Geometrías de Kähler

Autor:

Raúl Álvarez Candás

Tutores:

Antón Fernández Faedo

Noelia Rizo Carrión

Universidad de Oviedo

Trabajo Fin de Grado de Matemáticas

Curso 2021-2022

"Let me see: four times five is twelve, and four times six is thirteen, and four times seven is – oh dear! I shall never get to twenty at that rate!"

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La geometría es una de las ramas de las matemáticas mas antiguas que existen. Su desarrollo comenzó en civilizaciones tan antiguas como la babilónica, la egipcia o la griega clásica, previas al siglo II a.C., donde pasó de tener un uso meramente práctico, como herramienta para estudiar propiedades de los sólidos o la mecánica celeste, hasta una vocación de estudio formal con la geometría euclídea. En aquel momento las bases se asentaron sobre cinco postulados que sirvieron de hipótesis para cualquier descripción geométrica durante muchos siglos. La posterior geometría cartesiana, introducida en el siglo XVII, dio pie a la actual geometría analítica e introdujo conceptos tan importantes como los ejes de coordenadas y la representación gráfica de fórmulas, en base funciones sobre variables.

Con el tiempo, los avances en topología y los problemas fundamentales en el uso de la geometría hasta el momento, como la imposibilidad de probar el quinto postulado introducido por Euclides, hicieron que la geometría comenzara a tomar una formulación mas abstracta. En el siglo XIX, las ideas de espacios geométricos que rompían con las nociones que se tenían hasta el momento, como la extensión hasta un número arbitrario de dimensiones, rivalizaron incluso con la definición misma de la geometría del momento; esto derivó en el surgimiento del concepto de **variedad**.

Las variedades, que nacieron como generalización de la concepción que se tenía del espacio geométrico hasta el momento, pronto exhibieron características que permitieron toda una revolución en otros campos, como la física. Algunos tipos de variedades brindaron descripciones naturales a teorías físicas del momento, como las variedades simplécticas, que surgen de forma natural en el ámbito de la mecánica clásica, o las variedades de Riemann y de Einstein, que permitieron la concepción de la que, a día de hoy, sigue siendo la teoría a gran escala que describe la gravedad.

De esta forma, la posibilidad de entender y codificar espacios geométricos abstractos mediante el uso de variedades causó una auténtica revolución. Sin embargo, teorías físicas mas modernas exigieron estudios mucho mas complejos de estos objetos.

El principal objeto de estudio perseguido en esta memoria serán las variedades de Kähler, que se localizan en el terreno de la geometría compleja y que han encontrado en los últimos años un uso enorme en al física teórica, pero ¿cómo surgen estas geometrías en física?

Una de las teorías mas ambiciosas hasta la fecha es la teoría de cuerdas. Fenomenológicamente, esta teoría percibe las partículas fundamentales que conforman el universo, no como puntos 0-dimensionales, si no como pequeños objetos 1-dimensionales (cuerdas), cuyos modos de vibración generan las partículas que conocemos. Por otro lado, también sirve como herramienta para explorar un límite hasta ahora desconocido, el de la gravedad cuántica. Intuitivamente, esta teoría defiende que los objetos fundamentales en el universo son cuerdas y que, dependiendo de la "nota" en que estén sonando, serán percibidas como una partícula u otra. Originalmente esto puede sonar algo fantástico, pero al menos no introduce ningún problema geométrico. Sin embargo, la consistencia de la teoría exige de, al menos, diez dimensiones en el espacio geométrico en que viven estas cuerdas. Claramente, el mundo que percibimos tiene cuatro dimensiones, el tiempo y tres espaciales, por lo que uno de los retos de la teoría de cuerdas es explicar qué ocurre con las seis dimensiones restantes.

La respuesta a este problema viene dado por la geometría diferencial. Intuitivamente, podríamos decir que las dimensiones extra que no percibimos son muy "pequeñas" de forma que tenga sentido que, si no llegamos a escalas de energía increíblemente altas, no seamos capaces de percibirlas; la formalización de esta idea se conoce como **compactificación**.

A través de la compactificación, la geometría en la que viven estas cuerdas se factoriza de un espacio de diez dimensiones al producto de un espacio de cuatro, el que percibimos, y seis dimensiones extra que toman la forma de una variedad compacta.

La existencia, en este ámbito, de una simetría en la acción[1] conocida como supersimetría[2] y la exi-

[1] La acción es un funcional que determina toda la dinámica de la teoría que se estudia. Una simetría de la acción es una transformación que deja invariante este funcional.

[2] La supersimetría alega que cada partícula elemental, que puede tener una interpretación estructural o como portadora

gencia de que la geometría dada sirva como solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío[3] fuerza ciertas propiedades sobre la variedad en que se factorizan estas seis dimensiones extra. Formalmente, estas dimensiones extra tomarán la estructura de una variedad de Calabi-Yau, cierto tipo de variedad de Kähler compacta. Más aún, exigiendo otras propiedades a la física del sistema, como escoger cierto contenido específico en el espacio, fuerza a soluciones no planas[4] de las ecuaciones ya mencionadas, y puede dar lugar a otras variedades de Kähler como $\mathbb{C}P^3$.

En esta memoria, motivada por la utilidad en teoría de cuerdas de estas variedades, se tratarán de construir algunas nociones básicas de geometría diferencial (compleja) y las propiedades mas relevantes de las variedades de Kähler, así como algunos ejemplos concretos de este tipo de variedades, como son las ya mencionadas variedades de Calabi-Yau.

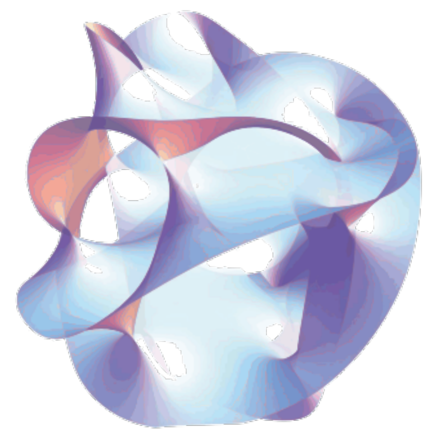

Figura 1.1: Representación de la sección bidimensional de una variedad de Calabi-Yau, un tipo de variedad de Kähler. [16]

En el primer capítulo se definirán los conceptos mas básicos de geometría diferencial, dando las nociones de variedad, cartas, sistemas de coordenadas... . A continuación se construirán las estructuras mas importantes sobre variedades reales, como el espacio tangente y el álgebra exterior, y se extenderán estas nociones a las variedades complejas. Este capítulo esta basado, generalmente, en [10] y [17].

En el segundo capítulo se definirán las variedades de Kähler, sus principales propiedades y algunas caracterizaciones topológicas sencillas de estos objetos geométricos. En el último capítulo se hablará de varios ejemplos de estas variedades con gran relevancia en física y matemáticas así como del contexto en que se usan. Estos capítulos toman conceptos de varias fuentes distintas que se mencionan durante su desarrollo.

Dado que la geometría diferencial es un campo increíblemente profundo, en el estudio de las variedades de Kähler serán necesarias herramientas típicas de este campo. Con el fin de que el trabajo sea, en la

de fuerzas, tiene una “compañera” que verifica propiedades semejantes a las suyas pero pertenece al otro conjunto.

[3]Esto es una imposición de la teoría de la relatividad general al suponer que el contenido material y energético es nulo.

[4]Planas en el sentido de la curvatura de Ricci, se formalizará esta noción mas adelante.

medida de lo posible, autocontenido, una breve descripción de todas las herramientas utilizadas será dada en el transcurso del trabajo. Las nociones relativas a la construcción, por su necesidad a la hora de describir el objeto principal del estudio, son desarrolladas en el primer capítulo. Sin embargo, las herramientas relativas a su clasificación se han preferido dar en apéndices, ya que no son el objetivo último de este trabajo; aún así, se recomienda la lectura de ambos. El primero trata de operadores definidos sobre el álgebra exterior y de como generalizan operadores ya conocidos en análisis como el gradiente, el rotacional o el laplaciano. El segundo apéndice trata de describir, sin utilizar teoría de haces, los principales útiles a la hora de caracterizar topológicamente variedades complejas, como pueden ser los números de Betti o grupos de cohomología.

Capítulo 2

Geometría diferencial compleja

En esta sección inicial se tratarán de presentar las nociones de geometría diferencial compleja más relevantes a la hora de hacer un estudio sobre las variedades de Kähler, y, sobre todo, fijar la notación que será utilizada durante toda la memoria; se comenzará con los aspectos más generales sobre variedades y se definirán objetos que permitirán agilizar el proceso de construcción de las variedades de Kähler.

2.1. Variedades Complejas

Para comenzar, daremos la noción de variedad, explicando lo que es una variedad real y una compleja, desde un punto de vista puramente topológico. Tras esto, con el fin de construir una estructura útil sobre las variedades complejas, daremos las nociones de espacios asociados a variedades reales y extenderemos esta idea a las variedades complejas.

Definición 2.1. Carta, Sistema de coordenadas, Parametrización
Sea (X, τ_X) [1] un espacio topológico T_2 y II-numerable[2] y sea $\mathbb{E}$ un espacio afín euclídeo. Dada una aplicación tal que $\Phi : U \in \tau_X \to V \subseteq \mathbb{E} \quad \Phi(u) = (x_1(u), x_1(u), ..., x_n(u))$ verificando ser homeomorfismo, llamaremos ***carta*** al par (U, Φ). Usualmente se denomina a la función Φ ***sistema de coordenadas***, a cada componente x_i ***coordenada*** y a la aplicación inversa Φ^{-1} ***parametrización***.

La estructura de carta alberga una noción intrínseca de preservar las propiedades topológicas mas básicas del espacio afín $\mathbb{E}$ sobre el abierto U que conforma la pareja, al existir un homeomorfismo que asocia ambos. Sin embargo esta idea necesita ciertos arreglos para ser definida sobre todo el espacio X y de ciertas restricciones a la hora de significar una herramienta potente al concretar el espacio afín

[1] Denotaremos como X al espacio topológico obviando su topología asociada
[2] Todos los espacios topológicos se supondrán T_2 y II-numerables salvo que se indique lo contrario

euclídeo que buscamos. Las siguientes definiciones permiten extender de forma útil esta idea a todo el espacio topológico.

