



Universidad de Oviedo

Métodos kNN de clasificación utilizando relaciones
difusas

Lidia Sainz Ledo

Dirigido por
Susana Irene Díaz Rodríguez y Susana Montes Rodríguez

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Facultad de Ciencias
Grado en Matemáticas

Julio de 2022

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Motivación	3
1.2. Objetivos	4
1.3. Estructura del trabajo	5
2. Funciones de equivalencia restringidas	6
2.1. Conceptos básicos	6
2.2. Equivalencias difusas	11
2.3. REFs	16
2.3.1. Ejemplos de REFs a partir de equivalencias difusas	18
2.3.2. Otros ejemplos notables de REFs	20
2.3.3. Métodos de construcción de REFs	21
3. Métodos de clasificación: <i>Radius k-NN</i>	43
3.1. Clasificación	43

3.1.1. Clasificador más adecuado y análisis estadístico	44
3.2. Clasificador <i>k-NN</i>	46
3.3. Clasificador <i>Radius k-NN</i>	49
3.3.1. Aplicación de los algoritmos <i>k-NN</i> y <i>Radius k-NN</i> con las equi- valencias difusas y REFs	50
3.4. Descripción del algoritmo	55
4. Análisis de resultados	59
4.1. Resultados <i>Radius k-NN</i> con REFs	63
4.2. Resultados <i>Radius k-NN</i> con equivalencias difusas	79
4.3. Análisis y Comparación	84
5. Conclusiones	94
Bibliografía	95

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Hoy en día se dispone de una gran cantidad de datos que se han logrado obtener a partir de diferentes métodos según el ámbito en el que se esté trabajando. Sin embargo, la posesión de dichos datos no aporta ninguna información si estos no se tratan. De tal forma que, para obtener beneficio de este logro, se han de desarrollar métodos que nos permitan elaborar conclusiones a partir de ellos. Así, uno de los objetivos más importantes en la actualidad, es estudiar la manera óptima de tratar esta información ([1, pp. 1-2]).

Gran parte de los datos que resultan de un estudio, siguen un patrón que es precisamente lo que se quiere encontrar. El desarrollo del aprendizaje automático o *machine learning* ha sido clave en este campo, destacando la parte de minería de datos, es decir, “la aplicación de *machine learning* a grandes bases de datos” [1, pp. 1-2]. Una cuestión fundamental en esta línea de trabajo es la toma de decisiones, y es aquí donde interviene el *procedimiento de clasificación* [19, p. 1].

Son numerosas las ocasiones en las que los seres humanos realizan clasificaciones de forma inconsciente en su día a día [15]. Simplemente, al ver a una persona, por sus rasgos se intuyen características como el país de procedencia o la edad. Lo mismo pasa al ver cualquier otra entidad que se pueda dividir en diferentes clases.

En la ciencia, estos procedimientos de clasificación son fundamentales y se aplican en numerosas áreas. Por ejemplo, en el campo de la medicina, el diagnóstico de un enfermo puede realizarse a partir de la experiencia pasada y las características de su enfermedad [1, p. 2]. En astrofísica, a partir de las propiedades de un exoplaneta

se puede intuir si es habitable o no, comparándolas con las del planeta Tierra. Los *procedimientos de clasificación* se emplean también en el reconocimiento de imágenes. El procesamiento de imágenes y su optimización, son realmente importantes en muchos campos, como por ejemplo los citados anteriormente: en medicina se pueden reconocer tumores gracias a este método y en astrofísica podrían observarse galaxias de forma mucho más nítida y evidente. Otro ejemplo muy actual y cercano a la gran mayoría de personas es el patrón de bloqueo del móvil por reconocimiento facial [1, 15].

Se han desarrollado varios métodos para la clasificación, como el *k-NN*, los *árboles de decisión* o las *máquinas de vectores de soporte*. En este trabajo se estudiará el algoritmo k-NN, cuya definición se remonta al año 1951, cuando Evelyn Fix y Joseph Lawson Hodges Jr. explicaron una clasificación de patrones no paramétricos en un artículo para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, que finalmente fue publicado en 1967 por Thomas Cover y Peter Hart [10]. En este artículo se demostraba una tasa de error límite superior en las clasificaciones con k-NN de varias clases. A partir de entonces se siguió desarrollando y mejorando el método. La última fecha a destacar es el año 1985, en el que James Keller explicó una versión *fuzzy*¹ de este algoritmo [12].

En este trabajo se pretende analizar en detalle el método de clasificación *k-NN*, así como una variación del mismo presentada en el artículo *Radius k-NN Classifier Using Aggregation of Fuzzy Equivalences* [14], en el que se medía la proximidad a partir de equivalencias difusas ([13]). Además se propone una nueva modificación basada en las funciones de equivalencia restringidas ([7]), realizando un estudio comparativo del rendimiento de las distintas propuestas. Los objetivos concretos de este trabajo se establecen en detalle en la siguiente sección.

1.2. Objetivos

- Estudiar en detalle el concepto de equivalencia difusa, los distintos métodos de obtención de medidas de este tipo y la agregación de estas funciones.
- Introducir los métodos de clasificación y en particular estudiar el método *Radius kNN Classifier*, tanto desde un punto de vista teórico como aplicado.
- Estudiar las funciones de equivalencia restringidas (REFs) y sus métodos de

¹El término *fuzzy* o difuso se refiere al estudio de información imprecisa. En numerosas ocasiones la clasificación de datos o la definición de conjuntos no vienen dadas por unas fronteras totalmente definidas. En estos casos, lo ideal es hablar del grado de pertenencia al conjunto. En particular, en el estudio que nos ocupa en este trabajo, se analizará el grado de cercanía entre dos objetos [17, p. 35, p.40].

construcción, buscando ejemplos de estas funciones a partir de ellos.

- Modificar el método *Radius kNN Classifier* empleando funciones de equivalencia restringidas.
- Comparar los resultados de la aplicación del algoritmo *Radius kNN Classifier* aplicando funciones de equivalencia restringidas con los obtenidos al aplicar el método basado en equivalencias difusas.

1.3. Estructura del trabajo

En base a los objetivos del trabajo, la estructura de este será la siguiente: el capítulo 2 comienza presentando los conceptos básicos necesarios para la comprensión de la memoria e introduce y estudia las funciones de equivalencia restringidas (REFs), para lo cual se desarrollan previamente las equivalencias difusas. Se muestran ejemplos de ambos tipos de funciones y las propiedades de cada una de ellas, y se presentan varios resultados que permiten su construcción.

Posteriormente, el capítulo 3 se centra en los métodos de clasificación. Es aquí donde se explican los algoritmos *k-NN* y *Radius k-NN*. En este apartado se describen además los pasos fundamentales del programa realizado para este estudio.

Por último, en el capítulo 4 se analizan los resultados, aplicando los distintos métodos sobre diferentes archivos de datos, y comparando el rendimiento del método de clasificación empleando las funciones de equivalencia restringidas frente al obtenido empleando equivalencias difusas.

Capítulo 2

Funciones de equivalencia restringidas

En este capítulo se comenzarán introduciendo algunos conceptos básicos que posteriormente serán utilizados en la generación de equivalencias difusas, cuya definición y análisis es imprescindible en el estudio de este tema. Finalmente se hace un estudio en profundidad de un tipo particular de equivalencias difusas, las funciones de equivalencia restringidas (REFs).

2.1. Conceptos básicos

Se comienza recordando algunas definiciones fundamentales a lo largo de este trabajo, lo cual permite además fijar la notación utilizada en el mismo. En particular se introducirán los conceptos de automorfismo, implicación y función de desviación moderada, al permitir estos tres tipos de funciones generar posteriormente equivalencias difusas y funciones de equivalencia restringidas. Además se introduce el concepto de negación, que será esencial a la hora de añadir la restricción que caracteriza a las REFs frente a las equivalencias difusas.

En primer lugar se recuerda el concepto de automorfismo.

Definición 2.1. [7, p. 2334] Una función $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua, estrictamente creciente, con condiciones frontera $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, se denomina **automorfismo** en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Ejemplos de automorfismos son la propia función identidad, la función potencia x^n

con n natural, etc.

Los automorfismos permitirán, entre otras cosas, generar negaciones difusas. El concepto de negación surge como forma de generalizar la idea de conjunto complementario en el entorno de los conjuntos difusos [13].

Definición 2.2. [7, p. 2334] Sea $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, c es una **negación difusa** si y sólo si:

1. $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$.
2. $c(x) \leq c(y)$, si $x \geq y$ (monotonía).

Además, se dice que una negación difusa es **estricta**, si y sólo si:

3. $c(x)$ es continua,
4. $c(x) < c(y)$, si $x > y$ (monotonía estricta)

Finalmente, una negación estricta difusa se dice **involutiva**, si y sólo si:

5. $c(c(x)) = x$, para todo $x \in [0, 1]$.

Las negaciones difusas estrictas que son involutivas se denominan **negaciones fuertes**.

A continuación se presentan algunos ejemplos de negaciones fuertes.

Ejemplo 2.1. [3, p.15] La función $c^\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\begin{aligned} c^\lambda: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto c^\lambda(x) := \frac{1-x}{1+\lambda x} \end{aligned} \tag{2.1}$$

con $\lambda \in (-1, \infty)$, es una negación fuerte. Para probar esto es necesario comprobar que c^λ verifica las cinco propiedades de la definición 2.2, puesto que es evidente que la función toma valores en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, está bien definida.

1. $c^\lambda(0) = 1$ y $c^\lambda(1) = 0$ por definición.
2. El decrecimiento se deriva del decrecimiento estricto demostrado en 4.
3. $c^\lambda(x)$ es continua por ser función racional de dos polinomios y estar bien definida en $[0, 1]$. Esto último se justifica debido a que el denominador solo se anula si $\lambda = -1/x$, pero como $x \in [0, 1]$, esto supondría que $\lambda \notin (-1, \infty)$.

4. Como $\lambda \in (-1, \infty)$, se tiene que

$$c^{\lambda'}(x) = \frac{-(1+\lambda)}{(1+\lambda x)^2} < 0, \forall x \in [0, 1]$$

con lo que la función es estrictamente decreciente.

5. Finalmente se prueba que es involutiva:

$$c^{\lambda}(c^{\lambda}(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+\lambda x}}{1 + \lambda \frac{1-x}{1+\lambda x}} = \frac{1 + \lambda x - 1 + x}{1 + \lambda x + \lambda - \lambda x} = x$$

En el caso particular que $\lambda = 0$ se obtiene la negación fuerte clásica, es decir, $c(x) = 1 - x, \forall x \in [0, 1]$.

En general se pueden construir negaciones fuertes a partir de automorfismos del intervalo unidad (ver [13]).

Proposición 2.2. [7, p. 2334] Sea φ un automorfismo del intervalo unidad. Entonces $c_{\varphi}(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)), \forall x \in [0, 1]$ es una negación fuerte.

Demostración. Es evidente que $c_{\varphi} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Por otro lado, $c_{\varphi}(0) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(0)) = \varphi^{-1}(1) = 1$ y $c_{\varphi}(1) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(1)) = \varphi^{-1}(0) = 0$. c_{φ} es continua, por ser una composición de aplicaciones continuas. Si $x < y$, entonces $\varphi(x) < \varphi(y)$, con lo que $1 - \varphi(x) > 1 - \varphi(y)$ y como φ^{-1} es estrictamente creciente, entonces $c_{\varphi}(x) > c_{\varphi}(y)$. Por último, $c_{\varphi}(c_{\varphi}(x)) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(c_{\varphi}(x))) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$. \square

A continuación se presenta otro ejemplo de familias de negaciones fuertes que también tiene como caso particular la negación clásica y se obtienen a partir del resultado anterior.

Ejemplo 2.3. [3, p.15] La función $c^{\omega} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\begin{aligned} c^{\omega} : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto c^{\omega}(x) := (1 - x^{\omega})^{\frac{1}{\omega}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

con $\omega > 0$, es una negación fuerte. Esto es inmediato sin más que considerar el automorfismo del intervalo unidad $\varphi(x) = x^{\omega}$ en la proposición anterior.

Otros dos conceptos muy importantes en este trabajo y en particular en la construcción de REFs, son las funciones implicación y las desviaciones moderadas, que se introducen a continuación. Precisamente el estudio de una propiedad de estas funciones esencial en este estudio se precisa del concepto de negación.

Definición 2.3. [7, p. 2335] Una **implicación** es una función $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisface las siguientes propiedades:

I1: Decrecimiento en la primera componente: $x \leq z \Rightarrow I(x, y) \geq I(z, y) \forall y \in [0, 1]$

I2: Crecimiento en la segunda componente: $y \leq t \Rightarrow I(x, y) \leq I(x, t) \forall x \in [0, 1]$

I3: Predominio de la falsedad: $I(0, x) = 1 \forall x \in [0, 1]$

I4: Elemento absorbente por la derecha: $I(x, 1) = 1 \forall x \in [0, 1]$

I5: $I(1, 0) = 0$

Algunas de las propiedades más importantes que pueden cumplir, y que ayudarán a caracterizar algunas condiciones necesarias para ciertos desarrollos posteriores, son las siguientes:

I6: Neutralidad de la verdad: $I(1, x) = x$

I7: Propiedad de intercambio: $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$

I8: Condiciones frontera: $I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$

I9: $c(x) = I(x, 0)$ es una negación fuerte

I10: $I(x, y) \geq y$

I11: Identidad: $I(x, x) = 1$

I12: Contraposición: $I(x, y) = I(c(y), c(x))$, con c una negación fuerte

I13: Continuidad: I es una función continua

I14: $I(x, y) = 0$ si y solo si $x = 1 \wedge y = 0$.

Un ejemplo sencillo de implicación es la función $I(x, y) = \max(1 - x, y)$. Esta función cumple, por ejemplo las propiedades I12 e I14, pero no cumple I8, puesto que $I(0, 2, 0, 4) = 0,8 \neq 1$. Estas tres propiedades serán muy importantes en la generación de funciones de equivalencia restringidas. Las mismas también podrán ser generadas a partir de funciones de desviación moderada.

Definición 2.4. [2, p. 20] Una función $D : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función de desviación moderada** si satisface:

MD1: D es creciente en la segunda componente.

MD2: D es decreciente en la primera componente.

MD3: $D(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

Un ejemplo sencillo de función de desviación moderada es $D(x, y) = y - x$.

El último concepto introductorio que vamos a recordar en esta sección es el de función de agregación, que será básico en el posterior estudio de clasificación, puesto que se agregarán las similaridades en cada punto, para obtener la similaridad global, fusionando la información aplicando este tipo de funciones .

Definición 2.5. ([9, pp. 6-22], [16, pp. 216-218]). Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **función de agregación** A es una función $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ con la siguiente propiedad de monotonía:

$$A(x_1, \dots, x_n) \leq A(y_1, \dots, y_n) \text{ con } x_i, y_i \in [0, 1], x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

y que cumple que $A(0, \dots, 0) = 0$ y $A(1, \dots, 1) = 1$.

Una función de agregación A se dice una **función promedio** si $A(x, \dots, x) = x$, $x \in [0, 1]$.

Se introducen a continuación los ejemplos de funciones de agregación más comunes.

Ejemplo 2.4. ([9, pp.44-56]). Algunos ejemplos de funciones de agregación son los siguientes:

- *Medias aritméticas ponderadas:*

$$A_w(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n w_k x_k,$$

para $w_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n w_k = 1$.

En el caso que todos los pesos sean iguales a $1/n$ se obtiene la clásica media aritmética, que se va a denotar por A_1 .

- *Medias cuasi-aritméticas:*

$$M_\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) \right),$$

donde $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente.

- Un tipo particularmente conocido de media cuasi-aritmética es el de la media de raíz p -ésima (ver [4, p. 437]):

$$A2_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p}$$

donde $p > 0$. Para este tipo de medias se tiene la siguiente relación $A2_p(x_1, \dots, x_n) \leq A2_q(x_1, \dots, x_n)$, si $p < q$. Es evidente además que $A2_1$ coincide con la media aritmética $A1$.

- Otras funciones de agregación importantes (ver [14, p. 1]) son el mínimo y el máximo:

$$\begin{aligned} A3(x_1, \dots, x_n) &= \text{mín}\{x_1, \dots, x_n\} \\ A4(x_1, \dots, x_n) &= \text{máx}\{x_1, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

que además acotan a las funciones promedio.

La comprobación de que son funciones de agregación y además funciones promedio es muy sencilla.

2.2. Equivalencias difusas

Una vez vistos los conceptos básicos necesarios en este trabajo, comienza ahora una sección centrada en las equivalencias difusas. Estas funciones fueron introducidas por Fodor y Roubens ([13]), de la forma que se presenta a continuación.

Definición 2.6. [13, p. 33]. Una **equivalencia difusa** es una función $E : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ tal que para cualesquiera $x, y, u, v \in [0, 1]$ se tiene que:

1. $E(0, 1) = 0$,
2. $E(x, x) = 1$,
3. $E(x, y) = E(y, x)$,
4. $E(x, y) \leq E(u, v)$, si $x \leq u \leq v \leq y$

A continuación se presentarán varios ejemplos de equivalencias difusas, para los que se probará la verificación de las cuatro propiedades de la definición 2.6.

Ejemplo 2.5. [13, p. 25] La función E_{LK} definida para cada $x, y \in [0, 1]$ como:

$$E_{LK}(x, y) = 1 - |x - y|, \quad (2.4)$$

es una equivalencia difusa, denominada de Lukasiewicz, puesto que:

1. $E_{LK}(0, 1) = 1 - |0 - 1| = 0$
2. $E_{LK}(x, x) = 1 - |x - x| = 1$
3. $E_{LK}(x, y) = 1 - |x - y| = 1 - |y - x| = E_{LK}(y, x)$
4. Si $x \leq u \leq v \leq y$ con $x, y, u, v \in [0, 1]$, entonces $|u - v| \leq |x - y|$, con lo que $E_{LK}(x, y) \leq E_{LK}(u, v)$.

Ejemplo 2.6. [14, p. 2] Si se considera, para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$, la función:

$$E_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ \frac{x}{y}, & \text{si } x < y \\ \frac{y}{x}, & \text{si } x > y \end{cases} \quad (2.5)$$

también es una equivalencia difusa, que recibe el nombre de equivalencia difusa de Goguen, puesto que:

1. $E_{GG}(0, 1) = \frac{0}{1} = 0$

2. $E_{GG}(x, x) = 1$

3. Se tiene que $E_{GG}(x, y) = E_{GG}(y, x), \forall x, y \in [0, 1]$, puesto que:

$$E_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ \frac{x}{y}, & \text{si } x < y \\ \frac{y}{x}, & \text{si } x > y \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x \\ \frac{y}{x}, & \text{si } y < x \\ \frac{x}{y}, & \text{si } y > x \end{cases} = E_{GG}(y, x)$$

4. Si $x \leq u \leq v \leq y$ con $x, y, u, v \in [0, 1]$:

- Si $x = y$, entonces $x = u = v = y$, con lo que $E_{GG}(x, y) = 1 = E_{GG}(u, v)$
- Si $x < y$, entonces $E_{GG}(x, y) = \frac{x}{y}$. Por otro lado, como $u \leq v$, entonces se tiene que $E_{GG}(u, v) = 1$ si $u = v$ o $E_{GG}(u, v) = \frac{u}{v}$ si $u < v$. Pero al ser todos números positivos y verificarse que $x \leq u \leq v \leq y$, se tiene que $\frac{x}{y} \leq \frac{u}{v}$ y $\frac{x}{y} \leq 1$, con lo que $E_{GG}(x, y) \leq E_{GG}(u, v)$.

Ejemplo 2.7. [14, p. 2] Se introduce a continuación la función $E_{GD} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$E_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ x, & \text{si } x < y \\ y, & \text{si } x > y \end{cases} \quad (2.6)$$

que recibe el nombre de equivalencia difusa de Gödel, puesto que:

1. $E_{GD}(0, 1) = 0$

2. $E_{GD}(x, x) = 1$

3. Se tiene que $E_{GD}(x, y) = E_{GD}(y, x), \forall x, y \in [0, 1]$, puesto que:

$$E_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ x, & \text{si } x < y \\ y, & \text{si } x > y \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x \\ y, & \text{si } y < x \\ x, & \text{si } y > x \end{cases} = E_{GD}(y, x)$$

4. Si $x \leq u \leq v \leq y$ con $x, y, u, v \in [0, 1]$:

- Si $x = y$, entonces $x = u = v = y$, por tanto, $E_{GD}(x, y) = 1 = E_{GD}(u, v)$.

- Si $x < y$, como $u \leq v$ se tiene que $E_{GD}(u, v) = 1$ si $u = v$ o $E_{GD}(u, v) = u$ si $u < v$. En cualquiera de los dos casos se tiene que $E_{GD}(x, y) = x \leq E_{GD}(u, v)$.

Ejemplo 2.8. [14, p. 2] La equivalencia difusa E_{FD} se define como sigue:

$$E_{FD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ \text{máx}(1 - y, x), & \text{si } x < y, \\ \text{máx}(1 - x, y), & \text{si } x > y \end{cases} \quad (2.7)$$

donde $x, y \in [0, 1]$.

Es sencillo probar que es una equivalencia difusa, puesto que:

1. $E_{FD}(0, 1) = \text{máx}(1 - 1, 0) = 0$
2. $E_{FD}(x, x) = 1$ por definición
3. Es también inmediato ver, por la definición de E_{FD} que es simétrica.
4. Si $x \leq u \leq v \leq y$ con $x, y, u, v \in [0, 1]$, se va a considerar solo el caso $x < y$, puesto que el otro vuelve a ser trivial al implicar la igualdad de las cuatro componentes. Si $x < y$, por un lado se tiene que $E_{FD}(x, y) = \text{máx}(1 - y, x)$. Por otro lado se tiene que:

$$E_{FD}(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } u = v, \\ \text{máx}(1 - v, u), & \text{si } u < v \end{cases}$$

Ahora bien, es evidente que $\text{máx}(1 - y, x) \leq 1$ y además, como $x \leq u$ y $1 - y \leq 1 - v$, se tiene también que $\text{máx}(1 - y, x) \leq \text{máx}(1 - v, u)$, con lo que $E_{FD}(u, v) \geq E_{FD}(x, y)$.

A continuación se introduce un resultado que establece la conservación de equivalencias difusas al aplicar una biyección creciente, lo que permite generar una familia de equivalencias difusas a partir de una dada.

Proposición 2.9. [18, p. 50] Sea $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una biyección creciente y $E : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ una equivalencia difusa. La función E_φ definida como $E_\varphi(x, y) = \varphi(E(x, y))$, $\forall x, y \in [0, 1]$ es una equivalencia difusa.

Demostración. Es evidente que $E_\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Para probar que es una equivalencia difusa, se demuestra que verifica las cuatro condiciones de la definición 2.6:

1. $E_\varphi(0, 1) = \varphi(E(0, 1)) = \varphi(0) = 0$, aplicando que E es una equivalencia difusa y φ es biyectiva en $[0, 1]$.
2. $E_\varphi(x, x) = \varphi(E(x, x)) = \varphi(1) = 1$, aplicando las mismas condiciones del punto anterior.

3. $E_\varphi(x, y) = \varphi(E(x, y)) = \varphi(E(y, x)) = E_\varphi(y, x)$, puesto que E es simétrica.
4. Dados $x, y, u, v \in [0, 1]$ con $x \leq u \leq v \leq y$, se tiene que $E(x, y) \leq E(u, v)$ lo que implica, por el crecimiento de φ , que $E_\varphi(x, y) \leq E_\varphi(u, v)$

□

Aplicando la proposición anterior, se obtienen más ejemplos de equivalencias difusas, a partir de las vistas hasta ahora.

Ejemplo 2.10. En [14, p. 2] se consideraron los automorfismos: $\varphi_0(x) = x^2$, $\varphi_1(x) = x \cdot (2 - x)$, y

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 - 2 \cdot (1 - x)^2 & \text{si } 0,5 \leq x \leq 1 \\ 2 \cdot x^2 & \text{si } 0 \leq x < 0,5 \end{cases}$$

y las equivalencias difusas E_{LK} , E_{GG} , E_{GD} y E_{FD} , con los que, aplicando la proposición 2.9, se obtienen las siguientes equivalencias difusas: $E_{LK}^R(x, y) = \varphi_0(E_{LK}(x, y)) = (E_{LK}(x, y))^2$, $E_{GG}^R(x, y) = \varphi_0(E_{GG}(x, y)) = (E_{GG}(x, y))^2$, $E_{GD}^R(x, y) = \varphi_1(E_{GD}(x, y)) = E_{GD}(x, y) \cdot (2 - E_{GD}(x, y))$ y

$$E_{FD}^R(x, y) = \varphi_2(E_{FD}(x, y)) = \begin{cases} 1 - 2 \cdot (1 - E_{FD}(x, y))^2 & \text{si } E_{FD}(x, y) \geq 0,5 \\ 2 \cdot (E_{FD}(x, y))^2 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

Por otro lado, si se consideran los automorfismos: $\varphi_3(x) = \frac{2x}{1+x}$, $\varphi_4(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ y $\varphi_5(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$, junto con la equivalencia difusa E_{GG} , se obtienen las siguientes equivalencias difusas:

$$E_3(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, y = 0 \\ \frac{2 \min(x, y)}{x + y} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E_4(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, y = 0 \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E_5(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, y = 0 \\ \frac{2 \min(x^2, y^2)}{x^2 + y^2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por último, al aplicar el automorfismo $\varphi_6(x) = \frac{x}{2-x}$ a E_{LK} , se obtiene la equivalencia difusa:

$$E_6(x, y) = \frac{1 - |x - y|}{1 + |x - y|}. \quad (2.8)$$

A continuación se muestran algunas de las relaciones que se pueden establecer entre las equivalencias difusas vistas en los ejemplos anteriores.

Proposición 2.11. [14, p. 2] Dadas las equivalencias difusas anteriores, se tiene que: $E_3 \geq E_{GG}$, $E_4 \geq E_{GG}$, $E_{GG} \geq E_5 \geq E_{GG}^R$ y $E_{LK} \geq E_6 \geq E_{LK}^R$.

Demostración. En primer lugar se comparan todos los automorfismos empleados en las definiciones de las equivalencias anteriores con la identidad (Id):

- $\varphi_3 \geq Id$, puesto que:

$$\frac{\varphi_3(x)}{Id(x)} = \frac{\frac{2x}{1+x}}{x} = \frac{2}{1+x} \geq 1, \forall x \in (0, 1] \quad \text{y} \quad \varphi_3(0) = 0$$

- $\varphi_4 \geq Id$, puesto que:

$$\frac{\varphi_4(x)}{Id(x)} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{x} = \frac{2}{1+x^2} \geq 1, \forall x \in (0, 1] \quad \text{y} \quad \varphi_4(0) = 0$$

- $\varphi_5 \leq Id$, puesto que:

$$\frac{\varphi_5(x)}{Id(x)} = \frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{x} = \frac{2x}{1+x^2} \leq 1, \forall x \in (0, 1] \quad \text{y} \quad \varphi_5(0) = 0$$

- $\varphi_6 \leq Id$, puesto que:

$$\frac{\varphi_6(x)}{Id(x)} = \frac{\frac{x}{2-x}}{x} = \frac{1}{2-x} \leq 1, \forall x \in (0, 1] \quad \text{y} \quad \varphi_6(0) = 0$$

A partir de lo anterior, se obtiene directamente: $E_3 \geq E_{GG}$, $E_4 \geq E_{GG}$, $E_5 \leq E_{GG}$ y $E_6 \leq E_{LK}$, con lo que solo queda probar dos desigualdades: $E_5 \geq E_{GG}^R$ y $E_6 \geq E_{LK}^R$.

- Como $E_5 = \varphi_5 \circ E_{GG}$ y $E_{GG}^R = \varphi_0 \circ E_{GG}$, es suficiente con ver que $\varphi_5 \geq \varphi_0$. Ahora bien, $\varphi_5(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} \geq x^2 = \varphi_0(x)$, puesto que $\frac{2}{1+x^2} \geq 1$ para todo $x \in [0, 1]$.
- Como $E_6 \varphi_6 \circ E_{LK}$ y $E_{LK}^R = \varphi_0 \circ E_{LK}$, es suficiente con ver que $\varphi_6 \geq \varphi_0$. Ahora bien, $\varphi_6(x) = \frac{x}{2-x} \geq x^2 = \varphi_0(x)$, puesto que esto es equivalente a demostrar, para $x \in [0, 1]$, que $x(x-1)^2 \geq 0$.

□

Para ver gráficamente las relaciones probadas en la proposición 2.11, se representan las mismas en dos dimensiones, fijando el valor $x = 0,4$, con lo que se obtienen las representaciones de la figura 2.1.

