



Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

---

# Teorías Cuánticas de Campos con Simetría Gauge

---

*Autora*

Sara Piloñeta Álvarez

*Tutor*

Agustín Nieto Alonso

Introducción y motivación . . . . .	3
<b>1 Ingredientes necesarios para elaborar una Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>4</b>
1.1 Introducción a la formulación de la Mecánica Cuántica no relativista en términos de integrales funcionales o de camino . . . . .	4
1.1.1 La integral de camino en Mecánica Cuántica . . . . .	4
1.1.2 Obtención de las probabilidades de transición . . . . .	6
1.1.3 La transición del estado fundamental al estado fundamental . . . . .	9
1.1.4 Valores esperados en el estado fundamental . . . . .	11
1.2 Aspectos fundamentales de la Teoría Clásica de Campos . . . . .	13
1.2.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange y teorema de Nöther . . . . .	14
1.2.2 Teoría clásica de un campo escalar: la ecuación de Klein-Gordon . . . . .	14
1.2.3 Teoría clásica con espinores: la ecuación de Dirac . . . . .	15
<b>2 Formulación de la Teoría Cuántica de Campos a través de la integral de camino</b>	<b>16</b>
2.1 Teoría cuántica de un campo escalar . . . . .	16
2.1.1 El funcional generador $\mathcal{W}[J]$ . . . . .	16
2.1.2 El funcional generador para la teoría libre . . . . .	19
2.1.3 Propagadores y funciones de Green para la teoría libre . . . . .	21
2.2 La teoría $\lambda\phi^4$ . . . . .	25
2.2.1 Tratamiento perturbativo y reglas de Feynman . . . . .	26
2.2.2 La acción efectiva y las funciones de Green 1PI . . . . .	31
2.2.3 Cálculo de las amplitudes de dispersión . . . . .	34
2.3 Renormalización de la teoría $\lambda\phi^4$ . . . . .	43
2.3.1 Motivación física: ¿por qué necesitamos la renormalización? . . . . .	43
2.3.2 Las divergencias ultravioletas y el grado superficial de divergencia . . . . .	44
2.3.3 La regularización dimensional y las integrales de Feynman . . . . .	46
2.3.4 Renormalización de la teoría: contratérminos . . . . .	49
2.4 Teoría Cuántica de Campos con fermiones (espinores) . . . . .	53
2.4.1 Espinores como variables de Grassmann . . . . .	53
2.4.2 El funcional generador para las teorías con espinores . . . . .	54

2.4.3	Teorías renormalizables con espinores y escalares . . . . .	56
2.4.4	Reglas de Feynman para las interacciones de tipo Yukawa . . . . .	58
2.4.5	Amplitudes de dispersión con fermiones . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Teorías Cuánticas de Campos con simetría <i>gauge</i></b>	<b>61</b>
3.1	Grupos y álgebras de Lie: una pequeña introducción . . . . .	61
3.2	La electrodinámica cuántica: una teoría <i>gauge</i> abeliana . . . . .	63
3.2.1	Derivación del lagrangiano de <i>QED</i> . . . . .	64
3.3	La cromodinámica cuántica: una teoría <i>gauge</i> no abeliana . . . . .	65
3.3.1	Teorías de Yang-Mills . . . . .	65
3.3.2	<i>QCD</i> : una teoría de sabores y colores . . . . .	68
3.4	Cuantización de las teorías <i>gauge</i> : el método de Faddeev-Popov . . . . .	69
3.4.1	Cuantización de las teorías de Yang-Mills . . . . .	69
3.4.2	Los campos fantasma de Faddeev-Popov . . . . .	73
3.5	Reglas de Feynman para las teorías <i>gauge</i> : QED y QCD . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Ruptura espontánea de la simetría</b>	<b>80</b>
4.1	Introducción: el problema de la interacción débil . . . . .	80
4.2	Ruptura espontánea la simetría . . . . .	81
4.2.1	Simetría discreta . . . . .	81
4.2.2	Simetría continua: el bosón de Goldstone . . . . .	82
4.3	Ruptura espontánea de una simetría <i>gauge</i> : el mecanismo de Higgs . . . . .	84
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>87</b>
A.1	Integrales de camino gaussianas . . . . .	87
A.2	Espacio de Minkowski . . . . .	87
A.3	Representación integral de la delta de Dirac y transformadas de Fourier . . . . .	88
A.4	Integrales de Feynman . . . . .	88
A.5	Integrales de camino con variables de Grassman . . . . .	88
	<b>Referencias</b>	<b>90</b>

## Introducción y motivación

Ante la ausencia de una asignatura de Teoría Cuántica de Campos en el último curso del grado que sirva como continuación de los conocimientos impartidos en Mecánica Cuántica y, especialmente, en la optativa, Teoría Clásica de Campos (ambas del tercer curso), la realización del presente trabajo tiene por objetivo llevar a cabo un estudio autónomo e independiente del tema, intentando aprender e interiorizar los contenidos fundamentales que normalmente se tratarían en un curso de Teoría Cuántica de Campos, en especial, aquellos relacionados con su aplicación en física de partículas y en la descripción de las interacciones fundamentales de la naturaleza.

La Teoría Cuántica de Campos o *QFT* (del inglés, *Quantum Field Theory*) surge de la necesidad de reconciliar la Mecánica Cuántica y la Teoría Clásica de Campos (relativista) con el fin de poder modelizar aquellos procesos en los que se produce tanto la creación como la destrucción de las partículas que intervienen en ellos [1]. En la formulación de este tipo de teorías es necesario, por tanto, cuantizar los campos clásicos que conocemos, para lo cual existen varias formas diferentes. Las dos más relevantes son la cuantización canónica (también conocida como segunda cuantización), que se basa en promocionar los campos a operadores, y la cuantización a través de la integral funcional o de camino, en la que los campos siguen siendo funciones ordinarias [2]. Ambos métodos se complementan entre sí, y tienen sus ventajas e inconvenientes particulares. Por ejemplo, la cuantización canónica proporciona una manera más directa de entender lo qué es exactamente una partícula en el contexto de la *QFT*, introduciendo los operadores de aniquilación y destrucción; sin embargo, durante su desarrollo hay que tratar con cálculos perturbativos muy laboriosos. La cuantización de la integral de camino, por su parte, ofrece una forma bastante directa de dar el 'salto' de la Mecánica Cuántica a la Teoría Cuántica de Campos, y permite establecer relaciones muy interesantes que existen entre la *QFT* y otras disciplinas, como la Mecánica Estadística, aunque su formalismo también puede invitar a 'perdersé' con algunos de sus cálculos [1] [2].

En este trabajo nos hemos centrado en el segundo de estos métodos, es decir, en la cuantización a través de la integral funcional o de camino, puesto que nos ofrece una forma un poco más rápida de llegar a los diferentes conocimientos que se pretenden adquirir.

## Ingredientes necesarios para elaborar una Teoría Cuántica de Campos

Antes de aventurarnos en el estudio de la Teoría Cuántica de Campos es conveniente poseer un cierto nivel de conocimiento previo del resto de disciplinas involucradas en ella. Es importante, por tanto, recordar y tener presentes muchos de los contenidos impartidos, principalmente, en las asignaturas de Mecánica Cuántica y Teoría Clásica de Campos, así como contar con el bagaje matemático adquirido en Métodos Matemáticos I y Métodos Matemáticos II, que nos ayudará a realizar los cálculos que aparezcan a lo largo del estudio. Este capítulo persigue proporcionarnos todo lo que necesitamos (o, al menos, lo más relevante) para elaborar desde el principio una Teoría Cuántica de Campos. Con esto en mente, introduciremos las integrales funcionales o de camino, derivando con su ayuda algunos resultados muy interesantes que nos serán de gran utilidad en el futuro, y recordaremos algunos de los aspectos fundamentales de las Teorías Clásicas de Campos que pretendemos cuantizar a través de ellas.

### 1.1 Introducción a la formulación de la Mecánica Cuántica no relativista en términos de integrales funcionales o de camino

La cuantización de los campos relativistas sobre los que se construirá nuestra teoría se llevará a cabo a través de las integrales funcionales o de camino. Merece la pena, por tanto, dedicar un poco de tiempo a entender qué representan dichas integrales y cómo pueden formularse antes de embarcarnos en nuestra tarea principal.

#### 1.1.1 La integral de camino en Mecánica Cuántica

Una buena forma de empezar a familiarizarse con el formalismo de la integral de camino es intentar utilizarlo para describir el sistema más sencillo que se nos ocurra: una partícula cuántica (no relativista) que se mueva en una única dimensión. Nuestro primer objetivo será ver que la probabilidad de que dicha partícula viaje desde un punto del espacio a otro en un período de tiempo determinado puede escribirse en términos de este tipo de integrales. Antes de realizar el cálculo correspondiente, conviene intentar comprender de forma cualitativa el significado de la integral de camino. Para ello, podemos partir de la imagen mental de un experimento similar al de la doble rendija, que constará de una fuente,  $\mathcal{S}$ , una pared con dos agujeros,  $A_1$  y  $A_2$ , y un detector,  $\mathcal{O}$ . Esta representación aparece en la Figura 1.1. [1] [3]

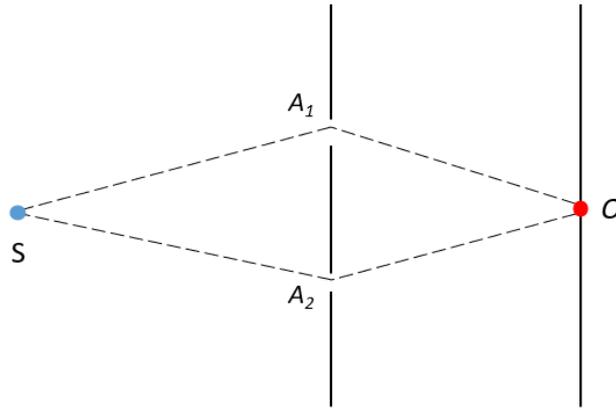


Figura 1.1: Esquema del experimento de la doble rendija.

Supongamos que, en un tiempo inicial  $t_a = 0$ , la fuente  $S$  emite una partícula que queremos medir con el detector, al que llegará en un tiempo  $t_b = T$ . Para poder alcanzar el punto  $O$  tendrá que atravesar la pared cruzando por uno de los dos agujeros, ya sea  $A_1$  o  $A_2$ . La partícula puede seguir, por tanto, dos caminos diferentes para llegar hasta nosotros, así que la probabilidad de detectarla vendrá dada por el principio de superposición de la Mecánica Cuántica, que, en este caso particular, nos dice que será la suma de la probabilidad asociada a la propagación de la partícula desde  $S$  hasta  $O$  atravesando  $A_1$  y de la propagación desde  $S$  hasta  $O$  atravesando  $A_2$ . Del mismo modo, si tuviésemos un número arbitrario  $M$  de agujeros  $A_1, A_2, \dots, A_M$  en la pared, la probabilidad de detección,  $\mathcal{U}_{\text{total}}$ , se calcularía simplemente sumando las probabilidades asociadas al paso de la partícula por cada uno de esos agujeros,  $\mathcal{A}_i$ : [1]

$$\mathcal{U}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^M \mathcal{A}_i \quad (1.1)$$

También podríamos intentar ir un poco más allá, y pensar en qué pasaría si, además de la pared que ya tenemos, colocásemos otra pared adicional, que tuviese otro número,  $N$ , de agujeros,  $B_j$  (Figura 1.2). [1]

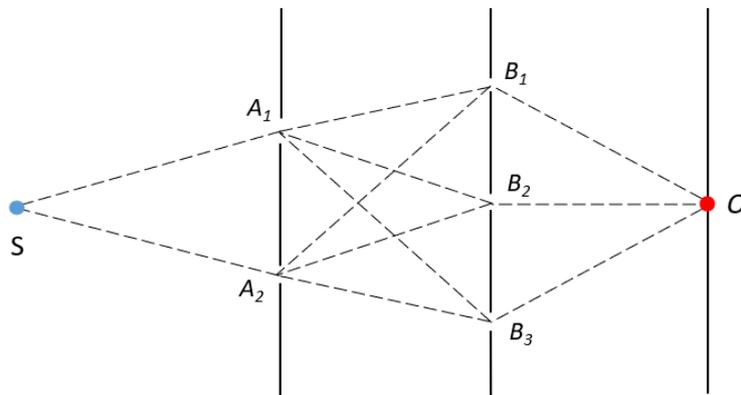


Figura 1.2: Esquema de la situación con la pared adicional.

En esta ocasión, para obtener la probabilidad total del proceso tenemos que tener en cuenta tanto la probabilidad  $\mathcal{A}_i$  asociada a que la partícula cruce por uno de los agujeros  $A_i$  de la primera pared, como la probabilidad  $\mathcal{B}_j$  asociada al paso a través de los huecos  $B_j$  de la segunda. Para escribir  $\mathcal{U}_{\text{total}}$ , tendremos que combinarlas entre sí mediante un doble sumatorio, es decir: [1]

$$\mathcal{U}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_i \mathcal{B}_j \quad (1.2)$$

Por último, si llevamos esta idea a su máximo nivel, podríamos imaginarnos que colocamos un número infinito de paredes con un número, también infinito, de agujeros en cada una de ellas. Hacer esto puede resultar un poco extraño, ya que equivale a decir, literalmente, que nuestras paredes no existen; sin embargo, esta situación da lugar a una observación muy interesante: siguiendo con la misma línea de pensamiento que estábamos utilizando hasta ahora (aplicar el principio de superposición) se tiene que la probabilidad de ir desde  $\mathcal{S}$  hasta  $\mathcal{O}$  será la suma de la probabilidad asociada al paso de la partícula por los agujeros de todas esas 'no-paredes', y esto no es más que la suma sobre todos los caminos o trayectorias posibles que puede seguir la partícula para llegar a su destino (Figura 1.3). [1]

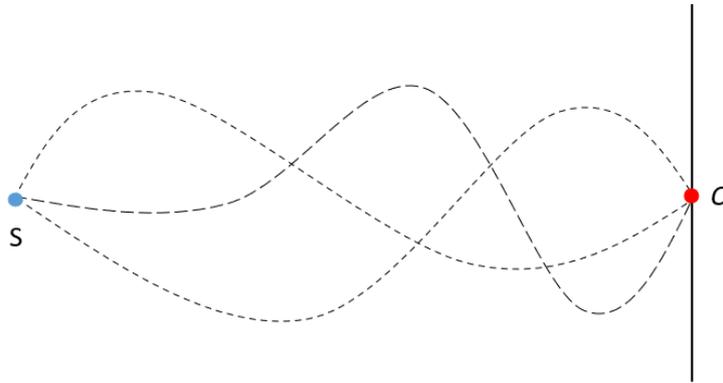


Figura 1.3: Situación en la que las paredes desaparecen.

Por tanto, si asociamos una fase a cada uno de los posibles caminos (la misma para todos, de forma que ninguno sea más importante que el resto), podemos escribir la probabilidad de que una partícula viaje desde un punto  $x_a$  a un punto  $x_b$  en un tiempo  $T$  de la siguiente forma: [3]

$$\mathcal{U}(x_a, x_b; T) = \sum_{\text{caminos}} e^{i \cdot \text{fase}} = \int \mathcal{D}x(t) e^{i \cdot \text{fase}} \quad (1.3)$$

La suma sobre todas las trayectorias posibles suele denotarse con el símbolo  $\int \mathcal{D}x(t)$ , que representará la integral de camino. A continuación, veremos cuál es la forma concreta de la fase a través del cálculo explícito de la probabilidad de transición entre dos estados.

### 1.1.2 Obtención de las probabilidades de transición

Suponemos que nuestra partícula puede describirse utilizando una única coordenada generalizada,  $q$ , y su correspondiente momento conjugado,  $p$ . Su dinámica estará codificada, por tanto, a través de un hamiltoniano  $H(q, p)$  independiente del tiempo. Para 'dar el salto' de la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica, tenemos que promocionar tanto  $q$  como  $p$  a operadores<sup>1</sup>,  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ . Conviene recordar que, a la hora de hacer esto, existen dos representaciones distintas que podemos utilizar: la imagen de Schrödinger, en la que la dependencia temporal se encuentra dentro de los estados  $|\psi(t)\rangle$  en los que puede estar el sistema, y la imagen de Heisenberg, en la que la dependencia temporal se la llevan los operadores,  $\hat{A}(t)$ . [1] [3]

<sup>1</sup>Los operadores se representarán con un acento circunflejo por encima para diferenciarlos del resto de variables.

Si denotamos como  $|q\rangle$  a los autoestados de  $\hat{q}_S$  con autovalor  $q$  en la imagen de Schrödinger se tiene:

$$\hat{q}_S|q\rangle = q|q\rangle \quad (1.4)$$

Los autoestados del operador  $\hat{q}_H(t)$  en la imagen de Heisenberg, por otro lado, se denotarán como  $|q, t\rangle$ :

$$\hat{q}_H(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle \quad (1.5)$$

Las dos imágenes se relacionan entre ellas a través del operador unitario de evolución temporal, por lo que los autoestados que acabamos de definir cumplirán que: [4]

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t/\hbar}|q\rangle \quad (1.6)$$

Consideramos que, en un instante inicial de tiempo  $t_a$  el sistema tiene como autovalor  $q_a$ . Utilizando la imagen de Heisenberg, su autoestado correspondiente será  $|q_a, t_a\rangle$ . La probabilidad de que en un tiempo  $t_b$  el sistema se encuentre en el autoestado  $|q_b, t_b\rangle$  con autovalor  $q_b$  es: [4] [1]

$$\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle = \langle q_b|e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar}|q_a\rangle \quad (1.7)$$

Para poder expresar esta probabilidad como una integral de camino, dividimos el intervalo de tiempos en  $N + 1$  pasos ( $t_a, t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ ) más pequeños de longitud  $\delta t$ , es decir,  $t_b - t_a = (N + 1)\delta t$ . Utilizando la completitud del conjunto de autoestados  $|q, t\rangle$ , podemos reescribir  $\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle$  introduciendo identidades de la forma  $\int dq_j |q_j, t_j\rangle\langle q_j, t_j|$  (que equivalen a la unidad), obteniendo así que: [4] [1]

$$\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle = \prod_{j=1}^N \int dq_j \langle q_b, t_b|q_N, t_N\rangle \langle q_N, t_N|q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \dots \langle q_1, t_1|q_a, t_a\rangle \quad (1.8)$$

Vamos a calcular explícitamente un  $\langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle$  genérico a medida que  $N$  se hace más grande (es decir, aumenta el número de pasos de tiempo que tenemos) y  $\delta t$  se vuelve más pequeño (es decir, disminuye la separación que hay entre cada uno de ellos). Básicamente, lo que hacemos es intentar pasar de un discreto a un continuo de tiempos. Como  $\delta t \rightarrow 0$ , podemos hacer un desarrollo en serie de la exponencial: [4]

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle = \langle q_{j+1}| \exp\left[-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\delta t\right] |q_j\rangle \simeq \langle q_{j+1}| \left(\mathbb{1} - i\frac{\hat{H}}{\hbar}\delta t\right) |q_j\rangle \quad (1.9)$$

Utilizando la representación integral de la delta de Dirac<sup>2</sup>, teniendo en cuenta que el hamiltoniano es de la forma  $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$ , y desarrollando un poco, se tiene que: [4]

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle \approx \hbar^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left[\frac{i\delta t}{\hbar} \left[p_j(q_{j+1} - q_j)\delta t^{-1} - H(q_j, p_j)\right]\right] \quad (1.10)$$

Insertando el resultado anterior en la ecuación (1.8), obtenemos que la probabilidad de transición es:

$$\langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle \approx \prod_{j=1}^N \int dq_j \prod_{j=0}^N \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left[i\hbar^{-1}\delta t \sum_{j=0}^N \left[p_j(q_{j+1} - q_j)\delta t^{-1} - H(q_j, p_j)\right]\right] \quad (1.11)$$

<sup>2</sup>La representación integral de la delta de Dirac puede encontrarse en el Apéndice A.3.

Si queremos tomar el límite en el que  $N \rightarrow \infty$ , necesitaremos hacer los siguientes cambios en (1.11):

$$\begin{aligned} q_j &\rightarrow q(t) & \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{q(t_{j+1}) - q(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \dot{q} & \delta t \sum_{j=0}^N &\rightarrow \int_{t_a}^{t_b} dt \\ p_j &\rightarrow p(t) & \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^N \int dq_j \right) &\propto \int \mathcal{D}q(t) & \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^N \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right) &\propto \int \mathcal{D}p(t) \end{aligned}$$

Teniendo presente todo lo anterior, la probabilidad de transición queda:

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \langle q_b | e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar} | q_a \rangle \propto \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt [p\dot{q} - H(q, p)] \right] \quad (1.12)$$

Las integrales de camino  $\int \mathcal{D}q(t)$  y  $\int \mathcal{D}p(t)$  se realizan sobre todas las funciones  $p(t)$  y  $q(t)$  que satisfacen las condiciones de contorno  $q(t_a) = q_a$  y  $q(t_b) = q_b$ . Dichas condiciones se corresponden con los valores que toma el camino correspondiente en los tiempos inicial  $t_a$  y final  $t_b$ . Por tanto, la ecuación (1.12) nos dice que, si queremos calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en  $q_b$  en un tiempo  $t_b$  si en  $t_a$  estaba en  $q_a$ , tenemos que expresarla como la suma a todas las trayectorias posibles que satisfacen las condiciones de contorno que acabamos de escribir, y 'pesarlas' por una determinada fase. Hemos podido comprobar que, efectivamente, el resultado tiene la forma que adelantamos en (1.3). [4] [2] [5]

La integral sobre el momento  $p_j$  que aparece en (1.10) puede realizarse de forma analítica si el hamiltoniano de nuestro sistema es de la forma  $H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ ; en ese caso, haciendo el cambio de variable  $\tilde{p}_j = p_j - m\delta t^{-1}(q_{j+1} - q_j)$ , podemos completar el cuadrado de la exponencial para conseguir tener la forma de una integral gaussiana. Si la hacemos, resulta que: [4]

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle \approx \left( \frac{2\pi}{m} i\delta t\hbar \right)^{-1/2} \exp \left[ i\hbar^{-1} \delta t \left[ \frac{m}{2\delta t^2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j) \right] \right] \quad (1.13)$$

Como en (1.11) tenemos un producto de integrales de la forma (1.10), sustituyendo (1.13) queda:

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \approx \left( \frac{2\pi}{m} i\delta t\hbar \right)^{-(N+1)/2} \prod_{j=1}^N \int dq_j \exp \left[ i\hbar^{-1} \delta t \sum_{j=0}^N \left[ \frac{m}{2\delta t^2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j) \right] \right] \quad (1.14)$$

De nuevo, tomando el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ :

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \approx \left( \frac{2\pi}{m} i\delta t\hbar \right)^{-(N+1)/2} \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt \left( \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q) \right) \right] \quad (1.15)$$

Identificando el lagrangiano del sistema como  $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q)$ , se tiene que

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \langle q_b | e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar} | q_a \rangle \propto \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}) \right] \quad (1.16)$$

Si el hamiltoniano es de la forma  $H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ , podemos, por tanto, expresar la probabilidad de transición de un estado  $|q_a, t_a\rangle$  a un estado  $|q_b, t_b\rangle$  a través de una integral de camino  $\int \mathcal{D}q(t)$  que se realiza

sobre todas las posibles trayectorias que satisfacen las condiciones  $q(t_b) = q_b$  y  $q(t_a) = t_a$ . [4]

### 1.1.3 La transición del estado fundamental al estado fundamental

La probabilidad de que un sistema que se encuentra en el estado fundamental en un tiempo inicial  $t_a$  siga en el estado fundamental en un tiempo posterior  $t_b$  va a ser de vital importancia cuando empecemos a introducir la Teoría Cuántica de Campos<sup>3</sup> en el Capítulo 2, así que vamos a intentar derivar un resultado análogo pero en Mecánica Cuántica no relativista, en vistas al futuro, para que nos sea más fácil dar el 'salto' de una a otra.

Para ello, introduciremos un término de fuente,  $-J(t)Q$ , y volveremos a obtener la probabilidad de transición de que en un tiempo  $t_b$  el sistema se encuentre en la configuración  $q_b$  si en  $t_a$  estaba en  $q_a$ , pero, esta vez, teniendo en cuenta la presencia de la fuente  $J(t)$  que acabamos de mencionar. Para realizar el cálculo podemos partir de la ecuación (1.12), a la que añadiremos el término de fuente (ya que no depende de  $P$  así que el resultado que derivamos antes no se verá afectado) dentro del integrando: [4]

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle^J \propto \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt [p\dot{q} - H(q, p) + J(t)q] \right] \quad (1.17)$$

Si hacemos  $J(t) = 0$  recuperamos (1.12) Las integrales de camino siguen siendo sobre todas las trayectorias  $q(t)$  y  $p(t)$  que satisfacen las condiciones de contorno  $q_a = q(t_a)$ ,  $q_b = q(t_b)$ ,  $p_a = p(t_a)$  y  $p_b = p(t_b)$ . Elegiremos el término de fuente de forma que sea nulo tanto para tiempos inferiores a un cierto  $t_-$  como para tiempos superiores a un cierto  $t_+$ . Esencialmente, estamos pidiendo que  $J(t)$  únicamente pueda actuar durante el intervalo de tiempo comprendido entre  $t_-$  y  $t_+$ . [4]

De forma similar a como hicimos anteriormente, podemos reescribir la transición  $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle^J$  introduciendo identidades de la forma  $\int q_+ |q_+, t_+\rangle \langle q_+, t_+|$  y  $\int q_- |q_-, t_-\rangle \langle q_-, t_-|$ , es decir: [4]

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle^J = \int dq_+ \int dq_- \langle q_b, t_b | q_+, t_+\rangle \langle q_+, t_+ | q_-, t_-\rangle^J \langle q_-, t_- | q_a, t_a \rangle \quad (1.18)$$

Definimos, además, los autoestados de energía  $|n\rangle$  del hamiltoniano:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (1.19)$$

Así como las funciones de onda correspondientes:

$$\psi_n(q, t) = \langle q, t | n \rangle = \langle q | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | n \rangle = e^{-iE_n t/\hbar} \langle q | n \rangle \quad (1.20)$$

Esto nos permitirá, utilizando  $\sum_n |n\rangle \langle n|$ , reescribir  $\langle q_b, t_b | q_+, t_+\rangle$  y  $\langle q_-, t_- | q_a, t_a \rangle$  como:

$$\langle q_b, t_b | q_+, t_+\rangle = \sum_n \langle q_b, t_b | n \rangle \langle n | q_+, t_+\rangle = \sum_n \psi_n(q_b, t_b) \psi_n^*(q_+, t_+) \quad (1.21)$$

$$\langle q_-, t_- | q_a, t_a \rangle = \sum_n \langle q_-, t_- | n \rangle \langle n | q_a, t_a \rangle = \sum_n \psi_n(q_-, t_-) \psi_n^*(q_a, t_a) \quad (1.22)$$

Teniendo en cuenta cuáles son nuestros propósitos, lo que nos interesa es buscar que aparezcan explícitamente los estados fundamentales (que se denotarán como  $|0\rangle$ ) en las expresiones que acabamos de escribir. Para

<sup>3</sup>Cuando hagamos Teoría Cuántica de Campos nos referiremos a él como 'estado del vacío' (que no contiene partículas), y no como estado fundamental.

ello, podemos irnos al eje de tiempos imaginarios y tomar los límites  $t_a \rightarrow i\infty$  y  $t_b \rightarrow -i\infty$ . [4]. Vamos a ver qué les ocurre a las funciones de onda que aparecen en (1.21) cuando hacemos esto:

$$\lim_{t_b \rightarrow -i\infty} \sum_n \psi_n(q_b, t_b) \psi_n^*(q_+, t_+) = \lim_{t_b \rightarrow -i\infty} \sum_n e^{-iE_n t_b/\hbar} e^{iE_n t_+/\hbar} \langle q_b | n \rangle \langle n | q_+ \rangle = \langle q_b | 0 \rangle \langle 0 | q_+ \rangle \quad (1.23)$$

Al tomar el límite de  $t_b \rightarrow -i\infty$ , el término  $e^{-iE_n t_b/\hbar}$  se convierte en una exponencial decreciente,  $e^{-\infty}$ , que mata a todos los términos del sumatorio exceptuando al que va con  $n = 0$ , que justamente se corresponde con el que acompaña al estado fundamental [4]. Siguiendo un razonamiento totalmente análogo con (1.22), obtenemos  $\langle q_- | 0 \rangle \langle 0 | q_a \rangle$ ; sustituyendo todo en (1.18) y operando un poco se llega a:

$$\lim_{\substack{t_b \rightarrow \infty \\ t_a \rightarrow -\infty}} \frac{\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle^J}{\langle q_b | 0 \rangle \langle 0 | q_a \rangle} = \int dq_+ \int dq_- \langle 0 | q_+ \rangle \langle q_+, t_+ | q_-, t_- \rangle^J \langle q_- | 0 \rangle = \langle 0 | e^{-i(t_+ - t_-)\hat{H}/\hbar} | 0 \rangle \quad (1.24)$$

Para llegar a esta expresión hemos tenido que usar de nuevo la completitud de los autoestados  $|q_+\rangle$  y  $|q_-\rangle$ , y también el cambio de la imagen de Heisenberg a la de Schrödinger. Podemos observar que la parte de la derecha no es más que la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado fundamental en un tiempo  $t_+$  si en otro tiempo anterior  $t_-$  también lo estaba. Tras esto, podemos extender con facilidad el resultado al caso en el que la fuente sea diferente de cero para cualquier instante de tiempo. Para ello, basta con hacer  $t_+$  lo suficientemente grande y  $t_-$  lo suficientemente pequeño (es decir, hacemos que tiendan a  $+\infty$  y  $-\infty$ , respectivamente). Denotando a la nueva amplitud como  $W[J]$  tenemos: [4]

$$W[J] \propto \lim_{\substack{t_b \rightarrow \infty \\ t_a \rightarrow -\infty}} \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle^J \quad (1.25)$$

Sustituyendo (1.17) en (1.25) llegamos a la expresión que necesitábamos:

$$W[J] \propto \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt [p\dot{q} - H(p, q) + Jq] \right] \quad (1.26)$$

En el caso especial de que el hamiltoniano sea de la forma  $H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ , podemos generalizar la ecuación (1.16) que obtuvimos antes añadiendo un término de fuente: [4]

$$W[J] \propto \int \mathcal{D}q(t) \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt [L(q, \dot{q}) + Jq] \right] \quad (1.27)$$

Puesto que la exponencial es una combinación lineal de senos y cosenos (por ser imaginaria), oscilará muy rápido y quizás no converja, por lo que la integral de camino  $\int \mathcal{D}q$  puede no estar del todo bien definida. Para solucionar esto se utiliza un procedimiento especial que recibe el nombre de rotación de Wick, que conviene ir introduciendo puesto que nos será de mucha utilidad en el Capítulo 2. Dicha técnica consiste, fundamentalmente, en llevar el integrando al eje de tiempos imaginarios, donde podremos evaluar la integral de camino sin problemas. Para ello, es necesario introducir la variable  $\bar{t} = it$ , realizando los cambios correspondientes en (1.27), que aparecen resumidos a continuación: [4]

$$dt \rightarrow \frac{d\bar{t}}{i} \quad \dot{q} \rightarrow \frac{dq}{dt} = i \frac{dq}{d\bar{t}}$$

Al hacerlo, las expresiones (1.26) y (1.27) toman la forma<sup>4</sup>:

$$W_E[J] \propto \int \mathcal{D}q(\bar{t}) \exp \left[ \hbar^{-1} \int d\bar{t} \left[ L(q, i \frac{dq}{d\bar{t}}) + Jq \right] \right] \quad (1.28)$$

$$W_E[J] \propto \int \mathcal{D}q(\bar{t}) \int \mathcal{D}p(\bar{t}) \exp \left[ \hbar^{-1} \int d\bar{t} \left[ ip \frac{dq}{d\bar{t}} - H(p, q) + Jq \right] \right] \quad (1.29)$$

### 1.1.4 Valores esperados en el estado fundamental

Cuando demos el 'salto' a *QFT*, los valores esperados de los operadores  $\hat{\phi}$  de los campos de la teoría jugarán un papel muy importante, así que parece bastante sensato intentar construirnos su análogo en *QM*. Para ello, empezaremos escribiendo el valor esperado del producto de dos operadores de la forma  $\hat{q}_H$ : [4]

$$\langle q_b, t_b | \hat{q}_H(t_s) \hat{q}_H(t_r) | q_a, t_a \rangle, \quad t_s > t_r \quad (1.30)$$

De nuevo, dividimos el intervalo de tiempos en pasitos más pequeños, al igual que hicimos en la Sección 1.1.2, e introducimos identidades de la forma  $\int dq |q\rangle \langle q|$  (una por cada uno de los tiempos): [4]

$$\begin{aligned} \langle q_b, t_b | \hat{q}_H(t_s) \hat{q}_H(t_r) | q_a, t_a \rangle &= \prod_{j=1}^N \int dq_j \langle q_b, t_b | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_{s+1}, t_{s+1} | \hat{q}_H(t_s) | q_s, t_s \rangle \dots \times \\ &\times \langle q_{r+1}, t_{r+1} | \hat{q}_H(t_r) | q_r, t_r \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle \end{aligned} \quad (1.31)$$

Teniendo en cuenta que  $\hat{q}_H(t_r) | q_r, t_r \rangle = q_r | q_r, t_r \rangle$ , y que  $\hat{q}_H(t_s) | q_s, t_s \rangle = q_s | q_s, t_s \rangle$ :

$$\langle q_b, t_b | \hat{q}_H(t_s) \hat{q}_H(t_r) | q_a, t_a \rangle = \prod_{j=1}^N \int dq_j q_s q_r \langle q_b, t_b | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle \quad (1.32)$$

Si consideramos que  $H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ , podemos sustituir (1.10) en la expresión anterior:

$$\langle q_b, t_b | \hat{q}_H(t_s) \hat{q}_H(t_r) | q_a, t_a \rangle = \prod_{j=1}^N \int dq_j \prod_{j=0}^N \frac{dp_j}{2\pi\hbar} q_r q_s \exp \left[ \frac{i\delta t}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[ \frac{p_j(q_{j+1} - q_j)}{\delta t} - H(q_j, p_j) \right] \right] \quad (1.33)$$

Tomando el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ :

$$\langle q_b, t_b | \hat{q}_H(t_s) \hat{q}_H(t_r) | q_a, t_a \rangle \propto \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) q_r q_s \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt [p\dot{q} - H(q, p)] \right] \quad (1.34)$$

Puede verse fácilmente que al invertir el orden de los operadores  $\hat{q}_H(t_s)$  y  $\hat{q}_H(t_r)$  se obtiene el mismo resultado. Esto nos permitirá escribirlo de forma más general: [4]

$$\langle q_b, t_b | \mathcal{T} \{ \hat{q}_H(t_s) \hat{q}_H(t_r) \} | q_a, t_a \rangle \propto \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) q_r q_s \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt [p\dot{q} - H(q, p)] \right] \quad (1.35)$$

Donde hemos definido  $\mathcal{T}$ , el operador de 'ordenación temporal', como:

<sup>4</sup>El motivo por el que se utiliza el subíndice *E* cobrará sentido en el Capítulo 2.

$$\mathcal{T}\{\hat{q}_H(t_s)\hat{q}_H(t_r)\} = \begin{cases} \hat{q}_H(t_s)\hat{q}_H(t_r) & \text{si } t_s > t_r \\ \hat{q}_H(t_r)\hat{q}_H(t_s) & \text{si } t_r > t_s \end{cases}$$

Lo que hace  $\mathcal{T}$  es actuar sobre un conjunto de operadores y ordenarlos según cuál sea el tiempo en el que están actuando (concretamente, los coloca de tiempos mayores a menores). Generalizar el resultado anterior a un conjunto de operadores  $\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)$  es inmediato: [4]

$$\langle q_b, t_b | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | q_a, t_a \rangle \propto \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) q'_n \dots q'_1 \exp \left[ i\hbar^{-1} \int dt [p\dot{q} - H(q, p)] \right] \quad (1.36)$$

Ahora necesitamos conectar este resultado con el valor esperado de un producto de operadores en el estado fundamental. Al igual que hicimos en la Sección 1.1.3, introducimos los tiempos  $t'_+$  y  $t'_-$ , y usamos la completitud de los estados para reescribir  $\langle q_b, t_b | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | q_a, t_a \rangle$ : [4]

$$\begin{aligned} \langle q_b, t_b | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | q_a, t_a \rangle &= \int dq'_+ \int dq'_- \langle q_b, t_b | q'_+, t'_+ \rangle \times \\ &\times \langle q'_+, t'_+ | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | q'_-, t'_- \rangle \langle q'_-, t'_- | q_a, t_a \rangle \end{aligned} \quad (1.37)$$

Procediendo con los autoestados de energía de la misma forma que en la Sección 1.1.3, (no repetiremos todos los pasos porque es totalmente análogo) podemos escribir el resultado directamente para este caso: [4]

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t_b \rightarrow \infty \\ t_a \rightarrow -\infty}} \frac{\langle q_b, t_b | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | q_a, t_a \rangle}{\langle q_b | 0 \rangle \langle 0 | q_a \rangle} &= \int dq'_+ dq'_- \langle 0 | q'_+ \rangle \langle q'_+, t'_+ | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | q'_-, t'_- \rangle \langle q'_- | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.38)$$

Al hacerlo, aparece  $\langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | 0 \rangle$ , que es justamente lo que estábamos buscando, y que, introduciendo  $\langle q_b | 0 \rangle \langle 0 | q_a \rangle$  dentro de la constante de proporcionalidad, podemos escribir como: [4]

$$\langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{q}_H(t'_n) \dots \hat{q}_H(t'_1)\} | 0 \rangle \propto \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) q'_n \dots q'_1 \exp \left[ i\hbar^{-1} \int dt [p\dot{q} - H(q, p)] \right] \quad (1.39)$$

Por último, tenemos que ver cómo podemos conectar el resultado que acabamos de obtener con la  $W[J]$  que calculamos antes. Para ello, necesitamos introducir las derivadas funcionales que, por definición: [4]

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta J(y)} \left( \int dx J(x) \varphi(x) \right) = \varphi(y)} \quad (1.40)$$

En el cuadro inferior aparece una 'justificación' basada en la discretización del espacio.

