

BEH A LA GSW = ELECTRODÉBIL

Universidad de Oviedo

FACULTAD DE CIENCIAS



Trabajo de Fin de Grado en Física

Autor:

Alberto Gil Hernández

Director:

Patrick A. A. Meessen

Julio del 2022

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Electromagnetismo	2
2. Álgebras y grupos de Lie	5
2.1. El álgebra tangente	8
2.2. Grupos de Lie	10
2.2.1. Representación adjunta	12
2.3. Álgebras y grupos simples	14
2.4. Estados y operadores	15
3. $SU(2)$	17
3.1. Operadores escalera	18
3.2. Notación estándar	21
3.3. Producto tensorial	23
3.4. Relación con $SO(3)$	25
4. Spinores	28
4.1. El grupo de Lorentz	28
4.1.1. El álgebra $\mathfrak{so}(1,3)$	30
4.2. El álgebra de Clifford	33
4.3. Representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	37

5. Lagrangianos relevantes	39
5.1. La ecuación de Klein-Gordon	39
5.2. La ecuación de Dirac	41
5.3. La ecuación de Proca	43
6. De simetrías a QED	46
6.1. Campos gauge	46
6.2. De global a local	49
6.3. Mecanismo de Brout-Englert-Higgs	52
6.4. Masa de spinores	56
7. Modelo de Glashow-Salam-Weinberg	59
7.1. Construcción del modelo no roto	60
7.2. Condición para simetría gauge residual	62
7.3. La intensidad del campo gauge	66
7.4. El término cinético zurdo	68
7.5. Lagrangiano GSW con gauge fijo	69
7.6. Lagrangiano GSW con el campo de Higgs	70
8. Conclusiones	73

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo pretende recopilar el marco teórico de la unificación de las fuerzas electromagnética y débil, así como la explicación de las masas de los leptones y los bosones gauge. La aspiración es permitir entrever las herramientas y fundamentos matemáticos que forman este marco teórico a la vez que no descuidar el contenido físico del tema. Por esto es que se ha buscado la precisión en el lenguaje, sin entrar en excesivo detalle y sin dar argumentos empíricos si no son estrictamente necesarios.

El eje central de este escrito reside en los grupos de Lie y las álgebras de Lie, así como en otras herramientas de la Geometría Diferencial. Los cimientos necesarios para abordar estos campos fueron adquiridos en el curso extracurricular *Introduction to Differential Geometry for Theoretical Physicists* impartido por el Profesor Andrés Viña Escalar. Sin embargo, y a pesar de que este tema ya ha sido explicado innumerables veces, los contenidos recogidos tienen un estilo personal propio.

En el segundo capítulo se definen y estudian las álgebras y los grupos de Lie. Es un capítulo puramente matemático y que sirve como una introducción a dos herramientas utilizadas en casi cualquier ámbito de la Física contemporánea.

En el tercer capítulo se estudia el grupo especial unitario de orden 2. Muchos resultados son conocidos de Mecánica Cuántica, pero con el enfoque de álgebras y grupos de Lie.

En el cuarto capítulo se habla sobre los spinores, un nuevo objeto matemático con

algunos comportamientos físicos especiales. En este capítulo se habla del grupo de Lorentz y de sus representaciones irreducibles. Será necesario introducir el álgebra de Clifford. Y se explicarán cuatro representaciones del grupo de Lorentz, que darán lugar a tres tipos de campos (escalares, spinoriales y vectoriales), ingredientes para el siguiente capítulo.

En el quinto capítulo se construyen densidades lagrangianas para los tres tipos de campos nombrados. Como consecuencia se deducen algunas ecuaciones de movimiento conocidas: la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Dirac y la ecuación de Proca. La densidad lagrangiana de Proca describe el electromagnetismo.

En el sexto capítulo se da la definición de campo gauge y se fuerza a la densidad lagrangiana a ser invariante bajo ciertas simetrías, lo que llevará a la construcción del lagrangiano de la electrodinámica. En una segunda parte se explica el mecanismo de Brout-Englert-Higgs y cómo se consigue dar masa a los campos gauge. Finalmente, se extiende esto al caso de los spinores.

En el séptimo capítulo se desarrolla el modelo de Glashow-Salam-Weinberg, un modelo que unifica las fuerzas electromagnética y débil, exponiendo las interacciones entre las partículas, y con la ayuda del mecanismo BEH explica la masa de leptones con carga eléctrica, de los bosones W^\pm y Z y del bosón de Higgs.

Se utilizará el convenio de suma de Einstein. El convenio para la métrica de Minkowski será $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Además, para ahorrar notación se utilizarán unidades naturales, es decir, $\hbar = c = 1$.

Como último punto de esta introducción, se cuenta un poco de lo que ya se conoce sobre electromagnetismo y cómo encaja con lo que se verá posteriormente.

1.1. Electromagnetismo

Las ecuaciones de Maxwell sirven de inspiración a todo lo que guarde relación con la unificación. Hoy en día, el conocimiento de que la electricidad y el magnetismo tienen un origen común parece bastante arraigado. La teoría del electromagnetismo queda ya bastante alejada de las líneas de investigación actuales; sin embargo el magnetismo sigue siendo difícil

de comprender en profundidad. Por ejemplo, no existen los monopolos magnéticos, algo que queda recogido en las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} = \rho & & \nabla \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 & & \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

De éstas puede deducirse la existencia de un campo escalar ϕ y un campo vectorial \vec{A} tales que

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.2)$$

Definiendo un tensor

$$F_{0i} = E_i \quad F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k \quad (1.3)$$

con $F_{00} = 0$ y $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ y definiendo

$$A_\mu = (\phi, \vec{A}) ; \quad J_\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (1.4)$$

es inmediato comprobar que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ; \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \quad (1.5)$$

Notemos que si se transforma

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (1.6)$$

con α una función cualquiera, $F_{\mu\nu}$ no cambia, y por lo tanto, tampoco las ecuaciones de Maxwell. Es decir, hemos encontrado una simetría del electromagnetismo, llamada simetría gauge.

Una densidad lagrangiana para el campo A , tiene que devolver como ecuaciones del

movimiento las ecuaciones de Maxwell, así que su expresión será

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (1.7)$$

Si estamos en el vacío, no hay corrientes, $J \equiv 0$. Por lo tanto,

$$0 = \partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -P_\mu P^\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu \quad (1.8)$$

donde P_μ es el cuadrimomento, por lo tanto, $P_\mu P^\mu A_\nu = m^2 A_\nu$, recordando que estamos utilizando unidades $\hbar = c = 1$. Por la libertad gauge, puedo transformar $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$ escogido tal que $\partial^\mu A_\mu = -\partial^\mu \partial_\mu \alpha$. En ese caso, $\partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0$ y por lo tanto

$$m^2 A_\nu = P_\mu P^\mu A_\nu = 0 \quad (1.9)$$

Es decir, el fotón no tiene masa.

Otra implicación importante de la simetría gauge y la libertad restringida que ésta da para escoger el valor de A_μ , es la polarización del fotón. Al igual que antes, tenemos la libertad de escoger el campo vectorial \vec{A} tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ y se puede escoger ϕ tal que $\phi = 0$. En ausencia de corrientes, sustituyendo en la cuarta ecuación de Maxwell, se tiene que el campo \vec{A} verifica

$$\partial_t^2 A_i - \nabla^2 A_i = 0 \quad (1.10)$$

por lo tanto,

$$\vec{A} = \vec{\varepsilon} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \Rightarrow 0 = \nabla \cdot \vec{A} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k}. \quad (1.11)$$

Es decir, $\vec{\varepsilon} \perp \vec{k}$, el vector polarización es ortogonal al vector de onda, lo que significa que la radiación electromagnética no está polarizada longitudinalmente. Que la luz tenga dos polarizaciones posibles es una consecuencia de la simetría gauge del electromagnetismo y de que el fotón no tenga masa.

Capítulo 2

Álgebras y grupos de Lie

Un conjunto G con una operación $\cdot : G \times G \rightarrow G$, (G, \cdot) es un grupo si verifica:

1. Existe $e \in G$ (llamado *elemento neutro*) tal que para todo $g \in G$, $g \cdot e = e \cdot g = g$.
2. Para todo $g \in G$ existe un elemento $h \in G$ tal que $g \cdot h = h \cdot g = e$. El elemento h se denota g^{-1} y se llama *elemento inverso de g* .
3. Para cualesquiera $g, h, l \in G$, $g \cdot (h \cdot l) = (g \cdot h) \cdot l$. Es decir, \cdot cumple la propiedad asociativa.

Usualmente, al elemento neutro suele ser denotado con la letra e (por *einheit*, *unidad* en alemán). Más adelante, cuando se defina el álgebra de Lie, aparecerá el número $e = 2,7182\dots$. No deben confundirse y no debería haber motivo para que esto sucediera si se entiende qué representa en cada momento.

La teoría de grupos, hostil y bella, sirve cuando se habla de transformaciones de objetos, pues éstas forman un grupo. Por supuesto, queremos preguntarnos por las simetrías de un sistema. Esto es preguntarnos por los grupos (de transformaciones del sistema) que dejan invariantes las ecuaciones que lo describen. Para aligerar la notación, no suele escribirse la operación \cdot , así que a partir de ahora $g \cdot h$ se denotará gh , y se denota $g \cdot g \cdot \dots \cdot g = g^n$. Algunos ejemplos sencillos de grupos son los grupos cíclicos $C_n = \{e, g, \dots, g^{n-1} \mid g^n = e\}$, los números enteros con la suma \mathbb{Z} o los números reales sin el 0, \mathbb{R}^* , con el producto. Estos

grupos cumplen que son abelianos. Es decir, que para cualesquiera $g, h \in G$, $gh = hg$: cumple la propiedad conmutativa. No todos los grupos son abelianos y cuando se empieza a tratar con grupos tener esto siempre presente es una precaución necesaria. Ejemplos de grupos no abelianos son los grupos diédricos D_n formados por las simetrías de un polígono regular de n lados, o el grupo de matrices $n \times n$ con determinante no nulo, $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$.

Un subconjunto $H \subset G$ es un subgrupo de G si (H, \cdot) es un grupo. En ese caso se denota $H \leq G$. Un subgrupo H de G se dice que es normal si para cualquier $g \in G$ y cualquier $h \in H$, se tiene que $ghg^{-1} \in H$, y se denota $H \trianglelefteq G$.

Otra definición importante es la de homomorfismo. Dados dos grupos cualesquiera (G, \cdot_G) y (H, \cdot_H) , una aplicación $\phi : G \rightarrow H$ se dice que es un homomorfismo de grupos si $\phi(g \cdot_G l) = \phi(g) \cdot_H \phi(l)$ para todo $g, l \in G$. Es decir, los homomorfismos conservan la operación en el grupo. Con un homomorfismo surgen dos grupos nuevos: $\text{Ker } \phi = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\} \trianglelefteq G$ y $\text{Im } \phi = \{\phi(g) \in H \mid g \in G\} \leq H$. Definimos el conjunto cociente $G/\text{Ker } \phi$ formado por las clases de equivalencia $[g]$ donde $g \in G$ es un representante de la clase y $[g] = \{l \in G \mid gl \in \text{Ker } \phi\}$. Por ser $\text{Ker } \phi$ un subgrupo normal de G , el conjunto cociente $G/\text{Ker } \phi$ forma un grupo con la operación \cdot definida como $[g] \cdot [l] = [g \cdot_G l]$. Con esto, se tiene el *Primer Teorema de Isomorfía* que dice que la aplicación $\tilde{\phi} : G/\text{Ker } \phi \rightarrow \text{Im } \phi$ definida como $\tilde{\phi}([g]) = \phi(g)$ es un homomorfismo biyectivo, es decir, es un isomorfismo de grupos.

Un *grupo de Lie* G es un grupo con estructura de variedad diferenciable de forma que el producto definido sobre el grupo es diferenciable. Es decir, si $g, h \in G$, las coordenadas de gh tienen que ser funciones diferenciables con respecto a las coordenadas de g y las coordenadas de h . El ejemplo no trivial más sencillo de grupo de Lie es $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, que con la multiplicación forma un grupo y es equivalente al círculo, una variedad diferenciable. Por otro lado, $GL(V)$ (el conjunto de los automorfismos del espacio vectorial V) es también un grupo de Lie. Esto motiva la introducción de la teoría de representación de un grupo.

Una *representación* (representación lineal) de un grupo de Lie G es un homomorfismo

$$\begin{aligned} \Gamma : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \Gamma(g) \end{aligned} \tag{2.1}$$

de forma que si $v \in V$ y $g \in G$, entonces $\Gamma(g)$ es una matriz y está definido $\Gamma(g)v$. Una representación se dice *unitaria* si para todo $g \in G$, $\Gamma(g)^\dagger = \Gamma(g^{-1})$. Por otro lado, la representación se dice irreducible si para todo subespacio $\{\vec{0}\} \neq W \subsetneq V$ existe $g \in G$ y $w \in W$ tales que $\Gamma(g)w \notin W$ (es decir, ningún subespacio de V no trivial es invariante por G). Si la representación no es irreducible, se dice que es reducible, y puede expresarse como suma directa de representaciones irreducibles. Cuando se hable de dimensión de la representación se estará refiriendo a la dimensión del espacio vectorial V , es decir $\dim \Gamma = \dim V$. Las representaciones cobran un papel importante puesto que tendremos un grupo actuando sobre distintos espacios vectoriales, y actuará de acuerdo a dicha identificación en $GL(V)$. Denotaremos G_0 como la componente conexa del grupo G que contiene al elemento neutro e .

Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial dotado de una estructura $[\cdot, \cdot]$ (*corchete de Lie*) que verifica para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{g}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$

1. $[x, x] = 0$.
2. $[\lambda x + \mu y, z] = \lambda [x, z] + \mu [y, z]$.
3. $[x, y] + [y, x] = 0$.
4. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Esta última propiedad es conocida como la *identidad de Jacobi*. El ejemplo de álgebra de Lie que más hemos visto es \mathbb{R}^3 con $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u} \times \vec{v}$, que dada la base usual \vec{e}_1, \vec{e}_2 y \vec{e}_3 cumplen $[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$. Otros muchos ejemplos relevantes se encuentran en las *álgebras de Lie matriciales*, donde los elementos de \mathfrak{g} son matrices y el corchete es el conmutador: $[A, B] = AB - BA$. Estas son las álgebras de los *grupos clásicos*, donde se utilizan grupos de

matrices para definir un grupo abstracto y el álgebra de Lie asociada sirve para determinar las representaciones del grupo. Otro ejemplo es el *álgebra de Heisenberg*, $\{X, P, \mathbb{1}\}$ siendo $X = x$, $P = -i\partial_x$, que verifica $[P, X] = -i\mathbb{1}$. La dimensión de un álgebra de Lie, $\dim \mathfrak{g}$, es la dimensión que tiene como espacio vectorial.

La relación entre grupos y álgebras de Lie viene dada por la posibilidad de asociar a cada grupo de Lie un álgebra de Lie. Un grupo de Lie es una variedad diferenciable, por lo que se puede hablar de su espacio tangente, que resulta ser el álgebra asociada. Se crea una simbiosis tal que la estructura del grupo G determina la estructura del álgebra \mathfrak{g} y la estructura del álgebra determina la estructura de la componente conexa del grupo que contiene al elemento neutro $G_0 \subseteq G$.

La tabla 2.1 recoge la información más crucial sobre los grupos de Lie más utilizados y sus respectivas álgebras de Lie.