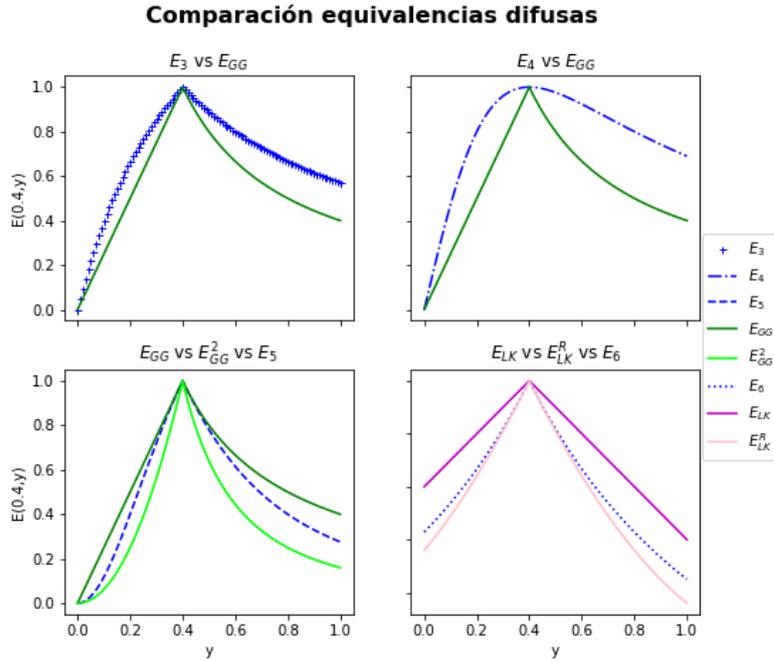


Figura 2.1: Comparación de equivalencias difusas.

Como se acaba de ver, las equivalencias difusas comparan dos puntos. No obstante, también se pueden comparar con ellas n -tuplas de $[0, 1]^n$, sin más que combinar la medida en cada componente mediante las funciones de agregación. Así, dado $n \in \mathbb{N}$ y A una función de agregación cualquiera, para una equivalencia difusa dada E , consideramos una operación binaria

$$A(E)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(E(x_1, y_1), \dots, E(x_n, y_n)). \quad (2.9)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0, 1]^n$ (ver [14, p. 2]).

Este procedimiento será esencial en el algoritmo que se presentará en el capítulo 3, puesto que permitirá cuantificar la cercanía entre los elementos en los problemas de clasificación. En ese capítulo se propone además una modificación del algoritmo conocido, considerando únicamente un tipo particular de equivalencias difusas, que son las que van a estudiarse en la sección siguiente.

2.3. REFs

En este trabajo va a ser fundamental un tipo particular de equivalencias difusas, las llamadas funciones de equivalencia restringidas, que quedan definidas como sigue:

Definición 2.7. [7, p. 2338] Una función $REF : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una **función de equivalencia restringida**, si satisface las siguientes condiciones:

1. $REF(x, y) = 0$ si, y sólo si, se tiene que $x = 1$ e $y = 0$ o se tiene que $x = 0$ e $y = 1$.
2. $REF(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.
3. $REF(x, y) = REF(y, x), \forall x, y \in [0, 1]$.
4. $\forall x, y, z \in [0, 1]$ con $x \leq y \leq z$, se tiene que $REF(x, y) \geq REF(x, z)$ y $REF(y, z) \geq REF(x, z)$.
5. $REF(x, y) = REF(c(x), c(y)), \forall x, y \in [0, 1]$, siendo c una negación fuerte.

La cuarta condición es equivalente a decir que $\forall x, y, z, t \in [0, 1]$, si $x \leq y \leq z \leq t$, entonces $REF(y, z) \geq REF(x, t)$. Esto unido a la propia definición, hace obvio que una función de equivalencia restringida es una equivalencia difusa, puesto que cumple las propiedades de las equivalencias tal cual o en una versión más fuerte, además de la condición 5, tal como establece el siguiente resultado, cuya demostración es trivial.

Teorema 2.12. [7, p. 2338] *Toda función de equivalencia restringida es una equivalencia difusa.*

Sin embargo, el recíproco del teorema anterior no es cierto, como se muestra en el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.13. [7, p. 2338] *La función $E : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida como:*

$$E(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 0) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.10)$$

es una equivalencia difusa, puesto que:

1. $E(0, 1) = 0$, inmediato por la definición de E .
2. $E(x, x) = 1$, también se deriva directamente de la definición de E .
3. *Para ver la simetría:*
 - Si $x = 0$ e $y = 1$, entonces $E(0, 1) = 0 = E(1, 0)$.
 - Si $x = 1$ e $y = 0$, entonces $E(1, 0) = 0 = E(0, 1)$.
 - En otro caso, $E(x, y) = 1 = E(y, x)$.
4. Supóngase $x, y, u, v \in [0, 1]$ con $x \leq u \leq v \leq y$. Si $x = 0$ e $y = 1$, entonces $E(x, y) = 0 \leq E(u, v)$, puesto que E toma valores en el intervalo $[0, 1]$. En otro caso $E(x, y) = 1$, pero como $x \leq y$, entonces $0 < x \leq y$ y, por tanto, $0 < u \leq v$, con lo que $E(u, v) = 1$. Se tiene entonces que $E(x, y) \leq E(u, v)$ siempre.

Sin embargo, E no es una función de equivalencia restringida. Por ejemplo, se tiene que $E(0,1,0,2) = 1$ y es evidente que $0,1 \neq 0,2$, con lo que no verifica la segunda condición para este tipo de funciones.

Este tipo particular de equivalencias difusas mantiene alguna de las propiedades de estas como, por ejemplo, la conservación por automorfismos.

Proposición 2.14. [7, p. 2339] Si REF es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte c y φ un automorfismo del intervalo unidad, entonces $F = \varphi \circ REF$ es una función de equivalencia restringida con respecto a la misma negación fuerte c .

Demostración. Se va a comprobar que F , así definida, verifica las cinco condiciones de la definición 2.7.

1. Se tiene que $F(x, y) = 0$ si, y solo si, $\varphi(REF(x, y)) = \varphi(0)$, puesto que $\varphi(0) = 0$ al ser φ un automorfismo en el intervalo unidad. Además, por la misma razón, es biyectiva, con lo que esto es equivalente a decir que $REF(x, y) = 0$. Puesto que REF es por hipótesis una función de equivalencia restringida, esto es equivalente a decir que $x = 1$ e $y = 0$ o que $x = 0$ e $y = 1$, que era justo lo que se quería demostrar.
2. Aplicando de nuevo que φ es biyectiva y que $\varphi(1) = 1$, se tiene que $F(x, y) = 1$ si, y solo si, $\varphi(REF(x, y)) = \varphi(1)$, lo que es equivalente a que $REF(x, y) = 1$, que a su vez es equivalente a que $x = y$.
3. La simetría de F se deriva de forma inmediata de la simetría de REF .
4. Dados $x, y, u, v \in [0, 1]$ con $x \leq u \leq v \leq y$, entonces $REF(x, y) \leq REF(u, v)$ y como φ es creciente, es inmediato que $F(x, y) \leq F(u, v)$.
5. Fijada la negación fuerte c , REF es una función de equivalencia restringida, con lo que $REF(x, y) = REF(c(x), c(y))$ para todo $x, y \in [0, 1]$, con lo que $F(x, y) = F(c(x), c(y))$.

□

2.3.1. Ejemplos de REFs a partir de equivalencias difusas

En la sección 2.2 se vieron algunos ejemplos de equivalencias difusas que habían sido considerados en la literatura. Se va ahora a analizar cuales son además funciones de equivalencia restringidas. En caso afirmativo, será simplemente necesario probar

tres de las condiciones de la definición 2.7, puesto que la tercera y cuarta son las mismas en ambas definiciones. En todos los casos se considerará la negación fuerte clásica.

- La equivalencia difusa E_{LK} definida como $E_{LK}(x, y) = 1 - |x - y|, \forall x, y \in [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida, puesto que:

1. $E_{LK}(x, y) = 1$ si, y sólo si, $|x - y| = 0$, lo cual es equivalente a $x = y$.
2. $E_{LK}(x, y) = 0$ si, y sólo si, $|x - y| = 1$ y como $x, y \in [0, 1]$, esto es equivalente a $x = 0$ e $y = 1$ o a que $x = 1$ e $y = 0$.
5. Sea $c(x) = 1 - x, \forall x \in [0, 1]$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} E_{LK}(c(x), c(y)) &= E_{LK}(1 - x, 1 - y) = 1 - |(1 - x) - (1 - y)| = \\ &= 1 - |x - y| = E_{LK}(x, y) \end{aligned}$$

- E_{GG} no es función de equivalencia restringida, puesto que $E_{GG}(0, 0, 5) = 0$ y, por tanto, no verifica la primera condición de las REFs.
- E_{GD} tampoco es función de equivalencia restringida, puesto que de nuevo se tiene que $E_{GD}(0, 0, 5) = 0$.
- Sin embargo E_{FD} sí verifica las condiciones más fuertes para ser función de equivalencia restringida, puesto que:

1. $E_{FD}(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x < y$ y $\max(1 - y, x) = 0$ o $x > y$ y $\max(1 - x, y) = 0$. Puesto que x e y son números en el intervalo $[0, 1]$ esto es equivalente a decir que $1 - y = x = 0$ o que $1 - x = y = 0$, es decir, que $x = 0$ e $y = 1$ o $y = 0$ e $x = 1$, que es justo lo que se quería demostrar.
2. Si $x < y$, entonces como $x \geq 0$ e $y \leq 1$, se tiene que $E_{FD}(x, y) = \max(1 - y, x) < 1$. De forma análoga, si $x > y$, se tiene que $E_{FD}(x, y) = \max(1 - x, y) < 1$, con lo que $E_{FD}(x, y) = 1$ si, y sólo si, $x = y$, por definición.
5. Sea $c(x) = 1 - x \forall x \in [0, 1]$ una negación fuerte.

$$\begin{aligned} E_{FD}(1 - x, 1 - y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } 1 - x = 1 - y \\ \max(1 - (1 - y), 1 - x) & \text{si } 1 - x < 1 - y \\ \max(1 - (1 - x), 1 - y) & \text{si } 1 - x > 1 - y \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max(y, 1 - x) & \text{si } x > y \\ \max(x, 1 - y) & \text{si } y > x \end{cases} = E_{FD}(x, y) \end{aligned}$$

- $E_{LK}^R(x, y) = (E_{LK}(x, y))^2$ es una función de equivalencia restringida por la proposición 2.14.

- $E_{GG}^R(0, 0,5) = (E_{GG}(0, 0,5))^2 = 0$, con lo que tampoco es función de equivalencia restringida.
- $E_{GD}^R(0, 0,5) = E_{GD}(0, 0,5) \cdot (2 - E_{GD}(0, 0,5)) = 0$, por lo que tampoco es función de equivalencia restringida.
- E_{FD}^R es función de equivalencia restringida, aplicando de nuevo la proposición 2.14.
- $E_3(0, 0,5) = \frac{2 \min(0,0,5)}{0+0,5} = 0$, por lo que no es función de equivalencia restringida, al no cumplir la primera propiedad de las mismas.
- $E_4(0, 0,5) = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0,5}{0^2+(0,5)^2} = 0$, con lo que tampoco es función de equivalencia restringida.
- Tampoco verifica la primera condición para la equivalencia difusa E_5 , puesto que $E_5(0, 0,5) = \frac{2 \min(0^2, (0,5)^2)}{0^2+(0,5)^2} = 0$.
- Finalmente se va a probar que E_6 sí es función de equivalencia restringida. Puesto que $E_6(x, y) = \frac{1-|x-y|}{1+|x-y|}$, $\forall x, y \in [0, 1]$, se tiene que:
 1. $E_6(x, y) = 0$ si, y sólo si, $E_{LK}(x, y) = 0$ y como E_{LK} es función de equivalencia restringida, se verifica la primera condición.
 2. $E_6(x, y) = 1$ si, y sólo si, $1 - |x - y| = 1 + |x - y|$ lo que es equivalente a $|x - y| = 0$, es decir, a que $x = y$.
 5. Puesto que c es la negación fuerte clásica, se tiene que:

$$E_6(c(x), c(y)) = \frac{1 - |(1-x) - (1-y)|}{1 + |(1-x) - (1-y)|} = \frac{1 - |y-x|}{1 + |y-x|} = E_6(x, y)$$

De todo lo anterior se deduce que de las equivalencias difusas vistas en la sección 2.2, solo son funciones de equivalencia restringidas las siguientes: $E_{LK}(x, y)$, $E_{FD}(x, y)$, $E_{LK}^R(x, y)$, $E_{FD}^R(x, y)$ y $E_6(x, y)$.

Evidentemente, existen en la literatura otros ejemplos de REFs, como se verá en el siguiente apartado.

2.3.2. Otros ejemplos notables de REFs

Antes de comenzar a estudiar los métodos de construcción de REFs, se presentan a continuación otros ejemplos de funciones de equivalencia restringidas, que se pueden encontrar en la literatura.

- En [8] se consideró la siguiente función de equivalencia restringida:

$$REF_{ej1}(x, y) = \begin{cases} 1 - |x - y| & \text{si } |x - y| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(1 - |x - y|) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- En [7] se introdujeron las tres siguientes REFs: $REF_{ej2}(x, y) = (1 - |x^4 - y^4|)^{1/4}$, $REF_{ej3}(x, y) = (1 - |x^{1/4} - y^{1/4}|)^4$ y $REF_{ej5}(x, y) = \min(\min(1 - x + y, 1), \min(1 - y + x, 1))$.
- La función de equivalencia restringida propuesta en [20] fue:

$$REF_{ej4}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{x, y\} = \{0, 1\} \wedge x \neq y \\ 1, & \text{si } x = y \\ x_0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función puede definirse para cualquier $x_0 \notin \{0, 1\}$, aunque en este trabajo se considerará, a modo de ejemplo, el caso $x_0 = 1/2$.

2.3.3. Métodos de construcción de REFs

Sería realmente interesante poder aplicar ciertos métodos directos para la construcción de funciones de equivalencia restringidas. A continuación se presentan los resultados que permiten construir REFs de forma sistemática a partir de automorfismos, funciones de implicación y desviaciones moderadas. Se enmarcarán los ejemplos vistos anteriormente en cada caso, y se definirán nuevas funciones a partir de los teoremas, proposiciones y corolarios expuestos.

A partir de automorfismos

Proposición 2.15. [7, p. 2338] Sean φ_1 y φ_2 dos automorfismos definidos en el intervalo unidad, entonces:

$$REF(x, y) = \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|) \text{ con } c(x) = \varphi_2^{-1}(1 - \varphi_2(x))$$

es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte c .

De aquí se podrían deducir algunos de los ejemplos de funciones de equivalencia restringidas vistos hasta ahora. Así:

- E_{LK} se obtiene considerando $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = x$ en la proposición 2.15, con lo que la negación fuerte es la clásica: $c(x) = 1 - x$.

- REF_{ej2} se puede obtener considerando $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = x^4$ en la proposición 2.15. En este caso la negación fuerte es: $c(x) = (1 - x^4)^{1/4}$.
- A partir de los automorfismos $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = x^{1/4}$, se obtendría que REF_{ej3} es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte: $c(x) = (1 - x^{1/4})^4$.
- Hasta ahora los dos automorfismos han sido iguales, pero evidentemente no siempre es así. Por ejemplo E_6 se obtiene a partir de $\varphi_1(x) = \frac{2x}{1+x}$ y $\varphi_2(x) = x$ y es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte clásica.

Además de obtener por este método funciones ya introducidas en la literatura, también se pueden dar otras nuevas.

Ejemplo 2.16. Sean φ_1 y φ_2 los automorfismos del intervalo unidad definidos como: $\varphi_1(x) = x$ y $\varphi_2(x) = x^n$, con $n > 1, n \in \mathbb{N}$. Aplicando la proposición 2.15 se obtiene:

$$REF_{ej6}(x, y) = 1 - |x^n - y^n| \quad \text{con} \quad c(x) = \sqrt[n]{1 - x^n} \quad (2.11)$$

Esta función es muy similar a la función E_{LK} . La diferencia principal radica en que en esta última se calcula la cercanía entre dos elementos a partir de la distancia euclídea y ahora se utiliza la distancia $|x^n - y^n|$.

El automorfismo φ_2 definido $\forall n \in \mathbb{N}$ será una función con dominio y codominio $[0, 1]$. Debido al intervalo en el que se define la función, las potencias de los elementos siempre le asignarán a estos un valor menor o igual al original. Para estudiar la concavidad de φ_2 , se calcula su segunda derivada: $\varphi_2''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Se tiene que el valor de $\varphi_2''(x) > 0 \forall x \in (0, 1]$, confirmando que la función es convexa en $(0, 1)$. Cuanto mayor sea n , la pendiente máxima de $\varphi_2(x)$ alcanzada en $[0, 1]$ será mayor.

Dividiendo $[0, 1]$ en dos subintervalos, siendo el final del primero y el principio del segundo el punto de pendiente máxima (denotemos k a este punto), se concluye que la pendiente de $\varphi_2(x)$ en $[0, k]$ disminuirá a mayor n , mientras que en $[k, 1]$ aumentará.

Como resultado de las potencias, a los valores $[0, k]$ se les asignará un valor en un intervalo $[0, d]$, mientras que a los valores $(k, 1]$ se les asignará un valor en un intervalo $[d, 1]$, con $d < 0,5 \forall n > 1$ y $d \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Luego, se deduce que $|x^n - y^n| < |x - y|$ si $x, y \in [0, k]$ y que $|x^n - y^n| > |x - y|$ si $x \in [0, 1] \wedge y \in (k, 1]$ o $y \in [0, 1] \wedge x \in (k, 1]$. Se concluye además que, cuanto mayor sea el número natural n , más cercana a 0 será la distancia $|x^n - y^n|$ en el primer caso y más divergerá de $|x - y|$ en el segundo.

Vistos los resultados, se observa que las REFs construidas con estos automorfismos no son muy relevantes. Esto es debido a que en algunos casos en los que dos elementos estén bastante lejanos, se obtendrá una distancia menor que la euclídea, lo que en la práctica no es de gran interés. Sin embargo, si se modifican los automorfismos de tal forma que $\varphi_{2-nuevo}(x) = \varphi_1(x)$ y $\varphi_{1-nuevo}(x) = \varphi_2^{-1}(x)$ las consecuencias son muy diferentes.

Ejemplo 2.17. Sean φ_1 y φ_2 los automorfismos del intervalo unidad: $\varphi_1(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n > 1, n \in \mathbb{N}$ y $\varphi_2(x) = x$. Aplicando la proposición 2.15 se obtiene que $REF_{ej7}(x, y) = (1 - |x - y|)^n$ es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte estándar.

La importancia de la construcción de la REF, al igual que en el ejemplo anterior, radica en la potencia n -ésima. Sin embargo, los resultados son totalmente diferentes al hacer actuar en este caso la potencia sobre el valor resultante de $(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)$.

Mediante este procedimiento, primero se calculará la cercanía entre x e y a partir de la distancia euclídea, y posteriormente se aplicará un automorfismo sobre esta. Lo que se pretende con la definición de $\varphi_1(x)$ de este ejemplo, es asignarle un valor casi nulo a los elementos cuya cercanía sea lo suficientemente baja como para considerar que tienen características semejantes.

Es evidente que esta función también puede obtenerse aplicando la proposición 2.14 a E_{LK} con respecto al automorfismo φ_1^{-1} .

A pesar de conseguir darle especial importancia al hecho de que dos elementos tengan un atributo con valores muy diferentes, también se varía la cercanía entre dos objetos cuya distancia no sea grande, lo que a veces no es ventajoso. Se presenta el siguiente ejemplo como solución a este problema. Con el interés de seguir asignando una cercanía muy próxima a cero a elementos que tengan características lo suficientemente diferentes como para concluir que no pertenecen a la misma clase; pero buscando considerar una cercanía calculada uniformemente en el intervalo $[0,5, 1]$.

Ejemplo 2.18. Sean φ_1 el automorfismo del intervalo unidad:

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} \frac{x}{0,25}, & \text{si } x \in [0, 0,1] \\ \frac{x+1,5}{4}, & \text{si } x \in [0,1, 0,5] \\ x, & \text{si } x \in [0,5, 1] \end{cases} \quad (2.12)$$

y φ_2 la identidad. Aplicando la proposición 2.15 se obtiene que

$$REF_{ej8}(x, y) = \begin{cases} 0,25 \cdot (1 - |x - y|), & \text{si } 1 - |x - y| \in [0, 0,4] \\ 4 \cdot (1 - |x - y|) - 1,5, & \text{si } 1 - |x - y| \in [0,4, 0,5] \\ 1 - |x - y|, & \text{si } 1 - |x - y| \in [0,5, 1] \end{cases}, \quad (2.13)$$

es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte estándar.

Para tener una idea gráfica de dicha función, se ha representado el automorfismo φ_1 aplicado a $1 - |x - y|$ en la figura 2.2.

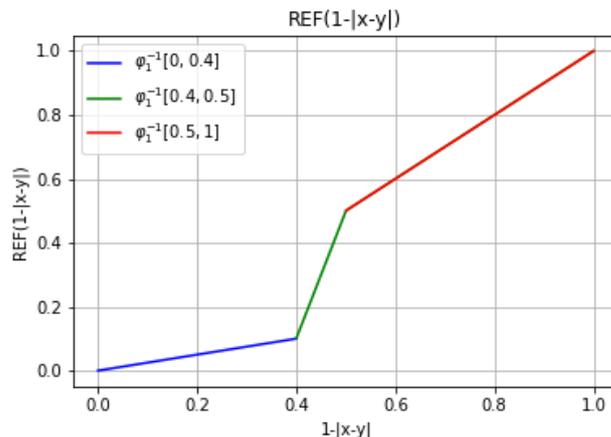


Figura 2.2: Representación $\varphi_1(1 - |x - y|)$.

Si se desea ser más rotundo asignando valores aún más cercanos a 0 en el intervalo $[0, 0,5]$, se puede hacer con un intervalo mayor en el primer trozo de la función representado en la figura 2.2 en azul y aumentando la pendiente de la recta. Se tiene que tener en cuenta en todo caso, que la función definida como φ_1 (equivalentemente φ_1^{-1}) ha de ser un automorfismo. Por otra parte, se destaca de nuevo la importancia para nuestro objetivo de que los valores de cercanía euclídea en el intervalo $[0,5, 1]$ sigan estando uniformemente distribuidos.

Siguiendo este razonamiento, se puede construir una función de equivalencia restringida de la misma forma que la anterior pero presentando una tendencia más suave en el intervalo $[0, 0,5]$; esto se consigue considerando una curva, en lugar de la unión de las dos rectas.

Ejemplo 2.19. Si se considera el automorfismo del intervalo unidad:

$$\varphi(x) := \begin{cases} (x^2 + \frac{1}{2}x)(2x)^{10} & \text{si } x \leq 0,5 \\ x & \text{si } x > 0,5 \end{cases}$$

se puede aplicar la proposición 2.14 a la función de equivalencia restringida E_{LK} y se obtiene la nueva función de equivalencia restringida:

$$REF_{ej11}(x, y) = \begin{cases} (z^2 + \frac{z}{2})(2z)^{10}, & \text{si } z \in [0, 0,5] \\ z, & \text{si } z \in (0,5, 1] \end{cases} \quad (2.14)$$

donde z denota $1 - |x - y|$.

Otro ejemplo de REFs construidas con otros automorfismos es el siguiente:

Ejemplo 2.20. Sea φ_1 el automorfismo del intervalo unidad definido por:

$$\varphi_1(x) = \frac{\lambda x}{(1 + \lambda) - x}$$

con $\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ y φ_2 el automorfismo identidad. Aplicando la proposición 2.15 se obtiene la función de equivalencia restringida:

$$REF_{ej9}(x, y) = \frac{(1 + \lambda)(1 - |x - y|)}{\lambda + (1 - |x - y|)}$$

con respecto a la negación fuerte clásica.

En esta función, la aplicación de φ_1^{-1} a la cercanía entre dos elementos, aumenta su valor, por la forma del automorfismo en cuestión. Así,

$$\frac{d^2 \varphi_1^{-1}}{dx^2}(x) = \frac{-2\lambda(1 + \lambda)(\lambda + x)}{(\lambda + x)^4}$$

con lo que se tiene que $\frac{d^2 \varphi_1^{-1}}{dx^2}(x) < 0$ en $[0, 1]$. Esto quiere decir que la función es cóncava en el intervalo de definición. Además, cuanto menor es λ , la concavidad es más pronunciada, por lo que se asignan valores muy altos de cercanías a objetos que no son tan semejantes. Por otro lado, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_1^{-1}(x) = x$, por lo que con valores de λ grandes la REF se comporta como E_{LK} .

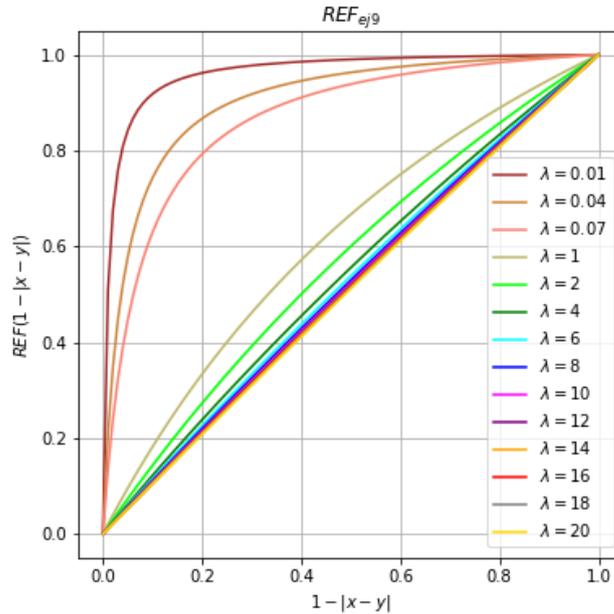


Figura 2.3: Representación de REF_{ej9} dependiendo del valor del parámetro λ .

Para concluir con este apartado, nótese que si se considera una función de equivalencia restringida construida a partir de la proposición 2.15 aplicada a dos automorfismos

cualesquiera φ_1 y φ_2 y a dicha REF se le aplica la proposición 2.14 con el automorfismo φ , se obtiene una nueva REF que viene dada por:

$$F(x, y) = \varphi \circ (\varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)) = \varphi \circ \varphi_1^{-1}(1 - |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)$$

Ahora bien, esta vuelve a ser del mismo tipo que la REF de partida, sin más que considerar el automorfismo $(\varphi \circ \varphi_1^{-1})^{-1}$, puesto que es evidente que la composición de automorfismos y la inversa siguen siendo automorfismos en el intervalo unidad. Es por esto que no nos centraremos en buscar ejemplos con este método.

A partir de funciones de implicación

En este caso se tiene no solo un resultado que permite obtener funciones de equivalencia restringidas, sino que además las caracteriza por medio de un tipo particular de funciones que en ocasiones son un tipo particular de implicaciones.

Teorema 2.21. [7, p. 2339] *Una función REF: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida si y sólo si existe una función $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfaga las condiciones I1, I8, I12 y I14 de la definición 2.3, tal que $REF(x, y) = \min(I(x, y), I(y, x))$.*

Las funciones de equivalencia restringidas construidas a partir de este teorema se denominarán **funciones de equivalencia restringidas asociadas con el operador implicación I** que las genera. Otra forma de caracterizar este tipo de funciones puede verse a continuación.

Corolario 2.22. [7, p. 2341] *Una función REF: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida si y sólo si existe una función $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que cumple I1, I8, I12 y I14, tal que*

$$REF(x, y) = I(\max(x, y), \min(x, y)).$$

Se obtienen a continuación las funciones I que generan algunas de las REFs vistas hasta ahora.

- $REF_{ej5}(x, y) = \min(I_{LK}(x, y), I_{LK}(y, x))$, con $I_{LK}(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$ definida por Lukasiewicz (ver [3, p. 4]).

Se prueba que la función implicación cumple los axiomas requeridos:

$$I1: x \leq z \Rightarrow 1 - x + y \geq 1 - z + y \Rightarrow \min(1 - x + y, 1) \geq \min(1 - z + y, 1)$$

$$I8: I(x, y) = 1 \text{ si, y sólo si, } \min(1 - x + y, 1) = 1 \text{ lo que es equivalente a decir que } 1 - x + y \geq 1, \text{ es decir, que } x \leq y$$

I12: Sea $c(x) = 1 - x$, entonces $I(c(y), c(x)) = \text{mín}(1 - (1 - y) + (1 - x), 1) = \text{mín}(1 - x + y, 1) = I(x, y)$

I14: $I(x, y) = 0$ si, y sólo si, $1 - x + y = 0$, es decir, si $x - y = 1$, lo cual ocurre si, y sólo si, $x = 1$ e $y = 0$, puesto que $x, y \in [0, 1]$.