**Caso discreto:** utilizando la delta de Kronecker y sumatorios

$$\frac{d}{dp_i} \sum_j p_j \varphi_j \rightarrow \sum_j \frac{dp_j}{dp_i} \varphi_j \rightarrow \sum_j \delta_{ij} \varphi_j \rightarrow \varphi_i$$

**Caso continuo:** utilizando la delta de Dirac e integrales

$$\frac{\delta}{\delta \rho(y)} \left( \int dx \rho(x) \varphi(x) \right) \rightarrow \int dx \frac{\delta \rho(x)}{\delta \rho(y)} \varphi(x) \rightarrow \int dx \delta(x - y) \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$$

Si derivamos  $W[J]$ , (1.26), con respecto a  $J(t'_1)$  y después fijamos las fuentes a cero se tiene que:

$$\left. \frac{\delta W[J]}{\delta J(t'_1)} \right|_{J(t)=0} = i\hbar^{-1} \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) q(t'_1) \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right] \quad (1.41)$$

Si hubiésemos derivado con respecto de  $J(t'_2)$ ,  $J(t'_3)$ , ...,  $J(t'_n)$ , habríamos obtenido el mismo resultado; lo único que cambiaría sería el factor  $q(t'_i)$  que aparece al derivar con respecto al  $J(t'_i)$  correspondiente. Si consideramos las  $n$  derivadas y evaluamos en  $J(t) = 0$  tendremos que: [4]

$$\left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J'_1 \dots \delta J'_n} \right|_{J(t)=0} \propto (i\hbar^{-1})^n \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) q(t'_1) \dots q(t'_n) \exp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar^{-1} (p\dot{q} - H) dt \right] \quad (1.42)$$

Podemos observar que el valor esperado del producto de operadores en el estado fundamental, que venía dado por (1.39), también era proporcional a la parte derecha de la ecuación anterior (tienen la misma constante de proporcionalidad), así que podemos relacionarlos directamente como sigue: [4]

$$\boxed{(i\hbar^{-1})^n \langle 0 | (\mathcal{T} \{ \hat{q}_H(t'_n), \dots, \hat{q}_H(t'_1) \}) | 0 \rangle = \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J'_1 \dots \delta J'_n} \right|_{J(t)=0}} \quad (1.43)$$

Por tanto, hemos conseguido realizar la conexión entre ambas cantidades. La expresión anterior nos dice que, si conocemos la amplitud que involucraba la transición en un tiempo desde el estado fundamental al estado fundamental, es posible generar los valores esperados de los operadores  $\hat{q}_H(t)$  a partir de las derivadas funcionales de  $W[J]$  con respecto de las fuentes. [4]

## 1.2 Aspectos fundamentales de la Teoría Clásica de Campos

En la Sección 1.2 hemos estado trabajando dentro del marco de la Mecánica Cuántica no relativista, utilizando una única coordenada generalizada para describir a la partícula en cuestión que estábamos tratando, y hemos visto cómo se pueden calcular las amplitudes de transición entre sus estados en términos de integrales de camino; sin embargo, para formular correctamente la física de partículas necesitamos tratar con estados en los que permitamos estar a más de una de ellas, así que tendremos que trabajar con algo más complejo que una coordenada generalizada; aquí es donde entran en juego los campos, cuya interpretación cuántica será necesaria para construir nuestra teoría [3] [4].

Teniendo esto presente, parece necesario introducir brevemente los aspectos más relevantes de una Teoría Clásica de Campos, para poder facilitar el paso a la teoría cuántica que empezaremos a estudiar en el Capítulo 2. Podemos pensar en los campos como si fuesen una extensión del concepto de coordenada generalizada que se utiliza en Mecánica Clásica para describir a los sistemas. A diferencia de estas, los campos permiten modelizar la idea de tener no solamente un conjunto discreto de partículas, sino todo un continuo de ellas, valorando la posibilidad de tener, incluso, varias en el mismo punto del espacio. En nuestro caso, escribiremos los campos en su forma más simple,  $\varphi(t, \vec{x})$ , asignando una coordenada generalizada a cada punto  $\vec{x}$  [4]. Antes de seguir conviene dejar claras algunas cuestiones de notación para entender bien lo que estamos haciendo. Es importante notar que en las teorías de campos,  $\vec{x}$  es una etiqueta, no una variable dinámica que cambie con el tiempo, ya que la dependencia explícita con él se la llevan los campos [1]. Básicamente,  $\vec{x}$  especifica el punto del espacio en el que estamos, y es como el equivalente al subíndice  $a$  que podríamos

tener en Mecánica Clásica para especificar la partícula a la que nos estamos refiriendo,  $q_a$  [1]. A continuación se resumen los principales cambios que ocurren al hacer este paso del 'discreto' al 'continuo'.

$$\begin{array}{l} q \rightarrow \varphi \\ a \rightarrow \bar{x} \end{array} \implies q_a(t) \rightarrow \varphi(t, \bar{x}) = \varphi(x) \quad \sum_a \rightarrow \int d^D x$$

### 1.2.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange y teorema de Nöther

Puesto que los contenidos que aparecen en estas secciones se imparten en un curso de Teoría Clásica de Campos, no nos detendremos sobre ellos en detalle, simplemente nos limitaremos a resumir los resultados más importantes que vamos a necesitar para nuestros propósitos.

La acción  $S[\varphi]$  general de un campo  $\varphi$  es: [2]

$$S[\varphi] = \int d^4 x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad (1.44)$$

Aplicando el principio de mínima acción se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange: [2]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (1.45)$$

Al considerar una transformación de los campos y de las coordenadas de la forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta \varphi, \quad (1.46)$$

la acción puede escribirse como: [4]

$$\Delta S = \int \partial_\mu \mathcal{J}^\mu d^4 x \quad \text{con} \quad \mathcal{J}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \Delta \varphi - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} (\partial_\nu \varphi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \Delta x^\nu \quad (1.47)$$

La transformación (1.46) es una simetría si se cumple que  $\Delta S = 0$ . Cuando esto ocurre, tanto la corriente de Nöther,  $\mathcal{J}^\mu$ , como su carga asociada,  $Q$ , se conservan: [2]

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \implies Q = \int \mathcal{J}^0 d^3 x \quad \text{se conserva} \quad (1.48)$$

### 1.2.2 Teoría clásica de un campo escalar: la ecuación de Klein-Gordon

La teoría de campos más sencilla es aquella descrita por un campo escalar  $\varphi(x)$  cuyo lagrangiano es: [4]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 \quad (1.49)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, (1.45), se tiene que: [4]

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(x) = -\frac{1}{6} \lambda \varphi^3(x) \quad (1.50)$$

Haciendo  $\lambda = 0$  (teoría de campos libres) la expresión anterior se reduce a la ecuación de Klein-Gordon: [2]

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(x) = 0 \quad (1.51)$$

Podemos interpretar  $\varphi(x)$  como la función de onda de una partícula libre que se propaga con energía  $E$  y momento  $k$ . La solución más general de la ecuación (1.51) consistirá en una superposición de ondas planas:

$$\varphi_0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} [a(k)e^{-ikx} + a^*(k)e^{ikx}], \quad (1.52)$$

donde  $k_0$  no es más que la parte temporal del momento  $k$  [2] [4] (ver Apéndice A.2).

### 1.2.3 Teoría clásica con espinores: la ecuación de Dirac

El lagrangiano que describe el comportamiento de las partículas libres y de masa  $m$  con spin  $1/2$  es: [4]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (1.53)$$

El campo  $\psi$ , conocido como espinor, tiene la forma de un vector columna de 4 componentes. Las variables  $\gamma^\mu$  (con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) son las matrices de Dirac, de tamaño  $4 \times 4$ , que satisfacen la siguiente relación: [4]

$$\gamma^\mu, \gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.54)$$

En el cuadro inferior se muestran algunas notaciones que aparecen con frecuencia al trabajar con espinores [6].

$$\psi^\dagger = \psi^{*T} \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad \not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$$

Utilizando el lagrangiano (1.53) en las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene [4]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (1.55)$$

que no es más que la famosa ecuación de Dirac. Puesto que posee cuatro soluciones independientes, dos que se corresponden con energías positivas,  $u(k, \pm s)$ <sup>5</sup> y dos que se corresponden con energías negativas,  $v(k, \pm s)$ , puede escribirse la solución más general como una combinación lineal del tipo: [4]

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\pm s} [a(k, s)u(k, s)e^{-ikx} + b^*(k, s)v(k, s)e^{ikx}] \quad (1.56)$$

Cabe destacar que las soluciones  $u(k, \pm s)$  y  $v(k, \pm s)$  satisfacen: [2] [4]

$$(\not{k} - m)u(k, \pm s) = 0 \quad (1.57)$$

$$(\not{k} + m)v(k, \pm s) = 0 \quad (1.58)$$

<sup>5</sup>La variable  $s$  es la componente  $z$  del espín, que puede tomar dos valores diferentes:  $1/2$ , que se representa habitualmente con un  $+$ , o  $-1/2$ , que se representa con un  $-$ .

## Formulación de la Teoría Cuántica de Campos a través de la integral de camino

Utilizando como base algunos de los resultados que hemos obtenido en el capítulo anterior, nos adentraremos en el estudio de las Teorías Cuánticas de Campos. Comenzaremos por el caso más sencillo, el de una teoría de un campo escalar libre. Tras familiarizarnos con ella, permitiremos que los campos puedan interactuar entre sí, dando el salto a la teoría conocida como  $\lambda\varphi^4$ , que nos resultará de gran utilidad para introducir los conceptos más importantes en los que se fundamentan las *QFT*, como los diagramas de Feynman, a los que dedicaremos una gran parte de nuestro tiempo. Después, aprenderemos a calcular las amplitudes de dispersión de los procesos de colisión que tienen lugar en los aceleradores de partículas, y veremos en qué consiste el proceso de renormalización de una *QFT*. Por último, también analizaremos cómo construir teorías cuánticas un poco más complicadas, utilizando campos espinoriales en lugar de escalares.

### 2.1 Teoría cuántica de un campo escalar

El primer paso para empezar a construir nuestra *QFT* utilizando integrales de camino es intentar generalizar los resultados obtenidos en las secciones 1.1.3 y 1.1.4 para incorporarlos en una teoría de campos relativista [4]. A diferencia del tratamiento que hicimos entonces (donde simplemente consideramos un sistema cuántico no relativista con una única coordenada generalizada), ahora trabajaremos con un continuo de partículas (y, por tanto, de grados de libertad),  $\varphi(t, \mathbf{x})$ , para cuantizar la teoría a través de los campos [4]. Comenzaremos con un caso sencillo: un campo escalar que únicamente interactúa consigo mismo.

#### 2.1.1 El funcional generador $\mathcal{W}[J]$

Por analogía con el procedimiento que seguimos en la sección 1.1.2 para dar 'el salto' de la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica (donde promocionamos la variable  $q(t)$  a un operador  $\hat{q}_H(t)$ ), para pasar de una teoría clásica de campos a una teoría cuántica, reemplazaremos el campo  $\varphi(t, \mathbf{x})$  por un operador en la imagen de Heisenberg,  $\hat{\varphi}(t, \mathbf{x})$ . De este modo, podemos describir el estado del sistema en un tiempo  $t$  dado utilizando un *ket* del tipo  $|\varphi(\mathbf{x}), t\rangle$ , definido como un autoestado del operador  $\hat{\varphi}(t, \mathbf{x})$ : [4]

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x}), t\rangle = \varphi(\mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x}), t\rangle \quad (2.1)$$

Esto nos permitirá generalizar la ecuación (1.12) en términos de los campos a través de los siguientes cambios:

$$\begin{array}{lll} |q_a, t_a\rangle \rightarrow |\varphi_a(\mathbf{x}), t_a\rangle & q \rightarrow \varphi & H(p, q) \rightarrow \mathcal{H}(\pi, \varphi), \quad \text{con} \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_o \varphi)} \\ |q_b, t_b\rangle \rightarrow |\varphi_b(\mathbf{x}), t_b\rangle & p \rightarrow \pi & \end{array}$$

Así, la probabilidad de transición entre dos estados  $|\varphi_a(\mathbf{x}), t_a\rangle$  y  $|\varphi_b(\mathbf{x}), t_b\rangle$  del sistema será: [4]

$$\langle \varphi_b(\mathbf{x}), t_b | \varphi_a(\mathbf{x}), t_a \rangle \propto \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x (\pi \partial_o \varphi - \mathcal{H}(\pi, \varphi)) \right] \quad (2.2)$$

En esta ocasión, las integrales de camino se realizarán sobre todas las funciones<sup>1</sup>  $\varphi(t, \mathbf{x})$  y  $\pi(t, \mathbf{x})$  que satisfacen las siguientes condiciones de contorno: [4]

$$\varphi(t_a, \mathbf{x}) = \varphi_a(\mathbf{x}) \quad \varphi(t_b, \mathbf{x}) = \varphi_b(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

Como para trabajar con la ecuación (2.2) podemos elegir como estados inicial y final aquellos que queramos, tomaremos en ambos casos el fundamental, ya que estamos seguros de su existencia debido a que, por definición, es el estado de menor energía, aunque no conozcamos exactamente cuáles son sus características [5]. Además, hemos de tener en cuenta que, al estar tratando con una teoría relativista, las partículas pueden 'nacer' y 'morir', es decir, crearse y aniquilarse, así que parece lógico pensar que el estado fundamental será aquel que no contenga ninguna partícula, es decir, el vacío<sup>2</sup> [4] [1], que denotaremos por  $|0\rangle$ . Sin embargo, calcular la probabilidad de transición de esta forma no parece tener demasiado interés ya que, si no lo perturbamos de ningún modo, el vacío seguirá siendo vacío. Para remediar esto, introduciremos en el hamiltoniano un término de fuente de la forma  $J(t, \mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})$ , que se encargará de que las partículas puedan crearse y destruirse. [1]. Así, calcularemos la probabilidad de transición de que el sistema se encuentre en  $|0\rangle$  en un tiempo  $t_b \rightarrow \infty$  si inicialmente en  $t_a \rightarrow -\infty$  también lo estaba, y lo haremos, por supuesto, en presencia de esta fuente arbitraria. Denotándola como  $\mathcal{W}[J]$ , tenemos, por analogía con (1.26): [4]

$$\mathcal{W}[J] = \mathcal{N} \lim_{\substack{t_b \rightarrow \infty \\ t_a \rightarrow -\infty}} \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[ i\hbar^{-1} \int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3x (\pi \partial_o \varphi - \mathcal{H}(\pi, \varphi) + J(t, \mathbf{x})\varphi(t, \mathbf{x})) \right] \quad (2.4)$$

En la expresión anterior,  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización que se elige de tal forma que si  $J = 0$  (es decir, si no tenemos fuente), se cumpla que  $\mathcal{W}[J] = 1$  [4] ya que, si inicialmente el sistema está en el vacío, donde no hay partículas, y no existe ninguna fuente que pueda crearlas, seguirá en el vacío, y la probabilidad de que en  $t_b \rightarrow \infty$  el sistema siga en  $|0\rangle$  será 1. De nuevo, por analogía con (1.43) podemos escribir:

$$(i\hbar^{-1})^n \langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \} | 0 \rangle = \left. \frac{\delta^n \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J(x)=0} \quad (2.5)$$

Esta ecuación conecta el formalismo de la integral de camino (que es el que hemos elegido para cuantizar la teoría) con el de la cuantización canónica, que utiliza operadores de los campos [2]. En nuestro caso, nos referiremos al producto ordenado de estos  $n$  operadores como una función de Green, es decir: [4]

$$\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\varphi}(x_1), \dots, \hat{\varphi}(x_n) \} | 0 \rangle \quad (2.6)$$

Combinando (2.5) y (2.6) obtenemos la siguiente relación:

<sup>1</sup>Es importante notar que dichas integrales se realizan sobre los campos clásicos  $\varphi$ , no sobre sus operadores  $\hat{\varphi}$  correspondientes.

<sup>2</sup>En realidad, en el vacío hay fluctuaciones cuánticas.

$$\boxed{(i\hbar^{-1})^n \mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0}} \quad (2.7)$$

Por tanto, las funciones de Green  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  pueden obtenerse a partir de las derivadas funcionales de  $\mathcal{W}[J]$  con respecto de las fuentes  $J(x_i)$  y, por este motivo, el funcional  $\mathcal{W}[J]$  recibe el nombre de funcional generador. Estas funciones son, además, simétricas en todas sus variables<sup>3</sup>, y la ecuación (2.7) también implica que son los coeficientes que aparecen en la expansión funcional de  $\mathcal{W}[J]$ , es decir, que: [4] [5]

$$\mathcal{W}[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{x_1} \dots \int_{x_n} \mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (2.8)$$

Al igual que sucedía en la Sección 1.1.3, el integrando de la ecuación (2.4), en el que aparece una exponencial compleja, oscila, por lo que la integral de camino no está bien definida [5] [4]. Para poder hacerla sin problemas necesitamos llevar a cabo una rotación de Wick que nos permita pasar del espacio de Minkowski en el que hemos definido  $\mathcal{W}[J]$  a un espacio euclídeo 4-dimensional, donde el funcional generador se denotará como  $\mathcal{W}_E[J]$ , siguiendo con la notación que utilizamos en (1.29) [4]. Para conseguirlo, necesitamos introducir un tiempo  $x_0$  imaginario y hacer los siguientes cambios:

Definiendo  $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{\mathbf{x}}) = (ix_0, \mathbf{x})$  se tiene que:

$$\begin{aligned} dt &\rightarrow d\bar{x}_0 & \Rightarrow & \int d^4\bar{x} & \partial_0\varphi &\rightarrow i\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0} \\ d^3x &\rightarrow d^3\bar{x} \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos la siguiente expresión para  $\mathcal{W}_E[J]$ , donde la integral de camino sí está bien definida puesto que la exponencial del integrando es real y negativa [5]:

$$\mathcal{W}_E[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[ -\hbar^{-1} \int d^4\bar{x} \left( -i\pi \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_0} + \mathcal{H}(\pi, \varphi) - J\varphi \right) \right] \quad (2.9)$$

Ahora la integral de volumen  $\int d^4\bar{x}$  se hace en el espacio euclídeo, y las integrales de camino se realizan sobre todas las funciones  $\varphi(\bar{x})$  y  $\pi(\bar{x})$  que satisfacen las siguientes condiciones de contorno: [4]

$$\lim_{\bar{x}_0 \rightarrow \infty} \varphi(\bar{x}) = \varphi_a(\mathbf{x}) \qquad \lim_{\bar{x}_0 \rightarrow -\infty} \varphi(\bar{x}) = \varphi_b(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) se modifican de la siguiente forma: [4]

$$(\hbar^{-1})^n \mathcal{G}_E^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \frac{\delta^n \mathcal{W}_E[J]}{\delta J(\bar{x}_1) \dots \delta J(\bar{x}_n)} \Big|_{J(\bar{x})=0} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{W}_E[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hbar^{-1})^n}{n!} \int_{\bar{x}_1} \dots \int_{\bar{x}_n} \mathcal{G}_E^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) J(\bar{x}_1) \dots J(\bar{x}_n) \quad (2.12)$$

La integral de camino  $\int \mathcal{D}\pi(\bar{x})$  que aparece en (2.9) puede resolverse analíticamente si el lagrangiano es: [4]

<sup>3</sup>El hecho de que  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  sea simétrica se extrae de la propia definición (2.6), ya que el operador  $\mathcal{T}$  de su interior se encargará de colocar los  $\hat{\varphi}(x_i)$  en el orden temporal adecuado, así que no importa dónde coloquemos las variables  $x_i$ , puesto que  $\mathcal{T}$  las dejará situadas siempre de la misma forma (de tiempos mayores a menores).

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{\hbar^2}{2} (\partial_o \varphi)^2 + F(\varphi, \nabla \varphi) \quad (2.13)$$

Y, por consiguiente, el hamiltoniano<sup>4</sup> tiene la forma:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^{-2}}{2} \pi^2 - F(\varphi, \nabla \varphi) \quad (2.14)$$

Sustituyendo en (2.9) tenemos que la integral sobre  $\pi(\bar{x})$ , que llamaremos  $I$ , es: [4]

$$I \equiv \int \mathcal{D}\pi \exp \left[ -\hbar^{-1} \int d^4 \bar{x} \left( -i\pi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_o} + \frac{\hbar^{-2}}{2} \pi^2 \right) \right] \quad (2.15)$$

Esta integral tiene la forma de una de las gaussianas que aparecen en el Apéndice A.1. Si elegimos [4]

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \hbar^{-3} \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) \quad \pi(\bar{x}) = i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_o} \quad (2.16)$$

Podemos escribirla como (2.17) y utilizar (A.2) para resolverla [4]. A partir de ahora, para escribir menos, denotaremos las integrales ( $\int d^4 x$ ) simplemente como  $\int_x$  [6]:

$$I = \int \mathcal{D}\pi \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\bar{x}'} \int_{\bar{x}} \pi(\bar{x}') A(\bar{x}', \bar{x}) \pi(\bar{x}) + \int_{\bar{x}'} \rho(\bar{x}) \pi(\bar{x}) \right] \quad (2.17)$$

El resultado<sup>5</sup> que se obtiene es: [4]

$$I \propto \exp \left( -\hbar^{-1} \int_{\bar{x}} \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_o} \right)^2 \right) \quad (2.18)$$

Sustituyendo de vuelta en (2.9): [4]

$$\mathcal{W}_E[J] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -\hbar^{-1} \int_{\bar{x}} (\mathcal{L}_E - J(\varphi)) \right] \quad (2.19)$$

Dentro del integrando aparece el lagrangiano genérico (2.13) escrito en su versión del espacio euclídeo 4-dimensional,  $\mathcal{L}_E = -\frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_o} \right) + F(\varphi, \nabla \varphi)$ . Ahora que hemos hecho la integral podemos volver al espacio de Minkowski rehaciendo los cambios que hicimos anteriormente, obteniendo: [4]

$$\boxed{\mathcal{W}[J] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i\hbar^{-1} \int_x [\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) + J\varphi] \right)} \quad (2.20)$$

Esta ecuación nos permite calcular de forma relativamente sencilla el funcional generador siempre y cuando el lagrangiano con el que estemos trabajando sea de la forma expuesta en (2.13). El factor de normalización  $\mathcal{N}'$  se elige de la misma forma que mencionamos anteriormente [4].

### 2.1.2 El funcional generador para la teoría libre

Ahora que ya sabemos cómo calcular las funciones de Green  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  a partir del funcional generador,  $\mathcal{W}[J]$ , podemos aplicar lo que hemos aprendido e intentar obtenerlas para el caso más sencillo en el que podemos pensar: la teoría libre de un campo escalar  $\varphi(t, \bar{x})$ . Los resultados que obtengamos, además, nos

<sup>4</sup> $\mathcal{H}$  puede obtenerse a partir de  $\mathcal{L}$  a través de una transformada de Legendre, es decir:  $\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_o \varphi)} (\partial_o \varphi) - \mathcal{L} = \pi(\partial_o \varphi) - \mathcal{L}$

<sup>5</sup>El término de la traza que aparece al usar (A.2) está escondido dentro de la constante de normalización.

serán de gran utilidad más adelante (Sección 2.2), cuando introduzcamos un término que codifique las interacciones entre los campos de nuestra teoría, ya que necesitaremos hacer un tratamiento perturbativo para el cual nos vendrá bien tener de antemano el resultado exacto de orden 0, que calcularemos a continuación [4] [5]. Haciendo  $\lambda = 0$  en (1.50) obtenemos el lagrangiano de la teoría libre: [4]

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (2.21)$$

Este lagrangiano es de la forma (2.13), con  $F(\varphi, \nabla\varphi) = -\frac{1}{2}m^2\varphi^2$ , lo que significa que podremos utilizar (2.20) para hacer la integral de camino en  $\varphi$  y obtener las funciones de Green a través de (2.11). Al igual que antes, necesitamos pasar del espacio de Minkowski al espacio euclídeo 4-dimensional para hacer las cosas correctamente. Introduciendo un tiempo  $x_0$  imaginario y haciendo los cambios mencionados en la Sección 2.1.1 el lagrangiano en el espacio euclídeo toma la siguiente forma: [4]

$$\mathcal{L}_E = -\frac{\hbar^2}{2}(\bar{\partial}_\mu\varphi)(\bar{\partial}_\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (2.22)$$

Sustituyendo este  $\mathcal{L}_E$  en (2.19) queda:

$$\mathcal{W}_E[J] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(\hbar^{-1} \int_{\bar{x}} -\frac{\hbar^2}{2}(\bar{\partial}_\mu\varphi)(\bar{\partial}^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + J\varphi\right) \quad (2.23)$$

Puede comprobarse que la ecuación anterior es de la forma (2.17) si elegimos:

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \hbar^{-1} \left( \hbar^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}'_\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\nu} + m^2 \right) \delta(\bar{x}' - \bar{x}) \quad \rho(\bar{x}) = \hbar^{-1} J(\bar{x}) \quad (2.24)$$

Utilizando (A.2) queda<sup>7</sup>:

$$\mathcal{W}_E[J] = \exp\left(\frac{\hbar^{-2}}{2} \int_{\bar{x}'} \int_{\bar{x}} J(\bar{x}') A^{-1}(\bar{x}', \bar{x}) J(\bar{x})\right) \quad (2.25)$$

A continuación definimos el siguiente objeto:

$$D_F^E(\bar{x}' - \bar{x}) = \hbar^{-1} A^{-1}(\bar{x}', \bar{x}) \quad (2.26)$$

De forma que (2.25) se transforma en:

$$\mathcal{W}_E[J] = \exp\left(\frac{\hbar^{-1}}{2} \int_{\bar{x}'} \int_{\bar{x}} J(\bar{x}) D_F^E(\bar{x}' - \bar{x}) J(\bar{x})\right) \quad (2.27)$$

Si queremos obtener la expresión explícita de  $D_F^E(\bar{x}' - \bar{x})$  necesitamos conocer la función  $A^{-1}(\bar{x}', \bar{x})$ . Para ello, obtenemos primero  $A(\bar{x}', \bar{x})$  su inversa, sustituyendo en (2.24) la representación integral de la delta de Dirac en el espacio euclídeo 4-dimensional<sup>8</sup> y aplicando sobre ella el operador diferencial correspondiente:

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \hbar^{-1} \left( \hbar^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}'_\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\nu} + m^2 \right) \left( \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} e^{i\bar{p}\cdot(\bar{x}'-\bar{x})/\hbar} \right) = \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} \frac{\bar{p}^2 + m^2}{\hbar} e^{i\bar{p}\cdot(\bar{x}'-\bar{x})/\hbar} \quad (2.28)$$

<sup>6</sup>El producto  $\bar{\partial}_\mu\varphi\bar{\partial}_\mu\varphi$  es el análogo del  $(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi)$  al que estamos acostumbrados, pero con una métrica 'normal', extendiendo el espacio euclídeo a 4-dimensiones con la signatura  $(+1,+1,+1,+1)$ , así que  $\bar{\partial}_\mu\varphi\bar{\partial}_\mu\varphi = \bar{\partial}_0\varphi\bar{\partial}_0\varphi + \bar{\partial}_1\varphi\bar{\partial}_1\varphi + \bar{\partial}_2\varphi\bar{\partial}_2\varphi + \bar{\partial}_3\varphi\bar{\partial}_3\varphi$ .

<sup>7</sup>De nuevo, el término de la traza que aparece al usar (A.2) es absorbido por la constante de normalización.

<sup>8</sup> Siguiendo con la idea de la métrica  $(+1,+1,+1,+1)$ , definimos el producto escalar que aparece en la delta de Dirac de la forma  $\bar{p}\cdot\bar{x} = \bar{p}_0\bar{x}_0 + \bar{p}_1\bar{x}_1 + \bar{p}_2\bar{x}_2 + \bar{p}_3\bar{x}_3$ .

Sabiendo que  $A(\bar{x}', \bar{x})$  y  $A^{-1}(\bar{x}', \bar{x})$  tienen que satisfacer la siguiente identidad

$$\int_y A(x_1, y)A^{-1}(y, x_2) = \delta(x_1 - x_2) \quad (2.29)$$

puede obtenerse  $A^{-1}(\bar{x}', \bar{x})$ , y, con ella, el objeto que estábamos buscando:

$$D_E(\bar{x}' - \bar{x}) = \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hbar^{-1}\bar{p}\cdot(\bar{x}' - \bar{x})}}{\bar{p}^2 + m^2} \quad (2.30)$$

La ecuación (2.33) no es más que la transformada de Fourier (ver Apéndice A.3) de la función  $D_F^E(\bar{x}' - \bar{x})$ , así que toda la parte que está pegada a la exponencial será: [4]

$$\tilde{D}_E(p) = \frac{1}{\bar{p}^2 + m^2} \quad (2.31)$$

Ahora que ya hemos evaluado  $\mathcal{W}_E[J]$  en el espacio euclídeo 4-dimensional podemos volver al espacio de Minkowski haciendo los cambios habituales en la parte espacial,  $\bar{x}$ , y llevando a cabo la transformación del momento definiendo  $\bar{p} = (\bar{p}_0, \bar{\mathbf{p}}) = (-ip_0, \mathbf{p})$  para obtener el resultado final: [4]

$$\boxed{\mathcal{W}[J] = \exp\left(-\frac{i\hbar^{-1}}{2} \int_{x'} \int_x J(x') D_F(x' - x) J(x)\right)} \quad (2.32)$$

Con:

$$\boxed{D(x' - x) = \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x' - x)/\hbar} \tilde{D}(p)} \quad (2.33)$$

Donde

$$\tilde{D}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.34)$$

Por último, es importante notar la aparición del término  $i\varepsilon$  en la expresión anterior, que nos permitirá realizar la integral sobre  $p_0$  en el plano complejo sin tener problemas con los polos, que se encuentran sobre el eje real, en  $p^2 = m^2$ . Gracias a la introducción de  $i\varepsilon$  dichos polos se desplazarán ligeramente (uno por encima del eje y otro por debajo), de forma que podremos esquivarlos [4] [2].

### 2.1.3 Propagadores y funciones de Green para la teoría libre

Puesto que ya conocemos la forma que adopta el funcional generador  $\mathcal{W}[J]$  en el caso de la teoría libre de un campo escalar, ya estamos listos para calcular las funciones de Green que nos interesaban desde el principio. Para ello, simplemente sustituimos (2.32) en (2.7) y realizamos las derivadas funcionales correspondientes [4]. Con el objetivo de ilustrar el procedimiento a seguir, realizaremos el caso con  $n = 2$  explícitamente. Empleando las dos ecuaciones que acabamos de mencionar tenemos que: [4]

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{1}{i^2} \left. \frac{\delta^2 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J(x)=0} \quad (2.35)$$

A partir de ahora trabajaremos con  $\hbar = 1$ . Primero hacemos la derivada funcional con respecto a  $J(x_1)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1)} &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \exp\left(-\frac{i}{2} \int_x \int_y J(x) D_F(x-y) J(y)\right) = -\frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[ \int_x \int_y J(x) D_F(x-y) J(y) \right] \times \\
&\times \mathcal{W}[J] = -\frac{i}{2} \cdot \left[ \int_x \int_y \frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} D(x-y) J(y) + \int_x \int_y J(x) D(x-y) \frac{\delta J(y)}{\delta J(x_1)} \right] \mathcal{W}[J] = \\
&= -\frac{i}{2} \cdot \left[ \int_x \int_y \delta(x-x_1) D(x-y) J(y) + \int_x \int_y J(x) D(x-y) \delta(x_1-y) \right] \mathcal{W}[J] = \\
&= -\frac{i}{2} \cdot \left[ \int_y D(x_1-y) J(y) + \int_x D(x-x_1) J(x) \right] \mathcal{W}[J] = -i \int_x D(x_1-x) J(x) \cdot \mathcal{W}[J]
\end{aligned}$$

En el cálculo hemos tenido en cuenta las siguientes propiedades de las derivadas funcionales:

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta(x-x_1) \Rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left( \int_x J(x) D(x-y) \right) = D(x_1-y)$$

Y hemos utilizado que la derivada funcional de un producto no es más que la suma de las derivadas funcionales de cada uno de los términos involucrados, y también que la derivada funcional de una función (en este caso, una exponencial) se lleva a cabo en el sentido usual. También es importante recordar la propiedad de la delta de Dirac que nos dice que  $\int_x \delta(x-x_1) D(x-y) = D(x_1-y)$ .

Esta derivada funcional es bastante recurrente y nos será de gran utilidad en los cálculos venideros, así que nos convendrá tenerla siempre presente:

$$\boxed{\frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1)} = -i \int_x D(x_1-x) J(x) \cdot \mathcal{W}[J]} \quad (2.36)$$

Haciendo la derivada funcional con respecto a  $J(x_2)$  con ayuda del resultado anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} &= \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left( -i \int_x D(x_1-x) J(x) \cdot \mathcal{W}[J] \right) = \\
&= -i \int_x \delta(x-x_2) D(x_1-x) \cdot \mathcal{W}[J] + (-i)^2 \int_x D(x_1-x) J(x) \int_y D(x_2-y) J(y) \cdot \mathcal{W}[J] = \\
&= -i D(x_1-x_2) \cdot \mathcal{W}[J] + (-i)^2 \int_x D(x_1-x) J(x) \int_y D(x_2-y) J(y) \cdot \mathcal{W}[J]
\end{aligned}$$

Evaluando en  $J(x) = 0$  obtenemos el resultado final. Al hacerlo, el segundo término desaparece, puesto que va acompañado de  $J(x)$ , y solamente sobrevive el primero, donde, además, tenemos que tener en cuenta que  $\mathcal{W}[J=0] = 1$ . Por tanto la función de Green para  $n = 2$  será: [6] [4]

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = i D(x_1 - x_2) \quad (2.37)$$

El objeto que ha aparecido en el lado derecho de la ecuación recibe el nombre de propagador de Feynman (por motivos que quedarán claros dentro de poco), y se define como sigue: [6]

$$\boxed{D_F(x_1 - x_2) \equiv i D(x_1 - x_2) = \int_p i \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}} \quad (2.38)$$

Así que: [6]

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \} | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) \quad (2.39)$$

También podemos calcular, por ejemplo, las funciones de Green con  $n = 3$  y  $n = 4$ , siguiendo el mismo procedimiento que acabamos de llevar a cabo. En el caso de  $\mathcal{G}^3(x_1, x_2, x_3)$  se tiene que: [6]

$$\mathcal{G}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{i^3} \frac{\delta^3 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} \Big|_{J(x)=0} = 0 \quad (2.40)$$

Es decir, la función de Green correspondiente es nula.<sup>9</sup> Para  $n = 4$  se obtiene el siguiente resultado: [6]

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_4) &= \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4 \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J(x)=0} = \\ &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Llegados a este punto, parece lógico preguntarse si este objeto, el propagador (2.38), tiene alguna interpretación física. Puede comprobarse que  $D_F(x - y)$  satisface la siguiente ecuación diferencial: [4]

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_F(x - y) = -\delta(x - y) \quad (2.42)$$

Lo cual significa que, efectivamente,  $D_F(x - y)$  es una función de Green<sup>10</sup> (tal y como nos veníamos refiriendo a ella desde el principio) y, concretamente, está asociada al operador  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$ . Así,  $D_F(x - y)$  será la solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon, (1.51), por lo que podemos asociar este objeto con la propagación de una partícula escalar de masa  $m^2$  que va desde el punto  $x$  hasta el punto  $y$ . Teniendo en cuenta la presencia de nuestras fuentes, que, en este caso, serán  $J(x)$  y  $J(y)$ , es posible imaginarnos la situación de la siguiente forma: en primer lugar, la partícula que estamos considerando 'nace' en  $x$  gracias a la acción de la fuente  $J(x)$ , después, se propaga durante un cierto período de tiempo hasta llegar a  $y$  donde, finalmente, 'muere' tras ser aniquilada de alguna forma debido a la fuente  $J(y)$ . Tras esto, referirnos a  $D_F(x - y)$  como propagador cobra sentido, y  $\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2)$  no representa más que la probabilidad de que la partícula vaya desde  $x$  hasta  $y$  [4] [5] [1]. Por comodidad, podemos inventarnos una representación pictórica para escribir el propagador. Considerando cuál es su significado físico, parece intuitivo dibujarlo como una línea recta que conecte los puntos  $x$  e  $y$  en el espacio. Es decir,  $\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = D_F(x_1 - x_2)$  será: [6]

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_2 = D_F(x_1 - x_2)$$

Siguiendo con la misma idea,  $D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4)$ , por ejemplo, representaría un proceso en el que una partícula se propaga desde  $x_1$  hasta  $x_2$ , mientras que otra lo hace de  $x_3$  a  $x_4$ , sin que se produzca ningún tipo de interacción entre ellas [2]. Así, la función de Green con  $n = 4$ ,  $\mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , se representaría como: [6] [4] [3]

$$\mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{ccc} x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_2 & x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_3 & x_1 \bullet \text{-----} \bullet x_4 \\ & + & + \\ x_3 \bullet \text{-----} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_4 & x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_3 \end{array}$$

Donde la primera de las parejas se corresponde con el término  $D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4)$  de (2.41), la

<sup>9</sup>De hecho, todas las funciones  $\mathcal{G}^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$  con un valor de  $n$  impar lo son.

