado con lados paralelos a los ejes y podemos aplicar (4.10) al conjunto $C \cap \mathcal{U}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Llegamos a la siguiente desigualdad:

$$m^*(f(C \cap \mathcal{U}_n)) \leq \int_{C\cap\mathcal{U}_n} |det(J_f(x))|dx.$$

Como $E \subset \cap_n \mathcal{U}_n$, se cumple también

$$m^*(f(C \cap \mathcal{U}_n)) \leq \int_{C\cap\mathcal{U}_n} |det(J_f(x))|dx.$$

El jacobiano está acotado en C, luego cuando $n \to \infty$, la integral no diverge y llegamos a que

$$m^*(f(C \cap E)) \leq \int_{C\cap E_1} |det(J_f(x))|dx = \int_{C\cap E} |det(J_f(x))|dx.$$

Podemos escribir D como unión contable de cubos. En general, tenemos que

$$m^*(f(E)) \leq \int_E |det(J_f(x))|dx.$$

$\square$

Lema 4.16. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, entonces $f(E)$ es medible para todo subconjunto medible E de D.*

Demostración. La función $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, luego, podemos tomar el jacobiano de f en cada punto $x \in D$, dado por $J_f(x)$. Tomamos $E_0 \in D$ un conjunto tal que $det(J_f(x)) = 0$, para todo $x \in E_0$, es decir, $E_0 = det(J_f(\{0\}))^{-1}$. Como $\{0\}$ es un cerrado en $\mathbb{R}$, por el teorema de la función inversa, E_0 es un subconjunto cerrado de E_0, luego, $D \setminus E_0$ es abierto. $D \setminus E_0$ es medible, ya que todo conjunto abierto es medible.

Supongamos ahora que $det(J_f(x)) \neq 0$ en D. En particular, se tiene que $J_f(x) \neq 0$, para todo $x \in D$. Por el teorema de la función inversa, f^{-1} es una función de clase $\mathcal{C}^1(R^n, R^n)$ localmente, es decir, f es un homomorfismo[5] localmente.

$\mathbb{R}^n$ con la topología usual es un espacio métrico, entonces cumple el primer axioma de numerabilidad: para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe una base de entornos de x numerable. Todas las métricas son equivalentes y dan lugar a la misma topología usual. Podemos tomar la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$ y los elementos de la base serán los cubos. D estará recubierto por un conjunto numerable de cubos cerrados. Por el teorema de Heine-Borel, dado un recubrimiento de uno de los cubos, podemos encontrar un subrecubrimiento finito. En conclusión, existen $C_1, \ldots, C_N$ cubos cerrados de dimensión n, tales que

$$D \subset \cup_{i=1}^{N} C_i.$$

Cada uno de estos cubos va a resultar ser un entorno de algún punto en D, por tanto f es un homomorfismo en cada C_i con $i = 1; \ldots, n$ y por ende, en D.

Es claro que $E = \cup_{i=1}^{N} (C_i \cap E)$. De donde se deduce que

$$f(E) = \cup_{i=1}^{N} f(C_i \cap E).$$

Sea $C \subset D$ un cubo cerrado, E un conjunto medible y f un homomorfismo de D en $\mathbb{R}^n$. Veamos que $f(E \cap C)$ es medible. Si vemos esto tendremos que $f(E)$ es medible, por ser unión finita de conjuntos medibles.

No es restricitivo suponer que E es un conjunto cerrado, ya que si es abierto, podemos escribirlo como unión de cubos cerrados. $E \cap C$ es un conjunto cerrado y por tanto, $f(E \cap C)$ también. Si E es unión contable de conjuntos cerrados, $f(E \cap C)$ es medible. A partir del lema 4.15 vemos que, si E tiene medida cero, $f(E \cap C)$ es medible.

[5]Una función f se dice que es un homomorfismo si es continua, biyectiva y su inversa es continua.