- $E_{FD}(x, y) = \text{mín}(I_{FD}(x, y), I_{FD}(y, x))$, con respecto a la función de Fodor (ver [3, p. 4]):

$$I_{FD}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \text{máx}(1 - x, y) & \text{si } x > y \end{cases}$$

que cumple los axiomas requeridos:

I1: Sea $x \leq z$. Si $x \leq y$, entonces $I_{FD}(x, y) = 1$, con lo que $I_{FD}(x, y) \geq I_{FD}(z, y)$. Si $x > y$, entonces se tiene que $z > y$, con lo que $I_{FD}(x, y) = \text{máx}(1 - x, y) \geq \text{máx}(1 - z, y) = I_{FD}(z, y)$.

I8: Puesto que $\text{máx}(1 - x, y) \neq 1, \forall x, y \in [0, 1]$ tal que $x > y$, se tiene que $I_{FD}(x, y) = 1$ si, y sólo si, $x \leq y$.

I12: Considerando de nuevo la negación fuerte clásica, se tiene que:

$$I_{FD}(c(y), c(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 - y \leq 1 - x \\ \text{máx}(1 - (1 - y), 1 - x), & \text{si } 1 - y > 1 - x \end{cases}$$

luego:

$$I_{FD}(c(y), c(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \text{máx}(1 - x, y), & \text{si } x > y \end{cases}$$

es decir, $I_{FD}(c(y), c(x)) = I_{FD}(x, y)$

I14: Por último, se tiene que $I_{FD}(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x > y$ y $\text{máx}(1 - x, y) = 0$, es decir, si y sólo si $1 - x = y = 0$, lo que es equivalente a decir que $x = 1$ e $y = 0$.

- En el caso de REF_{ej4} se tiene que $REF_{ej4}(x, y) = \text{mín}(I_4(x, y), I_4(y, x))$ con

$$I_4(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1, y = 0 \\ 1 & \text{si } x \leq y \\ \frac{1}{2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se prueba que I_4 cumple los axiomas requeridos:

I1: Sea $x \leq z$. Si $x \leq y$, se tiene que $I_4(x, y) = 1$, con lo que $I_4(x, y) \geq I_4(z, y)$. En otro caso, si $x = 1$ e $y = 0$, entonces $I_4(x, y) = 0 = I_4(z, y)$ y en otro caso, $I_4(x, y) = 1/2$, pero como $x > y$, entonces $z > y$, con lo que $I_4(z, y) \in \{0, 1/2\}$.

I8: Inmediato por la definición de I_4 .

I12: Se tiene:

$$I_4(c(y), c(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - y = 1, 1 - x = 0 \\ 1, & \text{si } 1 - y \leq 1 - x \\ \frac{1}{2}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces:

$$I_4(c(y), c(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1, y = 0 \\ 1, & \text{si } x \leq y \\ \frac{1}{2}, & \text{en otro caso} \end{cases} = I_4(x, y)$$

I14: $I_4(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = 1$ e $y = 0$ por la definición de la función I_4 .

Además de las ya consideradas, se pueden construir otras a partir de distintas implicaciones.

Ejemplo 2.23. [3, p. 11] Si se considera la función:

$$I_{MM}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \text{máx} \left(\frac{y}{x}, \frac{1-x}{1-y} \right), & \text{si } x > y \end{cases} \quad (2.15)$$

esta cumple los axiomas requeridos para aplicar el teorema 2.21:

I1: Si $x \leq z$, entonces:

- Si $y < x$, también se tiene que $y < z$, con lo que $I(x, y) = \text{máx} \left(\frac{y}{x}, \frac{1-x}{1-y} \right)$ y $I(z, y) = \text{máx} \left(\frac{y}{z}, \frac{1-z}{1-y} \right)$. Ahora bien, por hipótesis $x \leq z$, con lo que $\frac{y}{x} \geq \frac{y}{z}$ y $\frac{1-x}{1-y} \geq \frac{1-z}{1-y}$, por tanto, $I_{MM}(x, y) \geq I_{MM}(z, y)$.
- Si $x \leq y$, entonces $I_{MM}(x, y) = 1$, con lo que $I_{MM}(z, y) \leq I_{MM}(x, y)$ para cualquier $z \in [0, 1]$.

I8: Por definición de I_{MM} , si $x > y$, entonces $I_{MM}(x, y) < 1$. Con lo que si $I_{MM}(x, y) = 1$, entonces $x \leq y$ y el recíproco es inmediato aplicando de nuevo la definición.

I12: Se considera la negación fuerte clásica $c(x) = 1 - x$ y se tiene que:

$$I_{MM}(c(y), c(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 - y \leq 1 - x \\ \text{máx} \left(\frac{1-x}{1-y}, \frac{1-(1-y)}{1-(1-x)} \right), & \text{si } 1 - y > 1 - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_{MM}(c(y), c(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \text{máx} \left(\frac{1-x}{1-y}, \frac{y}{x} \right) & \text{si } x > y \end{cases} = I_{MM}(x, y)$$

I14: Se tiene que $I(x, y) = 0$ si, y sólo si, $\frac{y}{x} = \frac{1-x}{1-y} = 0$ con $x > y$, lo que es equivalente a decir que $y = 0$ y $x = 1$.

Una vez probadas las hipótesis necesarias para aplicar el teorema 2.21, se define a partir de este:

$$REF_{ej12}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \text{máx} \left(\frac{1-y}{1-x}, \frac{x}{y} \right) & \text{si } x < y \\ \text{máx} \left(\frac{1-x}{1-y}, \frac{y}{x} \right) & \text{si } x > y \end{cases}$$

Ejemplo 2.24. La implicación de Baczynski ([3, p. 11]), definida como:

$$I_{BZ}(x, y) = \min(\max(0, 5, \min(1 - x + y, 1)), 2 - 2x + 2y).$$

también permitirá generar una función de equivalencia restringida, puesto que:

I1: Si $x \leq z$, se tiene que $\min(1 - x + y, 1) \geq \min(1 - z + y, 1)$ y $2 - 2x + 2y \geq 2 - 2z + 2y$, con lo que se llega a que $I_{BZ}(x, y) \geq I_{BZ}(z, y)$.

I8: Si $I_{BZ}(x, y) = 1$, entonces $\max(0, 5, \min(1 - x + y, 1)) \geq 1$, lo que implica a su vez que $\min(1 - x + y, 1) \geq 1$ y, por tanto, que $y \geq x$.

Inversamente, si $x \leq y$, entonces $I_{BZ}(x, y) = 1$ por definición.

I12: Considerando de nuevo $c(x) = 1 - x$, se tiene que

$$\begin{aligned} I_{BZ}(c(y), c(x)) &= \min(\max(0, 5, \min(1 - (1 - y) + (1 - x), 1)), 2 - 2(1 - y) + 2(1 - x)) = \\ &= \min(\max(0, 5, \min(y + 1 - x, 1)), 2y + 2 - 2x) = \\ &= \min(\max(0, 5, \min(1 - x + y, 1)), 2 - 2x + 2y) = I_{BZ}(x, y) \end{aligned}$$

I14: $I_{BZ}(x, y) = 0$ si, y sólo si, $\max(0, 5, \min(1 - x + y, 1)) = 0$ o $2 - 2x + 2y = 0$. La primera condición no puede darse, puesto que el máximo será mayor o igual que 0,5, con lo que es tiene que $2 - 2x + 2y = 0$ o, lo que es lo mismo $x - y = 1$. Puesto que $x, y \in [0, 1]$ esto es a su vez equivalente a decir que $x = 1$ e $y = 0$.

Habiendo probado las hipótesis necesarias para emplear el teorema 2.21, se obtiene la función de equivalencia restringida. Se puede escribir también como

$$REF_{BZ}(x, y) = \begin{cases} I_{BZ}(x, y) & \text{si } x \geq y \\ I_{BZ}(y, x) & \text{si } x < y \end{cases} \quad (2.16)$$

El teorema empleado en la definición de las tres funciones anteriores es muy valioso. Sin embargo, las hipótesis que deben de cumplir las implicaciones en muchas ocasiones no se satisfacen, como puede verse en los siguientes ejemplos, con lo que no toda función de implicación permitirá definir una función de equivalencia restringida.

Ejemplo 2.25. Se van a presentar en este ejemplo algunas funciones de implicación conocidas, que no permiten generar REFs a partir de ellas.

- La función de implicación de Gödel (ver [3, p. 4]) se define como sigue:

$$I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ y, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se podría probar que esta implicación verifica I8, pero sin embargo no verifica I12 o I14. Por ejemplo, si consideramos la negación fuerte clásica $c(x) = 1 - x$, se tiene que $I_{GD}(c(0, 2), c(0, 4)) = I_{GD}(0, 8, 0, 6) = 0,6$, pero $I_{GD}(0, 4, 0, 2) = 0,2$. Además $I_{GD}(0, 2, 0) = 0$.

- En el caso de la función implicación de Rescher ([3, p. 4]):

$$I_{RS}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.17)$$

esta verifica las propiedades I8 e I12, pero es evidente que no verifica I14. Por ejemplo, $I_{RS}(0,4,0,2) = 0$.

- Se define la función implicación de Goguen ([3, p. 4]) como:

$$I_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.18)$$

De nuevo verifica I8, pero no así I12, puesto que $I_{GG}(c(0,2), c(0,4)) = I_{GG}(0,8,0,6) = 0,75$ y $I_{GG}(0,4,0,2) = 0,2/0,4 = 0,5$. Tampoco verifica I14, puesto que, por ejemplo, $I_{GG}(0,2,0) = 0$.

- La función implicación de Reichenbach ([3, p. 4]) tampoco permite generar una REF a partir de ella. Dicha función se define como: $I_{RC}(x, y) = 1 - x + x \cdot y$ y aunque verifica I1, I12 e I14, no verifica I8, puesto que, por ejemplo, $I_{RC}(0,2,0,3) = 0,86$.
- En la misma condición falla la función implicación de Kleene-Dienes ([3, p. 4]), definida como: $I_{KD}(x, y) = \max(1 - x, y)$, puesto que $I_{KD}(0,2,0,5) = 0,8 \neq 1$.
- En el caso de la función de implicación de Yager ([3, p. 4]), definida como:

$$I_{YG}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y = 0 \\ y^x, & \text{si } x > 0 \text{ ó } y > 0 \end{cases}$$

solo se verifica I1, puesto que $I_{YG}(0,2,0,4) \simeq 0,83 \neq 1$ y $I_{YG}(1,0,2) = 0,2 \neq 0 = I_{YG}(0,8,0) = I_{YG}(c(0,2), c(1))$. El ejemplo $I_{YG}(0,8,0) = 0$ también sirve para comprobar que no se verifica I14.

- La función de implicación ([3, p. 11]):

$$I_{MN}(x, y) = \begin{cases} \min(1 - x, y), & \text{si } \max(1 - x, y) \leq 0,5 \\ \max(1 - x, y), & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.19)$$

no verifica I8, ni I14. En el primer caso se tiene que $I_{MN}(0,2,0,6) = \max(1 - 0,2, 0,6) = 0,8 \neq 1$ y en el segundo $I_{MN}(0,2,0) = \max(1 - 0,2, 0) = 0,8 \neq 0$.

- La implicación ([3, p. 11]):

$$I_{NI}(x, y) = \begin{cases} \min(1, 1 - x^2 + y), & \text{si } y > 0 \\ 1, & \text{si } x \in [0, 0,25), y = 0 \\ 0,1, & \text{si } x \in [0,25, 0,75), y = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.20)$$

no verifica I14, puesto que por ejemplo, $I_{NI}(0,8,0) = 0$ y además no se cumple I12 para ninguna negación fuerte. Para ver esto, se va a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que existe una negación fuerte c tal que $I_{NI}(c(y), c(x)) =$

$I_{NI}(x, y)$ para todo $x, y \in [0, 1]$. En particular será cierto para el caso $x \in [0,75, 1)$ e $y = 0$.

Por definición de I_{NI} se tiene $I_{NI}(x, 0) = 0$. Por otra parte, por definición de negación difusa se tiene que $c(0) = 1$ y $c(x) > c(1) = 0$, con lo que $I_{NI}(c(0), c(x)) = I_{NI}(1, c(x)) = \min(1, c(x)) = c(x) > 0$.

- La implicación ([3, p. 11]):

$$I_{SQ}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y = 0 \text{ o } x = y = 1 \\ \max(y^x, (1-x)^{\sqrt{1-y}}), & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.21)$$

cumple I1 e I14, pero no así I8, puesto que $I_{SQ}(0,2,0,4) = \max(0,4^{0,2}, (1-0,2)^{\sqrt{1-0,4}}) = \max(0,83, 0,84) = 0,841$. Tampoco verifica I12, teniendo en cuenta que $I_{SQ}(c(0,4), c(0,2)) = I_{SQ}(0,6, 0,8) = \max(0,8^{0,6}, (1-0,6)^{\sqrt{1-0,8}}) = 0,875$.

- En el caso de la implicación ([3, p. 5]):

$$I_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \vee y = 1 \\ 0, & \text{si } x > 0 \wedge y < 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

la condición que no se verifica es I8. Así, $I_0(0,1,0,2) = 0 \neq 1$.

- La misma condición falla en el caso de la implicación ([3, p. 5]):

$$I_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \vee y > 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \wedge y = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

puesto que, por ejemplo, $I_1(0,4,0,2) = 1$ aunque $x = 0,4 > 0,2 = y$.

- Por último, en el caso de la implicación ([3, p. 12]):

$$I_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \wedge y = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.24)$$

solo se verifica I1, puesto que $I_2(0,4,0,2) = 1$ aunque $0,4 > 0,2$, con lo que no se verifica I8 e $I_2(0,4,0) = 0$, aunque $x = 0,4 \neq 1$, con lo que tampoco se verifica I14. Además no se verifica I12 para ninguna negación fuerte. En caso, supongamos que existe una negación fuerte c tal que $I_2(c(y), c(x)) = I_2(x, y)$ para todo $x, y \in [0, 1]$. En particular será cierto para el caso $x \in (0, 1)$ e $y = 0$, con lo que $I_2(c(0), c(x)) = I_2(1, c(x))$. Pero como $I_2(x, 0) = 0$, esto llevaría, por definición de I_2 a que $c(x) = 0$ con $x \in (0, 1)$ lo cual es imposible al ser c una negación fuerte.

Para resumir todas las funciones de implicación que se acaban de estudiar, así como si cumplen o no las propiedades I1, I8, I12 e I14, se muestra la tabla 2.1.

Implicaciones	I1	I8	I12	I14
$I_{LK} = \min(1 - x + y, 1)$	✓	✓	✓	✓
$I_{FD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \max(1 - x, y), & \text{si } x > y \end{cases}$	✓	✓	✓	✓
$I(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \wedge x \neq y \\ 1, & \text{si } x \leq y \\ \frac{1}{2}, & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✓	✓
$I_{MM}(x, y) = \min\left(1, \max\left(\frac{y}{x}, \frac{1-x}{1-y}\right)\right)$	✓	✓	✓	✓
$I_{BZ}(x, y) = \min(\max(0, 5, \min(1 - x + y, 1)), 2 - 2x + 2y)$	✓	✓	✓	✓
$I_{GD}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ y, & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✗	✗
$I_{RS}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✓	✗
$I_{GG}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✗	✗
$I_{RC}(x, y) = 1 - x + xy$	✓	✗	✓	✓
$I_{KD}(x, y) = \max(1 - x, y)$	✓	✗	✓	✓
$I_{YG}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y = 0 \\ y^x, & \text{si } x > 0 \text{ ó } y > 0 \end{cases}$	✓	✗	✗	✗
$I_{MN}(x, y) = \begin{cases} \min(1 - x, y), & \text{si } \max(1 - x, y) \leq 0,5 \\ \max(1 - x, y), & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✓	✗
$I_{NI}(x, y) = \begin{cases} \min(1, 1 - x^2 + y), & \text{si } y > 0 \\ 1, & \text{si } x \in [0, 0,25), y = 0 \\ 0,1, & \text{si } x \in [0,25, 0,75), y = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✗	✗	✗
$I_{SQ}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\} \\ \max(y^x, (1 - x)^{\sqrt{1-y}}), & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✗	✗	✓
$I_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \vee y = 1 \\ 0, & \text{si } x > 0 \wedge y < 1 \end{cases}$	✓	✗	✓	✗
$I_1(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1 \vee y > 0 \\ 0, & \text{si } x = 1 \wedge y = 0 \end{cases}$	✓	✗	✓	✓
$I_2(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \wedge y = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$	✓	✓	✗	✗

Tabla 2.1: Resumen de las funciones de implicación estudiadas con respecto a su comportamiento relativo a las propiedades I1, I8, I12 e I14.

A partir de automorfismos y funciones de implicación

Se pueden combinar automorfismos y funciones de implicación para caracterizar un tipo particular de funciones de equivalencia restringidas.

Teorema 2.26. [7, p. 2342] Una función continua $REF: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $REF(1, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida asociada con la función $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisface I7 e I13 si y sólo si existe un automorfismo φ del intervalo unidad tal que $REF(x, y) = \varphi^{-1}(1 - |\varphi(x) - \varphi(y)|)$ y $c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$.

El teorema anterior caracteriza las REFs de tal forma que bajo ciertas condiciones asegura que la función de equivalencia restringida está asociada con una función que satisface I7 e I13. Permite así relacionar dos formas de construcción de REFs. Sin embargo, en la práctica no es de gran utilidad para el objetivo que se persigue en este trabajo, puesto que no aporta nuevas funciones, ya que todas las que se obtengan por este método ya se habrán visto en la construcción a partir de la proposición 2.15 y el teorema 2.21. Para solventar este problema surge el siguiente resultado.

Corolario 2.27. [7, p. 2343] Una función continua REF: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $REF(1, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida asociada con la función $I: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisface I7 e I13 si y sólo si existe un automorfismo φ del intervalo unidad tal que $REF(x, y) = \varphi^{-1}\{\min(1, 1 - \varphi(\max(x, y)) + \varphi(\min(x, y)))\}$ y $c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$.

Las hipótesis de este último corolario son las mismas que las del teorema 2.26, sin embargo, la forma de la REF resultante es diferente. Así, a partir de este nuevo resultado se pueden obtener nuevas funciones de equivalencia restringidas, como se muestra ahora en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.28. En los siguientes ejemplos se tendrá en cuenta que $1 - \max(x, y) + \min(x, y) \leq 1$ y se aplicará en todos ellos el corolario 2.27 al correspondiente automorfismo.

- Si se considera el automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \varphi(x) := \frac{\lambda x}{(1 + \lambda) - x} \end{aligned}$$

con $\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, se obtiene:

$$REF_{ej13}(x, y) = \varphi^{-1} \left(\min \left(1, 1 - \frac{\lambda \max(x, y)}{1 + \lambda - \max(x, y)} + \frac{\lambda \min(x, y)}{1 + \lambda - \min(x, y)} \right) \right)$$

donde $\varphi^{-1}(x) := \frac{(1+\lambda)x}{(\lambda+x)}$.

- Si se considera el automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \varphi(x) := x^n \end{aligned}$$

se obtiene:

$$REF_{ej14}(x, y) = \sqrt[n]{1 - (\max(x, y))^n + (\min(x, y))^n} \text{ con } c(x) = \sqrt[n]{1 - x^n}$$

- Finalmente, a partir del automorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \varphi(x) := \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

se obtiene:

$$REF_{ej15}(x, y) = (1 - \sqrt[n]{\max(x, y)} + \sqrt[n]{\min(x, y)})^n \text{ con } c(x) = (1 - \sqrt[n]{x})^n$$

A partir de desviaciones moderadas

Se va a introducir ahora el último método para generar funciones de equivalencia restringidas, el cual está basado en las funciones de desviación moderada. Para determinar los métodos de construcción de REFs a partir de desviaciones moderadas, se van a definir dos propiedades de estas últimas funciones.

Definición 2.8. [2, p. 21] Sea $D : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de desviación moderada, se dice que:

- D verifica la propiedad MP si $D(x, y) = M_p$ si y sólo si $x = 0$ e $y = 1$ para algún número real positivo M_p .
- D verifica la propiedad MN si $D(x, y) = -M_n$ si y sólo si $x = 1$ e $y = 0$ para algún número real positivo M_n .

Si D satisface las dos propiedades anteriores, entonces la imagen de la función es un subconjunto de $[-M_n, M_p]$, es decir, $D : [0, 1]^2 \rightarrow [-M_n, M_p]$.

A partir de este tipo de desviaciones moderadas se pueden generar funciones de equivalencia restringidas como sigue:

Teorema 2.29. [2, p. 21] Sean $c, c^* : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dos negaciones fuertes y M_p, M_n dos números reales positivos. Sea $D : [0, 1]^2 \rightarrow [-M_n, M_p]$ una función de desviación moderada satisfaciendo las propiedades (MP) y (MN) con respecto a M_p y M_n respectivamente y tal que $D(x, y) = D(c^*(y), c^*(x)), \forall x, y \in [0, 1]$. Sea $A : [0, \max(M_n, M_p)]^2 \rightarrow [0, \infty)$ una función creciente tal que $A(0, 0) = 0$, $A(x, y) \neq 0$ si $x \neq 0$ o $y \neq 0$, $A(x, M_n) < A(M_p, M_n)$ si $x < M_p$, y $A(M_p, y) < A(M_p, M_n)$ si $y < M_n$. Entonces la función $R : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$R(x, y) = c \left(\frac{A(D(\min(x, y), \max(x, y)), -D(\max(x, y), \min(x, y)))}{A(M_p, M_n)} \right) \quad (2.25)$$

para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$, es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte c^* .

Demostración. Para probar que la función definida en la ecuación 2.25 es una REF, se prueba la verificación de la condiciones de la definición. 2.7:

1. Si denotamos por J a $\frac{A(D(\min(x, y), \max(x, y)), -D(\max(x, y), \min(x, y)))}{A(M_p, M_n)}$, se tiene que $R(x, y) = 0$ si, y sólo si, $c(J) = 0$, lo cual es equivalente, al ser c una negación fuerte a que $J = 1$. Así pues, $A(D(\min(x, y), \max(x, y)), -D(\max(x, y), \min(x, y))) =$

$A(M_p, M_n)$. Por hipótesis, esto se cumple si, y sólo si, $D(\text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)) = M_p$ y $D(\text{máx}(x, y), \text{mín}(x, y)) = -M_n$, pero como D verifica (MP) y (MN), esto es equivalente a que $\text{mín}(x, y) = 0$ y $\text{máx}(x, y) = 1$, con lo que se tiene que $x = 1$ e $y = 0$ o que $x = 0$ e $y = 1$.

2. $R(x, y) = 1$ si, y sólo si, $c(J) = 1$, lo cual es equivalente, al aplicar de nuevo que c es una negación fuerte, a decir que $J = 0$. Por como está definida J , esto equivale a decir que $A(D(\text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)), -D(\text{máx}(x, y), \text{mín}(x, y))) = 0$, lo que es lo mismo, por las condiciones que verifica la aplicación A que decir que $D(\text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)) = 0$ y $-D(\text{máx}(x, y), \text{mín}(x, y)) = 0$, es decir, $\text{mín}(x, y) = \text{máx}(x, y)$, lo que a su vez es equivalente a $x = y$.
3. Es evidente que $R(x, y) = R(y, x), \forall x, y \in [0, 1]$, sin más aplicar la simetría del máximo y el mínimo.
4. Como se supone que $x \leq y \leq z$, entonces se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)) = D(x, y) \\ D(\text{mín}(x, z), \text{máx}(x, z)) = D(x, z) \\ D(\text{máx}(x, y), \text{mín}(x, y)) = D(y, x) \\ D(\text{máx}(x, z), \text{mín}(x, z)) = D(z, x) \end{array} \right\}$$

y además, por la definición de D , se tiene que $D(x, y) \leq D(x, z)$ y $D(y, x) \geq D(z, x)$, con lo que $-D(y, x) \leq -D(z, x)$. Aplicando ahora el crecimiento de A y el decrecimiento de c , se tiene que:

$$R(x, y) = c \left(\frac{A(D(x, y), -D(y, x))}{A(M_p, A_n)} \right) \geq c \left(\frac{A(D(x, z), -D(z, x))}{A(M_p, A_n)} \right) = R(x, z)$$

De forma análoga se obtiene que $R(y, z) \geq R(x, z)$.

5. Por último, faltaría demostrar que $R(x, y) = R(c^*(x), c^*(y)), \forall x, y \in [0, 1]$.
Suponiendo que $x \leq y$, se tiene que $c^*(x) \geq c^*(y)$, con lo que:

$$D(\text{mín}(c^*(x), c^*(y)), \text{máx}(c^*(x), c^*(y))) = D(c^*(y), c^*(x)) = D(x, y)$$

por hipótesis, con lo que

$$D(\text{mín}(c^*(x), c^*(y)), \text{máx}(c^*(x), c^*(y))) = D(\text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y))$$

Además, $D(\text{máx}(c^*(x), c^*(y)), \text{mín}(c^*(x), c^*(y))) = D(c^*(x), c^*(y)) = D(y, x)$, aplicando de nuevo la condición impuesta a D con respecto a c^* , con lo que también se tiene que

$$D(\text{máx}(c^*(x), c^*(y)), \text{mín}(c^*(x), c^*(y))) = D(\text{máx}(x, y), \text{mín}(x, y))$$

De todo lo anterior, sin más que aplicar la definición de R , se deduce de forma inmediata que: $R(c^*(x), c^*(y)) = R(x, y)$.

□

Se acaba de probar que, bajo las condiciones del teorema anterior, a partir de la ecuación 2.25 se puede obtener una REF. Sin embargo, se tiene también que, si la desviación moderada en cuestión solo cumple las implicaciones hacia la izquierda de las propiedades (MP) y (MN), se tiene a partir de la misma ecuación una equivalencia difusa, tal como puede verse en el siguiente resultado.

Teorema 2.30. *Sea $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación fuerte, y M_p, M_n números reales positivos. Sea $D : [0, 1]^2 \rightarrow [-M_n, M_p]$ una función de desviación moderada satisfaciendo las implicaciones hacia la izquierda de las propiedades (MP) y (MN) con respecto a M_p y M_n respectivamente. Sea $A : [0, \max(M_n, M_p)]^2 \rightarrow [0, \infty)$ una función creciente tal que $A(0, 0) = 0$, $A(x, y) \neq 0$ si $x \neq 0$ o $y \neq 0$, $A(x, M_n) < A(M_p, M_n)$ si $x < M_p$, y $A(M_p, y) < A(M_p, M_n)$ si $y < M_n$. Entonces la función $E : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida por:*

$$E(x, y) = c \left(\frac{A(D(\min(x, y), \max(x, y)), -D(\max(x, y), \min(x, y)))}{A(M_p, M_n)} \right) \quad (2.26)$$

$\forall x, y \in [0, 1]$, es una equivalencia difusa.

Demostración. Puesto que las propiedades (MP) y (MN) de D solo se han utilizado al demostrar la primera condición en el teorema anterior, para probar que E es una equivalencia difusa, es suficiente con demostrar que verifica la primera condición de la definición 2.6, puesto que las otras tres son casos particulares de las vistas en el teorema anterior. Ahora bien $E(0, 1) = c \left(\frac{A(D(0, 1), -D(1, 0))}{A(M_p, M_n)} \right) = c \left(\frac{A(M_p, M_n)}{A(M_p, M_n)} \right) = c(1) = 0$, con lo que se cumple la condición requerida. □

De forma similar al teorema 2.29 se puede probar el siguiente, que presenta otra forma de obtener funciones de equivalencia restringidas.

Teorema 2.31. *[2, p. 22] Sea $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación fuerte, y M_p, M_n números reales positivos. Sea $D : [0, 1]^2 \rightarrow [-M_n, M_p]$ una función de desviación moderada satisfaciendo las propiedades (MP) y (MN) con respecto a M_p y M_n respectivamente y tal que $D(x, y) = D(c^*(y), c^*(x))$, $\forall x, y \in [0, 1]$. Sea $A : [0, \max(M_n, M_p)]^2 \rightarrow [0, \infty)$ una función creciente tal que $A(0, 0) = 0$, $A(x, y) \neq 0$ si $x \neq 0$ o $y \neq 0$, $A(x, M_n) < A(M_p, M_n)$ si $x < M_p$, y $A(M_p, y) < A(M_p, M_n)$ si $y < M_n$. Entonces la función $R : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida por:*

$$R(x, y) = c \left(\frac{A(-D(\max(x, y), \min(x, y)), D(\min(x, y), \max(x, y)))}{A(M_n, M_p)} \right) \quad (2.27)$$

$\forall x, y \in [0, 1]$, es una función de equivalencia restringida con respecto a la negación fuerte c^* .