<sup>10</sup>Cuando tenemos un operador diferencial  $\mathcal{D}_x$  que actúa sobre funciones o distribuciones de tal forma que  $\mathcal{D}_x \mathcal{G}(x, x') = \delta(x - x')$ , se dice que  $\mathcal{G}$  es la función de Green asociada al dicho operador.

segunda con  $D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4)$  y la tercera con  $D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3)$ . Este tipo de funciones, que no podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel, se denominan desconectadas. Es importante notar que, además, este tipo de esquemas también codifican el hecho de que  $\mathcal{G}^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$  sea nula, ya que, si dibujásemos tres puntos  $x_1, x_2$  y  $x_3$  e intentásemos unirlos por parejas uno de ellos se quedaría siempre solo.

Llegados a este punto, seguramente podamos empezar a apreciar la utilidad de estas representaciones, ya que, una vez que hayamos hecho un par de cálculos del tipo (2.7) y nos hayamos familiarizado con el 'patrón' que siguen, seremos capaces de obtener los propagadores de un proceso particular de forma directa, a partir de los propios dibujos (en la Sección 2.2.1 su 'potencia' se hará aún más evidente). Esto (entre otras muchas cosas) les hace merecedores de un nombre propio, por lo que a estas representaciones se las conoce como diagramas de Feynman, y, siguiendo un conjunto de reglas [6], pueden utilizarse para calcular cualquier función de Green  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ :

1. En primer lugar, dibujamos  $n$  puntos.
2. A continuación, los unimos de todas las formas posibles (cada una de ellas nos dará un diagrama distinto) de tal manera que únicamente pueda pasar una línea por cada uno de los puntos.
3. A cada pareja de puntos, le asignamos su propagador  $D_F(x_i - x_j)$  correspondiente. Si un punto se queda sin pareja, el diagrama desaparece.
4. Por último, sumamos todas las combinaciones que hemos obtenido.

Cabe destacar que, en el caso de la teoría con la que estamos trabajando, todas las funciones de Green con  $n > 2$  están desconectadas, tal y como se ilustra en el ejemplo de  $\mathcal{G}^{(4)}$ . Además, el hecho de que únicamente dependen de la diferencia entre los puntos donde 'nacen' y 'mueren' las partículas nos dice que la teoría es invariante bajo traslaciones espaciales [6], tal y como podríamos esperar desde un principio, ya que no nos importa dónde estén exactamente situados los puntos  $x$  e  $y$ , sino la distancia que recorre la partícula antes de aniquilarse [1].

Podemos pasar del espacio de posiciones al de momentos a través de las transformadas de Fourier (Apéndice A.3). Así, podríamos escribir: [4]

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)(2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_n) = \int_{x_1} \dots \int_{x_n} e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} \times \mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.43)$$

La  $\delta(p_1 + \dots + p_n)$  aparece porque, como hemos comentado antes,  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  únicamente depende de las diferencias entre los distintos  $x_i$  debido a la invariancia traslacional [4]. Sabemos que dicha invariancia implica la conservación del momento, así que, como la delta de Dirac se anula en todos los puntos excepto en  $\delta(0)$ , al escribir  $\delta(p_1 + \dots + p_n)$  estamos pidiendo que se satisfaga  $p_1 + \dots + p_n = 0$ , que no es más que la conservación del momento. Por ejemplo, en el caso con  $n = 2$  tendremos que: [6]

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(2)}(p_1, p_2)(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) = \tilde{D}_F(p_1)(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2)$$

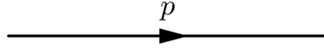
Y, por tanto, como tiene que cumplirse que  $p_1 = -p_2$ , podemos escribir: [6]

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(2)}(p, -p) = i\tilde{D}(p) = \tilde{D}_F(p) \quad (2.44)$$

Donde  $\tilde{D}(p)$  se escribe de la forma que vimos en (2.34), así que: [6]

$$\boxed{\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}} \quad (2.45)$$

Físicamente, de forma similar a como (2.33) describía una partícula que se propagaba desde un punto a otro, la expresión anterior codifica la probabilidad de que una partícula de masa  $m$  se propague en el espacio con un valor de momento  $p$ . Podemos asociarle también su propia representación pictórica, utilizando una línea sobre la que se dibuja una flecha que representa el momento asociado: [6]



Por último, cabe destacar que es posible definir otro funcional generador,  $\mathcal{X}[J]$ , que únicamente da lugar a funciones de Green conectadas,  $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ , y que se obtiene a partir de  $\mathcal{W}[J]$  como sigue: [6]

$$\mathcal{W}[J] = e^{i\mathcal{X}[J]} \Rightarrow i\mathcal{X}[J] = \log \mathcal{W}[J] = -\frac{i}{2} \int_x \int_{x'} J(x) D(x-x') J(x') \quad (2.46)$$

Así, podemos escribir: [4]

$$\boxed{i^n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i \frac{\delta^n \mathcal{X}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0}} \quad (2.47)$$

Por tanto, las funciones de Green conectadas son los coeficientes de la expansión funcional: [4]

$$i\mathcal{X}[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{x_1} \dots \int_{x_n} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (2.48)$$

Utilizando (2.47), es fácil comprobar que, en el caso de la teoría libre con la que estamos trabajando, la única función conectada que tenemos es  $G^{(2)}$ . Este resultado coincide con lo que vimos en las representaciones anteriores, donde todas las funciones de Green con  $n > 2$  eran desconectadas. Así, tenemos que: [6]

$$\boxed{G^{(2)}(x_1, x_2) = D_F(x_1 - x_2)} \quad (2.49)$$

Y en el espacio de momentos: [6]

$$\boxed{\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \tilde{D}_F(p)} \quad (2.50)$$

## 2.2 La teoría $\lambda\varphi^4$

La teoría de campos escalares con la que hemos estado trabajando hasta ahora era una teoría libre que no permitía interacciones entre los campos. A pesar de que sirve como una buena introducción (puesto que resulta útil para empezar a familiarizarse con la formulación de la *QFT*), hacer una teoría cuántica de campos sin permitir que las partículas puedan interactuar entre ellas o que haya procesos de dispersión no tiene mucho interés físico. Necesitamos, por tanto, utilizar un marco teórico que sea más cercano a lo que se observa en la naturaleza y que nos permita describir los procesos que tienen lugar en los aceleradores de partículas. En consecuencia, el siguiente paso será añadir un nuevo término  $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$  al lagrangiano de la teoría libre,  $\mathcal{L}_0$ , de la forma  $\sim \varphi^4(x)$ , de tal forma que permitiremos interactuar a cuatro campos en el mismo

punto  $x$  del espacio. El motivo principal por el que estudiaremos esta teoría es por su simplicidad, que nos permitirá sentar las bases para entender cómo abordar otras teorías más complicadas<sup>11</sup>. [3] [4]

### 2.2.1 Tratamiento perturbativo y reglas de Feynman

A la hora de abordar el estudio de una teoría escalar en la que los campos pueden interactuar entre sí necesitamos recurrir a un tratamiento perturbativo. El nuevo lagrangiano con el que vamos a trabajar,  $\mathcal{L}$ , estará formado por el lagrangiano  $\mathcal{L}_0$  de la teoría libre y un nuevo término que codificará las interacciones entre los campos,  $\mathcal{L}_I$ , y que dependerá de una cierta potencia,  $\lambda$ , que es adimensional y recibe el nombre constante de acoplamiento: [4] [3]

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_I(\varphi) \quad (2.51)$$

Recordando que el funcional generador  $\mathcal{W}[J]$ <sup>12</sup> era de la forma: [6]

$$\mathcal{W}[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int_x \mathcal{L}(\varphi) + J(x)\varphi \right]$$

Utilizando (2.51) podemos separar la exponencial como sigue: [4]

$$\mathcal{W}[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int \mathcal{L}_0(\varphi) + J(x)\varphi(x) \right] \exp \left[ i \int_x \mathcal{L}_I(\varphi) \right] \quad (2.52)$$

Derivando la exponencial que lleva  $\mathcal{L}_0$  con respecto de  $J(x)$  puede obtenerse la siguiente relación: [4]

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[ i \int dz (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right] = i\varphi(x) \exp \left( i \int dz (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right) \quad (2.53)$$

De donde puede leerse que  $i\varphi(x) = \frac{\delta}{\delta J(x)}$ . Denotando por  $\mathcal{W}_0[J]$  al funcional generador de la teoría libre y utilizando el resultado que acabamos de ver tenemos que: [6] [4]

$$\mathcal{W}[J] = \mathcal{N}' \exp \left[ i \int \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \mathcal{W}_0[J] \quad (2.54)$$

Si  $\lambda < 1$ , podemos intentar hacer una expansión en serie de potencias del funcional generador  $\mathcal{W}[J]$  en términos de  $\lambda$ , ya que  $\mathcal{L}_I$  es proporcional a ella. Haciendo un desarrollo de la exponencial se tiene que: [4]

$$\exp \left[ i \int_x \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \simeq 1 + i \int_x \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J} \right) + \frac{i^2}{2!} \int_x \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J} \right) \times \int_y \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J} \right) + \dots \quad (2.55)$$

Tal y como adelantamos antes, el término de interacción será proporcional a  $\varphi^4$ , concretamente:

$$\mathcal{L}_I(\varphi) = -\frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x) \quad (2.56)$$

Utilizando el lagrangiano que acabamos de escribir, quedándonos a primer orden en la expansión (2.55) y sustituyendo el resultado en (2.54), obtenemos la siguiente expresión para el funcional generador: [4]

<sup>11</sup>Aunque también se utiliza en modelos reales para describir interacciones que suceden en la naturaleza, como algunos acoplamientos del bosón de Higgs.

<sup>12</sup>En adelante,  $\mathcal{W}_0[J]$  se utilizará para denotar el funcional generador que estábamos escribiendo hasta ahora, el de la teoría libre, mientras que  $\mathcal{W}[J]$  pasará a referirse al de la teoría completa.

$$\mathcal{W}[J] = \mathcal{W}_0[J] - \frac{i\lambda}{4!} \int_x \frac{\delta^4 \mathcal{W}_0[J]}{\delta J(x)^4} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.57)$$

Observando la ecuación que acabamos de escribir puede verse que, al haber añadido un nuevo término al lagrangiano para codificar las interacciones, aparecen nuevos sumandos en el funcional generador (dentro de un rato veremos cómo afecta esto a las funciones de Green). Para calcular  $\mathcal{W}[J]$  necesitamos hacer la derivada funcional de  $\mathcal{W}_0[J]$  con respecto de  $J$  cuatro veces seguidas. La forma de la primera ya la conocemos gracias al cálculo que realizamos en la Sección 2.1.3: [4]

$$\frac{\delta \mathcal{W}_0[J]}{\delta J(x)} = -i \int dy D(x-y) J(y) \mathcal{W}_0[J] \quad (2.58)$$

Derivando sucesivamente las veces requeridas, se llega a: [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[J] = \mathcal{N}' \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \left( \int_x 3(iD_0)^2 - 6iD_0 \int_{x_1} \int_{x_2} iD_{x_1} iD_{x_2} J_1 J_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{y_1} \int_{y_2} \int_{y_3} \int_{y_4} iD_{x_1} iD_{x_2} iD_{x_3} iD_{x_4} J_1 J_2 J_3 J_4 \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \cdot \mathcal{W}_0[J] \end{aligned}$$

Para escribir menos, hemos utilizado la siguiente notación: [6]

$$D_0 = D(0) = D(x-x) \quad D_{xy} = D(x-y) \quad J_x = J(x)$$

Las funciones de Green se obtienen, como siempre, a partir del funcional generador  $\mathcal{W}[J]$ :

$$(i)^n \mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J(x)=0} \quad (2.59)$$

Aunque se definen de la misma forma que en la Sección 2.1.1, esperamos (sin necesidad de hacer ningún cálculo) que sean bastante diferentes de las que obtuvimos cuando trabajamos con la teoría libre, debido a la introducción del nuevo término  $\mathcal{L}_I$  en el lagrangiano. Para ver qué información contienen ahora las nuevas funciones de Green, calcularemos los casos con  $n = 2$  y  $n = 4$  (los mismos que obtuvimos cuando no había interacciones), y las compararemos con las que vimos en ese momento.

Para  $n = 2$ , realizando las derivadas funcionales correspondientes se tiene: [4]

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = D_F(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} \int_x D_F(x_1 - x) D_F(x - x) D_F(x - x_2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.60)$$

El primer sumando se corresponde con la función de Green que obtuvimos para la teoría libre con  $n = 2$ , por lo que podemos denotarlo como  $\mathcal{G}_0^{(2)}(x_1, x_2)$ . Es importante notar que, como consecuencia de haber introducido las interacciones entre los campos, aparece un sumando adicional que no teníamos en (2.39) [4]. Para representar el diagrama de Feynman de este resultado, tenemos que tener en cuenta que:

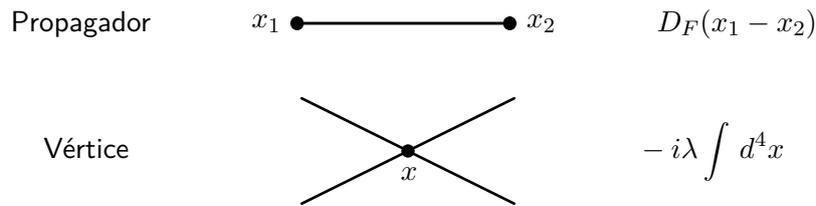
- Por un lado, tenemos el propagador usual  $D_F(x_1 - x_2)$ , que simplemente simboliza una partícula que va desde el punto  $x_1$  hasta el punto  $x_2$ , y que podemos dibujar con una línea recta.
- Por otra parte, el término que ha aparecido por primera vez es proporcional a  $-i\lambda \int dx^4$ , y contiene el producto  $D_F(x_1 - x) D_F(x - x) D_F(x - x_2)$ , que representa una propagación de  $x_1$  a  $x$ , otra de  $x$  a

$x$ , y otra de  $x$  a  $x_2$ . Por tanto, estos tres propagadores tienen un punto en común ( $x$ ), que también tendremos que dibujar, y que recibe el nombre de vértice. En él se producen las interacciones, y la integral  $\int d^4x$  codifica el hecho de que pueden tener lugar en cualquier parte. [1]

De este modo, dibujaremos (2.60) de la siguiente forma: [6]

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \text{---} x_2 + \frac{1}{2} x_1 \text{---} \overset{\circlearrowleft}{x} \text{---} x_2 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

En el diagrama anterior tenemos los siguientes elementos: [6]



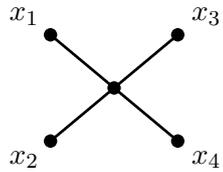
Para  $n = 4$  se obtiene una expresión muy complicada, así que la representamos directamente con los diagramas: [6]

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \\ = & \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} x_1 \text{---} \overset{\circlearrowleft}{x} \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} \overset{\circlearrowleft}{x} \text{---} x_4 \end{array} \\ & + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

La notación ( $i \longleftrightarrow j$ ) se utiliza para no sobrecargar el dibujo, y simboliza que tenemos que repetir el diagrama anterior pero intercambiando el sitio de los dos puntos que se indican [4] [6]. Es importante notar que, esta vez, ha aparecido un diagrama (el último de ellos) que no está desconectado. Esto es una consecuencia directa de haber introducido las interacciones de tipo  $\sim \varphi^4$ , que han permitido la existencia de los vértices y han abierto las posibilidades a nuevos tipos de diagramas. Debido a ello, sí que existen funciones de Green conectadas con valores de  $n > 2$ , a diferencia de lo que sucedía en el caso de la teoría libre [4] [6]. Con las cosas que hemos aprendido podemos escribir matemáticamente las contribuciones de los diagramas que aparecen en  $\mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  a partir del dibujo:

$$\begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} \overset{\circlearrowleft}{x} \text{---} x_4 \end{array} = D_F(x_1 - x_2)(-i\lambda) \int d^4x D_F(x_3 - x) D_F(x - x) D_F(x - x_4)$$

En el diagrama de la página anterior aparece el propagador usual, que representa simplemente una partícula que va desde el punto  $x_1$  al punto  $x_2$  sin interactuar con ninguna otra, mientras que, paralelamente, tenemos un vértice en el que se produce una interacción entre 4 campos.

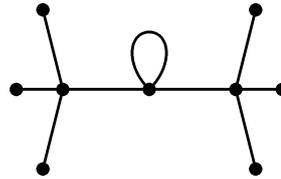


$$= (-i\lambda) \int d^4x D_F(x_1 - x) D_F(x_2 - x) D_F(x_3 - x) D_F(x_4 - x)$$

En este otro diagrama contamos con cuatro partículas que nacen en puntos diferentes del espacio,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$  y que terminan todas en el mismo punto,  $x$ , donde van a interactuar.

Tras todos estos ejemplos, la 'potencia' que poseen los diagramas de Feynman y que adelantamos en la Sección 2.1.3 resulta bastante evidente ya que, una vez que tenemos claro qué representa matemáticamente cada uno de los elementos de los que disponemos, en lugar de representar los propagadores y los vértices a través de los diagramas, podemos darle la vuelta la idea, y partir de un dibujo que se nos haya ocurrido (que puede representar algún proceso concreto) y escribir a partir de él su función de Green correspondiente, sin realizar ningún cálculo: en esto reside la 'magia' de los diagramas de Feynman.

Así, si por ejemplo tuviésemos el siguiente diagrama: [6]



Podríamos asociarle la siguiente expresión utilizando todo lo que hemos aprendido:

$$\frac{1}{2}(-i\lambda)^3 \int_x \int_y \int_z D_F(x_1 - y) D_F(x_2 - y) D_F(x_3 - y) \times \\ \times D_F(y - x) D_F(x - x) D_F(x - z) D_F(z - x_4) D_F(z - x_5) D_F(z - x_6)$$

A modo de curiosidad, factor de  $1/2$  que aparece en algunos de los diagramas guarda relación con lo que se conoce como el factor de simetría, que es el número de formas que tenemos de intercambiar las componentes del diagrama sin cambiar su significado<sup>13</sup> [6] [5].

De forma similar a como hicimos en la Sección 2.1.3, podemos escribir un funcional generador  $\mathcal{X}[J]$  que únicamente nos devuelva funciones de Green conectadas, que son bastante más sencillas de manejar [4]:

$$i\mathcal{X}[J] = \log \mathcal{W}[J] \quad (2.61)$$

<sup>13</sup>Debido a que su cálculo es bastante oscuro, no entraremos en detalles sobre él. Por suerte el factor de simetría de los diagramas con los que trabajaremos va a ser, como mucho, 2 [7].

Tomando el logaritmo de (2.61) se tiene que: [6]

$$i\mathcal{X}[J] = \log(\mathcal{N}') - \frac{1}{2}iD_{12}J_1J_2 + \log \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \left( \int_x 3(iD_0)^2 - 6iD_0iD_{x_1}iD_{x_2}J_1J_2 + iD_{x_1}iD_{x_2}iD_{x_3}iD_{x_4}J_1J_2J_3J_4 \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \quad (2.62)$$

Las funciones de Green conectadas se obtienen a partir del funcional generador haciendo las derivadas funcionales correspondientes, como en (2.47). En el caso de  $G^{(2)}(x_1, x_2)$ , los dos diagramas que obtuvimos a partir de  $\mathcal{W}[J]$  estaban ya conectados, así que esperamos obtener el mismo resultado; sin embargo, en el caso de  $G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , a excepción del último de todos los que representamos, todos estaban desconectados, así que esperamos que, si todo funciona adecuadamente, el cálculo a partir de  $\mathcal{X}[J]$  nos de únicamente ese último diagrama. Si realizamos las derivadas funcionales correspondientes obtenemos que: [6] [4]

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = D_F(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(-i\lambda) \int_x D_F(x_1 - x)D_F(x - x)D_F(x_1 - x_2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.63)$$

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-i\lambda) \int_x D_F(x_1 - x)D_F(x_2 - x)D_F(x_3 - x)D_F(x_4 - x) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.64)$$

Y por, tanto, vemos que tanto  $G^{(2)}(x_1, x_2)$  como  $G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  coinciden con lo que esperábamos.

Llegados a este punto, merece la pena pararnos un momento antes de continuar para dejar clara alguna terminología relativa a los diferentes elementos que constituyen los diagramas de Feynman, que nos convendrá tener presente en el futuro cuando tratemos con funciones de Green más complejas. Las partes principales de los diagramas son las 'patas' y los vértices; ambos pueden ser tanto internos como externos:

- Los vértices internos aparecen debido a las interacciones entre los campos, y se representan con un punto. Los vértices externos codifican aquellas variables sobre las que no se integra nunca, pero de las que depende la función de Green que representa el diagrama. Por ejemplo, la función de Green  $G^{(2)}(x_1, x_2)$  depende únicamente de  $x_1$  y  $x_2$ , pero no del vértice  $x$  sobre el que se integra [1].
- Las 'patas' son las líneas que asociamos con un propagador. Se denominan externas cuando están unidas a, al menos, un vértice externo, e internas cuando están unidas por ambos lados a uno interno.

Al igual que en el caso de la teoría libre, nos interesa trabajar en el espacio de momentos. Haciendo la transformada de Fourier de la ecuación (2.60) y recordando que la forma del propagador con  $n = 2$  en el caso de la teoría libre venía dada por (2.34) se tiene que: [4] [6]

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \tilde{D}_F(p) - \frac{i\lambda}{2} \tilde{D}_F(p) \tilde{D}(p) \int_k \tilde{D}_F(k) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.65)$$

O, equivalentemente:

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{i\lambda}{2} \int_k \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.66)$$

Podemos representar la función de Green que acabamos de escribir utilizando los diagramas de Feynman, de la misma forma que hicimos antes pero asociando a cada línea un valor del momento:

$$\tilde{G}^{(2)}(p, -p) = \text{---} \overset{p}{\text{---}} + \frac{1}{2} \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \overset{p}{\text{---}} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

El hecho de que la interacción pudiese ocurrir en cualquier punto del espacio tiempo (tal y como codificaba la integral  $\int d^4x$ ) se manifiesta en la conservación del momento (marcada por  $\delta(p_1 + \dots + p_n)$ ), que tiene que satisfacerse en todos los vértices [1]. Juntando todo lo que sabemos, podemos escribir las siguientes reglas de Feynman que tendremos que tener presentes a la hora de representar un proceso: [6] [4]

1. En primer lugar, dibujamos todos los diagramas posibles con el valor de  $n$  que tengamos.
2. Después, etiquetamos cada una de las líneas con una variable que represente el momento de la partícula que se propaga por ella, y le asociamos un factor de la forma

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

3. Por cada vértice escribimos en el que converjan cuatro líneas imponemos la conservación del momento y asociamos un factor  $(-i\lambda)$ .
4. Al momento que circule a través de una línea interna se le asocia la integral  $\int_p$ .

Teniendo todo esto en cuenta, podemos escribir la expresión de la función de Green conectada que vimos antes,  $G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , en el espacio de momentos sin demasiadas dificultades:

$$\tilde{G}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{array}{ccc} p_1 & & p_3 \\ & \diagdown & / \\ & \times & \\ & / & \diagdown \\ p_2 & & p_4 \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\tilde{G}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-i\lambda) \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.67)$$

## 2.2.2 La acción efectiva y las funciones de Green 1PI

Antes de ver qué aplicaciones tienen las funciones de Green con las que hemos trabajado hasta ahora, conviene introducir una última clase de ellas que no hemos mencionado todavía: las funciones de Green 1PI (del inglés, *one-particle-irreducible*). Para poder definir las es necesario introducir primero una nueva variable, denotada como  $\varphi_c(x)$ , que se obtiene a partir del funcional generador  $\mathcal{X}[J]$  de las funciones de Green conectadas,  $G^{(n)}$ , a través de la derivada funcional con respecto de las fuentes, es decir: [4]

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta \mathcal{X}[J]}{\delta J(x)} \quad (2.68)$$

Utilizando esta nueva variable, definimos también un nuevo funcional, que depende únicamente de  $\varphi_c(x)$ : [4]

$$\Gamma[\varphi_c] = \mathcal{X}[J] - \int d^4x J(x)\varphi_c(x) \quad (2.69)$$

Puesto que podemos obtener  $\varphi_c(x)$  a partir de la derivada funcional de  $\mathcal{X}[J]$  con respecto de  $J(x)$ , no es descabellado pensar que, debido a la expresión anterior,  $J(x)$  pueda calcularse de forma similar, pero haciendo una derivada funcional de  $\Gamma[\varphi_c]$  con respecto de  $\varphi_c(x)$ , de forma que: [4]

$$J(x) = -\frac{\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} \quad (2.70)$$

Si consideramos la teoría libre, en la que no permitíamos interacciones entre los campos, podemos utilizar la ecuación (2.46) para llevar a cabo el cálculo de (2.68) y obtener la forma explícita de  $\varphi_c(x)$ : [4]

$$\varphi_c(x) = -\int d^4x' D_F(x-x')J(x') \quad (2.71)$$

En las secciones anteriores hemos visto que el propagador,  $D_F(x-x')$ , es la función de Green del operador  $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)$ . Por tanto, la expresión anterior nos dice que  $\varphi_c(x)$  es la solución de: [4]

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi_c(x) = J(x) \quad (2.72)$$

La ecuación diferencial anterior es igual que la de Klein-Gordon, (1.51), pero en presencia de una fuente. Debido a esto, el campo  $\varphi_c(x)$  recibe el nombre de campo clásico. Utilizando (2.46) y (2.72) en (2.69) y usando la regla de Leibniz podemos obtener la forma explícita de  $\Gamma[\varphi_c]$ : [4]

$$\Gamma[\varphi_c] = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu\varphi_c\partial^\mu\varphi_c - m^2\varphi_c^2) \quad (2.73)$$

De ahora en adelante, llamaremos a  $\Gamma[\varphi_c]$  acción efectiva, como consecuencia de la similitud de su forma con la de la acción de las teorías clásicas de campos escalares. Al igual que hicimos con los funcionales generadores  $\mathcal{W}[J]$  y  $\mathcal{X}[J]$ , podemos llevar a cabo una expansión funcional: [4]

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n) \quad (2.74)$$

En el caso de  $\mathcal{W}[J]$  los coeficientes que aparecían al realizar la expansión eran las funciones de Green desconectadas,  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ , mientras que para  $\mathcal{X}[J]$  dichos coeficientes representaban las funciones de Green conectadas,  $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ . En esta ocasión, los coeficientes  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  de la expansión (2.74) van a dar lugar a las funciones de Green 1PI, que tienen características muy especiales: [4] [3] [6]

- Los diagramas de Feynman que están involucrados en el cálculo de las distintas  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  están todos conectados (tal y como podíamos esperar, ya que en el desarrollo hemos utilizado el funcional generador de las funciones de Green conectadas), y tienen la peculiaridad de que no pueden separarse en dos diagramas diferentes (desconectados entre sí) cortando una única línea interna. Por ejemplo, el diagrama de tipo 'burbuja' que aparece a la izquierda es 1PI, mientras que el diagrama de la derecha no puede serlo, puesto que si hacemos un corte y 'rompemos' la línea interna que se encuentra en el centro, aparecerán dos diagramas independientes que están desconectados.



- Cualquier otro diagrama (conectado o desconectado) puede construirse a partir de los diagramas de Feynman que aparecen en las funciones de tipo 1PI.

En el caso de la teoría libre, solamente existe una 1PI que no sea nula (ya que si no permitimos la existencia de vértices las posibilidades que tenemos a la hora de construir los diagramas de Feynman son muy limitadas) y que podemos obtener explícitamente utilizando la ecuación (2.73): [4]

$$\Gamma^{(2)}(x', x) = (\partial_\mu^{x'} \partial_\mu^x + m^2) \delta(x' - x) \quad (2.75)$$

Haciendo la transformada de Fourier para irnos al espacio de momentos llegamos a [4]

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = -(p^2 - m^2), \quad (2.76)$$

que es una especie de 'versión invertida' del propagador (2.34).

En el caso de la teoría  $\lambda\varphi^4$ , la forma explícita de las expresiones que siguen tanto el campo clásico como la acción efectiva son bastante más complicadas que (2.71) y (2.73), y se obtienen haciendo un tratamiento perturbativo similar al que hemos llevado a cabo a lo largo de la Sección 2.2. Además, la ecuación diferencial que satisface  $\varphi_c(x)$ , como es lógico, deja de ser (2.72), y se convierte en: [4]

$$J(x) = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_c(x) + \frac{1}{2} i \lambda D(0) \varphi_c(x) + \frac{1}{6} \lambda [\varphi_c(x)]^3 + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.77)$$

Al haber permitido las interacciones entre los campos aparecen nuevas funciones de Green del tipo 1PI, formadas por nuevos diagramas. La función  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p)$  se modifica de la siguiente forma: [4] [6]

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = - \left( \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior, puede definirse el propagador completo,  $D$ , como

$$D^{-1} = D_F^{-1} - \Gamma_{1PI}^{(2)}, \quad (2.78)$$

donde  $\Gamma_{1PI}^{(2)}$  representa la suma de todos los diagramas de tipo 1PI que tienen dos 'patas' externas. A la hora de dibujar los diagramas, dicha suma se representa con un 'borrón', de la forma: [6]

$$D^{-1}(p) = -i(p^2 - m^2) - \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---}$$

Además, la función  $\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  ya no es nula, y se representará por: [4]

$$i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \text{---} \overset{p_1}{\text{---}} \text{---} \overset{p_3}{\text{---}} \text{---} \text{---} \overset{p_2}{\text{---}} \text{---} \overset{p_4}{\text{---}} \text{---}$$

### 2.2.3 Cálculo de las amplitudes de dispersión

Las funciones de Green que podemos generar a partir del funcional  $\mathcal{W}[J]$  introducido en las secciones anteriores son objetos que representan cantidades abstractas que no pueden medirse directamente en los experimentos de dispersión que tienen lugar en los aceleradores de partículas [3] [4]. Este tipo de procesos consisten, esencialmente, en hacer interaccionar un número arbitrario de partículas (*incoming*) en una determinada región del espacio, para que, como consecuencia de dicha interacción, se generen otras partículas diferentes (*outgoing*) cuyas propiedades se quieran estudiar. Si consideramos que el alcance de estas interacciones es finito, las partículas únicamente podrán interaccionar entre sí cuando se encuentren lo suficientemente cerca unas de otras [4]. Para ilustrar la idea que vamos a tratar a continuación, vamos a imaginarnos la escala de tiempos que representaría el proceso de dispersión y su evolución, de forma que  $t \rightarrow -\infty$  se corresponda un tiempo 'muy temprano' de la escala de tiempos que estamos utilizando para estudiar el proceso, donde las partículas todavía no sufren interacciones puesto que se encuentran demasiado separadas entre ellas (están muy lejos del punto de interacción). De forma similar,  $t \rightarrow \infty$  representa un tiempo 'tardío' en el que ya ha ocurrido el proceso, y las partículas que resultan de él se encuentran ya lo suficientemente lejos unas de otras, así que también pueden ser consideradas libres [4]. Teniendo en cuenta que las medidas que se realizan en los aceleradores tienen lugar lejos de la 'zona central' donde se produce la interacción, es coherente pensar que podremos modelizar su comportamiento con la teoría libre que hemos visto en las Secciones 2.1.2 y 2.1.3. Cabe destacar que, para que las partículas escalares de masa  $m$  con las que hemos estado trabajando hasta ahora puedan ser consideradas físicas y, participar, por tanto, en los procesos de dispersión, es necesario que su cuadri-momento satisfaga que: [4]

$$p^2 = m^2 \quad (2.79)$$

Si esto se cumple, se dice que las partículas se encuentran *on the mass shell* [4] [6]. El motivo por el que el funcional generador  $\mathcal{W}[J]$  que habíamos derivado anteriormente no es adecuado para obtener a partir de él objetos que representen cantidades observables reside en el hecho de que las condiciones de contorno (2.3) que tenían que satisfacer las integrales de camino de su interior no son suficientes para asegurar que los campos involucrados sean completamente libres en  $t \rightarrow -\infty$  y  $t \rightarrow +\infty$  [4]. Parece necesario, por tanto, obtener un funcional generador diferente que sí pueda garantizarnos que las partículas sean 'asintóticamente libres', y que nos permita encontrar la forma de conectar las ideas que hemos visto anteriormente con magnitudes que sí tengan interés físico, como por ejemplo, las secciones eficaces de producción [3].

Para conseguir nuestro objetivo parece coherente intentar partir de la matriz  $S$  con la que se trabaja en Mecánica Cuántica, que codifica las amplitudes de los procesos de dispersión. Volviendo al modelo de una partícula cuántica no relativista que estudiamos en la Sección 1.1.3, podemos generalizar lo que hicimos entonces, y considerar como estado inicial  $i$  un *ket*  $|i\rangle$  arbitrario, y como estado final  $f$  otro *ket*  $|f\rangle$ . Así, la probabilidad de transición entre ellos se escribirá simplemente como: [4]

$$U_{fi}(t_b, t_a) = \langle f|i\rangle \quad (2.80)$$

Explotando la completitud de los estados e introduciendo identidades de la forma  $\int dq|q\rangle\langle q|$  se tiene que:

$$U_{fi}(t_b, t_a) = \int dq_a dq_b \langle f|q_b, t_b\rangle \langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle \langle q_a, t_a|i\rangle \quad (2.81)$$

Las funciones de onda de estos estados inicial y final se definen como sigue:

$$\psi_i(q, t) = \langle q, t | i \rangle \quad (2.82) \quad \psi_f(q, t) = \langle q, t | f \rangle \quad (2.83)$$

Podemos expresarlas en términos del momento si introducimos la identidad  $\int dp |p\rangle\langle p|$  y utilizamos el operador de evolución temporal para cambiar de la imagen de Heisenberg a la de Schrödinger:

$$\psi_l(q, t) = \langle q, t | l \rangle = \int dp \langle q, t | p \rangle \langle p | l \rangle = \int dp \langle q | e^{-i\hat{H}t} | p \rangle C_l(p) \quad l = i, f \quad (2.84)$$

donde hemos definido los coeficientes  $C_l(p) = \langle p | l \rangle$  [4].