2.1. El álgebra tangente

Tomemos $g, h \in G$ cercanos a e , y sean x_g las coordenadas de g podemos elegir $x_e = 0$. Haciendo desarrollos de Taylor de gh y de hg se tiene que

$$\begin{aligned} x_{gh} &= x_g + x_h + A(x_g, x_h) + \dots \\ x_{hg} &= x_h + x_g + A(x_h, x_g) + \dots \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde A es una aplicación bilineal que lleva un par de vectores en un vector. Si el grupo es no abeliano, $gh \neq hg$, sólo puede apreciarse en términos de grado mayor o igual que 2. Denotando $(g, h) = ghg^{-1}h^{-1}$ al conmutador del grupo, se tiene

$$x_{(g,h)} = x_{gh} - x_{hg} = A(x_g, x_h) - A(x_h, x_g) + \dots \tag{2.3}$$

En el espacio tangente al elemento neutro $T_e(G)$, se define el corchete de Lie según

$$x_{[g,h]} \equiv A(x_g, x_h) - A(x_h, x_g). \tag{2.4}$$

G	Conditions on $M \in G$	\mathfrak{g}	Conditions on $m \in \mathfrak{g}$	$\dim(\mathfrak{g})$
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$	-	$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$	-	$2n^2$
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$	M real	$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$	m real	n^2
$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$	$\det(M) = 1$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	$\mathrm{Tr}(m) = 0$	$2n^2 - 2$
$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$	M real, $\det(M) = 1$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	m real, $\mathrm{Tr}(m) = 0$	$n^2 - 1$
$\mathrm{U}(n)$	$M^\dagger = M^{-1}$	$\mathfrak{u}(n)$	$m^\dagger = -m$	n^2
$\mathrm{SU}(n)$	$M^\dagger = M^{-1}$, $\det(M) = 1$	$\mathfrak{su}(n)$	$m^\dagger = -m$, $\mathrm{Tr}(m) = 0$	$n^2 - 1$
$\mathrm{U}(t, s)$	$M^\dagger \eta M = \eta$	$\mathfrak{u}(t, s)$	$m^\dagger \eta = -\eta m$	n^2
$\mathrm{SU}(t, s)$	$M^\dagger \eta M = \eta$, $\det(M) = 1$	$\mathfrak{su}(t, s)$	$m^\dagger \eta = -\eta m$, $\mathrm{Tr}(m) = 0$	$n^2 - 1$
$\mathrm{SU}^*(n)$	$M\Omega = \Omega\bar{M}$, $\det(M) = 1$	$\mathfrak{su}^*(n)$	$m\Omega = \Omega\bar{m}$, $\mathrm{Tr}(m) = 0$	$n^2 - 1$
$\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$	$M^T = M^{-1}$	$\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$	$m^T = -m$	$n(n-1)$
$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$	$M^T = M^{-1}$, $\det(M) = 1$	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$	$m^T = -m$, $\mathrm{Tr}(m) = 0$	$n(n-1)$
$\mathrm{O}(n)$	M real, $M^T = M^{-1}$	$\mathfrak{o}(n)$	m real, $m^T = -m$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
$\mathrm{SO}(n)$	M real, $M^T = M^{-1}$, $\det(M) = 1$	$\mathfrak{so}(n)$	m real, $m^T = -m$, $\mathrm{Tr}(m) = 0$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
$\mathrm{O}(t, s)$	M real, $M^T \eta M = \eta$	$\mathfrak{o}(t, s)$	m real, $m^T \eta = -\eta m$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
$\mathrm{SO}(t, s)$	M real, $M^T \eta M = \eta$, $\det(M) = 1$	$\mathfrak{so}(t, s)$	m real, $m^T \eta = -\eta m$, $\mathrm{Tr}(m) = 0$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
$\mathrm{SO}^*(n)$	$M^T = M^{-1}$, $M^\dagger \Omega M = \Omega$	$\mathfrak{so}^*(n)$	$m^T = -m$, $m^\dagger \Omega = -\Omega m$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
$\mathrm{Sp}(n/2, \mathbb{C})$	$M^T \Omega M = \Omega$	$\mathfrak{sp}(n/2, \mathbb{C})$	$m^T \Omega = -\Omega m$	$n(n+1)$
$\mathrm{Sp}(n/2, \mathbb{R})$	M real, $M^T \Omega M = \Omega$	$\mathfrak{sp}(n/2, \mathbb{R})$	m real, $m^T \Omega = -\Omega m$	$\frac{1}{2}n(n+1)$
$\mathrm{Sp}(t, s)$	$M^T \Omega M = \Omega$, $M^\dagger G M = G$	$\mathfrak{sp}(t, s)$	$m^T \Omega = -\Omega m$, $m^\dagger G = -G m$	$\frac{1}{2}n(n+1)$

Cuadro 2.1: Definitions of matrix groups and their related Lie algebras: M and m are $n \times n$ complex matrices, where we use the abbreviation $n = t + s$. The matrix η is $\eta = \mathrm{diag}([+1]^t, [-1]^s)$ and also $G = \mathrm{diag}([+1]^t, [-1]^r, [+1]^t, [-1]^r)$; Ω is the symplectic matrix.

Entonces, si $X, Y \in T_e G$, existen curvas en G tales que $g(0) = h(0) = e$, $g'(0) = X$, $h'(0) = Y$. Y se puede comprobar que

$$[X, Y] = \partial_t \partial_s (g(t), h(s))|_{t=s=0} \quad (2.5)$$

Este corchete verifica las propiedades necesarias para hacer $T_e G$ un álgebra de Lie. En el caso particular de tratar con un grupo matricial, tomando $\gamma(t) = 1 + tA$ y $\phi(s) = 1 + sB$ se tiene

$$\begin{aligned} [A, B] &= \partial_t \partial_s ((1 + tA)(1 + sB)(1 - tA + t^2 A^2 - \dots)(1 - sB + s^2 B^2 - \dots))|_{t=s=0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [A, B] = \partial_t \partial_s (1 + ts(AB - BA))|_{t=s=0} = AB - BA \end{aligned}$$

En conclusión, recuperamos lo que habíamos considerado inicialmente: tomar el corchete como el conmutador.

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.6)$$

2.2. Grupos de Lie

Supongamos que los elementos del grupo G son parametrizados con regularidad (i.e., continuidad y diferenciabilidad) por $g \in G$, $g = g(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$. En un entorno de e , podemos suponer que $g(0) = e$. Si $\Gamma(\alpha) = \Gamma(g(\alpha))$ es una representación matricial de G , los generadores del grupo vienen determinados por

$$X_a = -i \left. \frac{\partial \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha=0}, \quad \forall a = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

Los generadores forman parte del álgebra de Lie asociada al grupo, luego forman un espacio vectorial (algo que, en general, no es cierto para cualquier conjunto de elementos del grupo). Si Γ es inyectiva, los generadores son linealmente independientes, y si la representación es unitaria ($\Gamma(\alpha)$ es unitaria para todo α), los generadores X_a son hermíticos. En general siempre trabajaremos con representaciones inyectivas.

Sea $\Gamma(\delta\alpha) = \mathbb{1} + i\delta\alpha_a X_a$, con X_a una base de \mathfrak{g} , un elemento del grupo muy cercano a $\mathbb{1}$. En esa dirección, puede avanzarse según

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{\substack{\delta\alpha \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \Gamma(\delta\alpha)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + \frac{i\alpha_a X_a}{k} \right)^k = e^{i\alpha_a X_a} \quad (2.8)$$

Es decir, G_0 viene parametrizado por la función exponencial. Podemos utilizar esto para buscar cómo es la estructura del grupo en un entorno cercano a $\mathbb{1}$ en función de los generadores X_1, \dots, X_N con $N = \dim(G)$. Entonces

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_c X_c} \quad (2.9)$$

que no es más que decir que el producto de dos elementos del grupo da otro elemento del grupo. Estamos interesados en encontrar los valores δ_c . Formalmente escribimos

$$i\delta_a X_a = \ln \left(1 + e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 \right). \quad (2.10)$$

Como

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 &= 1 + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}\beta_b^2 X_b^2 + \dots + i\alpha_a X_a \\ &\quad - \frac{1}{2}\alpha_a^2 X_a^2 + \dots - \alpha_a X_a \beta_b X_b - i\alpha_a X_a \beta_b^2 X_b^2 + \dots - 1 \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(-\alpha_a^2 X_a^2 - \beta_b^2 X_b^2 - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \beta_b X_b \alpha_a X_a - \dots) + \dots \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b + \frac{1}{2}[\beta_b X_b, \alpha_a X_a] + \dots \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] = -2i(\delta_a - \alpha_a \beta_a) X_a + \dots = i\gamma_c X_c \quad (2.11)$$

o bien

$$[X_a, X_b] = i f_{ab}^c X_c. \quad (2.12)$$

Evidentemente, $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$ y son llamadas *constantes de estructura* del grupo pues aportan toda la información necesaria para conseguir el valor δ_a (es decir, cualquier otro elemento del grupo cercano a $\mathbb{1}$). Además, las constantes de estructura son las mismas para todas las representaciones del grupo. En resumen, se tiene que

$$\gamma_c = \alpha_a \beta_b f_{ab}^c \text{ y } \delta_a = \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2} \gamma_a \quad (2.13)$$

Finalmente, si la representación es unitaria, lo que significa que los generadores son hermíticos, las constantes de estructura son reales

$$\left. \begin{array}{l} [X_a, X_b]^\dagger = -i(f_{ab}^c)^* X_c^\dagger \\ \parallel \\ [X_b, X_a] = -i f_{ab}^c X_c \end{array} \right\} \Rightarrow f_{ab}^{c*} = f_{ab}^c \Rightarrow f_{ab}^c \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

2.2.1. Representación adjunta

Las constantes de estructura forman una representación del álgebra de dimensión $\dim \mathfrak{g}$ llamada representación adjunta.

$$[X_a, [X_b, X_c]] = -f_{bc}^d f_{ad}^e X_e \quad (2.15)$$

Por la identidad de Jacobi y por la independencia lineal se tiene que

$$f_{bc}^d f_{ad}^e + f_{ab}^d f_{cd}^e + f_{ca}^d f_{bd}^e = 0 \quad (2.16)$$

Definimos para todo $a = 1, \dots, N$ una matriz T_a tal que

$$(T_a)_b^c = -if_{ab}^c \quad (2.17)$$

Las matrices T_a forman una representación del álgebra puesto que

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c \quad (2.18)$$

y son matrices con coeficientes puramente imaginarios si los coeficientes de estructura son reales.

Consideremos una transformación lineal que actúa sobre los X_a y que denotamos $X_a \mapsto X'_a = L_a^b X_b$, entonces

$$[X'_a, X'_b] = iL_a^d L_b^e f_{de}^c X_c = iL_a^d L_b^e f_{de}^g (L^{-1})_g^c X'_c \quad (2.19)$$

luego $f_{ab}^c \mapsto L_a^d L_b^e f_{de}^g (L^{-1})_g^c$. Las matrices T_a deben transformarse según $(T_a)_b^c \mapsto (T'_a)_b^c = L_a^d L_b^e (T_d)_e^g (L^{-1})_g^c$,

$$T_a \mapsto T'_a = L_a^d L T_d L^{-1}. \quad (2.20)$$

Es decir, una transformación lineal de los X_a induce una transformación en las matrices T_a . Además,

$$\text{Tr}(T_a T_b) \mapsto \text{Tr}(T'_a T'_b) = L_a^c L_b^d \text{Tr}(T_c T_d) \quad (2.21)$$

Podemos buscar una matriz L que haga

$$\text{Tr}(T'_a T'_b) = k_{(a)} \delta_{ab}, \quad (2.22)$$

una transformación de los vectores T_a que los ortogonaliza con respecto al producto escalar $\text{Tr}(T_a T_b)$. También se puede elegir el valor de $|k_{(a)}|$, aunque no su signo, puesto que la transformación de la traza se ve doblemente afectada por L . En el caso de un álgebra de

Lie de un grupo de Lie compacto (es decir, que sea compacto como variedad diferenciable) $k^a > 0$, que es el caso de $SU(2)$, el foco central en este tema. En resumen,

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab} \quad (2.23)$$

para cierto $\lambda > 0$. Introducimos la notación

$$f_{abc} = \lambda f_{ab}^d \delta_{dc} \quad (2.24)$$

En esta base las constantes de estructura son totalmente antisimétricas puesto que por la propiedad cíclica de la traza,

$$\left. \begin{array}{l} -i\lambda^{-1} \text{Tr}([T_a, T_b] T_c) = f_{abc} \\ \parallel \\ -i\lambda^{-1} \text{Tr}([T_b, T_c] T_a) = f_{bca} \end{array} \right\} \Rightarrow f_{abc} = f_{bca}$$

$$f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} = -f_{acb} = -f_{cba} = -f_{bac} \quad (2.25)$$

2.3. Álgebras y grupos simples

Una subálgebra invariante es un conjunto de generadores \mathfrak{h} tal que

$$\forall A \in \mathfrak{g}, \forall X \in \mathfrak{h}, [A, X] \in \mathfrak{h} \quad (2.26)$$

Un subálgebra invariante genera un subgrupo invariante cuando se exponentia

$$g = e^{iX}, h = e^{iY} \Rightarrow g^{-1} h g = e^{iX'} \quad (2.27)$$

donde $X' = X - i[Y, X] - \frac{1}{2}[Y, [Y, X]] + \dots \Rightarrow X' \in \mathfrak{h} \Rightarrow e^{iX'}$ es un subgrupo invariante.

Un álgebra que no tiene subálgebras invariantes no triviales ($\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ ó $\mathfrak{h} = 0$) se dice que es simple, y además un álgebra simple genera un grupo simple, es decir, un grupo G cuyos

únicos subgrupos normales son $\{e\}$ y G . La representación adjunta de un álgebra de Lie simple de un grupo compacto satisface $\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab}$, luego se trata de una representación irreducible. Se verifica que si un álgebra es simple, entonces la representación adjunta es irreducible:

Demostración. Si no es irreducible, existe un subespacio invariante S , digamos que éste es generado por T_1, \dots, T_K y utilicemos los índices $r = 1, \dots, K$ y $x = K + 1, \dots, N$. $[T_r, T_{r'}] = i f_{rr'x} T_x$, luego $i f_{rr'x} T_x \in S$. Por hipótesis $T_x \notin S \Rightarrow f_{rr'x} = 0$. Por la completa antisimetría de las constantes de estructura se tiene $f_{rr'x} = f_{xrr'} = -f_{rxr'} \Rightarrow [T_r, T_x] = 0 \Rightarrow S$ es subálgebra invariante (y también lo es $\langle T_{K+1}, \dots, T_N \rangle$). Por lo tanto \mathfrak{g} no es simple. \square

Un álgebra se dice semisimple si no posee subálgebras invariantes tales que

$$\forall T \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{g}, [T, X] = 0 \quad (2.28)$$

es decir, si no posee subálgebras invariantes abelianas.