Al igual que ocurría con el teorema 2.29, en el caso del teorema 2.31, si D es una desviación moderada que solo cumple las implicaciones hacia la izquierda de las propiedades (MP) y (MN), se puede definir a partir de la misma ecuación una equivalencia difusa.

Teorema 2.32. *Sea $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación fuerte, y M_p, M_n números reales positivos. Sea $D : [0, 1]^2 \rightarrow [-M_n, M_p]$ una función de desviación moderada satisfaciendo las implicaciones hacia la izquierda de las propiedades (MP) y (MN) con respecto a M_p y M_n respectivamente. Sea $A : [0, \max(M_n, M_p)]^2 \rightarrow [0, \infty)$ una función creciente tal que $A(0, 0) = 0$, $A(x, y) \neq 0$ si $x \neq 0$ o $y \neq 0$, $A(x, M_n) < A(M_p, M_n)$ si $x < M_p$, y $A(M_p, y) < A(M_p, M_n)$ si $y < M_n$. Entonces la función $R : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida por:*

$$E(x, y) = c \left(\frac{A(-D(\max(x, y), \min(x, y)), D(\min(x, y), \max(x, y)))}{A(M_n, M_p)} \right) \quad (2.28)$$

$\forall x, y \in [0, 1]$, es una equivalencia difusa.

Las ecuaciones 2.25 y 2.28 pueden reformularse de la siguiente forma respectivamente:

$$R(x, y) = c \left(\frac{A(\max(D(x, y), D(y, x)), -\min(D(x, y), D(y, x)))}{A(M_p, M_n)} \right) \quad (2.29)$$

$$R(x, y) = c \left(\frac{A(-\min(D(x, y), D(y, x)), \max(D(x, y), D(y, x)))}{A(M_n, M_p)} \right) \quad (2.30)$$

Es importante destacar que la función A , en los teoremas 2.29 y 2.31 (del mismo modo en las ecuaciones 2.29 y 2.30) es necesario que no sea simétrica. En el caso de que lo fuera, las ecuaciones 2.25, 2.28, 2.29 y 2.30 se simplificarían como sigue:

$$R(x, y) = c \left(\frac{A(|D(x, y)|, |D(y, x)|)}{A(M_p, M_n)} \right)$$

Ejemplo 2.33. [2, p. 22] Anteriormente, se ha visto cómo definir la función E_{LK} a partir de automorfismos. Sin embargo, se puede construir también a partir del teorema 2.29. Bastaría con considerar:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(x) = 1 - x \\ A(x, y) = (1 - w)x + wy \text{ para algún } w \in (0, 1) \\ D(x, y) = y - x \Rightarrow M_p = M_n = 1 \end{array} \right\}$$

para obtener $E_{LK}(x, y) = 1 - |y - x|$.

Ejemplo 2.34. [2, pp. 22-23] Se ve a continuación otro ejemplo de REF a partir de una función de desviación moderada, aplicando el teorema 2.29. Si se consideran:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(x) = 1 - x \\ A(x, y) = (1 - w)x + wy \text{ para algún } w \in (0, 1) \\ D_{\epsilon, \delta}(x, y) = \begin{cases} y - x + \epsilon & \text{si } y > x \\ 0, & \text{si } y = x \\ y - x - \delta, & \text{si } y < x \end{cases}, \left(\Rightarrow \begin{cases} M_p = 1 + \epsilon \\ M_n = 1 + \delta \end{cases} \right) \\ \text{con } \epsilon, \delta \text{ constantes positivas} \end{array} \right\}$$

se obtiene la función de equivalencia restringida:

$$R_{\epsilon,\delta,w}(x,y) = \begin{cases} \frac{1-|y-x|}{1+(1-w)\epsilon+w\delta} & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases} \quad (2.31)$$

Claramente, el ejemplo anterior es un caso particular de este, tomando $\epsilon = \delta = 0$.

Se presentan a continuación algunos resultados que permiten la construcción de funciones de desviación moderada y, por tanto, según lo visto anteriormente, podrían permitir la construcción de funciones de equivalencia restringidas. Todos los resultados siguientes se basan en una función de negación fuerte, dos automorfismos, y un isomorfismo lineal entre los intervalo $[a, b]$ y $[-1, 1]$.

Al ser el objetivo en esta sección emplear desviaciones moderadas para obtener REFs a partir de los Teoremas vistos, se necesita que $[a, b] = [0, 1]$. Además, a partir de ahora se identificarán en todo caso $M_n = M_p = 1$.

Proposición 2.35. [21, p. 664] Sean $\phi_1, \phi_2 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ automorfismos, $\phi_1(0) = 0$, $c : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ con $c(x) = -x$, y $T(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$ un isomorfismo lineal del intervalo $[a, b]$ a $[-1, 1]$. Entonces la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$D(x, y) = \phi_1^{-1}(\max(-1, \min(1, \phi_2(c(T(x))) + c(\phi_2(c(T(y))))))) \quad (2.32)$$

es una función de desviación moderada.

Para obtener una REF a partir de esta desviación moderada, empleando los resultados vistos, se recuerda que es necesario que se cumplan las propiedades (MN) y (MP). Sin embargo, estas dos propiedades no se cumplen. Así, se tiene que $T(x) = 2x - 1$, $\phi_1(0) = 0$, $c(x) = -x$. De esta forma, al ser ϕ un automorfismo:

$$\begin{aligned} D(x, y) = 1 &\Leftrightarrow \max(-1, \min(1, \phi_2(c(T(x))) - \phi_2(c(T(y)))) = 1 \Leftrightarrow \\ &\phi_2(1 - 2x) - \phi_2(1 - 2y) \geq 1 \Leftrightarrow -x + y \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Con lo que $D(0,2,0,8) = 1$ y, por tanto, no cumple la propiedad (MP).

Como $\phi_1(-1) = -1$, la demostración de que la propiedad (MN) no se cumple es completamente análoga, llegando a:

$$D(x, y) = -1 \Leftrightarrow -x + y \geq -\frac{1}{2}$$

Proposición 2.36. [21, p. 664] En las condiciones de la proposición anterior, la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$D(x, y) = \phi_1^{-1}(\max(-1, \min(1, c(\phi_2(T(x))) + \phi_2(T(y)))))) \quad (2.33)$$

es una función de desviación moderada.

Con esta desviación moderada tampoco se cumplen las propiedades (MN) y (MP) . Así, se tiene: $T(x) = 2x - 1$, $\phi_1(1) = 1$, $c(x) = -x$, con lo que:

$$\begin{aligned} D(x, y) = 1 &\Rightarrow (\text{máx}(-1, \text{min}(1, c(\phi_2(T(x))) + \phi_2(T(y)))))) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -(\phi_2(2x - 1)) + \phi_2(2y - 1) \geq 1 \Rightarrow -x + y \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo que no permite asegurar que $x = 0$ e $y = 1$.

Como $\phi_1(-1) = -1$, la demostración de que la propiedad (MN) no se cumple es completamente análoga, llegando a:

$$D(x, y) = -1 \Rightarrow -x + y \geq -\frac{1}{2}$$

con lo que no se verifica solo en el caso $x = 1$ e $y = 0$.

Se concluye entonces que las proposiciones 2.35 y 2.36 no se pueden emplear para obtener desviaciones moderadas de cara a construir REFs a partir de los resultados vistos en esta sección. Se muestran a continuación otros resultados con los que sí se puede lograr este objetivo.

Teorema 2.37. [21, p. 664] Sea $\phi : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ un automorfismo, $c' : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ con $c'(x) = -x$, y $F : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$ una función creciente en ambas componentes tal que $F(-x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. Sea también $T(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$ un isomorfismo lineal del intervalo $[a, b]$ a $[-1, 1]$. Entonces la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$D(x, y) = \phi^{-1}(F(c(\phi(T(x))), \phi(T(y)))) \quad (2.34)$$

es una función de desviación moderada.

Ejemplo 2.38. Se definen a continuación las funciones que se emplean en la construcción de la desviación moderada: $c'(x) = -x$, $T(x) = 2x - 1$, $F(x, y) = \frac{x+y}{2}$ y $\phi(x) = x$.

Aplicando el teorema 2.37 se llega a la función de desviación moderada:

$$D(x, y) = -x + y \quad (2.35)$$

que cumple las propiedades (MN) y (MP) y además $D(x, y) = D(1 - y, 1 - x)$, $\forall x, y \in [0, 1]$.

A partir de esta desviación moderada, se pueden obtener diferentes REFs dependiendo de las funciones $A(x, y)$ y $c(x)$ que se empleen en los teoremas 2.29 y 2.31.

- Con $c(x) = 1 - x$ y $A(x, y) = (1 - w)x + wy$ para algún $w \in (0, 1)$, se obtiene la función de equivalencia restringida con respecto a la negación estándar REF_{LK2} , ya obtenida anteriormente.

- Con $c(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$ y $A(x, y) = (1-w)x + wy$ para algún $w \in (0, 1)$, se obtiene la función de equivalencia restringida con respecto a la negación estándar:

$$R(x, y) = \frac{1 + \min(x, y) - \max(x, y)}{1 + \lambda(-\min(x, y) + \max(x, y))}$$

- Con $c(x) = (1 - x^\omega)^{1/\omega}$ con $\omega > 0$ y $A(x, y) = (1-w)x + wy$ para algún $w \in (0, 1)$, se obtiene la función de equivalencia restringida con respecto a la negación estándar:

$$R(x, y) = (1 - (-\min(x, y) + \max(x, y))^\omega)^{1/\omega}$$

- Con $c(x) = 1 - x$ y $A(x, y) = x^2 + y$, se obtiene la función de equivalencia restringida con respecto a la negación estándar:

$$R(x, y) = \frac{(-\min(x, y) + \max(x, y))^2}{2} + \frac{R_{LK2}(x, y)}{2}$$

Ejemplo 2.39. Si se mantienen las elecciones hechas en el ejemplo anterior para c' , T y F , pero se considera $\phi(x) = x^2$, aplicando el teorema 2.37 se obtiene la desviación moderada:

$$D(x, y) = \sqrt{2(-x^2 + x + y^2 - y)}. \quad (2.36)$$

Sin embargo, en este caso no se cumplen las propiedades (MP) Y (MN), puesto que $D(0, 1) = 0$, lo que contradice (MP) y $D(1, 0) = 0$, lo que contradice a su vez (MN).

Otra forma similar de obtener desviaciones moderadas se deriva del siguiente resultado.

Corolario 2.40. [21, p. 664] Bajo las mismas condiciones que el teorema 2.37, con $k \in (0, 1]$ una constante arbitraria, la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$D(x, y) = \phi^{-1}(F(k \cdot c(\phi(T(x))), k \cdot \phi(T(y)))) \quad (2.37)$$

es una función de desviación moderada.

Ejemplo 2.41. Se construye una desviación moderada bajo las mismas condiciones que las consideradas en el ejemplo 2.38, pero aplicando ahora el corolario 2.40, se obtiene la desviación moderada:

$$D(x, y) = k(-x + y) \text{ con } k \in (0, 1] \text{ una constante arbitraria.} \quad (2.38)$$

Sin embargo, el hecho de que se tengan que cumplir las propiedades (MP) y (MN) para poder construir REFs a partir de los resultados vistos, impone la condición $k = 1$, volviendo entonces a la desviación moderada del ejemplo 2.38. Así, si $D(0, 1) = 1$ o $D(1, 0) = -1$, entonces $k = 1$.

Corolario 2.42. [21, pp. 664-665] En las mismas condiciones del corolario anterior, pero con la función $F : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$ una función decreciente en ambas componentes tal que $F(-x, y) = 0$ si y solo si $x = y$, la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$D(x, y) = \phi^{-1}(F(k \cdot c(\phi(T(x))), k \cdot \phi(T(y)))) \quad (2.39)$$

es una función de desviación moderada.

Ejemplo 2.43. Si se considera $c'(x) = -x$, $T(x) = 2x - 1$, $F(x, y) = \frac{-x-y}{2}$ y $\phi(x) = x$, se obtiene la desviación moderada:

$$D(x, y) = k(x - y) \text{ con } k \in (0, 1) \text{ una constante arbitraria.} \quad (2.40)$$

Si se impone que D cumple (MP) entonces $D(0, 1) = 1$, con lo que $k = -1$ y, por tanto, se llega de nuevo a $D(x, y) = y - x$, que es una desviación moderada que ya teníamos definida en 2.38.

Tras las demostraciones realizadas y los ejemplos expuestos, se concluye que la definición de REFs a partir de desviaciones moderadas según los resultados vistos es poco eficaz y valiosa. En muchos casos a pesar de tener resultados que permitan definir desviaciones moderadas, estas no cumplen las condiciones necesarias para aplicarlas a la construcción de REFs según los teoremas 2.29 y 2.31. Por otra parte, también se han visto ejemplos en los que, tras obtener la función de equivalencia restringida, resultaba ser una ya estudiada a partir de otros métodos. Por último, ha habido casos en los que sí que ha resultado una nueva REF, pero cuya expresión es mucho más compleja que en los procedimientos anteriores.

Por último, se muestran tres resultados similares a los anteriores, que cierran las propuestas de obtención de desviaciones moderadas.

Teorema 2.44. [21, p. 665] Sea $\phi : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ un automorfismo, $c' : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ con $c'(x) = -x$, y $F : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$ una función decreciente en ambas componentes tal que $F(x, -y) = 0$ si y solo si $x = y$. Sea también $T(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$ un isomorfismo lineal del intervalo $[a, b]$ en $[-1, 1]$. Entonces la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$D(x, y) = \phi^{-1}(F(\phi(T(x)), c'(\phi(T(y)))))) \quad (2.41)$$

es una función de desviación moderada.

Corolario 2.45. [21, p. 665] Bajo las mismas condiciones que el teorema 2.44, con $k \in (0, 1]$ una constante arbitraria, la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$D(x, y) = \phi^{-1}(F(k \cdot \phi(T(x)), k \cdot c'(\phi(T(y)))))) \quad (2.42)$$

es una función de desviación moderada.

Corolario 2.46. [21, p. 665] *En las mismas condiciones del corolario anterior, pero siendo $F : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$ una función creciente en ambas componentes tal que $F(x, -y) = 0$ si y solo si $x = y$. Entonces la función $D : [a, b]^2 \rightarrow [-1, 1]$ definida por*

$$D(x, y) = \phi^{-1} (F(k \cdot \phi(T(x)), k \cdot c'(\phi(T(y)))))) \quad (2.43)$$

es una función de desviación moderada.

Capítulo 3

Métodos de clasificación: *Radius* *k-NN*

3.1. Clasificación

Hoy en día son muchas las situaciones en las que se dispone de una gran cantidad de información; el principal objetivo ahora es estudiar los mejores métodos para tratarla y obtener conclusiones a partir de ella. En este sentido, la *clasificación* puede ser cualquier decisión que se tome sobre los datos tras el *procedimiento de clasificación*, que es el “método formal” que se lleva a cabo siempre que se tenga una situación nueva en la que se necesite tomar esa determinación [19, p. 1].

Esta tarea puede llevarse a cabo desde diferentes ámbitos; tales como las aproximaciones estadísticas, el aprendizaje automático o las redes neuronales. En cada uno de ellos el procedimiento de clasificación se basa en fundamentos diferentes.

En primer lugar, las **aproximaciones estadísticas** devuelven básicamente la probabilidad de pertenecer a cada clase, buscando aproximar la distribución de las características de cada una de ellas. Por otra parte, la estructura de las **redes neuronales** se basa, como su propio nombre indica, en las conexiones de las neuronas del cerebro humano. Consta de varias capas, todas ellas formadas por neuronas e interconectadas entre sí. Las redes neuronales más simples poseen una sola entrada y una sola salida, con varias neuronas intermedias. En el caso de la clasificación, la red recibiría el objeto a clasificar y devolvería la clase. También podría programarse de tal forma que se devuelva una clase de asignación y, además, la probabilidad de acierto, para lo que se necesitarían dos salidas (ver [19, p. 3]).

El aprendizaje automático se basa en datos conocidos y experiencias pasadas para construir modelos y programas con la finalidad de obtener información de la que se carece. Parte de esta información puede ser tanto la regla que sigue una clasificación, como la relación entre ciertas variables, o el reconocimiento de patrones. Es necesario destacar también que los resultados de un programa construido de esta forma, mejorarán cuanto más se haya aplicado a diferentes datos, ya que así se le da la oportunidad de “aprender” (ver, por ejemplo, [1, pp. 1-3], [11, p. 8] y [15, p. 5]).

Se pueden diferenciar dos modelos de aprendizaje: supervisado y sin supervisar. En el primero de ellos se dispone tanto de los datos de entrada como de los de salida. Así, se puede comprobar la validez del algoritmo al aplicarlo sobre esta información, contrastando el resultado obtenido con los valores ciertos conocidos. Dentro del aprendizaje supervisado se encuentran los problemas de clasificación y de regresión ([5, pp. 3-4][15, p. 9]).

En el caso del aprendizaje no supervisado únicamente se tienen los datos de entrada, sin conocer cuáles son los de salida correspondientes. También es desconocida cuál es la “variable objetivo” y no solo su valor en cada caso. Los problemas de agrupamiento y de reducción de dimensiones son los que se enmarcan en este tipo de aprendizaje ([5, pp. 3-4]).

Como se ha dicho, en el lenguaje supervisado se tiene una muestra de objetos de los cuales se conocen todos los datos, tanto las características (o atributos) como la clase final asignada (siendo la clase la variable objetivo en el caso de clasificación). Este grupo de datos se dividirá en dos subgrupos. Uno de ellos será el que se empleará en el entrenamiento del programa, y se denominará *conjunto de objetos de entrenamiento*. Por otra parte, se tendrá el *conjunto de objetos de test*. Estos últimos serán con los que se probará cómo de bien funciona el método de clasificación ([15, p. 9]).

3.1.1. Clasificador más adecuado y análisis estadístico

En cuanto a la preferencia entre un clasificador u otro, se tienen que tener en cuenta varias propiedades, cuya importancia tendrá mayor o menor peso dependiendo del estudio que se esté realizando. Algunas de las que más destacan son la precisión del algoritmo (porcentaje de aciertos), la rapidez con la que devuelve la respuesta, lo accesible que es la comprensión de su funcionamiento y el tiempo de aprendizaje (ver [19, p. 7]).

La precisión o exactitud del método es primordial. Hay que diferenciar entre la precisión como medida del conjunto de objetos entrenamiento, con la medida del conjunto de objetos test. La definición del algoritmo siempre se va a basar en las pruebas

que se realicen sobre el conjunto de entrenamiento; los errores en estas pruebas nos llevarán a la mejora del programa. Sin embargo, puede suceder que cuando se haya conseguido una precisión alta a partir de estos datos, no se llegue al mismo porcentaje de acierto al aplicarlo a nuevos datos. Esto es muy usual y es un aspecto crucial que se debe de tener en cuenta ([19, p. 8]).

Se definen a continuación algunos conceptos fundamentales a la hora de estudiar el método de clasificación:

- **Probabilidad esperada (a priori):** Se denotan las clases de asignación A_i con $i = 1, \dots, q$, siendo $q > 0, q \in \mathbb{N}$. La probabilidad esperada de que un objeto pertenezca a la clase A_i es:

$$\pi_i = P(A_i)$$

es decir, π_i se puede interpretar como “la frecuencia relativa con la que ocurre la clase A_i en la población de interés” ([19, pp. 12-13]).

- **Coste de clasificar mal:** Denotamos el coste de clasificar un objeto de la clase A_i como de la clase A_j por $c(i, j)$. El objetivo del algoritmo es minimizar el coste total, es decir, el coste esperado de clasificar mal un objeto nuevo cualquiera.

Existe una regla, la *regla por defecto*, que consiste en asignar una clase determinada a todos los objetos, sin tener en cuenta sus características. Si denotamos como A_d , a la clase asignada siguiendo esta regla, el coste total esperado, que se denotará por C_d , será:

$$C_d \equiv E(C) = \sum_{i=1}^q c(i, d)P(A_i) = \sum_{i=1}^q c(i, d)\pi_i,$$

que se obtiene de multiplicar el coste correspondiente a cada clase, por la probabilidad de que el objeto pertenezca a dicha clase. Suponiendo:

$$c(i, j) = \begin{cases} c & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

entonces el coste total esperado es:

$$C_d = E(C) = c \sum_{i \neq d} P(A_i) = c(1 - P(A_d)) = c(1 - \pi_d)$$

Se observa que el coste mínimo se obtendrá al elegir la clase A_d aquella cuya probabilidad a priori sea la mayor.

En el caso que nos ocupa no se va a emplear la regla por defecto, pero sí que se busca minimizar el coste de clasificar mal. Otro concepto necesario es el siguiente:

- **Probabilidad condicionada:** Se ha visto ya la probabilidad a priori de una clase A_i , sin embargo, lo que realmente importa es la probabilidad de que un objeto pertenezca a esa clase una vez se tienen las características concretas de este:

$$p(A_i|x) = \frac{\pi_i p(x|A_i)}{\sum_{j=1}^q \pi_j p(x|A_j)},$$

siendo $p(x|A_i)$ la probabilidad de obtener un objeto con esas características si perteneciera a la clase A_i .

El coste esperado a posteriori se puede calcular para un objeto concreto a partir de estos datos:

$$C_d(x) \equiv E(C|x) = \sum_{i=1}^q p(A_i|x) c(i, d)$$

Suponiendo de nuevo un coste constante c si $i \neq j$ y nulo cuando $i = j$, se obtiene que:

$$C_d(x) = c \sum_{i \neq d} p(A_i|x) = c(1 - p(A_d|x))$$

de tal forma que la clase que minimiza el coste en este caso será también la que tenga una probabilidad a posteriori mayor ([19, p. 14]).

A continuación nos centraremos en un ejemplo concreto de clasificadores: el clasificador k-NN (de los k vecinos más cercanos), que es el de objeto de estudio en este trabajo.

3.2. Clasificador *k-NN*

En el apartado anterior se supuso conocida la probabilidad a posteriori, a partir de $p(x|A_i)$. Sin embargo, en muchas situaciones no se dispone de este dato ni de ningún otro con el que calcularlo, como la función de densidad de las características. Es entonces cuando se tiene que recurrir a métodos no paramétricos.

Se considerará en lo que sigue la siguiente notación:

- $q \equiv$ número de clases.
- $n \equiv$ número de objetos.
- $p \equiv$ número de características o atributos.

Expresemos también el número de objetos para una clase A_h como n_h , con lo que $n = \sum_{h=1}^q n_h$, y el número de observaciones de cada clase A_1, \dots, A_q como $k_1(x), \dots, k_q(x)$ respectivamente.

Entonces, la probabilidad a priori de que un objeto pertenezca a la clase A_h es:

$$\pi_h = \frac{n_h}{n}.$$

La probabilidad de que el objeto pertenezca a la clase A_h sabiendo ya sus características, puede estimarse como sigue:

$$\hat{p}(A_h|x) = \frac{k_h(x)}{k},$$

donde k es el número de vecinos más cercanos que se están empleando para la aproximación de la clase. En el k -NN, la clase que se asignará al objeto que se desea clasificar es aquella A_c que tenga un número de observaciones $k_c = \max_h(k_h)$.

Como se acaba de ver y como su propio nombre indica, el objetivo del método es clasificar un objeto basándose en sus características y en las de los objetos de entrenamiento más cercanos. Para ello, se calcula la distancia entre el test en cuestión y todos los elementos del conjunto de entrenamiento. Una vez hecho esto, la clase se decidirá únicamente entre los “ k vecinos más cercanos”. Entonces, el número de observaciones $k_1(x), \dots, k_q(x)$ no se evaluará en toda la población de objetos, sino en una muestra determinada por el número k de vecinos más cercanos.

Tanto la elección del número k , como la de la función distancia son factores claves para que el método sea eficiente. Por un lado, k es un número natural cuyo valor es importante, ya que un número muy pequeño o muy grande puede llevar directamente a una clasificación errónea.

En el caso de la función distancia lo que se busca es maximizar la probabilidad de que las clases de los objetos más cercanos al test coincidan con la de este último. La más usual es la distancia euclídea.

A continuación se expone un ejemplo para entender el método. Se tendrá como objetivo conocer la talla de una persona a partir de su altura y de su peso. Para ello, se tienen varios datos de entrenamiento, facilitados en [6], los cuales se muestran a continuación:

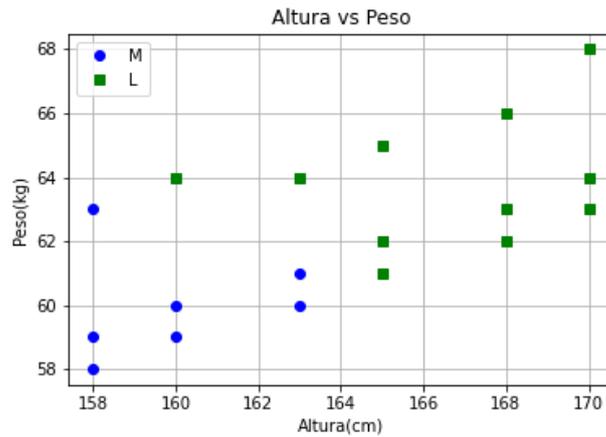


Figura 3.1: Representación datos de entrenamiento. Ejemplo: conocer las tallas de una persona a partir de su altura y peso.

Se empezará viendo la importancia del número k . Se busca conocer la talla de una persona con 1,55 m de altura y 55 kg de peso.

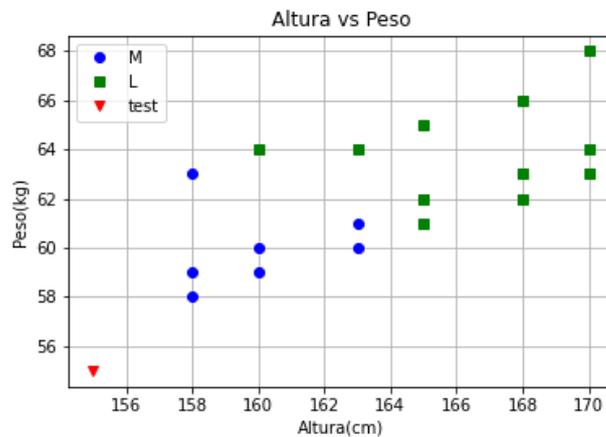


Figura 3.2: Representación objetos de entrenamiento y test (altura: 1,55 m, peso: 55 kg).

Lógicamente la talla de la persona en cuestión es una M. Sin embargo, si se elige el valor de $k > 18$, al disponer únicamente de 7 ejemplares con talla M, y de más de 7 en el caso de la talla L, la clase mayoritaria será esta última, obteniendo un resultado que no es cierto en absoluto.

En el caso anterior parece bastante obvio que la solución podría ser tomar $k = 5$, por ejemplo. Sin embargo, existen algunas configuraciones en el límite entre las dos clases, donde el error de clasificación puede pasar más desapercibido. Para ello se

representa a continuación el dato de una persona cuya altura es 1.60m y cuyo peso es 63.6kg:

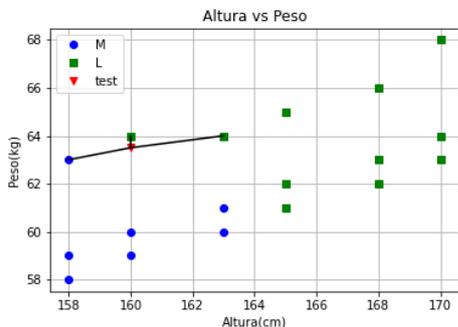


Figura 3.3: Ejemplo de clasificación con $k = 3$.

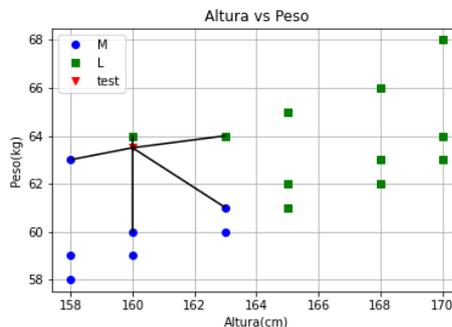


Figura 3.4: Ejemplo de clasificación con $k = 5$.

Como se puede observar, la clasificación anterior con 5 vecinos da como resultado una talla M. Sin embargo, con 3 vecinos la decisión sería una talla L.

La principal causa de esta diferencia es la poca densidad de datos que se tienen para esas alturas con un peso mayor a 64 kg. Una solución para superar el problema causado por la poca densidad de datos es el método presentado a continuación: *Radius k-NN*.

3.3. Clasificador *Radius k-NN*

El método Radius k-NN es una variación del k-NN original. La diferencia radica en que en este caso la clase del objeto test no se determinará a partir de las de los k vecinos más cercanos, sino que los que influyan en la decisión serán todos aquellos que estén a una cierta distancia máxima.