Vamos a asumir que el potencial que se encuentra dentro del hamiltoniano  $\hat{H}$  es de la forma  $V(Q)$ , y, para que nuestra descripción sea lo más parecida posible a las condiciones en las que se realizan las medidas en el LHC, consideraremos que tiene un alcance  $R_0$  muy corto, de tal forma que podamos considerar que la partícula sea libre siempre y cuando se cumpla que  $|q| > R_0$ . Para poder describir el proceso de dispersión que sufre una partícula que inicialmente se encuentra en un estado  $i$  fuera del alcance de dicho potencial, definimos el siguiente elemento de matriz,  $S_{fi}$ , como: [4]

$$S_{fi} = U_{fi}(+\infty, -\infty) = \lim_{\substack{t_b \rightarrow \infty \\ t_a \rightarrow -\infty}} \int dq_a dq_b \psi_f^*(q_b, t_b) \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle \psi_i(q_a, t_a) \quad (2.85)$$

Como estamos haciendo el cálculo en los tiempos que tienden a  $-\infty$  y a  $+\infty$  de los que hablamos anteriormente, la partícula que tenemos será libre, y estará sí o sí fuera del alcance del potencial  $V(Q)$ , así que vamos a poder calcular explícitamente la función de onda ignorando la contribución de  $\hat{V}$  en el hamiltoniano, quedándonos únicamente con el término correspondiente a la energía cinética. Tras hacer unos pequeños cálculos, obtenemos las funciones de onda tanto del estado  $i$  como del  $f$ : [4]

$$\psi_l(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp C_l(p) e^{-ip^2 t/2m} e^{ipq} \quad \text{con } l = i, f \quad (2.86)$$

Para llegar a ellas hemos tenido que utilizar las relaciones que aparecen resumidas en el cuadro:

$$\begin{array}{lll} \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle & \hat{P} = -i\partial_q & \psi_p(q) = \langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} \\ \hat{P}^2|p\rangle = p^2|p\rangle & \hat{P}^2 = -\partial_q^2 & \end{array}$$

A continuación, vamos a simplificar un poco las funciones de onda que acabamos de obtener en lugar de introducir las directamente en (2.85). Para ello, las expandiremos asintóticamente, puesto que estamos trabajando con valores muy elevados (que tienden a  $-\infty$  y a  $+\infty$ ) tanto de  $t$  como de  $q$ . Con el objetivo de que hacer la expansión nos resulte un poco más sencillo, reescribimos los exponentes que aparecen en (2.86) y definimos una nueva variable,  $k$ , de la siguiente forma: [4]

$$\frac{p^2}{2m} t - pq = \frac{t}{2m} \left( p - \frac{mq}{t} \right) - \frac{mq^2}{2t} \quad (2.87) \quad k \equiv \left( \frac{|t|}{2m} \right)^{1/2} \left( p - \frac{mq}{t} \right) \quad (2.88)$$

Utilizando las dos ecuaciones anteriores podemos reformular las funciones de onda como sigue:

$$\psi_l(q, t) = \left( \frac{m}{\pi|t|} \right)^{1/2} e^{imq^2/2t} \int dk C_l \left[ \frac{mq}{t} + \left( \frac{2m}{|t|} \right)^{1/2} k \right] e^{-\frac{t}{|t|} ik^2} \quad (2.89)$$

Denotamos a la fracción  $t/|t|$  que aparece en la exponencial como  $\varepsilon(t)$ , que, dependiendo de si estamos en  $t > 0$  o en  $t < 0$  valdrá 1 ó -1 debido al valor absoluto. Como  $|t| \rightarrow \infty$ , el factor  $(2m/|t|)^{1/2} k$  que aparece dentro de  $C_l$  va a ser muy pequeño, así que podemos hacer un desarrollo de forma que: [4]

$$C_l \left[ \frac{mq}{t} + \left( \frac{2m}{|t|} \right)^{1/2} k \right] \simeq C_l \left( \frac{mq}{t} \right) [1 + \mathcal{O}(|t|^{-1/2})] \quad (2.90)$$

En el límite en el que estamos, donde  $|t| \rightarrow \infty$ , el término  $\mathcal{O}(|t|^{-1/2})$  puede despreciarse. Teniendo esto en cuenta y haciendo la integral obtenemos que las funciones de onda  $\psi_f^*$  y  $\psi_i$  que necesitábamos escribir para poder evaluar el elemento de matriz  $S_{fi}$  son: [4]

$$\psi_l(q, t) \sim \left( \frac{m}{|t|} \right)^{1/2} e^{imq^2/2t} C_l \left( \frac{mq}{t} \right) e^{-i\varepsilon(t)\pi/4} \quad (2.91)$$

Sustituyéndolas en (2.85) y tomando el límite en el que  $t_a \rightarrow -\infty$  y  $t_b \rightarrow +\infty$ :

$$S_{fi} = \lim_{\substack{t_b \rightarrow \infty \\ t_a \rightarrow -\infty}} i \int dq_a dq_b m |t_a t_b|^{-1/2} C_f^* \left( \frac{mq_b}{t_b} \right) e^{-imq_b^2/2t_b} \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle C_i \left( \frac{mq_a}{t_a} \right) e^{imq_a^2/2t_a} \quad (2.92)$$

**Nota:** el factor  $i$  que ha aparecido en (2.92) viene de la exponencial que aparece en (2.91)

- Al considerar  $\psi_f^*$ , tendremos una contribución de la forma  $\sim e^{i\varepsilon(t_b)\pi/4}$ , y, como en este caso,  $t_b \rightarrow \infty$ ,  $t$  será mayor que cero, así que  $\varepsilon(t_b) = 1$  y tendremos un factor  $e^{i\pi/4}$ .
- Al considerar  $\psi_i$ , la contribución será  $\sim e^{-i\varepsilon(t_a)\pi/4}$ , y, como en este caso,  $t_a \rightarrow -\infty$ ,  $t$  será menor que cero, así que  $\varepsilon(t_a) = -1$  y tendremos de nuevo un factor  $e^{i\pi/4}$ .

Al hacer  $e^{i\pi/4} \cdot e^{i\pi/4}$  obtendremos  $i$ .

Si combinamos (2.87) y (2.88) se tiene que:

$$p = \frac{2m^{1/2}}{|t|} k + \frac{mq}{t} \quad (2.93)$$

Entonces, como estamos en el límite en el que  $|t| \rightarrow \infty$  el primer sumando se anula, por lo que la relación entre  $p$  y  $q$  se modifica y tenemos que cambiar las variables de integración de acuerdo con: [4]

$$p_a = \frac{mq_a}{t_a} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty; \quad p_b = \frac{mq_b}{t_b} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty \quad (2.94)$$

Tras hacer esto, obtenemos la expresión definitiva para el elemento de matriz:

$$S_{fi} = \lim_{\substack{t_b \rightarrow \infty \\ t_a \rightarrow -\infty}} i \int dp_a dp_b m^{-1} |t_a t_b|^{1/2} C_f^*(p_b) e^{-ip_b^2 t_b / 2m} \left\langle \frac{p_b t_b}{m}, t_b \middle| \frac{p_a t_a}{m}, t_a \right\rangle C_i(p_a) e^{ip_a^2 t_a / 2m} \quad (2.95)$$

Para calcularla lo que tenemos que hacer es desarrollar el braket  $\langle \frac{p_b t_b}{m}, t_b | \frac{p_a t_a}{m}, t_a \rangle$  utilizando la expresión (1.16) que vimos en la Sección 1.1.2, para evaluar primero la integral de camino sobre todas las trayectorias  $q(t)$  que satisfacen las siguientes condiciones de contorno que codifican el comportamiento asintótico: [4]

$$q(t) \sim \frac{p_a t}{m} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty; \quad q(t) \sim \frac{p_b t}{m} \quad \text{si } t \rightarrow \infty \quad (2.96)$$

Dichas condiciones representan el movimiento de una partícula cuántica libre y no relativista de masa  $m$ . Podemos compararlas con las que aparecían en la Sección 1.1.2, que, a diferencia de las que acabamos de escribir, eran fijas y nos decían que  $q_a = q(t_a)$  y que  $q_b = q(t_b)$  [4]. Esta observación nos acerca poco a poco a la idea que habíamos mencionado al principio (cuando discutimos por qué  $\mathcal{W}[J]$  no era adecuado para obtener directamente cantidades observables), ya que en la Sección 2.1.1, habíamos dicho que las condiciones de contorno que debían satisfacer los campos sobre los que se realizaban las integrales de camino que estaban dentro del funcional también eran fijas, concretamente, tenían la forma que aparece en (2.3). Por tanto, no es descabellado pensar que podamos llevar a cabo un tratamiento similar al que acabamos de hacer ahora, pero, en lugar de para una coordenada generalizada  $q$ , para un campo  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ . Si conseguimos definir unas condiciones de contorno parecidas a (2.96) nos aseguraremos de que todas aquellas configuraciones sobre las que estamos integrando los campos  $\varphi$  y  $\pi$  tengan un comportamiento asintótico. Por este motivo, el siguiente paso será tratar de generalizar estos resultados para una teoría cuántica de campos relativista. Para ello, comenzaremos exigiendo que los campos  $\varphi(t, \mathbf{x})$  satisfagan que: [4]

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \sim \varphi^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{si } t \rightarrow -\infty; \quad \varphi(\mathbf{x}, t) \sim \varphi^{\text{out}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{si } t \rightarrow +\infty \quad (2.97)$$

En las expresiones anteriores, *in* y *out* hacen referencia, respectivamente, a las partículas que 'entran' inicialmente en el proceso de dispersión y a las que 'salen' de él (es decir, las que se generan después de que tengan lugar las interacciones). Vamos a pedir, además, que estos campos sean solución de la ecuación de Klein-Gordon, (1.51), que satisficieran los campos libres con los que trabajamos en la Sección 2.1.2: [4]

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi^{\text{in,out}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.98)$$

Básicamente, lo que estamos haciendo es imponer que nuestros campos se puedan considerar libres en  $-\infty$  y  $+\infty$  para poder definir adecuadamente el comportamiento asintótico. Sabemos, además, que cualquier campo libre  $\varphi_0$  que sea solución de la ecuación de Klein-Gordon puede descomponerse como: [4]

$$\varphi_0(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} [a(k)e^{-ikx} + a^*(k)e^{ikx}] \quad (2.99)$$

Los campos  $\varphi^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$  y  $\varphi^{\text{out}}(\mathbf{x}, t)$  que hemos definido tienen que estar englobados ahí dentro, puesto que hemos exigido que satisfagan la ecuación de Klein-Gordon. Podemos asociar, por motivos que quedarán claros un poco más adelante, el campo  $\varphi^{\text{in}}$  con la parte izquierda de la ecuación anterior (la que tiene 'frecuencia positiva'). Así, el campo  $\varphi^{\text{out}}$  se corresponderá con la parte derecha (la que tiene 'frecuencia negativa'): [4]

$$\varphi^{\text{in}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} a(k)e^{-ikx} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty; \quad \varphi^{\text{out}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} a^*(k)e^{ikx} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty \quad (2.100)$$

Realmente, no podemos hacer esta asignación directamente, debido a que en (2.99) aparece únicamente la parte espacial del momento,  $\mathbf{k}$ . Para solucionar este pequeño problema redefinimos la parte temporal,  $k_0$ , como  $k_0 \rightarrow k_0 - i\varepsilon$ , es decir, le añadimos una pequeña contribución imaginaria. Si hacemos esto y, después, tomamos los límites temporales correspondientes, únicamente sobrevive la parte espacial, y  $k_0$  desaparece, tal y como necesitábamos, y podemos hacer adecuadamente la asignación [4].

- Si cogemos la parte temporal de  $e^{ikx} \rightarrow e^{ik_0x_0} = e^{it(k_0-i\varepsilon)} = e^{ik_0t} \cdot e^{\varepsilon t} \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow -\infty$
- Si cogemos la parte temporal de  $e^{-ikx} \rightarrow e^{-ik_0x_0} = e^{-it(k_0-i\varepsilon)} = e^{-ik_0t} \cdot e^{-\varepsilon t} \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$

Tras esto, tanto  $\varphi^{\text{in}}$  como  $\varphi^{\text{out}}$  se corresponden con los términos que aparecían en (2.99), y podemos afirmar que, efectivamente, con las condiciones definidas en (2.97), los campos son libres cuando se encuentran lejos del punto de interacción y que tienen, por tanto, un comportamiento asintótico, es decir: [4]

$$\varphi_0(x) \simeq \varphi^{\text{in}}(x) \quad \text{si } x_0 \rightarrow -\infty; \quad \varphi_0(x) \simeq \varphi^{\text{out}}(x) \quad \text{si } x_0 \rightarrow +\infty \quad (2.101)$$

Podemos combinar las dos condiciones anteriores en una única expresión que fija las configuraciones que tenemos que tener para asegurar el comportamiento asintótico de los campos: [4]

$$\varphi_0(x) \simeq \varphi(x) \quad \text{si } x_0 \rightarrow \pm\infty \quad (2.102)$$

Tras esto, podemos intentar escribir un funcional generador que sea capaz de determinar los elementos de matriz que equivaldrían a los de la matriz  $S$ , (2.95), que hemos escrito cuando estábamos trabajando con una única coordenada generalizada. Por analogía con la expresión que seguía  $\mathcal{W}[J]$ , tenemos que: [4]

$$\mathcal{S}[J, \varphi_0] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( i \int dx (\mathcal{L} + J\varphi) \right) \quad (2.103)$$

La diferencia que existe entre los funcionales  $\mathcal{S}[J, \varphi_0]$  y  $\mathcal{W}[J]$  radica, esencialmente, en las condiciones de contorno, ya que la integral de camino que aparece en  $\mathcal{S}[J, \varphi_0]$  se realiza sobre las trayectorias que siguen (2.102), mientras que la que aparecía en  $\mathcal{W}[J]$  se lleva a cabo sobre las que satisfacen (2.3). Para determinar explícitamente la forma de  $\mathcal{S}[J, \varphi_0]$  vamos a considerar el lagrangiano que escribimos en (2.51), que se dividía en una parte libre,  $\mathcal{L}_0$ , y en otra que codificaba las interacciones,  $\mathcal{L}_I$ . Al igual que en la Sección 2.2, trabajaremos con la teoría  $\lambda\varphi^4$ , así que  $\mathcal{L}_I$  vendrá dado por (2.56). Teniendo esto en cuenta, podemos separar la exponencial de (2.103) como sigue: [4]

$$\exp \left( i \int dx (\mathcal{L} + J\varphi) \right) = \exp \left( i \int dx \mathcal{L}_I(\varphi) \right) \exp \left( i \int dy (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right) \quad (2.104)$$

Expandiendo la exponencial de (2.104) que va con el término de interacción y utilizando el resultado (??), del que podíamos extraer que  $i\varphi(x) = \frac{\delta}{\delta J(x)}$  tenemos que:

$$\left( \int dx \mathcal{L}_I(\varphi) \right) \left( \exp i \int dz (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right) = \int dx \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left( \exp i \int dz (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \right) \quad (2.105)$$

Como ahora  $\mathcal{L}_I$  es independiente de  $\varphi$  podemos sacarlo de  $\int \mathcal{D}\varphi$  y llegamos a:

$$\mathcal{S}[J, \varphi_0] = \exp i \int dx \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \mathcal{S}_0[J, \varphi_0] \quad (2.106)$$

Las integrales de camino se siguen haciendo sobre todos aquellos campos que tienen un comportamiento asintótico, y hemos definido el funcional generador de la teoría sin interacciones,  $\mathcal{S}_0[J]$  como:

$$\mathcal{S}_0[J, \varphi_0] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp i \int dy (\mathcal{L}_0 + J\varphi) \quad (2.107)$$

Aunque hayamos conseguido obtener una expresión concreta para el funcional  $\mathcal{S}[J]$ , seguimos necesitando conectarlo de alguna forma con  $\mathcal{W}[J]$ . Para conseguirlo, reescribiremos los campos  $\varphi(x)$  de la siguiente manera: [4]

$$\varphi(x) \equiv \tilde{\varphi}(x) + \varphi_0(x) \quad x_0 \rightarrow \pm\infty \quad (2.108)$$

Donde el nuevo campo  $\tilde{\varphi}(x)$  tiene que irse a 0 cuando  $x_0 \rightarrow \pm\infty$  para que se sigan satisfaciendo las condiciones de contorno de (2.102). Podemos reescribir  $\mathcal{S}_0$  en función de  $\tilde{\varphi}(x)$  utilizando la regla de Leibniz, eliminando los términos de frontera que aparezcan, y usando el hecho de que  $\varphi_0(x)$  es solución de la ecuación de Klein-Gordon. Tras realizar los cálculos correspondientes llegamos a: [6]

$$\mathcal{S}_0[J, \varphi_0] = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \exp \left[ i \int dy \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{\varphi} \partial_\mu \tilde{\varphi} - \frac{1}{2} m^2 \tilde{\varphi}^2 + J \tilde{\varphi} \right) \times \exp \left[ i \int dz J(z) \varphi_0(z) \right] \right] \quad (2.109)$$

Observamos que, al hacer esto, la integral de camino se realiza sobre todas las configuraciones de los nuevos campos  $\tilde{\varphi}(x)$  que cumplan (2.108). Realmente, esto no es más que un caso particular de las condiciones de contorno fijas que teníamos en (2.3), ya que podemos pensar en ellas como  $\tilde{\varphi}_a(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_b(\mathbf{x}) = 0$ . Por tanto, la parte izquierda de  $\mathcal{S}_0[J]$  se va a corresponder con el funcional generador  $\mathcal{W}_0[J]$  con el que habíamos estado trabajando en las secciones anteriores; esto nos permitirá establecer la conexión entre ambos que buscábamos desde el principio. Recordando que el propagador  $D_F(x-y)$  era la solución fundamental, (2.42), de la ecuación de Klein-Gordon, que  $\mathcal{W}_0[J]$  también podía escribirse como (2.32), y que su derivada funcional con respecto de  $J(x)$  viene dada por (2.36) puede verse que: [6]

$$(\partial_x^\mu \partial_{x\mu} + m^2) \frac{\delta \mathcal{W}_0[J]}{\delta J(x)} = iJ(x) \mathcal{W}_0[J] \quad (2.110)$$

La relación anterior nos permite reescribir (2.109) como sigue: [6]

$$\mathcal{S}_0[J, \varphi_0] = \exp \left( \int dx \varphi_0(x) (\partial_x^\mu \partial_{x\mu} + m^2) \frac{\delta}{\delta J(x)} \mathcal{W}_0[J] \right) \quad (2.111)$$

Si ahora sustituimos la expresión anterior en (2.106) llegamos a: [6]

$$\mathcal{S}[J, \varphi_0] = \exp \left( \int dx \varphi_0(x) (\partial_x^\mu \partial_{x\mu} + m^2) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \times \exp \left[ i \int dy \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right] \mathcal{W}_0[J] \quad (2.112)$$

Como el segundo termino no es más que  $\mathcal{W}[J]$  escribimos la expresión final como: [6]

$$\mathcal{S}[J, \varphi_0] = \exp \left( \int dx \varphi_0(x) (\partial_x^\mu \partial_{x\mu} + m^2) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \mathcal{W}[J] \quad (2.113)$$

Así que, finalmente, hemos conseguido construir el funcional generador con las condiciones de contorno necesarias para tener un comportamiento asintótico (que nos permitirá extraer cantidades que tengan información física), y con la conexión que queríamos establecer con el que teníamos antes,  $\mathcal{W}[J]$ . En nuestro caso, trataremos con procesos donde no hay fuentes, así que las podemos poner a cero: [6]

$$\mathcal{S}[\varphi_0] \equiv \mathcal{S}[0, \varphi_0] \quad (2.114)$$

Puesto que ya conocemos cuál es el funcional generador  $\mathcal{S}[\varphi_0]$  que dará lugar a las amplitudes de dispersión, estamos en condiciones de ver cómo podemos obtener los elementos de matriz que cumplen el papel que tenían los  $S_{fi}$  que definimos cuando trabajamos con una única coordenada generalizada, y que serán necesarios para poder llevar a cabo el cálculo de las secciones eficaces. Para ello, aprovecharemos el hecho de que en la Sección 2.2 ya habíamos derivado tanto el funcional generador  $\mathcal{W}[J]$  como sus funciones de Green correspondientes en el caso concreto de una teoría escalar que involucraba términos de interacción del tipo  $\varphi^4$ . Considerando que no hay fuentes implicadas en el proceso que queremos calcular, podemos combinar los resultados (2.113) y (2.114) para obtener la siguiente expresión: [4]

$$\mathcal{S}[\varphi_0] = \exp \left( \int dx \varphi_0(x) (\partial_{x\mu} \partial_x^\mu + m^2) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \mathcal{W}[J] \Big|_{J=0} \quad (2.115)$$

Expandiendo la exponencial y utilizando la relación (2.7) que existe entre el funcional generador  $\mathcal{W}[J]$  y sus funciones de Green  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  correspondientes, se tiene que: [4]

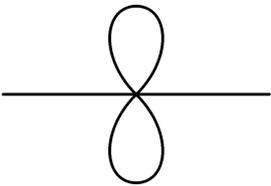
$$\mathcal{S}[\varphi_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) K_{x_1} \dots K_{x_n} \mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.116)$$

En la expresión anterior hemos definido el operador de Klein-Gordon como: [4]

$$K_{x_j} \equiv (\partial_{x_j\mu} \partial_{x_j}^\mu + m^2) \quad (2.117)$$

En él, los índices que llevan la letra griega  $\mu$  etiquetan las cuatro componentes del espacio de Minkowski, mientras que el índice que aparece en la parte inferior,  $x_j$ , hace referencia a cada una de las variables  $x_1, \dots, x_n$  sobre las que se realiza la integración. Observando (2.116) se infiere que podemos asociar cada una de las líneas externas de  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  con un campo  $\varphi_0(x_j)$  y su correspondiente operador de Klein-Gordon,  $K_{x_j}$  [4]. Si utilizásemos la regla de Leibniz en la expresión que hemos obtenido, podríamos hacer que dichos operadores actuasen sobre los campos libres, que, como son, por definición, solución de la ecuación de Klein-Gordon, representan la propagación de una partícula física que satisface la condición de estar en el *on the mass-shell*, es decir, que cumple que  $k^2 = m^2$ . Cuando  $K_{x_j}$  actúe sobre  $\varphi_0(x_j)$  se generará un factor del tipo  $m^2 - k^2$ , que, debido a dicha condición, hará que esta contribución sea nula y no aporte nada al cálculo de  $\mathcal{S}[\varphi_0]$ . La única forma de que esto no suceda es que la función de Green de la derecha contenga un propagador del tipo  $\sim (k^2 - m^2)^{-1}$  (es decir, asociado a una línea externa), que pueda cancelar el otro factor que teníamos [1] [4].

Si, por ejemplo, tuviésemos un diagrama con dos 'burbujas' (como el que se muestra a la izquierda), dicha cancelación no podría producirse [3], y el término con el que estamos trabajando no contribuiría al cálculo de  $\mathcal{S}[\varphi_0]$  (lo cual tiene bastante sentido puesto que sabemos que este tipo de diagramas representan fluctuaciones cuánticas que aún no han sido detectadas). De este modo, tal y como ya podíamos intuir a partir de (2.113), la expresión que hemos escrito para  $\mathcal{S}[\varphi_0]$  tiene la capacidad de filtrar los términos que vienen de  $\mathcal{W}[J]$  de manera que únicamente puedan contribuir aquellos que tienen significado físico. La contribución de  $\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  se suele relacionar con un proceso físico en el que intervienen  $n$  partículas [4] [2].



Como siempre, nos conviene intentar expresar este tipo de cantidades en función del momento, que es lo que se puede medir en los procesos de dispersión que tienen lugar en los aceleradores de partículas. Podemos utilizar (2.43) para llevar las funciones de Green que tenemos al espacio de momentos: [4]

$$\mathcal{G}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{dp_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{dp_n}{(2\pi)^4} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \tilde{\mathcal{G}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_n) \quad (2.118)$$

Sustituyendo en (2.116) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\varphi_0] = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{x_1} \dots \int_{x_n} \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) K_{x_1} \dots K_{x_n} \times \\ & \times \int_{p_1} \dots \int_{p_n} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \tilde{\mathcal{G}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_n) \end{aligned} \quad (2.119)$$

Los operadores de Klein-Gordon  $K_{x_j}$  actuarán sobre las exponenciales, generando factores del tipo  $(m^2 - p_j^2)$ . Sustituyendo todas las contribuciones en la expresión anterior se tiene que: [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\varphi_0] = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{x_1} \dots \int_{x_n} \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) \times \int_{p_1} \dots \int_{p_n} (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_n) \times \\ & \times (m^2 - p_1^2) \dots (m^2 - p_n^2) \tilde{\mathcal{G}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Puede verse que es posible escribir cada uno de los términos del tipo  $\int_{x_j} e^{ip_j x_j} \varphi_0(x_j)$  como: [4]

$$\int_{x_j} e^{ip_j x_j} \varphi_0(x_j) = \int d^3 k_j \frac{2\pi}{2k_{j0}} [a(k_j) \delta(p_j - k_j)] + a^*(k_j) \delta(p_j + k_j) \quad (2.121)$$

Podemos llegar a este resultado partiendo de la expresión (1.52), sustituyéndola en  $\int_{x_j} e^{ip_j x_j} \varphi_0(x_j)$  y usando la representación integral de la delta de Dirac. Cabe destacar que  $k_0$  no es más que la componente temporal de  $k$ , definida como  $k_0 = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ . Por la propia definición de la delta de Dirac, vemos que, debido a la presencia de  $\delta(p_j \pm x_j)$ , los únicos valores del momento que contribuyen en el cálculo  $\mathcal{S}[\varphi_0]$  son aquellos que cumplen que  $p_j = \pm k$ , y, como  $k^2 = m^2$ , se tiene que  $p_j^2 = m^2$ . Por tanto, podemos confirmar que las únicas funciones de Green que hay que tener en cuenta a la hora de obtener este nuevo funcional son aquellas que tienen todas sus líneas externas *on the mass-shell*, es decir, que representan partículas físicas, lo cual tiene bastante sentido ya que estamos analizando procesos de dispersión. Esto nos permite entender el motivo por el cual asociamos la parte de (2.99) que iba con  $a(k)$  con las partículas *incoming* y la que iba con  $a^*(k)$  con las partículas *outgoing*. Fijándonos en las deltas de Dirac que aparecen en (2.121), tenemos que:

- Si  $p_j = k_j$ , solamente contribuye el término que va con  $a(k)$ , cuyo momento es mayor que cero, por lo que representará a las partículas que están 'entrando' en el proceso de dispersión (término de 'frecuencia positiva') [4].
- Si  $p_j = -k_j$ , sucede justamente lo contrario, el momento es menor que cero, y solamente contribuye el término que va con  $a^*(k)$  que, en este caso, describe a las partículas que 'salen' del proceso de dispersión (término de frecuencia 'negativa') [4].

Sustituyendo todos los factores del tipo (2.121) en (2.120) llegamos a la expresión final para  $\mathcal{S}[\varphi_0]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\varphi_0] = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{x_1} \dots \int_{x_n} \times \int_{p_1} \dots \int_{p_n} (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_n) \times (m^2 - p_1^2) \dots (m^2 - p_n^2) \tilde{\mathcal{G}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \times \\ & \times \int d^3 k_1 \frac{2\pi}{2k_{01}} [a(k_1) \delta(p_1 - k_1)] + a^*(k_1) \delta(p_1 + k_1) \dots \\ & \dots \int d^3 k_n \frac{2\pi}{2k_{0n}} [a(k_n) \delta(p_n - k_n)] + a^*(k_n) \delta(p_n + k_n) \quad (2.122) \end{aligned}$$

Para ver cómo podemos obtener el elemento de matriz  $S_{fi}$  a partir de (2.122) vamos a considerar un proceso físico que involucra un número arbitrario  $m$  de partículas en el estado inicial, con momentos mayores que cero que se denotan por  $q_1, \dots, q_m$ , y un número arbitrario  $n - m$  de partículas en el estado final, con momentos menores que cero que se denotan por  $q_{m+1}, \dots, q_n$ . Para que dichas partículas puedan participar en el proceso de dispersión tienen que cumplir que  $q_r^2 = m^2$ , y, además, tiene que satisfacerse la conservación del momento, que en este caso vendrá dada por  $\delta(q_1 + \dots + q_m - q_{m+1} - \dots - q_n) \Rightarrow q_1 + \dots + q_m = q_{m+1} + \dots + q_n$ . Teniendo en cuenta las expresiones (1.52), (2.122), y, también, por analogía por cómo se calculaban las funciones de Green a partir de  $\mathcal{W}[J]$ , podemos definir las amplitudes de dispersión (elementos de matriz de  $\mathcal{S}$ ) a partir de las derivadas funcionales de  $a(k)$  y  $a^*(k)$  (también podemos pensar en esto en términos de creación y aniquilación de partículas), de forma que: [4]

$$S_{fi} = \frac{1}{\rho(q_1) \dots \rho(q_n)} \cdot \frac{\delta^n \mathcal{S}[\varphi_0]}{\delta a(q_1) \dots \delta a(q_m) \delta a^*(q_{m+1}) \dots \delta a^*(q_n)} \Big|_{a=a^*=0} \quad (2.123)$$

Los factores  $\rho(q_r)$  no son más que unos 'pesos' que aparecen al trabajar con la expresión (2.122), que, como son constantes, pueden sacarse fuera de las integrales y de las derivadas funcionales: [4]

$$\frac{1}{(2\pi)^4} (2\pi) \frac{1}{2q_{r0}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q_{r0}} \quad \Rightarrow \quad \rho(q_r) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q_{r0}} \quad (2.124)$$

Haciendo las derivadas funcionales según (2.123) utilizando (2.122) llegamos a:

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta(q_1 + \dots + q_m - q_{m+1} - \dots - q_n) M_{fi} \quad (2.125)$$

Donde la amplitud  $M_{fi}$  (que es un escalar, y, por tanto, es invariante bajo transformaciones de Lorentz), y que es el análogo de la amplitud que se calcula en  $QM$ , va a venir dada por: [4]

$$M_{fi} = (-i)^n (q_1^2 - m^2) \dots (q_n^2 - m^2) \tilde{\mathcal{G}}^{(n)}(q_1, \dots, q_m, -q_{m+1}, \dots, -q_n) \quad (2.126)$$

Básicamente lo que nos dice la expresión anterior es que si tenemos un diagrama de Feynman que represente un determinado proceso de dispersión y queremos obtener su amplitud sin realizar ningún cálculo, lo que tenemos que hacer es multiplicar cada una de las 'patas' con momento  $q_r$  por un factor  $-i(q_r^2 - m^2)$ , que es justamente 'el inverso' de un propagador. Parece bastante evidente que esto guarda relación con todo lo que mencionamos anteriormente sobre las cancelaciones de este tipo de términos. Si los diagramas que se deducen de las funciones de Green que tenemos a la derecha están totalmente conectados (lo cual significa que todas sus 'patas' externas lo estén y que no tengamos 'burbujas' como las que representamos antes), podemos asociar exactamente un propagador para cada una de dichas 'patas', y se cancelan los factores de antes. Debido a esto, cada vez que queramos escribir  $M_{fi}$  podemos, directamente, amputar las 'patas'

externas de los diagramas (esto simplemente significa ignorar su existencia, imaginarnos que las hemos quitado), ya que, como sabemos de antemano que sus contribuciones siempre se van a cancelar, no merece la pena escribirlas. Podemos escribir (2.126) de forma un poco más elegante: [3] [6]

$$\mathcal{M} = \frac{G^{(n)}(q_1, \dots, q_n)}{G^{(2)}(q_1, -q_1) \dots G^{(2)}(q_n, -q_n)} \Big|_{q_i^2 = m^2} \quad (2.127)$$

Donde las funciones de Green  $G^{(n)}(q_1, \dots, q_n)$  son aquellas que están totalmente conectadas, y las del tipo  $G^{(2)}(q_i, -q_i)$  que aparecen en el denominador se encargan de llevar a cabo la tarea de amputar las 'patas' externas. Así que, al final del día, si necesitamos calcular los elementos de matriz  $S_{fi}$  tenemos que considerar únicamente aquellos diagramas que estén totalmente conectados, amputar sus 'patas' externas e introducir el factor  $(2\pi)^4$  que aparece en (2.125) y la delta de Dirac que codifica la conservación del momento.

## 2.3 Renormalización de la teoría $\lambda\varphi^4$

Los diagramas y las reglas de Feynman que hemos derivado en la Sección 2.2 nos dan una forma relativamente sencilla de calcular algunas cantidades físicas de gran interés experimental, como, por ejemplo, las amplitudes de dispersión. Aunque, hasta ahora, la Teoría Cuántica de Campos que estamos construyendo poco a poco (una teoría escalar con un término de interacción del tipo  $\sim \lambda\varphi^4$ ) no nos ha dado demasiados problemas, lo cierto es que, si nos paramos a analizar un poco más detenidamente las integrales que aparecen en algunos de los diagramas con los que hemos trabajado, podremos comprobar que muchas de ellas divergen, dando lugar a una serie de infinitos que no parecen nada deseables en teorías de este tipo, y que hicieron que, durante muchos años, la *QFT* perdiese fuerza [1]. Por suerte, este contratiempo se solucionó con el desarrollo de la renormalización, un procedimiento que permitió 'esconder' los infinitos que aparecían en la teoría.

### 2.3.1 Motivación física: ¿por qué necesitamos la renormalización?

En la Sección 2.2.2 habíamos introducido el campo clásico,  $\varphi_c(x)$ , que satisfacía (2.77). Si hacemos que el término de fuente sea nulo, la expresión anterior es prácticamente idéntica a la ecuación (1.50) que vimos en la Sección 1.2.2, excepto por un término adicional,  $i\lambda D_F(0)\varphi_c(x)$  que representa una corrección cuántica que surge como consecuencia de permitir que los campos puedan interactuar entre ellos. Podemos reescribir (2.77) de la siguiente forma: [4]

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \frac{1}{2}i\lambda D_F(0)]\varphi_c(x) = -\frac{1}{6}\lambda[\varphi_c(x)]^3 + \mathcal{O}(\lambda)^2 \quad (2.128)$$

Al hacerlo, vemos que la masa 'física' del campo no se corresponde con el valor de  $m$  que estábamos considerando hasta ahora, sino que está ligeramente desplazada a causa de la corrección  $i\lambda D_F(0)$ . Puesto que, cuando estamos realizando un experimento, tener o no interacciones entre los campos no es algo que podamos controlar a nuestro antojo, los valores que realmente mediremos para la masa  $m$  serán aquellos que se han visto modificados por estas correcciones cuánticas, es decir: [4]

$$m_R^2 \equiv m^2 + \frac{1}{2}i\lambda D_F(0) + \mathcal{O}(\lambda)^2 \quad (2.129)$$

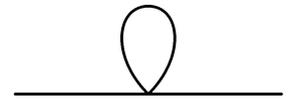
El parámetro (2.129) recibe el nombre de masa renormalizada o física, y se denota con un subíndice  $R$ . Tal y como podríamos esperar, la masa no es la única cantidad que se ve modificada; el valor de la constante de

acoplamiento,  $\lambda$ , también se verá afectado por las interacciones y dará lugar a  $\lambda_R$ , que será la constante de acoplamiento renormalizada. Como las cantidades que medimos en el laboratorio no son ni  $m$  ni  $\lambda$ , sino  $m_R$  y  $\lambda_R$ , parece conveniente intentar expresar las amplitudes de dispersión con las que hemos trabajado hasta ahora en términos de estos nuevos parámetros [1] [4]. En adelante, nos referiremos a las variables que habíamos estado utilizando en las secciones anteriores como 'desnudas', y las escribiremos con un subíndice  $B$ , mientras que las cantidades físicas o renormalizadas pasarán a no tener ningún tipo de subíndice. Así, el lagrangiano de la teoría  $\lambda\varphi^4$  que estudiamos en detalle en la Sección 2.2 será:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_B)(\partial^\mu\varphi_B) - \frac{1}{2}m_B^2\varphi_B^2 - \frac{1}{4!}\lambda_B\varphi_B^4 \quad (2.130)$$

De forma similar, las funciones de Green (tanto las desconectadas, como las conectadas y las 1PI) que habíamos calculado anteriormente, también están 'desnudas' y se denotan como  $\mathcal{G}_B$ ,  $G_B$  y  $\tilde{\Gamma}_B$ .