Como todo conjunto medible es unión de un conjunto de medida cero y uno unión de cerrados, queda demostrado que si E es medible, $f(E)$ también lo es. □

Con estos lemas que hemos visto, queda demostrado el siguiente teorema:

Teorema 4.17. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función cuya diferencial es continua, y $J_f(x)$ el jacobiano de f en x, entonces para todo $E \subset D$ medible, el conjunto $f(E)$ es también medible y*

$$m(f(E)) \leq \int_E |det\{J_f(x)\}|dx. \tag{4.11}$$

En estos momentos ya somos capaces de demostrar el teorema de Sard.

Teorema 4.18 (Teorema de Sard)**.** *Sea $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $\Omega \in \mathbb{R}^n$ abierto y S el conjunto de puntos críticos de f, entonces $f(S)$ tiene medida cero.*

Demostración. Basta notar que $det(J_f(x)) = 0$ para todo $x \in S$, entonces,

$$m^*(f(S)) \leq \int_S det(J_f(x))dx = 0.$$

□

Capítulo 5

Aplicaciones en ecuaciones diferenciales

El grado de Brouwer nos permite analizar la existencia de soluciones a ecuaciones del tipo $f(x) = 0$, bajo ciertas condiciones. En este capítulo utilizaremos esta herramienta para el estudio de dos sistemas de ecuaciones diferenciales distintos. Debemos recordar los resultados expuestos en la sección 2.1, haciendo especial hincapié en el teorema de existencia y unicidad 2.4 y el teorema de prolongación de solución 2.7.

5.1. Problema de Dirichlet en una dimensión

Sea $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y acotada, probemos que el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} x'' = F(t, x(t)), \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

tiene solución. Dado un valor $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' = F(t, x(t)), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = \alpha. \end{cases} \tag{5.2}$$

Por el teorema de existencia y unicidad, sabemos que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, (5.2) tiene una única solución. Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ y tomamos $x_\alpha(t) : I \to \mathbb{R}$ solución al problema de valores iniciales para un cierto $I \subset [0,1]$. Como

$x'_\alpha(0) = \alpha$, $x_\alpha(t)$ está acotada, luego podemos aplicar el teorema 2.7 y prolongar x_α al intervalo $[0,1]$.

Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = x_\alpha(1)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Por el teorema de dependencia continua de las condiciones iniciales, f es una función continua. Si encontramos algún valor $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual $f(\alpha) = 0$, habremos demostrado que existe solución al problema de Dirichlet.

Teorema 5.1. *Sea $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y acotada, entonces el problema de Dirichlet (5.1) tiene solución.*

Demostración. Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$ y tomamos $x_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ la solución al problema (5.2). Reescribimos el sistema de ecuaciones diferenciales usando $x_1(t) = x_\alpha(t)$ y $x_2(t) = x'_1(t) = x'_\alpha(t)$, con $t \in [0,1]$. El sistema resultante es el que mostramos a continuación:

$$\begin{cases} x'_2(t) = F(t, x_1(t)), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = \alpha. \end{cases} \tag{5.3}$$

Integrando, encontramos la siguiente expresión para x_2

$$x_2(t) = \alpha + \int_0^t F(s, x_1(s))ds, \quad \text{para todo } t \in [0,1]. \tag{5.4}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t x_2(s)ds = \int_0^t \left[\alpha + \int_0^s F(r, x_1(r))dr\right] ds \\ &= \alpha t + \int_0^t \left[\int_0^s F(r, x_1(r))dr\right] ds, \quad \text{para todo } t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dado $t \in [0,1]$, evaluemos la integral $\int_0^t \left(\int_0^s F(r, x_1(r))dr\right) ds$. Para ello, llamamos $u(s) = \int_0^s F(r, x_1(r))dr$. La integral resulta $\int_0^t u(s)ds$. Aplicando la fórmula de integración por partes, llegamos a que

$$\int_0^t u(s)ds = tu(t) - \int_0^t su'(s)ds. \tag{5.6}$$

Por el teorema fundamental del cálculo y la expresión de $u(s)$, deducimos que $u'(s) = F(s, x_1(s))$. Insertando esta expresión en (5.6) y sustituyendo