2.4. Estados y operadores

Considerando una representación de un grupo G en un espacio vectorial V , la transformación de un vector v por g viene dada por

$$v \rightarrow v' = \Gamma(g)v \quad (2.29)$$

La transformación de un operador $O : V \rightarrow V$ tiene que ser tal que

$$Ov \rightarrow (Ov)' = \Gamma(g)Ov \quad (2.30)$$

pero además

$$Ov \rightarrow O'v' = O'\gamma(g)v \quad (2.31)$$

de donde se concluye que la transformación de un operador por un grupo G es

$$O \rightarrow O' = \Gamma(g)O\Gamma(g^{-1}). \quad (2.32)$$

Capítulo 3

$SU(2)$

El grupo $SU(2)$ corresponde al grupo de matrices complejas 2×2 , unitarias y con determinante 1. En la representación natural, la de la definición, este grupo viene parametrizado por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ -\beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.1)$$

por lo tanto, $SU(2) \cong S^3$ siendo S^3 la esfera. Entonces como la esfera es compacta, conexa y simplemente conexa, también lo es $SU(2)$. La definición abstracta del grupo puede darse a partir de su álgebra asociada, $\mathfrak{su}(2)$. Ésta es generada por los operadores hermíticos J_i ($i = 1, 2, 3$) tal que

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (3.2)$$

Supondremos que estos actúan sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita cuya base puede elegirse formada por autoestados de J_3 (es decir, J_3 actúa de forma diagonal sobre la base). Denotaremos $j = \text{máx spec } J_3$, donde $\text{spec } J_3$ es el espectro de J_3 , y sean los estados $|j, m, \alpha\rangle$ los autoestados asociados al autovalor j , donde α es otro índice sobre el que no actúan los operadores J_i . Además, por álgebra lineal básica, los estados con igual autovalor son ortogonales y pueden escogerse con módulo unitario, luego se tiene que $\langle j, m, \alpha | j, m, \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

3.1. Operadores escalera

Los operadores escalera viene definidos por

$$J^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (J_1 \pm iJ_2) \Rightarrow (J^{\pm})^{\dagger} = J^{\mp} \quad (3.3)$$

Considerando la definición del álgebra, estos operadores satisfacen

$$[J_3, J^{\pm}] = \pm J^{\pm} \quad [J^+, J^-] = J_3 \quad (3.4)$$

Tomando un autoestado de J_3 , $J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle$, y haciendo actuar sobre éste un operador escalera

$$J_3 J^{\pm} |j, m\rangle = J^{\pm} J_3 |j, m\rangle + [J_3, J^{\pm}] |j, m\rangle = J^{\pm} m |j, m\rangle \pm J^{\pm} |j, m\rangle = (m \pm 1) J^{\pm} |j, m\rangle. \quad (3.5)$$

Es decir, $J^{\pm} |j, m\rangle$ es un autoestado de J_3 con autovalor $m \pm 1$. Como j es el mayor de los autovalores y $J^+ |j, j\rangle$ tiene autovalor $j + 1$, el estado $J^+ |j, j\rangle$ no puede ser no nulo:

$$J^+ |j, j\rangle = 0. \quad (3.6)$$

J^{\pm} transforma los autoestados con autovalor m en autoestados con autovalor $m \pm 1$ que están determinados salvo constante multiplicativa:

$$J^- |j, m, \alpha\rangle = N_m(\alpha) |j, m - 1, \alpha\rangle \quad (3.7)$$

$$J^+ |j, m, \alpha\rangle = M_m(\alpha) |j, m + 1, \alpha\rangle \quad (3.8)$$

Para concretar estas constantes nos fijamos en los estados $|j, j, \alpha\rangle, |j, j, \beta\rangle$.

$$\begin{aligned} N_j(\beta)^* N_j(\alpha) \langle j, j-1, \beta | j, j-1, \alpha \rangle &= \langle j, j, \beta | J^+ J^- | j, j, \alpha \rangle = \langle j, j, \beta | [J^+, J^-] | j, j, \alpha \rangle = \\ &= \langle j, j, \beta | J_3 | j, j, \alpha \rangle = j \langle j, j, \beta | j, j, \alpha \rangle = j \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si se elige $N_j(\alpha) = N_j = \sqrt{j}$ se tiene que los estados $|j-1, \alpha\rangle$ son ortonormales. Además,

$$J^+ |j-1, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} J^+ J^- |j, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} [J^+, J^-] |j, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} J_3 |j, \alpha\rangle = \sqrt{j} |j, \alpha\rangle \quad (3.10)$$

Ésta es la semilla para construir una base que contenga a los autoestados $|m, \alpha\rangle$ tales que $\langle m, \beta | m, \alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ partiendo de un estado $|j, \alpha\rangle$. Para construirlos partimos de $N_j = \sqrt{j}$ y de $J^+ |j-1, \alpha\rangle = N_j |j, \alpha\rangle$. Se tiene

$$\begin{aligned} N_{j-1}(\beta)^* N_{j-1}(\alpha) \langle j-2, \beta | j-2, \alpha \rangle &= \langle j-1, \beta | J^+ J^- | j-1, \alpha \rangle = \\ &= \langle j-1, \beta | [J^+, J^-] + J^- J^+ | j-1, \alpha \rangle = (2j-1) \langle j-1, \beta | j-1, \alpha \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

Igual que antes, basta elegir $N_{j-1} = \sqrt{2j-1}$ para hacer los estados $|j-2, \alpha\rangle$ ortonormales. Por otro lado, la constantes M_m de la acción del operador J^+ ($J^+ |m, \alpha\rangle = M_m(\alpha) |m+1, \alpha\rangle$) pueden calcularse según

$$M_m(\alpha) = \langle m+1, \alpha | J^+ |m, \alpha\rangle = \overline{\langle m, \alpha | J^- |m+1, \alpha\rangle} = N_{m+1}(\alpha)^*. \quad (3.12)$$

Se pueden elegir los coeficientes $N_m(\alpha) = N_m$ puramente reales ¹, luego $M_m(\alpha) = M_m = N_{m+1}$. Con esto se puede encontrar una relación de recurrencia para estos coeficientes:

$$N_m^2 = \langle m, \alpha | J^+ J^- |m, \alpha\rangle = \langle m, \alpha | [J^+, J^-] + J^- J^+ |m, \alpha\rangle = N_{m+1}^2 + m \quad (3.13)$$

¹Esta elección recibe el nombre del convenio de fases de Condon-Shortley.

que de forma compacta es

$$N_m = \sqrt{N_{m+1}^2 + m} \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta que $N_j = \sqrt{j}$ puede demostrarse inductivamente la expresión usual

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \quad (3.15)$$

En resumen, hemos encontrado

$$J^- |m, \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j-m+1)(j+m)} |m-1, \alpha\rangle \quad (3.16)$$

$$J^+ |m, \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |m+1, \alpha\rangle \quad (3.17)$$

Hemos construido una base ortonormal formada por los estados $|m, \alpha\rangle$. Esta construcción es comúnmente denominada *construcción del mayor valor* y viene determinada por el valor j . Por otro lado, con un razonamiento análogo, si $j-l = \text{mín spec } J_3$, se tiene que $J^- |j-l, \alpha\rangle = 0$. Por lo tanto $N_{j-l} = 0$, de donde se deduce que $l = 2j$ ó $l = -1$, pero desde un principio tomamos j como el mayor autovalor de J_3 , luego $j \geq j-l \Rightarrow l \geq 0$, lo que descarta el caso $l = -1$. Finalmente, buscamos representaciones irreducibles, por lo que el álgebra no puede dejar invariante ningún subespacio:

- Los subespacios con distinto índice α no se mezclan con la acción del álgebra, luego únicamente puede existir un índice α , por lo que denotamos $|m, \alpha\rangle = |j, m\rangle$.
- Si J_3 tiene algún autovalor ξ tal que $\xi \neq j + \mathbb{Z}$, la acción de los operadores J^\pm sobre los estados $|j\rangle$ y $|\xi\rangle$ produce dos espacios que permanecen invariantes bajo la acción del álgebra. Por lo tanto, todos los autoestados son $|j-k\rangle$ donde k toma valores naturales.

De este último punto se deduce que

$$j \in \frac{1}{2} \cdot \mathbb{N} \quad (3.18)$$

pues si $j-l$ es el menor autovalor, l tiene que ser un número natural, y $l = 2j$. Y del primer

punto se deduce que hay un espacio \mathcal{H}_j correspondiente a una representación irreducible

$$\mathcal{H}_j = \text{span}_{\mathbb{C}} \{|j, m\rangle\}. \quad (3.19)$$

Como último dato importante, hay que destacar que todas las representaciones irreducibles de $SU(2)$ son de dimensión finita, luego cualquier representación irreducible será equivalente a una representación construida por el mayor valor, y ésta se llamará *representación de spin- j* .

Dada una representación del álgebra, se consigue una representación de $SU(2)$ mediante la parametrización exponencial. Dada la representación del álgebra $\Gamma(J_i)$, se consigue una parametrización del grupo $e^{i\theta_i\Gamma(J_i)}$.

3.2. Notación estándar

Fijada una representación de $SU(2)$ (es decir, fijado j), los estados básicos se denotan $|j, m\rangle$. Los elementos de matriz de los generadores vienen dados por

$$(J_a^j)_{kl} = \langle j, j+1-k | J_a | j, j+1-l \rangle \quad (3.20)$$

Si $j = \frac{1}{2}$, $\mathcal{H} = \text{span}_{\mathbb{C}} \{|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\}$. El operador J_3 viene representado por la matriz

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Los operadores escalera vienen dados por

$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y utilizamos esto para encontrar la expresión de $J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^+ + J^-)$ y $J_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(J^+ - J^-)$:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Es decir, se tiene que

$$J_a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sigma_a \quad (3.24)$$

donde σ_a son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

que generan el grupo $SU(2)$ en su representación de $spin-\frac{1}{2}$, que es como este grupo fue introducido: el grupo de matrices 2×2 complejas unitarias con determinante 1.

Debido a la sencillez en construir las matrices J_3, J^\pm , proceder como antes es una buena forma de conseguir representaciones irreducibles. Por ejemplo, para calcular la representación de $spin-1$ planteamos

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

y realizando las operaciones igual que antes, se llega a

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Para diferenciar la acción de distintas representaciones de $spin$, suele utilizarse la notación J_a^j para la representación del álgebra de $spin-j$, y los estados del espacio de Hilbert sobre el que actúa se denotan $|j, m, \alpha\rangle$.

3.3. Producto tensorial

El producto tensorial es una herramienta que permite representar un sistema formado por constituyentes independientes entre sí. Supongamos un espacio formado por estados $|j_1, l\rangle \otimes |j_2, m\rangle$. El operador $A \otimes B$ actúa según

$$A \otimes B |u\rangle \otimes |v\rangle \equiv A |u\rangle \otimes B |v\rangle. \quad (3.28)$$

Definiendo $\mathbb{J}_a = J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_a^{j_2}$ se tiene

$$\begin{aligned} [\mathbb{J}_a, \mathbb{J}_b] &= \\ &= (J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1})(J_b^{j_1} \otimes \mathbb{1}) + (J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes J_b^{j_2}) + (\mathbb{1} \otimes J_a^{j_2})(J_b^{j_1} \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes J_a^{j_2})(\mathbb{1} \otimes J_b^{j_2}) - \\ &\quad - (J_b^{j_1} \otimes \mathbb{1})(J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1}) - (J_b^{j_1} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes J_a^{j_2}) - (\mathbb{1} \otimes J_b^{j_2})(J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1}) - (\mathbb{1} \otimes J_b^{j_2})(\mathbb{1} \otimes J_a^{j_2}) = \\ &= [J_a^{j_1}, J_b^{j_1}] \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes [J_a^{j_2}, J_b^{j_2}] = i\varepsilon_{abc} (J_c^{j_1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_c^{j_2}) = i\varepsilon_{abc} \mathbb{J}_c. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Es decir, los operadores \mathbb{J}_a así definidos forman una representación del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ dado que

$$[\mathbb{J}_a, \mathbb{J}_b] = i\varepsilon_{abc} \mathbb{J}_c \quad (3.30)$$

y por lo tanto, generan una representación del grupo que actúa sobre los estados $|l, m\rangle = |j_1, l\rangle \otimes |j_2, m\rangle$. Sería interesante y útil encontrar una relación entre la acción del grupo sobre los estados del sistema compuesto $|l, m\rangle$ y la acción en cada uno de ellos por separado $|l\rangle$ y

$|m\rangle$). Para ello partimos de un elemento del grupo escrito en la parametrización exponencial:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(g) &= e^{i\alpha_a \mathbb{J}_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha_a (J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_a^{j_2}))^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (i\alpha_a J_a^{j_1})^k \otimes (i\alpha_a J_a^{j_2})^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} (i\alpha_a J_a^{j_1})^k \right) \otimes \left(\frac{1}{(n-k)!} (i\alpha_a J_a^{j_2})^{n-k} \right) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i\alpha_a J_a^{j_1})^k \right) \otimes \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha_a J_a^{j_2})^n \right) = \\
&= e^{i\alpha_a J_a^{j_1}} \otimes e^{i\alpha_a J_a^{j_2}} = D^{j_1}(g) \otimes D^{j_2}(g).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Es decir, la acción del grupo en esta representación viene dada por

$$\mathbb{D}(g) |l, m\rangle = D^{j_1}(g) |j_1, l\rangle \otimes D^{j_2}(g) |j_2, m\rangle. \tag{3.32}$$

A esto se le llama grupo diagonal. Notemos que $G_{diag} \cong G \subseteq G \times G$. Para un grupo G cualquiera, el grupo diagonal es

$$G_{diag} = \{g \otimes g / g \in G\} \subset G \times G \tag{3.33}$$

Según esta definición de \mathbb{J}_3 , su máximo autovalor es

$$\mathbb{J}_3 |j_1, j_2\rangle = (j_1 + j_2) |j_1, j_2\rangle \tag{3.34}$$

Notemos que $\mathbb{J}_a = J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_a^{j_2}$ pueden identificarse con la base de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, donde la primera está en la representación de spin j_1 y la segunda de spin j_2 (denotada representación (j_1, j_2)) sin más que considerar

$$J_a^{j_1} \otimes \mathbb{1} \rightarrow (J_a^{j_1}, 0) \quad J_a^{j_2} \otimes \mathbb{1} \rightarrow (0, J_a^{j_2}). \tag{3.35}$$

El producto de elementos del álgebra está definido según

$$(J_a^{j_1}, J_b^{j_2}), (J_c^{j_1}, J_d^{j_2}) = (J_a^{j_1} J_c^{j_1}, J_b^{j_2} J_d^{j_2}) \quad (3.36)$$

y por lo tanto, si consideramos $(J_a^{j_1}, 0), (0, J_b^{j_2})$ dos elementos básicos del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, conmutan. Los elementos del grupo que generan son

$$e^{i\alpha_a(J_a^{j_1}, 0) + i\beta_b(0, J_b^{j_2})} = e^{i\alpha_a(J_a^{j_1}, 0)} e^{i\beta_b(0, J_b^{j_2})} = (e^{i\alpha_a J_a^{j_1}}, e^{i\beta_b J_b^{j_2}}). \quad (3.37)$$

Es decir, el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ genera con la parametrización exponencial el grupo $SU(2) \times SU(2)$.

Esto implica, aunque también puede verse directamente y puede probarse para cualquier grupo representado como grupo de operadores, que son equivalentes

$$SU(2) \otimes SU(2) \cong SU(2) \times SU(2). \quad (3.38)$$

en representación de spin (j_1, j_2) y ambos son generados la representación de spin (j_1, j_2) del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{1}_{j_2} + \mathbb{1}_{j_1} \otimes \mathfrak{su}(2)$.

3.4. Relación con $SO(3)$

El grupo $SO(3)$ se define como el grupo de las matrices 3×3 con coeficientes reales tales que $U^t U = \mathbb{1}_3$ y $\det U = 1$. Son las matrices que conservan el producto escalar en \mathbb{R}^3 . Pues si $A \in SO(3)$, $A^t A = \mathbb{1}_3$, entonces

$$\vec{u}^t \vec{v} = \vec{u}^t A^t A \vec{v}. \quad (3.39)$$

El espacio de todas las matrices 3×3 tiene 9 grados de libertad. La restricción $\det U = 1$ es redundante con la restricción $U^t U = \mathbb{1}_3$, y esta restricción se convierte en 6. Por lo tanto, el grupo $SU(3)$ es una variedad de dimensión 3. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ se deduce

considerando un generador J y un elemento del grupo U tal que $U = e^{\theta J}$. Entonces $1 = \det U = e^{\theta \text{Tr} J}$. Una base del álgebra viene determinada por tres matrices con traza nula:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

que tienen las reglas de conmutación

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k. \quad (3.41)$$

Considerando los generadores del álgebra $\mathfrak{su}(2)$

$$\tilde{\sigma}_i = -\frac{i}{2} \sigma_i \Rightarrow [\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j] = \varepsilon_{ijk} \tilde{\sigma}_k \quad (3.42)$$

se ve que $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$, pero además se tiene que esta base es ortonormal con respecto al producto escalar

$$\langle J, K \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(JK). \quad (3.43)$$

Se puede identificar $\mathfrak{su}(2)$ con \mathbb{R}^3 como espacios euclídeos. Para cada $U \in SU(2)$ se define la aplicación $\phi_U : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ definida como $\phi_U(J) = UJU^\dagger$. Con cálculo explícito puede verse que está bien definida y además

$$\langle J, K \rangle = \langle \phi_U(J), \phi_U(K) \rangle \quad (3.44)$$

y por la identificación del álgebra con \mathbb{R}^3 , se identifica ϕ_U con un elemento de $SO(3)$ (una transformación que conserva el producto escalar de \mathbb{R}^3). En conclusión existe un homomorfismo γ de $SU(2)$ en $SO(3)$. Además, si $U \in SU(2)$ tiene como imagen el elemento neutro $\mathbb{1}_3 \in SO(3)$, es porque U conmuta con todos el álgebra, lo que significa $U = \pm \mathbb{1}_2$.