Además de todo esto, que ya de por sí supone un motivo de peso para justificar por qué necesitamos renormalizar la teoría, existe otra razón que hemos adelantado en la introducción de esta misma sección: la aparición de divergencias [4]. Resulta que muchas de las correcciones cuánticas del tipo  $i\lambda_B D_F(0)$  son infinitas (tal y como comprobaremos dentro de un momento), lo cual entra en conflicto con el hecho de que los parámetros renormalizados que hemos introducido tienen que ser finitos sí o sí, puesto que somos capaces de medirlos en el laboratorio. Parece imprescindible, por tanto, hacer algo para intentar 'esconder' esos infinitos y conseguir escribir el lagrangiano únicamente en función de las cantidades físicas o renormalizadas que, a diferencia de las 'teóricas', sí se miden [1]. Se dice que una teoría es renormalizable cuando es posible eliminar sus divergencias a través de la renormalización de los parámetros y de los campos que aparecen en el lagrangiano desnudo, sin necesidad de hacer nada más [4] [3]. Para ilustrar la aparición de las divergencias, podemos ver, por ejemplo, que la corrección cuántica que aparece en (2.129) es, efectivamente, infinita, debido, concretamente, a que el propagador  $D_F(0)$  que aparece en la ecuación lo es. El término  $i\lambda_B D_F(0)$  puede asociarse con un diagrama de Feynman de tipo 'burbuja' como el que aparece ilustrado a la derecha. Haciendo uso de las reglas que conocemos, podemos escribir la contribución de dicho diagrama como: [4] [6]



$$(-i\lambda_B) \int_k \frac{i}{k^2 - m_B^2 + i\varepsilon}$$

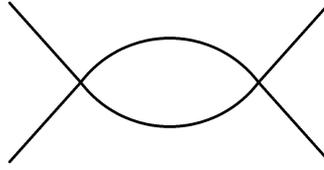
Tomando el límite en el que el momento  $k$  es muy grande, el único término que sobrevive en el denominador es el que va como  $k^{-2}$ . Si, además, utilizamos que  $d^4k \propto k^3 dk$  [4] [6], obtenemos una integral del tipo:

$$\int \frac{k^3 dk}{k^2} \sim \int dk k \quad (2.131)$$

Claramente, la integral anterior es divergente, tal y como ya habíamos anticipado.

### 2.3.2 Las divergencias ultravioletas y el grado superficial de divergencia

Antes de meternos de lleno en los distintos procedimientos que se utilizan para eliminar los infinitos de la teoría, vamos a tratar brevemente cuáles son los tipos de divergencias más comunes que nos podemos encontrar, y qué diagramas dan lugar a su aparición. Consideremos, por ejemplo, un diagrama de tipo 'pez' (página siguiente) que puede aparecer en el cálculo de algunas funciones de Green (como  $\tilde{\Gamma}_B^4$ ) [4].



Si aplicamos las reglas de Feynman teniendo en cuenta que tenemos dos líneas internas y un único bucle:

$$(-i\lambda_B)^2 \int_k \frac{i}{k^2 - m_B^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 + k)^2 - m_B^2 + i\varepsilon} \quad (2.132)$$

Si tomamos el límite en el que  $k$  es muy grande, queda:

$$\int \frac{k^3 dk}{k^4} \sim \int \frac{dk}{k} \quad (2.133)$$

Se dice que este tipo de diagramas divergen logarítmicamente puesto que, si 'cortásemos' la integral en un determinado valor  $k = \Lambda$  del momento, la contribución dominante que obtendríamos sería proporcional al  $\log(\Lambda)$ . De forma similar, el diagrama de tipo 'burbuja' que aparece en el cálculo de  $\tilde{\Gamma}_B^2$  y que hemos considerado a modo de ejemplo en la sección anterior, diverge cuadráticamente, ya que, si aplicásemos un corte, el resultado que obtendríamos sería proporcional a  $\Lambda^2$ . En general, este tipo de divergencias que aparecen para valores muy elevados del momento reciben el nombre de divergencias ultravioletas, puesto que, cuando mayor sea  $k$ , mayor será la energía, pero menor será la longitud de onda, y, por tanto, más cortas serán las distancias involucradas [1] [4]. Tras el análisis de estos dos ejemplos, podemos intentar averiguar si existe alguna forma de ver si un diagrama de Feynman es divergente o no a simple vista, sin tener que escribir ningún propagador. Definimos el grado superficial de divergencia,  $D$ , como: [4] [6]

$$D = 4L - 2I \quad (2.134)$$

Donde  $L$  es el número de bucles o integrales del diagrama, e  $I$  es el número de líneas internas. La fórmula se define de esta manera porque cada bucle lleva asociada una integral cuyo elemento de volumen contribuirá como  $k^3$ . Además, siempre que el momento sea muy grande, las líneas internas llevarán asociadas un propagador que se comportará como  $k^{-2}$  [4].

De esta forma, con la definición que hemos escrito para  $D$  se cumplirá que: [4]

- Si  $D = 0 \rightarrow$  El diagrama es logarítmicamente divergente. Podemos comprobar que esto se cumple utilizando el diagrama de tipo 'pez', donde  $L = 1$  e  $I = 2$ .
- Si  $D = 2 \rightarrow$  El diagrama es cuadráticamente divergente. Podemos comprobar que esto se cumple utilizando el diagrama de tipo 'burbuja', donde  $L = 1$  e  $I = 1$ .

Podemos escribir, además, una relación entre los bucles,  $L$ , las líneas internas,  $I$ , y los vértices,  $V$ , que tiene que cumplir siempre que el número de bucles sea menor que el número de líneas internas, debido a la conservación del momento que se produce en los vértices, la cual impone una ligadura que relaciona los momentos que viajan a través de los bucles: [4]

$$L = I - V + 1 \quad (2.135)$$

Sustituyendo (2.135) en (2.134) tenemos que: [4]

$$D = 2I - 4V + 4 \quad (2.136)$$

En nuestro caso particular, como estamos trabajando con la teoría  $\lambda\varphi^4$ , donde en cada vértice interaccionan cuatro campos, las líneas externas,  $E$ , pueden escribirse como sigue: [4]

$$E = 4V - 2I \quad (2.137)$$

Utilizando (2.137) en (2.136) llegamos a la expresión definitiva del grado superficial de divergencia: [4]

$$\boxed{D = 4 - E} \quad (2.138)$$

Es importante notar que, debido a cómo hemos realizado la derivación, la ecuación anterior únicamente es válida para una teoría del tipo  $\lambda\varphi^4$ , así que no es algo general. Cabe destacar que, en este caso, el resultado únicamente depende del número de líneas externas, lo cual es bastante llamativo. De acuerdo con (2.138), las funciones de Green del tipo  $\tilde{\Gamma}^2$ , que tienen dos líneas externas, serán cuadráticamente divergentes ( $D = 2$ ), mientras que las del tipo  $\tilde{\Gamma}^4$ , que tendrán cuatro líneas externas, serán logarítmicamente divergentes ( $D = 0$ ), lo cual concuerda con lo que hemos visto antes para los diagramas de tipo 'burbuja' (que aparecían dentro de  $\tilde{\Gamma}^2$ ) y para los de tipo 'pez' (que aparecían dentro de  $\tilde{\Gamma}^4$ ). Este análisis no nos permite probar que las funciones de Green del tipo  $\tilde{\Gamma}^6$ ,  $\tilde{\Gamma}^8$ , etc, cuyo  $D$  será negativo, sean convergentes (por eso se le conoce como grado superficial de divergencia). Para saber si un diagrama es convergente, tenemos que recurrir al teorema de Weinberg, que dice que lo será cuando el grado superficial de convergencia tanto del diagrama, como de sus subdiagramas, sean negativos [4] [5].

### 2.3.3 La regularización dimensional y las integrales de Feynman

Antes de poder continuar, necesitamos averiguar cómo podemos eliminar las divergencias ultravioletas que han aparecido en los diagramas anteriores. El proceso a través del cual se controlan dichas divergencias recibe el nombre de regularización. Hay que tener cuidado de no confundirlo con la propia renormalización, de la que hablaremos en la Sección 2.3.4, puesto que, aunque a priori puedan parecer similares, son dos conceptos diferentes [1]. Para entender bien lo que estamos haciendo, es conveniente dedicar un poco de tiempo a analizar el significado físico que esconden las divergencias ultravioletas, en el sentido de que, cuando escribimos la contribución de algún diagrama que forma parte de la función de Green con la que estamos trabajando y tomamos el límite en el que el momento  $k$  es muy grande, estamos asumiendo implícitamente que nuestra teoría es válida para cualquier escala de energía, y que, por tanto, funciona adecuadamente en las distancias pequeñas; sin embargo, si pensamos, por ejemplo, en la electrodinámica cuántica, *QED*, (que es la teoría que describe la interacción electromagnética y que trataremos en detalle en el Capítulo 3) y nos imaginamos que la estamos utilizando para describir las interacciones que sufre un electrón en un átomo, a medida que la energía vaya aumentando progresivamente nos estaremos yendo a distancias cada vez más cortas, y llegará un momento en el que alcanzaremos un punto en el que comenzarán a cobrar importancia partículas diferentes relacionadas con otro tipo de teorías, como la electrodébil, que, eventualmente, terminará englobando la propia *QED* y haciéndola parte de ella [1]. A día de hoy, de hecho, se cree que si aumentamos mucho la escala de energía, terminaremos alcanzando un escenario en el que la *QFT* será simplemente la aproximación de una teoría mucho más amplia que todavía no conocemos (como la Teoría de Cuerdas, por ejemplo), y que opera a energías muy muy altas y distancias muy muy cortas [1] [6]. De momento, entenderemos nuestra *QFT* como una teoría que es válida hasta una cierta escala de energía, que denotaremos por  $\Lambda$ . Todas las teorías tienen una ventana en la que son válidas y que marca

el límite de lo que no sabemos [1]. Dicho límite recibe el nombre de *cut-off*, y en él se basan dos de los métodos que se pueden utilizar para regularizar la teoría  $\lambda\varphi^4$ :

- Teniendo en cuenta la discusión anterior, una de las formas más rápidas de llevar a cabo la regularización es simplemente cortando la integral que se realiza sobre el momento en un cierto valor  $k = \Lambda$  (el *cut-off*), hasta el que suponemos que llega la ventana de energía de la teoría, es decir,  $f^\Lambda$  y, a partir de ahí, hacer la integral de forma normal [4]. Como ya adelantamos en la Sección 2.3.2, esto dará lugar a contribuciones de la forma  $\log \Lambda$  (si la integral original era logarítmicamente divergente) y  $\Lambda^2$  (si la integral original era cuadráticamente divergente).
- Otra forma de evitar las divergencias es incrementando el número de potencias de  $k$  que tenemos en el denominador, a través de la introducción de términos de la forma [4]

$$\frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \quad (2.139)$$

en el integrando. Podemos hacer esto sin problema puesto que, si  $k$  es pequeño en comparación con  $\Lambda$ , la integral no divergerá, y como el factor que estaremos introduciendo será  $\Lambda^2/\Lambda^2 \sim 1$ , no verá afectada su convergencia, mientras que, si  $k$  es muy grande, el factor irá como  $1/k^2$  y cumplirá su cometido de hacer que algunos de los diagramas que eran divergentes puedan converger [4].

Los dos métodos anteriores que acabamos de describir muy brevemente funcionan muy bien a la hora de renormalizar la teoría  $\lambda\varphi^4$  con la que hemos trabajado hasta ahora; sin embargo, tienen el inconveniente de que no pueden utilizarse con las teorías gauge que trataremos en el Capítulo 3, y que son en las que estamos realmente interesados, puesto que son las que describen las interacciones fundamentales de la naturaleza. El motivo por el que no son válidas es que rompen la invariancia gauge<sup>14</sup> de las teorías, lo cual no puede suceder ya que es algo fundamental que tenemos que preservar siempre. Por suerte, existe otro método de regularización, basado en disminuir el número de potencias que aparecen en el numerador, que se conoce como regularización dimensional [4], así que partir de ahora nos centraremos en ella.

### Regularización dimensional

En los dos ejemplos de integrales divergentes que hemos visto siempre aparece una potencia que va como  $\sim k^3$  en el numerador, tanto en el caso de los diagramas de tipo 'burbuja' como el de los diagramas de tipo 'pez'. El motivo por el que ocurre esto se debe a que estamos trabajando en un espacio 4-dimensional, donde el elemento de volumen va como  $\sim d^4k$ , y, por tanto, es proporcional a  $k^3 dk$ . Por tanto, todo parece indicar que si queremos disminuir las potencias del numerador, tendremos que llevarnos las integrales a un espacio cuyas dimensiones sean diferentes a las usuales. Concretamente, trabajaremos en un espacio  $2\omega$ -dimensional, en el que  $\omega$  tiene que ser menor que 2 para no volver a caer en el caso 4-dimensional [4]. Para ver cómo se modifican las integrales, vamos a reescribir en primer lugar la más sencilla que habíamos visto, la de los diagramas de tipo 'burbuja' que contribuía en  $\tilde{\Gamma}_B^2$ : [4]

$$I(\omega, m_B) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} (k^2 - m_B^2 + i\varepsilon)^{-1} = -i \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} (k^2 + m_B^2)^{-1} \quad (2.140)$$

Para obtener la expresión de la derecha simplemente hemos llevado a cabo una rotación de Wick. La diferencia más notable con respecto al caso 4-dimensional es que ahora la integral depende también del parámetro  $\omega$ . Además, el elemento de volumen se escribirá como:

<sup>14</sup>Existen formas de restaurar la simetría gauge usando estos métodos, pero es complejo y laborioso.

$$d^{2\omega}k = 2\omega V(2\omega)|k|^{2\omega-1} d|k|; \quad \text{con } V(2\omega) = \frac{\pi^\omega}{\Gamma(\omega+1)} \quad (2.141)$$

Haciendo el cambio de variable  $|k|^2 = m_B^2 x$  y usando la definición de la función Beta, es posible evaluar la integral anterior, obteniendo que:

$$I(\omega, m_B) = -im_B^{2\omega-2}(4\pi)^{-\omega}\Gamma(1-\omega) \quad (2.142)$$

La función gamma  $\Gamma(1-\omega)$  que aparece en el resultado tiene polos en  $\omega = 1, 2, 3, \dots$ , pero, en nuestro caso, el polo que nos interesa es el que se encuentra en  $\omega = 2$ , puesto que es el que nos sirve para recuperar la situación que teníamos en el caso 4-dimensional y, eventualmente, tendremos que tomar el límite en el que  $\omega \rightarrow 2$ . Para poder estudiar mejor lo que sucede en torno a dicho polo, tenemos que hacer una expansión en torno a él. Con este fin, definimos una escala de masa  $M$  arbitraria, de forma que: [4]

$$m_B^{2\omega-2} = m_B^2 (M^2)^{\omega-2} \left( \frac{m_B^2}{M^2} \right)^{\omega-2} \quad (2.143)$$

Haciendo la expansión de las partes adimensionales, es decir, de  $(m_B^2/M^2)^{\omega-2}$  y de  $\Gamma(1-\omega)$ : [4]

$$I(\omega, m_B) = \frac{im_B^2}{16\pi^2} (M^2)^{\omega-2} \left( \frac{1}{2-\omega} + \Gamma'(1) + 1 - \log \frac{m_B^2}{4\pi M^2} + \mathcal{O}(\omega-2) \right) \quad (2.144)$$

Vemos que, tal y como esperábamos, el resultado contiene un polo en  $\omega = 2$ . Es posible derivar otros resultados más complicados que provienen de integrales más complejas. Este tipo de integrales reciben el nombre de integrales de Feynman, y aparecen con mucha frecuencia al hacer regularización dimensional. Una de las más utilizadas, que escribiremos para tener presente, es: [4]

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} (k^2 - m_B^2 + i\varepsilon)^{-n} = i(-1)^n \frac{\mu_B^{2\omega-2n}}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(n-\omega)}{\Gamma(n)} \quad (2.145)$$

En el Apéndice A.4 pueden encontrarse algunas más. Puesto que el cálculo de este tipo de integrales va a ser bastante recurrente, vamos a pararnos un momento con el objetivo de aprender un par de trucos para evaluarlas que nos serán de utilidad en el futuro. Vamos a considerar la contribución de un diagrama de tipo 'pez' como el que vimos en la Sección (2.3.2), que aparece dentro de  $\tilde{\Gamma}_B^4$ . Escribimos la integral en el espacio  $2\omega$ -dimensional,  $J$ , como: [4]

$$J \equiv \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{k^2 - m_B^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(P+k)^2 - m_B^2 + i\varepsilon} \quad \text{con } P = p_1 + p_2 \quad (2.146)$$

Lo siguiente que tenemos que hacer es pensar cómo podemos modificar la integral que acabamos de escribir para que adquiera la forma de alguna de las que tenemos tabuladas. Para conseguir esto de forma relativamente sencilla, se utiliza la parametrización de Feynman, basada en la siguiente identidad: [4]

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx [ax + b(1-x)]^{-2} \quad (2.147)$$

En ella,  $a$  y  $b$  se corresponderán con los denominadores de los dos propagadores que tenemos, concretamente,  $a = (P+k)^2 - m_B^2 + i\varepsilon$  y  $b = k^2 - m_B^2 + i\varepsilon$ . Utilizando (2.147) y sustituyendo en (2.146):

$$J \equiv \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \frac{1}{([k + Px]^2 + P^2x(1-x) - m_B^2 + i\varepsilon)^2} \quad (2.148)$$

Si ahora hacemos el cambio de variable  $k' = k + Px$  se tiene que:

$$J = \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}k'}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k'^2 + P^2x(1-x) - m_B^2 + i\varepsilon)^2} \quad (2.149)$$

La integral anterior tiene la forma de (2.145), con  $n = 2$ , donde  $P^2x(1-x) - m_B^2$  desempeñaría el papel de  $m_B^2$ . Teniendo esto en cuenta llegamos a la siguiente expresión:

$$J = \int_0^1 dx \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(2)} [m_B^2 - P^2x(1-x)]^{\omega-2} \quad (2.150)$$

Introduciendo de nuevo una escala de masa arbitraria,  $M$ , haciendo la expansión de los términos adimensionales y llevando a cabo la integración paramétrica se llega al resultado final: [4]

$$J = \frac{i}{16\pi^2} (M^2)^{\omega-2} \left[ \frac{1}{2-\omega} + \Gamma'(1) - \ln \frac{m_B^2}{4\pi M^2} - 2 \left( \frac{4m_B^2 - P^2}{P^2} \right)^{1/2} \tan^{-1} \left( \frac{P^2}{4m_B^2 - P^2} \right) + 2 \right] + O(\omega - 2) \quad (2.151)$$

De nuevo, vemos que, si  $\omega \rightarrow 2$ , la función diverge. Cabe destacar que, en caso de que tengamos más de dos propagadores en el denominador, la identidad (2.147) adopta una forma mucho más general: [4]

$$\frac{1}{a_1 \dots a_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \times [a_1(1-x_1) + a_2(x_1-x_2) + \dots + a_n x_{n-1}]^{-n} \quad (2.152)$$

### 2.3.4 Renormalización de la teoría: contratérminos

En la sección anterior acabamos de ver cómo, con la ayuda de la regularización dimensional, hemos podido evaluar las contribuciones de los diagramas de  $\tilde{\Gamma}_B^2$  y de  $\tilde{\Gamma}_B^4$  que divergían en el espacio 4-dimensional llevándolas a un espacio  $2\omega$ -dimensional más general. Tras hacerlo, obtuvimos los resultados (2.144) y (2.151), respectivamente, en los que siguen apareciendo infinitos si hacemos  $\omega \rightarrow 2$  [4]. La regularización, por tanto, nos permite evaluar las integrales que de otra forma no podríamos calcular, pero no se 'lleva' los infinitos de nuestras expresiones. A pesar de que pueda parecer raro tener una teoría que esté 'llena de infinitos', esto no tiene por qué suponer ningún problema, siempre y cuando consigamos deshacernos de ellos para que no aparezcan en las predicciones físicas que se hagan [3]. En este punto, es dónde por fin entra en juego la renormalización, que, a través de la introducción de los denominados contratérminos, absorberá todos los infinitos que tengamos. Para ilustrar el procedimiento a seguir, comenzaremos, en primer lugar, considerando el lagrangiano desnudo que escribimos antes: [4]

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_B) (\partial^\mu \varphi_B) - \frac{1}{2} m_B^2 \varphi_B^2 - \frac{1}{4!} \lambda_B \varphi_B^4 \quad (2.153)$$

Definimos un campo renormalizado,  $\varphi(x)$ , de la siguiente forma: [4]

$$\varphi_B(x) = Z^{1/2}\varphi(x) \quad (2.154)$$

A  $Z$  se la conoce como la constante de renormalización de las funciones de onda y, en este caso, tiene que ser necesariamente distinta de la unidad debido a las correcciones cuánticas que aparecen al considerar las interacciones entre los campos. Por tanto, se tiene que [4]

$$Z = 1 + \delta Z \quad (2.155)$$

donde el término  $\delta Z$  representa esas pequeñas correcciones. De forma similar, puesto que las interacciones también modificarán los valores de la masa,  $m_B^2$  y de la constante de acoplamiento,  $\lambda_B$ , podemos definir:

$$Zm_B^2 = m^2 + \delta m^2 \quad (2.156) \quad Z^2\lambda_B = \lambda + \delta\lambda \quad (2.157)$$

Si sustituimos los valores de  $\varphi_B$ ,  $Z$ ,  $Zm_B^2$  y  $Z^2\lambda_B$  que acabamos de definir en el lagrangiano desnudo:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)\delta Z - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\delta m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 - \frac{1}{4!}\delta\lambda\varphi^4 \quad (2.158)$$

Así que podemos separar el lagrangiano en dos partes, de la forma  $\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ , donde la primera está escrita únicamente en términos de las cantidades renormalizadas, y la segunda está formada por tres términos adicionales, que reciben el nombre de contratérminos, y se encargarán de eliminar las divergencias: [4]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \quad (2.159) \quad \delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)\delta Z - \frac{1}{2}\delta m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}\delta\lambda\varphi^4 \quad (2.160)$$

Las reglas de Feynman que se pueden derivar de  $\mathcal{L}$  son las mismas que obtuvimos en la Sección (2.2.1), puesto que el lagrangiano tiene la misma forma que el que utilizamos en ese momento; sin embargo, la parte adicional  $\delta\mathcal{L}$  que tenemos puede generar nuevos vértices [4]. Para comprobarlo, utilizamos las dos maneras que conocemos de escribir el lagrangiano desnudo; una es la que acabamos de ver, dividiéndolo en la parte renormalizada y en la parte de los contratérminos, y la otra, separándolo en la parte libre, sin interacción, y en el término que codifica la interacción del tipo  $\sim \lambda\varphi^4$ :

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (2.161)$$

Al hacer esto, vemos que el término de interacción, en esta ocasión, tiene que ser igual a la parte 'no libre' de  $\mathcal{L}$  más la parte referida a los contratérminos, es decir: [4]

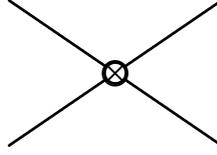
$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 + \delta\mathcal{L} \quad (2.162)$$

Así, las reglas de Feynman debidas a la presencia de los contratérminos son: [4]

- Aparece un nuevo vértice que relaciona dos líneas, y que lleva asociado el factor  $i(\delta Z p^2 - \delta m^2)$ , que se representará en los diagramas con una  $\times$ :

$$\begin{array}{c} p \qquad p \\ \hline \otimes \\ \hline \end{array} \quad i(\delta Z p^2 - \delta m)$$

- Aparece un nuevo vértice que relaciona cuatro líneas, y que lleva asociado el factor  $-i\delta\lambda$ , donde, por supuesto, se satisface la conservación del momento:



Para ver de dónde sale el vértice, fijamos  $\lambda = \delta\lambda = 0$ , y pasamos a tener una teoría libre donde el lagrangiano tomará la forma:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)[1 + \delta Z] - \frac{1}{2}\varphi^2[m^2 + \delta m^2] \quad (2.163)$$

Por analogía con la función de Green (2.45), tendremos que el propagador será: [4]

$$\mathcal{G}_0^{(2)}(p, -p) = \frac{i}{p^2(1 + \delta Z) - (\mu^2 + \delta m^2) + i\varepsilon} \quad (2.164)$$

Podemos pensar en ella como en una función de  $\delta Z$  y  $\delta m^2$  y expandirla a primer orden, es decir:

$$\mathcal{G}_0^{(2)}(\delta Z, \delta m^2) \simeq \mathcal{G}_0^{(2)}\Big|_{\substack{\delta z=0 \\ \delta m^2=0}} + \frac{\partial\mathcal{G}_0^{(2)}}{\partial\delta Z}\Big|_{\substack{\delta z=0 \\ \delta m^2=0}} \delta Z + \frac{\partial\mathcal{G}_0^{(2)}}{\partial\delta m^2}\Big|_{\substack{\delta z=0 \\ \delta m^2=0}} \delta m^2 + \dots \quad (2.165)$$

Operando llegamos a la siguiente expresión: [4]

$$\mathcal{G}_0^{(2)}(p, -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} i(\delta Z p^2 - \delta m^2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \dots \quad (2.166)$$

En ella aparecen tanto los propagadores de siempre como el nuevo vértice. A continuación, vamos a hacer una expansión en serie de potencias de  $\lambda$  tanto de  $\delta m^2$  como de  $\delta Z$ , de la forma: [4]

$$\delta m^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta m_i^2 \quad (2.167) \quad \delta Z = \sum_{i=1}^{\infty} \delta Z_i \quad (2.168)$$

Cabe destacar que tanto  $\delta m_i^2$  como  $\delta Z_i$  son proporcionales a  $\lambda_i$ . Del mismo modo, podemos expandir también  $\delta\lambda$ , con la principal diferencia de que esta expansión comienza directamente en  $\lambda^2$ , es decir: [4]

$$\delta\lambda = \sum_{i=2}^{\infty} \delta\lambda_i \quad (2.169)$$

Teniendo todo esto en cuenta, nuestro siguiente objetivo será conseguir escribir las funciones de Green 1PI de la teoría ya renormalizada,  $\tilde{\Gamma}^2$  y  $\tilde{\Gamma}^4$ , en función de los contratérminos y de los parámetros físicos o renormalizados, de forma que no aparezcan los infinitos por ninguna parte. Por simplicidad, ilustraremos el procedimiento a seguir con la función  $\tilde{\Gamma}^2$ .

Antes de nada, podemos representar  $\tilde{\Gamma}^2$  utilizando diagramas de Feynman, de forma que:

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = - \left( \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} \text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} +$$

$$+ \text{---} \overset{p}{\text{---}} \otimes \overset{p}{\text{---}} \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Los dos primeros diagramas son exactamente iguales que los de (2.2.2), mientras que el último aparece como consecuencia del nuevo tipo de vértice que hemos acabamos de ver que existe para los contratérminos. Matemáticamente podemos escribir: [4]

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = p^2(1 + \delta Z_1) - (m^2 + \frac{1}{2}i\lambda D_F(0) + \delta m_1^2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.170)$$

Puesto que en la Sección 2.3.3 ya calculamos el bucle que aparece en este diagrama con la ayuda de la regularización dimensional, (2.144), también conocemos la expresión del propagador que aparece en la función de Green 1PI que acabamos de escribir. Definiendo la constante  $\hat{\lambda} \equiv \lambda M^{2\omega-1}$  y sustituyendo todo en la ecuación anterior obtenemos la versión definitiva de la función de Green [4]

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = p^2(1 + \delta Z_1) - m^2 - \delta m_1^2 + \frac{\hat{\lambda} m^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{2-\omega} + \Gamma'(1) + 1 - \ln \frac{m^2}{4\pi M^2} + \mathcal{O}(\omega-2) \right) \quad (2.171)$$

Lo único que nos falta es elegir los contratérminos  $\delta m_1^2$  y  $\delta Z_1$  de forma que sean capaces de absorber el polo que aparece en la expresión, de tal forma que, cuando tomemos el límite  $\omega \rightarrow 2$  se cumpla que:

$$m_1^2 - \frac{\hat{\lambda} m^2}{32\pi^2} \frac{1}{2-\omega} \rightarrow \text{constante} \quad \delta Z_1 \rightarrow \text{constante} \quad (2.172)$$

Las diferentes maneras que existen para fijar los parámetros  $\delta\lambda$ ,  $\delta m^2$  y  $\delta Z$  son conocidas como esquemas de renormalización. Aunque hay una gran variedad de ellos, en nuestro caso nos centraremos únicamente en uno en concreto; el esquema de mínima substracción o *MS*, en el que los contratérminos se eligen de tal forma que se limitan a extraer los infinitos y no hacen nada más (de ahí su nombre). Recapitulando un poco, hemos visto que, gracias a la regularización dimensional hemos sido capaces de calcular las funciones de Green de la teoría, evitando las divergencias a la hora de hacer la integral, pero como precio hemos pagado la introducción de polos de la forma  $\omega - 2$ . Para que los contratérminos sean capaces de absorber los polos es necesario definirlos de la siguiente forma (utilizando el esquema *MS*): [4]

$$\delta\lambda = M^{4-2\omega} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu(\hat{\lambda})}{(2-\omega)^\nu} \right) \quad \delta m^2 = m^2 \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu(\hat{\lambda})}{(2-\omega)^\nu} \right) \quad \delta Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(\hat{\lambda})}{(2-\omega)^\nu} \quad (2.173)$$

Es que esquema también tiene la particularidad de que los coeficientes  $a_\nu$ ,  $b_\nu$  y  $c_\nu$  son independientes de la masa. Comparando la expresión que teníamos para la función de Green  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  con las ecuaciones que acabamos de escribir que codifican la forma de los contratérminos, podemos determinarlos explícitamente: [4]

$$\delta m^{2MS} = \frac{\hat{\lambda} m^2}{32\pi^2} \frac{1}{2-\omega} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad \delta Z^{MS} = \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.174)$$

Tras haber fijado los contratérminos, obtenemos la función de Green  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  en el límite en el que  $\omega \rightarrow 2$ :

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p) = p^2 - m^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left( \Gamma'(1) + 1 - \ln \frac{m^2}{4\pi M^2} \right) + O(\lambda^2) \quad (2.175)$$

Podemos comprobar que, tal y como perseguíamos desde el principio, la función de Green está escrita únicamente en función de los parámetros físicos, renormalizados, y no hay ni rastro del término que contenía el polo. Hemos conseguido, por tanto, llevar a cabo el proceso de renormalización de forma satisfactoria.

Para terminar, cabe destacar que es posible relacionar las funciones de Green renormalizadas y conectadas,  $G^{(n)}$ , con las funciones de Green desnudas y conectadas,  $G_B^{(n)}$ : [6]

$$G_B^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z^{n/2} G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (2.176)$$

La ecuación anterior nos permite reescribir la amplitud de dispersión (2.127) de forma que:

$$\mathcal{M} = \frac{G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)}{G^{(2)}(p_1, -p_1) \dots G^{(2)}(p_n, -p_n)} \Bigg|_{p_a^2 = m^2} \quad (2.177)$$

Ahora la amplitud de dispersión vendrá dada, como antes, por la suma de todos los diagramas conectados y con las 'patas' externas amputadas, pero, que, además, también están renormalizados [6].

## 2.4 Teoría Cuántica de Campos con fermiones (espinores)

Hasta ahora nos hemos limitado a llevar a cabo la cuantización de campos escalares que, secretamente, eran partículas de espín 0, es decir, bosones, pero sabemos que en la naturaleza existen también otros tipos, como, por ejemplo, los fermiones, cuyo espín es semientero. Por tanto, si queremos llegar a poder describir las interacciones fundamentales utilizando una Teoría Cuántica de Campos vamos a necesitar explorar la cuantización de otros tipos de campos, como los espinores que aparecían en la Sección 1.2.

### 2.4.1 Espinores como variables de Grassmann

Cuando trabajamos con campos escalares,  $\varphi(x)$ , en la Secciones 2.1 y 2.2, los tratamos de forma 'normal', como variables reales que conmutaban entre sí de manera usual; sin embargo, en el caso de los campos espinoriales,  $\psi(x)$ , las cosas no son tan sencillas. Volviendo un momento a la teoría clásica que tratamos en la Sección 1.2.3, es posible escribir el tensor energía-momento como: [4]

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{2k_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\pm s} [a(k, s)a^*(k, s)k_\mu - b(k, s)b^*(k, s)k_\mu] \quad (2.178)$$

Al escribir (2.178) aparece un pequeño problema; el segundo sumando del integrando contiene modos de vibración que representan energías negativas. Podemos solucionar esto si consideramos que las cantidades  $a, a^*, b$  y  $b^*$  que aparecen en ella son variables de Grassmann (y, por consiguiente, los espinores también), es decir, números complejos que anticonmutan entre sí. Como ya no son números reales, deja de tener sentido hablar de que sean positivos o no, y lo único que importa es que el valor esperado de la energía sí lo sea [4]. Por tanto, nuestros campos escalares (bosones) podrán conmutar entre ellos, mientras los espinoriales (fermiones), por el contrario, anticonmutarán. Otra razón un poco más profunda que está detrás de toda esta discusión tiene que ver con el principio de exclusión de Pauli, y con la estadística que se utiliza para

describir el comportamiento de las partículas según sean bosones (estadística de Bose-Einstein) o fermiones (estadística de Fermi-Dirac) [6]. Para dar el salto de la teoría clásica con campos espinoriales a la Teoría Cuántica de Campos vamos a utilizar, de nuevo, integrales de camino, de forma similar a como hicimos en el caso de los campos escalares, así que necesitaremos conocer algunas de las propiedades de las variables de Grassmann [4]. Las más importantes aparecen resumidas en el cuadro inferior [4].

En nuestro caso, las variables de Grassmann van a ser un conjunto de elementos que anticonmutan entre sí. Por ejemplo, si consideramos dos variables de Grassmann genéricas  $a$  y  $b$ , cumplirán que:

$$\{a, a\} = \{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 0, \quad b^2 = 0 \quad (2.179)$$

Las segundas derivadas de las variables de Grassmann satisfacen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = -\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} \quad (2.180)$$

Las integrales también cuentan con características curiosas:

$$\int da = 0 \quad \int da a = 1 \quad \int da db f(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} \quad (2.181)$$

Teniendo en cuenta todas estas propiedades, pueden deducirse varias expresiones para las integrales de camino, similares a las que utilizamos en el caso escalar. Algunas de estas nuevas integrales que se llevan a cabo sobre variables de Grassmann se muestran en el Apéndice A.5.

## 2.4.2 El funcional generador para las teorías con espinores

Tras haber aprendido a manejar las variables de Grassmann ya estamos preparados para comenzar a estudiar una teoría cuántica un poco más complicada, construida utilizando campos espinoriales. En primer lugar, del mismo modo que hicimos cuando trabajamos con escalares, consideraremos la situación más sencilla que se nos ocurra, en este caso, una teoría libre que no permita interacciones entre los espinores que tengamos. Así, podremos deducir cuál será el funcional generador  $\mathcal{W}[J]$  de nuestras funciones de Green por analogía con el que habíamos escrito para los campos escalares (2.20), de forma que: [4]

$$\mathcal{W}[\sigma, \bar{\sigma}] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left( i \int_x (\mathcal{L} + \bar{\psi} \sigma + \bar{\sigma} \psi) \right) \quad (2.182)$$

Ahora la integral de camino se hace sobre el campo espinorial  $\psi$  y, también, sobre su complejo conjugado,  $\bar{\psi}$ . Es preciso utilizar tanto  $\psi$  como  $\bar{\psi}$  puesto que los campos son variables de Grassmann (y, por consiguiente, c-números), así que para asegurarnos de que estamos integrando sobre todas las configuraciones posibles tenemos que tener en cuenta ambos. Las funciones  $\sigma(x)$  y  $\bar{\sigma}(x)$ , que actuarán como las fuentes (son 'equivalentes' a las  $\mathcal{J}(x)$  que aparecían en la teoría escalar), también son variables de Grassmann. La constante de normalización  $\mathcal{N}'$  se elige de la forma usual, imponiendo que el funcional generador valga uno cuando las fuentes, en este caso,  $\sigma$  y  $\bar{\sigma}$ , sean cero [4].

De nuevo, aprovechando uno de los resultados que derivamos cuando trabajamos con la teoría escalar, (2.6), podemos definir las funciones de Green como sigue: [4]

$$\mathcal{G}^{(2n)}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}(y_n) \} | 0 \rangle \quad (2.183)$$

En la expresión anterior las variables  $x_1, \dots, x_n$  se corresponden con el campo  $\psi$ , mientras que  $y_1, \dots, y_n$  lo hacen con  $\bar{\psi}$ , y sus promociones a operadores se denotan por  $\hat{\psi}$  y  $\hat{\bar{\psi}}$ , respectivamente. Además, el operador  $\mathcal{T}$  actúa igual que lo hacía en (1.1.4), ordena los espinores cronológicamente, pero, con una ligera diferencia: no solamente los ordena sino que, además, introduce un signo '-' con cada trasposición debido a las propiedades de anticonmutación de las variables de Grassmann. Por ejemplo, si consideramos dos espinores  $\psi_1$  y  $\psi_2$  tendremos que, debido a (2.179), se cumplirá [4]

$$\{ \hat{\psi}(x_1), \hat{\psi}(x_2) \} = 0 \Rightarrow \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) + \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) = 0 \Rightarrow \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) = -\hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1)$$

Vemos explícitamente que, debido al anticonmutador, no podemos intercambiarlos sin más (como haríamos si fuesen campos escalares), y tenemos que acordarnos de añadir un signo '-'.