Definición 2.2. Atlas

Llamaremos ***atlas*** sobre un espacio topológico X a una colección de cartas $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ verificando:

- Los $\{U_i\}_{i\in I}$ forman un recubrimiento abierto de X, esto es $X \subseteq \cup_{i\in I} U_i$
- $\forall i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$; se cumple que $\phi_i \phi_j^{-1}$ es un homeomorfismo sobre el dominio $U_i \cap U_j$.[3]

Las aplicaciones $\phi_{ji} = \phi_i \phi_j^{-1}$ se llamarán *funciones de transición.*

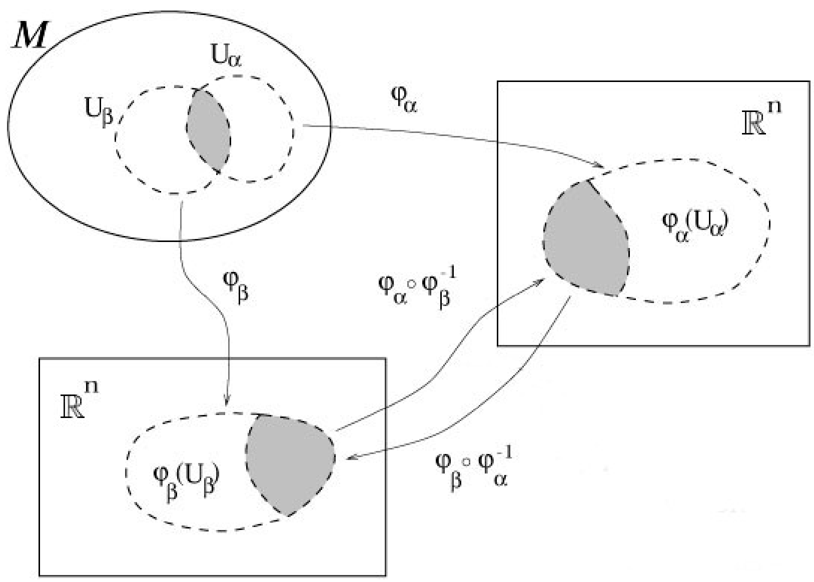

Figura 2.1: Representación de dos abiertos con intersección no vacía de un atlas. Se muestra la correspondencia entre las imágenes de sus cartas. Basado en [11]

Los dos tipos de atlas mas importantes que utilizaremos son los siguientes:

- Un atlas se dirá *suave* si el codominio de los sistemas de coordenadas es $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y todas las funciones de transición son difeomorfismos de clase C^∞
- Un atlas se dirá *holomorfo* en caso de que el codominio de los sistemas de coordenadas sea $\mathbb{C}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y todas las funciones de transición sean holomorfas sobre cualquier intersección no vacía de abiertos del atlas.

[3]Por aligerar notación se denotará a la yuxtaposición de aplicaciones como la composición: $\phi_i \cdot \phi_j = \phi_i \phi_j$

Definición 2.3. Variedad

Sea M un espacio topológico $\mathrm{M} \equiv (M, \tau_M)$ y $\mathbb{A}$ un atlas de M. Llamaremos ***variedad*** al par $(\mathrm{M}, \mathbb{A})$.

La variedad se dirá n-dimensional para el valor n la dimensión del espacio que sirve como codominio de las cartas del atlas. Heredando las propiedades de los atlas, tenemos dos variedades asociadas:

- La variedad se dirá *real*, *diferenciable* o *suave* si $\mathbb{A}$ es un atlas suave.
- La variedad se dirá *compleja* si $\mathbb{A}$ es un atlas holomorfo.

Intuitivamente, las variedades complejas pueden verse como espacios topológicos a los que puede dotárseles de una estructura que, localmente, se percibe como $\mathbb{C}^n$. A continuación mostramos varios ejemplos básicos para ilustrar las nociones anteriores:

Ejemplo 2.1. Plano real en n dimensiones

Sea $X \equiv \mathbb{R}^n$ y τ_X la topología usual. Podemos extender este espacio trivialmente a una variedad utilizando un atlas del estilo $\mathbb{A} = \{\mathbb{R}^n, x\}$ constando solo de una carta, dónde x es un sistema de coordenadas común en $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. La idea de este ejemplo es mostrar que podemos dotar trivialmente a cualquier espacio euclídeo de la estructura de variedad mediante una única carta.

Ejemplo 2.2. Esfera de Riemann

Sea la esfera usual S^2, vamos a dotarla de un atlas compuesto por dos cartas para darle estructura de variedad.

Consideremos dos copias de $\mathbb{C}$. La idea es servirse de la proyección estereográfica para modelizar las coordenadas[4]. La coordenada relativa a la primera copia será denotada por α. Ésta se construirá mediante la proyección ya mencionada como se observa en la Figura 2.2. Colocando la copia del plano complejo bajo la esfera y proyectando todos los puntos de la esfera excepto el polo austral, de esta forma a un punto sobre la esfera se le asociará de coordenada α su punto referido en el plano. La segunda coordenada, denotada por β, tendrá una intuición similar, colocaremos la copia de $\mathbb{C}$ sobre la esfera y proyectaremos de forma opuesta, como se observa en la imagen de la derecha de la Figura 2.2, de esta forma todo punto tendrá una imagen sobre el plano salvo el polo boreal. Dado que el primer plano cubre toda la esfera salvo el punto mas al sur y el segundo toda la esfera excepto el polo norte entre ambos forman un recubrimiento abierto de S^2. La intersección de estos dos abiertos serán todos los puntos excepto los polos.

[4] Nos referimos a coordenadas al constar, cada sistema de coordenadas, de una única coordenada.

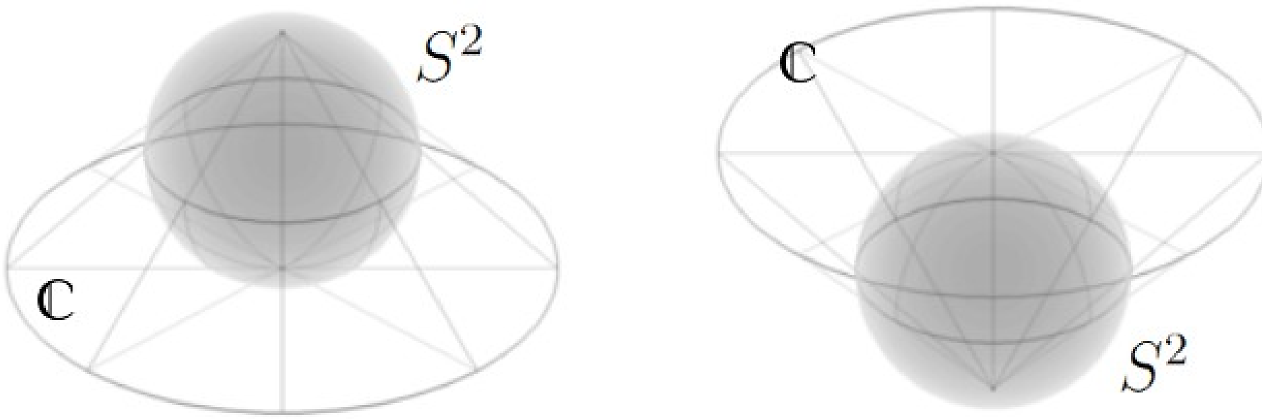

Figura 2.2: Representación de la proyección de puntos de la esfera en el plano Complejo. A la izquierda, la coordenada α, a la derecha, la β.[14]

Al escoger estas cartas, podemos determinar unívocamente la proyección dando las funciones de transición. Las funciones de transición se escogerán como $\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha}$ y $\phi_{\beta\alpha} = \frac{1}{\beta}$ respectivamente. Dado que los dos abiertos solapan en todo punto excepto en $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, se tiene que las funciones de transición son holomorfas, por lo que S^2 queda dotada de un atlas holomórfico y, con ello, de una estructura de variedad compleja.

Ejemplo 2.3. Espacio proyectivo complejo

El espacio proyectivo complejo, usualmente denotado por P_n o $\mathbb{C}P_n$ en caso de haber ambigüedad, es el $\mathbb{C}$-espacio de las líneas que atraviesan el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$.
Formalmente, sea $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ y sea la relación de equivalencia definida por:

$$z = (z_1, z_2, ..., z_{n+1}) \sim z' = (z'_1, z'_2, ..., z'_{n+1}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid z = \lambda z'$$

Entonces podemos tomar los entornos $U_j = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_j \neq 0\}$ y escoger coordenadas para las cartas $z_j^m = \frac{z_m}{z_j}$ para cada U_j, de forma que podemos caracterizar los puntos $z \in U_j$ por las coordenadas $z = \left(z_j^m\right)_{m \neq j}$, eliminando el 1 de la posición j.

Para que esta variedad quede correctamente definida debemos ver que las funciones de transición ϕ_{jk}, en las intersecciones de los abiertos U_j, son holomorfas. En este contexto podemos construir las funciones de transición como:

$$\text{Sea } z \in U_j \cap U_k \quad z_j^m = \frac{z_m}{z_j}\ ,\ z_k^m = \frac{z_m}{z_k} \Rightarrow \phi_{jk}(x) = \frac{z_k}{z_j} x$$

Dado que $z_j, z_k \neq 0$, estas funciones de transición heredan la holomorfía, por lo que $\mathbb{C}P^n$ define correctamente, tal y como se ha descrito, una variedad compleja de dimensión n.

La noción intuitiva de esta variedad es la de compactificar un hiperplano complejo $\mathbb{C}^n$ añadiendo otro plano en el infinito; por ejemplo esta claro que $\mathbb{C}P^1$ está cubierto mediante dos coordenadas, las funciones de transición y las coordenadas son exactamente iguales que en el ejemplo anterior, por lo que $\mathbb{C}P^n$ recupera la idea de la esfera de Riemann; el plano proyectivo complejo extiende la noción del recubrimiento de la esfera de Riemann a cualquier hiperplano complejo y, mas allá, le da la vuelta a la idea para, en vez de recubrir un compacto, generar un compacto añadiendo otro plano para recubrir el objeto del que se parte.

A lo largo del trabajo, referido a las geometrías de Kähler, utilizaremos variedades complejas. Sin embargo, para construir estructuras más complicadas pero necesarias sobre estas, haremos el estudio sobre variedades reales y extenderemos a variedades complejas.

2.2. Estructura vectorial asociada a variedades

En gran parte de las motivaciones del uso de variedades aparece de forma natural la necesidad de codificar vectores. Las variedades no tienen de por sí una estructura de espacio vectorial equivalente a la del espacio euclídeo asociado. Podemos extender la noción de los vectores hasta las variedades mediante el concepto de *espacio tangente*.