$u(t)$ por su valor, concluimos que

$$\begin{aligned}\int_0^t u(s)ds &= t\int_0^t F(s, x_1(s))ds - \int_0^t sF(s, x_1(s))ds \\ &= \int_0^t (t-s)F(s, x_1(s))ds.\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (5.5), obtenemos la siguiente expresión para $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \alpha t + \int_0^t (t-s)F(s, x_1(s))ds, \tag{5.7}$$

para todo $t \in [0, 1]$. Recuperando la función solución al problema de valores iniciales,

$$x_\alpha(t) = \alpha t + \int_0^t (t-s)F(s, x_\alpha(s))ds, \tag{5.8}$$

para todo $t \in [0, 1]$. En particular, si hacemos $t = 1$, tenemos

$$f(\alpha) = x_\alpha(1) = \alpha + \int_0^1 (1-s)F(s, x_\alpha(s))ds. \tag{5.9}$$

Veamos ahora que, para dicho $\alpha \in \mathbb{R}$ que hemos fijado, $f(\alpha)$ se anula. Por hipótesis del teorema, F está acotada, entonces existe un escalar $M > 0$ tal que $\|F(t, x)\| \leq M$, para todo $t \in [0, 1]$ y $x \in \mathbb{R}$. Utilizando esta cota, obtenemos que para cualquier $t \in [0, 1]$,

$$\|x_\alpha(t) - \alpha t\| = \left\| \int_0^1 (1-s)F(s, x_\alpha(s))ds \right\| \leq M \left\| \int_0^t (t-s)ds \right\|.$$

Tomamos $t = 1$ y encontramos que $\|x_\alpha(1) - \alpha\| \leq M/2$. Esto equivale a $\|f(\alpha) - \alpha\| \leq M/2$. Se cumplen las hipótesis de la proposición 4.7, luego f tiene un cero en $\mathbb{R}$. □

Nota 5.2. *Demostrando que existe algún número real α tal que $f(\alpha) = 0$, hemos demostrado que existe una función $x_\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ verificando el problema (5.2) y que cumple también $x_\alpha(1) = 0$. Queda demostrada la existencia de solución al problema de Dirichlet (5.1).*

Nota 5.3. *En la demostración anterior, una vez que hemos llegado a $\|f(\alpha) - \alpha\| \leq M/2$, podemos probar el resultado sin necesidad de conocer la proposición 4.7. La función se encontrará en una franja como la de la figura 5.1. A partir de la ecuación (5.9), vemos que*

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha) = +\infty \quad y \quad \lim_{\alpha\to-\infty} f(\alpha) = -\infty.$$

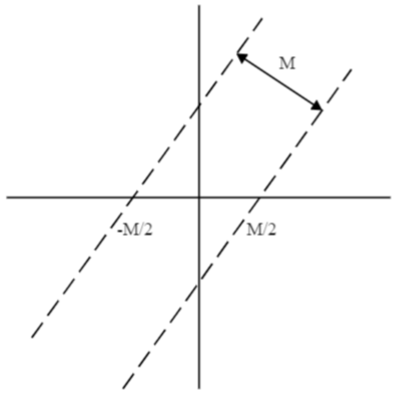


Figura 5.1: Franja que representa $\|f(\alpha) - \alpha\| \leq M/2$.

Aplicando el teorema de Bolzano, debe existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

5.2. Soluciones periódicas de un sistema

En esta sección nos centramos en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_2), \\ x_2' = F_1(t, x_1), \end{cases} \tag{5.10}$$

donde $F_1, F_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^{(1)}([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y F_2 está acotada. Además, suponemos que existe un escalar $\rho > 0$ tal que

$$\begin{aligned} F_1(t, \rho) < 0 < F_1(t, -\rho), \\ F_2(t, -\rho) < 0 < F_2(t, \rho), \end{aligned} \tag{5.11}$$

para todo $t \in [0,1]$. Las condiciones de (5.11) se pueden observar gráficamente en la figura 5.2. Estas ponen en manifiesto en qué zonas se encuentran las funciones F_1 y F_2 en función de ρ.