Es decir, $\text{Ker } \gamma = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \cong \mathbb{Z}_2$. Por el Primer Teorema de Isomorfía se tiene

$$SU(2) \cong SO(3)/\mathbb{Z}_2 \tag{3.45}$$

Capítulo 4

Spinores

4.1. El grupo de Lorentz

OP Una métrica pseudo-riemanniana de signatura (s,t) es una aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^T &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto v^t \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1) w \end{aligned} \quad (4.1)$$

siendo la métrica de Minkowski un caso particular de éstas, con $s = 1$ y denotada η . De esa forma, se define el grupo pseudo-ortogonal $O(s, t)$ como el grupo de matrices que deja invariante ρ :

$$\Lambda \in O(s, t) \Rightarrow \Lambda^t \rho \Lambda = \rho \iff \Lambda_\mu^\sigma \rho^{\sigma\alpha} \Lambda_\nu^\alpha = \rho^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Por las propiedades del determinante, se deduce

$$\det(\Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1. \quad (4.3)$$

Esto es sumamente importante, pues indica que el grupo $O(s, t)$ es no conexo y por lo tanto su álgebra de Lie no generará el grupo entero sino la componente conexa que contenga al elemento unidad.

Consideremos $SO(s, t) = \{\Lambda \in O(s, t) \mid \det(\Lambda) = 1\}$, el grupo formado por las aplica-

ciones lineales de \mathbb{R}^{s+t} que conservan el producto ρ y la orientación, y consideremos el caso particular $s = 1$ y $t = 3$ de la métrica de Minkowski ($\rho = \eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$). El grupo $O(1, 3)$ recibe el nombre de *grupo de Lorentz* y el subgrupo $SO(1, 3)$ se llama *subgrupo propio de Lorentz*.

Si nos fijamos en la primera componente de la métrica y recordando que $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$, se tiene

$$\Lambda_0^\sigma \eta^{\sigma\alpha} \Lambda_0^\alpha = \eta^{00} = 1 \Rightarrow \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 - \Lambda_0^i \Lambda_0^i = 1 \Rightarrow \Lambda_0^0 = \pm \sqrt{1 + \Lambda_0^i \Lambda_0^i} \quad (4.4)$$

luego $O(1, 3)$ está separado en cuatro componentes conexas según $\det(\Lambda) = \pm 1$ y $\Lambda_0^0 < 0$ ó $\Lambda_0^0 > 0$. La componente conexa que contiene a la unidad se llama *grupo de Lorentz ortocrono propio*,

$$SO(1, 3)^+ = \{ \Lambda \in O(1, 3) \mid \det(\Lambda) = 1 \text{ y } \Lambda_0^0 = 1 \} \quad (4.5)$$

Por supuesto, este grupo conserva la orientación temporal: dado un vector x , Λx tiene el mismo sentido temporal pues $\text{sign}(x_0) = \text{sign}(\Lambda_0^0 x_0)$. Además, como ya se indicó, $\mathbb{1} \in SO(1, 3)^+$, así que el grupo de Lorentz ortocrono propio es el grupo generado por el álgebra $\mathfrak{so}(1, 3)$.

De hecho, se tiene que $\Lambda \in SO(1, 3)^+$ si y sólo si Λ es un número par de reflexiones temporales y un número par de reflexiones espaciales. Luego todas las componentes de $O(1, 3)$ se pueden obtener multiplicando por $SO(1, 3)^+$ por una reflexión temporal y una reflexión espacial:

$$O(1, 3) = SO(1, 3)^+ \cup \Lambda_P SO(1, 3)^+ \cup \Lambda_T SO(1, 3)^+ \cup \Lambda_P \Lambda_T SO(1, 3)^+. \quad (4.6)$$

Para conocer la estructura del grupo de Lorentz basta conocer la estructura del ortocrono propio.

4.1.1. El álgebra $\mathfrak{so}(1, 3)$

En primer lugar, notemos que $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{pmatrix}$ donde R_3 es una matriz 3×3 real tal que $R_3^t R_3 = \mathbb{1}_3$, verifica $R^t \eta R = \eta$. Si además $\det(R_3) = 1$, también $\det(R) = 1$ y $R \in SO(1, 3)^+$. Éste es el caso cuando R_3 es una matriz de rotación propia (una rotación $R \in SO(3)$) en \mathbb{R}^3 , lo que significa que hay una representación de $SO(3)$ contenida en $SO(1, 3)^+$ y lo mismo para las respectivas álgebras, $\mathfrak{so}(3) \subseteq \mathfrak{so}(1, 3)^+$.

Si $A \in SO(3)$, $A^t A = \mathbb{1}$. Expresando A en la parametrización exponencial y suponiendo que está generado por un único elemento del álgebra, $A = e^{i\alpha J}$, se deduce

$$e^{i\alpha J^t} e^{i\alpha J} = \mathbb{1} \Rightarrow J^t + J = 0. \quad (4.7)$$

Además,

$$\det(A) = e^{\text{Tr}(i\alpha J)} = 1 \Rightarrow \text{Tr} J = 0. \quad (4.8)$$

Fácilmente se encuentran tres matrices linealmente independientes que generan el álgebra $\mathfrak{so}(3)$ y su inclusión en $\mathfrak{so}(1, 3)$ consiste en añadir una fila y una columna de ceros resultando en los tres generadores

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Estos elementos generan las rotaciones espaciales, que dejan invariante la componente temporal de los vectores del espacio-tiempo. Para completar la base del álgebra, consideremos un camino contenido en $SO(1, 3)^+$ de la forma $I + sK$. Al estar contenido dentro de $SO(1, 3)^+$ se tiene

$$(\mathbb{1} + sK)^t \eta (\mathbb{1} + sK) = \eta. \quad (4.10)$$

Derivando con respecto a s y evaluando en $s = 0$ encontramos un elemento del álgebra

tangente tal y como se definió. Esto es

$$K^t \eta + \eta K = 0. \quad (4.11)$$

K es un elemento del álgebra, y dado que los elementos del grupo tienen determinante igual a 1, K tiene traza igual a 0. Despejando K de la ecuación anterior se encuentran las dos ecuaciones que han de verificar los elementos del álgebra $\mathfrak{so}(1, 3)$:

$$\begin{aligned} \eta K \eta &= -K \\ \text{Tr } K &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Notemos que solución a estas ecuaciones también las verifican los generadores de rotaciones J_1, J_2 y J_3 . Los generadores restantes son

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

y una transformación generada por éstos se denomina *boost*. Explícitamente son de la forma

$$e^{\alpha K_1} = \mathbb{1}_4 + \begin{pmatrix} \alpha K_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

De aquí es evidente que, como las funciones $\cosh \alpha$ y $\sinh \alpha$ son no acotadas, el grupo $SO(1, 3)^+$ no es compacto al ser una variedad no acotada.

Haciendo las cuentas puede verificarse que el álgebra $\mathfrak{so}(1, 3)$ verifica las siguientes

reglas de conmutación

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk} J_k \\
[J_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k \\
[K_i, K_j] &= -\varepsilon_{ijk} J_k
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Atendiendo a la primera, el conmutador entre J_i y J_j , parece que aquí podemos encontrar una copia de $\mathfrak{su}(2)$. Pero primero introducimos los elementos

$$N_i^\pm = \frac{1}{2} (J_i \pm iK_i) ; \quad (N_i^\pm)^\dagger = N_i^\mp \tag{4.16}$$

los cuales verifican las reglas de conmutación

$$\begin{aligned}
[N_i^\pm, N_j^\pm] &= \varepsilon_{ijk} N_k^\pm \\
[N_i^+, N_j^-] &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Volvamos por un momento a $\mathfrak{su}(2)$ con $\{A_i = \frac{1}{2}\sigma_i\}_{i=1,2,3}$ la base usual en el capítulo anterior. Definiendo $\tilde{A}_i = -iA_i$, que forma también una base del álgebra, el corchete de Lie se convierte en

$$[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] = -[A_i, A_j] = -i\varepsilon_{ijk} A_k = \varepsilon_{ijk} \tilde{A}_k \tag{4.18}$$

que es la regla de conmutación que verifican N_i^\pm . Luego existe un isomorfismo de álgebras de Lie tal que

$$\mathfrak{so}(1, 3)^+ \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2). \tag{4.19}$$

Esto indica que dentro de $SO(1, 3)$ viven dos copias de $SU(2)$. Entonces, para buscar representaciones irreducibles del grupo de Lorentz ortocrono propio basta con buscar representaciones irreducibles de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, que viene determinadas por la construcción del mayor valor. Es decir, las representaciones irreducibles de $\mathfrak{so}(1, 3)$ vienen indexadas por un tupla (j_1, j_2) . Al ser $(N_i^\pm)^\dagger = N_i^\mp$, se tiene que $(j_1, j_2) = (j_2, j_1)^\dagger$

4.2. El álgebra de Clifford

En primer lugar, definamos el concepto matemático de álgebra de Clifford. Para ello, se define el anticonmutador de matrices como

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (4.20)$$

Dado un espacio vectorial V con métrica ρ , un *álgebra de Clifford* de (V, ρ) es cualquier tupla (\mathcal{C}, γ) , donde \mathcal{C} es un anillo de matrices y $\gamma : V \rightarrow \mathcal{C}$ es una aplicación lineal llamada *relación de Clifford* que cumple

$$\{\gamma(v), \gamma(w)\} = 2v^t \rho w \mathbf{1}. \quad (4.21)$$

En nuestro caso $(V, \rho) = (\mathbb{R}^4, \eta)$ por lo que el álgebra de Clifford debe verificar

$$\gamma(e_0)^2 = \mathbf{1} \quad \gamma(e_i)^2 = -\mathbf{1} \quad \gamma(e_\mu)\gamma(e_\nu) = -\gamma(e_\nu)\gamma(e_\mu) \quad (4.22)$$

Conocemos matrices 2×2 que al elevarlas al cuadrado dan la identidad, que son las matrices de Pauli. Además, éstas verifican que

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij} \quad (4.23)$$

Es decir, forman el álgebra de Clifford (\mathbb{R}^3, δ) .

Para construir cuatro matrices 4×4 verificando las condiciones necesarias para (\mathbb{R}^4, η) , aprovechamos las propiedades del producto de Kronecker

$$\begin{aligned} (A \otimes C)(B \otimes D) &= (AB) \otimes (CD) \\ (A \otimes C) + (B \otimes C) &= (A + B) \otimes C. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Tan sólo falta encontrar matrices 2×2 tal que sus cuadrados sea $\pm \mathbb{1}_2$, y para ello basta

considerar

$$\gamma^0 = \gamma(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2; \quad \gamma^i = \gamma(e_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_i \quad (4.25)$$

que es inmediato que verifican los requisitos para ser álgebra de Clifford del espacio-tiempo de Minkowski. Para aligerar notación usualmente se denota $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$. Además, todas las álgebras de Clifford de un mismo espacio vectorial son equivalentes y también lo son todas las representaciones irreducibles, así que sin pérdida de generalidad, consideraremos esta representación, conocida como *representación de Weyl* o *representación quiral*.

La aparición de las matrices de Pauli sugiere que hay relación entre el grupo $SU(2)$ y el álgebra de Clifford. Además, en cada una de las matrices de \mathcal{C} aparecen dos matrices de Pauli y sabemos que $\mathfrak{so}(1,3)$ es, en su representación clásica, matrices 4×4 . Y sabemos que es isomorfa a dos copias de $\mathfrak{su}(2)$, matrices 2×2 en la representación de $\text{spin } \frac{1}{2}$, cuya base está determinada por las matrices de Pauli.

Consideremos el conmutador entre dos matrices γ^μ y γ^ν , al que llamaremos

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu. \quad (4.26)$$

Estas matrices con el conmutador cumplen las reglas del álgebra de Lie del grupo de Lorentz: las matrices $S_{\mu\nu}$ son antisimétricas en sus índices y $S_{\mu\mu} = 0$, así que para formar una base identificamos $S_{0i} \rightarrow K_i$, $S_{23} \rightarrow J_1$, $S_{31} \rightarrow J_2$ y $S_{12} \rightarrow J_3$, por lo tanto nos quedamos con seis matrices. Para ver que estas matrices cumplen el álgebra de Lie del grupo de Lorentz basta hacer el cómputo explícito de todos los corchetes.

Así, hemos encontrado una nueva representación del álgebra $\mathfrak{so}(1,3)$. Pero una representación es la acción sobre un espacio vectorial y hasta ahora sólo hemos hablado de matrices sin nada sobre lo que actuar. Se define el *campo spinor* $\Psi(x) \in \mathbb{C}^4$ que bajo transformaciones de Lorentz se tiene

$$\Psi(x) \rightarrow S(\Lambda) \Psi(\Lambda^{-1}x) \quad (4.27)$$

donde los elementos del grupo vienen determinados según la representación correspondiente del álgebra:

$$\begin{aligned}\Lambda &= e^{(\theta_{0i}K_i + \theta_{23}J_1 + \theta_{31}J_2 + \theta_{12}J_3)} \\ S(\Lambda) &= e^{\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\end{aligned}\tag{4.28}$$

donde el parámetro θ cumple $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$, y es el mismo en ambas representaciones puesto que el elemento del grupo es el mismo.

Llegados a este punto podría pensarse que realmente no se ha desvelado nada nuevo: hemos pasado de matrices 4×4 a matrices 4×4 , y de actuar en vectores $x \in \mathbb{R}^4$ a actuar en una tupla $\Psi \in \mathbb{C}^4$. ¿Acaso todo este esfuerzo ha sido para un cambio de base? No, estas representaciones actúan de forma muy distinta y la transformación de Ψ es distinta a la de un vector. Por ejemplo, consideremos una rotación de ángulo $\theta = 2\pi$ sobre el eje 1. La transformación de un vector x responde a

$$\Lambda_{\theta=2\pi}x = \mathbb{1}_4x = x.\tag{4.29}$$

Considerando la representación de Weyl, $J_1 \rightarrow S_{23}$ que de acuerdo a su definición

$$S_{23} = -\frac{1}{2}\mathbb{1}_2 \otimes (\mathbb{1}_2 + \sigma_2\sigma_3); \quad S_{23}^2 = \frac{1}{4}\mathbb{1}_2 \otimes (\mathbb{1}_2 + \sigma_2\sigma_3)^2 = -\frac{1}{4}\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2; \quad \dots\tag{4.30}$$

Denotando $s_{ij} = \mathbb{1}_2 + \sigma_i\sigma_j$,

$$\begin{aligned}S(\Lambda_{\theta=2\pi}) &= \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_1 - \frac{2\pi}{2}\mathbb{1}_2 \otimes s_{23} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2\pi}{2}\right)^3\mathbb{1}_2 \otimes s_{23} - \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow S(\Lambda_{\theta=2\pi}) = \mathbb{1}_2 \otimes (\cos \pi \cdot \mathbb{1}_2 - \text{sen } \pi \cdot s_{23}) \Rightarrow S(\Lambda_{\theta=2\pi}) = -\mathbb{1}_4\end{aligned}\tag{4.31}$$

La transformación de un spinor responde a

$$S(\Lambda_{\theta=2\pi})\Psi = -\mathbb{1}_4\Psi = -\Psi.\tag{4.32}$$

Es decir, el spinor es un objeto extraño a la intuición. Un objeto que tras rotarlo una vuelta

completa ha cambiado de signo: los spinores no son vectores.