Podemos obtener las funciones de Green a partir de las derivadas funcionales con respecto a las fuentes, que, en este caso, son tanto  $\sigma$  como  $\bar{\sigma}$ , explotando una vez más la analogía con uno de los resultados, (2.7), obtenidos para la teoría escalar, de forma que, para este caso particular: [4]

$$i^{2n} \mathcal{G}^{(2n)}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \frac{\delta^{(2n)} \mathcal{W}[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}(x_1) \dots \delta \bar{\sigma}(x_n) \delta \sigma(y_1) \dots \delta \sigma(y_n)} \quad (2.184)$$

Así, el funcional  $\mathcal{W}[\sigma, \bar{\sigma}]$  generará las funciones de Green para un fermión libre de masa  $m$  y spin 1/2. Cabe destacar, que, en esta ocasión (a diferencia de lo que sucedía en (2.7), donde las funciones de Green eran simétricas en las variables  $x_i$ ), las funciones de Green que se calculan a partir de (2.184) son antisimétricas tanto en  $x_i$  como en  $y_i$ . El motivo por el cual ocurre esto aparece resumido a continuación.

Como  $\sigma$  y  $\bar{\sigma}$  son variables de Grassmann, tanto  $\frac{\delta}{\delta \sigma(x)}$  y  $\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)}$  como  $\frac{\delta}{\delta \sigma(y)}$ , y  $\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(y)}$  también lo serán. Por tanto, teniendo en cuenta lo que vimos en (2.180), se cumplirá que:

$$\frac{\delta^2}{\delta \sigma(x_i) \delta \sigma(x_j)} = -\frac{\delta^2}{\delta \sigma(x_j) \delta \sigma(x_i)} \quad \frac{\delta^2}{\delta \sigma(y_i) \delta \sigma(y_j)} = -\frac{\delta^2}{\delta \sigma(y_j) \delta \sigma(y_i)}$$

Es decir, las derivadas funcionales con respecto de las fuentes, que aparecen en (2.184), anticonmutan.

Realmente, el hecho de que la función de Green sea antisimétrica tiene sentido, puesto que estamos trabajando con fermiones, así que era algo que podíamos esperar<sup>15</sup>. De hecho, en el caso de los campos escalares, sucedía al revés, y las funciones de Green eran simétricas, puesto que las partículas con las que estábamos trabajando tenían espín cero, es decir, eran bosones.

Una de las ventajas de trabajar con la teoría libre es que, al igual que sucedía en la Sección (2.1.2), es posible evaluar explícitamente las integrales de camino que aparecen en el funcional generador. Para ello, utilizaremos el lagrangiano que nos daba la ecuación de Dirac al hacer Euler-Lagrange: [4]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (2.185)$$

<sup>15</sup>De nuevo, esto guarda relación con el teorema de espín-estadística.

Sustituyendo la ecuación en el funcional generador (2.182) que hemos escrito antes se llega a: [4]

$$\mathcal{W}[\sigma, \bar{\sigma}] = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left( i \int_{x'} \int_x \bar{\psi}(x') B(x', x) \psi(x) + i \int_x [\bar{\psi}(x) \sigma(x) + \bar{\sigma}(x) \psi(x)] \right) \quad (2.186)$$

donde hemos definido que  $B(x', x) = (-i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m) \delta^4(x' - x)$ , y  $\partial_\mu^x$  significa que la derivada afecta a las coordenadas  $x$ , no a las  $x'$ . Usando (A.20) para hacer las integrales de camino en  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  se tiene que: [4]

$$\mathcal{W}[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp \left( -i \int d^4x' \int d^4x \sigma(\bar{x}') S_F(x' - x) \sigma(x) \right) \quad (2.187)$$

donde  $S_F(x' - x)$  es el propagador del campo de Dirac, y se escribe como  $S_F(x' - x) = iB^{-1}(x', x)$ . Podemos obtener la forma explícita de  $B(x', x)$  a partir de la propia definición que hemos escrito, utilizando la representación integral de la delta de Dirac y haciendo las derivadas correspondientes. Teniendo en cuenta, además, que  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$  (*Feynman slash notation*), queda: [4]

$$B(x', x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} (\not{p} - m) \quad (2.188)$$

La transformada inversa,  $B^{-1}(x', x)$ , que será el propagador, se obtiene como en el caso del propagador de los campos escalares, usando el hecho de que ella y  $B(x', x)$  satisfacen la identidad:

$$\int_y B(x_1, y) B^{-1}(y, x_2) = \delta(x_1 - x_2) \quad (2.189)$$

Así, obtenemos que:

$$B^{-1}(x', x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (2.190)$$

Cabe destacar que para realizar el cálculo hemos utilizado que  $p_\mu p^\mu = p^2 = p_0 p^0 - p_i p^i$  y que  $\not{p}^2 = p^2 I_4$ . Por tanto, el propagador del campo de Dirac,  $S_F(x' - x)$  se define como sigue: [4]

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (2.191)$$

La ecuación (2.191) no es más que la transformada de Fourier (Apéndice A.3) de la función  $S_F(x' - x)$ , así que la cantidad que va pegada a la exponencial representará el propagador en el espacio de momentos:

$$\tilde{S}_F(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \quad (2.192)$$

De nuevo, al igual que en el caso escalar, para resolver la ambigüedad del polo que aparece en  $p^2 = m^2$ , es necesario introducir el factor  $i\varepsilon$  que asegurará la convergencia de la integral [4].

### 2.4.3 Teorías renormalizables con espinores y escalares

En la Sección 2.3 introducimos algunos de los aspectos más relevantes de la renormalización, y estudiamos bajo qué condiciones una *QFT* construida utilizando campos escalares podía ser renormalizable, y llegamos a la conclusión de que para que esto ocurriese podíamos tener, como mucho, cuatro potencias de  $\varphi$ , es decir,

cuatro bosones interaccionando (esto tiene que ver con que vimos que las únicas funciones 1PI con un grado superficial de divergencia mayor que 0 eran  $\tilde{\Gamma}^{(0)}$ ,  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  y  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ ). Podemos preguntarnos, ahora que ya hemos estudiado una teoría sencilla con espinores libres, qué ocurriría si permitiésemos que estos últimos también pudiesen interaccionar. Vamos a considerar una teoría cuántica de campos en la que tengamos tanto bosones ( $\varphi$ ) como espinores ( $\psi$ ), de tal manera que, de forma general, podamos pensar que cada vértice involucra un número arbitrario de propagadores que representan bosones,  $N_B$ , y fermiones,  $N_F$ . Además, denotamos por  $I_B$  e  $I_F$  a las líneas internas de los bosones y de los fermiones, respectivamente, y escribimos el número de *loops* como  $L$ . De esta forma, el grado superficial  $D$  de divergencia será: [4] [3]

$$D = 4L - 2I_B - I_F \quad (2.193)$$

Al igual que hicimos en la Sección 2.3.2, lo más conveniente para nuestros propósitos es expresarlo únicamente en función del número de líneas externas ( $E_B$  para los bosones y  $E_F$  para los fermiones) y del número de vértices,  $V(N_B, N_F)$ . Es evidente que el número total de líneas internas,  $I$ , y el de líneas externas,  $E$ , cumplirán que: [4]

$$I = I_B + I_F \quad (2.194) \quad E = E_B + E_F \quad (2.195)$$

El número total de vértices no es más que la suma de cada uno de ellos, es decir,  $V = \sum_{N_B, N_F} V(N_B, N_F)$ . Además, también se satisfacen las siguientes relaciones: [4]

$$E_B + 2I_B = \sum_{N_B, N_F} V(N_B, N_F) N_B \quad (2.196) \quad E_F + 2I_F = \sum_{N_B, N_F} V(N_B, N_F) N_F \quad (2.197)$$

Y, al igual que en la Sección 2.3.2, tenemos que:

$$L = I - V + 1 \quad (2.198)$$

Podemos reescribir la definición del grado superficial de divergencia sustituyendo las expresiones para  $L$ ,  $V$  e  $I$ , que acabamos de obtener y, posteriormente, usando (2.196) y (2.197) para relacionar las líneas internas con las externas a través del número de vértices. Haciendo esto, llegamos a [4] [3]

$$D = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F + \sum_{N_B, N_F} V(N_B, N_F) \left( \frac{3}{2}N_F + N_B - 4 \right) \quad (2.199)$$

Si perseguimos que nuestra teoría sea renormalizable, tenemos que evitar que el grado superficial de divergencia  $D$  crezca con el número de vértices. Teniendo esto en cuenta, es necesario imponer la siguiente condición:

$$\frac{3}{2}N_F + N_B - 4 \leq 0$$

Existen varias soluciones posibles para esta inecuación: [4]

1.  $N_F = 0, N_B \leq 4 \rightarrow$  Ahora mismo no nos interesa, ya que solamente permite la existencia de bosones y no de fermiones, así que se correspondería con las situaciones que ya tratamos en el caso escalar.
2.  $N_F = 1, N_B = 2 \rightarrow$  Aunque tiene un fermión, tampoco es aceptable, ya que generaría un vértice donde no se conservarían ni la carga ni el momento angular.

3.  $N_F = 2, N_B = 0 \rightarrow$  Aquí no hay bosones, y queremos construir una teoría que también los tenga, así que la descartamos también.
4.  $N_B = 1, N_F = 2 \rightarrow$  Si elegimos esta, aparecerán vértices que involucrarán dos fermiones (por lo que no habrá violaciones de ninguna simetría) y un bosón, así que tendremos tanto campos escalares como espinoriales, que era justo lo que perseguíamos en un principio.

Por tanto, hemos llegado a la conclusión de que las únicas interacciones que hacen que la teoría sea renormalizable son aquellas de la forma  $\sim \bar{\psi}\psi\varphi$ , que se conocen como interacciones de Yukawa [4].

#### 2.4.4 Reglas de Feynman para las interacciones de tipo Yukawa

Procediendo de forma similar a como lo hicimos en el caso de los campos escalares, donde primero consideramos la teoría libre y posteriormente añadimos una interacción del tipo  $\sim \varphi^4$ , en este caso, tras haber estudiado la teoría que únicamente involucraba espinores libres, pasaremos a preguntarnos qué pasa cuando introducimos un vértice de tipo Yukawa,  $\sim \bar{\psi}\psi\varphi$ , y derivaremos las reglas de Feynman correspondientes. Como la QFT que estamos construyendo tiene tanto campos escalares como campos espinoriales, necesitamos escribir un funcional generador que combine ambas cosas, así que tendremos:

$$\mathcal{W}[J, \sigma, \bar{\sigma}] \propto \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int_x (\mathcal{L} + J\varphi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \right] \quad (2.200)$$

Como siempre, la constante de normalización se fija de forma que  $\mathcal{W}[J, \sigma, \bar{\sigma}]$  valga uno cuando las fuentes sean nulas. El lagrangiano que aparece en la expresión anterior describe, por tanto, una teoría que involucra tanto como bosones  $\varphi$  de masa  $M$  y espín 0 como fermiones  $\psi$  de masa  $m$  y espín 1/2 que se acoplan a través de una interacción de Yukawa, así que su forma será: [6]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}M^2\varphi^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + g\varphi\bar{\psi}\psi \quad (2.201)$$

Además, recordando las expresiones (2.32) y (2.187) que obtuvimos para las teorías sin interacciones y que estaban escritas en términos de los propagadores correspondientes, tendremos que el funcional libre  $\mathcal{W}_0$  será:

$$\mathcal{W}_0[J, \sigma, \bar{\sigma}] = \exp \left( -\frac{i}{2} \int_{x,y} J(x) D_F(x-y) J(y) \right) \times \exp \left( -i \int_{x,y} \bar{\sigma}(x) S_F(x-y) \sigma(y) \right) \quad (2.202)$$

Podemos dividir el lagrangiano  $\mathcal{L}$  en su parte libre,  $\mathcal{L}_0$ , y en una parte que codifique las interacciones,  $\mathcal{L}_I$ , lo cual nos permitirá descomponer la exponencial como sigue: [4]

$$e^{i \int_x (\mathcal{L} + J\varphi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi)} = e^{i \int_x \mathcal{L}_I(\varphi, \psi, \bar{\psi})} e^{i \int_x (\mathcal{L}_0 + J\varphi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi)} \quad (2.203)$$

De forma similar a lo que hicimos en la Sección 2.2.1, es posible llegar a una relación entre las derivadas funcionales con respecto de las fuentes ( $\sigma$  y  $\bar{\sigma}$ ) y los campos spinoriales  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ : [4]

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \exp i \int_x (\mathcal{L}_0 + J\varphi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) = -i\bar{\psi}(y) \exp \int_x (\mathcal{L}_0 + J\varphi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \quad (2.204)$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y)} \exp i \int_x (\mathcal{L}_0 + J\varphi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) = \psi(y) \exp \int_x (\mathcal{L}_0 + J\varphi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \quad (2.205)$$

Utilizando tanto (2.53), (2.204) y (2.205) y sustituyendo en las exponenciales, el funcional generador queda:<sup>16</sup>

$$\mathcal{W}[J, \sigma, \bar{\sigma}] = \exp \left[ i \int_x \mathcal{L}_I \left( -i \frac{\delta}{\delta J}, -i \frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}}, i \frac{\delta}{\delta \sigma} \right) \right] \mathcal{W}_0[J, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (2.206)$$

Para obtener las funciones de Green correspondientes podríamos proceder de manera análoga a como lo hicimos en la Sección 2.2.1: haríamos la expansión de la exponencial que lleva dentro el  $\mathcal{L}_I$  en la expresión anterior, quedándonos a primer orden. Para ello tendríamos que saber cómo actúan las derivadas funcionales de las funciones sobre el funcional generador. En el Capítulo 3, cuando estemos tratando con las dos teorías gauge que vamos a estudiar (la electrodinámica cuántica y la cromodinámica cuántica), también calcularemos los vértices de las interacciones, al igual que hicimos en el caso de la teoría escalar  $\lambda\varphi^4$  (y al igual que vamos a hacer ahora). Para ello, se llevará la parte del lagrangiano que codifica las distintas interacciones,  $\mathcal{L}_I$ , al espacio de momentos, y se leerán las reglas de Feynman correspondientes a partir del resultado. Volviendo al caso que nos ocupa, podemos, en lugar de escribir explícitamente las funciones de Green (como hicimos en la Sección 2.2), cuyo cálculo sería más laborioso, seguir el procedimiento que acabamos de describir considerando una interacción de Yukawa:

$$\int d^4x \mathcal{L}_I = \int d^4x g \bar{\psi} \gamma \psi \varphi \quad (2.207)$$

Las transformadas de Fourier de los campos involucrados serán:

$$\psi(x) = \int_p e^{-ipx} \tilde{\psi}(p) \quad \bar{\psi}(x) = \int_q e^{iqx} \tilde{\bar{\psi}}(q) \quad \varphi(x) = \int_r e^{-irx} \tilde{\varphi}(r)$$

Por tanto, (2.207) adopta la siguiente forma en el espacio de momentos:

$$ig \int_x \int_p \int_q \int_r e^{-i(p+r-q)x} \tilde{\psi}(p) \gamma \tilde{\bar{\psi}}(q) \tilde{\varphi}(r) = -ig\gamma \int_p \int_q \int_r \delta(p+r-q) \tilde{\psi}(p) \tilde{\bar{\psi}}(q) \tilde{\varphi}(r) \quad (2.208)$$

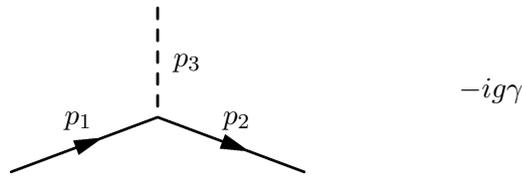
De la ecuación anterior podemos leer que el vértice de la interacción es  $-ig\gamma$ , mientras que la delta de Dirac que aparece,  $\delta(p+r-q)$ , no es más que la imposición de que el momento se tiene que conservar. Juntando todo lo que hemos aprendido, podemos escribir las siguientes reglas de Feynman que tendremos que tener presentes siempre que trabajemos con campos espinoriales: [1] [4]

1. Con cada fermión que se propague con un momento  $p$  podemos asociar un propagador del tipo (citarlo), cuyo signo modificará la dirección de la flecha que dibujemos en el diagrama correspondiente.

$$\begin{array}{c} \text{-----} \longrightarrow \\ \xrightarrow{p} \end{array} \quad i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

2. Por cada vértice en el que tengamos una interacción de tipo Yukawa (es decir, converjan dos fermiones y un bosón) podemos asociar un factor  $-ig\gamma$ .

<sup>16</sup>Básicamente hacemos los cambios  $\delta/\delta J \rightarrow i\varphi$ ,  $\delta/\delta\sigma \rightarrow -i\bar{\psi}$  y  $\delta/\delta\bar{\sigma} \rightarrow i\psi$



3. Existe otra regla adicional (que no derivaremos aquí debido a la longitud de su cálculo), que nos dice que por cada bucle que lleve a un fermión, tenemos que añadir un factor de  $-1$ .

### 2.4.5 Amplitudes de dispersión con fermiones

Para terminar con el estudio de los campos espinoriales, lo último que nos queda por ver es cómo se lleva a cabo el cálculo de las amplitudes de los procesos de dispersión en los que participan. En principio, la forma de proceder es análoga a la del caso escalar (Sección 2.2.3), así que si queremos obtener la amplitud asociada a algún diagrama concreto también será necesario amputar sus patas externas, igual que hicimos entonces. No obstante, en esta ocasión tenemos que hacer otra consideración adicional. Volviendo a la expresión que habíamos derivado para los elementos de la matriz  $S_{ij}$ , (2.123), recordamos que la forma de obtener las amplitudes de dispersión era a través de las derivadas funcionales con respecto de los coeficientes  $a(k)$  y  $a^*$  que aparecían en la solución general de la ecuación de Klein-Gordon, (1.51). Si quisiéramos extender esa expresión al caso que nos ocupa, donde nuestros campos son fermiones, en el cálculo de esos elementos de matriz tendríamos que utilizar la solución general de la ecuación de Dirac, (1.56), así que en las derivadas funcionales intervendrían los coeficientes  $a(k, s)$ ,  $a^*(k, s)$ ,  $b(k, s)$  y  $b^*(k, s)$ . Fijándonos en ella, vemos que, cuando llevásemos a cabo estas diferenciaciones, aparecerían los factores espinoriales  $u(k, s)$ ,  $\bar{u}(k, s)$ ,  $v(k, s)$  y  $\bar{v}(k, s)$ , que sobreviven al derivar. Como consecuencia de esto, cuando tengamos un diagrama de Feynman que represente algún proceso cuya amplitud de dispersión queramos calcular, y que contenga tanto fermiones como bosones, hemos de tener en cuenta las siguientes consideraciones adicionales: [8]

- Si el fermión está entrando en el proceso de dispersión, su propagador será (2.192), y se le asocia el vector columna  $u(k, s)$  por la derecha.
- Si el fermión está saliendo del proceso de dispersión, se le asocia el vector fila  $\bar{u}(k, s)$  por la izquierda.

## Teorías Cuánticas de Campos con simetría *gauge*

La descripción de las interacciones fundamentales de la naturaleza que constituyen el Modelo Estándar se lleva a cabo a través de Teorías Cuánticas de Campos que poseen simetría *gauge*. Tras realizar un pequeño resumen sobre grupos y álgebras de Lie, utilizaremos los fundamentos generales de las *QFT* que hemos aprendido en el Capítulo 2 para introducirnos en el estudio de dos de las teorías que se pueden construir a partir de la imposición de esta simetría: la electrodinámica cuántica, *QED*, que describe la interacción electromagnética, y la cromodinámica cuántica, *QCD*, que describe la interacción fuerte.

### 3.1 Grupos y álgebras de Lie: una pequeña introducción

En física, la búsqueda de las transformaciones que dejan invariantes las leyes fundamentales de la naturaleza (simetrías) es una tarea de gran importancia e interés, ya que, entre otras cosas, facilita la descripción del sistema que queremos estudiar. Supongamos que tenemos un conjunto de  $N$  transformaciones  $T_1, T_2, \dots, T_N$  que dejan invariante una determinada ley. Podemos, por ejemplo, realizar en primer lugar la transformación  $T_2$ , y, justamente a continuación, la transformación  $T_1$ , de tal forma que podemos escribir la transformación total como  $T_1 \cdot T_2$ . Debido a que tanto  $T_2$  como  $T_1$  dejaban nuestra ley física invariante,  $T_1 \cdot T_2$  también lo hará. En general, las transformaciones que se emplean pueden ser discretas (como las que acabamos de ver) o continuas, es decir, dependientes de un parámetro ( $\theta$ ) concreto,  $T(\theta)$  [8]. El ejemplo que hemos considerado parece indicarnos que el conjunto de transformaciones  $\{T_i\}$  que hemos definido tiene estructura de grupo; de hecho, todas las simetrías con las que vamos a trabajar un poco más adelante pertenecerán a uno, así que parece conveniente dedicar un poco de tiempo a introducir algunos conceptos fundamentales sobre ellos.

Un grupo ( $G$ ) es un conjunto de elementos  $\{g_a\}$  que poseen una ley de composición interna (que denotaremos, en general, por  $\cdot$ ) que satisface las siguientes propiedades: [8]

1. Regla de clausura: dados dos elementos del grupo,  $g_1$  y  $g_2$ , la operación  $g_1 \cdot g_2$ , genera otro elemento,  $g_3$ , que también caerá dentro del grupo, es decir, que  $g_3 \in G$ .
2. Es asociativa, es decir, cumple que  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
3. Posee una identidad o elemento neutro, denotada como  $e$ , que se define de forma que  $e \cdot g_a = g_a \cdot e = g_a$ . En términos de las transformaciones  $\{T_i\}$  de antes, podemos entender la identidad como una transformación física que equivale a 'no hacer nada' [8].
4. Asigna un elemento inverso  $g_a^{-1}$  a cada uno de los elementos  $g_a$  del grupo, es decir, se cumple que  $g_a \cdot g_a^{-1} = e = g_a^{-1} \cdot g_a = 1$ . Relacionándolo nuevamente con las  $\{T_i\}$  de antes, lo que esto nos dice,

básicamente, es que siempre podemos 'deshacer' la transformación física que hayamos hecho [8].

La cantidad de grupos diferentes que se pueden construir siguiendo las reglas anteriores es inmensa, pero, en nuestro caso particular, los que nos van a interesar son un tipo concreto que desempeñan un papel muy importante en física, y que se conocen como grupos de Lie [2]. Su importancia radica, principalmente, en que los lagrangianos de las teorías que describen las interacciones fundamentales que vamos a estudiar son invariantes bajo ciertas transformaciones que resultarán ser elementos de este tipo de grupos.

Esencialmente, un grupo de Lie es aquel cuyos elementos  $\{g_a\}$  dependen de un conjunto de parámetros reales,  $\theta^a$ , de forma continua y diferenciable,  $g(\theta^a)$ . Además, cumplen que, si evaluamos dichos elementos en  $\theta^a = 0$ , obtenemos el elemento neutro, es decir,  $g(0, \dots, 0) = e$  [2] [8]. A continuación, vamos a definir algunos conceptos relacionados con ellos que cobrarán importancia en las secciones venideras:

- La representación  $R$  del grupo es una operación que asigna un operador  $D_R(g)$  a cada uno de los elementos del grupo de tal forma que se satisface que: [2]
  1.  $D_R(e) = 1$ , donde 1 es el operador identidad. Lo que nos dice esta ecuación es que la representación  $R$  está asociando al elemento neutro,  $e$ , el operador identidad.
  2.  $D_R(g_1)D_R(g_2) = D_R(g_1g_2)$ , por tanto, esta aplicación preserva la estructura del grupo.

Los operadores  $D_R$  actúan sobre un espacio que se conoce como 'la base' de la representación. Existen muchos tipos diferentes de representaciones, pero las más habituales (y las que vamos a utilizar) son las que tienen forma de matrices. En ese caso, 'la base' es un espacio vectorial, cuya dimensión  $n$  coincide con la dimensión de la propia representación, y los elementos del grupo no son más que matrices de tamaño  $n \times n$ , de forma que se tiene que  $(D_R(g))_j^i$ . Normalmente, al cambiar de representación también se modifican la forma y las dimensiones de  $D_R(g)$ ; existe, sin embargo, una propiedad de este tipo de grupos, conocida como su álgebra,  $(\mathcal{A})$ , que sí es independiente de la representación. [2]

- A cada grupo (de Lie) le corresponde un álgebra (de Lie), que está construida en torno al elemento neutro  $e$  del propio grupo. Los vectores de la base del espacio definido por el álgebra se denominan generadores de la representación  $R$ , y se denotan por  $T_R^a$ . Cada elemento  $X$  del álgebra se puede escribir como una combinación lineal de elementos de la base, es decir, de generadores, de forma que  $X = \sum \theta^a T_R^a$ . Los elementos del grupo  $G$  y de su álgebra  $\mathcal{A}$  correspondiente se relacionan como: [2]

$$D_R(g(\theta)) = e^{i\theta^a T_R^a} \quad (3.1)$$

La dimensión de la representación, por tanto, vendrá dada por el número de generadores  $t_a$  que tengamos. El álgebra de Lie está completamente definida por: [2] [4]

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad (3.2)$$

Donde, aunque los generadores dependan, en general, de la representación utilizada, el factor  $f_{abc}$  que aparece es independiente de dicha representación. Las constantes  $f_{abc}$  reciben el nombre de constantes de estructura. Cabe destacar que, si un grupo de Lie es abeliano, es decir, si todos sus elementos conmutan entre sí, estas constantes de estructura se desvanecen. [2]

- Existe un tipo particular de operadores, los operadores de Casimir,  $\mathcal{C}$ , que se construyen a partir de los generadores,  $T_a$ , y tienen la propiedad de que conmutan con todos ellos, por lo que resultan de gran utilidad en el estudio de las diferentes representaciones. [2]

### 3.2 La electrodinámica cuántica: una teoría *gauge* abeliana

La Teoría Cuántica de Campos que describe la interacción electromagnética se conoce como Electrodinámica Cuántica o *QED* (del inglés, *Quantum Electrodynamics*). Para construir el lagrangiano de la teoría,  $\mathcal{L}_{QED}$ , necesitaremos considerar tres contribuciones diferentes. Por un lado, tenemos que incluir un término que modelice el comportamiento de las partículas que sufren la interacción electromagnética. El lagrangiano de Dirac,  $\mathcal{L}_{Dirac}$ , que utilizamos en la Sección 1.2.3 y que utilizaba campos spinoriales para describir la dinámica de las partículas de espín 1/2, es decir, de los fermiones, parece una buena opción, puesto que estos últimos son capaces de interactuar electromagnéticamente. Por otra parte, es necesario incluir el lagrangiano del propio campo electromagnético,  $\mathcal{L}_{EM}$ . Por último, para permitir que los espinores  $\psi$  y los campos vectoriales  $A_\mu$  puedan acoplarse, introducimos un término de interacción,  $\mathcal{L}_{int}$ . Así, el lagrangiano total de la electrodinámica cuántica puede escribirse como: [3]

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_I = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (3.3)$$

El término de interacción representa la corriente electromagnética de una partícula con espín 1/2, donde la variable  $q$  no es más que la carga de un fermión arbitrario [4]. En caso de que quisiéramos trabajar con varios tipos de fermiones diferentes al mismo tiempo, podríamos generalizar (3.3) sumando tanto un nuevo  $\mathcal{L}_{Dirac}$  como un nuevo  $\mathcal{L}_I$  por cada una de las especies adicionales, escribiendo para cada una de ellas el valor de la carga que les corresponda [3]. La relación que existe entre  $A_\mu$  y  $F_{\mu\nu}$  viene dada por<sup>1</sup>:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.4)$$

Es posible escribir el lagrangiano de la electrodinámica cuántica de forma un poco más abreviada: [3]

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

En la expresión anterior,  $D_\mu$  se denomina derivada covariante, y está definida como sigue: [3]

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (3.6)$$

Además, el lagrangiano (3.3) es invariante bajo las siguientes transformaciones de los campos:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.7)$$

Las transformaciones anteriores se conocen como transformaciones *gauge*, y, en este caso, actúan sobre los campos spinoriales cambiando localmente su fase. Aunque de momento esto parece una simple curiosidad, lo cierto es que, en realidad, este tipo de simetría tiene un significado muy fundamental, que motiva, entre otras cosas, la aparición de la derivada covariante  $D_\mu$  y del vector  $A_\mu$ , tal y como veremos más adelante.

<sup>1</sup>El campo  $A_\mu$  representa el potencial vector del campo electromagnético, mientras que  $F_{\mu\nu}$  es el tensor de dicho campo.

### 3.2.1 Derivación del lagrangiano de QED

Es posible derivar el lagrangiano de la electrodinámica cuántica 'desde cero', simplemente exigiendo que  $\mathcal{L}_{Dirac}$  sea invariante bajo transformaciones del tipo (3.7). Es decir, primero imponemos que el hecho de que se satisfaga la simetría *gauge* es algo fundamental, y después construimos nuestra teoría a partir de esta asunción<sup>2</sup>. Por el momento, vamos a olvidarnos, además, de la existencia de  $A_\mu$  y de  $D_\mu$ . Puede verse que el lagrangiano de Dirac es invariante bajo transformaciones de fase de la forma: [4] [3]

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \quad (3.8)$$

Las transformaciones de este tipo se denominan globales, ya que el parámetro que aparece en ellas (en este caso, el ángulo  $\alpha$ ), no depende de  $x$ , y es el mismo para todos los puntos del espacio. Podemos intentar considerar una simetría un poco más general si hacemos que el parámetro sí tenga dependencia espacial, es decir, que  $\alpha(x)$ . Escribir esto equivale a decir que cada punto del espacio se transforma con una fase diferente (local) que es independiente de las demás, es decir: [4]

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (3.9)$$

Desafortunadamente, el lagrangiano de Dirac no es invariante bajo las transformaciones locales que acabamos de escribir. Transformando los spinores que aparecen en  $\mathcal{L}_{Dirac}$  de acuerdo con (3.9) se ve que: [4]

$$\mathcal{L}_I \rightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) = \mathcal{L}_I + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.10)$$

El término adicional  $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x)$  que ha aparecido al llevar a cabo la transformación rompe la invariancia *gauge* que queríamos conseguir, así que necesitamos deshacernos de él (esto podría hacerse, por ejemplo, añadiendo otro término adicional al lagrangiano). Podemos solucionar esto si redefinimos la derivada habitual que conocemos,  $\partial_\mu$ , y la cambiamos por una nueva derivada denotada por  $D_\mu$  (la derivada covariante que habíamos mencionado antes), que tiene la siguiente forma: [4]

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi \quad (3.11)$$

Vemos que, para definirla, hemos introducido un nuevo campo vectorial,  $A_\mu$ . Si queremos que la derivada covariante se transforme de la misma forma que los spinores bajo las transformaciones locales de la forma (3.9) tenemos que pedir que este nuevo campo se modifique como sigue: [6]

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.12)$$

Al hacerlo, la derivada covariante se transforma como necesitábamos:

$$D_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \quad (3.13)$$

Puede verse fácilmente que, considerando las transformaciones (3.12) y (3.13) el lagrangiano de Dirac es invariante bajo (3.9). Hemos conseguido, por tanto, que se satisfaga la simetría *gauge*, tal y como queríamos, aunque el precio que hemos tenido que pagar ha sido la aparición del campo  $A_\mu$ . Para completar la descripción de la interacción electromagnética necesitamos incluir un término adicional que también sea

<sup>2</sup>Realmente, este procedimiento se acerca bastante a la forma en la que se realmente se construyen las teorías. Una de las maneras de hacerlo es ver primero qué simetrías queremos que satisfaga la teoría en cuestión, ya sea porque se hayan observado experimentalmente o por otros motivos, y, a partir de ahí, imponerlas y ver a dónde se puede llegar.

invariante bajo transformaciones gauge, y que esté expresado en función de los nuevos  $A_\mu$ . Es evidente que (3.4) es invariante gauge, así que podemos añadir al lagrangiano una contribución  $\propto F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  de forma que:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.14)$$

Haciendo explícitamente la derivada covariante de acuerdo con (3.11), vemos que el lagrangiano que acabamos de escribir toma la forma que tenía el lagrangiano de  $QED$  que introdujimos al principio de toda esta discusión. El hecho de que hayamos conseguido llegar hasta él partiendo simplemente de la imposición de que los spinores  $\psi$  del lagrangiano de Dirac satisficieran (3.9) debería empezar a darnos una idea de lo fundamental que es la simetría gauge. Además, tal y como adelantamos anteriormente, la existencia del campo  $A_\mu$  es una mera consecuencia de dicha simetría y, por este motivo,  $A_\mu$  recibe habitualmente el nombre de campo gauge. Otra observación interesante que podemos hacer a partir del lagrangiano (3.14) es que las partículas descritas por el campo  $A_\mu$  no tienen masa<sup>3</sup>; de hecho, si quisiéramos añadir un término del tipo  $\sim A_\mu A^\mu$  la invariancia gauge se rompería, así que todo parece indicar que el lagrangiano de la electrodinámica cuántica que hemos obtenido es el único lagrangiano invariante bajo transformaciones de fase locales en  $\psi$  que se puede construir a partir de la imposición de la invariancia gauge en el lagrangiano de Dirac, por lo que el hecho de que el campo vectorial no sea masivo parece ser una condición necesaria para construir un lagrangiano en el que se produzca el acoplamiento entre dicho campo y un campo espinorial [3] [6] [4].

Por último, cabe destacar que las transformaciones que hemos escrito en (3.9) forman parte de un grupo muy sencillo, conocido como  $U(1)$ , cuyos elementos,  $U(x)$ , son de la forma [2]:

$$U(x) = e^{i\alpha(x)}, \quad \text{con } 0 \leq \alpha(x) \leq 2\pi \quad (3.15)$$

El grupo es continuo, y, de acuerdo con (3.15), sus elementos representan la parametrización de una circunferencia compleja de módulo unidad. Además, podemos comprobar fácilmente que es un grupo de Lie, ya que si evaluamos  $U(0)$  obtenemos la identidad, así que satisface la definición que vimos en la Sección 3.1 y seguirá un álgebra del tipo (3.2). Asimismo, como los diferentes  $U(x)$  conmutan entre sí, el grupo es abeliano, lo que significa que, de acuerdo con lo que aprendimos en la Sección 3.1, sus constantes de estructura  $f_{abc}$  se desvanecerán, y sus generadores  $T_R^a$  serán iguales a uno, tal y como ya podíamos leer de la transformación (3.9).

## 3.3 La cromodinámica cuántica: una teoría gauge no abeliana

### 3.3.1 Teorías de Yang-Mills

Nuestro siguiente objetivo consistirá en generalizar las transformaciones del tipo (3.9) que hemos estudiado en la Sección 3.2.1 con el fin convertirlas en los elementos de un grupo que, a diferencia de  $U(1)$ , no sea abeliano. Para conseguirlo, vamos a comenzar considerando un número arbitrario de fermiones descritos por un conjunto de  $N$  campos de Dirac,  $\psi_i$  (con  $i = 1, \dots, N$ ) que se transforman bajo una cierta representación,  $R$ , del grupo gauge. Podemos escribir esto de forma más sencilla si agrupamos los spinores que tenemos en un vector columna, que denotaremos simplemente por  $\psi$ , sin utilizar ningún índice: [2] [6]

<sup>3</sup>Para que la tuviese, tendría que aparecer un término de la forma  $A_\mu A^\mu$ .