El problema al que nos vamos a enfrentar viene enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 5.4. *Sean $F_1, F_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^{(1)}([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ con F_2 acotada y cumpliendo las condiciones (5.11), el problema*

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1(t, x_2(t)), \\ x_2'(t) = F_2(t, x_1(t)), \\ x_1(0) = x_1(1), \\ x_2(0) = x_2(1), \end{cases} \tag{5.12}$$

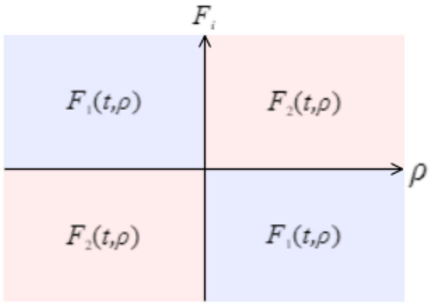


Figura 5.2: Representación de los signos de F_1 (en azul) y F_2 (en rosa) en función del valor de ρ.

tiene solución.

Demostración. Dados $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, consideramos el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1(t, x_2(t)), \\ x_2'(t) = F_2(t, x_1(t)), \\ x_1(0) = \xi, \\ x_2(0) = \eta. \end{cases} \tag{5.13}$$

Por el teorema de existencia y unicidad, sabemos que existe $u : I_0 \to \mathbb{R}^2$ solución al problema (5.13), con $u(t) = (u_1(t,\xi,\eta), u_2(t,\xi,\eta))$, para todo $t \in I_0 \subset [0,1]$. Probemos que u se puede prolongar al intervalo [0,1]. Utilizando el teorema 2.7, veamos que la solución no explota.

Por hipótesis, F_2 está acotada, por lo que existe un escalar $M_2 > 0$, tal que $|F_2(t,x)| \leq M_2$, para todo $t \in [0,1]$ y para todo $x \in \mathbb{R}$. Fijamos $R > 0$ y tomamos $M_1 > 0$ tal que $|F_1(t,x)| \leq M_1$, para todo $x \in [-R-2M_2, R+2M_2]$ y $t \in [0,1]$.

Integrando e imponiendo las condiciones iniciales, tenemos que

$$\begin{aligned} u_1(t,\xi,\eta) &= \xi + \int_0^t F_1(s, u_2(s,\xi,\eta))ds, \\ u_2(t,\xi,\eta) &= \eta + \int_0^t F_2(s, u_1(s,\xi,\eta))ds, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$. Utilizando que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)dt|$,

$$|u_2(t,\xi,\eta) - \eta| = \left|\int_0^t F_2(s, u_1(s,\xi,\eta))\right| \leq tM_2, \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

En particular, $|u_2(t,\xi,\eta) - \eta| \leq M_2$, entonces

$$-M_2 \leq u_2(t,\xi,\eta) - \eta \leq M_2 \Leftrightarrow \eta - M_2 \leq u_2(t,\xi,\eta) \leq \eta + M_2. \tag{5.14}$$

Definimos $a = R + M_1$ y $b = R + M_2$ y tomamos $\Omega = (-a,a) \times (-b,b)$. Si $(\xi,\eta) \in \bar{\Omega}$, se cumple que

$$|u_2(t,\xi,\eta)| \leq |\eta| + \left|\int_0^t F_2(t, u_1(t,\xi,\eta))ds\right| \leq b + tM_2 \leq R + 2M_2$$

para todo $t \in [0,1]$.

Si $(\xi,\eta) \in \bar{\Omega}$, u_2 es tal que $|F_1(t, u_2(t,\xi,b))| \leq M_1$, para cualquier $t \in [0,1]$, deducimos que $|u_1(t,\xi,\eta) - \xi| \leq tM_1$, para todo $t \in [0,1]$. En particular,

$$\xi - M_1 \leq u_1(t,\xi,\eta) \leq \xi + M_1. \tag{5.15}$$

Hemos visto que $u(t) = (u_1(t,\xi,\eta), u_2(t,\xi,\eta))$ está acotada, luego es solución del problema (5.13) y esta definida en el intervalo [0,1]. Busquemos una solución a (5.12). Definimos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que, a cada $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, le asigne

$$f(\xi,\eta) = (f_1(\xi,\eta), f_2(\xi,\eta)) = (u_1(1,\xi,\eta) - \xi, u_2(1,\xi,\eta) - \eta).$$