Proposición 2.1. Estructura vectorial de diferenciales

Sean $p \in \mathbb{R}^n$, $\nu_p \equiv \{d : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \mid d \text{ lineal y } d(fg) = f(p)d(g) + d(f)g(p)\}$

Se tiene que ν_p es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y existe un isomorfismo entre espacios vectoriales dado por:

$$\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \nu_p$$
$$w \in \mathbb{R}^n \longrightarrow [\lambda(w)](f) = \frac{d}{dt}[f(p+tw)](0) \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Demostración:[5]

- **Espacio Vectorial:**

  Sean $\omega_1, \omega_2 \in \nu_p$; $a, b \in \mathbb{R}$, $v = a\omega_1 + b\omega_2$ $v(f) = (a\omega_1 + b\omega_2)(f) = a\omega_1(f) + b\omega_2(f)$; de donde

[5] Se denota como π la aplicación proyección, π_i denotará por extensión la proyección sobre el i-ésimo espacio. En el ejemplo concreto, sea $(x)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $\pi_i(x) = x_i$.

se tiene que $v : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Aplicando la linealidad de ω_1, ω_2 la linealidad de v es trivial. $v(fg) = a\omega_1(fg) + b\omega_2(fg) = a\omega_1(f)g + af\omega_1(g) + b\omega_2(f)g + bf\omega_2(g) = v(f)g + fv(g)$; por lo que, efectivamente v verifica la regla de Leibniz y, por tanto, ν_p define correctamente un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

- **λ es isomorfismo:**

  De la regla de la cadena, λ hereda la linealidad, por lo que es homomorfismo. Es sencillo ver que λ es inyectiva ya que $\forall v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, se tiene que $\exists i \in [1, n] \mid v_i = \pi_i(v) \neq 0$. Tomando $f = x_i$ se tiene que $[\lambda(v)](f) = v_i \neq 0$, por lo que es inyectiva. La sobreyectividad es algo mas tediosa, una prueba de ésta se encuentra en [17], página 24.

Definición 2.4. Vector tangente, Espacio tangente

Sea M una variedad suave, sea $p \in M$, definimos un **vector tangente a M en p** como una función $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ lineal verificando la regla de Leibniz.

Por la Proposición 2.1, los vectores tangentes a M en un punto de la variedad forman un espacio vectorial. Llamaremos a este espacio ***espacio tangente a M en*** p, denotándolo como T_pM.

Definición 2.5. Vectores canónicos del espacio tangente

Sea (U, φ) una carta de M una variedad real, $p \in U$, $(r_i)_{i=1}^n$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Definimos los **vectores canónicos del espacio tangente** T_pM $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

Proposición 2.2. Base canónica del espacio tangente

Los vectores canónicos $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p | i \in [1, n] \subset \mathbb{N}\}$ forman una base de T_pM, de forma que $\forall v \in T_pM$:

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

Demostración:

La demostración puede encontrarse en [17], página 29.

Definición 2.6. Fibrado tangente

Sea M una variedad suave. Llamaremos a la unión disjunta de los espacios tangentes a todos los puntos de la variedad **fibrado tangente**, denotado como TM, es decir:

$$TM \equiv \sqcup_{p \in M} T_p M$$

Estas nociones nos permiten definir sobre cualquier punto de una variedad suave un $\mathbb{R}$-espacio de vectores, por lo que, dotar a un espacio topológico de la estructura de variedad es equivalente a asociar localmente un espacio euclídeo en cada punto. Mas allá de las propiedades topológicas a través del isomorfismo de la proposición 2.1, no nos meteremos en muchos detalles a la hora de ver que, efectivamente, se recuperan todas las nociones de un espacio tangente típicamente entendido en geometría. En este trabajo nos es mas relevante generalizar esta noción a estructuras complejas. Para ello, debemos encontrar la relación entre las variedades suaves y las holomorfas, inspirándonos en los T_pM definidos para variedades diferenciables y extendiendo esta noción para las complejas.

2.3. Estructura algebraica asociada a variedades

Primero construiremos el álgebra exterior, gracias a esto definiremos las p-formas y podremos dotar a la variedad de estructura de espacio.

Definición 2.7. Producto tensorial

Sean V,W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, sea Z el espacio vectorial generado por los elementos $(v, w) \in V \times W$ del producto cartesiano de V y W, y sea Y el subespacio de Z generado por los elementos que verifican ser lineales en ambas componentes, esto es $\forall a, a_1, a_2 \in V \;\; b, b_1, b_2 \in W, \;\; s \in \mathbb{K}$ se verifica:

- $(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$
- $(sa, b) = s(a, b)$
- $(a, b_1 + b_2) = (a, b_1) + (a, b_2)$
- $(a, sb) = s(a, b)$

Llamaremos **producto tensorial** de V y W, denotado por $V \otimes W$, al cociente:

$$V \otimes W = Z/Y$$

Denotaremos a la imagen del elemento $(v, w) \in V \times W$ a través de la proyección trivial sobre el cociente como $v \otimes w$ [6]

[6] Haciendo abuso de notación, llamaremos producto tensorial tanto al espacio cociente $V \otimes W$ como al producto definido entre elementos $v \otimes w$, entendiéndose según el contexto

Existe otra definición equivalente a través de una propiedad universal. Al no ser el principal objetivo de este trabajo, así como no lo es tampoco la geometría diferencial en general, no se darán muchos detalles sobre la demostración de la equivalencia (puramente operativa) pero sí resulta interesante enunciar la definición de producto tensorial mediante esta propiedad:

Lema 2.1. Propiedad universal del producto tensorial

El producto tensorial entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W es un espacio vectorial $V \otimes W$ asociado a una aplicación bilineal

$$\otimes : V \times W \to V \otimes W$$

$$(v, w) \to v \otimes w$$

verificando que, para cualquier aplicación bilineal $h : V \times W \to V \otimes W$, exista una única aplicación $\bar{h}$ que verifique $h = \bar{h} \circ \otimes$

Denotaremos $T^k V = \overbrace{V \otimes V \otimes V \otimes ... \otimes V}^{k}$ siendo $T^0 V = \mathbb{K}$

Definición 2.8. Álgebra Tensorial

Sea $T(V)$ la suma de todos los $T^k V$, esto es:

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus ...$$

Definamos una operación binaria interna, a la que denominaremos producto " * ", a través de la noción de producto tensorial de elementos:

$$a, b \in T(V) \to a \in T^n V \quad b \in T^m V \;\; n, m \in \mathbb{N} \;; \quad a * b = a \otimes b \in T^{n+m} V$$

Se define el **álgebra tensorial** de V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial como el par $(T(V), *)$. Usualmente denotaremos este álgebra como T(V) y el producto, de no haber ambigüedad, se denotará por yuxtaposición.

Dado que utilizaremos notación tensorial para simplificar ciertas nociones a lo largo de toda la memoria, a continuación definiremos la notación a usar:

Definición 2.9. Tensor, Espacios de tensores

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, V^* su dual, llamaremos **campo tensorial** o **tensor** de tipo (k,l) a cualquier aplicación multilineal que tome k vectores de V^* y l vectores de V para dar un valor en $\mathbb{K}$, esto es:

$$t : T^k V^* \times T^l V \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{con } t \text{ lineal en cada componente}$$

Establecida una base, denotaremos sus componentes por $t^{b_1,b_2,\ldots,b_l}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$, dónde los índices inferiores harán referencia al espacio dual y los superiores al directo.

El uso de los tensores es increíblemente extenso, de hecho, podemos recuperar la gran mayoría de nociones básicas del álgebra lineal con estos. Por ejemplo, podemos entender un vector como un tensor de tipo (0,1), un vector traspuesto como un tensor de tipo (1,0) y una matriz como un tensor de tipo (1,1); mas allá de poder llevar todas estas nociones algebraicas a una variedad utilizando el espacio vectorial definido como el espacio tangente.

Los tensores nos permiten definir otra de las piedras angulares del cálculo sobre variedades:

Definición 2.10. Formas diferenciales

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, llamaremos **k-forma** a cualquier tensor de tipo $(k,0)$ que sea antisimétrico bajo el intercambio de dos índices cualesquiera.

El espacio de las k-formas sobre V se denotará como $\Omega^k(V)$.

Dado que el producto tensorial tiene asociado un espacio vectorial de forma trivial y la propiedad que define el que un tensor sea o no una forma es lineal, se tiene que las k-formas tienen asociadas una noción automática de espacio vectorial, dando lugar al siguiente corolario:

Corolario 2.1.1. Estructura vectorial en k-formas

El conjunto $\Omega^k(T_p^*M)$ de las k-formas sobre una variedad diferenciable M forma un espacio vectorial.

Las formas permiten definir conceptos como la integrabilidad o la curvatura sobre una variedad. La definición previa es, si bien correcta, bastante operativa y poco formal; posteriormente daremos una noción equivalente y mejor formulada.

Ya habiendo definido el álgebra tensorial, tenemos la capacidad para definir el álgebra exterior y explicar en mayor profundidad toda esta construcción.

Definición 2.11. Álgebra Exterior

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, T(V) su álgebra tensorial y sea I el ideal bilateral en T(V) generado por $\{x \otimes x \mid x \in V\}$; llamaremos **álgebra exterior** denotado como $\bigwedge V$, al álgebra cociente entre el total y el ideal I, es decir:

$$\bigwedge V = \mathrm{T(V)}/I$$

donde como producto del álgebra se escoge el heredado a través de la proyección canónica de T(V) sobre el cociente.

El producto en el álgebra exterior, para diferenciarlo del tensorial, suele denotarse mediante "$\wedge$", es decir, $a, b \in \bigwedge V \quad a \wedge b = \pi(a' \otimes b')$ siendo π la proyección canónica y verificándose $a = \pi(a')$ $b = \pi(b')$. Este producto suele llamarse **producto exterior**.

Típicamente se denota a los subespacios de este álgebra generados por elementos de tipo $\wedge_{j=1}^{k} x_{i_j}$ como $\bigwedge^k(V)$

Mediante el álgebra exterior es como se pueden construir mas formalmente las k-formas. Sin embargo, para estudiar a fondo esta noción, deberíamos atravesar teoría de haces; con el fin de no extender mucho más esta subsección se dará la idea equivalente de la noción formal dada por teoría de haces sin mostrar la equivalencia.[7]

Lema 2.2. Noción de k-forma según álgebra exterior

Sea M una variedad real, $p \in M$, definimos las k-formas diferenciales como las secciones diferenciales de $\bigwedge^k T_p^* M$; esta noción es equivalente a la anterior, ya que existe un isomorfismo trivial entre ambos espacios.