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Así, la generalización de la transformación (3.9) puede escribirse como:

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ig\alpha_a(x)T_R^a}\psi(x) \quad (3.17)$$

En ella,  $\alpha_a(x)$  son los parámetros habituales de la transformación, mientras que  $T_R^a$  serán los generadores del grupo en la representación  $R$  que estamos considerando, y tomarán la forma de matrices de tamaño  $N \times N$  para poder actuar adecuadamente sobre el vector columna, ya que este tenía  $N$  componentes [4] [2]. Concretamente, puesto que en este caso la dimensión de dichas matrices es igual que la de la representación (a la que nos referiremos como  $\dim(R)$ ), el número de componentes de nuestro vector columna también tiene que serlo [6], así que, realmente, el índice  $i$  que recorre el conjunto de campos de Dirac que tenemos va desde 1 hasta  $\dim(R)$ . Cabe destacar que, por el momento, la constante  $g$  que ha aparecido en la transformación no es más que el fruto de una redefinición del parámetro  $\alpha(x)$ , aunque más adelante veremos que desempeñará el papel de una constante de acoplamiento [4]. Además, puesto que entendemos que hay una suma implícita sobre  $a$  en (3.18), de ahora en adelante denotaremos la transformación como: [4]

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ig\alpha(x) \cdot T}\psi(x), \quad \text{con} \quad \alpha(x) \cdot T = \alpha_a(x)T_R^a \quad (3.18)$$

Podemos escribir de nuevo el lagrangiano de Dirac, recordando que ahora los  $\psi$  vendrán dados por (3.16):

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (3.19)$$

Dicho lagrangiano no es invariante bajo las transformaciones locales (3.18), puesto que, si consideramos la transformación en su versión infinitesimal (donde, esta vez, aparecerá la matriz identidad,  $I$ ), veremos que la derivada,  $\partial_\mu$ , no se transforma de la forma que necesitamos (como los  $\psi$ ): [4]

$$\psi \rightarrow (I - ig\alpha \cdot T)\psi \quad \implies \quad \partial^\mu \rightarrow (I - ig\alpha \cdot T)\partial^\mu\psi - ig(T \cdot \partial\alpha)\psi \quad (3.20)$$

Para poder eliminar el término adicional que aparece en (3.20) necesitamos introducir un conjunto de campos gauge del tipo  $A_\mu$  (como los que vimos en la Sección 3.2.1); concretamente, uno por cada generador  $T^a$  del grupo, por lo que los etiquetaremos de la misma manera, utilizando el índice  $a$ , así que los denotaremos como  $A_\mu^a$ . Podemos construir un campo matricial de la forma: [2]

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a = A_\mu \cdot T \quad (3.21)$$

Cabe destacar que, a diferencia de los generadores  $T^a$  y de la matriz  $A_\mu$  que acabamos de definir, los campos gauge  $A_\mu^a$  no dependen de la representación utilizada [2]. Por analogía con el procedimiento que seguimos en el caso abeliano, parece lógico pensar que, para solucionar este problema, necesitaremos escribir también una nueva derivada covariante, similar a (3.11), pero un poco más general, de la forma: [4]

$$D^\mu\psi = (\partial^\mu + igA_\mu \cdot T)\psi \quad (3.22)$$

Queremos que esta derivada covariante se transforme del mismo modo que nuestro conjunto de espinores:

$$D^\mu \psi \rightarrow (I - ig\alpha \cdot T)D^\mu \psi \quad (3.23)$$

Con el fin de conseguir que el término adicional de (3.20) desaparezca, tenemos que definir la transformación de los campos gauge de forma más general, introduciendo las constantes  $f_{abc}$ , en las que de momento pensaremos como una simple herramienta que puede contribuir a eliminar el sumando que nos molesta: [4]

$$A_a^\mu \rightarrow A_a^\mu + \partial^\mu \alpha_a + gf_{abc}\alpha_b A_c^\mu \quad (3.24)$$

Puede comprobarse que, para que la derivada covariante se transforme como queremos, necesitamos: [4]

$$[\alpha \cdot T, A^\mu \cdot T] = if_{abc}\alpha_b A_c^\mu T_a \quad (3.25)$$

La ecuación anterior implica directamente la siguiente relación: [4]

$$[T_b, T_c] = if_{abc}T_a = if_{bca}T_a \quad (3.26)$$

Por tanto, podemos confirmar que, tal y como podíamos sospechar desde un principio debido a todo lo que aprendimos en la Sección 3.2.1), las matrices  $T^a$  son los generadores de un álgebra de Lie, mientras que las constantes  $f_{abc}$  no son más que las constantes de estructura de dicho álgebra [4]. Puesto que normalmente las matrices no conmutan, el grupo es no abeliano, y, por tanto, a diferencia de lo que sucedía en la Sección 3.2.1), los generadores son no triviales (distintos de la unidad), y por eso no se desvanecen las constantes de estructura. Concretamente, el grupo con el que vamos a trabajar es  $SU(N)$ , donde, por definición, el número de generadores viene dado por  $N^2 - 1$  [2]. Si ahora reemplazamos la derivada usual,  $\partial_\mu$ , por la derivada covariante  $D_\mu$  que hemos escrito antes, (3.22), el lagrangiano de Dirac toma la forma:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (3.27)$$

Este lagrangiano sí es invariante bajo transformaciones gauge locales del tipo (3.18), y, si escribimos explícitamente la expresión de la derivada covariante, veremos que tiene tanto un término cinético para los fermiones como un término que codifica la interacción entre ellos y los campos gauge,  $A_\mu^a$ . Para 'completarlo', necesitamos introducir un término cinético para los estos últimos que también sea invariante bajo las mismas transformaciones [2]. Utilizando la derivada covariante podemos definir la siguiente cantidad: [4]

$$F^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu}T_a = -ig^{-1}[D^\mu, D^\nu] \quad (3.28)$$

Sabemos que la expresión anterior será invariante gauge puesto que  $D_\mu$  lo es. Usando la definición de la derivada covariante, (3.22), puede verse que: [4]

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig[A^\mu, A^\nu] \quad (3.29)$$

Esta ecuación es como la versión no abeliana de (3.4). Si multiplicamos a ambos lados por  $T^a$ , operamos un poco, y utilizamos la relación entre los generadores, (3.26), llegamos a: [4]

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - gf_{abc}A_b^\mu A_c^\nu \quad (3.30)$$

Cabe destacar que  $F_a^{\mu\nu}$  es independiente de la representación  $R$ , ya que tanto el campo gauge  $A_a^\mu$  como las constantes de estructura  $f_{abc}$  lo son [4] [2]. Como (3.30) es invariante bajo el tipo de transformaciones que estamos considerando, podemos usarlo para codificar la parte cinética de los  $A_a^\mu$ , concretamente: [4] [2]

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (3.31)$$

En contraste con el que aparecía en el lagrangiano de *QED*, (3.14), en esta ocasión el producto de  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  presenta términos cúbicos, e incluso cuárticos, en  $A_\mu$ , así que es bastante más complicado que antes [3]. Esta clase de teorías gauge no abelianas reciben el nombre de teorías de Yang-Mills, y el ejemplo que acabamos de ver es el del lagrangiano más sencillo que se puede escribir para teorías de este tipo. En la representación fundamental del grupo se cumple que: [4]

$$Tr(T_F^a T_F^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (3.32)$$

Esto nos permite escribir:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (3.33)$$

Para construir una teoría de Yang-Mills que contenga fermiones interaccionando con campos gauge simplemente tenemos que sumar los dos lagrangianos que hemos obtenido, (3.27) y (3.27): [4] [2]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (3.34)$$

El lagrangiano final se parece bastante al de *QED*, al menos en la forma, pero representa una teoría no abeliana que describe la interacción de un fermión  $\psi$  de masa  $m$  en una cierta representación  $R$  de un álgebra de Lie, donde dicha interacción está mediada por el campo gauge,  $A^\mu$ , [6]. Al igual que en el caso abeliano, no es posible construir un lagrangiano invariante bajo este tipo de transformaciones que contenga un término de masa, así que los bosones de estas teorías carecerán de ella [4]. En las secciones venideras veremos que para formular la *QCD* se utiliza un lagrangiano de este tipo.

### 3.3.2 QCD: una teoría de sabores y colores

La cromodinámica cuántica, también conocida como *QCD* (del inglés, *quantum chromodynamics*), es la Teoría Cuántica de Campos que describe la interacción fuerte. Concretamente, es una teoría de Yang-Mills, cuyo lagrangiano tiene la forma que acabamos de ver, (3.34) [2] [3]. En este caso, los fermiones que representan los spinores  $\psi$  son los quarks, y, del mismo modo que la *QED* estaba relacionada con el grupo  $U(1)$ , la cromodinámica cuántica se construye sobre el grupo  $SU(3)$  (no abeliano), que tiene  $3^2 - 1 = 8$  generadores, que reciben el nombre de gluones [6] [2] [3]. Hay seis tipos diferentes de quarks, u (*up*), d (*down*), c (*charm*), s (*strange*), t (*top*) y b (*bottom*), aunque, en lugar de hablar de tipos, en este contexto se habla de sabores y cada uno de ellos tiene una masa diferente y se describe con un lagrangiano del tipo (3.34) [2] [4]. El índice del grupo se denomina índice de color, y, en el caso de los quarks, puede tomar tres valores diferentes, 1, 2 ó 3, conocidos como rojo, verde y azul, respectivamente (si se trabaja en la representación fundamental, 3, del grupo) así que, para definir completamente un quark, tenemos que utilizar dos etiquetas diferentes, una para el sabor, y otra para el color [3] [2] [6]. Si queremos estudiar cuáles son los propagadores de los quarks y de los gluones, así como las diferentes interacciones que pueden darse entre ellos, necesitaremos cuantizar este tipo más complejo de teorías, así que esa será nuestra próxima tarea.

### 3.4 Cuantización de las teorías gauge: el método de Faddeev-Popov

Tras haber introducido en qué consisten las teorías gauge, el siguiente paso será intentar cuantizarlas. Para ello, usaremos el mismo método que empleamos en las Secciones 2.2 y 2.4 con las teorías que involucraban campos escalares y spinoriales, es decir, llevaremos a cabo su cuantización a través de la integral de camino. Por un lado, tenemos la electrodinámica cuántica,  $QED$ , que describe la interacción electromagnética a través de una teoría abeliana (así que es un poco más sencilla), y, por otro, la cromodinámica cuántica,  $QCD$ , que describe la interacción fuerte por medio de una teoría no abeliana (así que es un poco más complicada); sin embargo, ambas se caracterizan por la introducción de unos campos gauge,  $A_\mu$ , que están definidos de forma un tanto ambigua, puesto que están conectados entre sí a través de transformaciones gauge. Esto provoca que, a la hora de cuantizar este tipo de teorías aparezcan infinitos por contar más grados de libertad de los que realmente se tienen, por lo que es necesario seguir un procedimiento especial que recibe el nombre de método de Faddeev-Popov, que, en el caso de  $QCD$ , introducirá nuevos campos que no tienen significado físico, cosa que no ocurre en  $QED$ . Por tanto, primero nos centraremos en analizar más a fondo lo que sucede en el caso de la cromodinámica cuántica, cuyo funcional generador será bastante más complicado (por lo que dará lugar a varios tipos de vértices) y, al final de esta misma sección, comentaremos lo que ocurre en la electrodinámica cuántica, donde el funcional generador será más sencillo.

#### 3.4.1 Cuantización de las teorías de Yang-Mills

En primer lugar, comenzaremos considerando el lagrangiano (3.33) de tipo Yang-Mills que hemos escrito antes, por ser el más sencillo que podemos construir para el caso no abeliano y que nos interesará a la hora de hacer cromodinámica cuántica [4]. Por analogía con los funcionales generadores  $\mathcal{W}[J]$ , (2.20), y  $\mathcal{W}[J, \sigma, \bar{\sigma}]$ , (2.182), podemos escribir: [4]

$$\mathcal{W}[J_a^\mu] \propto \int \mathcal{D}A^\mu \exp\left(i\hbar^{-1} \int_x [\mathcal{L}_{YM}(A_a^\mu) + J_a^\mu A_{\mu}^a]\right) \quad (3.35)$$

El factor  $\int \mathcal{D}A^\mu$  consiste, en realidad, en un producto de integrales de camino (una por cada campo gauge  $A_a^\mu$  que tenemos), pero se denota de la forma que aparece en (3.35) para aligerar la notación: [4]

$$\int \mathcal{D}A^\mu = \prod_a \int \mathcal{D}A_a^\mu \quad (3.36)$$

Debido a que el tipo de teorías con las que estamos trabajando en este momento son un poco más complicadas que las que habíamos utilizado anteriormente, tiene sentido pensar que nos vayamos a encontrar con más dificultades a la hora de cuantizarlas. De hecho, el funcional generador que acabamos de escribir,  $\mathcal{W}[J_a^\mu]$ , es bastante cuestionable, ya que la integral de camino que aparece dentro de él se realiza sobre todas las configuraciones posibles de los campos gauge, incluso sobre aquellas que están conectadas entre sí a través de transformaciones del tipo (3.24) [4] [5]. Por tanto, la integral está 'contando' un número mucho mayor de grados de libertad de los que realmente tenemos como consecuencia de la ambigüedad que hay en la forma de definir los campos  $A_a^\mu$  a causa de las transformaciones gauge, y su contribución va a ser infinita, así que debemos intentar eliminarla de alguna forma si queremos utilizar el funcional (3.35). [4]

Existe una manera más técnica de ver cómo aparece ese infinito dentro de la integral. Para poder verla, primero vamos a necesitar saber que, por motivos puramente geométricos, es posible escribir las componentes transversales y longitudinales de un vector  $p_\mu$  como: [4]

$$P_T^{\mu\nu}(p) = g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2 \quad (3.37) \quad P_L^{\mu\nu}(p) = p^\mu p^\nu / p^2 \quad (3.38)$$

Si consideramos que  $g = 0$ , es decir, que la teoría es libre y no se permiten interacciones entre los campos, el último término de la expresión de  $F_{\mu\nu}$ , (3.30), desaparece, de tal forma que, si nos llevamos el lagrangiano  $\mathcal{L}_{YM}$  al espacio de momentos haciendo la transformada de Fourier de los campos gauge tendremos que: [4]

$$S = \int_x \mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2} \int_p \tilde{A}_a^\mu(p) (-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \tilde{A}_a^\nu(-p) \quad (3.39)$$

Escribiendo el resultado en función de las componentes  $P_T^{\mu\nu}$  y  $P_L^{\mu\nu}$ , queda: [4]

$$S = \int_x \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \int_p \tilde{A}_a^\mu(p) P_{\mu\nu}^T(p) \tilde{A}_a^\nu(-p) \quad (3.40)$$

Definiendo las componentes transversales y longitudinales de los campos gauge como  $\tilde{A}_{a\mu}^T(p) \equiv P_{\mu\nu}^T(p) \tilde{A}_a^\nu(p)$  y  $\tilde{A}_{a\mu}^L(p) \equiv P_{\mu\nu}^L(p) \tilde{A}_a^\nu(p)$  [4], respectivamente, vemos que, claramente, la acción que habíamos escrito únicamente depende de las componentes transversales del campo, no de las longitudinales, así que cuando hagamos la integral de camino, como esta integra sobre todas las componentes de  $A_\mu$ , aparecerán sí o sí contribuciones infinitas a causa de la no dependencia de la acción con las  $\tilde{A}_{a\mu}^L(p)$ . Con el objetivo de ayudarnos posteriormente a resolver este problema, vamos a considerar, antes de nada, una situación similar pero que involucra integrales 'normales', en lugar de integrales de camino. Comenzaremos pensando en un conjunto de  $m + n$  variables reales,  $x_i$ , sobre las que queremos integrar, y en una función  $S$  que depende únicamente de las últimas  $n$  variables pero no de las  $m$  primeras. Para hacer la conexión con lo que teníamos antes, podríamos decir que las variables  $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$  juegan el papel de las componentes transversales (que eran las que sí aparecían explícitamente en la acción), mientras que las restantes,  $x_1, \dots, x_m$ , modelizan las longitudinales (que eran las que no aparecían), y, por supuesto, la función  $S$  tendría el rol de la acción. Así, escribimos el siguiente conjunto de integrales: [4] [5]

$$W = \int dx_1 \dots \int dx_{m+n} e^{iS} \quad (3.41)$$

La expresión anterior sería como 'el análogo' del funcional generador (3.35), donde, de forma similar, como la función  $S$  no depende de todas las variables sobre las que se está integrando, aparecerán infinitos. Para librarnos de ellos, eliminamos las integrales sobre las variables que no aparecen en  $S$ : [4]

$$\tilde{W} = \int dx_{m+1} \dots \int dx_{m+n} e^{iS} \quad (3.42)$$

Si utilizamos deltas de Dirac de la forma adecuada, podemos convertir la expresión anterior en una integral que sí recorra todas las variables  $x_1, \dots, x_{m+n}$ . Definimos varias superficies  $F_i$  de la forma: [4]

$$F_i(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = 0 \quad (3.43)$$

Esto nos permitirá escribir  $\tilde{W}$  como sigue: [4]

$$\tilde{W} = \int dx_{m+1}, \dots \int dx_{m+n} \int dF_1 \dots \int dF_m e^{iS} \prod_{i=1}^m \delta(F_i) \quad (3.44)$$

La delta de Dirac hará que, por definición, las contribuciones del tipo  $\int dF_i \delta(F_i)$  sean iguales a la unidad, así que (3.44) es equivalente a (3.42), puesto que al final únicamente sobreviven las integrales sobre las

variables que queremos. Haciendo el cambio de variable de  $F_i$  a  $x_i$ , obtenemos que: [4]

$$\tilde{W} = \int dx_1 \dots \int dx_{m+n} e^{iS} \det \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right) \prod_{i=1}^m \delta(F_i) \quad (3.45)$$

El determinante no es más que el jacobiano de la transformación, y las deltas nos dicen que únicamente podemos evaluarlo en la superficie definida por (3.43) para que sean distintas de cero [4]. El procedimiento que vamos a utilizar para cuantizar los campos de nuestro lagrangiano de Yang-Mills va a seguir ideas muy similares a las que acabamos de tratar, y recibe el nombre de método de Faddeev-Popov. [4] [5]

Para que sea más sencillo, vamos a trabajar con el caso en el que no tenemos fuentes, es decir, en el que  $J_a^\mu$ . El método que vamos a utilizar fue desarrollado por Faddeev y Popov, y se basa en utilizar un procedimiento que sigue ideas parecidas a las que acabamos de ver para intentar separar la contribución infinita de la integral [5]. Como las fuentes son nulas, la acción adopta una expresión muy simple:

$$S[A_{a\mu}] = \int_x \mathcal{L}_{YM}(A_{a\mu}) \quad (3.46)$$

Como el lagrangiano de Yang-Mills que definimos en (3.33) es invariante gauge (ya que lo hemos construido así), podemos expresar esa invariancia matemáticamente de la siguiente forma: [4] [5]

$$S[A_{a\mu}^U] = S[A_{a\mu}] \quad (3.47)$$

En la expresión anterior,  $A_{a\mu}$  son los campos gauge sin transformar, y  $A_{a\mu}^U$  son los campos gauge que se obtienen después de hacer una transformación gauge del tipo (3.24). Nuestro objetivo es conseguir que la integral de camino  $\int \mathcal{D}A^\mu$  cuente cada configuración solamente una vez [5]. Para ello, aislaremos del resto del funcional la parte que nos interesa, e intentaremos extraer una integral sobre las transformaciones gauge, que denotaremos por  $\int \mathcal{D}U$  y que representará la suma a todos los elementos del grupo, es decir, a todas las transformaciones  $U(x)$  del tipo que aparecía en (3.18) [4] [5]. En caso de que la integral se limite a una región infinitesimal (como será nuestro caso), podemos escribir la integral como: [4]

$$\mathcal{D}U = \prod_a \mathcal{D}\alpha_a \quad (3.48)$$

Consideramos ahora tres transformaciones gauge,  $U$ ,  $U'$  y  $U''$ , de la forma:

$$U(x) = e^{-ig\alpha \cdot T} \quad U'(x) = e^{-ig\alpha' \cdot T} \quad U''(x) = e^{-ig\alpha'' \cdot T} \quad (3.49)$$

Las transformaciones anteriores están relacionadas entre sí de tal manera que  $U'' = UU'$ . Al estar trabajando en estas regiones infinitesimales se cumple que: [4] [5]

$$\det \left( \frac{\partial \alpha''_a}{\partial \alpha_b} \right) = 1 + \mathcal{O}(\alpha'^2) \quad (3.50)$$

Si nos quedamos a primer orden, el jacobiano de la transformación entre los dos parámetros  $\alpha''$  y  $\alpha$  es, simplemente, 1, así que esto implica directamente que ambas son equivalentes, y se cumple que: [4]

$$\int \mathcal{D}U'' f[U''] = \int \mathcal{D}U f[U] \quad (3.51)$$

Es decir, que  $\int \mathcal{D}U \simeq \int \mathcal{D}U''$ . En la expresión anterior,  $f[U]$  es un funcional genérico de la transformación  $U(x)$ , por tanto, teniendo en cuenta (3.50), también podemos escribir que: [4] [5]

$$\int \mathcal{D}U f[U] = \int \mathcal{D}U f[UU'] \quad (3.52)$$

Al final del día, lo que queremos hacer es escribir una integral de camino que no se haga sobre todos los campos gauge que estén conectados por las transformaciones, sino que se defina sobre un gauge concreto [4] [5], que podemos fijar a nuestro gusto como nos sea más conveniente. El lagrangiano es invariante a lo largo del número infinito de direcciones espaciales involucradas en las transformaciones gauge, que se hacen sobre el espacio en el que 'viven' las configuraciones de los campos que están conectadas a través de dichas transformaciones, así que lo que buscamos es extraer la integral que se hace sobre estas direcciones, para restringir el funcional a un espacio mucho más pequeño (infinitesimal) [3]. Para conseguirlo, introduciremos un término adicional que servirá para fijar el gauge (Sección 3.4.2) e impondremos una ligadura de la forma:

$$F_a(A_b^\mu) \equiv \partial_\mu A_a^\mu - f_a(x) = 0 \quad (3.53)$$

A continuación, definimos el siguiente funcional de los campos, que nos será útil más adelante: [4] [5]

$$\Delta[A_{a\mu}] = \int \mathcal{D}U \delta[F_a(A_{b\mu}^U)] \quad \text{con} \quad \delta[F_a] = \prod_a \delta[F_a] \quad (3.54)$$

En él, la integral de camino se realiza sobre todos los elementos del grupo, y el funcional de la delta de Dirac se utiliza para que solamente contribuyan aquellas configuraciones que satisfacen el gauge concreto que hemos escrito en (3.53). El funcional  $\delta[A_{a\mu}]$  que acabamos de introducir también es invariante bajo transformaciones gauge, es decir, se satisface la siguiente relación: [4] [5]

$$\Delta[A_{a\mu}^{U'}] = \Delta[A_{a\mu}] \quad (3.55)$$

El funcional  $\Delta[A_{a\mu}^{U'}]$  se escribe como:

$$\Delta[A_{a\mu}^{U'}] = \int \mathcal{D}U \delta[F_a(A_{b\mu}^{UU'})] \quad (3.56)$$

Sabemos que la inversa de (3.54) tiene que cumplir, por definición, que:

$$\Delta^{-1}[A_{a\mu}] \Delta[A_{a\mu}] = 1 \quad (3.57)$$

Volviendo al funcional generador (3.35) que habíamos escrito al principio de la sección, insertando dentro de él la identidad (3.57) que acabamos de ver, y usando la definición (3.54), se tiene que: [4]

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A^\mu \exp\left(i \int_x \mathcal{L}_{YM}(A_{a\mu})\right) &= \int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A_{a\mu}]} \\ &= \int \mathcal{D}A^\mu \Delta^{-1}[A_{a\mu}] \int \mathcal{D}U \delta[F_a(A_{b\mu}^U)] e^{iS[A_{a\mu}]} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Usando la invariancia de la acción bajo transformaciones gauge podemos escribir: [4]

$$\int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A_{a\mu}]} = \int \mathcal{D}A^\mu \Delta^{-1}[A_{a\mu}] \int \mathcal{D}U \delta[F_a(A_{b\mu}^U)] e^{iS[A_{a\mu}^U]} \quad (3.59)$$

Haciendo una transformación gauge en el integrando para pasar de  $A_\mu^U$  a  $A_\mu$ , utilizando que el funcional  $\Delta$  es invariante bajo este tipo de transformaciones, y teniendo en cuenta que las integrales  $\int \mathcal{D}A_\mu^U$  y  $\int \mathcal{D}A_\mu$  son equivalentes, podemos llegar a una expresión independiente de  $U$  [4] [5]:

$$\int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A_{a\mu}]} = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A^\mu \Delta^{-1}[A_{a\mu}] \delta[F_a(A_{b\mu})] e^{iS[A_{a\mu}]} \quad (3.60)$$

Como el integrando que está dentro de  $\int \mathcal{D}A^\mu$  ya no depende de  $U$ , podemos sacar fuera de ella la integral de camino  $\int \mathcal{D}U$ , que es justamente la que necesitábamos factorizar, e introducirla dentro de la constante de normalización  $\mathcal{N}$  que arrastramos desde el principio: [5]

$$\int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A_{a\mu}]} \propto \int \mathcal{D}A^\mu \Delta^{-1}[A_{a\mu}] \delta[F_a(A_{b\mu})] e^{iS[A_{a\mu}]} \quad (3.61)$$

Para poder evaluar correctamente la integral de camino necesitamos conocer explícitamente la forma del funcional inverso  $\Delta^{-1}$  que introducimos antes. Podemos hacer el cambio de variables de  $\mathcal{D}U$  a  $\prod_a \mathcal{D}F_a$  (por analogía con el que hicimos en el caso ordinario al pasar de  $x_i$  a  $F_i$ ) a través de  $\prod_a \mathcal{D}\alpha_a$ , ya que, como estamos en una región infinitesimal se cumplirá (3.48) [4] [5]. Por tanto, podemos escribir:

$$\int \mathcal{D}U = \int \prod_a \mathcal{D}\alpha_a = \int \prod_a \mathcal{D}F_a \det \left( \frac{\delta\alpha_b(x)}{\delta F_a(x')} \right) \quad (3.62)$$

Sustituyendo esto en el funcional, (3.54), y utilizando las propiedades de la delta de Dirac: [4]

$$\Delta[A_{a\mu}] = \int \prod_a \mathcal{D}F_a \det \left( \frac{\delta\alpha_b(x)}{\delta F_a(x')} \right) \delta[F_a] = \det \left( \frac{\delta\alpha_b(x)}{\delta F_a(x')} \right) \Big|_{F_a=0} \quad (3.63)$$

La inversa será, por tanto:

$$\Delta^{-1}[A_{a\mu}] = \det \left( \frac{\delta F_a(x')}{\delta\alpha_b(x)} \right) \Big|_{F_a=0} \quad (3.64)$$

Sustituyendo en (3.61) obtenemos la expresión final que necesitábamos para nuestro funcional generador, cuya forma recuerda bastante a la que tenía la que obtuvimos en el caso ordinario, (3.45): [4]

$$\int \mathcal{D}A^\mu \exp \left( i \int_x \mathcal{L}_{YM}(A_{a\mu}) \right) = \int \mathcal{D}A^\mu e^{iS[A_{a\mu}]} \propto \int \mathcal{D}A^\mu \det \left( \frac{\delta F_a(x')}{\delta\alpha_b(x)} \right) \delta[F_a] e^{iS[A_{a\mu}]} \quad (3.65)$$

Cabe destacar que hemos abreviado la ligadura como  $F_a(x) = F_a(A_{b\mu}^U(x))$ . Es posible generalizar el resultado que hemos obtenido para describir una situación en la que sí tengamos fuentes: [4]

$$W[J_a^\mu] \propto \int \mathcal{D}A^\mu \det \left( \frac{\delta F_a(x')}{\delta\alpha_b(x)} \right) \delta[F_a] \times \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}_{YM}(A_a^\mu) + J_a^\mu A_{a\mu}) \right] \quad (3.66)$$

### 3.4.2 Los campos fantasma de Faddeev-Popov

Ahora que ya conocemos explícitamente cuál es el funcional generador  $\mathcal{W}[J_a^\mu]$  de las teorías gauge no abelianas, (3.66), podemos utilizarlo para obtener la información relativa a las interacciones entre los campos,

tal y como hicimos en las Secciones 2.2 y 2.4 haciendo teoría de perturbaciones. Para ello, necesitamos escribir primero todos los términos que aparecen en él en forma de exponenciales, tanto el funcional de la delta de Dirac,  $\delta[F_a]$ , como el determinante de la transformación del cambio de variable que hicimos, y que venía de  $\Delta^{-1}$ . Con este fin, vamos a introducir, en primer lugar, el término adicional que mencionamos en la Sección 3.4 y que servirá para fijar el gauge. Recordando la ligadura que habíamos impuesto: [4]

$$\delta[F_a] = \delta[\partial_\mu A_a^\mu - f_a(x)] \quad (3.67)$$

Para deshacernos del funcional de la delta de Dirac,  $\delta[F_a]$ , vamos a multiplicar el funcional generador por un término que tiene la siguiente forma: [4]

$$\int \left( \prod_a \mathcal{D}f_a \right) \exp \left( -\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_a^2(x) \right) \quad (3.68)$$

La primera parte es una constante que se puede absorber dentro de la constante de normalización, mientras que el integrando que aparece en la exponencial no es más que un término de fuente debido a (3.53), así que realmente introducir esa exponencial equivale a multiplicar por la identidad, por lo que podemos hacerlo sin problemas. Cuando incluyamos este término en (3.35),  $\delta[F_a]$  desaparecerá junto con la integral de camino  $\int \mathcal{D}f_a$ , y, además, por las propiedades de la delta de Dirac tendremos que:

$$\int \prod_a \mathcal{D}f_a \exp \left( \frac{-i}{2\xi} \int d^4x f_a^2(x) \right) \delta[F_a] = \exp \left( \frac{-i}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_a^\mu)^2 \right) \quad (3.69)$$

Por tanto, hemos conseguido meter el término que utilizaremos para fijar el gauge dentro de la exponencial, así que lo único que nos queda para poder calcular los vértices es pensar qué podemos hacer con el determinante que tenemos. En el Apéndice A.5 sobre variables de Grassmann aparece una integral de la forma (A.19). Puesto que su resultado es proporcional a un determinante, es probable que pueda sernos útil, así que la generalizamos introduciendo dos conjuntos de campos  $\eta_a$  y  $\eta_a^*$ : [4]

$$\int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \exp \left( i \int_x \int_{x'} \eta_a^*(x') B_{ab}(x', x) \eta_b(x) \right) \propto \det(-B) \quad \text{con} \quad \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \equiv \prod_a \mathcal{D}\eta_a^* \mathcal{D}\eta_a \quad (3.70)$$

Como lo que queremos hacer es quitarnos de en medio el determinante que aparece en (3.66), definimos como  $B_{ab}(x', x)$  justamente la cantidad que está dentro de él, para así poder usar la expresión anterior y relacionarlo de alguna forma con la exponencial: [4]

$$B_{ab}(x', x) = -\frac{\delta F_a(x')}{\delta \alpha_b(x)} \quad (3.71)$$

Por tanto, utilizando (3.70) tendremos que:

$$\det \left( \frac{\delta F_a(x')}{\delta \alpha_b(x)} \right) \propto \int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \exp \left( -i \int_x \int_{x'} \eta_a^*(x') \frac{\delta F_a(x')}{\delta \alpha_b(x)} \eta_b(x) \right) \quad (3.72)$$

Para evaluar la derivada funcional de  $F_a$  con respecto del parámetro  $\alpha_a$  tenemos que tener en cuenta que, en la definición de  $F_a$  aparecían los campos  $A_a^\mu$ , así que primero calculamos la derivada de estos campos con respecto a  $\alpha_a$ , teniendo en cuenta las propiedades de las derivadas funcionales que ya conocemos. Para ello, usamos la transformación infinitesimal de los campos gauge que vimos en (3.24): [4]

$$\frac{\delta A_a^\mu(x')}{\delta \alpha_b(x)} = \delta_{ab} \partial_{x'}^\mu \delta^4(x' - x) + g f_{abc} A_c^\mu(x) \delta^4(x' - x) \quad (3.73)$$

Una vez que la tenemos, la derivada funcional de  $F_a$  es muy sencilla: [4]

$$\frac{\delta F_a(x')}{\delta \alpha_b(x)} = \partial_{\mu x'} \{ [\delta_{ab} \partial_{x'}^\mu + g f_{abc} A_c^\mu(x')] \delta^4(x' - x) \} \quad (3.74)$$

Reemplazando este resultado en (3.72) y usando la regla de Leibniz para integrar por partes queda: [4]

$$\det \left( \frac{\delta F_a(x')}{\delta \alpha_b(x)} \right) \propto \int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \exp \left( i \int d^4x \partial_\mu \eta_a^* (\partial^\mu \eta_a + g f_{abc} \eta_b A_c^\mu) \right) \quad (3.75)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación anterior en (3.66) obtenemos el funcional generador final: [4]

$$W[J_a^\mu] \propto \int \mathcal{D}A^\mu \int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L}_{YM} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu)^2 + \mathcal{L}_{FP} + J_a^\mu A_\mu^a \right) \right] \quad (3.76)$$

En él, el término  $\mathcal{L}_{FP}$  codifica la información relativa a los campos  $\eta_a$  y  $\eta_a^*$ : [4]

$$\mathcal{L}_{FP} = \partial_\mu \eta_a^* (\partial^\mu \eta_a + g f_{abc} \eta_b A_c^\mu) \quad (3.77)$$

Estos nuevos campos que hemos tenido que introducir como variables de Grassmann para conseguir que el funcional generador  $\mathcal{W}[J_a^\mu]$  adoptase la forma que necesitábamos se conocen como campos fantasma de Faddeev-Popov, y reciben este nombre porque no son partículas físicas, sino un simple artificio matemático que tenemos que utilizar para poder llevar a cabo el cálculo de los vértices de la teoría. De hecho, surgen por cuantizar la teoría de la forma en la que lo estamos haciendo, si se utilizasen otros procedimientos diferentes ni siquiera aparecerían, así que definitivamente no pueden ser algo físico. Cabe destacar que, a diferencia del lagrangiano que teníamos cuando estábamos tratando con la teoría libre ( $g = 0$ ) y no teníamos intención de hacer teoría de perturbaciones, el que hemos obtenido tras realizar todos estos cálculos tiene dos términos adicionales, el término de fijación del gauge y el que contiene a los fantasmas de Faddeev-Popov, que se añaden al lagrangiano de Yang-Mills que teníamos inicialmente.

Por otro lado, si queremos utilizar el funcional generador (3.76) para hacer *QCD* necesitamos algo más que campos gauge, así que tenemos que añadir al lagrangiano que acabamos de escribir una parte que codifique las interacciones que vayan a sufrir los fermiones: el lagrangiano de Dirac que vimos en la Sección (3.4) para las teorías no abelianas (donde  $\psi$  englobaba varios spinores) es idóneo para ello:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \quad (3.78)$$

Por último, cabe destacar que, si utilizásemos el método de Faddeev-Popov en el caso de *QED*, donde la teoría que describe a la interacción electromagnética es abeliana, el lagrangiano que contiene a los campos fantasmas,  $\mathcal{L}_{FP}$ , se reduciría simplemente a  $\partial_\mu \eta^* \partial^\mu \eta$ , por lo que los fotones, a diferencia de los gluones, no se acoplarán con estos campos ficticios, así que los fantasmas simplemente contribuirán como una constante multiplicativa que se absorberá con la constante de normalización y podremos olvidarnos de ellos. [4]

### 3.5 Reglas de Feynman para las teorías gauge: QED y QCD

Por último, de forma similar a como hicimos en el Capítulo 2 (donde derivamos las reglas de Feynman para la teoría escalar que tenía un término de interacción del tipo  $\lambda\varphi^4$ ), vamos a intentar obtener aquellas correspondientes a los términos de interacción de las dos teorías gauge que hemos estudiado, es decir, calcularemos los vértices tanto de la electrodinámica cuántica, *QED*, como de la cromodinámica cuántica, *QCD*. Para ello, partiremos de los funcionales generadores que podemos escribir para cada una de las dos teorías utilizando todo lo que hemos aprendido en las secciones anteriores.

Así, el funcional generador de *QED* será

$$W[J^\mu] \propto \int \mathcal{D}A^\mu \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L}_{Dirac} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu \right) \right], \quad (3.79)$$

donde  $\mathcal{L}_{Dirac}$  está definido según (1.53), mientras que el de *QCD* será

$$W[J_a^\mu] \propto \int \mathcal{D}A^\mu \int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{YM} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu)^2 + \mathcal{L}_{FP} + J_a^\mu A_\mu \right) \right], \quad (3.80)$$

donde  $\mathcal{L}_F$ ,  $\mathcal{L}_{YM}$  y  $\mathcal{L}_{FP}$  están definidos según (3.78) (3.33) y (3.77).