Queremos ver que existen $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, tales que $f(\xi,\eta) = 0$, es decir, $u_1(1) = \xi = u_1(0)$ y $u_2(1) = \eta = u_2(0)$. Para ello, consideramos $(\xi,\eta) \in \partial\bar{\Omega}$ y diferenciamos cuatro casos:

- si $\eta = b$, utilizando (5.14), obtenemos que $u_2(t,\xi,\eta) \geq \eta - M_2 = R > 0$. Por las condiciones (5.11), $F_1(1, u_2(1,\xi,b)) < 0$, entonces

$$f_1(\xi,b) = u_1(1,\xi,b) - \xi = \int_0^1 F_1(1, u_2(1,\xi,b)) < 0;$$

- si $\eta = -b$, $u_2(t,\xi,\eta) \leq \eta + M_2 = -b + M_2 = -R < 0$, por lo tanto $F_1(1, u_2(1,\xi,b)) > 0$ y $f_1(\xi,-b) > 0$;

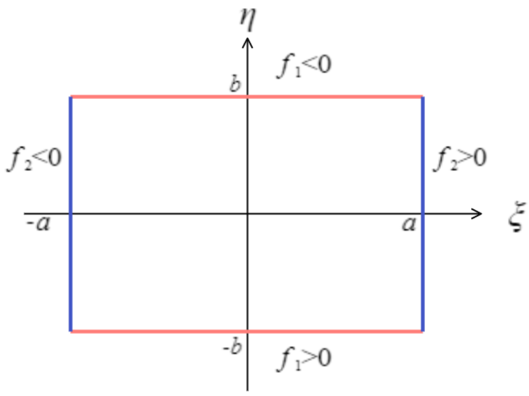


Figura 5.3: Representación de los signos encontrados para la función f en la demostración del teorema 5.4.

- si $\xi = a$, por (5.15), $u_1(1, a, \eta) \geq a - M_1 = R > 0$, por lo tanto $F_2(1, u_1(1, a, \eta)) > 0$ y $f_2(a, \eta) > 0$;
- si $\xi = -a$, se cumple $u_1(1, -a, \eta) \leq a + M_1 = -R < 0$ y tenemos que $F_2(1, u_1(1, -a, \eta)) < 0$ y $f_2(-a, \eta) < 0$.

En la figura 5.3 podemos ver respresentadas las propiedades de la función f. Dicha función cumple las hipótesis del teorema de Poincaré-Miranda, que se expondrá en el siguiente capítulo, por lo que existen $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in \Omega$ tales que $f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = (0, 0)$. Hemos encontrado $u_1(t)$ y $u_2(t)$ verificando el problema (5.12) en Ω.

$\square$

5.3. Teorema de Poincaré-Miranda

En esta sección enunciamos el teorema de Poincaré-Miranda. En primer lugar, veremos su demostración en $\mathbb{R}^2$ y después, lo probaremos en $\mathbb{R}^n$. Este teorema se puede entender como la extensión del teorema de Bolzano a más dimensiones.

Teorema 5.5 (Teorema de Poincaré-Miranda en $\mathbb{R}^2$)**.** *Sean $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, con $(0, 0) \in IntQ$, un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y $f : Q \to \mathbb{R}^2$ una función continua, cuyas componentes se denotan por $f_1.f_2 : Q \to \mathbb{R}$, es decir,*

$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, *para todo* $(x, y) \in Q$. *Si se cumple que*

$$f_1(a_1, y) < 0 < f_1(b_1, y) \quad y \quad f_2(x, a_2) < 0 < f_2(x, b_2), \tag{5.16}$$

para todo $x \in [a_1, b_1]$ *e* $y \in [a_2, b_2]$, *entonces existe* $(x_0, y_0) \in IntQ$ *tal que,* $f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Demostración. Como $(0, 0) \in IntQ$, se tiene que $a_1 < 0 < b_1$ y $a_2 < 0 < b_2$. Construimos la homotopía $H : Q \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$H((x, y), \lambda) = \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)(x, y),$$

con $(x, y) \in Q$ y $\lambda \in [0, 1]$. Veamos que $H((x, y), \lambda) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \partial Q$ y $\lambda \in [0, 1]$.