Esta representación del grupo de Lorentz se identifica con la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. En la representación de Weyl del álgebra de Clifford, denotando $\gamma^\mu = T^\mu \otimes \sigma_\mu$, se tiene

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} T^\mu T^\nu \otimes \sigma_\mu \sigma_\nu. \quad (4.33)$$

En la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ los generadores son de la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in (\frac{1}{2}, 0); \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \in (0, \frac{1}{2}) \quad (4.34)$$

Considerando la base $S^{\mu\nu}$ con $\mu\nu \in \{(01), (02), (03), (23), (31), (12)\}$, basta identificar

$$S^{0i} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S^{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ijk} \sigma_k \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

para ver que efectivamente la representación del grupo de Lorentz dada a partir de los $S^{\mu\nu}$ se identifica con la de spin $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

Se define la matriz $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, que es $\gamma^5 = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}_2$. Es de inmediata comprobación que

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (4.36)$$

y además

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0 \quad (4.37)$$

De acuerdo a esta equivalencia, se divide el campo spinor en dos componentes.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

donde se llama *spinor zurdo* a la componente ψ_+ o se dirá de *quiralidad zurda*, que se corresponde con la representación $(\frac{1}{2}, 0)$; y se llama *spinor diestro*, de *quiralidad diestra*

a la componente ψ_- , que se corresponde con la representación $(0, \frac{1}{2})$. Entonces γ^5 actúa sobre el como spinor

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\psi_+ \\ -\psi_- \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Con esto se puede construir los operadores que proyectan un spinor sobre sus componentes diestra y zurda:

$$\psi_+ = \frac{1 + \gamma^5}{2}; \quad \psi_- = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad (4.40)$$

y como $[S^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0$, se tiene que la quiralidad es invariante Lorentz.

Como apunte final, notemos que las representaciones finitas del grupo de Lorentz son no unitarias. Es cierto que utilizando la representación de Weyl se tiene que $S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda) = \mathbb{1}_4$ cuando Λ es una rotación, pero no es cierto si se considera un boost. Para que la representación sea unitaria, los elementos del álgebra deben ser antihermíticos y en la representación de Weyl $S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, lo que fuerza que todas las matrices γ^μ deban ser hermíticas o bien antihermíticas. Pero esto no es posible, pues $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}_4$ (γ^0 tiene autovalores reales) y $(\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}_4$ (γ^i tiene autovalores imaginarios). Por lo tanto, se puede elegir que la matriz γ^0 sea hermítica, pero las matrices γ^i serán siempre antihermíticas.

4.3. Representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

En el capítulo anterior se concluyó que dada una representación de spin (j_1, j_2) ,

$$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathfrak{su}(2) \quad (4.41)$$

y por lo tanto para estudiar la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ basta identificar

$$N_i^+ \rightarrow M_i^+ = \frac{i}{2} \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_i^* \quad N_i^- \rightarrow M_i^- = -\frac{i}{2} \sigma_i \otimes \mathbb{1}_2 \quad (4.42)$$

y simplemente, considerando la matriz de cambio de base

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

basta hacer los cálculos explícitamente para ver que se tiene

$$U^{-1}M_i^{\pm}U = N_i^{\pm} \quad (4.44)$$

de donde se sigue que ambas álgebras de Lie son iguales y por lo tanto, la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es equivalente a la representación natural del grupo ortocrono propio de Lorentz. Los objetos que transformen según esta representación, lo hacen igual que los vectores.

Capítulo 5

Lagrangianos relevantes

Por comodidad, se utilizarán unidades naturales. Es decir, siempre se considerará $\hbar = c = 1$.

5.1. La ecuación de Klein-Gordon

Buscamos construir una acción (equivalentemente una densidad lagrangiana) para campos que transformen según la representación $(0, 0)$ del grupo de Lorentz. Un posible lagrangiano sería

$$\mathcal{L} = a + b\Phi + \bar{b}\Phi^\dagger + c\Phi^\dagger\Phi + d\partial_\mu\Phi + e\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi + f\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi. \quad (5.1)$$

Debido a que la cantidad relevante es la acción, $S = \int \mathcal{L}dx$, hay términos que no aparecen debido a que su integral es equivalente a la integral de algunos de los términos que sí están incluidos explícitamente. Por ejemplo, integrando por partes se tiene que $\int \Phi^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\Phi dx = \int \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi dx$.

Si exigimos invariancia Lorentz, dado que el operador derivada transforma $\partial_\mu \rightarrow (\Lambda^{-1})_\mu^\nu \partial_\nu$, no pueden aparecer derivadas de primer orden (o de orden impar). Las constantes a y b pueden elegirse nulas, pues independientemente de su valor se obtiene la misma física. Para

ver esto consideramos la ecuación de Euler-Lagrange y denotando $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + a + b\Phi$ se tiene

$$\frac{\partial(\mathcal{L}_0 + a + b\Phi)}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial(\mathcal{L}_0 + a + b\Phi)}{\partial(\partial_\mu\Phi)} = \frac{\partial(\mathcal{L}_0)}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial(\mathcal{L}_0)}{\partial(\partial_\mu\Phi)} + b = 0 \quad (5.2)$$

luego considerar a ó b no nulos sólo añade, a lo sumo, una constante a la ecuación del movimiento. Habiendo deducido $a = b = d = f = 0$, sólo quedan los coeficientes c y e . Puesto que una constante multiplicativa no cambia la física, podemos considerar $\mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{2e}\mathcal{L}$. Con esta elección denotamos $\frac{c}{e} = -m^2$ y la densidad lagrangiana resultante es

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi). \quad (5.3)$$

La etiqueta KG se debe a que este lagrangiano da la ecuación de movimiento de Klein-Gordon. Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \right) = 0 \Rightarrow -m^2\Phi^\dagger - \partial_\mu\partial^\mu\Phi^\dagger = 0 \Rightarrow (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Phi = 0. \quad (5.4)$$

Esta ecuación describe campos y partículas de spin 0 ¹.

Finalmente, notemos que este lagrangiano para un campo complejo es equivalente a la suma de los lagrangianos de dos campos reales independientes. Denotando $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$,

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - m^2\phi_1^2) + \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - m^2\phi_2^2). \quad (5.5)$$

Eventualmente será necesario añadir más términos, quedando

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - \frac{\lambda}{8} (\Phi^\dagger\Phi - v^2) \quad (5.6)$$

¹ $P_\mu = i\partial_\mu$ luego la ecuación (??) es ??

5.2. La ecuación de Dirac

Consideremos un campo spinor Ψ . Queremos buscar una acción que describa su comportamiento y que sea invariante Lorentz. A primera vista, al igual que en el caso anterior, podría pensarse que \mathcal{L} contendrá el término $\tilde{\mathcal{L}} = \Psi^\dagger \Psi$. Recordemos que un spinor transforma según $\Psi \rightarrow S(\Lambda)\Psi$, luego

$$\Psi^\dagger \Psi \rightarrow \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger S(\Lambda) \Psi \neq \Psi^\dagger \Psi \quad (5.7)$$

pues esta representación del grupo de Lorentz no es unitaria. Por lo tanto, $\tilde{\mathcal{L}}$ no es invariante Lorentz.

Consideremos una representación del álgebra de Clifford que, al igual que la representación de Weyl, satisfaga $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ y $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. Como $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$, se cumple que

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger \quad (5.8)$$

y por tanto

$$S_{\mu\nu}^\dagger = \frac{1}{4} \left[(\gamma^\nu)^\dagger, (\gamma^\mu)^\dagger \right] = -\gamma^0 S_{\mu\nu} \gamma^0. \quad (5.9)$$

Para un elemento del grupo, su traspuesta conjugada será

$$S(\Lambda)^\dagger = e^{\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu} S_{\mu\nu}^\dagger} = e^{-\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu} \gamma^0 S_{\mu\nu} \gamma^0} = \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0. \quad (5.10)$$

Con esta información, se introduce la pieza clave para construir un lagrangiano invariante Lorentz para el spinor: la *adjunta de Dirac*,

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (5.11)$$

con lo que el lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}} = \bar{\Psi} \Psi$ es invariante Lorentz.

$$\bar{\Psi} \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \rightarrow \Psi^\dagger S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 S(\Lambda) \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 \gamma^0 S(\Lambda) \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi} \Psi \quad (5.12)$$

Si aspiramos a que haya dinámica, debe aparecer al menos una derivada.

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{\Psi} M^\mu \partial_\mu \Psi \quad (5.13)$$

donde M^μ denota cierto objeto que hará invariante esta acción. Una transformación Lorentz hará

$$\bar{\Psi} M^\mu \partial_\mu \Psi \rightarrow \bar{\Psi} S(\Lambda)^{-1} (M')^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu S(\Lambda) \Psi. \quad (5.14)$$

Como $S(\Lambda)$ es una matriz constante, $\partial_\nu S(\Lambda) = S(\Lambda) \partial_\nu$ y una condición suficiente para que se tenga invariancia Lorentz es que M^μ transforme como un vector, $M^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu M^\nu$, y además $S(\Lambda)^{-1} M S(\Lambda) = M$. Tiene sentido considerar

$$M^\mu = \gamma^\mu \quad (5.15)$$

debido a que cualquier combinación lineal de matrices $\theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$ con $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$ conmuta con $M = \gamma^0 + \gamma^1 + \gamma^2 + \gamma^3$, y por lo tanto también conmuta cualquier función $f(\theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu})$, en particular,

$$[S(\Lambda), M] = 0 \quad (5.16)$$

Si definimos la acción del grupo de Lorentz sobre las matrices γ^μ como

$$\gamma^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (5.17)$$

y recordando que $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ se obtiene

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \rightarrow \bar{\Psi} S(\Lambda)^{-1} \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\rho \partial_\rho S(\Lambda) \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\nu \partial_\nu \Psi \quad (5.18)$$

y como el subíndice ν es mudo se concluye que esta acción es invariante. Usualmente aparece la operación *slash de Feynman*. Si M_μ es cualquier vector, se denota

$$\not{M} = \gamma^\mu M_\mu. \quad (5.19)$$

Uniendo las dos densidades lagrangianas que hemos deducido para el spinor queda el definitivo

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\Psi} (\not{\partial} + im) \Psi. \quad (5.20)$$

La etiqueta D se debe a que este lagrangiano da la ecuación de Dirac. Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} m \bar{\Psi} - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu = 0 \Rightarrow \bar{\Psi} (\gamma^\mu + m) = 0 \quad (5.21)$$

y derivando con respecto a $\bar{\Psi}$,

$$(i\not{\partial} - m) \Psi = 0. \quad (5.22)$$

5.3. La ecuación de Proca

Tratemos de construir una acción para un campo que transforma según la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, equivalentemente vectorial, del grupo de Lorentz. Una acción invariante Lorentz es

$$\tilde{\mathcal{L}} = A^\mu A_\mu \quad (5.23)$$

puesto que escrito en forma vectorial, esta acción es $\mathcal{L} = A^t \eta A$ que transforma a $\mathcal{L}' = A^t \Lambda^t \eta \Lambda A = \mathcal{L}$ porque es la definición del grupo de Lorentz. Para incluir dinámica, deberán aparecer derivadas. Si consideramos una densidad lagrangiana que incluya los términos $A^\mu A_\mu$ y dado que términos de la forma A_μ multiplicado con derivadas de segundo orden son equivalentes a términos producto de derivadas de primer orden, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = A^\mu$. La ecuación de Euler-Lagrange aporta información:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0 \Rightarrow A^\mu = \partial_\nu (X^{\mu\nu}) \quad (5.24)$$

donde $X^{\mu\nu}$ es alguna expresión contravariante en ambos índices puesto que tiene que transformar igual a ambos lados de la igualdad. La primera idea que se puede considerar es

$$X^{\mu\nu} = b\partial^\mu A^\nu + c\partial^\nu A^\mu \quad (5.25)$$

donde b y c son constantes sobre las que tenemos libertad de elección. Sin embargo, en la analogía entre un campo y una maya elástica, es razonable pensar que la energía contemplará la curvatura, por lo que se elige $c = -b$. La densidad lagrangiana posee el término

$$\tilde{\mathcal{L}} = b\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - b\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu. \quad (5.26)$$

Se llama *intensidad de campo* (o, en la visión geométrica en que A es una conexión, *curvatura de la conexión A*) al tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (5.27)$$

De vuelta en la acción, dividiendo entre $-4b$ y llamando m^2 a la constante que queda multiplicando al término $A^\mu A_\mu$, la densidad lagrangiana resultante es

$$\mathcal{L}_P = m^2 A^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.28)$$

llamada acción de Proca. La ecuación de movimiento se convierte en

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -m^2 A_\nu \quad (5.29)$$

Si $m \neq 0$, y en algunos casos tendremos $\partial^\mu A_\mu = 0$ entonces

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \partial^\mu F_{\mu\nu} = -m^2 A_\nu \quad (5.30)$$

Entonces $P^\mu P_\mu A_\nu = m^2 A_\nu$ por lo que m es la masa del campo. En caso de que el campo no tenga masa, esta densidad lagrangiana se convierte en la densidad lagrangiana de Maxwell

sin corrientes

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (5.31)$$

por lo tanto, la acción de Proca contempla la descripción del fotón y de algún “fotón masivo”, que llamaremos bosón vectorial masivo.

Capítulo 6

De simetrías a QED

6.1. Campos gauge

En esta sección se utilizarán algunos conceptos de Geometría que han sido extraídos del curso *Introduction to Differential Geometry for Theoretical Physicists* impartido por el Profesor Andrés Viña Escalar. Algunos de estos conceptos no serán explicados aquí pero pueden consultarse en la bibliografía básica de Geometría Diferencial (por ejemplo [7]).

Un campo vectorial cualquiera, Φ , definido sobre una variedad M asocia a cada punto x el vector $\Phi(x) \in T_x M$. Entonces dado otro punto diferente y , el vector $\Phi(y)$ no está en el mismo espacio vectorial que $\Phi(x)$. Por otro lado, otro observador percibirá el campo Φ con distintas coordenadas, que denotamos $\Phi'(x) \in T_x M$. Habrá una matriz P_x de cambio de base que relacionará las coordenadas

$$\Phi'(x) = P_x \Phi(x). \tag{6.1}$$

Considerar que la teoría de campos es invariante bajo la acción de cierto grupo G significa que las matrices P_x pertenecen a una representación matricial de dicho grupo.