Para obtener tanto los propagadores de los bosones como los vértices de las interacciones, utilizaremos directamente el funcional generador de *QCD*, puesto que los términos que aparecen en ambos lagrangianos (excepto el que viene de los campos fantasma, que aparecía como consecuencia de la cuantización de las teorías gauge no abelianas) tienen la misma forma. Como siempre, nos interesa obtener estas reglas en el espacio de momentos, así que, antes de nada, lo primero que hacemos es escribir las transformadas de Fourier de los campos que tenemos, tanto del gauge, como de los fantasmas y de los spinores:

$$A_a^\mu(x) = \int_p e^{-ipx} \tilde{A}_a^\mu(p) \quad \eta(x) = \int_p e^{-ipx} \tilde{\eta}(p) \quad \psi(x) = \int_p e^{-ipx} \tilde{\psi}(p) \quad (3.81)$$

Quedándonos únicamente con los términos del lagrangiano que son cuadráticos en los campos, podemos obtener los propagadores de los campos gauge (gluones y fotones) y de los fantasmas. Por ejemplo, para el caso de los gluones (aunque el cálculo es análogo para el fotón suprimiendo el subíndice  $a$  de  $A_a^\mu$ ) tendremos que, al irnos al espacio de momentos, los términos cuadráticos del lagrangiano toman la forma: [4]

$$\int_x \mathcal{L}_{cuadráticos} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_p \tilde{A}_a^\mu(p) \left[ -p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu - \frac{1}{\xi} p_\mu p_\nu \right] \tilde{A}_a^\nu(-p) + \text{fantasmas} \quad (3.82)$$

Los términos de la expresión anterior que aparecen en medio de los dos campos gauge  $\tilde{A}_a^\mu(p)$  y  $\tilde{A}_a^\nu(-p)$  se corresponden con el propagador inverso. Si lo invertimos, podemos obtener el propagador del gluón (izquierda) y de paso, el del fotón (derecha): [6]

$$\frac{i}{p^2 + i\varepsilon} \left[ (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right] \quad (3.83)$$

$$\frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon} \left[ (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right] \quad (3.84)$$

La única diferencia entre ellos es que en el caso del gluón se añade una  $\delta_{ab}$  que codifica los índices de color [4]. Como siempre, hemos introducido en el denominador un sumando de la forma  $i\varepsilon$  para no tener problemas con los polos. La variable  $\xi$  que aparece en la expresión del propagador sirve para fijar el gauge con el que

queramos trabajar. Las dos elecciones más habituales son  $\xi = 1$  (gauge de Feynman) y  $\xi = 0$  (gauge de Landau), y ambas tienen tanto sus ventajas como sus desventajas, ya que, mientras que con el de Feynman el propagador adopta su forma más simple, con el de Landau se vuelve puramente transverso, y eso puede dar ciertas facilidades a la hora de realizar algunos cálculos [4].

Por otro lado, si consideramos los términos del lagrangiano cuadráticos en la variable  $\eta$  en lugar de en la variable  $A_a^\mu$ , podemos obtener el propagador de los campos fantasma siguiendo un procedimiento similar. En este caso, además, hay que tener en cuenta que, como los fantasmas están representados por campos que son variables de Grassmann, siempre que tengamos un bucle cerrado va a aparecer un signo menos, así que tenemos que tenerlo en cuenta y acordarnos de ello [4].

Para obtener los vértices de las distintas interacciones tenemos que considerar el resto de contribuciones (cúbicas y cuárticas) que había en el lagrangiano, y fijarnos en qué campos están interaccionando en cada uno de ellos [4]. A continuación describimos brevemente el procedimiento seguido para calcularlos:

- Uno de los términos cúbicos es  $gf_{abc}\partial_\mu\eta_a^*A_c^\mu\eta_b$ , así que en él están interaccionando dos fantasmas y un campo gauge, concretamente, un gluón. Si escribimos las transformadas de Fourier de los campos para ir al espacio de momentos tenemos queda: [4]

$$igf_{abc}\int_q\int_r\int_p p^\mu\delta(q+r-p)\tilde{\eta}_a^*(p)\tilde{\eta}_b(q)\tilde{A}_c^\mu(r) \quad (3.85)$$

En la expresión anterior aparece, por un lado, una delta de Dirac, que nos está indicando la conservación del momento, y, por otro, un factor  $igf_{abc}p_\mu$ , que es el que le asignaremos a los vértices cuando dibujemos los diagramas de Feynman correspondientes. El  $p_\mu$  que aparece viene de la actuación de la derivada parcial  $\partial_\mu$  sobre uno de los dos campos fantasma. Es importante notar que, siempre que tengamos términos de este estilo, de derivadas de los campos, se generarán factores así. Además, este vértice no puede darse en QED porque allí los campos fantasma no contribuían a las interacciones.

- Otro de los términos cúbicos es de la forma  $\bar{\psi}\gamma^\mu igT A_\mu\psi$ , así que en él tenemos dos fermiones interaccionando con un bosón. Procediendo del mismo modo, llegamos a: [4]

$$ig(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(T_a)_{ij}\int_q\int_r\int_p p^\mu\delta(q+r-p)\tilde{\psi}(p)\tilde{A}_a^\mu(q)\tilde{\psi}(r) \quad (3.86)$$

En la expresión anterior aparece, como siempre, la conservación del momento, junto con un factor  $ig(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(T_a)_{ij}$  que será el que asignemos al vértice del correspondiente. A partir de (3.86) podemos obtener también el que aparecería en QED (dos fermiones y un fotón), particularizándolo para el caso abeliano, en el que sabemos que los generadores son iguales a uno, y cambiando la constante de acoplamiento  $g$  por la carga  $e$  del electrón, es decir,  $ie(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ .

- También tendremos otro término cúbico de la forma  $gf_{abc}g_{\lambda\nu}\partial_\mu A_a^\lambda A_b^\mu A_c^\nu$ , en el que aparecen tres gluones interaccionando. Este término es exclusivo de QCD puesto que para llegar hasta a él hemos tenido que utilizar la expresión de  $F_{\mu\nu}$  general (3.29) que vimos para grupos no abelianos. Como el grupo de QED,  $U(1)$  era abeliano, sus constantes de estructura  $f_{abc}$  eran nulas, por lo que este término no aparece en su lagrangiano. Yendo al espacio de momentos: [4]

$$-igf_{abc}\int_p\int_q\int_r p^\mu g_{\lambda\nu}\delta(p+q+r)\tilde{A}_a^\lambda(p)\tilde{A}_b^\mu(q)\tilde{A}_c^\nu(r) \quad (3.87)$$

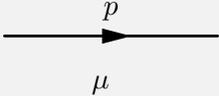
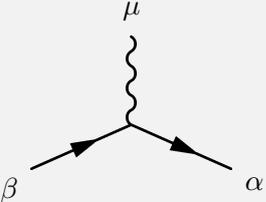
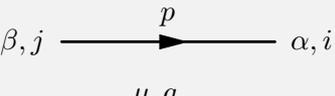
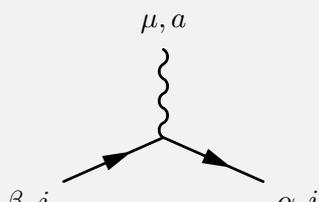
Debido a que la expresión es antisimétrica en los índices  $(p, \lambda), (q, \mu), (r, \nu)$ , podemos antisimetrizar explícitamente el factor  $-igf_{abc}p_\mu g_{\lambda\nu}$ , obteniendo lo siguiente: [4]

$$-\frac{1}{3!}igf_{abc} [g^{\mu\nu}(r - q)^\lambda + g^{\mu\lambda}(q - p)^\nu + g^{\lambda\nu}(p - r)^\mu]$$

- Por último, tenemos un término cuártico en los campos,  $g^2 f_{abc} f_{ade} g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} A_b^\lambda A_c^\mu A_d^\nu A_e^\rho$ , que solamente aparecerá en QCD por el mismo motivo de antes. Puesto que no involucra ninguna derivada de los campos, no merece la pena escribir su expresión en el espacio de momentos, ya que no aparecerá ninguna variable adicional que contribuya al vértice, y sabemos que la delta de Dirac que expresa la conservación del momento va a aparecer sí o sí. Lo que sí es interesante es notar que, en esta ocasión, el término va a ser simétrico en los índices  $(b, \lambda), (c, \mu), (d, \nu), (e, \rho)$ , así que podemos simetrizar el factor explícitamente  $g^2 f_{abc} f_{ade} g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}$  para obtener: [4]

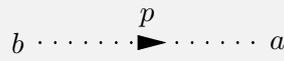
$$-\frac{1}{4!}g^2 [f_{abc}f_{ade}(g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}) + f^{adc}f^{abe}(g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{ace}(g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho})]$$

Además, los propagadores de los fermiones (tanto de los electrones como de los quarks) son los mismos que los que derivamos en la Sección 2.4.2 cuando trabajamos con teorías que involucraban campos espinoriales, aunque, en el caso de los quarks, tenemos que añadir un factor  $\delta_{ab}$  para indicar los índices de los colores. Para terminar, en los cuadros inferiores aparece un resumen con los diagramas de Feynman de todos los propagadores y los vértices que hemos derivado para QED y QCD [4] [6].

<b>Electrodinámica Cuántica (QED)</b>		
Propagador del fotón		$\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[ (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right]$
Propagador del electrón		$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Vértice electrón-fotón-electrón		$ie(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$
<b>Cromodinámica Cuántica (QCD) [1]</b>		
Propagador del gluón		$i \frac{\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon} \left[ (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right]$
Propagador de un quark		$i \frac{\delta^{ij}(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Vértice gluón-quark-gluón		$ig(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(t^a)_{ij}$

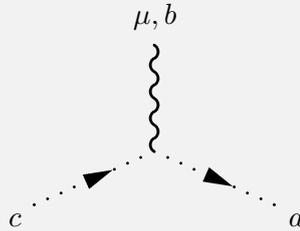
**Cromodinámica Cuántica (QCD) [II]**

Propagador de un fantasma



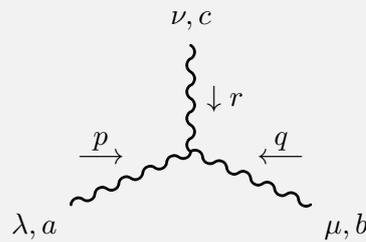
$$\frac{-i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon}$$

Vértice fantasma-gluón-fantasma



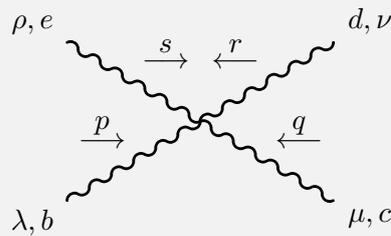
$$-gf^{abc}p^\mu$$

Vértice de 3 gluones



$$gf^{abc} [g^{\mu\nu}(r-q)^\lambda + g^{\mu\lambda}(q-p)^\nu + g^{\lambda\nu}(p-r)^\mu]$$

Vértice de 4 gluones



$$-ig^2 [f_{abc}f_{ade}(g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}) + f_{adc}f_{abe}(g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}) + f_{ade}f_{ace}(g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho})]$$

## Ruptura espontánea de la simetría

Para finalizar, vamos a realizar una pequeña introducción sobre el fenómeno de la ruptura espontánea de la simetría, cuyas aplicaciones en física de partículas son muy interesantes. Antes de nada, estudiaremos el efecto que tiene en un par de casos sencillos, en los que trataremos dos tipos de simetrías diferentes, una discreta y otra continua, y, a continuación, veremos brevemente en qué consiste el mecanismo de Higgs, un procedimiento que se utiliza para dotar de masa a los bosones de una teoría gauge sin romper su invariancia.

### 4.1 Introducción: el problema de la interacción débil

Una de las conclusiones a las que llegamos en el Capítulo 3 cuando estudiamos la electrodinámica cuántica y la cromodinámica cuántica era que, si queríamos imponer que estas teorías fuesen invariantes bajo transformaciones locales del tipo (3.9), los bosones asociados con los campos  $A_\mu^a$  no podían tener masa. En el caso de *QED*, este hecho está directamente relacionado con el alcance (o rango) infinito que observamos en la interacción electromagnética, cuyo bosón, el fotón, carece de masa. Sin embargo, en el caso de la interacción débil (que todavía no habíamos mencionado), las cosas empiezan a complicarse, ya que sabemos, debido a resultados experimentales, que su alcance es extremadamente limitado, lo que nos indica, por tanto, que sus bosones deberían ser masivos, lo cual entra en un conflicto directo con la imposición de la invariancia gauge, así que tenemos que intentar encontrar la forma de reconciliar estas dos características aparentemente opuestas. En un primer acercamiento al problema podríamos plantearnos introducir directamente en el lagrangiano de la teoría los términos de masa de la forma  $\sim m_A^2 A_\mu A^\mu$  que necesitásemos para disminuir el rango de la interacción, pero hacer esto no es nada recomendable porque da lugar a una teoría que no es invariante bajo transformaciones gauge. Parece conveniente, por tanto, intentar encontrar una forma alternativa de dotar de masa a los bosones, y ahí es donde entra en juego la ruptura espontánea de la simetría, que introduciremos a continuación, y que, como veremos, nos proporcionará una manera de generar los bosones (con masa) de los que precisamos [4] [2].

Este método está basado en el comportamiento que presentan algunos sistemas con un número muy elevado de grados de libertad, en los que el hamiltoniano que los describe es invariante bajo una cierta transformación (es decir, posee una simetría, ya sea global o local) y en los que, además, en lugar de haber un único estado fundamental, existe una 'familia' de varios [2]. Esto permite que, en un momento dado, el sistema elija uno de ellos como el definitivo, y, cuando esto ocurre, se habla de que su simetría se ha roto espontáneamente a causa de dicha elección [4] [2]. Es importante recordar que, como estamos trabajando con una Teoría Cuántica de Campos, no tiene sentido hablar de estados fundamentales, sino de estados del vacío. Antes de ver cómo podemos extrapolar todas estas ideas al caso de una teoría gauge, vamos a trabajar primero con un par de casos más sencillos que nos permitirán familiarizarnos con su funcionamiento.

## 4.2 Ruptura espontánea la simetría

### 4.2.1 Simetría discreta

Para poder observar la ruptura espontánea de una simetría (discreta) necesitamos tanto un lagrangiano que sea invariante bajo alguna transformación, como un campo distinto de cero que nos sirva para describir el vacío. Podemos preguntarnos, en primer lugar, de, entre todos los campos con los que hemos trabajado, qué tipo sería más conveniente utilizar para este propósito. Sabemos por las observaciones experimentales que el vacío es invariante bajo rotaciones, así que no podemos emplear ni spinores ni vectores, ya que entonces dicho vacío tendría asociado un cierto valor del momento angular y esa invariancia no se observaría. Por tanto, parece claro que tenemos que utilizar un campo escalar, cuyo valor esperado en el vacío tiene que ser distinto de cero, y que, como veremos en un momento, estará relacionado con el campo clásico  $\varphi_c(x)$  que introdujimos en la Sección 2.2.2 [4]. Recordando que la definición de dicho campo venía dada por (2.68), y usando las ecuaciones (2.5) y (2.46) puede verse que, en ausencia de fuentes, se cumple:

$$\varphi_c(x) = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle \quad (4.1)$$

Es decir, el campo clásico no es más que el valor esperado del operador de un campo escalar en el vacío. Además, la acción efectiva que escribimos en (2.69) puede expandirse de la siguiente forma: [4]

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x \left( -V(\varphi_c) + \frac{A(\varphi_c)}{2} \partial_\mu \varphi_c \partial^\mu \varphi_c + \dots \right) \quad (4.2)$$

Donde el coeficiente  $V(\varphi_c)$  recibe el nombre de potencial efectivo, y es una función del campo clásico  $\varphi_c$  que acabamos de mencionar. Si dicho campo es constante,  $\varphi_c(x) = \varphi_c$ , usando (2.70) se tiene que: [4]

$$\frac{dV}{d\varphi_c} = J \quad (4.3)$$

Como, en nuestro caso, queremos que la fuente sea nula para que se cumpla la relación (4.1) que hemos escrito antes, la expresión anterior se reduce simplemente a: [4]

$$\frac{dV}{d\varphi_c} = 0 \quad (4.4)$$

Esta ecuación nos permite, por tanto, obtener el valor esperado del campo en el vacío,  $\varphi_c$ , que será un punto estacionario del potencial efectivo, siempre y cuando conozcamos cuál es su forma. Si no tenemos fuentes (como es nuestro caso) y, además, ignoramos las correcciones cuánticas, vemos que la ecuación (2.77) que satisfacía  $\varphi_c(x)$  se reduce a (1.50), que no es más que la ecuación clásica de un campo escalar, así que esto nos permite tomar el potencial efectivo directamente como el  $V(\varphi)$  que aparece en el lagrangiano [4].

Tras haber visto cómo obtener el valor esperado del campo, ya estamos en condiciones de estudiar cómo tiene lugar la ruptura espontánea de la simetría. Para ello, comenzaremos con un caso muy sencillo, en el que nuestro sistema estará descrito por el siguiente lagrangiano [9]:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4; \quad \text{con } \mu^2 > 0 \quad (4.5)$$

Cabe destacar que, a diferencia de lo usual, el signo del término que va con  $\sim \varphi^2$  es positivo, no negativo,

y, por tanto, ya no es un término de masa<sup>1</sup>. Además, el lagrangiano tiene una simetría (tal y como necesitábamos) discreta, puesto que es invariante bajo el cambio de paridad  $\varphi \rightarrow -\varphi$  [9].

El potencial que tendremos que minimizar para obtener el valor esperado del campo será: [9]

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \quad (4.6)$$

Utilizando (4.4) obtenemos fácilmente los mínimos<sup>2</sup> del potencial: [9]

$$\varphi_c = \pm v, \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\mu^2/\lambda} \quad (4.7)$$

Vemos, por tanto, que tenemos dos valores esperados del vacío diferentes, pero cuyos estados son físicamente equivalentes y están degenerados, puesto que nos dan la misma energía. El sistema puede elegir estar en cualquiera de los dos, por ejemplo, en  $\varphi_c = v$ . Si esto ocurre, podemos describir su comportamiento haciendo un desarrollo en torno a ese mínimo, considerando que el campo está oscilando alrededor del punto de equilibrio [4] [2]. Así, escribimos el campo como: [9]

$$\varphi(x) = v + \eta(x) \quad (4.8)$$

Donde el campo  $\eta(x)$  que hemos introducido codifica las fluctuaciones cuánticas alrededor del punto de equilibrio. Utilizando (4.7) y (4.8) puede verse que el valor esperado de este nuevo campo es nulo [4]. Si ahora escribimos el lagrangiano en términos de  $\eta(x)$  se tiene que: [9]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta^2) - \mu^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \text{constantes} \quad (4.9)$$

Observando el resultado, lo que más llama la atención es que ha aparecido un término cúbico en el campo,  $\sim \eta^3$ , que hace que la simetría que tenía el lagrangiano original se haya 'roto', ya que este nuevo lagrangiano no es invariante bajo  $\eta \rightarrow -\eta$ . Por tanto, podemos decir que el lagrangiano original, (4.5), presenta una simetría que está escondida en el lagrangiano (4.9). Además, ha aparecido un término de masa,  $-\mu^2\eta^2$ , que tiene el signo adecuado, así que este nuevo campo representa una partícula cuya masa es  $m_\eta = \sqrt{2\mu^2}$ . A esta forma de hacer que aparezcan o se generen términos de masa es a lo que se conoce como ruptura espontánea de la simetría [9] [4].

## 4.2.2 Simetría continua: el bosón de Goldstone

Tras habernos familiarizado con el caso más simple, pasaremos a estudiar una situación un poco más complicada, donde, en lugar de una simetría discreta, tengamos una continua, con el objetivo de ir acercándonos poco a poco a un escenario más parecido al que tendremos cuando tengamos que trabajar con las transformaciones gauge locales que realmente nos interesan. Así, escribimos el siguiente lagrangiano a partir de un campo escalar  $\varphi$  complejo: [6] [2]

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi^*) = (\partial_\mu\varphi)^*(\partial^\mu\varphi) + \mu^2\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2; \quad \text{con} \quad \mu^2 > 0 \quad (4.10)$$

<sup>1</sup>No lo es puesto que la masa  $\sqrt{-\mu^2}$  sería imaginaria, lo cual no tiene sentido.

<sup>2</sup>Si el término que va con  $\varphi^2$  en el lagrangiano fuese de la forma  $-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2$  (con  $\mu^2 > 0$ ) el mínimo del potencial estaría en  $\varphi_c = 0$ .

Que es invariante bajo transformaciones de fase del tipo: [4]

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x) \quad (4.11)$$

$$\varphi^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi^*(x) \quad (4.12)$$

Además, igual que sucedía con el lagrangiano que habíamos escrito en la Sección 4.2.1, el término cuadrático en los campos, que en esta ocasión es  $\mu^2 \varphi^* \varphi$ , también va acompañado del signo opuesto al que debería llevar para ser un término de masa. Como el campo escalar con el que estamos trabajando ahora es un campo complejo, podemos escribirlo de la forma  $z = a + ib$ , es decir: [9] [4]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)e^{i\delta} \quad (4.13)$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)e^{-i\delta} \quad (4.14)$$

Donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son dos campos reales,  $1/\sqrt{2}$  es un factor de normalización y  $e^{i\delta}$  es una fase arbitraria. Sustituyendo las dos expresiones anteriores en (4.10) obtenemos el lagrangiano en función de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ : [9]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)(\partial^\mu \varphi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)(\partial^\mu \varphi_2) + \frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \quad (4.15)$$

Igual que antes, podemos asociar el potencial efectivo con la parte del potencial  $V(\varphi)$  que aparece en (4.15). Puesto que los dos primeros términos no son más que las partes cinéticas de los campos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , respectivamente, el potencial que estamos buscando y que nos interesa minimizar será: [9]

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \quad (4.16)$$

Esta vez, los mínimos se encontrarán en: [9]

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2 \quad \text{con} \quad v^2 = \mu^2/\lambda \quad (4.17)$$

A diferencia de lo que sucedía en el caso anterior, donde simplemente teníamos dos valores discretos para los mínimos, y, por tanto, dos estados del vacío posibles, ahora tenemos todo un continuo de ellos, situados sobre un círculo de radio  $v$ . Ha aparecido, pues, toda una familia de estados, así que, cuando el sistema quiera irse al vacío, podrá elegir cualquiera de estos puntos para ello, ya que son degenerados y el resultado no debería depender de la decisión que tome dicho sistema; cualquiera de ellos romperá espontáneamente la simetría gauge [4] [2]. Al igual que en la Sección 4.2.1, vamos a escribir el campo en función de las fluctuaciones que haya en torno a uno de los mínimos. Por simplicidad, elegiremos un punto en el que alguno de los dos campos reales se anule, por ejemplo,  $(\varphi_1, \varphi_2) = (v, 0)$ , de forma que: [9]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\xi(x)) \quad (4.18)$$

Donde el campo  $\eta(x)$  codifica las fluctuaciones cuánticas en el vacío a lo largo de la dirección longitudinal, mientras que  $\xi(x)$  codifica las de la dirección transversal, además, es posible comprobar que el valor esperado de ambos es nulo [4]. Utilizando (4.18) podemos escribir el lagrangiano (4.15) en función de estos dos nuevos campos  $\eta(x)$  y  $\xi(x)$ , de forma que: [9]

$$\mathcal{L}(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 + \text{términos con } \sim \eta^3 \text{ y } \sim \eta^4 + \text{constantes} \quad (4.19)$$

Como antes, aparece un término de masa del tipo  $-\mu^2\eta^2$ , que representará una partícula de masa  $m_\eta = \sqrt{2\mu^2}$ . Si nos fijamos en los términos que describen el comportamiento del campo  $\xi(x)$ , vemos que el lagrangiano solamente contiene su parte cinética, no hay ni rastro de ningún término de masa para  $\xi(x)$ . Por tanto, este nuevo campo representará una nueva partícula, que, a diferencia de  $\eta(x)$ , no tendrá masa, y que recibe el nombre de bosón de Goldstone. Por tanto, en este modelo, además de producirse la ruptura espontánea de la simetría del tipo (4.13) y (4.14), se ha generado un bosón sin masa de spin 0 [2] [9] [4].

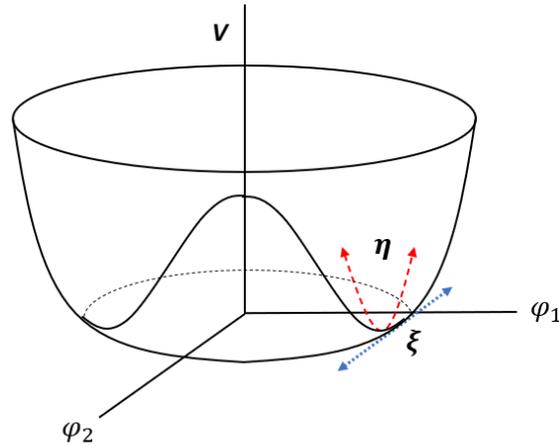


Figura 4.1: Potencial tipo 'sombbrero mejicano'.

En la figura aparece dibujado el potencial (4.16). Fijándonos en la forma que tiene, podemos entender cualitativamente por qué los campos  $\eta(x)$  y  $\xi(x)$  dan lugar a una partícula masiva y al bosón de Goldstone, respectivamente. Como el campo  $\xi(x)$  es una fluctuación en la dirección transversal, un desplazamiento a lo largo de ella no 'cuesta energía', ya que nos estamos moviendo de un mínimo a otro, así que es lógico pensar que podremos asociar este campo con un modo de vibración que no tiene masa, tal y como nos han dicho hace un momento las ecuaciones. De forma similar, las fluctuaciones a lo largo de la dirección longitudinal,  $\eta(x)$ , sí 'cuestan energía', puesto que con un desplazamiento a lo largo de ella, por pequeño que sea, nos encontramos con un aumento del potencial, así que cabe esperar que podamos asociar este campo con un modo de vibración que sí tiene masa, lo cual también concuerda con el resultado que obtuvimos antes [2].

Por último, cabe destacar que es posible generalizar esta situación al caso en el que tengamos un número arbitrario de  $N$  campos escalares, en cuyo caso, al hacer la expansión en torno a alguno de los múltiples mínimos, seguiríamos teniendo un campo  $\eta(x)$  que daría lugar a un término de masa, mientras que, por otro lado, necesitaríamos  $N - 1$  campos  $\xi_i$  (uno por cada nueva dirección espacial en la que puedan ocurrir las fluctuaciones), de tal forma que cada uno de ellos haría aparecer un bosón de Goldstone [2].

### 4.3 Ruptura espontánea de una simetría gauge: el mecanismo de Higgs

Tras haber introducido los bosones de Goldstone y habernos familiarizado con el funcionamiento de la ruptura espontánea de la simetría, ya tenemos todas las bases necesarias para poder abordar la solución del problema que realmente nos interesa: encontrar la manera de poder generar bosones masivos sin romper la invariancia gauge de la teoría. Para ello, consideraremos el lagrangiano de la electrodinámica escalar [3] [4], que describe el comportamiento de una partícula de masa  $m$  y de carga  $q$ , representada por el campo escalar complejo  $\varphi$ ,

que interacciona con un campo electromagnético  $A_\mu$  que carece de masa: [9]

$$\mathcal{L}(\varphi, A_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) + \mu^2\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2; \quad \text{con } \mu^2 > 0 \quad (4.20)$$

Donde la derivada covariante  $D_\mu$  se define como  $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - iqA_\mu\varphi$ , y el tensor del campo electromagnético toma la forma  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Este lagrangiano es invariante bajo las transformaciones de fase locales que introdujimos por primera vez en la Sección 3.2 y que pertenecían al grupo abeliano  $U(1)$ . Es decir, es invariante bajo transformaciones gauge de la forma: [4]

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\varphi(x) \quad (4.21) \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \quad (4.22)$$

Para ver explícitamente cómo tiene lugar la ruptura espontánea de esta simetría, procederemos de forma similar al caso anterior. En primer lugar, escribiremos el campo  $\varphi$  como (4.13), puesto que es complejo, y, dado que el potencial  $V(\varphi) = -\mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2$  que aparece en el lagrangiano de la electrodinámica escalar es el mismo que aparecía en (4.10), volverá a poder representarse como en la Figura 4.1, en forma de sombrero mejicano, así que sabemos que sus mínimos, y, por tanto, sus valores esperados en el vacío, volverán a venir dados por (4.17), es decir, estarán situados sobre un círculo de radio  $v$  en el plano  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Expandimos el campo  $\varphi(x)$  en torno a uno de esos puntos, para observar su comportamiento, eligiendo, por simplicidad, el  $(v, 0)$ , de forma que dicho campo se escribiría como en (4.18). Utilizando la expresión anterior podemos reescribir el lagrangiano en función de los campos  $\eta(x)$  y  $\xi(x)$ : [9]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta, \xi, A_\mu) = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}g^2v^2A_\mu A^\mu - gvA_\mu(\partial^\mu\xi) \\ & + \text{términos con } \sim \eta^3 \text{ y } \sim \eta^4 + \text{constantes} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Al igual que en los dos casos anteriores, tras hacer la expansión ha aparecido un término de masa  $\sim \eta^2$  de la forma  $-\mu^2\eta$ , que nos dice que el campo  $\eta$  representa una partícula de masa  $m_\eta = \sqrt{2\mu^2}$ . Además, el campo  $\xi$  representa, de nuevo, un bosón de Goldstone, que carece de masa. La diferencia principal con respecto a lo que teníamos en los ejemplos más sencillos, es que ahora ha aparecido un nuevo término de masa para el campo  $A_\mu$  (es decir, para el bosón gauge), que tiene la siguiente forma: [3]

$$\text{Como } \frac{1}{2}g^2v^2A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}g^2v^2(A_0A^0 - A_iA^i) \longrightarrow -\frac{1}{2}g^2v^2A_iA^i \quad \text{con } m_A = gv \quad (4.24)$$

Así que el campo gauge ha adquirido masa, tal y como necesitábamos. Antes de seguir, vamos a echar un vistazo al número de grados de libertad que tienen cada uno de los lagrangianos que hemos escrito, que, en principio, deberían ser los mismos. Para ello, tenemos que tener en cuenta que el número de grados de libertad de un campo escalar es igual a 1, el de un campo gauge sin masa es igual a 2, y el de un campo gauge con masa es igual a 3 [1]. De esta forma, tenemos que el primer lagrangiano, (4.20), tiene  $2 + 2 = 4$  grados de libertad, mientras que el segundo, (4.23), tiene  $1 + 1 + 3 = 5$ , así que claramente tiene que haber algo que estemos pasando por alto, puesto que ambos están describiendo el mismo sistema físico [9]. Resulta que la expansión (4.18) puede entenderse también como si fuera una transformación gauge (4.21) de un campo  $(v + \eta)/\sqrt{2}$  con un parámetro  $\xi/(v + \eta)$ , ya que, considerando el caso infinitesimal: [9]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta + i\xi] = \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \left[ 1 + i\frac{\xi}{v + \eta} \right] \simeq \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\xi}{v + \eta}} \quad (4.25)$$

Entonces tenemos que:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\theta} \quad \text{con} \quad \theta = \frac{\xi}{v + \eta} \quad (4.26)$$

De forma similar, también podemos pensar en el campo  $A_\mu$  que aparece en el lagrangiano como en un campo  $B_\mu$  que ha sido transformado a través de (4.22): [9]

$$A_\mu(x) = B_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x) \quad (4.27)$$

Así, los campos  $\varphi$  y  $B_\mu$  tendrían la siguiente forma: [9]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + H(x)] \quad (4.28) \quad B_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x) \quad (4.29)$$

Donde hemos definido  $\eta(x) \equiv H(x)$ . Utilizando las dos expresiones anteriores, podemos escribir el lagrangiano de la electrodinámica escalar en función de los campos  $H$  y  $B_\mu$ : [9]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2(v + H)^2B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}\mu^2(v + H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + H)^4 \quad (4.30)$$

Donde  $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ . Observando el lagrangiano resultante podemos hacer varias apreciaciones: [9] [3] [2]

- El campo  $H$  que hemos definido representa una partícula de masa  $m_H = \sqrt{2\mu^2}$ , y, además, recibe el nombre de campo de Higgs. El bosón  $B_\mu$  ha adquirido una masa de  $m_B = gv$ .
- Este nuevo lagrangiano no depende de  $\xi$ , es decir, el bosón de Goldstone no aparece por ninguna parte. Cuando esto ocurre, suele decirse, en sentido figurado, que el campo  $A_\mu$  se ha 'comido' al bosón de Goldstone, ganando una cierta masa  $m_B$  en el proceso, pasando así a ser  $B_\mu$ .
- El bosón de Goldstone se convierte en el grado de libertad adicional que necesitaba el campo gauge sin masa (que tenía 2 grados de libertad) para tener los 3 grados de libertad que tienen los campos gauge masivos, así que  $B_\mu$  tendrá 3 grados de libertad. Como  $\xi$  ya no aparece en el lagrangiano, y  $H$  es un campo escalar, tendremos  $1 + 3 = 4$  grados de libertad totales, los mismos que en el lagrangiano (4.20).

Este mecanismo a través del cual la ruptura espontánea de la simetría es capaz de hacer que el bosón gauge adquiera masa recibe el nombre de mecanismo de Higgs. Es importante destacar que, a diferencia de lo que vimos en la Sección 4.1 (donde mencionamos que al añadir al lagrangiano un término de masa se rompía la invariancia gauge), la generación del término de masa del bosón a través del mecanismo de Higgs sí conserva la simetría gauge, tal y como queríamos, y, por tanto, puede utilizarse para solucionar el conflicto que presentaba la interacción débil.

### A.1 Integrales de camino gaussianas

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A\right) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x) + \int dx \rho(x) \varphi(x)\right) &= \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A\right) \exp\left(\frac{1}{2} \int dx' \int dx \rho(x') A^{-1}(x', x) \rho(x)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Espacio de Minkowski

Para trabajar en el espacio de Minkowski utilizaremos la métrica:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Denotaremos un cuadrivector genérico como  $x$ , y sus componentes como  $x^\mu$ , donde:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \quad (\text{A.3})$$

Donde  $x_0$  es la componente temporal del vector, y  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  son las componentes espaciales usuales. Utilizando la métrica podemos subir y bajar los índices:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

Y también hacer el producto escalar de dos cuadrivectores:

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (\text{A.5})$$

En el caso de las partículas con masa, se tiene que:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 \quad (\text{A.6})$$

### A.3 Representación integral de la delta de Dirac y transformadas de Fourier

#### Representación integral de la delta de Dirac

$$\delta(x - x') = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} \quad (\text{A.7}) \quad \delta^{(3)}(x - x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (\text{A.8})$$

$$\delta^{(4)}(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - x')} \quad (\text{A.9})$$

#### Transformadas de Fourier

$$[1D] \quad f(x) = \int dk e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (\text{A.10}) \quad \tilde{f}(k) = \int \frac{dx}{2\pi} e^{-ikx} f(x) \quad (\text{A.11})$$

$$[3D] \quad f(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{k}) \quad (\text{A.12}) \quad \tilde{f}(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (\text{A.13})$$

$$[4D] \quad f(x) = \int d^4k e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(k) \quad (\text{A.14}) \quad \tilde{f}(k) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} f(x) \quad (\text{A.15})$$

### A.4 Integrales de Feynman

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} (k^2 + 2p \cdot k - \mu_B^2 + i\varepsilon)^{-n} = i(-1)^n \frac{\Gamma(n - \omega)}{\Gamma(n)} \frac{(\mu_B^2 + p^2)^{\omega - n}}{(4\pi)^\omega} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu (k^2 + 2p \cdot k - \mu_B^2 + i\varepsilon)^{-n} \\ = i(-1)^n \frac{\Gamma(n - \omega - 1)}{\Gamma(n)} \frac{(\mu_B^2 + p^2)^{\omega - n}}{(4\pi)^\omega} [p_\mu p_\nu (n - \omega - 1) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\mu_B^2 + p^2)] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 (k^2 + 2p \cdot k - \mu_B^2 + i\varepsilon)^{-n} \\ = i(-1)^n \frac{\Gamma(n - \omega - 1)}{\Gamma(n)} \frac{(\mu_B^2 + p^2)^{\omega - n}}{(4\pi)^\omega} [(n - 2\omega - 1)p^2 - \omega \mu_B^2] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

### A.5 Integrales de camino con variables de Grassman

$$\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp \left( i \int d^4x' \int d^4x \psi^*(x') B(x', x) \psi(x) \right) = \det(iB) = \exp(\text{Tr} \log iB) \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp \left( i \int d^4x' \int d^4x \psi^*(x') B(x', x) \psi(x) + i \int d^4x [\sigma^*(x) \psi(x) + \psi^*(x) \sigma(x)] \right) = \\
& = \exp(\text{Tr} \log iB) \exp \left( -i \int d^4x' \int d^4x \sigma^*(x') B^{-1}(x', x) \sigma(x) \right) \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

- [1] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2010.
- [2] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005.
- [3] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [4] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*. Institute of Physics, 1996.
- [5] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*. Addison-Wesley, 1990.
- [6] A. Nieto, *Fenomenología de las interacciones fundamentales. Repaso de teoría cuántica de campos*. Universidad de Oviedo. Departamento de Física, 2012.
- [7] M. Veltman, *Diagrammatica*. Cambridge University Press, 1994.
- [8] A. Zee, *Group theory in a nutshell for physicists*. Princeton University Press, 2016.
- [9] A. Nieto, *Fenomenología de las interacciones fundamentales. La Interacción Débil. Unificación Electrodébil*. Universidad de Oviedo. Departamento de Física, 2012.