En la figura 5.4 está representado el conjunto ∂Q que se corresponde con los lados de un rectángulo. Para ver que la homotopía es admisible, debemos evaluarla en cada uno de los lados. Tomamos $(x_0, y_0) \in \partial Q$ y $\lambda_0 \in [0, 1]$. Se distinguen los siguientes casos:

- Lado rojo: $x_0 = a_1$ e $y_0 \in [a_2, b_2]$, luego

  $$H((a_1, y_0), \lambda_0) = (\lambda_0 f_1(a_1, y_0) + (1 - \lambda_0)a_1, \lambda_0 f_2(a_1, y_0) + (1 - \lambda_0)y_0).$$

  Por hipótesis, $f_1(a_1, y_0) < 0$ y $a_1 < 0$, por lo tanto su combinación convexa cumplirá que $\lambda_0 f_1(a_1, y_0) + (1 - \lambda_0)a_1 < 0$.

- Lado verde: $x_0 = b_1$ e $y_0 \in [a_2, b_2]$, luego

  $$H((b_1, y_0), \lambda_0) = (\lambda_0 f_1(b_1, y_0) + (1 - \lambda_0)b_1, \lambda_0 f_2(b_1, y_0) + (1 - \lambda_0)y_0).$$

  Por hipótesis, $f_1(b_1, y_0) > 0$ y $b_1 > 0$, entonces se tiene que $\lambda_0 f_1(b_1, y_0) + (1 - \lambda_0)b_1 > 0$.

- Lado azul: $x_0 \in [a_1, b_1]$ e $y_0 = a_2$, por tanto

  $$H((x_0, a_2), \lambda_0) = (\lambda_0 f_1(x_0, a_2) + (1 - \lambda_0)x_0, \lambda_0 f_2(x_0, a_2) + (1 - \lambda_0)a_2).$$

  Por hipótesis, $f_2(x_0, a_2) < 0$ y $a_2 < 0$ y se cumple que $\lambda_0 f_2(x_0, a_2) + (1 - \lambda_0)a_2 < 0$.

- Lado morado: $x_0 \in [a_1, b_1]$ e $y_0 = b_2$, entonces

  $$H((x_0, b_2), \lambda_0) = (\lambda_0 f_1(x_0, b_2) + (1 - \lambda_0)x_0, \lambda_0 f_2(x_0, b_2) + (1 - \lambda_0)b_2).$$

  Como $f_2(x_0, b_2) > 0$ y $b_2 > 0$, se tiene $\lambda_0 f_2(x_0, b_2) + (1 - \lambda_0)b_2 > 0$.

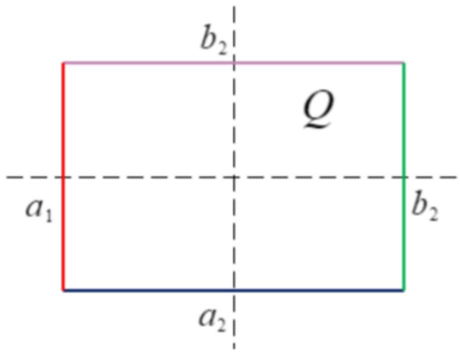


Figura 5.4: Esquema de ∂Q.

Concluimos que $H((x_0, y_0), \lambda_0) \neq (0,0)$ para cualquier $(x_0, y_0) \in \partial Q$ y el $deg(f, Q) = deg(Id, Q) = 1$, siendo $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación identidad.

$\square$

Parece natural preguntarse si se puede extender el teorema a n dimensiones. Antes de probarlo, introducimos la siguiente notación: dado $x \in \mathbb{R}^n$, lo podemos escribir como $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, n$; si tenemos una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ y $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, n$, son las componentes de f.