Cómo se ha mencionado anteriormente, el lema anterior no se probará, al preferir saltar las nociones de teoría de haces necesarias, pero es interesante, ya que, gracias a este lema, es sencillo ver que podemos expresar las k-formas sobre el espacio tangente mediante:

$$\alpha \in \Omega^k(T_p^* M) \ \rightarrow \sum_{\substack{I \in C \\ I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}}} \alpha_I \wedge_{j=1}^{k} dx_{i_j}$$

Siendo $\alpha_I \in C^\infty(\mathbb{K})$

[7]En caso de querer comprobar esta equivalencia, puede verse en [9].

A las 0-formas, se les asocia por convenio las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{K})$, en nuestro caso, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Dada la representación en términos del producto exterior anteriormente mencionada, por antisimetría en la definición de las formas o, en su defecto, en el producto exterior, se tiene:

Corolario 2.2.1. Límite superior de n-formas

Sea $dim_{\mathbb{K}}(T_pM) = n$, entonces $\Omega^m(T_p^*M) = \{0\}\ \forall m > n$

Estableciendo la existencia únicamente de n+1 grados de formas (del 0 al n)

Otra noción directa de la definición de los tensores es la de extender el producto escalar al espacio tangente. Los tensores de tipo (1,0) se asociarían automáticamente a un vector y podrían actuar sobre el espacio tangente, explícitamente, usando notación bra-ket para el producto:

$$\beta \in T_p^*M \quad \beta \to < \beta, \circ >$$

$$\begin{array}{rccl} \beta = < \beta, \circ >: & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & < \beta, \alpha > \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} <,>: & T_p^*M \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\beta, \alpha) & \longrightarrow & < \beta, \alpha > \end{array}$$

De esta forma podremos, dada una carta y tomando una base del espacio euclídeo asociado, establecer un tensor métrica.

Definición 2.12. Tensor métrico

Sea M una variedad, (U, ϕ) una carta tal que el codominio de ϕ es el espacio euclídeo $\mathbb{K}$ de dimensión n, con una base definida por $\{e_i\}_{i=1}^n$, y sea g la métrica asociada al producto escalar en este, entonces el tensor de tipo (1,1) definido por:

$$g_i^j = < e_i, e_j >$$

Se dirá **tensor métrico** o tensor asociado a la métrica g.

Gracias a esto podremos representar localmente el producto escalar de dos elementos con productos matriciales: $< v, w > = v_j\ g_i^j\ w^i$

Para terminar con la estructura algebraica, se dará la noción de derivación de formas. Existen varios métodos para definir la derivada exterior, por simplicidad y para no alargar mucho más esta parte, se tomará la construcción axiomática de la derivada exterior.

Definición 2.13. Derivada exterior de k-formas

Sea M una variedad suave, sea $\bigwedge^k(T_p^*M)$ el espacio de sus k-formas, se define d_k la **derivada exterior de las k-formas**, como una aplicación

$$d_k : \bigwedge^k(T_p^*M) \longrightarrow \bigwedge^{k+1}(T_p^*M)$$

Verificando:

- Si f es una 0-forma, entonces $d_0 \circ f = df$, la derivada exterior actúa como el diferencial común.
- Sea f una forma, entonces $d_{k+1}(d_k f) = 0$ equivalentemente $d^2 = 0$
- d_k cumple la regla del producto con el producto exterior, esto es,
  sean $a \in \bigwedge^p(T_p^*M)$ $b \in \bigwedge^{k-p}(T_p^*M)$ [8]

$$d_k(a \wedge b) = d_p a \wedge b + (-1)^p a \wedge d_{k-p} b$$

A pesar de que la noción anterior depende del grado de la k-forma sobre la que se evalúa la derivada, abusaremos de notación y denominaremos derivada exterior "d" a la aplicación en general, actuando sobre formas de cualquier grado.
En base a la noción anterior, hay una cuestión trivial, y es que para que "d" esté bien definida debe verificarse que todas las d_k existan y sean únicas. Esto efectivamente se da.

Proposición 2.3. Definición de la derivada exterior

La aplicación d derivada exterior general, está bien definida, existe y es única.

Demostración:

La demostración es larga y puramente operativa, por lo que se opta por referenciarla. Puede encontrarse en [10] (Capítulo 19); solo notar que el autor no hace distinción alguna entre el operador general y los operadores relativos a cada grado de k-formas.

Para terminar con esta sección, es útil dar una clasificación de las formas en función de su comportamiento con la derivada exterior:

[8] El factor $(-1)^p$ es clave debido a la naturaleza antisimétrica de las formas y el producto externo.

Definición 2.14. Formas cerradas, Formas exactas
Sea ω una forma.[9]. Se dirá:

- **Cerrada** En caso de que $d\omega = 0$
- **Exacta** En caso de que exista α una forma de un grado menor que verifique $d\alpha = \omega$

Corolario 2.2.2. Relación entre formas cerradas y exactas
Dado que $d^2 = 0$, se tiene que cualquier forma exacta es cerrada

El corolario anterior es útil ya que puede servir como base de estudio para la noción de cohomología. La estructura algebraica de las variedades, refiriéndonos al álgebra exterior, es general para cualquier tipo de variedades. Sin embargo las nociones de vectores y espacios tangentes fueron definidas a propósito sobre variedades reales, donde no debíamos tener consideración de holomorfía, solo de diferenciabilidad real, y pudimos construir directamente un isomorfismo. La forma más directa de dotar a las variedades complejas de estructura vectorial es ver que, en efecto, existe una equivalencia entre algunas variedades suaves y las variedades complejas. De esta forma podremos ver el mismo objeto topológico de una forma o la otra y, con ello, heredar las de las variedades reales sobre las complejas.

2.4. Estructura compleja de variedades reales

Podemos facilitar la tarea de dotar a las variedades de ciertos elementos mediante la definición de tensores que nos den idea, en base a la coherencia de su definición o a su posible imagen, de las propiedades de la variedad. La idea es parecida a la relación que existe entre espacio topológico, espacio metrizable y espacio métrico; en los tres subyace una estructura topológica, en el metrizable es posible definir una métrica coherente y en el métrico esta aplicación se añade directamente formando parte de la estructura; el dotar de estructura a las variedades mediante tensores o endomorfismos definidos sobre los espacios tangentes es una idea análoga a esta.

Para comenzar a comprobar cómo han de ser las variedades suaves para poder ser vistas como variedades complejas es normal preguntarse cómo extender a noción vectorial la idea de la unidad imaginaria; al igual que el elemento “i” permite mediante una extensión de cuerpos llevar el cuerpo de los reales al de los complejos, es natural preguntarse cómo extender de la misma forma los espacios. Para ello, introduciremos una aplicación que nos sirva para esto.

[9] Al hablar de formas se entiende que la sentencia es aplicable a cualquier forma, independiente del grado

Definición 2.15. Estructura casi compleja. Variedad casi compleja.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un endomorfismo $J : V \to V$ verificando $J^2 = -Id$ se llama **estructura casi compleja**.

Sea M una variedad diferencial n-dimensional, podemos ver una **estructura casi compleja** como cualquier campo tensorial[10] J de tipo (1,1) sobre M que verifique $J_a^b J_b^c = -\delta_a^c$; esta noción es mas útil a la hora de hacer cálculos pero no es más que la representación de J respecto a una base cualquiera. Aún así se preferirán las nociones intrínsecas, independientes de la base, a la hora de definir aplicaciones. Sea W un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, se verifica:[11]

$$J^2(v) = -v \;\forall\; v \in W \;\Rightarrow (J-i)\,(J+i) = 0 \longrightarrow \{i, -i\} = \sigma(J)$$

Gracias a este endomorfismo podemos dar un paso hacia la complexificación de una variedad diferenciable, definiendo la noción de **variedad casi compleja** como aquella variedad diferenciable en la que se define una estructura casi compleja sobre su fibrado tangente.

Ejemplo 2.4. Estructura casi compleja de $\mathbb{R}^{2n}$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{2n}$ admite trivialmente la incorporación de estructuras casi complejas. Por ejemplo, podemos definir la estructura, dada por índices, como:

$$(J)_{ij} = \begin{cases} -\delta_{i\;j-1} & \text{si} \quad i \in 2\mathbb{N} \\ \\ \delta_{i\;j+1} & \text{si} \quad i \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

Ejemplo 2.5. Estructura casi compleja de S^n

Un resultado interesante es que, no solo no todas las esferas admiten una estructura casi compleja, sino que solo dos de ellas lo hacen, S^2 y S^6.

Las pruebas, tanto de que S^4 y el resto de esferas no admiten la estructura como de que S^2 y S^6 sí lo hacen, son algo largas y se prefiere no incluirlas explícitamente. Para ilustrar:

[10] Implícitamente al hablar de campos tensoriales sobre variedades nos referiremos a aplicaciones sobre el fibrado tangente.

[11] Se define como espectro de un operador A (en su defecto $\sigma(A)$) al conjunto de todos los valores propios del operador.

- La estructura casi compleja de S^2 es heredada de la *esfera de Riemann*, dónde una estructura compleja induce una estructura casi compleja, como se verá mas adelante.

- La estructura casi compleja de S^6 viene dada el producto de octoniones, al ver S^6 como el conjunto de los octoniones unitarios puramente imaginarios. Este caso es particularmente interesante en matemáticas, ya que la cuestión de si esta estructura puede o no extenderse para formar una variedad compleja es un problema abierto, conocido usualmente como *Problema de Hopf*. Puede encontrarse más información sobre este problema en [1].

Como ya se mencionó, la estructura casi compleja es nuestra mejor baza para tratar de hacer un proceso análogo a la extensión de cuerpos en espacios vectoriales.