La principal mejora con respecto al clasificador visto anteriormente se mostrará a partir del ejemplo básico en \mathbb{R}^2 con el que se ha trabajado hasta ahora:

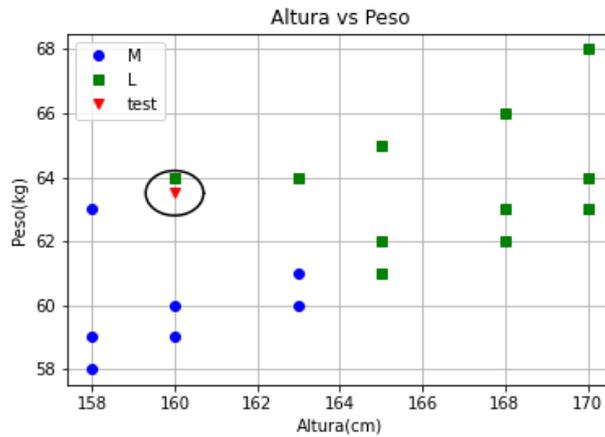


Figura 3.5: Aplicación Radius k -NN con $\text{radio} = 0.7$ (altura: 160cms, peso: 63.6kg)

En este caso, las tallas de las personas que tengan una altura y un peso muy diferente a la del sujeto de estudio no intervendrán, sea cual sea el número de vecinos que esté suficientemente cercano al objeto test.

3.3.1. Aplicación de los algoritmos k -NN y *Radius k -NN* con las equivalencias difusas y REFs

En este trabajo no sólo se presenta la implementación del algoritmo k -NN, sino la aplicación de estos métodos con otras funciones que permiten trabajar en un área mucho mayor que simplemente la distancia euclídea y la media aritmética.

En vez de la distancia euclídea se emplearán equivalencias difusas y funciones de equivalencia restringidas. No se buscará sustituir la distancia euclídea, sino la cercanía euclídea, a partir de las nuevas funciones presentadas a lo largo del trabajo. Así, para saber cómo de diferentes son dos valores de una característica, se aplicará sobre estos una equivalencia difusa o una REF, y se conocerá el valor de la cercanía en cuestión.

Dado que los objetos tendrán típicamente más de un atributo, se aplicará el mismo procedimiento a cada uno de ellos. Posteriormente, las agregaciones devuelven la cercanía final del objeto de entrenamiento al objeto test. Como se ha visto, en estas funciones está incluida la media aritmética, pero también muchas más como el máximo o el mínimo. A este último resultado también se le puede denominar *similitud* entre dos objetos.

Centrándonos en el algoritmo *Radius k -NN*, la similitud indica si el objeto de

entrenamiento está dentro del “radio” definido o no. La elección de este radio también es un factor decisivo, puesto que, al igual que ocurría con el número k , dependiendo del espacio que abarque, la decisión puede verse alterada de nuevo.

Una vez descritos los clasificadores k -NN y Radius k -NN, se profundiza en la discusión de su actuación. El objetivo principal es la comparación del rendimiento del método Radius k -NN aplicando equivalencias difusas frente a REFs.

Para realizar este estudio se tiene como base 16 conjuntos de datos, a los que se hace referencia como $data_i$, siendo i el número del conjunto en cuestión. Estos ficheros se han recuperado de <https://github.com/milaan9/Clustering-Datasets> (Milaan9, 6 de Octubre de 2021). La decisión de emplear estos datos para el análisis del método *Radius k -NN* es debido especialmente a dos causas: los objetos tienen dos características, por lo que pueden representarse gráficamente para tener una idea visual de su disposición; por otra parte, cada archivo presenta una agrupación en clases diferente, lo que aporta la variedad necesaria en el estudio. Las gráficas realizadas con estos datos pueden observarse en las figuras 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9.

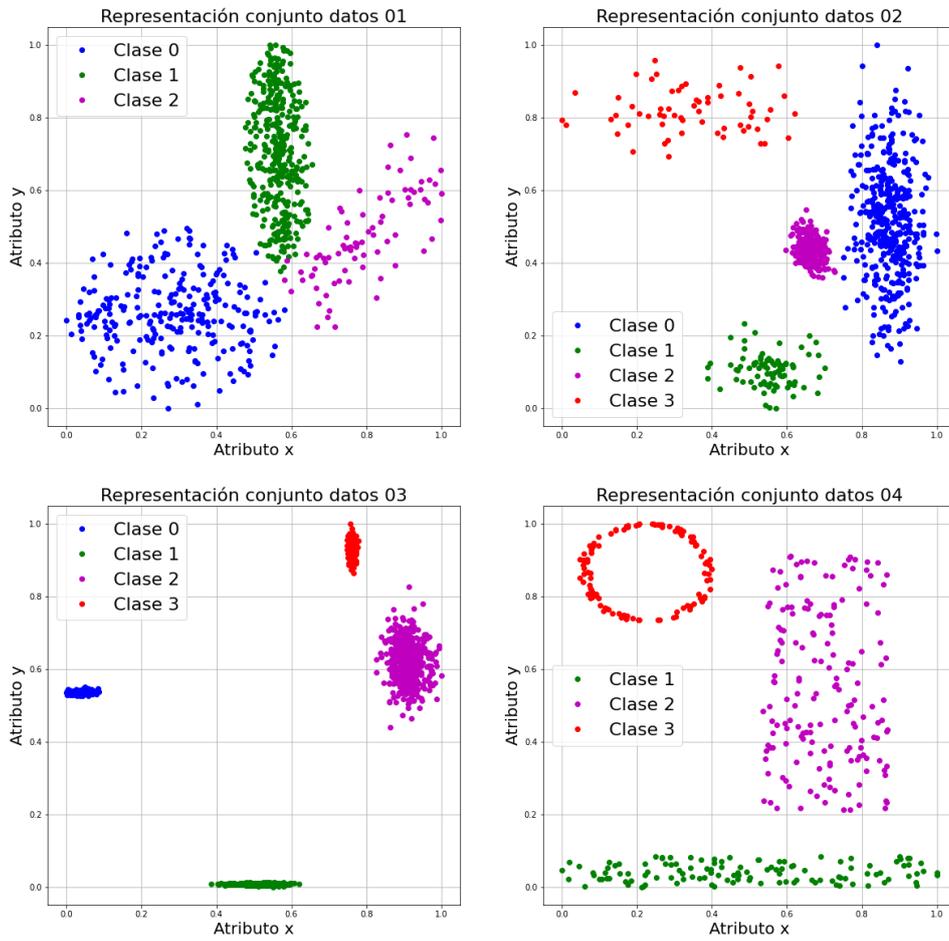


Figura 3.6: Representación de los conjuntos de datos $Data_{01}$, $Data_{02}$, $Data_{03}$ y $Data_{04}$.

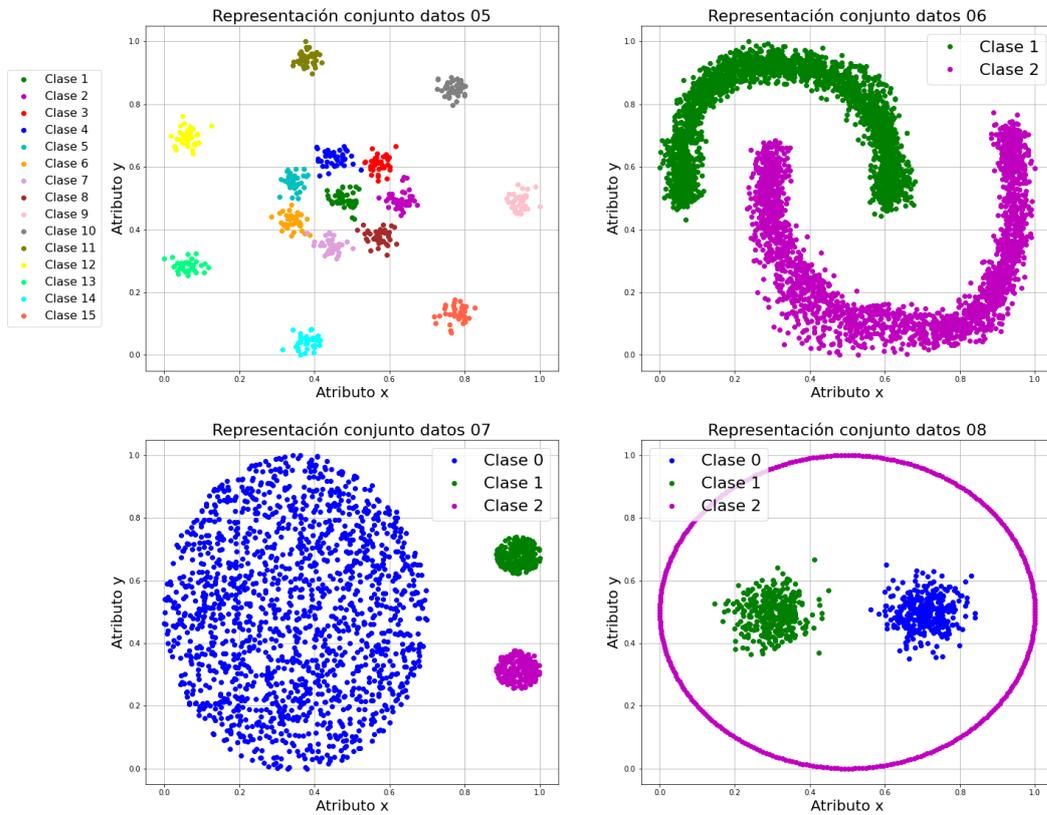


Figura 3.7: Representación de los conjuntos de datos $Data_{05}$, $Data_{06}$, $Data_{07}$ y $Data_{08}$.

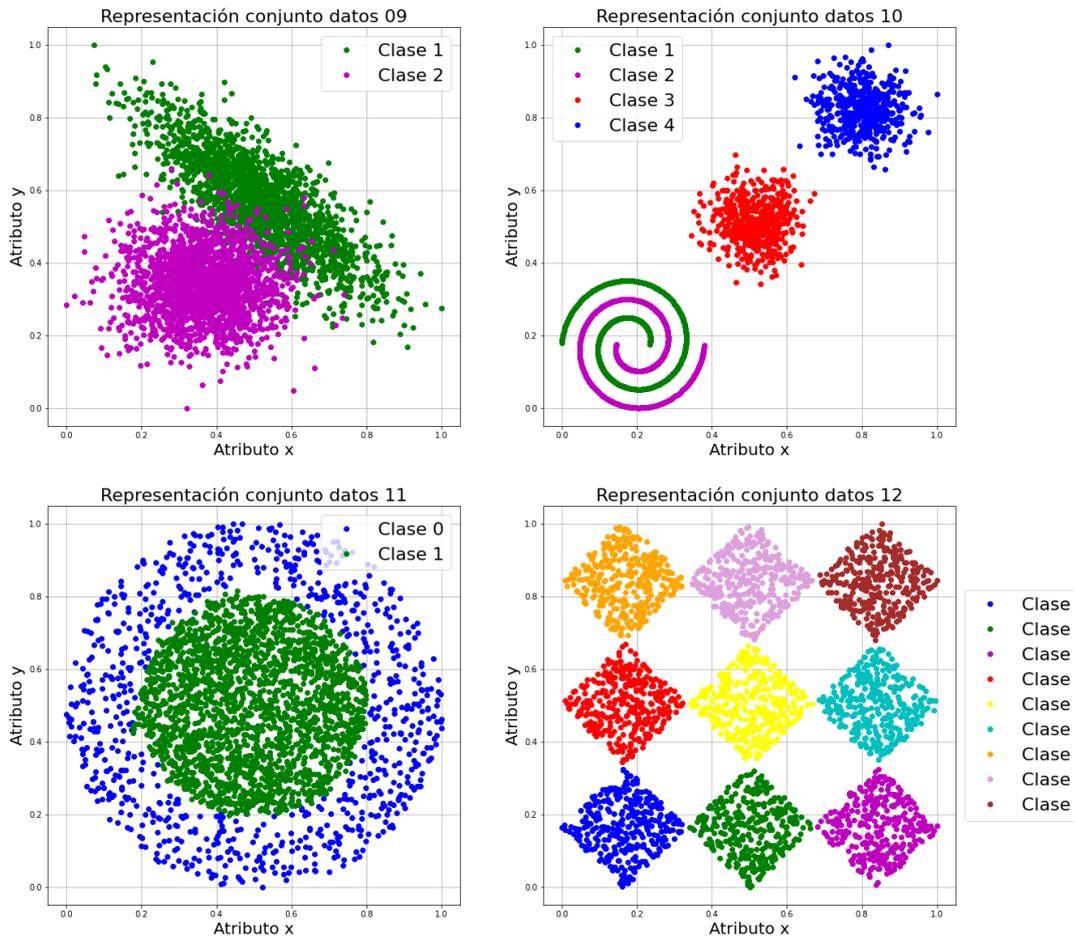


Figura 3.8: Representación de los conjuntos de datos $Data_{09}$, $Data_{10}$, $Data_{11}$ y $Data_{12}$.

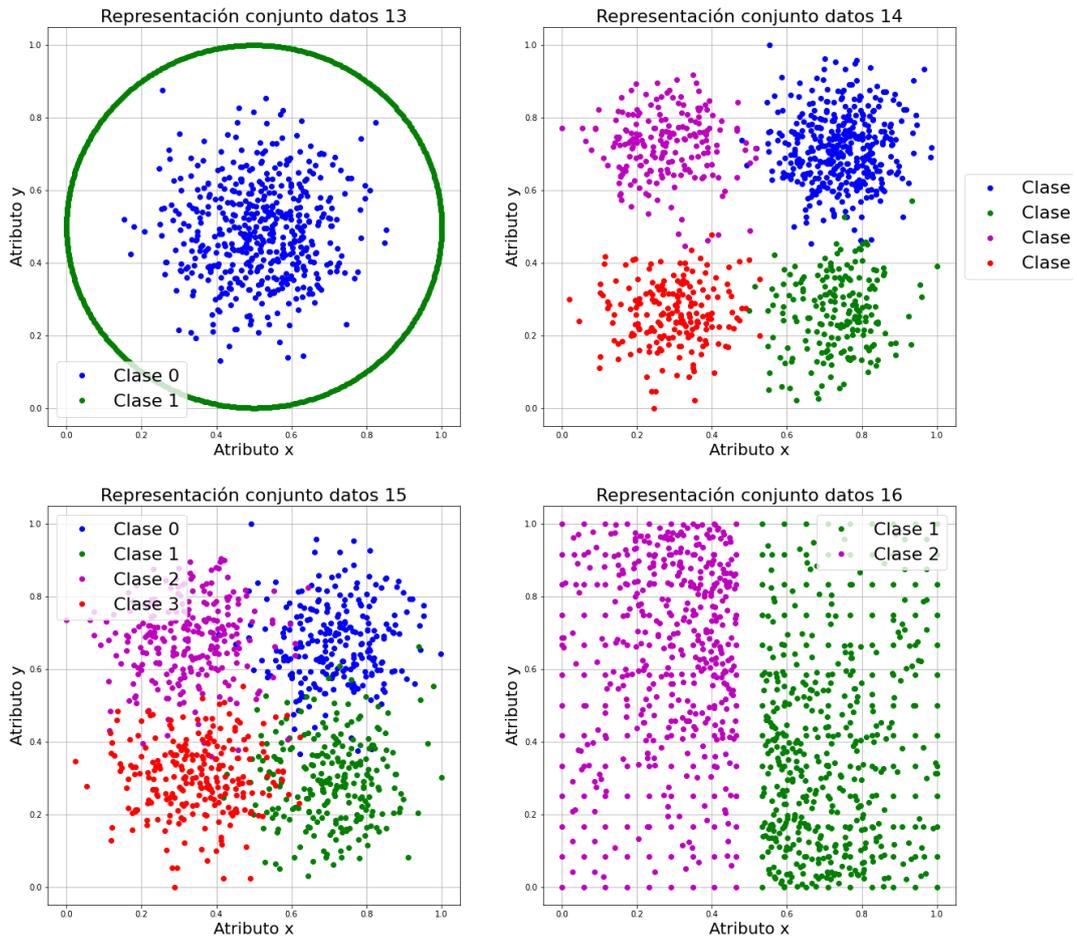


Figura 3.9: Representación de los conjuntos de datos $Data_{13}$, $Data_{14}$, $Data_{15}$ y $Data_{16}$.

3.4. Descripción del algoritmo

Para llevar a cabo este trabajo, se ha desarrollado un programa que puede aplicarse tanto a equivalencias difusas como a funciones de equivalencia restringida. La explicación de su funcionamiento se hará a partir de equivalencias difusas, siendo idéntico el correspondiente a REFs.

A continuación se presenta el pseudo-código, que se explicará detalladamente posteriormente. Se realiza para un conjunto de datos test, basándose en un conjunto de

datos de entrenamiento:

Algoritmo 1: Evaluate-all

Data: Conjunto de datos test (*test_set*), conjunto de datos de entrenamiento (*training_set*), conjunto de equivalencias difusas (*E*) y conjunto de funciones de agregación (*A*).

Result: Porcentaje de acierto para cada combinación de función de agregación y equivalencia difusa; además del número de veces que se ha recurrido al algoritmo $k - NN$.

```
for  $A_i \in A$  do
  for  $E_j \in E$  do
    | Retornar  $k - radius(A_i(E_j))$ 
  end
end
end
```

Algoritmo 2: k-radius

Data: Conjunto de datos test (*test_set*), conjunto de datos de entrenamiento (*training_set*), equivalencia difusa (E_j) y función de agregación (A_i).

Result: Porcentaje de acierto para dicha combinación; además del número de veces que se ha recurrido al algoritmo $k - NN$.

exito = 0;

if $l2= True$ then

entradas = 0;

 for $object \in test_set$ do

entrada, *prediccion*=classify-object(object);

entradas=*entradas*+*entrada*;

 if *prediccion*=*clase*(object) then

 | *exito*=*exito*+1

 end

 end

 Retornar porcentaje de éxitos y entradas

else

 for $object \in test_set$ do

prediccion=classify-object(object);

 if *prediccion*=*clase*(object) then

 | *exito*=*exito*+1

 end

 end

 Retornar porcentaje de éxitos

end

Algoritmo 3: classify-object

Data: Objeto test (*object*), conjunto de datos de entrenamiento (*training_set*), equivalencia difusa (E_j) y función de agregación (A_i).

Result: Clase del objeto test y si se ha recurrido al algoritmo k-NN.

```
for train_object ∈ training_set do
  | sim=compute_similarity(object,train_object)
end
end
if l2=True then
  | S=train_object tal que sim(train_object) > (1 - √(0,2));
  | if S = ∅ then
  |   | prediccion=k-NN(object);
  |   | entrada=1
  | else
  |   | prediccion=clase mayoritaria en S;
  |   | entrada=0
  | end
else
  | prediccion=k-NN(object);
  | entrada=1
end
Retornar prediccion y entrada
```

Algoritmo 4: compute_similarity

Data: Objeto test (*object*), objeto de entrenamiento (*train_object*), equivalencia difusa (E_j) y función de agregación (A_i).

Result: Similitud entre los dos objetos.

Retornar $A_i(E_j)$

El programa consta de cuatro funciones principalmente: *compute-similarity*, *classify-object*, *k-radius* y *evaluate-all*.

Mediante la primera de ellas, ***compute-similarity***, se calcula la cercanía entre dos objetos. Para ello, se aplica sobre cada atributo la equivalencia difusa y, una vez se tiene el valor correspondiente para cada característica, se hace actuar sobre el vector la función de agregación.

La siguiente función es la parte principal del programa: ***classify-object***. El resultado que proporciona es la clase del objeto test. Para ello, se recorren todos los objetos de entrenamiento, aplicando *compute-similarity* a cada uno de ellos, con el objeto test en cuestión. Una vez se tenga la cercanía de todos ellos al test, hay dos opciones:

- **k-NN**: en el caso de querer aplicar el algoritmo original del clasificador k-NN (correspondiente a ***l2=False***), simplemente se elegirá la clase más repetida entre

los k vecinos más cercanos.

- **Radius k-NN**: si, por el contrario, se busca obtener el resultado a partir del método Radius k-NN (correspondiente a ***l2=True***), se deberá ejecutar un paso intermedio. Se aplicará un filtro sobre todos los objetos de entrenamiento, quedándose solo con aquellos cuya cercanía al test sea mayor o igual que el “radio” determinado, que se calculará de la forma $1 - (0,2)^{1/p}$, siendo p el número de características ([14, p. 5]). Una vez hecho esto, se proseguirá de la misma forma que en el caso anterior, eligiendo la clase más común entre esos objetos que se han filtrado.

Puede ocurrir que ninguno de los objetos de entrenamiento supere esa cercanía, de tal forma que no se tendría ninguna clase con la que poder aproximar la que se busca. La solución en este caso es recurrir al clasificador k-NN, recuperando todos los objetos de entrenamiento y aplicando el procedimiento descrito en el caso anterior.

Mediante ***k-radius*** se aplica *classify-object* al número de tests que se deseen. Esta función se ha implementado de tal forma que devuelve el porcentaje de clasificaciones correctas en cada caso. Además, cuando se aplica Radius k-NN, es interesante conocer el número de veces que se ha tenido que recurrir al k-NN original, por lo que este dato se guarda en la variable *entradas*, que también es una salida de la función.

Por último, con ***evaluate-all*** se recorren todas las funciones de agregación y las equivalencias difusas, ejecutando la función *k-radius* para todas ellas.

Capítulo 4

Análisis de resultados

En primer lugar, se aplicará el método *Radius k-NN* a cada fichero. Se analizarán los resultados con las REFs estudiadas, con la función de agregación *A1-media aritmética*. Esto último es debido a que *A1* es la función de agregación que tiene un comportamiento más intuitivo y, al querer centrar el estudio en la comparación entre REFs y equivalencias difusas en vez de en las agregaciones, resulta conveniente emplear únicamente dicha función.

Cabe destacar que, como se ha visto hasta ahora en el trabajo, existen varios métodos de construcción de REFs. Si bien todos son válidos, se quiere hacer notar que el método a partir de desviaciones moderadas arroja funciones que, aunque son nuevas, son menos intuitivas, además de implicar un proceso de construcción más complejo. Más aún, muchas de las funciones obtenidas por este método se pueden conseguir también a partir de los otros métodos más sencillos (como es el caso de los resultados mediante automorfismos o funciones de implicación). Por todo ello, no se profundizará en el análisis de las funciones construidas únicamente a partir de desviaciones moderadas.

Algunas funciones de equivalencia restringidas dependen de un parámetro (λ o n), de forma que es conveniente elegir los valores que se le van a asignar a estos para el estudio. Esto se decidirá viendo la tendencia que siguen las funciones, y eligiendo entre tres o cuatro valores con los que el comportamiento de la REF varíe más notablemente. Viendo las figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5, se deciden los siguientes:

- REF_{ej6} : $n=2$, $n=3$, $n=7$.
- REF_{ej7} : $n=4$, $n=5$, $n=8$.
- REF_{ej13} : $\lambda = 0,01$, $\lambda = 0,38$, $\lambda = 0,76$.

- REF_{ej14} : $n=2, n=6, n=10$.
- REF_{ej15} : $n=2, n=6, n=10$.

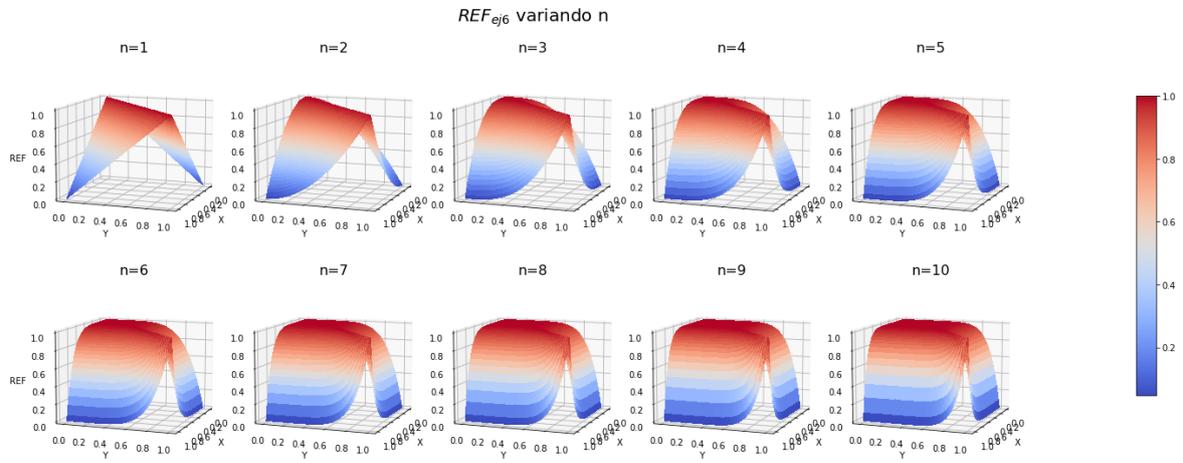


Figura 4.1: Representación de la función REF_{ej6} para distintos valores del parámetro n .

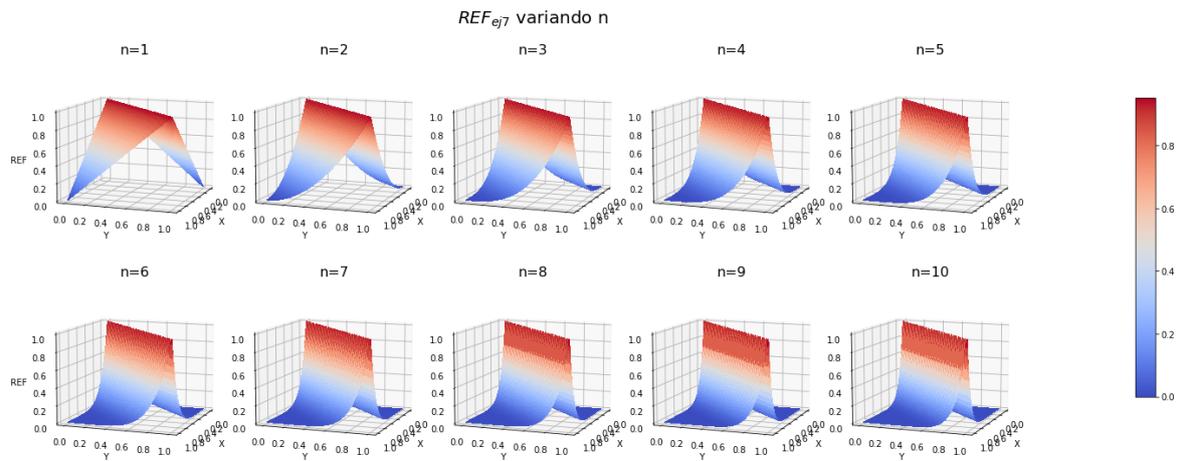


Figura 4.2: Representación de la función REF_{ej7} para distintos valores del parámetro n .

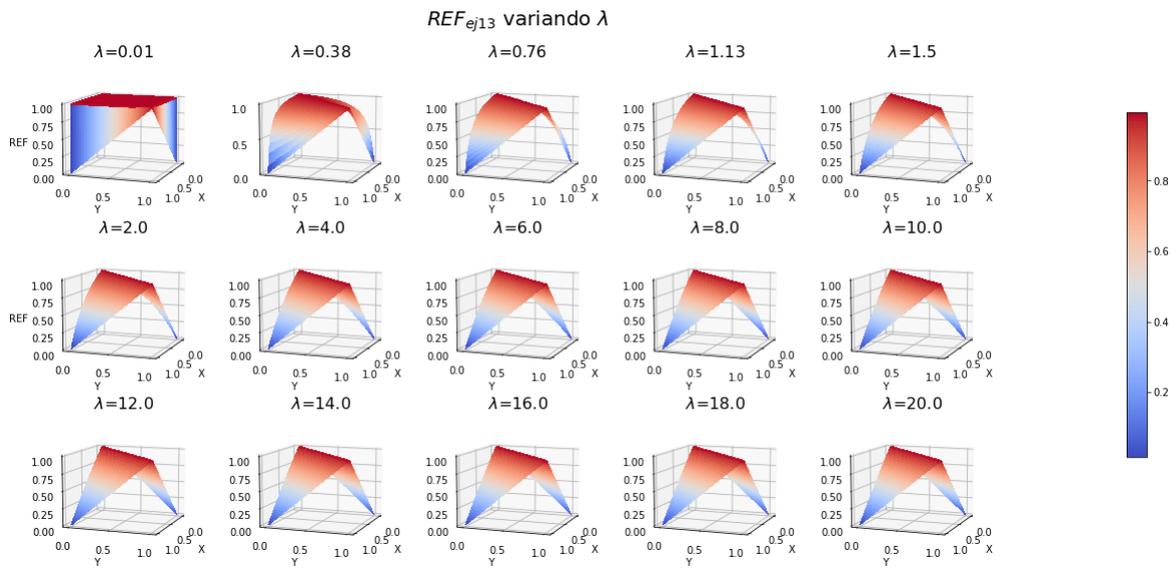


Figura 4.3: Representación de la función REF_{ej13} para distintos valores del parámetro λ .