Teorema 5.6 (Teorema de Poincaré-Miranda)**.** *Sean $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, producto de n intervalos cerrados, con $\boldsymbol{0} \in Q$ y $f : Q \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Si las componentes de f cumplen*

$$\begin{aligned}
&f_1(a_1, x_2, x_3 \dots, x_n) < 0 < f_1(b_1, x_2, x_3 \dots, x_n), \\
&f_2(x_1, a_2, x_3 \dots, x_n) < 0 < f_2(x_1, b_2, x_3 \dots, x_n), \\
&\vdots \\
&f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) < 0 < f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

para todo $x_i \in [a_i, b_i]$, con $i = 1, \dots, n$, entonces existe $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in IntQ$ tal que $f(x^0) = \boldsymbol{0}$.

Demostración. La demostración es similar al caso en 2 dimensiones. Construimos la homotopía $H : Q \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned}
H(x, \lambda) &= \lambda f(x) + (1-\lambda)x = (\lambda f_1(x) + (1-\lambda)x_1, \dots, \lambda f_n(x) + (1-\lambda)x_n) \\
&= (H_1(x, \lambda), \dots, H_n(x, \lambda)),
\end{aligned}$$

para cada $(x, \lambda) \in Q \times [0, 1]$.

Veamos que la homotopía es admisible. Debemos probar que en los lados del rectángulo n-dimenisonal Q, la homotopía no se anula. Tomamos $x \in \partial Q$ y $\lambda \in [0, 1]$ y hacemos que las componentes de x recorran los límites del cubo. Fijamos $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$x = (x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

con $x_i \in [a_i, b_i]$ cuando $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Por hipótesis, $f_j(x) < 0$ y $a_j < 0$, luego la componente j-ésima de la homotopía cumple

$$H_j(x, \lambda) = \lambda f_j(x) + (1 - \lambda) a_j < 0.$$

De la misma forma, si $x_j = b_j$, para un cierto $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $x_i \in [a_i, b_i]$, con $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, tenemos que $H_j(x, \lambda) > 0$.

Podemos concluir que, dado $x \in \partial Q$ y $\lambda \in [0, 1]$, $H(x, \lambda) \neq \mathbf{0}$, es decir, la homotopía es admisible, por lo tanto $deg(f, Q) = deg(Id, Q) = 1$, siendo $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación identidad.

□

Nota 5.7. *Las condiciones* (5.17) *del teorema anterior, pueden escribirse de manera general como*

$$sign(f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \neq sign(f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)),$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Si restringimos el teorema de Poincaré-Miranda al caso de una dimensión, recuperamos el teorema de Bolzano. Debemos tener presente que, la condición de signo distinto en las caras opuestas del rectángulo n-dimensional que debe cumplir la función, es una restricción muy fuerte. Además, en caso de que el dominio de f fuese una bola, no podríamos aplicar el teorema.

Bibliografía

[1] Andrew Browder. *Mathematical analysis: an introduction.* Springer Science & Business Media, 2012.

[2] EN Dancer. Degree theory on convex sets and applications to bifurcation. In *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, pages 185–225. Springer, 2000.

[3] K. Deimling. *Nonlinear Funtional Analysis.* Springer, 1985.

[4] Michal Fečkan. *Topological degree approach to bifurcation problems*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2008.

[5] Andrzej Granas and James Dugundji. *Fixed point theory*, volume 14. Springer, 2003.

[6] C. Ivorra Castillo. Topología algebraica.

[7] A. Malusa. *Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie.* La Dotta, 2016.

[8] Robert E Megginson. *An introduction to Banach space theory*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.

[9] Rafael Ortega. Periodic differential equations in the plane. In *Periodic Differential Equations in the Plane.* De Gruyter, 2019.

[10] Jacob T Schwartz. *Nonlinear functional analysis*, volume 4. CRC Press, 1969.

[11] Eberhard Zeidler and Peter R Wadsack. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: Fixed-point Theorems/Transl. by Peter R. Wadsack.* Springer-Verlag, 1993.