Proposición 2.4. Extensión de cuerpos de un espacio vectorial
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, sea $\tilde{\mathbb{K}}$ una extensión de cuerpos de $\mathbb{K}$, existe un espacio vectorial que contiene una copia de V y permite el producto por escalares en $\tilde{\mathbb{K}}$

Demostración:

Vamos a construir ese espacio vectorial mediante un producto tensorial. Para ello, consideremos $\tilde{\mathbb{K}}$ como un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, de forma que el producto tensorial queda bien definido:

$$V_{\mathbb{K}}^{\tilde{\mathbb{K}}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\mathbb{K}}$$

Dónde el subíndice del producto tensorial hace referencia al cuerpo respecto al que los espacios están tomados.
Partiendo de $V_{\mathbb{K}}^{\tilde{\mathbb{K}}}$, hasta ahora $\mathbb{K}$-espacio, podemos definir un producto por escalares en $\tilde{\mathbb{K}}$ haciendo que los escalares de $\tilde{\mathbb{K}} - \mathbb{K}$ actúen solo sobre la segunda componente, denotando M a la multiplicación, tendríamos:

$$v = w \otimes \beta \in V_{\mathbb{K}}^{\tilde{\mathbb{K}}} \quad \alpha \in \tilde{\mathbb{K}} - \mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{M}(w, \alpha) = \omega \otimes (\alpha\beta) \in V_{\mathbb{K}}^{\tilde{\mathbb{K}}}$$

Dado que la compatibilidad de este producto con la suma es trivial por la linealidad del producto tensorial, se tiene que los elementos de $V_{\mathbb{K}}^{\tilde{\mathbb{K}}}$ con el producto definido anteriormente es un $\tilde{\mathbb{K}}$-espacio vectorial, que denotaremos como $V^{\tilde{\mathbb{K}}}$

Denotaremos como $V^{\tilde{\mathbb{K}}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\mathbb{K}}$ a la extensión de cuerpos de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V a través del producto tensorial junto a una copia del cuerpo $\tilde{\mathbb{K}}$, extensión del cuerpo $\mathbb{K}$.

Un caso concreto de esta extensión ocurre cuando partimos de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y tomamos $\mathbb{C}$ como su cuerpo de extensión. Este proceso es llamado **complexificación**.

En este contexto, podemos tomar como espacio vectorial el fibrado asociado a una variedad casi compleja y complexificarlo, pudiendo entonces diagonalizar el endomorfismo J;[12] trivialmente, existirán dos autoespacios asociados a los autovalores de J como ya se vió anteriormente.

A la hora de hacer este estudio, daremos una noción general sobre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y luego la aplicaremos a los espacios tangentes de una variedad real.
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, denotaremos:

- $V^{1,0} \equiv \{v \in V^{\mathbb{C}} \mid J(v) = i \cdot v\}$ Autoespacio de J de autovalor i
- $V^{0,1} \equiv \{v \in V^{\mathbb{C}} \mid J(v) = -i \cdot v\}$ Autoespacio de J de autovalor $-i$

Dado que J es diagonalizable se sigue el siguiente resultado:

Proposición 2.5. Relación de la complexificación con la estructura casi compleja
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, J una estructura casi compleja definida sobre éste, se verifica:

$$V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \text{ y } \overline{(V^{1,0})} = V^{0,1}$$

Dónde la relación por conjugación se deduce trivialmente dado el producto definido sobre $V^{\mathbb{C}}$
Demostración:

- $V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ Sea J la estructura casi compleja definida sobre V, consideremos la inclusión trivial:

  $$J : V^{1,0} \oplus V^{0,1} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}$$

  $$v \oplus w \longrightarrow v + iw$$

  Esta aplicación es una biyección, ya que trivialmente la aplicación:[13]

  $$L : V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

[12] J solo esta definido *per se* sobre TM, la extensión a su complexificación se toma como extensión lineal
[13] Se denota $\bar{z}$ al complejo conjugado de z.

$$z \longrightarrow \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \oplus \frac{1}{2}(z-\bar{z})$$

es su aplicación inversa. Al ser la inclusión un homomorfismo, se tiene directamente que $V^{\mathbb{C}} \cong V^{1,0} \oplus V^{0,1}$

- $\overline{(V^{1,0})} = V^{0,1}$ Sea $v \in V^{\mathbb{C}}$, $v = x + iy$ se tiene:

$$\overline{v - iJ(v)} = x - iy + iJ(x) + J(y) = \overline{v} + J(\overline{v})$$

De donde se sigue $\overline{V^{0,1}} = V^{1,0}$

Corolario 2.2.3. Complexificación del espacio tangente.
Sea (M, J) una variedad real dotada de una estructura casi compleja. Existe una descomposición $T_{\mathbb{C}}M = TM^{1,0} \oplus_{\mathbb{C}} TM^{0,1}$

Por otro lado, debemos definir correctamente las ideas algebraicas previas que se tenían en variedades reales.

Definición 2.16. Formas bigraduadas.
Sea V un espacio vectorial real, definimos:

$$\bigwedge^{p,q} V \equiv \bigwedge^{p} V^{1,0} \otimes \bigwedge^{q} V^{0,1}$$

Las formas asociadas a $\bigwedge^{p,q} V$ se dirán de bigrado (p,q)

Más adelante, tras la definición de las variedades de Kähler, veremos un ejemplo claro de una forma perteneciente a $\bigwedge^{1,1}$.

Nota: Denotaremos como sigue a estas proyecciones sobre álgebras exteriores:

- $\Pi^k \equiv \pi : \bigwedge^* V_{\mathbb{C}} \to \bigwedge^k V_{\mathbb{C}}$
- $\Pi^{p,q} \equiv \pi : \bigwedge^* V_{\mathbb{C}} \to \bigwedge^{p,q} V_{\mathbb{C}}$

siendo π la proyección canónica.

Definición 2.17. Operadores derivada holomorfa y antiholomorfa
Sea (M, J) una variedad real dotada de una estructura casi compleja, sea d la extensión lineal de la derivada exterior. Se definen los operadores:

$$\partial \equiv \Pi^{p+1,q} \circ d \quad y \quad \bar{\partial} \equiv \Pi^{p,q+1} \circ d$$

Al primer operador se le llamará derivada holomorfa, al segundo, antiholomorfa.

Corolario 2.2.4. Regla del producto para la derivada (anti)holomorfa

Heredándolo de la derivada exterior, se tiene que ∂ y $\bar{\partial}$ verifican la regla del producto para el producto externo.

Ahora acudamos al hecho de que el espacio vectorial de partida es un espacio euclídeo, y por tanto tiene un producto escalar asociado. Lo denotaremos por $<,>$, en notación bra-ket.

Definición 2.18. Compatibilidad

Una estructura casi compleja J se dice **compatible** con un producto escalar $<,>$ definido sobre el espacio V si verifica:

$$< J(v), J(w) >=< v, w > \ \ \forall v, w \in V$$

Es decir, si se comporta como una isometría. Equivalentemente se tiene:

Corolario 2.2.5. Relación entre compatibilidad y ortogonalidad

Una estructura casi compleja J verifica:

$$J \text{ compatible} \iff J \in O(V, <, >)$$

Recordando que estamos tratando de generar una estructura de espacio vectorial complejo sobre una variedad inicialmente real, se debe definir una extensión del producto escalar asociado al espacio del que partimos, para que nuestro nuevo producto escalar se comporte como lo haría uno complejo; definimos entonces *la forma canónica.*

Definición 2.19. Forma canónica

Sea $(V, <, >)$ un espacio euclídeo y su respectivo producto escalar y J una estructura casi compleja compatible. Definimos la **forma canónica** ω como:

$$\omega(u, v) \equiv - < u, J(v) > \quad \forall u, v \in V$$

La estructura de forma es, aunque no se detallará, fácil de ver. Como se indicó en su momento, podemos ver el producto escalar como un tensor y ω es una versión antisimétrica del tensor producto escalar utilizando J.

De la definición se obtienen propiedades directas de esta forma:

Proposición 2.6. Propiedades de la forma canónica:

- $\omega(u,v) =< J(u), v >$

  Es decir, la forma canónica, no solo hereda las propiedades del producto escalar si no que, de hecho, permite su extensión al cuerpo de los complejos tratando a J como la unidad imaginaria.

- $\{<,>; J; \omega\}$ puede construirse únicamente con dos de las tres estructuras.

Demostración:

- $\omega(u,v) =< J(u), v >$

  Si J es compatible, $\omega(u,v) = -< u, J(v) >= -< J(u), J(J(v)) >= -< J(u), -v) >=< J(u), v >$

- $\{<,>; J; \omega\}$ puede construirse únicamente con dos de las tres estructuras.

  - $\{<,>, J\}$ construyen ω como se ha visto.
  - $\{\omega, J\}$ construye $<,>$ usando la definición de $J : \omega(u, J(v)) \ = < u, v > \ \forall u, v \in V$
  - $\{\omega, <,>\}$ Para definir a partir de estas dos aplicaciones el endomorfismo J, construiremos una aplicación cuyo comportamiento sea semejante.

  Partiendo de las propiedades anteriores de ω y $<,>$, se tienen dos resultados que podemos expresar en términos generales sin recurrir a J:

  $$\exists \tilde{u} \in V \text{ tal que } \omega(u,v) =< \tilde{u}, v > \quad \text{y} \quad \omega(\tilde{u}, v) = \omega(u,v) \quad \forall v \in V$$

  Podemos entonces definir $f : V \to V$ tal que $f(u) = \tilde{u}$ como fue definida anteriormente. Esta aplicación está correctamente definida:
  Sea $n = dim(V)$, $B \equiv \{b_i\}_{i \in I}$ $|I| = n$ una base ortonormal. Supongamos $\exists \tilde{u}, \tilde{u}' \in V \mid \tilde{u} \neq \tilde{u}'$ y $\omega(u,v) =< \tilde{u}, v >=< \tilde{u}', v > \ \forall v \in V$. Podemos entonces tomar sus componentes respecto a la base B usando de nuevo la propiedad anterior:

  $$< \tilde{u}, b_i >=< \tilde{u}', b_i > \ \forall i \in I \ \Rightarrow \tilde{u} = \tilde{u}'$$

De esta forma la aplicación está bien definida; para comprobar que actúa como el endomorfismo J basta con utilizar de nuevo la propiedad:

$$\omega(u,v) = <\tilde{u}, v> = <f(u), v> \; ; \; \omega(f(u), v) = - <u, v> \rightarrow$$
$$ff(u) = -u \;\rightarrow f^2 = -Id \rightarrow f = J$$

De este modo, dadas dos de las estructuras anteriores, la tercera queda automáticamente definida.

A la hora de definir, posteriormente, las variedades de Kähler, será necesario el concepto de hermiticidad de la forma canónica.

Corolario 2.2.6. Forma canónica hermítica.Variedad hermítica

Dada una variedad con una estructura casi compleja compatible J, dotada de una forma canónica ω, podemos construir una forma hermítica como sigue:

$$H(,) = <,> - J \circ \omega \quad ^{14}$$

Llamaremos a esta forma, **forma canónica hermítica** o únicamente **producto hermítico**. Siempre que sea posible definir esta forma, llamaremos a una variedad dotada de una estructura de este estilo **variedad hermítica**, denotada por (H, k), dónde H es la variedad y k su forma hermítica asociada.