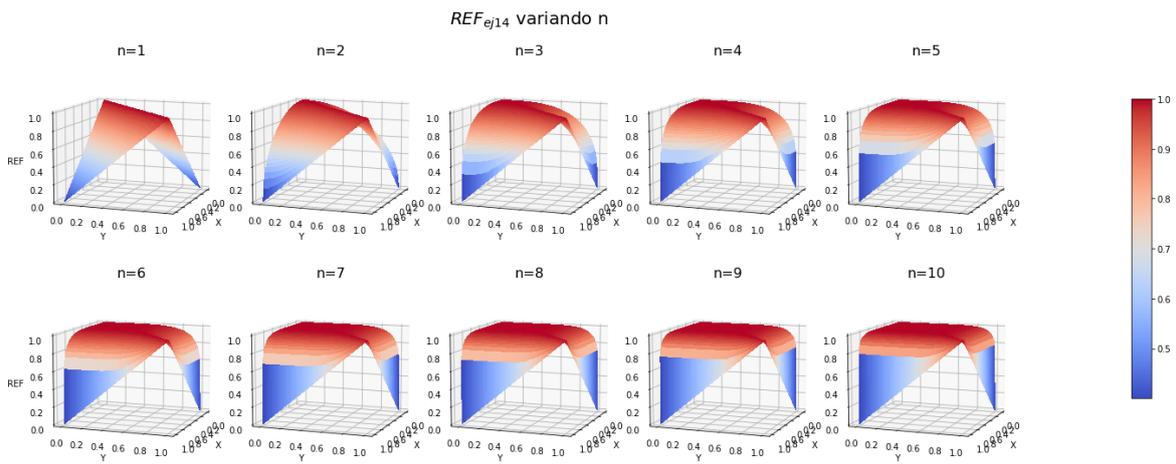


Figura 4.4: Representación de la función REF_{ej14} para distintos valores del parámetro n .

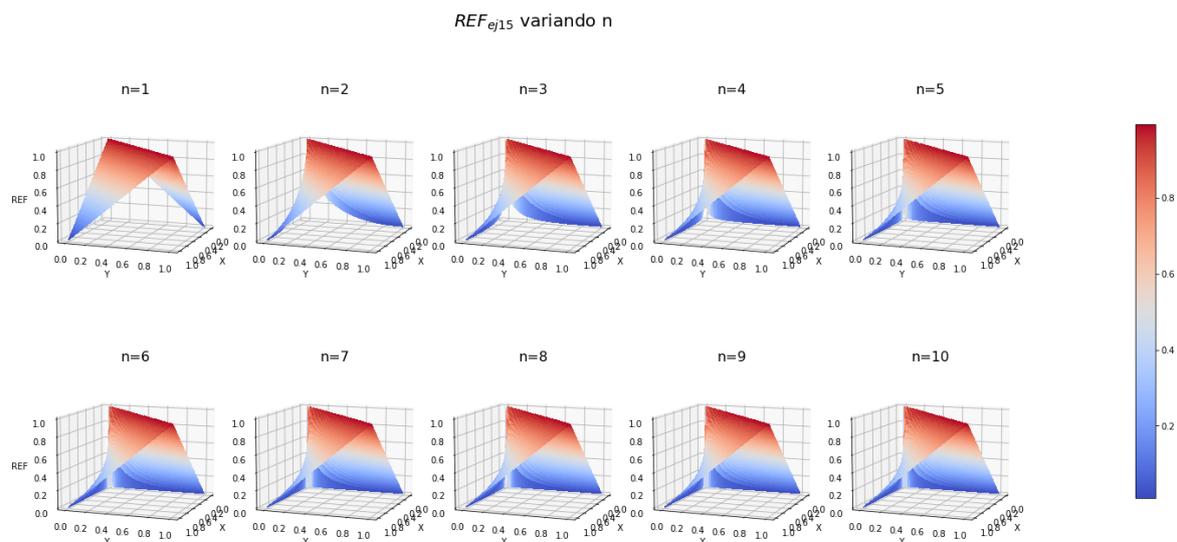


Figura 4.5: Representación de la función REF_{ej15} para distintos valores del parámetro n .

Se obtendrá así el porcentaje de acierto para cada función en cada archivo de datos, y el número de veces que se ha tenido que recurrir al algoritmo $k - NN$. Además, se ordenarán todas las REFs según el porcentaje de aciertos en cada caso, para saber a simple vista con cuál se ha obtenido un mejor resultado. El porcentaje se mostrará con un error del 0.01 % en todos los casos. En las tablas se mostrará de color azul la REF_{ej7} ; de color rojo la REF_{ej14} y de color naranja la REF_{ej4} . Esto es debido a la importancia de los rendimientos de cada una de ellas, que se discutirán una vez vistos todos los resultados.

4.1. Resultados *Radius k-NN* con REFs

DATA ₀₁			DATA ₀₁ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas	REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	72,03	0	REF_{ej7} (n=8)	98,60	0
E_{FD}	88,81	8	REF_{ej7} (n=5)	95,80	0
E_{LK}^R	89,51	0	REF_{ej7} (n=4)	92,31	0
E_{FD}^R	90,21	0	E_{FD}^R	90,21	0
E_6	88,11	0	E_{LK}^R	89,51	0
REF_{ej1}	82,52	0	E_{FD}	88,81	8
REF_{ej2}	60,14	0	REF_{FD2}	88,81	8
REF_{ej3}	83,22	0	E_6	88,11	0
REF_{ej4}	29,37	143	REF_{ej10}	85,31	0
REF_{ej5}	72,03	0	REF_{ej12}	85,31	0
REF_{ej6} (n=2)	73,43	0	REF_{ej3}	83,22	0
REF_{ej6} (n=3)	60,14	0	REF_{ej15} (n=6)	83,22	0
REF_{ej6} (n=7)	60,84	0	REF_{ej15} (n=10)	83,22	0
REF_{ej7} (n=4)	92,31	0	REF_{ej1}	82,52	0
REF_{ej7} (n=5)	95,80	0	REF_{ej15} (n=2)	81,12	0
REF_{ej7} (n=8)	98,60	0	REF_{ej11}	79,72	0
REF_{ej8}	78,32	0	REF_{ej8}	78,32	0
REF_{ej9}	60,14	0	REF_{ej6} (n=2)	73,43	0
REF_{ej10}	85,31	0	E_{LK}	72,03	0
REF_{BZ}	65,73	0	REF_{ej5}	72,03	0
REF_{LK2}	72,03	0	REF_{LK2}	72,03	0
REF_{FD2}	88,81	8	REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	67,83	0
REF_{ej11}	79,72	0	REF_{BZ}	65,73	0
REF_{ej12}	85,31	0	REF_{ej6} (n=7)	60,84	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	60,14	0	REF_{ej2}	60,14	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	60,14	0	REF_{ej6} (n=3)	60,14	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	60,14	0	REF_{ej9}	60,14	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	67,83	0	REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	60,14	0
REF_{ej14} (n=2)	60,14	0	REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	60,14	0
REF_{ej14} (n=6)	60,14	0	REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	60,14	0
REF_{ej14} (n=10)	60,14	0	REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	60,14	0
REF_{ej15} (n=2)	81,12	0	REF_{ej14} (n=2)	60,14	0
REF_{ej15} (n=6)	83,22	0	REF_{ej14} (n=6)	60,14	0
REF_{ej15} (n=10)	83,22	0	REF_{ej14} (n=10)	60,14	0
			REF_{ej4}	29,37	143

Tabla 4.1: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{01}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₂		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	47,98	0
E_{FD}	72,25	0
E_{LK}^R	53,17	0
E_{FD}^R	57,22	0
E_6	52,60	0
REF_{ej1}	47,98	0
REF_{ej2}	47,98	0
REF_{ej3}	51,45	0
REF_{ej4}	47,40	172
REF_{ej5}	47,98	0
REF_{ej6} (n=2)	47,98	0
REF_{ej6} (n=3)	47,98	0
REF_{ej6} (n=7)	47,98	0
REF_{ej7} (n=4)	99,42	0
REF_{ej7} (n=5)	97,11	0
REF_{ej7} (n=8)	97,11	0
REF_{ej8}	47,98	0
REF_{ej9}	47,98	0
REF_{ej10}	49,13	0
REF_{BZ}	47,98	0
REF_{LK2}	47,98	0
REF_{FD2}	72,25	0
REF_{ej11}	47,98	0
REF_{ej12}	49,13	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	47,98	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	47,98	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	47,98	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	47,98	0
REF_{ej14} (n=2)	47,98	0
REF_{ej14} (n=6)	47,98	0
REF_{ej14} (n=10)	47,98	0
REF_{ej15} (n=2)	49,13	0
REF_{ej15} (n=6)	52,02	0
REF_{ej15} (n=10)	52,60	0

DATA ₀₂ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=4)	99,42	0
REF_{ej7} (n=5)	97,11	0
REF_{ej7} (n=8)	97,11	0
E_{FD}	72,25	0
REF_{FD2}	72,25	0
E_{FD}^R	57,22	0
E_{LK}^R	53,17	0
E_6	52,60	0
REF_{ej15} (n=10)	52,60	0
REF_{ej15} (n=6)	52,02	0
REF_{ej3}	51,45	0
REF_{ej10}	49,13	0
REF_{ej12}	49,13	0
REF_{ej15} (n=2)	49,13	0
E_{LK}	47,98	0
REF_{ej1}	47,98	0
REF_{ej2}	47,98	0
REF_{ej5}	47,98	0
REF_{ej6} (n=2)	47,98	0
REF_{ej6} (n=3)	47,98	0
REF_{ej6} (n=7)	47,98	0
REF_{ej8}	47,98	0
REF_{ej9}	47,98	0
REF_{BZ}	47,98	0
REF_{LK2}	47,98	0
REF_{ej11}	47,98	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	47,98	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	47,98	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	47,98	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	47,98	0
REF_{ej14} (n=2)	47,98	0
REF_{ej14} (n=6)	47,98	0
REF_{ej14} (n=10)	47,98	0
REF_{ej4}	47,40	172

Tabla 4.2: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{02}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₃		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	92,06	0
E_{FD}	92,06	0
E_{LK}^R	92,06	0
E_{FD}^R	92,06	0
E_6	92,06	0
REF_{ej1}	92,06	0
REF_{ej2}	40,08	0
REF_{ej3}	92,06	0
REF_{ej4}	40,87	248
REF_{ej5}	92,06	0
REF_{ej6} (n=2)	77,38	0
REF_{ej6} (n=3)	65,48	0
REF_{ej6} (n=7)	42,06	0
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej8}	92,06	0
REF_{ej9}	40,08	0
REF_{ej10}	92,06	0
REF_{BZ}	79,76	0
REF_{LK2}	92,06	0
REF_{FD2}	92,06	0
REF_{ej11}	92,06	0
REF_{ej12}	92,06	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	40,08	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	40,08	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	40,08	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	77,38	0
REF_{ej14} (n=2)	40,08	0
REF_{ej14} (n=6)	40,08	0
REF_{ej14} (n=10)	40,08	0
REF_{ej15} (n=2)	92,06	0
REF_{ej15} (n=6)	92,06	1
REF_{ej15} (n=10)	92,06	1

DATA ₀₃ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
E_{LK}	92,06	0
E_{FD}	92,06	0
E_{LK}^R	92,06	0
E_{FD}^R	92,06	0
E_6	92,06	0
REF_{ej1}	92,06	0
REF_{ej3}	92,06	0
REF_{ej5}	92,06	0
REF_{ej8}	92,06	0
REF_{ej10}	92,06	0
REF_{LK2}	92,06	0
REF_{FD2}	92,06	0
REF_{ej11}	92,06	0
REF_{ej12}	92,06	0
REF_{ej15} (n=2)	92,06	0
REF_{ej15} (n=6)	92,06	1
REF_{ej15} (n=10)	92,06	1
REF_{BZ}	79,76	0
REF_{ej6} (n=2)	77,38	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	77,38	0
REF_{ej6} (n=3)	65,48	0
REF_{ej6} (n=7)	42,06	0
REF_{ej4}	40,87	248
REF_{ej2}	40,08	0
REF_{ej9}	40,08	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	40,08	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	40,08	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	40,08	0
REF_{ej14} (n=2)	40,08	0
REF_{ej14} (n=6)	40,08	0
REF_{ej14} (n=10)	40,08	0
REF_{ej15} (n=2)	92,06	0
REF_{ej15} (n=6)	92,06	1
REF_{ej15} (n=10)	92,06	1

Tabla 4.3: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{03}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₄		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	67,50	0
E_{FD}	90,00	1
E_{LK}^R	100,00	0
E_{FD}^R	87,50	0
E_6	100,00	0
REF_{ej1}	88,75	0
REF_{ej2}	41,25	0
REF_{ej3}	96,25	0
REF_{ej4}	52,50	68
REF_{ej5}	67,50	0
REF_{ej6} (n=2)	62,50	0
REF_{ej6} (n=3)	52,50	0
REF_{ej6} (n=7)	46,25	0
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej8}	83,75	0
REF_{ej9}	41,25	0
REF_{ej10}	86,25	0
REF_{BZ}	56,25	0
REF_{LK2}	67,50	0
REF_{FD2}	90,00	1
REF_{ej11}	83,75	0
REF_{ej12}	86,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	41,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	41,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	41,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	58,75	0
REF_{ej14} (n=2)	41,25	0
REF_{ej14} (n=6)	41,25	0
REF_{ej14} (n=10)	41,25	0
REF_{ej15} (n=2)	91,25	0
REF_{ej15} (n=6)	97,50	0
REF_{ej15} (n=10)	100,00	0

DATA ₀₄ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
E_{LK}^R	100,00	0
E_6	100,00	0
REF_{ej15} (n=10)	100,00	0
REF_{ej15} (n=6)	97,50	0
REF_{ej3}	96,25	0
REF_{ej15} (n=2)	91,25	0
E_{FD}	90,00	1
REF_{FD2}	90,00	1
REF_{ej1}	88,75	0
E_{FD}^R	87,50	0
REF_{ej10}	86,25	0
REF_{ej12}	86,25	0
REF_{ej8}	83,75	0
REF_{ej11}	83,75	0
E_{LK}	67,50	0
REF_{ej5}	67,50	0
REF_{LK2}	67,50	0
REF_{ej6} (n=2)	62,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	58,75	0
REF_{BZ}	56,25	0
REF_{ej4}	52,50	68
REF_{ej6} (n=3)	52,50	0
REF_{ej6} (n=7)	46,25	0
REF_{ej2}	41,25	0
REF_{ej9}	41,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	41,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	41,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	41,25	0
REF_{ej14} (n=2)	41,25	0
REF_{ej14} (n=6)	41,25	0
REF_{ej14} (n=10)	41,25	0
REF_{ej14} (n=2)	41,25	0
REF_{ej14} (n=6)	41,25	0
REF_{ej14} (n=10)	41,25	0

Tabla 4.4: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{04}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₅		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	3,33	0
E_{FD}	21,67	8
E_{LK}^R	7,50	0
E_{FD}^R	19,17	3
E_6	3,33	0
REF_{ej1}	3,33	0
REF_{ej2}	3,33	0
REF_{ej3}	25,00	0
REF_{ej4}	15,83	98
REF_{ej5}	3,33	0
REF_{ej6} (n=2)	3,33	0
REF_{ej6} (n=3)	3,33	0
REF_{ej6} (n=7)	4,17	0
REF_{ej7} (n=4)	60,00	0
REF_{ej7} (n=5)	63,33	0
REF_{ej7} (n=8)	99,17	0
REF_{ej8}	3,33	0
REF_{ej9}	3,33	0
REF_{ej10}	3,33	0
REF_{BZ}	3,33	0
REF_{LK2}	3,33	0
REF_{FD2}	21,67	8
REF_{ej11}	3,33	0
REF_{ej12}	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	3,33	0
REF_{ej14} (n=2)	3,33	0
REF_{ej14} (n=6)	3,33	0
REF_{ej14} (n=10)	3,33	0
REF_{ej15} (n=2)	6,67	0
REF_{ej15} (n=6)	27,50	1
REF_{ej15} (n=10)	29,17	1

DATA ₀₅ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=8)	99,17	0
REF_{ej7} (n=5)	63,33	0
REF_{ej7} (n=4)	60,00	0
REF_{ej15} (n=10)	29,17	1
REF_{ej15} (n=6)	27,50	1
REF_{ej3}	25,00	0
E_{FD}	21,67	8
REF_{FD2}	21,67	8
E_{FD}^R	19,17	3
REF_{ej4}	15,83	98
E_{LK}^R	7,50	0
REF_{ej15} (n=2)	6,67	0
REF_{ej6} (n=7)	4,17	0
E_{LK}	3,33	0
E_6	3,33	0
REF_{ej1}	3,33	0
REF_{ej2}	3,33	0
REF_{ej5}	3,33	0
REF_{ej6} (n=2)	3,33	0
REF_{ej6} (n=3)	3,33	0
REF_{ej8}	3,33	0
REF_{ej9}	3,33	0
REF_{ej10}	3,33	0
REF_{BZ}	3,33	0
REF_{LK2}	3,33	0
REF_{ej11}	3,33	0
REF_{ej12}	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	3,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	3,33	0
REF_{ej14} (n=2)	3,33	0
REF_{ej14} (n=6)	3,33	0
REF_{ej14} (n=10)	3,33	0

Tabla 4.5: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{05}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₆		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	84,72	0
E_{FD}	88,98	0
E_{LK}^R	87,21	0
E_{FD}^R	85,55	0
E_6	84,82	0
REF_{ej1}	79,42	0
REF_{ej2}	53,12	0
REF_{ej3}	81,91	0
REF_{ej4}	94,07	0
REF_{ej5}	84,72	0
REF_{ej6} (n=2)	81,19	0
REF_{ej6} (n=3)	79,83	0
REF_{ej6} (n=7)	72,14	0
REF_{ej7} (n=4)	98,75	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej8}	83,58	0
REF_{ej9}	53,12	0
REF_{ej10}	84,10	0
REF_{BZ}	77,44	0
REF_{LK2}	84,72	0
REF_{FD2}	88,98	0
REF_{ej11}	79,94	0
REF_{ej12}	84,10	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	53,12	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	53,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	69,65	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	83,26	0
REF_{ej14} (n=2)	70,58	0
REF_{ej14} (n=6)	53,12	0
REF_{ej14} (n=10)	53,12	0
REF_{ej15} (n=2)	81,29	0
REF_{ej15} (n=6)	82,02	0
REF_{ej15} (n=10)	83,06	0

DATA ₀₆ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej7} (n=4)	98,75	0
REF_{ej4}	94,07	0
E_{FD}	88,98	0
REF_{FD2}	88,98	0
E_{LK}^R	87,21	0
E_{FD}^R	85,55	0
E_6	84,82	0
E_{LK}	84,72	0
REF_{ej5}	84,72	0
REF_{LK2}	84,72	0
REF_{ej10}	84,10	0
REF_{ej12}	84,10	0
REF_{ej8}	83,58	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	83,26	0
REF_{ej15} (n=10)	83,06	0
REF_{ej15} (n=6)	82,02	0
REF_{ej3}	81,91	0
REF_{ej15} (n=2)	81,29	0
REF_{ej6} (n=2)	81,19	0
REF_{ej11}	79,94	0
REF_{ej6} (n=3)	79,83	0
REF_{ej1}	79,42	0
REF_{BZ}	77,44	0
REF_{ej6} (n=7)	72,14	0
REF_{ej14} (n=2)	70,58	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	69,65	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	53,33	0
REF_{ej2}	53,12	0
REF_{ej9}	53,12	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	53,12	0
REF_{ej14} (n=6)	53,12	0
REF_{ej14} (n=10)	53,12	0
REF_{ej14} (n=6)	53,12	0
REF_{ej14} (n=10)	53,12	0

Tabla 4.6: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{06}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₇		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	81,25	0
E_{FD}	74,00	13
E_{LK}^R	85,50	0
E_{FD}^R	79,50	2
E_6	81,25	0
REF_{ej1}	81,25	0
REF_{ej2}	81,25	0
REF_{ej3}	81,25	0
REF_{ej4}	81,25	400
REF_{ej5}	81,25	0
REF_{ej6} (n=2)	81,25	0
REF_{ej6} (n=3)	82,00	0
REF_{ej6} (n=7)	83,00	0
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej8}	81,25	0
REF_{ej9}	81,25	0
REF_{ej10}	81,25	0
REF_{BZ}	81,25	0
REF_{LK2}	81,25	0
REF_{FD2}	74,00	13
REF_{ej11}	81,25	0
REF_{ej12}	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	81,25	0
REF_{ej14} (n=2)	81,25	0
REF_{ej14} (n=6)	81,25	0
REF_{ej14} (n=10)	81,25	0
REF_{ej15} (n=2)	81,25	0
REF_{ej15} (n=6)	81,25	1
REF_{ej15} (n=10)	81,25	1

DATA ₀₇ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
E_{LK}^R	85,50	0
REF_{ej6} (n=7)	83,00	0
REF_{ej6} (n=3)	82,00	0
E_{LK}	81,25	0
E_6	81,25	0
REF_{ej1}	81,25	0
REF_{ej2}	81,25	0
REF_{ej3}	81,25	0
REF_{ej4}	81,25	400
REF_{ej5}	81,25	0
REF_{ej6} (n=2)	81,25	0
REF_{ej8}	81,25	0
REF_{ej9}	81,25	0
REF_{ej10}	81,25	0
REF_{BZ}	81,25	0
REF_{LK2}	81,25	0
REF_{ej11}	81,25	0
REF_{ej12}	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	81,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	81,25	0
REF_{ej14} (n=2)	81,25	0
REF_{ej14} (n=6)	81,25	0
REF_{ej14} (n=10)	81,25	0
REF_{ej15} (n=2)	81,25	0
REF_{ej15} (n=6)	81,25	1
REF_{ej15} (n=10)	81,25	1
E_{FD}^R	79,50	2
E_{FD}	74,00	13
REF_{FD2}	74,00	13

Tabla 4.7: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{07}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₈		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	31,00	0
E_{FD}	73,50	2
E_{LK}^R	58,50	0
E_{FD}^R	71,50	0
E_6	41,00	0
REF_{ej1}	43,50	0
REF_{ej2}	31,00	0
REF_{ej3}	48,50	0
REF_{ej4}	60,00	138
REF_{ej5}	31,00	0
REF_{ej6} (n=2)	32,00	0
REF_{ej6} (n=3)	34,50	0
REF_{ej6} (n=7)	35,00	0
REF_{ej7} (n=4)	94,50	0
REF_{ej7} (n=5)	95,50	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej8}	32,50	0
REF_{ej9}	31,00	0
REF_{ej10}	37,00	0
REF_{BZ}	31,00	0
REF_{LK2}	31,00	0
REF_{FD2}	73,50	2
REF_{ej11}	37,00	0
REF_{ej12}	37,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	31,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	31,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	31,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	31,00	0
REF_{ej14} (n=2)	31,00	0
REF_{ej14} (n=6)	31,00	0
REF_{ej14} (n=10)	31,00	0
REF_{ej15} (n=2)	35,50	0
REF_{ej15} (n=6)	50,50	0
REF_{ej15} (n=10)	55,50	0

DATA ₀₈ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	95,50	0
REF_{ej7} (n=4)	94,50	0
E_{FD}	73,50	2
REF_{FD2}	73,50	2
E_{FD}^R	71,50	0
REF_{ej4}	60,00	138
E_{LK}^R	58,50	0
REF_{ej15} (n=10)	55,50	0
REF_{ej15} (n=6)	50,50	0
REF_{ej3}	48,50	0
REF_{ej1}	43,50	0
E_6	41,00	0
REF_{ej10}	37,00	0
REF_{ej11}	37,00	0
REF_{ej12}	37,00	0
REF_{ej15} (n=2)	35,50	0
REF_{ej6} (n=7)	35,00	0
REF_{ej6} (n=3)	34,50	0
REF_{ej8}	32,50	0
REF_{ej6} (n=2)	32,00	0
E_{LK}	31,00	0
REF_{ej2}	31,00	0
REF_{ej5}	31,00	0
REF_{ej9}	31,00	0
REF_{BZ}	31,00	0
REF_{LK2}	31,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	31,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	31,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	31,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	31,00	0
REF_{ej14} (n=2)	31,00	0
REF_{ej14} (n=6)	31,00	0
REF_{ej14} (n=10)	31,00	0
REF_{ej14} (n=2)	31,00	0
REF_{ej14} (n=6)	31,00	0
REF_{ej14} (n=10)	31,00	0

Tabla 4.8: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{08}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₉		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	50,79	0
E_{FD}	94,87	83
E_{LK}^R	81,20	0
E_{FD}^R	93,65	20
E_6	73,50	0
REF_{ej1}	72,41	0
REF_{ej2}	49,33	0
REF_{ej3}	88,89	0
REF_{ej4}	50,79	817
REF_{ej5}	50,79	0
REF_{ej6} (n=2)	49,45	0
REF_{ej6} (n=3)	49,33	0
REF_{ej6} (n=7)	49,33	0
REF_{ej7} (n=4)	95,12	0
REF_{ej7} (n=5)	95,60	0
REF_{ej7} (n=8)	95,97	0
REF_{ej8}	59,22	0
REF_{ej9}	49,33	0
REF_{ej10}	63,74	0
REF_{BZ}	50,18	0
REF_{LK2}	50,79	0
REF_{FD2}	94,87	83
REF_{ej11}	65,93	0
REF_{ej12}	63,74	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	49,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	49,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	49,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	49,33	0
REF_{ej14} (n=2)	49,33	0
REF_{ej14} (n=6)	49,33	0
REF_{ej14} (n=10)	49,33	0
REF_{ej15} (n=2)	80,83	0
REF_{ej15} (n=6)	89,26	0
REF_{ej15} (n=10)	88,89	0

DATA ₀₉ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=8)	95,97	0
REF_{ej7} (n=5)	95,60	0
REF_{ej7} (n=4)	95,12	0
E_{FD}	94,87	83
REF_{FD2}	94,87	83
E_{FD}^R	93,65	20
REF_{ej15} (n=6)	89,26	0
REF_{ej3}	88,89	0
REF_{ej15} (n=10)	88,89	0
E_{LK}^R	81,20	0
REF_{ej15} (n=2)	80,83	0
E_6	73,50	0
REF_{ej1}	72,41	0
REF_{ej11}	65,93	0
REF_{ej10}	63,74	0
REF_{ej12}	63,74	0
REF_{ej8}	59,22	0
E_{LK}	50,79	0
REF_{ej4}	50,79	817
REF_{ej5}	50,79	0
REF_{LK2}	50,79	0
REF_{BZ}	50,18	0
REF_{ej6} (n=2)	49,45	0
REF_{ej2}	49,33	0
REF_{ej6} (n=3)	49,33	0
REF_{ej6} (n=7)	49,33	0
REF_{ej9}	49,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	49,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	49,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	49,33	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	49,33	0
REF_{ej14} (n=2)	49,33	0
REF_{ej14} (n=6)	49,33	0
REF_{ej14} (n=10)	49,33	0

Tabla 4.9: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{09}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₀			DATA ₁₀ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas	REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	39,25	0	REF_{ej7} (n=5)	82,25	0
E_{FD}	63,00	64	REF_{ej7} (n=4)	81,50	0
E_{LK}^R	74,25	0	REF_{ej7} (n=8)	79,25	0
E_{FD}^R	59,25	27	E_{LK}^R	74,25	0
E_6	73,00	0	E_6	73,00	0
REF_{ej1}	49,25	0	E_{FD}	63,00	64
REF_{ej2}	22,75	0	REF_{FD2}	63,00	64
REF_{ej3}	57,00	0	E_{FD}^R	59,25	27
REF_{ej4}	25,00	399	REF_{ej15} (n=6)	58,50	0
REF_{ej5}	39,25	0	REF_{ej15} (n=10)	58,00	0
REF_{ej6} (n=2)	46,50	0	REF_{ej10}	57,50	0
REF_{ej6} (n=3)	47,75	0	REF_{ej12}	57,50	0
REF_{ej6} (n=7)	45,00	0	REF_{ej3}	57,00	0
REF_{ej7} (n=4)	81,50	0	REF_{ej15} (n=2)	56,00	0
REF_{ej7} (n=5)	82,25	0	REF_{ej1}	49,25	0
REF_{ej7} (n=8)	79,25	0	REF_{ej6} (n=3)	47,75	0
REF_{ej8}	44,50	0	REF_{ej11}	47,25	0
REF_{ej9}	22,75	0	REF_{ej6} (n=2)	46,50	0
REF_{ej10}	57,50	0	REF_{ej6} (n=7)	45,00	0
REF_{BZ}	38,25	0	REF_{ej8}	44,50	0
REF_{LK2}	39,25	0	E_{LK}	39,25	0
REF_{FD2}	63,00	64	REF_{ej5}	39,25	0
REF_{ej11}	47,25	0	REF_{LK2}	39,25	0
REF_{ej12}	57,50	0	REF_{BZ}	38,25	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	22,75	0	REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	29,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	22,75	0	REF_{ej4}	25,00	399
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	22,75	0	REF_{ej2}	22,75	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	29,50	0	REF_{ej9}	22,75	0
REF_{ej14} (n=2)	22,75	0	REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	22,75	0
REF_{ej14} (n=6)	22,75	0	REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	22,75	0
REF_{ej14} (n=10)	22,75	0	REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	22,75	0
REF_{ej15} (n=2)	56,00	0	REF_{ej14} (n=2)	22,75	0
REF_{ej15} (n=6)	58,50	0	REF_{ej14} (n=6)	22,75	0
REF_{ej15} (n=10)	58,00	0	REF_{ej14} (n=10)	22,75	0