Por supuesto, queremos conocer la derivada del campo Φ . El problema es que la imagen de dos puntos distintos está en distintos espacios vectoriales, por lo que es necesario introducir una nueva definición de derivada, más general, y que sirva al propósito. Para

ello, en primer lugar, se define el producto de un campo Φ con una función f como el campo vectorial que actúa según

$$d(f\Phi)(x) = f(x)\Phi(x) \quad (6.2)$$

y cualquier operador D_v se considera una derivada en la dirección $v \in M$ del campo Φ si cumple

$$D_v(f\Phi) = df(v)\Phi + fD_v\Phi \quad (6.3)$$

$$D_v(\Phi + \Psi) = D_v\Phi + D_v\Psi \quad (6.4)$$

Fijada $\{s^\mu\}$ una base del espacio T_xM , el campo Φ se escribe como combinación lineal de la base como $\Phi = \Phi_\mu s^\mu$. Cualquier base $\{s^\mu\}$ de T_xM se llamará *referencial*. De acuerdo a las propiedades de la derivada del campo,

$$D_v\Phi = \partial_v\Phi_\mu s^\mu + \Phi_\mu D_v s^\mu \quad (6.5)$$

luego para conocer la derivada D_v basta conocer cómo actúa sobre la base $\{s^\mu\}$. Esto puede expresarse con un tensor A como

$$D_v s^\mu = iA_\nu{}^\mu(v)s^\nu. \quad (6.6)$$

La diferencial de una función es una aplicación lineal, es decir $df(av+bw) = adf(v)+bdf(w)$. Si pretendemos que D sea una generalización de la derivada, habrá que exigir $D_{av+bw} = aD_v + bD_w$. Para que esto se verifique siempre, el tensor A debe verificar $A(av + bw) = aA(v) + bA(w)$. En las direcciones de la base del espacio-tiempo o de la variedad M , se escribe $A_\mu = A(x_\mu)$, y son suficientes para conocer A en cualquier dirección. Finalmente, se tiene

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi_\nu s^\nu + i\Phi_\nu A_{\mu\rho}{}^\nu s^\rho = (\partial_\mu\Phi_\nu + iA_{\mu\nu}{}^\rho\Phi_\rho)s^\nu \quad (6.7)$$

o en notación matricial, el operador D actúa

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu. \quad (6.8)$$

Formalmente, a primer orden, si s' es una base suficientemente cercana a s , esperaríamos que se cumpliera

$$s' = s + \alpha Ds = s + i\alpha A \quad (6.9)$$

para cierto α . Si la matriz del cambio de base P , $s' = sP$, es un elemento del grupo G , entonces

$$P = \mathbb{1} + i\alpha A. \quad (6.10)$$

Es decir, P está generado por A a primer orden de la parametrización exponencial. Por lo tanto,

$$A_\mu \in \mathfrak{g} \quad (6.11)$$

siendo \mathfrak{g} el álgebra de Lie del grupo G .

También en notación matricial, $Ds = i\alpha A$, y en otra base $Ds' = i\alpha A'$. Si P es la matriz de cambio de base que hace $s' = sP$, entonces

$$i\alpha sPA' = i\alpha s'A' = Ds' = D(sP) = sD + i(Ds)P = sD + i\alpha AP \quad (6.12)$$

de donde se puede despejar A' para ver cómo transforma A .

$$i\alpha A \rightarrow i\alpha A' = P^{-1}dP + i\alpha P^{-1}AP \quad (6.13)$$

En conclusión, para tener en cuenta la variación de Φ en alguna dirección es necesario introducir el operador D , que viene determinado por el tensor A , el cual expresa la variación de las bases s . A se llama *conexión* y es un campo peculiar llamado *campo gauge*. El operador D se llama *derivada covariante* y la curvatura viene dada por D^2 , que se llama

intensidad del campo. Se cumple que D^2 puede expresarse con el tensor F

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu. \quad (6.14)$$

Bajo la transformación por un elemento P del grupo tenemos

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = P^{-1} F_{\mu\nu} P \quad (6.15)$$

6.2. De global a local

Es evidente que la acción de Dirac es simétrica bajo transformaciones globales $U(1)$. Una transformación del campo spinor bajo este grupo es

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-i\alpha} \quad (6.16)$$

con α un número real. Entonces la acción de Dirac es invariante.

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\Psi} (\not{\partial} + im) \Psi \rightarrow \frac{i}{2} \bar{\Psi} e^{-i\alpha} (\not{\partial} + im) e^{i\alpha} \Psi = \frac{i}{2} \bar{\Psi} (\not{\partial} + im) \Psi = \mathcal{L}_D. \quad (6.17)$$

Si la simetría es global, se tiene libertad en la elección de fase de los campos Ψ . La teoría ganaría más riqueza si las simetrías no fueran solo globales. Puesto que intentamos conseguir el grupo de simetría más grande posible, las transformaciones a considerar son locales. En el caso particular de $U(1)$, un spinor transformará

$$\Psi \rightarrow e^{ia(x)} \Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-ia(x)} \quad (6.18)$$

luego la acción de Dirac transforma según

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\Psi} (\not{\partial} + im) \Psi \rightarrow \frac{i}{2} \bar{\Psi} e^{-ia(x)} (\not{\partial} + im) e^{ia(x)} \Psi = \frac{i}{2} \bar{\Psi} (\not{\partial} + im) \Psi - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \partial_\mu a(x). \quad (6.19)$$

Esta acción no es invariante bajo transformaciones $U(1)$ locales. Claro que contemplando la localidad, el referencial escogido no tiene por qué ser igual en cada punto del espacio-tiempo. Por lo tanto, la derivada que debería aparecer en la acción de Dirac es la derivada covariante D , provista de un campo gauge $A \in \mathfrak{u}(1)$. En general, si se tienen varios campos, pueden escogerse los referenciales de forma que todos sean iguales salvo una constante. Entonces, el campo gauge será igual para todos los campos y en la derivada covariante aparecerá una constante multiplicativa. De esta forma, la acción de Dirac se convierte en

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + igA_\mu) \Psi - \frac{m}{2} \bar{\Psi} \Psi \quad (6.20)$$

Si se hace actuar localmente un elemento de $U(1)$, $P = e^{ia(x)}$, el campo gauge transforma como

$$iA \rightarrow iP^{-1}AP + P^{-1}dP = iA + ie^{-ia(x)} e^{ia(x)} da(x) = i(A + da(x)) \quad (6.21)$$

Notemos que llamar al campo gauge A o llamarlo gA no condiciona su variación pero sí importa un cambio de escala o un cambio de unidades. Así hacemos el cambio $A \rightarrow -A$, y el cambio $g \rightarrow -g$. Entonces la acción de Dirac transforma localmente como

$$\begin{aligned} -2i\mathcal{L}_D - im\bar{\Psi}\Psi &\rightarrow \bar{\Psi} e^{-ia(x)} \gamma^\mu (\partial_\mu + igA_\mu - i\partial_\mu a(x)) e^{ia(x)} \Psi \\ &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + i\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \partial_\mu a(x) + ig\bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi - i\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \partial_\mu a(x) \\ &= -2i\mathcal{L}_D - im\bar{\Psi}\Psi \end{aligned} \quad (6.22)$$

es decir, es invariante bajo transformaciones locales $U(1)$.

Ahora se tiene otro campo, luego es razonable que A contribuya a la densidad lagrangiana, es decir, A es un campo dinámico. Sin embargo, queremos que se siga conservando la simetría local $U(1)$, por lo que no puede aparecer un término $A_\mu (A^\mu)^\dagger$. Sí tiene sentido que contribuya la curvatura, es decir, la intensidad del campo. Además, la regla de transformación del campo gauge A es idéntica a la transformación del potencial electromagnético $A = (V, \vec{A})$. Por lo que la acción para este campo será la de Proca con masa nula, es decir,

la acción de Maxwell:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (6.23)$$

donde la intensidad del campo viene dada por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu \quad (6.24)$$

pero como las componentes del campo gauge están en el álgebra de Lie, en este caso $iA_\mu \in \mathfrak{u}(1)$. Es decir, A_μ es un número y por lo tanto conmuta con A_ν , luego $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Notemos que el cambio de convenio en el signo de A no afecta a la acción puesto que aparecen multiplicaciones por pares, haciendo que en cualquier caso se cancele el signo. Por otro lado, la transformación de la intensidad del campo es

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu a(x)) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu a(x)) = F_{\mu\nu} \quad (6.25)$$

pues por el Teorema de Schwarz, $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$. Por lo tanto, esta acción del campo gauge también es invariante.

Mezclando los ingredientes: el campo spinor, la simetría local $U(1)$ y su campo gauge, se llega a la densidad lagrangiana de la teoría de la electrodinámica:

$$\mathcal{L}_{QED} = \frac{i}{2}\bar{\Psi} (\not{D} + im) \Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (6.26)$$

Comparando este lagrangiano con el lagrangiano de Maxwell, en el que aparecen las corrientes, se deduce que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{con} \quad J^\mu = g\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (6.27)$$

donde g es la carga eléctrica.

6.3. Mecanismo de Brout-Englert-Higgs

Esperamos que, por ejemplo, el electrón sea descrito por un campo spinor masivo. El electrón tiene masa mientras que ésta no aparece en la acción. El mecanismo BEH (siglas de Brout, Englert y Higgs, algunos de sus descubridores) considera campos sin masa pero interaccionando de forma que aparece de manera natural una energía in situ, es decir, aparece un término de masa para algunos campos.

Comencemos considerando un campo escalar ϕ y un campo gauge para $U(1)$ con acción

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{8} (\phi^* \phi - v^2)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.28)$$

Denotando $V(\phi) = \frac{\lambda}{8} (\phi^* \phi - v^2)^2$, este potencial es mínimo si $|\phi| = v$. Se cambia la expresión de ϕ para hacer explícita la influencia de v ,

$$\phi = (h + v) e^{i\xi/v} \quad (6.29)$$

y sustituyendo en el lagrangiano, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu h \partial^\mu h + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi) \\ & + \frac{1}{2v^2} (h^2 + 2hv) \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \frac{\lambda}{2} v^2 h^2 - \frac{\lambda}{8} (h^4 + 4h^3 v) \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde aparecen términos de masa para los campos h y ξ , siendo

$$m_h = \sqrt{\lambda} v \quad m_\xi = 0 \quad (6.31)$$

Esto es, que la ruptura de una simetría global ha dado masa a un campo escalar. El concepto de ruptura de simetría se explicará más adelante con un ejemplo claro. Por ahora, sólo exponemos cómo el campo escalar adquiere masa.

Si se supone simetría $U(1)$ local, tal y como dijimos anteriormente, habrá que introducir

la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (6.32)$$

y al igual que en el caso anterior se expresa el campo ϕ con dos campos, en este caso haciendo aparecer la carga q

$$\phi(x) = (h(x) + v) e^{iq\xi(x)/v}. \quad (6.33)$$

El campo ξ es llamado *campo de Goldstone*.

Como la acción es invariante bajo transformaciones gauge (es decir, bajo transformaciones locales $U(1)$), se tiene la libertad de cambiar el referencial según la transformación $e^{-iq\xi(x)/v}$. Es decir, se tiene la libertad de elegir el campo ϕ

$$\phi = (h(x) + v) e^{iq\xi(x)/v} \rightarrow h(x) + v. \quad (6.34)$$

Esto significa que la fenomenología de la teoría no puede depender del campo de Goldstone ξ . Pero el destino al que queríamos llegar es que tener esta libertad deja el término cinético del lagrangiano como

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi &= (\partial_\mu - iqA_\mu)(h + v)(D^\mu + iqA^\mu)(h + v) \\ &= \partial_\mu h \partial^\mu h + q^2 v^2 A_\mu A^\mu + q^2 (h^2 + 2hv) A_\mu A^\mu \end{aligned} \quad (6.35)$$

Por lo tanto, la acción (6.30) se convierte en

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2}q^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}q^2 (h^2 + 2hv) A_\mu A^\mu - V(\phi) \quad (6.36)$$

Los dos primeros términos son cinéticos, tanto del campo gauge A como del campo escalar h . El cuarto término es energía de interacción entre dichos campos. Dado que v es un valor fijo, el tercer término es el término de masa para el campo A . Es decir, desarrollar el campo ϕ en torno al mínimo del potencial, junto con su libertad gauge, resulta en el campo A

adquiriendo masa. En este caso

$$m_A = qv. \quad (6.37)$$

En conclusión, romper una simetría local da masa a los campos gauge.

Finalmente extendemos el caso anterior al grupo $SU(2)$. Se considera un campo

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

de forma que $SU(2)$ actúa naturalmente sobre Φ . Para hacer la acción del campo Φ localmente invariante con transformaciones $SU(2)$, se introduce la derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} y \sigma_i C_\mu^i \quad (6.39)$$

y la acción es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \vec{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - \frac{\lambda}{8} (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \quad (6.40)$$

Se tiene un potencial análogo al anterior, con $\lambda > 0$,

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{8} (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \quad (6.41)$$

y que para este campo es llamado *potencial de Higgs*, el cual alcanza el mínimo cuando

$$\sqrt{\Phi^\dagger \Phi} = v \quad (6.42)$$

Al igual que en el caso $U(1)$, debido a la invariancia surge una libertad de elección. En cada punto del espacio-tiempo puede considerarse que el valor del campo Φ es

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

donde aparece el nuevo campo h . Si Φ es de esta manera, se puede transformar en cualquier

otro valor utilizando transformaciones de $SU(2)$. Por ejemplo, consideremos una transformación $U = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}$ y ϕ real,

$$U\Phi = \begin{pmatrix} 1 + i\alpha_3 & i\alpha_1 + \alpha_2 \\ i\alpha_1 - \alpha_2 & 1 - i\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\alpha_1\phi + \alpha_2\phi \\ \phi - i\alpha_3\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

luego para cualquier valor del campo Φ existe una transformación en $SU(2)$ que convierte

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

donde ϕ y h son campos escalares reales. El campo ϕ se llama *campo de vacío* y el campo h es el famoso *campo de Higgs*.

Usualmente se habla de *ruptura espontánea de simetría*. Este concepto se refiere a que no todo el grupo de Lie que deja invariante la teoría (en este caso $SU(2)$) deja invariante el estado fundamental. En este caso y para nuestro propósito, el subgrupo $H \subset SU(2)$ que rompe la simetría debe estar formado por transformaciones $P \in H$ tales que

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

se dice que H es el *subgrupo sin romper* o *subgrupo no roto* y $SU(2)/H$ el *subgrupo roto*. En este caso, el subgrupo no roto tiene dimensión 1 y el subgrupo roto, dimensión 2. Esto, que puede parecer no tener relación con el tema, se vuelve crucial si se conoce el teorema de Goldstone, que versionado a nuestro contexto dice ([3]): *Si una teoría tiene a G como grupo de simetría, la cual es espontáneamente rota a un subgrupo $H \subsetneq G$, entonces la teoría contiene $\dim H$ partículas sin masa y $\dim G/H$ partículas con masa*. La ruptura de simetría se denota $G \rightarrow H$. Por lo tanto, sabemos que habrá dos partículas masivas y una no masiva porque en este caso hacemos $SU(2) \rightarrow U(1)$.

Eligiendo como base del álgebra $\mathfrak{su}(2)$

$$T_1 = \sigma_1 - i\sigma_2; \quad T_2 = \sigma_1 + i\sigma_2; \quad T_3 = \sigma_3 \quad (6.47)$$

se tiene que los campos gauge vendrán dados por $W_\mu^i = iT_i\gamma_\mu^i = \frac{i}{2}\sigma_j C_\mu^j$ y dado que $\Phi = (0, v + h)$, cumplen

$$W_\mu^1\Phi = 0; \quad W_\mu^2\Phi = \Phi; \quad W_\mu^3\Phi = -\Phi; \quad W_\mu^2W^{3\mu}\Phi = W_\mu^3W^{2\mu}\Phi = 0 \quad (6.48)$$

La derivada covariante gauge de acuerdo a este cambio es

$$D_\mu = \partial_\mu + iy\vec{W}_\mu \quad (6.49)$$

por lo tanto, la acción queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - V(\Phi) \\ & + \frac{1}{2}y^2v^2(W_\mu^2W^{2\mu} + W_\mu^3W^{3\mu}) + \frac{1}{2}(h^2 + 2hv)(W_\mu^2W^{2\mu} + W_\mu^3W^{3\mu}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

El primer término de la segunda línea son términos de masa para los campos gauge W^2 y W^3 y el siguiente término es la interacción con el campo de Higgs. En conclusión

$$m_{W^1} = 0; \quad m_{W^2} = yv; \quad m_{W^3} = yv. \quad (6.51)$$

que son dos campos gauge masivos y uno sin masa, tal y como estableció el teorema de Goldstone en el caso de la ruptura $SU(2) \rightarrow U(1)$.