Ahora bien, para encontrar la relación entre las variedades reales y las complejas, solo queda una noción más, la de integrabilidad de la estructura casi compleja.

Definición 2.20. Integrabilidad y estructura casi compleja

Sea (M, J) una variedad real dotada de una estructura casi compleja J.

J se dirá **integrable** si $d\gamma = \partial\gamma + \bar{\partial}\gamma \qquad \forall \gamma \in \Omega(T^*M)$

Dicho de otra forma, si el operador derivada exterior *funciona bien* con la complexificación del espacio, extendiéndose linealmente sobre cada autoespacio de la estructura casi compleja.

De la relación $d^2 = 0$ se sigue:

Corolario 2.2.7. Derivada (anti)holomorfa e integrabilidad

Sea J una estructura casi compleja integrable, entonces se verifica

$$\partial^2 = 0 \quad \bar{\partial}^2 = 0 \quad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$$

[14] En gran parte de la bibliografía se suele denotar a esta forma como (,). La notación $H(,)$ se ha escogido para evitar la anterior, quizás algo farragosa.

Teorema 2.3. Newlander & Niremberg
Toda variedad real dotada de una estructura casi compleja integrable puede verse como una variedad compleja.

Demostración:

La demostración no se detallará en esta memoria. Una prueba puede encontrarse en [20], dónde dedican todo un apéndice (Appendix A) a ello. Aún así, para justificar las construcciones previas se darán dos nociones intuitivas relativas a esta equivalencia:

- Las estructuras casi complejas solo pueden definirse sobre variedades reales $2n$-dimensionales por consistencia, ya que, de esta forma, $det(J^2) = (-1)^n$.
- La noción de integrabilidad de una estructura casi compleja permite restringir aún más la noción inicial de derivabilidad sobre la variedad, al igual que la noción de holomorfidad de una función es una versión mas restrictiva de su derivabilidad en 2 dimensiones.

Por lo que pueden justificarse las condiciones del teorema de forma cualitativa.

A la hora de la verdad la condición anterior de integrabilidad suele ser menos cómoda de probar en función del formalismo en que nos encontremos. En general en aplicaciones físicas, la condición de integrabilidad suele probarse mediante el **tensor de Ninjenhuis**.

Definición 2.21. Tensor de Ninjenhuis
Sea (M, J) una variedad diferenciable dotada de una estructura casi compleja, sea ∂ la derivada holomorfa. Se define por componentes el **tensor de Ninjenhuis** N_J cómo:

$$N^a_{bc} = J^d_b \left(\partial_d J^a_c - \partial_c J^a_d\right) - J^d_c \left(\partial_d J^a_b - \partial_b J^a_d\right)$$

Formalmente este tensor sirve para comprobar la integrabilidad de la estructura casi compleja, ya que propiedad es equivalente a que el tensor N_J se anule. La equivalencia de estas dos propiedades, una más conceptual y otra mas operativa, permite la reformulación del Teorema 2.3 mediante este tensor, con el fin de tener una condición mas práctica.

Teorema 2.3 Newlander Niremberg (2)
Toda variedad real dotada de una estructura casi compleja, cuyo tensor de Ninjenhuis se anule en todo

punto, puede verse como una variedad compleja.

Demostración:

La demostración de esta versión del teorema es bastante más sencilla. Puede encontrarse en el Teorema 3 de la sección 2.2 en [19], dónde se demuestra que, de forma necesaria y suficiente, bajo estas condiciones pueden definirse unas cartas bajo las cuales la estructura puede verse como una variedad compleja.

Con el teorema anterior, podemos simplemente ver una variedad compleja como una variedad real $2n$-dimensional con ciertas cualidades especiales. De esta forma extendemos automáticamente todas las nociones vectoriales dadas para variedades reales, como se ha hecho en esta subsección, a variedades complejas, y con ello tendríamos ya las variedades complejas dotadas de una estructura de espacio vectorial asociado, álgebras exteriores, formas, tensores, derivadas, y todos los conceptos previamente mencionados.

Capítulo 3

Variedades Kähler

Con todo lo anterior, podemos definir las ***formas Kähler***:

Definición 3.1. Forma Kähler, Variedad Kähler

Sea (H, k) una variedad hermítica y sea ω la forma fundamental inducida sobre ésta.

Si la forma ω es cerrada[1], entonces la estructura k se llamará **estructura o métrica Kähler**; la variedad asociada (H, k) se denominará **variedad Kähler**, por su parte, la forma ω se nombrará como **forma Kähler**.

A continuación, antes de proseguir con el estudio de las variedades de Kähler, se presentan dos ejemplos de variedades de este tipo, aprovechando el primero, además, para ilustrar las nociones de formas y derivadas (anti)holomorfas.

Ejemplo 3.1. Plano proyectivo y métrica de Fubini-Study

Recordando la variedad compleja definida en el Ejemplo 2.3, el espacio proyectivo complejo P^n, podemos definir la familia de formas:[2]

$$\forall z = (z_j)_{j \leq n} \in U_k \ ; \ g_k \equiv log \left(\sum_{j=0}^{n} \left| \frac{z_j}{z_k} \right|^2 \right) \quad \forall k \in [0, n] \subset \mathbb{N}$$

Obviando las comprobaciones y cálculos, que pueden ser encontrados en [8], analicemos esta forma.

Dado que el argumento del logaritmo nunca presenta singularidades y es siempre mayor que 1 por construcción, la función esta bien definida y es holomorfa para todo su dominio. De esta manera podemos

[1] Recordemos, $d\omega$=0

[2] En la bibliografía no utilizan estas funciones auxiliares, definen directamente la forma ω a través de las ω_i. Se ha preferido esta presentación para esclarecer el concepto de forma.

definir globalmente g sobre P^n utilizando $g\big|_{U_i} = g_i$ y sabiendo que $\{U_i\}_{i\leq n}$ forman un recubrimiento de P^n, heredando las propiedades de holomorfía, etc, de cada una de las g_i previa comprobación de que, efectivamente, $g_i\big|_{U_i\cap U_j} = g_j\big|_{U_j\cap U_i}$. Estando bien definida, la aplicación $g : P^n \to \mathbb{C}$ es una forma de bigrado (0,0), es decir, $g \in \bigwedge^{0,0}$.

Podemos entonces definir en base a ésta otras forma mediante el uso de las derivadas; dado que es holomorfa, automáticamente tenemos que es derivable respecto a cualquiera de las derivadas que hemos definido para formas sobre variedades complejas. Por ende tendríamos:

$$\bigwedge^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \bigwedge^{0,1} \xrightarrow{\partial} \bigwedge^{1,1},$$

es decir, podemos definir una forma $\tilde{\omega} \equiv \partial\bar{\partial}g$, siendo una forma de bigrado (1,1). Mas aún, por concordancia con la bibliografía, definiremos la forma:[3]

$$\omega_{FS} = -\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}g$$

De nuevo teniendo trivialmente $\omega_{FS} \in \bigwedge^{1,1}$

Puede comprobarse que esta forma tiene como codominio $\mathbb{R}$ y es cerrada, lo que es sencillo de obtener utilizando el Corolario 2.2.7. Siguiendo esto tendríamos definida J y $\omega \equiv \omega_{FS}$, gracias a la Proposición 2.6, automáticamente podemos definir un producto escalar sobre este espacio, compatible con el endomorfismo J por construcción. La métrica heredada de este producto escalar se conoce como **métrica de Fubini-Study**, de ahí el subíndice FS. Dado que la forma ω_{FS} es cerrada, tenemos que la métrica de Fubini-Study es una métrica de Kähler, dotando a cualquier espacio proyectivo complejo de una estructura de variedad de Kähler mediante estas formas.

Fijada la idea de formas y derivadas exteriores, a continuación otro ejemplo, más sencillo, que ayuda a comprender mejor la intuición de complexificación y forma Kähler:

Ejemplo 3.2. Espacio vectorial estándar de Kähler

Sea $V = \mathbb{R}^2$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, aprovechando la identificación canónica entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$

[3] En la dependencia explícita sobre el endomorfismo J es sencillo comprobar que $-\frac{1}{i} = i$ y por tanto $\omega_i = J(\bar{\omega_i})$ cuya definición es trivial tomando el endomorfismo $J(v) = iv$

podemos definir la estructura casi compleja $J_{\mathbb{R}^2}$ como:

$$J_{\mathbb{R}^2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que no es más que una expresión simple de una matriz cuyos autovalores son $\{i, -i\}$, por lo que encaja con la definición de la estructura.

Dotando al espacio vectorial del producto escalar definido por la matriz identidad, funcionando de manera semejante a la primera forma fundamental en este producto, podemos obtener la forma canónica sencillamente como:

$$< v, w >= v^t \; Id \; w \quad \longrightarrow \; \omega(v, w) = [J_{\mathbb{R}^2}(v)]^t \; Id \; w \;\; \forall v, w \in \mathbb{R}^2$$

En lenguaje de formas, podemos expresar la estructura casi compleja, el producto escalar y la forma canónica mediante las matrices:

$$J_{\mathbb{R}^2} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fácilmente por su expresión matricial se aprecia que la forma canónica ω es constante, y por tanto $d\omega = 0$, es decir, es cerrada. Podemos entonces tomar $\mathbb{R}^2$ con la topología y métrica usuales. Dada la variedad trivial sobre este espacio topológico (Un sistema de coordenadas usual sobre $\mathbb{R}^2$), podemos ver esta variedad como variedad compleja definiendo el endomorfismo $J_{\mathbb{R}^2}$ y como variedad de Kähler dotándola de la forma canónica inducida.

3.1. Motivación

Las variedades de Kähler son motivadas en física para explicar las discrepancias entre la intuición usual y los resultados que brinda la teoría de cuerdas. Esta teoría exige que el mundo que nos rodea tenga 10 dimensiones, algo que choca tajantemente con la observación a nuestro al rededor, ya que solo somos capaces de percibir cuatro, el tiempo y tres espaciales. Esta teoría explica que esas diez dimensiones pueden factorizarse como el producto de cuatro, que son a las que estamos acostumbrados, por seis, vistas como dimensiones reales. Las seis restantes deben entonces ser lo suficientemente "pequeñas" como para pasar desapercibidas. Formalmente, estas seis dimensiones deben tomar forma en algún tipo de variedad compacta. Las exigencias de la teoría fuerzan la existencia, sobre esta variedad 3-dimensional (desde el punto de vista complejo), de una forma que mas adelante definiremos, el potencial Kähler, lo cuál automáticamente permite definir una métrica de Kähler sobre la variedad y dotarla de esta estructura. En resumen, estas variedades son la formalización de la geometría que toman las dimensiones del universo que no somos capaces a describir.