Tabla 4.10: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{10}$ con el método $Radius\ k\text{-}NN$ empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo $k\text{-}NN$. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₁		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	70,50	0
E_{FD}	70,00	29
E_{LK}^R	70,50	0
E_{FD}^R	70,33	10
E_6	70,50	0
REF_{ej1}	70,50	0
REF_{ej2}	70,50	0
REF_{ej3}	70,67	0
REF_{ej4}	29,33	598
REF_{ej5}	70,50	0
REF_{ej6} (n=2)	70,50	0
REF_{ej6} (n=3)	70,50	0
REF_{ej6} (n=7)	70,50	0
REF_{ej7} (n=4)	77,33	0
REF_{ej7} (n=5)	83,67	0
REF_{ej7} (n=8)	91,00	0
REF_{ej8}	70,50	0
REF_{ej9}	70,50	0
REF_{ej10}	70,50	0
REF_{BZ}	70,50	0
REF_{LK2}	70,50	0
REF_{FD2}	70,00	29
REF_{ej11}	70,50	0
REF_{ej12}	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	70,50	0
REF_{ej14} (n=2)	70,50	0
REF_{ej14} (n=6)	70,50	0
REF_{ej14} (n=10)	70,50	0
REF_{ej15} (n=2)	70,50	0
REF_{ej15} (n=6)	71,00	0
REF_{ej15} (n=10)	71,17	0

DATA ₁₁ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=8)	91,00	0
REF_{ej7} (n=5)	83,67	0
REF_{ej7} (n=4)	77,33	0
REF_{ej15} (n=10)	71,17	0
REF_{ej15} (n=6)	71,00	0
REF_{ej3}	70,67	0
E_{LK}	70,50	0
E_{LK}^R	70,50	0
E_6	70,50	0
REF_{ej1}	70,50	0
REF_{ej2}	70,50	0
REF_{ej5}	70,50	0
REF_{ej6} (n=2)	70,50	0
REF_{ej6} (n=3)	70,50	0
REF_{ej6} (n=7)	70,50	0
REF_{ej8}	70,50	0
REF_{ej9}	70,50	0
REF_{ej10}	70,50	0
REF_{BZ}	70,50	0
REF_{LK2}	70,50	0
REF_{ej11}	70,50	0
REF_{ej12}	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	70,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	70,50	0
REF_{ej14} (n=2)	70,50	0
REF_{ej14} (n=6)	70,50	0
REF_{ej14} (n=10)	70,50	0
REF_{ej15} (n=2)	70,50	0
E_{FD}^R	70,33	10
E_{FD}	70,00	29
REF_{FD2}	70,00	29
REF_{ej4}	29,33	598

Tabla 4.11: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{11}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₂		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	19,17	0
E_{FD}	24,17	28
E_{LK}^R	55,83	0
E_{FD}^R	21,83	5
E_6	37,33	0
REF_{ej1}	30,33	0
REF_{ej2}	9,00	0
REF_{ej3}	39,33	0
REF_{ej4}	11,00	587
REF_{ej5}	19,17	0
REF_{ej6} (n=2)	21,00	0
REF_{ej6} (n=3)	20,67	0
REF_{ej6} (n=7)	18,67	0
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej8}	20,67	0
REF_{ej9}	9,00	0
REF_{ej10}	19,17	0
REF_{BZ}	19,17	0
REF_{LK2}	19,17	0
REF_{FD2}	24,17	28
REF_{ej11}	25,17	0
REF_{ej12}	19,17	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	9,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	13,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	19,17	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	19,17	0
REF_{ej14} (n=2)	19,17	0
REF_{ej14} (n=6)	9,00	0
REF_{ej14} (n=10)	9,00	0
REF_{ej15} (n=2)	26,17	0
REF_{ej15} (n=6)	42,17	1
REF_{ej15} (n=10)	43,50	1

DATA ₁₂ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
E_{LK}^R	55,83	0
REF_{ej15} (n=10)	43,50	1
REF_{ej15} (n=6)	42,17	1
REF_{ej3}	39,33	0
E_6	37,33	0
REF_{ej1}	30,33	0
REF_{ej15} (n=2)	26,17	0
REF_{ej11}	25,17	0
E_{FD}	24,17	28
REF_{FD2}	24,17	28
E_{FD}^R	21,83	5
REF_{ej6} (n=2)	21,00	0
REF_{ej6} (n=3)	20,67	0
REF_{ej8}	20,67	0
E_{LK}	19,17	0
REF_{ej5}	19,17	0
REF_{ej10}	19,17	0
REF_{BZ}	19,17	0
REF_{LK2}	19,17	0
REF_{ej12}	19,17	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	19,17	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	19,17	0
REF_{ej14} (n=2)	19,17	0
REF_{ej6} (n=7)	18,67	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	13,50	0
REF_{ej4}	11,00	587
REF_{ej2}	9,00	0
REF_{ej9}	9,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	9,00	0
REF_{ej14} (n=6)	9,00	0
REF_{ej14} (n=10)	9,00	0
REF_{ej14} (n=6)	9,00	0
REF_{ej14} (n=10)	9,00	0

Tabla 4.12: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{12}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₃		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	46,50	0
E_{FD}	58,00	17
E_{LK}^R	77,50	0
E_{FD}^R	58,00	7
E_6	66,00	0
REF_{ej1}	46,50	0
REF_{ej2}	46,50	0
REF_{ej3}	77,00	0
REF_{ej4}	97,50	94
REF_{ej5}	46,50	0
REF_{ej6} (n=2)	48,50	0
REF_{ej6} (n=3)	54,00	0
REF_{ej6} (n=7)	52,00	0
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej8}	46,50	0
REF_{ej9}	46,50	0
REF_{ej10}	46,50	0
REF_{BZ}	46,50	0
REF_{LK2}	46,50	0
REF_{FD2}	58,00	17
REF_{ej11}	46,50	0
REF_{ej12}	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	46,50	0
REF_{ej14} (n=2)	46,50	0
REF_{ej14} (n=6)	46,50	0
REF_{ej14} (n=10)	46,50	0
REF_{ej15} (n=2)	68,50	0
REF_{ej15} (n=6)	78,00	0
REF_{ej15} (n=10)	78,00	0

DATA ₁₃ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=4)	100,00	0
REF_{ej7} (n=5)	100,00	0
REF_{ej7} (n=8)	100,00	0
REF_{ej4}	97,50	94
REF_{ej15} (n=6)	78,00	0
REF_{ej15} (n=10)	78,00	0
E_{LK}^R	77,50	0
REF_{ej3}	77,00	0
REF_{ej15} (n=2)	68,50	0
E_6	66,00	0
E_{FD}	58,00	17
E_{FD}^R	58,00	7
REF_{FD2}	58,00	17
REF_{ej6} (n=3)	54,00	0
REF_{ej6} (n=7)	52,00	0
REF_{ej6} (n=2)	48,50	0
E_{LK}	46,50	0
REF_{ej1}	46,50	0
REF_{ej2}	46,50	0
REF_{ej5}	46,50	0
REF_{ej8}	46,50	0
REF_{ej9}	46,50	0
REF_{ej10}	46,50	0
REF_{BZ}	46,50	0
REF_{LK2}	46,50	0
REF_{ej11}	46,50	0
REF_{ej12}	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	46,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	46,50	0
REF_{ej14} (n=2)	46,50	0
REF_{ej14} (n=6)	46,50	0
REF_{ej14} (n=10)	46,50	0
REF_{ej14} (n=2)	46,50	0
REF_{ej14} (n=6)	46,50	0
REF_{ej14} (n=10)	46,50	0

Tabla 4.13: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{13}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₄		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	50,50	0
E_{FD}	96,50	0
E_{LK}^R	78,50	0
E_{FD}^R	94,00	0
E_6	64,50	0
REF_{ej1}	66,00	0
REF_{ej2}	42,00	0
REF_{ej3}	62,00	0
REF_{ej4}	42,00	199
REF_{ej5}	50,50	0
REF_{ej6} (n=2)	52,50	0
REF_{ej6} (n=3)	42,00	0
REF_{ej6} (n=7)	42,00	0
REF_{ej7} (n=4)	97,50	0
REF_{ej7} (n=5)	98,00	0
REF_{ej7} (n=8)	98,00	0
REF_{ej8}	58,50	0
REF_{ej9}	42,00	0
REF_{ej10}	58,00	0
REF_{BZ}	49,00	0
REF_{LK2}	50,50	0
REF_{FD2}	96,50	0
REF_{ej11}	63,50	0
REF_{ej12}	58,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	42,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	42,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	42,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	48,00	0
REF_{ej14} (n=2)	42,00	0
REF_{ej14} (n=6)	42,00	0
REF_{ej14} (n=10)	42,00	0
REF_{ej15} (n=2)	60,00	0
REF_{ej15} (n=6)	62,00	0
REF_{ej15} (n=10)	62,50	0

DATA ₁₄ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=5)	98,00	0
REF_{ej7} (n=8)	98,00	0
REF_{ej7} (n=4)	97,50	0
E_{FD}	96,50	0
REF_{FD2}	96,50	0
E_{FD}^R	94,00	0
E_{LK}^R	78,50	0
REF_{ej1}	66,00	0
E_6	64,50	0
REF_{ej11}	63,50	0
REF_{ej15} (n=10)	62,50	0
REF_{ej3}	62,00	0
REF_{ej15} (n=6)	62,00	0
REF_{ej15} (n=2)	60,00	0
REF_{ej8}	58,50	0
REF_{ej10}	58,00	0
REF_{ej12}	58,00	0
REF_{ej6} (n=2)	52,50	0
E_{LK}	50,50	0
REF_{ej5}	50,50	0
REF_{LK2}	50,50	0
REF_{BZ}	49,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	48,00	0
REF_{ej2}	42,00	0
REF_{ej4}	42,00	199
REF_{ej6} (n=3)	42,00	0
REF_{ej6} (n=7)	42,00	0
REF_{ej9}	42,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	42,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	42,00	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	42,00	0
REF_{ej14} (n=2)	42,00	0
REF_{ej14} (n=6)	42,00	0
REF_{ej14} (n=10)	42,00	0

Tabla 4.14: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{14}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₅		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	31,00	0
E_{FD}	90,50	3
E_{LK}^R	88,50	0
E_{FD}^R	90,50	0
E_6	83,50	0
REF_{ej1}	74,00	0
REF_{ej2}	22,50	0
REF_{ej3}	87,00	0
REF_{ej4}	26,00	200
REF_{ej5}	31,00	0
REF_{ej6} (n=2)	27,50	0
REF_{ej6} (n=3)	25,00	0
REF_{ej6} (n=7)	22,50	0
REF_{ej7} (n=4)	90,00	0
REF_{ej7} (n=5)	90,00	0
REF_{ej7} (n=8)	90,00	0
REF_{ej8}	65,50	0
REF_{ej9}	22,50	0
REF_{ej10}	64,50	0
REF_{BZ}	23,50	0
REF_{LK2}	31,00	0
REF_{FD2}	90,50	3
REF_{ej11}	72,00	0
REF_{ej12}	64,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	22,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	22,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	22,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	26,00	0
REF_{ej14} (n=2)	22,50	0
REF_{ej14} (n=6)	22,50	0
REF_{ej14} (n=10)	22,50	0
REF_{ej15} (n=2)	76,00	0
REF_{ej15} (n=6)	88,00	0
REF_{ej15} (n=10)	86,50	0

DATA ₁₅ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{FD}	90,50	3
E_{FD}^R	90,50	0
REF_{FD2}	90,50	3
REF_{ej7} (n=4)	90,00	0
REF_{ej7} (n=5)	90,00	0
REF_{ej7} (n=8)	90,00	0
E_{LK}^R	88,50	0
REF_{ej15} (n=6)	88,00	0
REF_{ej3}	87,00	0
REF_{ej15} (n=10)	86,50	0
E_6	83,50	0
REF_{ej15} (n=2)	76,00	0
REF_{ej1}	74,00	0
REF_{ej11}	72,00	0
REF_{ej8}	65,50	0
REF_{ej10}	64,50	0
REF_{ej12}	64,50	0
E_{LK}	31,00	0
REF_{ej5}	31,00	0
REF_{LK2}	31,00	0
REF_{ej6} (n=2)	27,50	0
REF_{ej4}	26,00	200
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	26,00	0
REF_{ej6} (n=3)	25,00	0
REF_{BZ}	23,50	0
REF_{ej2}	22,50	0
REF_{ej6} (n=7)	22,50	0
REF_{ej9}	22,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 01$)	22,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 38$)	22,50	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0, 76$)	22,50	0
REF_{ej14} (n=2)	22,50	0
REF_{ej14} (n=6)	22,50	0
REF_{ej14} (n=10)	22,50	0
REF_{ej14} (n=2)	22,50	0
REF_{ej14} (n=6)	22,50	0
REF_{ej14} (n=10)	22,50	0

Tabla 4.15: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{15}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₆		
REF	Porcentaje	Entradas
E_{LK}	95,57	0
E_{FD}	91,63	3
E_{LK}^R	95,07	0
E_{FD}^R	90,15	0
E_6	96,55	0
REF_{ej1}	86,70	0
REF_{ej2}	48,28	0
REF_{ej3}	95,57	0
REF_{ej4}	64,53	151
REF_{ej5}	95,57	0
REF_{ej6} (n=2)	94,09	0
REF_{ej6} (n=3)	92,12	0
REF_{ej6} (n=7)	67,49	0
REF_{ej7} (n=4)	97,04	0
REF_{ej7} (n=5)	98,03	0
REF_{ej7} (n=8)	99,51	0
REF_{ej8}	87,19	0
REF_{ej9}	48,28	0
REF_{ej10}	96,06	0
REF_{BZ}	98,52	0
REF_{LK2}	95,57	0
REF_{FD2}	91,63	3
REF_{ej11}	87,68	0
REF_{ej12}	96,06	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	47,78	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	53,20	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	70,44	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	92,12	0
REF_{ej14} (n=2)	72,91	0
REF_{ej14} (n=6)	47,78	0
REF_{ej14} (n=10)	47,78	0
REF_{ej15} (n=2)	95,07	0
REF_{ej15} (n=6)	95,57	0
REF_{ej15} (n=10)	96,06	0

DATA ₁₆ ORDENADOS		
REF	Porcentaje	Entradas
REF_{ej7} (n=8)	99,51	0
REF_{BZ}	98,52	0
REF_{ej7} (n=5)	98,03	0
REF_{ej7} (n=4)	97,04	0
E_6	96,55	0
REF_{ej10}	96,06	0
REF_{ej12}	96,06	0
REF_{ej15} (n=10)	96,06	0
E_{LK}	95,57	0
REF_{ej3}	95,57	0
REF_{ej5}	95,57	0
REF_{LK2}	95,57	0
REF_{ej15} (n=6)	95,57	0
E_{LK}^R	95,07	0
REF_{ej15} (n=2)	95,07	0
REF_{ej6} (n=2)	94,09	0
REF_{ej6} (n=3)	92,12	0
REF_{ej13} ($\lambda = 6$)	92,12	0
E_{FD}	91,63	3
REF_{FD2}	91,63	3
E_{FD}^R	90,15	0
REF_{ej11}	87,68	0
REF_{ej8}	87,19	0
REF_{ej1}	86,70	0
REF_{ej14} (n=2)	72,91	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,76$)	70,44	0
REF_{ej6} (n=7)	67,49	0
REF_{ej4}	64,53	151
REF_{ej13} ($\lambda = 0,38$)	53,20	0
REF_{ej2}	48,28	0
REF_{ej9}	48,28	0
REF_{ej13} ($\lambda = 0,01$)	47,78	0
REF_{ej14} (n=6)	47,78	0
REF_{ej14} (n=10)	47,78	0
REF_{ej14} (n=6)	47,78	0
REF_{ej14} (n=10)	47,78	0

Tabla 4.16: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{16}$ con el método *Radius k-NN* empleando REFs; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

A continuación se sigue exactamente el mismo procedimiento, pero aplicando el algoritmo *Radius k-NN* con las equivalencias difusas que no son REFs.

4.2. Resultados *Radius k-NN* con equivalencias difusas

DATA ₀₁			DATA ₀₁ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	75,52	0	E_{GG}^R	93,71	1
E_{GD}	58,74	68	E_5	79,72	0
E_{GG}^R	93,71	1	E_{GG}	75,52	0
E_{GD}^R	51,05	33	E_3	65,73	0
E_3	65,73	0	E_4	60,84	0
E_4	60,84	0	E_{GD}	58,74	68
E_5	79,72	0	E_{GD}^R	51,05	33

Tabla 4.17: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{01}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₂			DATA ₀₂ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	49,13	0	E_{GG}^R	94,22	1
E_{GD}	45,66	70	E_5	56,65	1
E_{GG}^R	94,22	1	E_{GG}	49,13	0
E_{GD}^R	43,93	17	E_{GD}	45,66	70
E_3	45,66	0	E_3	45,66	0
E_4	44,51	0	E_4	44,51	0
E_5	56,65	1	E_{GD}^R	43,93	17

Tabla 4.18: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{02}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₃			DATA ₀₃ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	90,87	2	E_5	90,87	2
E_{GD}	35,71	143	E_{GG}	90,87	2
E_{GG}^R	88,89	0	E_{GG}^R	88,89	0
E_{GD}^R	35,71	143	E_3	90,48	2
E_3	90,48	2	E_4	85,71	2
E_4	85,71	2	E_{GD}	35,71	143
E_5	90,87	2	E_{GD}^R	35,71	143

Tabla 4.19: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{03}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₄			DATA ₀₄ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	95,00	3	E_{GG}^R	98,75	1
E_{GD}	56,25	50	E_{GG}	95,00	3
E_{GG}^R	98,75	1	E_5	93,75	4
E_{GD}^R	50,00	34	E_3	83,75	2
E_3	83,75	2	E_4	80,00	1
E_4	80,00	1	E_{GD}	56,25	50
E_5	93,75	4	E_{GD}^R	50,00	34

Tabla 4.20: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{04}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₅			DATA ₀₅ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	25,00	0	E_{GG}^R	42,50	0
E_{GD}	10,83	77	E_5	31,67	0
E_{GG}^R	42,50	0	E_{GG}	25,00	0
E_{GD}^R	3,33	20	E_{GD}	10,83	77
E_3	10,00	0	E_3	10,00	0
E_4	6,67	0	E_4	6,67	0
E_5	31,67	0	E_{GD}^R	3,33	20

Tabla 4.21: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{05}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₆			DATA ₀₆ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	82,95	0	E_{GG}^R	99,38	1
E_{GD}	76,09	541	E_5	87,01	1
E_{GG}^R	99,38	1	E_{GG}	82,95	0
E_{GD}^R	75,26	254	E_4	82,74	0
E_3	81,50	0	E_3	81,50	0
E_4	82,74	0	E_{GD}	76,09	541
E_5	87,01	1	E_{GD}^R	75,26	254

Tabla 4.22: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{06}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₇			DATA ₀₇ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	79,75	0	E_{GG}^R	99,50	2
E_{GD}	67,00	239	E_5	79,75	0
E_{GG}^R	99,50	2	E_{GG}	79,75	0
E_{GD}^R	79,75	124	E_{GD}^R	79,75	124
E_3	79,75	0	E_3	79,75	0
E_4	79,75	0	E_4	79,75	0
E_5	79,75	0	E_{GD}	67,00	239

Tabla 4.23: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{07}$ con el método $Radius\ k\text{-}NN$ empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo $k\text{-}NN$. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₈			DATA ₀₈ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	55,00	1	E_{GG}^R	87,00	1
E_{GD}	52,00	106	E_5	80,00	1
E_{GG}^R	87,00	1	E_{GG}	55,00	1
E_{GD}^R	38,00	36	E_{GD}	52,00	106
E_3	38,00	1	E_{GD}^R	38,00	36
E_4	36,00	1	E_3	38,00	1
E_5	80,00	1	E_4	36,00	1

Tabla 4.24: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{08}$ con el método $Radius\ k\text{-}NN$ empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo $k\text{-}NN$. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₀₉			DATA ₀₉ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	89,50	0	E_{GG}^R	93,16	1
E_{GD}	52,14	647	E_{GG}	89,50	0
E_{GG}^R	93,16	1	E_5	88,28	0
E_{GD}^R	51,28	147	E_3	86,32	0
E_3	86,32	0	E_4	53,11	0
E_4	53,11	0	E_{GD}	52,14	647
E_5	88,28	0	E_{GD}^R	51,28	147

Tabla 4.25: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{09}$ con el método $Radius\ k\text{-}NN$ empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo $k\text{-}NN$. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₀			DATA ₁₀ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	71,75	0	E_{GG}^R	84,50	0
E_{GD}	34,25	274	E_5	77,00	0
E_{GG}^R	84,50	0	E_{GG}	71,75	0
E_{GD}^R	30,00	189	E_3	48,75	0
E_3	48,75	0	E_4	40,00	0
E_4	40,00	0	E_{GD}	34,25	274
E_5	77,00	0	E_{GD}^R	30,00	189

Tabla 4.26: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{10}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₁			DATA ₁₁ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	72,00	0	E_{GG}^R	83,83	0
E_{GD}	66,83	367	E_5	75,83	0
E_{GG}^R	83,83	0	E_{GG}	72,00	0
E_{GD}^R	71,17	93	E_{GD}^R	71,17	93
E_3	70,33	0	E_3	70,33	0
E_4	70,17	0	E_4	70,17	0
E_5	75,83	0	E_{GD}	66,83	367

Tabla 4.27: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{11}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₂			DATA ₁₂ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	48,83	0	E_{GG}^R	89,83	0
E_{GD}	12,83	368	E_5	57,00	0
E_{GG}^R	89,83	0	E_{GG}	48,83	0
E_{GD}^R	9,50	168	E_3	27,17	0
E_3	27,17	0	E_4	17,67	0
E_4	17,67	0	E_{GD}	12,83	368
E_5	57,00	0	E_{GD}^R	9,50	168

Tabla 4.28: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{12}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₃			DATA ₁₃ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	82,50	0	E_{GG}^R	93,50	0
E_{GD}	50,50	136	E_5	86,50	0
E_{GG}^R	93,50	0	E_{GG}	82,50	0
E_{GD}^R	69,50	51	E_3	71,50	0
E_3	71,50	0	E_{GD}^R	69,50	51
E_4	60,00	0	E_4	60,00	0
E_5	86,50	0	E_{GD}	50,50	136

Tabla 4.29: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{13}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₄			DATA ₁₄ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	59,50	0	E_{GG}^R	90,00	2
E_{GD}	43,00	107	E_5	72,00	1
E_{GG}^R	90,00	2	E_{GG}	59,50	0
E_{GD}^R	37,00	33	E_3	47,50	0
E_3	47,50	0	E_{GD}	43,00	107
E_4	40,50	0	E_4	40,50	0
E_5	72,00	1	E_{GD}^R	37,00	33

Tabla 4.30: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{14}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

DATA ₁₅			DATA ₁₅ ORDENADOS		
EF	Porcentaje	Entradas	EF	Porcentaje	Entradas
E_{GG}	61,00	0	E_{GG}^R	86,00	4
E_{GD}	36,50	128	E_5	78,00	0
E_{GG}^R	86,00	4	E_{GG}	61,00	0
E_{GD}^R	22,00	36	E_{GD}	36,50	128
E_3	29,00	0	E_3	29,00	0
E_4	22,50	0	E_4	22,50	0
E_5	78,00	0	E_{GD}^R	22,00	36

Tabla 4.31: En la tabla de la izquierda se presenta el porcentaje de aciertos en la clasificación de los objetos del archivo de datos $Data_{15}$ con el método *Radius k-NN* empleando equivalencias difusas; y el número de veces que se recurre al algoritmo *k-NN*. En la de la derecha se exponen los mismos datos ordenados de mayor a menor porcentaje de aciertos.

(REF o equivalencia difusa) para cada conjunto de datos analizado.

En la figura 4.6 se identifican las cajas de color gris con las funciones de equivalencia restringidas y las de color blanco con las equivalencias difusas. Las funciones que mejor resultados proporcionan se representan de color azul. Destaca a simple vista que la REF con un número mayor de aciertos es la REF_{ej7} , variando poco entre los tres valores elegidos del parámetro n , alcanzando en muchos casos un porcentaje del 100%. Por otra parte, entre las funciones de equivalencia difusa, la que ha llevado consigo un mayor éxito en la clasificación es E_{GG}^R .

La REF que falla un mayor número de veces clasificando los objetos (color rojo) es la REF_{ej14} , cambiando de nuevo muy poco entre los diferentes valores de n , especialmente entre los más altos. Unos resultados muy negativos son también las de la REF_{ej13} para cualquier valor de λ . La función de equivalencia difusa con peores resultados es E_{GD}^R , aunque también resulta con un porcentaje de éxito muy bajo la aplicación de E_{GD} .

Las cajas representadas de color naranja se corresponden con la REF y la equivalencia difusa con las que más veces se tiene que recurrir al k -NN original. Se observa que son la REF_{ej4} y E_{GD} respectivamente.

Sin embargo, en el análisis del rendimiento de una función, no hay que considerar únicamente la media y la mediana de la distribución (de la variable *porcentaje* en este caso). Se deben analizar tanto otras medidas de dispersión como características de la definición de cada función que se verán a continuación.

Es conveniente estudiar la forma de cada REF y equivalencia difusa y analizar la tendencia que sigue su comportamiento y la posible relación con los resultados obtenidos.

Las dos siguientes REFs que parecen devolver porcentajes de acierto muy elevados (después de REF_{ej7}) son E_{FD} y REF_{FD2} . La primera de ellas le asigna un valor muy cercano al 1 únicamente para elementos idénticos, mientras que para el resto devuelve una similitud casi nula. La segunda, REF_{FD2} , a pesar de no ser tan excesiva la diferencia entre las cercanías de los elementos, se centra también en asignar valores altos solo para elementos que estén lo suficientemente cerca entre ellos. Estas observaciones pueden comprobarse mirando la figura 4.7.

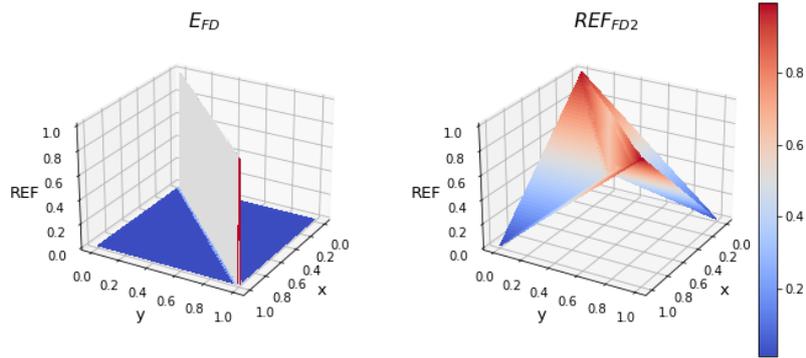


Figura 4.7: Representación gráfica de las funciones E_{FD} y REF_{FD2} .

Dos funciones que siguen el mismo modelo, pero con tendencias más suaves, son E_6 y E_{LK}^R , que resultan ser las terceras con mayor éxito en las clasificaciones. Aumenta la cercanía al aumentar la semejanza entre las características de los objetos de forma aproximadamente cuadrática en ambos casos.