6.4. Masa de spinores

El último paso antes de introducir el modelo de Glashow-Salam-Weinberg, hay que averiguar el mecanismo para la masa de los campos spinoriales. Llegados a este punto, es

necesario dar algunos argumentos empíricos. Por supuesto, pretendemos describir y unificar las fuerzas electromagnética y débil, así que recordemos que en nuestro universo las únicas partículas que interactúan por fuerza débil son las partículas con quiralidad zurda. Por lo que se separan los campos spinores en zurdo (L) y diestro (R), que estarán formados respectivamente por las componentes zurdas y diestras de los spinores que haya. Entonces, para que R no interactúe por fuerza débil, un grupo $SU(2)$ deberá actuar sobre este campo trivialmente, así el campo gauge en el espacio vectorial de R será idénticamente nulo. Para identificar cómo es esta acción de $SU(2)$ sobre los spinores, a menudo se añade un subíndice de forma que se hablará del grupo $SU_L(2)$ indicando que sólo actúa sobre spinores zurdos.

¿Cuáles son los posibles términos de interacción entre spinores y un campo escalar y que sean invariantes bajo transformaciones locales $SU_L(2) \times U(1)$ e invariantes Lorentz? Si suponemos que los spinores son

$$L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \quad R = r \quad (6.52)$$

se considera la llamada acción de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{1}{2}G (\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L) \quad (6.53)$$

y para que sea invariante $U(1)$ ha de cumplirse que la carga del sector zurdo, q_L , es igual a la suma de las cargas del sector diestro, q_R y el campo escalar q_h . Tanto L como Φ están en la representación de $\text{spin}-\frac{1}{2}$ de $SU(2)$ y dado que R no transforma con $SU_L(2)$,

$$\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L \rightarrow \bar{L}e^{-\frac{i}{2}\alpha_i\sigma_i}e^{\frac{i}{2}\alpha_i\sigma_i}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger e^{-\frac{i}{2}\alpha_i\sigma_i}e^{\frac{i}{2}\alpha_i\sigma_i}L = \bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L. \quad (6.54)$$

Además, dado que Φ está en la representación $(0, 0)$ del grupo de Lorentz, este término es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

El último paso es desarrollar la acción en torno al mínimo de potencial sustituyendo

$\Phi = (0, v + h)$, pues ya se ha visto que la simetría $SU(2)$ nos da esta libertad de elección. Considerando que

$$\bar{L} = (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) \quad \bar{R} = \bar{r} \quad (6.55)$$

se tiene

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{1}{2}G (\bar{\ell}_2 r + \bar{r} \ell_2) (v + h) \quad (6.56)$$

Por lo tanto, definiendo el spinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \ell_2 \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\Psi} = (r^\dagger, \ell_2^\dagger) \quad (6.57)$$

se tiene que su acción de Yukawa es

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{1}{2}Gv\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{2}G\bar{\Psi}\Psi h \quad (6.58)$$

y hemos encontrado una acción invariante $SU_L(2) \times U(1)$ que permite a los spinores tener masa, la cual en concreto es

$$m_\Psi = Gv \quad (6.59)$$

Como apunte final, notemos que de nuevo el mismo subgrupo $H \subset SU(2)$ que antes deja invariante el vacío. Y dado que el grupo $U(1)$ de $SU_L(2) \times U(1)$ tampoco deja invariante el vacío, el grupo sin romper es $H \subset SU_L(2) \times U(1)$, que tiene dimensión 1 mientras que $SU_L(2) \times U(1)$ tiene dimensión 4. Por lo tanto, por el teorema de Goldstone, ya sabemos que hay tres campos gauge masivos y un único campo gauge sin masa. Y de eso tratará el siguiente capítulo.

Capítulo 7

Modelo de Glashow-Salam-Weinberg

Consideremos un electrón: un campo espinorial Ψ_e con carga $g = -1$ bajo la simetría electromagnética $U(1)$ ($U_{em}(1)$). Consideremos un neutrino, que sólo aparecen en nuestro universo con quiralidad zurda: un espinor de Weyl zurdo ν_l . Esto se mezcla en el lagrangiano de QED con un neutrino, que es

$$\mathcal{L}_{QED+} = \frac{i}{2} \bar{\Psi}_e (\not{D} + im_e) \Psi_e + \frac{i}{2} \bar{\nu}_l \not{\partial} \nu_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.1)$$

donde se ha introducido la derivada covariante gauge electromagnética del electrón como

$$D\Psi_e = d\Psi_e - ieA\Psi_e \quad (7.2)$$

y la intensidad del campo viene dada por

$$F = dA \rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.3)$$

La derivada covariante de un campo Ψ de carga eléctrica q cumple

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = iq F_{\mu\nu} \Psi. \quad (7.4)$$

Como las cargas eléctricas siempre son múltiplos de e , podemos hacer un cambio de

unidades para meter e dentro de A . En ese caso, $\tilde{A} = eA \Rightarrow D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + i\tilde{q} \tilde{A}_\mu \Psi$ y el término cinético del campo gauge es

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4e^2}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (7.5)$$

por sencillez, llamaremos A al potencial \tilde{A} y F al campo \tilde{F} .

7.1. Construcción del modelo no roto

Escribamos el spinor en sus componentes zurda y diestra,

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\nu}_l \not{\partial} \nu_l + \frac{i}{2}\bar{e}_l \not{\partial} e_l + \frac{i}{2}\bar{e}_r \not{\partial} e_r \quad (7.6)$$

y al igual que en el caso abstracto, introducimos la notación

$$L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l \end{pmatrix} \rightarrow \bar{L} = L^\dagger \gamma^0 = (\bar{\nu}_l, \bar{e}_l) \quad (7.7)$$

que se llamará sector zurdo. El sector diestro será

$$R = e_r \rightarrow \bar{R} = R^\dagger \gamma^0 = \bar{e}_r \quad (7.8)$$

El lagrangiano queda

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{L}\not{\partial}L + \frac{i}{2}\bar{R}\not{\partial}R \quad (7.9)$$

Si transformamos el sector zurdo $L \rightarrow UL$, para que el término cinético quede invariante ha de pasar $U^\dagger U = \mathbb{1}_2$. Es decir, $U \in U(2)$. Si transformamos el sector diestro $R \rightarrow UR$, para que el término cinético quede invariante ha de pasar que $U^\dagger U = 1 \Rightarrow U \in U(1)$. Para denotar sobre qué sector actúa cada grupo se añaden los subíndices L y R , de forma que el grupo resultante es $U_L(2) \times U_R(1)$. Pero este grupo tiene dimensión 5, por lo que necesitaríamos 5 campos gauge mientras que solo tenemos 4, por lo que solo se considera

el grupo $SU_L(2) \times U(1)$.

Introducimos los campos B_μ y \vec{C}_μ con las derivadas gauge covariantes

$$\mathcal{D}L \equiv dL + iq_l B L + \frac{i}{2} \vec{C} \cdot \vec{\sigma} L \quad (7.10)$$

$$\mathcal{D}R \equiv dR + iq_r B R \quad (7.11)$$

denotando las intensidades del campo por

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (7.12)$$

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu C_\nu^i - \partial_\nu C_\mu^i + \varepsilon_{ijk} C_\mu^j C_\nu^k \quad (7.13)$$

de forma que el lagrangiano queda

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{L} \not{D} L + \frac{i}{2} \bar{R} \not{D} R - \frac{1}{4g_0^2} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} - \frac{1}{4g_1^2} \vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} \quad (7.14)$$

donde g_0 y g_1 son las constantes de acoplo para $U(1)$ y $SU_L(2)$ respectivamente.

La masa del neutrino sabemos que es distinta a la masa del electrón. Para contemplar esto deberíamos introducir un campo de Higgs. Introduciendo el campo BEH Φ , los términos invariantes bajo $SU_L(2)$ se pueden escribir

$$\bar{L} \Phi R \quad \bar{R} \Phi^\dagger L \quad (7.15)$$

Anteriormente se escogió que sobre Φ no actuara $U(1)$, pero en general se puede tomar Φ para que tenga carga $U(1)$ igual a q_h . Si los términos de masa también han de ser $U(1)$ invariantes, entonces

$$q_l = q_h + q_r \quad (7.16)$$

por lo que la derivada covariante de Φ es

$$\mathcal{D}\Phi = d\Phi + iq_h B \Phi + \frac{i}{2} \vec{C} \cdot \vec{\sigma} \Phi \quad (7.17)$$

y su término cinético en el lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{\Phi,kin} = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi. \quad (7.18)$$

Los términos de masa vendrán generados por los acoplos de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{1}{2} G_e (\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L) \quad (7.19)$$

donde G_e es una constante de acoplo. Consideramos además, un potencial de Higgs, escrito

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{8} (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \quad (\lambda > 0). \quad (7.20)$$

Este potencial tiene un mínimo en $\Phi_0^\dagger \Phi_0 = v^2$ donde $V(\Phi_0) = 0$. Juntando todos los ingredientes se obtiene el lagrangiano del modelo GWS.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GSW} = & \frac{i}{2} \bar{L} \not{D} L + \frac{i}{2} \bar{R} \not{D} R - \frac{1}{4g_0^2} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} - \frac{1}{4g_1^2} \vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu \Phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \frac{\lambda}{8} (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \\ & - \frac{1}{2} G_e (\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Aquí hay libertad para elegir dos de las tres las cargas de $U(1)$: q_e, q_r, q_h . Además, son indeterminadas las constantes g_0, g_1, G_e, λ y v , sin ninguna relación entre ellas.

7.2. Condición para simetría gauge residual

El campo Φ es una dupla de campos complejos. Podemos utilizar las rotaciones en $SU_L(2) \times U(1)$ igual que en el capítulo anterior para convertir el campo BEH para que tenga la primera componente nula y la segunda se el campo de vacío. Es decir, estamos

limitando la libertad gauge.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger \Phi = \phi^2 \quad (7.22)$$

Si se hace actuar $U_L(1) \subseteq SU_L(2)$, se introduce una fase en las componentes del campo. Lo mismo pasa con la acción del grupo usual $U(1)$, para el que Φ tiene carga q_h . De esta forma, si se hacen actuar ambos grupos

$$e^{iq_h\varphi} e^{i\frac{1}{2}\varphi\sigma_3} \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i(q_h - \frac{1}{2})\varphi} \phi \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

luego hay una simetría $U(1)$ residual si y solo si $q_h = \frac{1}{2}$. Como la carga $U(1)$ del electrón es -1 , y como $q_l = q_r + q_h$, se tiene que $q_l = -\frac{1}{2}$, $q_r = -1$, $q_h = \frac{1}{2}$. Luego la acción con gauge fijo tiene una invarianza gauge residual $U(1)$ que puede identificarse con la simetría gauge del electromagnetismo $U_{em}(1)$.

Habiendo fijado este valor de Φ , la derivada covariante queda (porque Φ transforma como L)

$$\mathcal{D}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} (C_\mu^1 - iC_\mu^2) \phi \\ \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} (B_\mu - C_\mu^3) \phi \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

y el término cinético es

$$\frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi = \frac{1}{2} \partial\phi^2 + \frac{1}{8} [C_\mu^1 C^{1\mu} + C_\mu^2 C^{2\mu} + (B_\mu - C_\mu^3) (B^\mu - C^{3\mu})] \phi^2 \quad (7.25)$$

Cuando $\phi^2 = v^2$, la expresión de arriba se convierte en términos de masa luego el campo $C^3 - B$ es masivo y como hay simetría $U(1)$ residual, debe haber otro campo sin masa. Haciendo un reescalado de los campos

$$B \rightarrow g_0 B \quad \vec{C} \rightarrow g_1 \vec{C} \quad (7.26)$$

entonces

$$\mathcal{L}_{vect,kin} = -\frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} \quad (7.27)$$

Llamando Z_μ^0 al campo masivo, suponemos que tiene un término cinético canónico, entonces

$$Z_\mu^0 = \xi (g_1 C_\mu^3 - g_0 B_\mu) \quad (7.28)$$

para alguna constante ξ . Si llamamos A_μ al campo que queda sin masa, los términos cinéticos de A y Z_0 deben ser de la misma forma que los de B y C^3 y dado que estos términos son cuadráticos y el valor del lagrangiano debe mantenerse, se deduce que la relación entre (A, Z^0) y (B, C^3) es una rotación.

$$\begin{pmatrix} A \\ Z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_W) & \sin(\theta_W) \\ -\sin(\theta_W) & \cos(\theta_W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C^3 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

donde θ_W es el *ángulo de Weinberg* o *de mezcla débil*.

Entonces

$$\begin{cases} \cos(\theta_W) = \xi g_1 \\ -\sin(\theta_W) = -\xi g_0 \end{cases} \Rightarrow \xi^2(g_1^2 + g_0^2) = 1 \Rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_0^2}} \quad (7.30)$$

y por lo tanto

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} (g_1 B + g_0 C^3) \\ Z^0 = \frac{1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} (g_1 C^3 - g_0 B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} (g_1 A - g_0 Z^0) \\ C^3 = \frac{1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} (g_1 Z^0 + g_0 A) \end{cases} \quad (7.31)$$

Entonces el término cinético de Φ queda

$$\frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi = \frac{1}{2} \partial\phi^2 + \frac{g_1^2}{8} \left[C_\mu^1 C^{1\mu} + C_\mu^2 C^{2\mu} + \frac{1}{\cos^2(\theta_W)} Z_\mu^0 Z^{0\mu} \right] \phi^2 \quad (7.32)$$

y si ϕ es mínimo del potencial, $\phi^2 = v^2$, se tiene que

$$m_W = \frac{g_1 v}{2} \quad (7.33)$$

$$m_Z = \frac{g_1 v}{2 \cos(\theta_W)} \quad (7.34)$$

es decir, $m_W = m_Z \cos(\theta_W)$: la masa del bosón W siempre es menor que la masa del bosón Z .

Fijémonos ahora en los términos de Yukawa que generan masa. En el acoplo de Yukawa con el gauge fijado, se tiene

$$-\frac{1}{2}G_e (\bar{L}\Phi R + \bar{R}\Phi^\dagger L) = -\frac{1}{2}G_e (\bar{e}_l e_r + \bar{e}_r e_l) \phi = -\frac{1}{2}G_e \phi \bar{\Psi}_e \Psi_e \quad (7.35)$$

De donde se identifica $m_e = vG_e$ cuando $\phi^2 = v^2$.

El término cinético de R , tomando la misma escala para $B \rightarrow g_0 B$ es

$$\mathcal{D}_\mu e_r = \partial_\mu e_r - ig_0 B_\mu e_r = \partial_\mu e_r - i \frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} A_\mu e_r + i \frac{g_0^2}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} Z_\mu^0 e_r \quad (7.36)$$

Definimos la derivada covariante gauge de $U_{em}(1)$ del electrón diestro como

$$D_\mu e_r \equiv \partial_\mu e_r - ie A_\mu e_r \quad (7.37)$$

y comparando se tiene

$$e = g_0 \cos(\theta_W) = g_1 \sin(\theta_W) = \frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} \quad (7.38)$$

luego

$$\frac{i}{2} \bar{e}_r \not{D} e_r = \frac{i}{2} \bar{e}_r \not{D} e_r - \frac{g_0 \sin(\theta_W)}{2} \bar{e}_r \not{Z}^0 e_r \quad (7.39)$$

Es decir, hemos creado un adecuado término cinético electromagnético para el electrón diestro junto a su interacción con el Z_0 , lo que implica que este campo es eléctricamente neutro.