Matemáticamente, las variedades de Kähler son increíblemente ricas y existen herramientas bastante específicas para estudiarlas. Si bien hasta ahora parecen presentar propiedades bastante restrictivas, tras un arduo desarrollo para conseguir su construcción, realmente son más comunes de lo que podría pensarse. Ejemplos de esto son el plano proyectivo o incluso $\mathbb{R}^2$ (con una sencilla extensión a $\mathbb{R}^{2n}$), únicamente dependemos de poder definir una forma canónica cerrada sobre la variedad para dotar a un par (M, J), variedad - estructura casi compleja, de la noción de variedad Kähler. La pregunta obvia que se puede plantear es ¿cuándo la variedad admitirá una forma canónica cerrada?. Previo a considerar restricciones topológicas sobre cuando una variedad admite una estructura Kähler, comentaremos algunas de sus propiedades más relevantes.

Antes de proseguir, se recomienda leer el Apéndice I para entender de donde salen las estructuras que siguen. Como idea intuitiva, son una generalización de los laplacianos en función de las derivadas exterior y holomorfa/antiholomorfa. Su construcción detallada se puede comprobar en el apéndice, junto a la notación y resultados más relevantes.

Las estructuras básicas definidas a la hora del análisis de formas exhiben comportamientos peculiares en el contexto de las variedades de Kähler. En ocasiones estas propiedades se denominan identidades de Kähler, y sirven incluso para definir este tipo de geometrías en algunos contextos. Para lo que nos atañe, se darán primero las dos identidades básicas y luego una tercera, consecuencia de estas; a mi parecer, su utilidad resaltará mas así.

Las definiciones de los operadores a continuación pueden encontrarse en el Apéndice I; concretamente L 5.11, Λ 5.12, ∂^* 5.5 y $\bar{\partial}^*$ 5.6.

Proposición 3.1. Identidades de Kähler

Sea M una variedad de Kähler, se tienen las siguientes propiedades:[4]

- **Identidades de Kähler I:**

  $[\bar{\partial}, L] = [\partial, L] = [\bar{\partial}^*, \Lambda] = [\partial^*, \Lambda] = 0$

- **Identidades de Kähler II:**

  $[\bar{\partial}^*, L] = i\partial \; [\partial^*, L] = -i\bar{\partial} \; [\bar{\partial}, L] = i\partial^* \; [\partial, L] = -i\bar{\partial}^*$

La demostración de las identidades anteriores, larga pero meramente de computar los conmutadores, puede encontrarse en [8], donde se define un operador auxiliar d^c para simplificar los cálculos.

En el contexto de las geometrías de Kähler algunos conceptos heredados de las variedades holomorfas, con gran importancia en general en el estudio de variedades diferenciales, se restringen aún más. Un ejemplo claro es el caso del laplaciano.

Proposición 3.2. Laplacianos sobre variedades de Kähler

Sea M una variedad de Kähler, se verifica:

- **Identidad de Kähler III:** $\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}$

- $\mathcal{H}^n(M) = \bigoplus_{r+s=n} \mathcal{H}^{r,s}(M)$:

  Donde se tienen los operadores operadores Δ_d laplaciano de Hodge 5.4, Δ_∂ laplaciano holomorfo 5.7 y $\Delta_{\bar{\partial}}$ laplaciano antiholomorfo 5.8. Y los espacios $\mathcal{H}^n(M)$ 5.9 y $\mathcal{H}^{r,s}(M)$ 5.10 de formas armónicas.

Demostración:

- $\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}$

  La demostración se reduce a computar las definiciones utilizando las identidades de Kähler

[4]La notación [,] es la típica de conmutadores en álgebra, esto es, [A,B]=AB-BA

previas.

$$
\begin{aligned}
\Delta_\partial &= \partial^*\partial + \partial\partial^* \\
&= i[\Lambda, \bar{\partial}]\partial + i\partial[\Lambda, \bar{\partial}] \\
&= i\left(\Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}[\Lambda, \partial] - \bar{\partial}\partial\Lambda\right) + [\partial, \Lambda]\bar{\partial} + \Lambda\partial\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda = \Delta_{\bar{\partial}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_d &= \left(\partial + \bar{\partial}\right)\left(\partial^* + \bar{\partial}^*\right) + \left(\partial^* + \bar{\partial}^*\right)\left(\partial + \bar{\partial}\right) \\
&= \Delta_\partial + \Delta_{\bar{\partial}} + \partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial + \partial\bar{\partial}^* \bar{+} \bar{\partial}^*\partial \\
&= \Delta_\partial + \Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_\partial
\end{aligned}
$$

de donde se sigue el resultado inicial.

- $\mathcal{H}^n(M) = \bigoplus_{r+s=n} \mathcal{H}^{r,s}(M)$:

  Dado el resultado anterior, se tiene automáticamente que cualquier r-forma armónica también será armónica respecto al laplaciano holomorfo o antiholomorfo y viceversa. Podemos entonces caracterizar el grado de una n-forma, vista la variedad como real, con una (r,s)-forma tal que $r+s=n$, por la construcción en de esta manera queda claro que cualquier n-forma armónica respecto a d puede verse como una (r,s)-forma armónica respecto a ∂ y $\bar{\partial}$ y viceversa, de donde se siguen los resultados:

$$
\begin{aligned}
& r+s=n\ ,\ \alpha \in \mathcal{H}^{r,s}(M) \Rightarrow \alpha \in \mathcal{H}^n(M) \Rightarrow \\
& \mathcal{H}^{r,s}(M) \subset \mathcal{H}^n(M)\ \forall r,s \in \mathbb{N} \mid r+s=n \Rightarrow \\
& \alpha \in \mathcal{H}^n(M) \Rightarrow \exists r,s \in \mathbb{N} \mid \alpha \in \mathcal{H}^{r,s} \text{ y } r+s=n \\
& \text{Por lo que } \mathcal{H}^n \subset \bigoplus_{r+s=n} \mathcal{H}^{r,s}
\end{aligned}
$$

  De donde se obtiene la igualdad:

$$
\mathcal{H}^n = \bigoplus_{r+s=n} \mathcal{H}^{r,s}
$$

En la proposición anterior se percibe lo restrictivo que es exigir a la variedad el poder dotarla de una métrica de Kähler, donde se observa como condición necesaria que toda función armónica respecto a la derivada exterior lo sea también respecto a las holomorfa y antiholomorfa y viceversa, resultado muy poco trivial en el ámbito del análisis.

Definición 3.2. Potencial de Kähler. Función plurisubarmónica.

Sea M una variedad compleja, ω su forma canónica asociada. Sea ρ una función tal que verifique:[5]

$$\rho : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \rho \in \mathcal{C}^{\infty} \qquad J\left(\partial\bar{\partial}\rho\right) - \omega \text{ Es una forma positiva}$$

Entonces ρ se dirá plurisubharmónica. El caso en que se verifique la igualdad, esto es $I\left(\partial\bar{\partial}\,\rho\right) = \omega$, entonces se dirá que ρ es un **potencial de Kähler**.

Los potenciales de Kähler no siempre pueden ser definidos de forma global. Sin embargo sirven como caracterización de ciertas propiedades, sobre todo derivadas de la teoría de Hodge y sobre variedades compactas. Por ejemplo, se puede demostrar que todos los posibles potenciales de Kähler sobre una variedad pueden verse como un espacio topológico, y mas aún, este es contráctil[6]. A través de propiedades como ésta y por medio de la definición de clases de Kähler, que no abordaremos en esta memoria, permiten estudiar las posibles métricas de Kähler definibles sobre algunos tipos de variedades y, con ello, dar resultados de existencia de métricas Kähler en algunos casos.

Por desgracia, al igual que se mencionaba en el ejemplo de las esferas y dotarlas de una estructura de variedad compleja, no hay tampoco criterios claros sobre cuándo una variedad compleja puede dotarse de una estructura de variedad de Kähler, de modo que la clasificación de las variedad no de Kähler[7] es una cuestión muy complicada. Tanto a la hora de utilizar variedades con utilidad en física como por simplicidad, dado que las caracterizaciones son mucho menos vagas y las condiciones son mucho más fuertes, en general se estudiarán sobre variedades de Kähler compactas, esto es, cuyo espacio topológico subyacente es compacto.[8]

3.2. Caracterizaciones de las variedades de Kähler compactas

Las caracterizaciones de las geometrías de Kähler, a pesar de simplificarse sobre variedades compactas, siguen utilizando herramientas bastante profundas provenientes de la geometría algebraica y diferencial, como pueden ser la holonomía y la teoría de Hodge. A lo largo de esta sección se darán condiciones que, inevitablemente, utilizan de estos conocimientos. Por simplicidad, solo se darán nociones intuitivas en algunos aspectos. Una descripción, si bien muy dirigida hacia las variedades de Kähler, más formal,

[5] Se entiende por forma positiva a toda $f \in \bigwedge^{1,1}$ verificando $\forall v \in TM \quad f(v, J(v)) \geq 0$

[6] Se recuerda, un espacio topológico contráctil puede verse como aquel homótopo a un único punto.

[7] Se entiende una variedad es no de Kähler cuando, previo a asociársele estructuras que deban definir la forma canónica, entiéndase, la estructura casi compleja y el producto interno, la variedad no admite ninguna métrica de Kähler.

[8] Se recuerda que, inicialmente, solo se exigía la II-Numerabilidad

podrá encontrarse en los apéndices.

El principal resultado que permite estudiar invariantes topológicos en este contexto es el teorema de descomposición de Hodge.

Teorema 3.1. Teorema de descomposición de Hodge

Sea (M, g) una variedad compleja compacta dotada de una métrica hermítica. Se tienen las siguientes descomposiciones:

- $\bigwedge^{p,q}(M) = \partial \bigwedge^{p-1,q}(M) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\partial} \oplus \partial^* \bigwedge^{p+1,q}(M)$
- $\bigwedge^{p,q}(M) = \bar{\partial} \bigwedge^{p,q-1}(M) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}} \oplus \bar{\partial}^* \bigwedge^{p,q+1}(M)$

Del teorema anterior se obtiene otro resultado central:

Corolario 3.1.1. Descomposición de Hodge

Sea (M, g) una variedad compleja compacta dotada de una métrica hermítica. La proyección canónica:

$$\pi : \ \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M, g) \longrightarrow H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$$

es un isomorfismo. Donde se ha denotado $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ al grupo de cohomología de Dolbeault 6.4. Y por tanto, ambas estructuras son isomorfas vistas como espacios vectoriales.