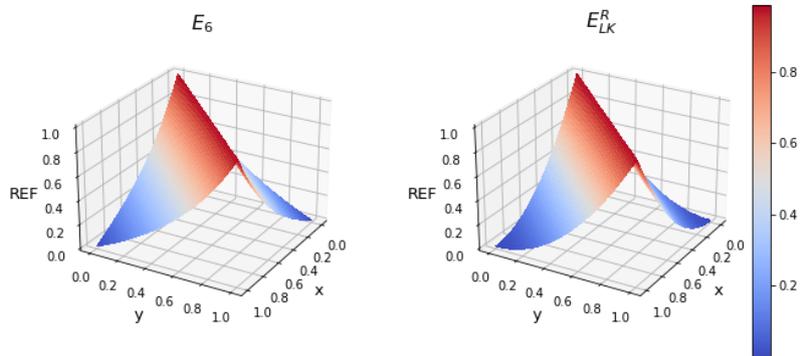


Figura 4.8: Representación gráfica de las funciones E_6 y E_{LK}^R .

Las funciones REF_{ej10} y REF_{ej12} , según se observa en la figura 4.9, son bastante similares a la cercanía euclídea. Sin embargo, asignan valores más bajos que esta en algunos casos, lo que lleva a un mejor rendimiento.

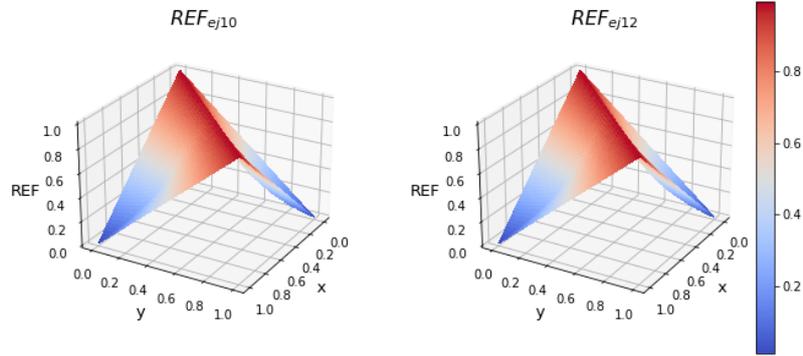


Figura 4.9: Representación gráfica de las funciones REF_{ej10} y REF_{ej12} .

Observando la figura 4.10, se entiende que la REF_{BZ} , a pesar de tener la misma forma que REF_{ej1} , REF_{ej8} y REF_{ej11} , ofrezca clasificaciones notablemente peores. Esto es porque, a pesar de que las cuatro asignan similitudes parecidas a la cercanía euclídea cuando los objetos comparten mínimo un 50% de características, las tres últimas devuelven un valor próximo a cero en el resto de los casos y la REF_{BZ} no lo hace.

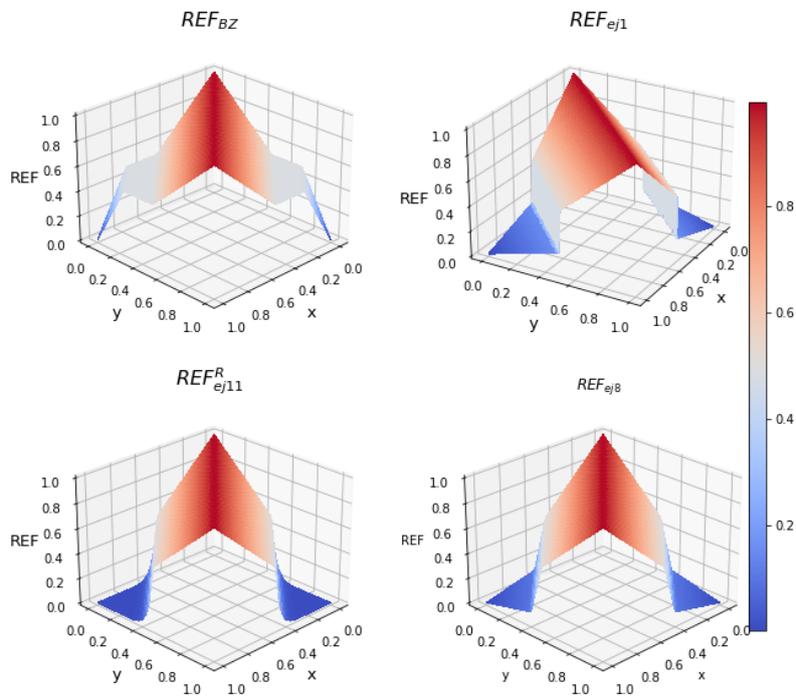


Figura 4.10: Representación gráfica de las funciones REF_{BZ} , REF_{ej1} , REF_{ej8} y REF_{ej11} .

Las funciones que se parecen a la cercanía euclídea (REF_{ej13} , REF_{ej5} , REF_{LK2} y E_{LK}), como cabría esperar, funcionan bien pero sin destacar. Es decir, con esta función los resultados son buenos pero no presentan la mejora que se está observando que se puede conseguir con alguna equivalencia restringida.

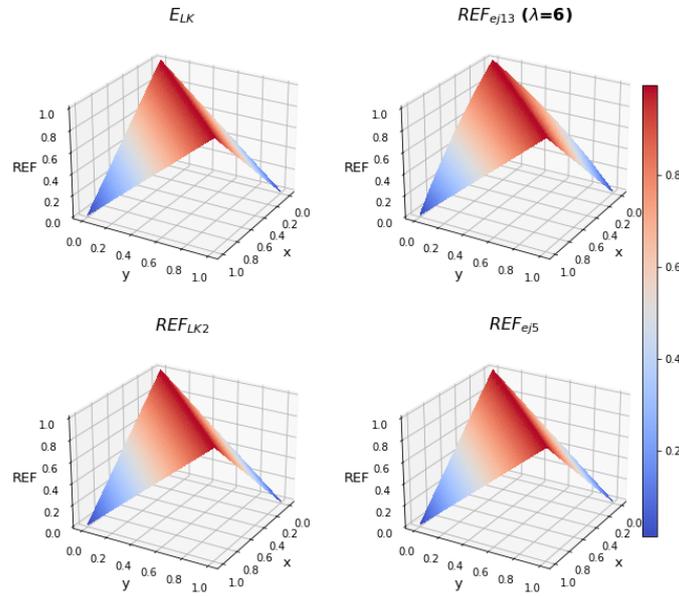


Figura 4.11: Representación gráfica de las funciones REF_{ej13} , REF_{ej5} , REF_{LK2} y E_{LK} .

Por otra parte, si las REFs siguen la tendencia contraria a la que se ha visto hasta ahora; es decir, si para casi todos los objetos devuelven similitudes cercanas a la unidad, entonces la gran mayoría superará la distancia mínima requerida en el algoritmo *Radius k-NN* y será similar a usar el algoritmo *k-NN* original. Esto ocurre con las siguientes funciones:

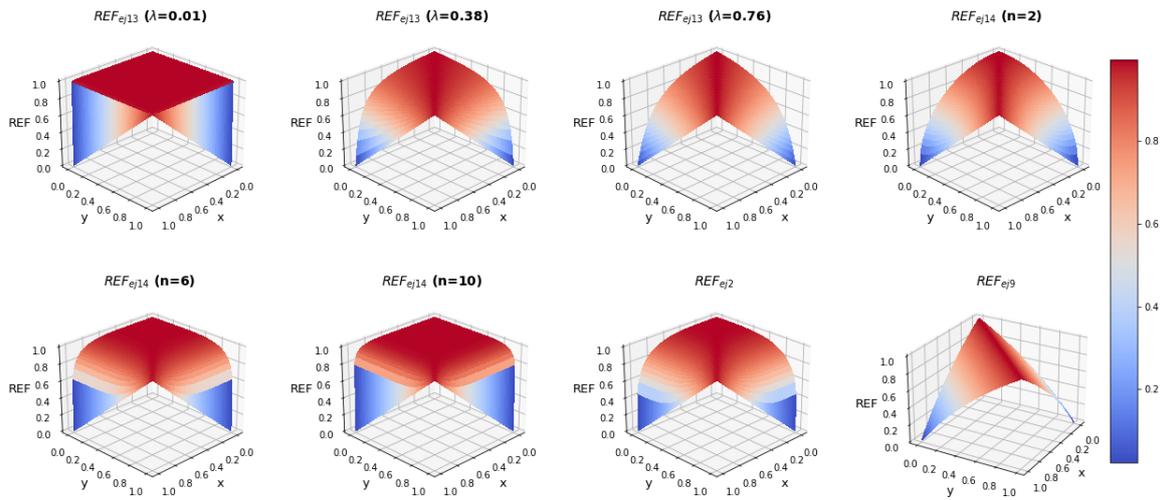


Figura 4.12: Representación gráfica de las funciones REF_{ej13} , REF_{ej14} , REF_{ej2} y REF_{ej9} .

La REF_{ej6} presenta un comportamiento muy similar. Sus resultados son un poco mejores a menor valor de n debido a que presenta una forma convexa en lugar de cóncava, lo que hace que se descarte un mayor número de objetos cuyas características no sean demasiado cercanas.

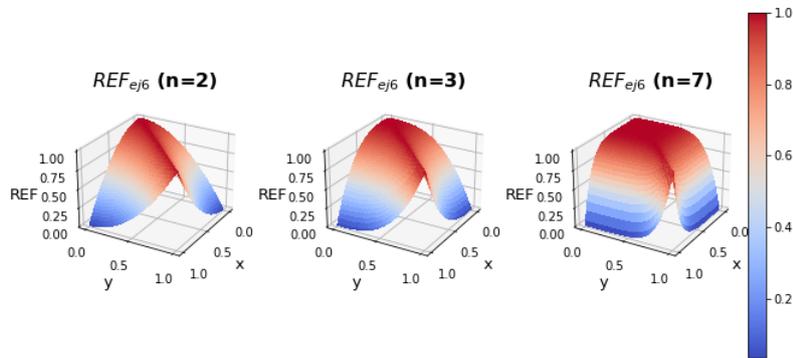


Figura 4.13: Representación gráfica de la función REF_{ej6} para los valores de $n = 2, 3, 7$.

Si el radio determinado en el algoritmo en cuestión es menor que 0,5, entonces ocurrirá lo mismo que con las funciones de la figura 4.12 al aplicar la REF_{ej4} (puede observarse su forma en la figura 4.14). Para los archivos que se están estudiando, al tener dos características cada objeto, el radio es aproximadamente 0,55, por lo que no está ocurriendo lo que se acaba de describir.

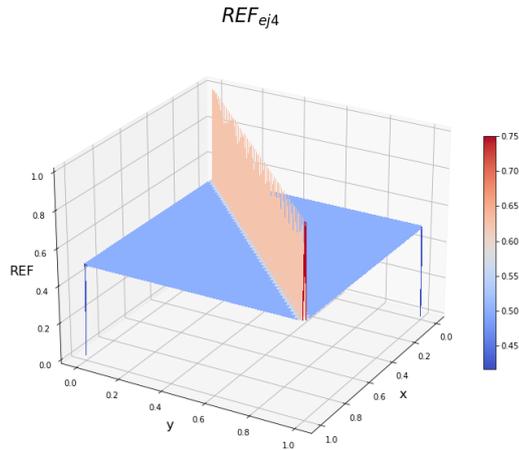


Figura 4.14: Representación gráfica de la función REF_{ej4} .

Por otra parte, podría compararse esta función con E_{FD} . Sin embargo, hay una diferencia significativa entre ambas; el hecho de que no devuelva tan buenos resultados es debido a que en E_{FD} , si una característica entre dos objetos no es idéntica, el valor que le asigna la REF es prácticamente nulo. En cambio, en el caso de REF_{ej4} es 0,5, lo que hace que, al aplicar la agregación (media aritmética), el resultado sí que pueda ser mayor que el radio, y pueda considerarse un vecino influyente en la clasificación.

A partir del análisis realizado, puede concluirse que los resultados serán mejores cuanto más separación se tenga entre las cercanías de las características de los objetos cercanos y lejanos, y cuanto más estricta sea la asignación de valores de REFs altos. La REF que más se ajusta a estas exigencias es la REF_{ej7} , especialmente a partir de $n \simeq 5$. Además, como se ha visto en la figura 4.6, la desviación típica de la variable *porcentaje* de aciertos de esta función es muy pequeña.

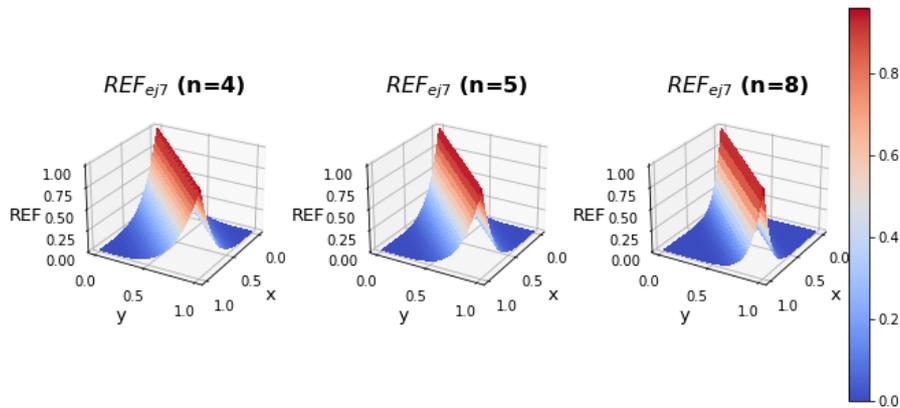


Figura 4.15: Representación gráfica de la función REF_{ej7} para $n = 4, 5, 8$.

Sin embargo, no se puede evaluar una función como buena o mala sin tener en cuenta el número de *entradas* en cada caso. Es por eso que se realiza otro diagrama de cajas pero según esta otra variable:

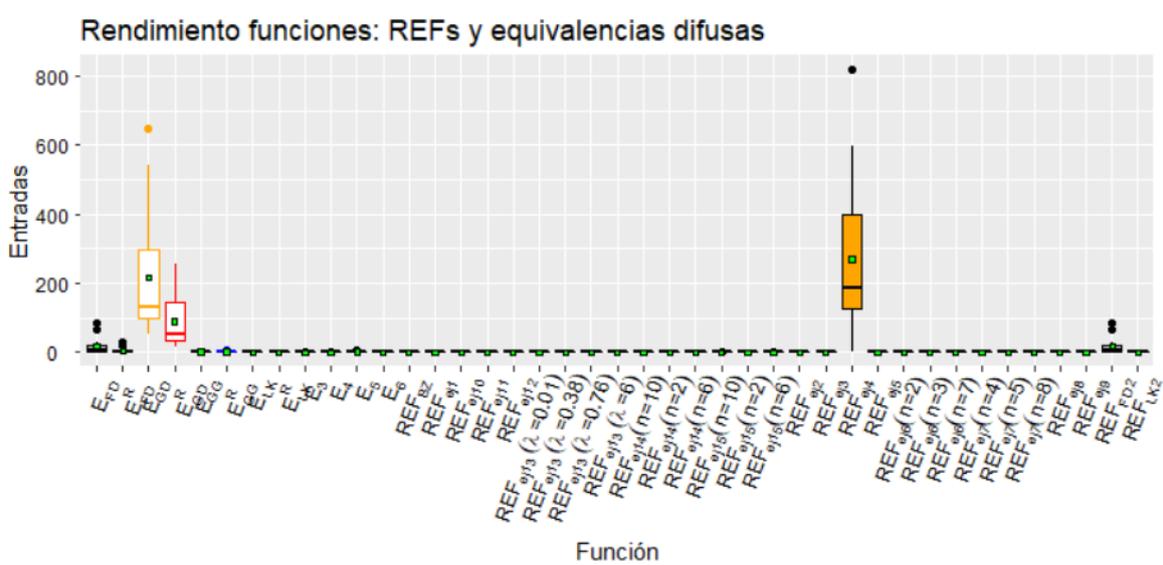


Figura 4.16: Diagrama de cajas con el número de veces que se tiene que recurrir al algoritmo k -NN (*entradas*) aplicando las funciones REFs y equivalencias difusas en el algoritmo *Radius k-NN*. Se representan en color gris las correspondientes a REFs y en color blanco las que corresponden a equivalencias difusas. Además, se indica la media del porcentaje de aciertos en color verde.

En la gran mayoría de casos se está empleando en general el algoritmo *Radius k-NN*. Destacan las funciones mencionadas anteriormente, E_{GD} y REF_{ej4} , y una tercera, E_{GD}^R . Cuando se emplean estas funciones en el método, una cantidad de veces considerable

se está clasificando con el algoritmo k -NN original, de tal forma que no se obtienen grandes ventajas con la aplicación del nuevo método en estas condiciones, pues muchos de los objetos no cumplen la distancia mínima requerida entre ellos para aplicarlo.

Se ha visto la mejoría del algoritmo *Radius k-NN* frente al k -NN original. Sin embargo, no es tanta la diferencia entre los resultados obtenidos con equivalencias difusas que con REFs como la esperada. Muchas de las funciones REFs alcanzan valores peores que algunas equivalencias difusas. Se concluye que en verdad, lo que realmente importa es que la tendencia de la función sea como la vista en la REF_{ej7} , que efectivamente cumple las propiedades de una función de equivalencia restringida y no solo de una equivalencia difusa.

Por último, se debe de analizar también la influencia de la distribución de las clases en el éxito de la clasificación con el algoritmo.

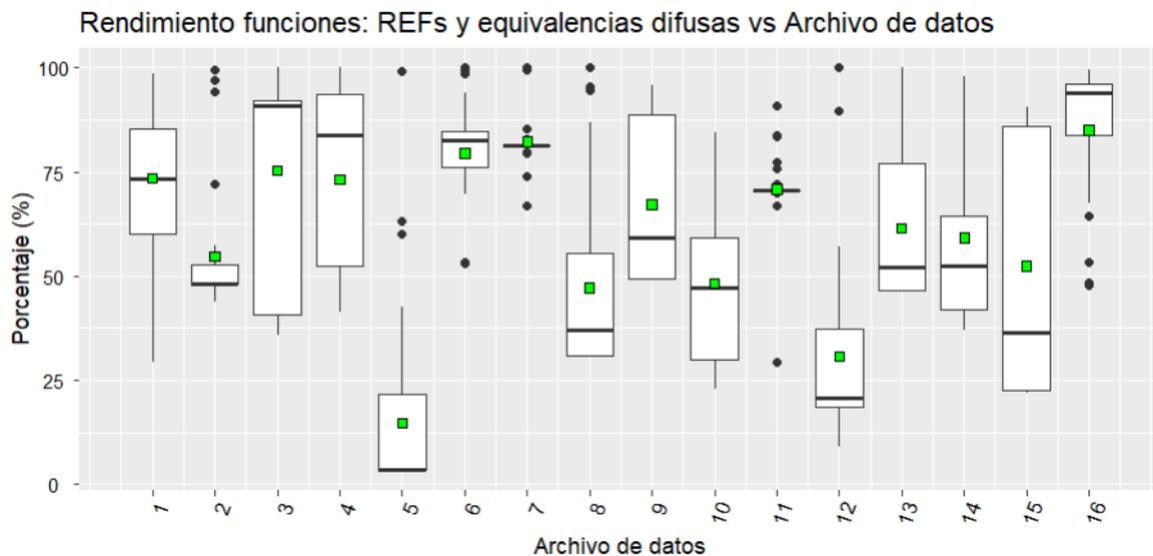


Figura 4.17: Diagrama de cajas: rendimiento de las funciones REFs y equivalencias difusas según el porcentaje (%) de acierto en el algoritmo *Radius k-NN*, dependiendo del archivo de datos que se estudie. Además, se indica la media del porcentaje de aciertos en color verde.

Se observa claramente que el rendimiento del algoritmo sí depende de la distribución de las clases. Especialmente, existe una gran desigualdad entre los resultados obtenidos con el conjunto de datos $Data_{05}$ y los obtenidos con $Data_{16}$.

Si analizamos la disposición de los objetos según sus características en el primer archivo, vemos que la disposición de las clases es simétrica y centrada con respecto a los valores medios de los atributos; además, los valores frontera que diferencian una clase de otra son muy cercanos entre sí, lo que hace que sea más difícil diferenciarlas

(ver figura 3.7).

Se recuerda que el radio empleado en el algoritmo *Radius k-NN* es aproximadamente 0,55, lo cual es sumamente grande comparado con el espacio de definición de los atributos normalizados $[0,1]$. Se va a analizar ahora lo que ocurre al emplear funciones REFs parecidas a la cercanía euclídea. En general, en la clasificación de un objeto test, influirán muchas de las clases más centrales, todas aquellas que estén a una cercanía (según la REF con la que se esté estudiando) del objeto test mayor que el radio. Lo que ocurre con el programa planteado es lo siguiente: de entre todas las clases que influyen, se elegirá aquella que tengan más objetos; sin embargo, si hay un empate de objetos, entre las clases empatadas se tomará aquella cuyos objetos estén antes en la lista con la que se está realizando el estudio. Es por esto que en numerosas ocasiones se estará cometiendo el mismo error.

Este problema puede evitarse empleando REFs de la forma de REF_{ej7} , puesto que solo los objetos realmente semejantes presentarán un valor de la cercanía que supere el radio definido. Hay otras dos soluciones posibles: en primer lugar, se podría reducir el radio, de tal forma que la cercanía mínima fuera mucho mayor. Por otra parte, también podría modificarse el programa de modo que ante un empate no se quedara con la clase del primer objeto estudiado, sino con la del objeto más cercano al test.

Por otro lado, en el conjunto de datos $Data_{16}$ se diferencian claramente las dos clases, lo que hace realmente sencilla su clasificación, independientemente de la función que se emplee en el algoritmo.

Cabe destacar el éxito de muchas funciones de equivalencia restringida, en especial de la REF_{ej7} , en muchos conjuntos de datos en los cuales los métodos de clasificación usuales no consiguen una predicción adecuada. Es el caso del conjunto de datos 11 (ver 3.8), en el cual no se puede hacer una separación lineal de las clases; así como del conjunto 7 (ver 3.7), en el que la mayoría de los métodos asignarían la clase mayoritaria a todos los datos test.

Se concluye que, cuanto más separadas, diferenciadas y equitativas sean las clases, más exitosa va a ser la clasificación con todas las funciones, debido a que es más probable que, aunque muchos datos estén dentro del radio, la mayoría de ellos sean de la misma clase que el objeto test.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se han introducido las equivalencias difusas, funciones que pueden verse como una generalización de la cercanía euclídea usual. Las propiedades de estas funciones permiten la clasificación de objetos, estudiando las características de estos y la similitud entre ellos. Algunos ejemplos son: E_{GG} , E_{GD} , E_{GG}^R , o E_{GD}^R .

Se ha visto también que, añadiendo algunas restricciones a las propiedades de las equivalencias difusas, resultan las REFs (funciones de equivalencia restringidas).

Hay varios métodos que permiten la construcción directa de REFs. Entre ellos, destaca la definición a partir de automorfismos y de funciones de implicación. También pueden emplearse las desviaciones moderadas, sin embargo, este procedimiento es mucho más costoso, y además lleva a funciones que se pueden obtener con automorfismos o implicaciones de forma más rápida, o a REFs con una expresión compleja y poco intuitiva. Cabe destacar también que el número de funciones de implicación que cumplen las propiedades necesarias para aplicar los resultados vistos y obtener nuevas REFs no es en absoluto elevado.

Debido a lo anterior, la simplicidad del método de construcción a partir de automorfismos lo hace mucho más destacable. Además, las funciones así definidas resultan con muy buenos resultados, siendo una de ellas la REF_{ej7} , construida simplemente aplicando una potencia n-ésima a la cercanía euclídea.

Por otra parte, muchas de las funciones de equivalencia restringidas a las que se ha llegado no mejoran la clasificación obtenida con algunas equivalencias difusas. Esto lleva a la conclusión de que no siempre una REF va a funcionar mejor que una equivalencia que no lo sea. Lo fundamental es que la función esté definida de forma que diferencie completamente las características realmente similares de las que

únicamente se parezcan un poco o no sean parecidas en absoluto. Sin embargo, se debe de encontrar el equilibrio entre este comportamiento deseado y el hecho de que solo se pueda clasificar con objetos de entrenamiento casi idénticos, lo que no permitiría generalizar el uso de este método de clasificación a situaciones en las que se tuviera que predecir en ausencia de objetos muy cercanos.

Se ha visto que en numerosas ocasiones, el problema de que una función lleve a una clasificación poco satisfactoria, es consecuencia de varios factores. Entre ellos, un inconveniente es que las clases estén distribuidas de forma que los valores de las diferentes características sean muy próximos entre sí. Además, cuanto más se asemeje la función a la cercanía euclídea, y menos a una tendencia como la de REF_{ej7} , menos exigente será la selección de los objetos de entrenamiento influyentes en la clasificación. Esto puede solucionarse haciendo que la cercanía mínima que deban cumplir los objetos con respecto al test sea mayor, pero siempre teniendo en cuenta el equilibrio comentado anteriormente.

Por otra parte, otro aspecto a mejorar en el algoritmo de clasificación está relacionado con la forma en la que se filtran los objetos a partir de los que se determinará la clase del test. Cuando se produce un empate en cuanto al número de objetos más cercanos pertenecientes a diferentes clases, en el algoritmo empleado se considera la clase del primero de esos elementos que se ha estudiado. Lo ideal sería que, en este caso, se tomara la clase del objeto más cercano al objeto test.

Bibliografía

- [1] Ethem Alpaydin. *Introduction to Machine Learning*. Adaptive Computation and Machine Learning. MIT Press, Cambridge, MA, 3 edition, 2014.
- [2] Abdulrahman H. Altalhi, Juan I. Forcen, Miguel Pagola, Edurne Barrenechea Tartas, Humberto Bustince, and Zdenko Takác. Moderate deviation and restricted equivalence functions for measuring similarity between data. *Inf. Sci.*, 501:19–29, 2019.
- [3] Michal Baczynski and Balasubramaniam Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2008.
- [4] Urszula Bentkowska, Jan Bazan, Wojciech Rzasa, and Lech Zareba. Application of interval-valued aggregation to optimization problem of k - NN classifiers for missing values case. *Information Sciences*, 486, 02 2019.
- [5] Michael W. Berry, Azlinah Mohamed, and Bee Wah Yap. *Supervised and Unsupervised Learning for Data Science*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2019.
- [6] Deepanshu Bhalla. K nearest neighbor: Step by step tutorial. <https://www.listendata.com/2017/12/k-nearest-neighbor-step-by-step-tutorial.html>, 2017. Accessed: 2022-03-03.
- [7] Humberto Bustince, Edurne Barrenechea, and Miguel Pagola. Restricted equivalence functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(17):2333–2346, 2006.
- [8] Humberto Bustince, María Jesús Campión, Laura De Miguel, and Esteban Induráin. Strong negations and restricted equivalence functions revisited: An analytical and topological approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 2021.
- [9] Tomasa Calvo, Anna Kolesárová, Magda Komorníková, and Radko Mesiar. Aggregation operators: properties, classes and construction methods. In *Aggregation operators*, pages 3–104. Springer, 2002.
- [10] Thomas M. Cover and Peter E. Hart. Nearest neighbor pattern classification. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 13:21–27, 1967.

- [11] Pratap Dangeti. *Statistics for Machine Learning: Techniques for Exploring Supervised, Unsupervised, and Reinforcement Learning Models with Python and R*. Packt Publishing, 2017.
- [12] Dataiku. K-nearest neighbors algorithm: Classification and regression star. <https://www.historyofdatascience.com/k-nearest-neighbors-algorithm-classification-and-regression-star/#:~:text=The%20origins%20of%20kNN%20can,Joseph%20Lawson%20Hodges%20Jr.,2021>. Accessed: 2022-03-01.
- [13] János Fodor and Marc Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, volume 14. Springer Science & Business Media, 1994.
- [14] Piotr Grochowalski, Anna Król, and Wojciech Rzasa. Radius knn classifier using aggregation of fuzzy equivalences. In *2021 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–6, 2021.
- [15] Peter Harrington. *Machine Learning in Action*. Manning Publications Co., USA, 2012.
- [16] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. *Triangular norms*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [17] George K. Klir and Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logi*. Prentice Hall, 1995.
- [18] Yingfang Li, Keyun Qin, and Xingxing He. Some new approaches to constructing similarity measures. *Fuzzy Sets Syst.*, 234:46–60, 2014.
- [19] Donald Michie, D. J. Spiegelhalter, C. C. Taylor, and John Campbell, editors. *Machine Learning, Neural and Statistical Classification*. Ellis Horwood, USA, 1995.
- [20] Eduardo S. Palmeira, Benjamin Bedregal, Humberto Bustince, Daniel Paternain, and Laura De Miguel. Application of two different methods for extending lattice-valued restricted equivalence functions used for constructing similarity measures on l-fuzzy sets. *Inf. Sci.*, 441(C):95–112, may 2018.
- [21] Jana Špírková, Humberto Bustince, Javier Fernandez, and Mikel Sesma-Sara. New classes of the moderate deviation functions. In *Joint Proceedings of the 19th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA), the 12th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), and the 11th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP)*, pages 661–666. Atlantis Press, 2021.