Haciendo el mismo cambio, la derivada covariante gauge del sector zurdo es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}L &= dL - \frac{i}{2}g_0 \cos(\theta_W)A (\mathbb{1}_2 - \sigma_3) L \\ &+ \frac{i}{2} [Z^0 (g_0 \sin(\theta_W)\mathbb{1}_2 + g_1 \cos(\theta_W)\sigma_3) + g_1 (C^1\sigma_1 + C^2\sigma_2)] L \end{aligned} \quad (7.40)$$

La parte electromagnética de esta derivada covariante gauge es

$$\mathcal{D}L|_{EM} = dL - \frac{i}{2}g_0 \cos(\theta_W)A (\mathbb{1}_2 - \sigma_3) L = \begin{pmatrix} d\nu_l \\ de_l - ig_0 \cos(\theta_W)Ae_l \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

donde se ve que el neutrino es electricamente neutro, y el electrón zurdo tiene carga eléctrica -1. Definiendo la derivada covariante gauge electromagnética del vector zurdo como

$$\frac{i}{2}\bar{L}\not{D}L = \frac{i}{2}\bar{\nu}_l\not{\partial}\nu_l + \frac{i}{2}\bar{e}_l\not{D}e_l - \frac{1}{4}\bar{L} \left\{ Z^0 (g_0 \sin(\theta_W)\mathbb{1}_2 + g_1 \cos(\theta_W)\sigma_3) + g_1 (\not{C}^1\sigma_1 + \not{C}^2\sigma_2) \right\} L \quad (7.42)$$

7.3. La intensidad del campo gauge

Consideramos la intensidad del campo de la simetría gauge $SU_L(2)$ en las direcciones 1 y 2

$$G_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu C_\nu^1 - \partial_\nu C_\mu^1 - g_1 (C_\mu^2 C_\nu^3 - C_\mu^3 C_\nu^2) \quad (7.43)$$

$$G_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu C_\nu^2 - \partial_\nu C_\mu^2 - g_1 (C_\mu^3 C_\nu^1 - C_\mu^1 C_\nu^3) \quad (7.44)$$

Como aparece C^3 , parece que con algún cálculo, las fuerzas del campo se podrán expresar en función del campo A , por lo que habría una simetría $U(1)$ actuando en C^1 y C^2 . Introduzcamos los campos complejos

$$W_\mu^\pm = C_\mu^1 \mp iC_\mu^2 \quad (W_\mu^\pm)^\dagger = W_\mu^\mp \quad (7.45)$$

$$G_{\mu\nu}^\pm = G_{\mu\nu}^1 \mp iG_{\mu\nu}^2 \quad G_{\mu\nu}^1 G^{1\mu\nu} + G_{\mu\nu}^2 G^{2\mu\nu} = G_{\mu\nu}^+ G^{-\mu\nu} \quad (7.46)$$

Así tenemos

$$G_{\mu\nu}^{\pm} = \partial_{\mu}W_{\nu}^{\pm} - \partial_{\nu}W_{\mu}^{\pm} \pm ig_1 (C_{\mu}^3W_{\nu}^{\pm} - W_{\mu}^{\pm}C_{\nu}^3). \quad (7.47)$$

Sustituyendo C_{μ}^3 como combinación de A_{μ} y Z_{μ}^0 , se tiene

$$\partial_{\mu}W_{\nu}^{\pm} \pm ig_1C_{\mu}^3W_{\nu}^{\pm} = \partial_{\mu}W_{\nu}^{\pm} \pm ig_1 \sin(\theta_W)A_{\mu}W_{\nu}^{\pm} \pm ig_1 \cos(\theta_W)Z_{\mu}^0W_{\nu}^{\pm} \quad (7.48)$$

Recordando que $e = g_1 \sin(\theta_W)$ y la definición de la derivada covariante gauge electromagnética,

$$\partial_{\mu}W_{\nu}^{\pm} \pm ig_1C_{\mu}^3W_{\nu}^{\pm} = D_{\mu}W_{\nu}^{\pm} \pm ig_1 \cos(\theta_W)Z_{\mu}^0W_{\nu}^{\pm}, \quad (7.49)$$

donde la $D_{\mu}W_{\nu}^{\pm}$ corresponde a la derivada covariante sobre un campo con carga eléctrica $\pm e$.

Definimos la intensidad del campo W^{\pm} invariante gauge como

$$W_{\mu\nu}^{\pm} = D_{\mu}W_{\nu}^{\pm} - D_{\nu}W_{\mu}^{\pm} \quad (7.50)$$

y de esa forma

$$G_{\mu\nu}^{\pm} = W_{\mu\nu}^{\pm} \pm ig_1 \cos(\theta_W) (Z_{\mu}^0W_{\nu}^{\pm} - Z_{\nu}^0W_{\mu}^{\pm}). \quad (7.51)$$

Podemos expandir la contribución de C^1 y C^2 a los términos cinéticos como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{+}G^{-\mu\nu} &= W_{\mu\nu}^{+}W^{-\mu\nu} + 2ig_1 \cos(\theta_W) [W^{-\mu}W_{\mu\nu}^{+} - W^{+}W_{\mu\nu}^{-}] Z^{0\nu} \\ &+ g_1^2 \cos^2(\theta_W) (Z_{\mu}^0W_{\nu}^{+} - W_{\mu}^{+}Z_{\nu}^0) (Z^{0\mu}W^{-\nu} - W^{-\mu}Z^{0\nu}). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Multiplicando por $-\frac{1}{4}$ se obtiene un término cinético para el campo W^{\pm} . Además se obtiene una interacción cúbica entre W^{+} , W^{-} y Z^0 ; y una interacción entre W^{+} , W^{-} y Z^0Z^0 . Todas estas interacciones conservan la carga eléctrica, consecuencia de la simetría gauge residual $U(1)$.

Expresando el término cinético de Φ en función de los campos W^\pm ,

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\Phi^\dagger\mathcal{D}^\mu\Phi = \frac{1}{2}\partial\phi^2 + \frac{g_1^2}{8}\left[W_\mu^+W^{-\mu} + \frac{1}{\cos^2(\theta_W)}Z_\mu^0Z^{0\mu}\right]\phi^2 \quad (7.53)$$

Para finalizar con los términos cinéticos del gauge, reescalando y utilizando los campos W^\pm

$$G_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu C_\nu^3 - \partial_\nu C_\mu^3 + \frac{ig_1}{2}(W_\mu^+W_\nu^- - W_\mu^-W_\nu^+) \quad (7.54)$$

Con la definición $C^3 = \cos\theta_W Z^0 + \sin\theta_W A$, y denotando

$$Z_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu Z_\nu^0 - \partial_\nu Z_\mu^0 \quad (7.55)$$

se tiene

$$G_{\mu\nu}^3 = \cos(\theta_W)Z_{\mu\nu}^0 - \sin(\theta_W)F_{\mu\nu} + \frac{ig_1}{2}(W_\mu^+W_\nu^-) \quad (7.56)$$

Contando con la intensidad del campo B , se concluye

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} + G_{\mu\nu}^3G^{3\mu\nu} &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu}^0Z^{0\mu\nu} \\ &+ ig_1(\cos(\theta_W)Z^{0\mu\nu} - \sin(\theta_W)F^{\mu\nu})(W_\mu^+W_\nu^- - W_\mu^-W_\nu^+) \\ &- \frac{g_1^2}{4}(W_\mu^+W_\nu^- - W_\mu^-W_\nu^+)(W^{+\mu}W^{-\nu} - W^{-\mu}W^{+\nu}) \end{aligned} \quad (7.57)$$

donde aparecen términos cinéticos bien definidos para A y Z^0 .

7.4. El término cinético zurdo

En el término cinético del sector zurdo hay interacción entre spinores y los campos C^1 y C^2 , en concreto, aparece la expresión

$$\mathcal{C}^1\sigma_1 + \mathcal{C}^2\sigma_2 = W^+\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) + W^-\frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & W^+ \\ W^- & 0 \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

Por lo tanto,

$$-\frac{g_1}{4}\bar{L}(C^1\sigma_1+C^2\sigma_2)L=-\frac{g_1}{4}\left(\bar{\nu}_lW^+e_l+\bar{e}_lW^-\nu_l\right) \quad (7.59)$$

donde claramente se conserva la carga eléctrica. El otro término se convierte en

$$-\frac{1}{4}\bar{L}\not{Z}^0(g_0\sin(\theta_W)\mathbb{1}_2+g_1\cos(\theta_W)\sigma_3)L=-\frac{\sqrt{g_0^2+g_1^2}}{4}\left(\bar{\nu}_l\not{Z}^0\nu_l-\cos(2\theta_W)\bar{e}_l\not{Z}^0e_l\right) \quad (7.60)$$

y si se quiere eliminar la aparición de g_0 y g_1 , utilizamos

$$\sqrt{g_0^2+g_1^2}=\frac{\sin(2\theta_W)}{2e} \quad (7.61)$$

7.5. Lagrangiano GSW con gauge fijo

Juntando todo lo anterior, la acción queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gf} &= \frac{i}{2}\bar{\nu}_l\not{\partial}\nu_l+\frac{i}{2}\bar{\Psi}_e\not{D}\Psi_e-\frac{1}{4}F^2-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}^0Z^{0\mu\nu}-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^+W^{-\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \\ &-\frac{1}{2}G_e\phi\bar{\Psi}_e\Psi_e+\frac{g_1^2}{8\cos^2(\theta_W)}\phi^2Z_\mu^0Z^{0\mu}+\frac{g_1^2}{8}\phi^2W_\mu^+W^{-\mu}-\frac{\lambda}{8}(\phi^2-v^2)^2 \\ &-\frac{g_0\sin(\theta_W)}{2}\bar{e}_r\not{Z}^0e_r-\frac{\sqrt{g_0^2+g_1^2}}{4}\left(\bar{\nu}_l\not{Z}^0\nu_l-\cos(2\theta_W)\bar{e}_l\not{Z}^0e_l\right)-\frac{g_1}{4}\left(\bar{\nu}_lW^+e_l+\bar{e}_lW^-\nu_l\right) \\ &-i\frac{g_1}{2}\left(\cos(\theta_W)Z^{0\mu\nu}-\sin(\theta_W)F^{\mu\nu}\right)W_\mu^+W_\nu^- -i\frac{g_1}{2}\cos(\theta_W)\left[W^{-\mu}W_{\mu\nu}^+-W^+W_{\mu\nu}^-\right]Z^{0\nu} \\ &+\frac{g_1^2}{4}W_{[\mu}^+W_{\nu]}^-W^{+[\mu}W^{-\nu]}-2g_1^2\cos^2(\theta_W)Z_{[\mu}^0W_{\nu]}^+Z^{0[\mu}W^{-\nu]} \end{aligned} \quad (7.62)$$

La primera línea contiene los términos cinéticos de los campos. La segunda contiene los términos que generan masa e interacciones con los campos gauge una vez hayamos expandido alrededor del mínimo de potencial de Higgs. En la tercera línea aparecen las

interacciones entre fermiones y los campos gauge masivos, que como no dependen de ϕ , estas interacciones son siempre iguales, no se verán modificadas por la introducción del campo de Higgs. En la cuarta línea tenemos las interacciones cúbicas entre los campos masivos o la interacción entre los bosones W con el fotón y como ésta es a través de F , esta interacción es invariante gauge. La última línea contiene las interacciones de cuarto orden entre los campos vectoriales masivos. Observemos que en este último término, se hace uso de la notación antisimétrica estándar para simplificar la notación.

$$X_{[\mu}Y_{\nu]} \equiv \frac{1}{2}(X_{\mu}Y_{\nu} - X_{\nu}Y_{\mu}) \quad (7.63)$$

7.6. Lagrangiano GSW con el campo de Higgs

Finalmente expandimos el campo del mecanismo BEH alrededor del mínimo del potencial, de forma que escribimos

$$\phi = v + h \quad (7.64)$$

donde h es el campo de Higgs.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H &= \frac{i}{2}\bar{\nu}_l \not{\partial} \nu_l + \frac{i}{2}\bar{\Psi}_e \not{\partial} \Psi_e - \frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}^0 Z^{0\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h \\
&- \frac{1}{2}G_e v \bar{\Psi}_e \Psi_e + \frac{g_1^2 v^2}{8 \cos^2(\theta_W)} Z_\mu^0 Z^{0\mu} + \frac{g_1^2 v^2}{8} W_\mu^+ W^{-\mu} - \frac{\lambda v^2}{2} h^2 \\
&- \frac{1}{2}G_e h \bar{\Psi}_e \Psi_e + \frac{g_1^2}{8 \cos^2(\theta_W)} (2vh + h^2) Z_\mu^0 Z^{0\mu} + \frac{g_1^2}{8} (2vh + h^2) W_\mu^+ W^{-\mu} - \frac{\lambda}{8} (4vh^3 + h^4) \\
&- \frac{g_0 \sin(\theta_W)}{2} \bar{e}_r \not{Z}^0 e_r - \frac{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}}{4} \left(\bar{\nu}_l \not{Z}^0 \nu_l - \cos(2\theta_W) \bar{e}_l \not{Z}^0 e_l \right) - \frac{g_1}{4} \left(\bar{\nu}_l W^+ e_l + \bar{e}_l W^- \nu_l \right) \\
&- i \frac{g_1}{2} \left(\cos(\theta_W) Z^{0\mu\nu} - \sin(\theta_W) F^{\mu\nu} \right) W_\mu^+ W_\nu^- - i \frac{g_1}{2} \cos(\theta_W) [W^{-\mu} W_{\mu\nu}^+ - W^+ W_{\mu\nu}^-] Z^{0\nu} \\
&+ \frac{g_1^2}{4} W_{[\mu}^+ W_{\nu]}^- W^{+[\mu} W^{-\nu]} - 2g_1^2 \cos^2(\theta_W) Z_{[\mu}^0 W_{\nu]}^+ Z^{0[\mu} W^{-\nu]}
\end{aligned}$$

Concluyendo así la masa de las partículas:

- La masa del electrón es

$$m_e = G_e v \quad (7.65)$$

- La masa del bosón Z viene dada por, suponiendo $\cos(\theta_W) > 0$,

$$m_Z = \frac{g_1 v}{2 \cos(\theta_W)} \quad (7.66)$$

- La masa del bosón W es

$$m_W = \frac{g_1 v}{2} = \cos(\theta_W) m_Z \quad (7.67)$$

- La masa del boson de Higgs viene dada por

$$m_h = \sqrt{\lambda}v \quad (7.68)$$

Capítulo 8

Conclusiones

Se ha hecho un recorrido introductorio por las álgebras y grupos de Lie que se utilizan en la Teoría Clásica de Campos. Vimos los campos spinoriales y para ellos construimos la acción de Dirac, de la que se deduce la conocida ecuación de Dirac. Además se construyeron los lagrangianos para otro tipos de campos.

Se definió el concepto de campo gauge y de derivada covariante, deduciendo por el camino el lagrangiano de la electrodinámica. Luego se explicó el mecanismo de Brout-Englert-Higgs y cómo la ruptura de simetría permite dar masa a los campos escalares y a los campos gauges. Luego con el acoplamiento de Yukawa se consiguió utilizar el campo de Higgs para dar masa a los campos spinores.

Finalmente, se consideró el modelo de Glashow-Salam-Weinberg, que utilizando el mecanismo BEH para romper la simetría $SU_L(2) \times U(1)$ se consiguió unificar las fuerzas electromagnética y débil, con un modelo que explica las interacciones y dando masa a los bosones gauge, al electrón y al campo de Higgs. Además quedando el fotón sin masa y siendo la masa del bosón Z_0 mayor que la masa de los bosones W^\pm .

Finalmente, destaquemos que éste es un modelo puramente clásico. Por lo tanto, en el avance de la teoría y en la experimentación, estos resultados pueden sufrir algunas correcciones cuánticas.

Bibliografía

- [1] GIORGI, H. *Lie Algebras in Particle Physics*. CRC Press, 1999.
- [2] GORBATSEVICH, V. V., ONISHCHIK, A. L., AND VINBERG, E. B. *Lie Groups and Lie Algebras I*, vol. 20 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1993.
- [3] NAEGELS, D. An introduction to goldstone boson physics and to the coset construction, 2021. URL: <https://arxiv.org/abs/2110.14504>.
- [4] SATTINGER, D. H., AND WEAVER, O. L. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, vol. 61 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1986.
- [5] SCHWICHTENBERG, J. *Physics from Symmetry*. Springer, 2015.
- [6] TONG, D. David Tong: Lectures on Quantum Field Theory. Cambridge University, 2007. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>.
- [7] VIÑA-ESCALAR, A. *Geometría diferencial*. Universidad de Oviedo, 2000.