Demostración:

> Las demostraciones son largas y requieren de ciertos resultados auxiliares, por lo que se opta por no explicitarlas en esta memoria, al ser más relativa a teoría de Hodge que a variedades de Kähler. Puede encontrarse como la Proposición 4.2.9 en [12].

El segundo de estos resultados permite relacionar las funciones armónicas con los grupos de cohomología, dando pie a relacionar los espectros de los laplacianos con ciertas propiedades topológicas.

Repitiendo los resultados anteriores para la derivada exterior de forma completamente análoga, se tiene:

$$\mathcal{H}^p \cong H^p_{d.R.}(M) \ .$$

Siendo $H_{pd.R.}(M)$ el grupo de cohomología de de Rham 6.3. Se ha obtenido utilizando la descomposición del espectro de funciones armónicas del laplaciano Δ_d respecto a los espectros de $\Delta_{\bar{\partial}}$ yΔ_{∂} se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.2. Teorema de Hodge

Sea M una variedad de Kähler compacta, se verifica.

$$H^k_{d.R.}(M) \cong \mathcal{H}^k(M) \cong \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(M) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$$

El Teorema de Hodge constituye un resultado central en la caracterización de las variedades de Kähler. De la descomposición dada por este teorema se obtienen los principales invariantes topológicos. Previo a esto, daremos una propiedad que verifican los números de Hodge sobre las variedades de Kähler.

Proposición 3.3. Simetría de Hodge

Sea M una variedad de Kähler compacta, se verifica:

$$h^{p,q} = h^{q,p}$$

Siendo $h^{p,q}$ los números de Hodge 6.5 relativos a M.

Demostración:

Dado que se verifica la propiedad $\Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}}$, y trivialmente, $\mathcal{H}^{\bar{p},q} = \mathcal{H}^{q,p}$, se tiene automáticamente que, en una variedad de Kähler: [9]

$$\mathcal{H}^{p,q} = \mathcal{H}^{\bar{p},q} = \mathcal{H}^{q,p} \implies H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) = H^{q,p}_{\bar{\partial}}(M)$$

De donde se sigue el resultado.

La simetría anterior sobre los números de Hodge, junto a la descomposición dada por el Teorema de Hodge, da lugar a las siguientes propiedades.

Proposición 3.4. Invariantes topológicos sobre variedades de Kähler compactas.

Sea M una variedad de Kähler compacta n-dimensional, $m \in \mathbb{N}$. Denotando $b_m \equiv b_m(M)$ al m-ésimo número de Betti 6.2 de la variedad topológica subyacente a la variedad M y $h^{p,q} \equiv h^{p,q}(M)$, se verifica:

- $b_m = \sum_{p+q=m} h^{p,q}$
- Todos los números de Betti pares son estrictamente positivos, $b_{2m} > 0 \ \forall\ 2m < n$.
- Todos los números de Betti impares son pares, $b_{2m+1} \in 2\mathbb{N}$.

[9]Denotando por $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ al grupo de cohomología asociado a la aplicación ∂, definido intuitivamente aquí.

- $h^{1,0}$ es un invariante topológico.
- $h^{p,p} > 0 \ \forall \ 0 \leq p \leq n$

Demostración:

- $b_m = \sum\limits_{p+q=m} h^{p,q}$:
  Inmediato por el isomorfismo dado por el teorema de Hodge:

$$H^k_{d.R.}(M) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$$

- $b_{2m+1} \in 2\mathbb{N}$

  Usando la simetría de los números de Hodge sobre variedades de Kähler y la primera propiedad se tiene:

$$b_{2m+1} = \sum_{p+q=2m+1} h^{p,q} = 2 \sum_{0 \leq p \leq m} h^{p,2m+1-p} \in 2\mathbb{N}$$

- $h^{1,0}$ es invariante topológico:

  Usando la primera propiedad y la simetría de los números de Hodge en las variedades de Kähler se tiene $2h^{1,0} = b_1$. Por ser los números de Betti invariantes topológicos se tiene el resultado.

- $h^{p,p} > 0 \ \forall \ 0 \leq p \leq n$:

  Sea ω la forma canónica. $\omega \in \bigwedge^{1,1}(M) \Rightarrow \omega^p \in \bigwedge^{p,p}(M)$. Al ser cerrada, por ser M de Kähler, se tiene $d\omega = 0 \Rightarrow d\omega^l = 0 \Rightarrow \bar{\partial}\omega^l = 0 \Rightarrow \omega^l \in H^{l,l}_{\bar{\partial}}$. Ahora bien, podría ocurrir que $[\omega^l] = [0]$, equivalentemente, $\omega = \bar{\partial}\beta$ con $\beta \in \bigwedge^{l,l-1}(M)$. Supongamos que esto ocurre.
  Entonces $\omega^n = \omega^l \wedge \omega^{n-l} = \bar{\partial}\left(\beta \wedge \omega^{n-l}\right) \Rightarrow [\omega^n] = [0] \in H^{n,n}_{\bar{\partial}}$. Sin embargo, esta forma es armónica según el laplaciano de la derivada exterior, por lo que $[w^n] \neq [0] \in H^{2n}_{d.R.}(\mathbb{C}) \cong H^{n,n}_{\bar{\partial}}$. Por ser isomorfos, la proyección de una en otra no puede no ser inyectiva, y por tanto llegamos a un absurdo. Por lo que $\nexists \beta$ tal que $\omega^l = \bar{\partial}\beta \Rightarrow h^{l,l} > 0$.

- $b_{2m} > 0 \ \forall \ 2m < n$:

  A partir de la primera y segunda propiedad se tiene:

$$b_{2m} = \sum_{p+q=2m} h^{p,q} = 2 \sum_{0 \leq p < m} h^{p,2m-p} + h^{m,m} \ ; \ h^{m,m} > 0 \Rightarrow b_{2m} > 0$$

Las cuatro propiedades anteriores presentan grandes restricciones topológicas a la hora de que una variedad pueda ser dotada de una estructura de Kähler.

Ejemplo 3.3. Imposibilidad de variedades de Kähler sobre algunas figuras geométricas conocidas.

Tomemos algunas figuras típicas y estudiemos si pueden ser dotadas de estructuras de Kähler.

- **La circunferencia,** S^1:

  S^1 es una variedad 1-dimensional, por lo que solo presenta dos números de Betti. Concretamente $b_0 = 1$ y $b_1 = 1$. $b_1 \notin 2\mathbb{N}$, por lo que no puede ser dotado de una métrica de Kähler.[10]

- **El disco,** D^2:

  Fácilmente en el caso del disco bidimensional se tiene que $b_0 = 1$ y $b_1 = 1$, por lo que tampoco puede ser dotado de estructura de variedad de Kähler.

- **La esfera,** S^2:

  En el caso de la esfera, que sí sabemos que podemos dotar de una estructura compleja, se tiene que $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ y $b_2 = 0$, por lo que no podemos afirmar, con los criterios topológicos de que se dispone, si podemos dotarla de una métrica de Kähler.

- **La botella de Klein**:

  El caso de la botella de Klein es parecido al de S^1. Sin embargo, dado que no hemos dado ningún resultado referido a si podemos o no dotarla de una estructura compleja, podemos hacer el análisis de si pudiéramos darle una métrica de Kähler. Los números de Betti serían $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. De nuevo por ser b_1 impar se tiene que no podemos dotarla de estructura de variedad de Kähler.

- **Plano con** n **agujeros**:

  Un caso interesante es pensar en un plano al que le quitamos una cantidad n de agujeros cuya intersección es vacía. Inicialmente podremos dotarlo de estructura de variedad de Kähler. Sin embargo, tras el primer corte, dejaremos de poder hacerlo. Según estos criterios, si abrimos un segundo hueco, o en general, un número par de huecos, podríamos quizás construir una métrica de Kähler, sin asegurar tampoco su existencia, pero no negándolo.

El último de los casos revela una deficiencia clara a la hora de negar la posibilidad de construir variedades de Kähler incluso en casos sencillos. Existen criterios mucho más fuertes, por medio de aplicaciones

[10] El caso de S^1 es trivial, pues ya se comentó que no puede siquiera ser dotado de estructura casi compleja.

que dejan invariantes los números de Hodge o limitando las características de las variedades, por ejemplo, sus dimensiones. Desafortunadamente, por limitaciones tanto de longitud del trabajo como matemáticas, no podremos dar caracterizaciones más fuertes.

3.3. Algunas variedades Kähler

Anteriormente hemos visto ejemplos de espacios dotados con la estructura de variedad de Kähler. A continuación se presentan dos ejemplos muy relevantes de este tipo de geometrías y un breve análisis.

3.3.1. Variedades de Calabi-Yau

3.3.1.1. Motivación

Las variedades de Calabi-Yau son uno de los tipos de variedades de Kähler con mayor relevancia en ámbitos mas allá de las matemáticas. Su uso fundamental, como fue mencionado en la introducción, es en física teórica, dónde explican la geometría de las dimensiones mas allá de las 4 observables usualmente en teorías de supercuerdas y supersimétricas.

Dando una noción mas explicita, como ya fue mencionado al inicio del trabajo, la teoría de cuerdas exige la existencia de 10 dimensiones, típicamente factorizadas como $\mathbb{R}^{1,4} \times K_3$, dónde $\mathbb{R}^{1,4}$ hace referencia al espacio de Minkowski y K_3, aunque no se ahondará en la notación actualmente, hace referencia a 6 dimensiones que toman forma en una variedad compleja compacta 3-dimensional. Bajo la exigencia de que esta variedad sirva como solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío y preserven supersimetría minimal[11] dan lugar a que el tipo de variedad que describa estas dimensiones sea una de Calabi-Yau. Matemáticamente, la condición de que resuelva las ecuaciones de Einstein puede verse como que el escalar de curvatura de Ricci 5.15 se anule, lo que, en el contexto de las geometrías de Kähler compactas, dará lugar a invariantes topológicos.

Existen multitud de definiciones equivalentes para las variedades de Calabi-Yau, aunque se presentarán estas definiciones como lema, al intersecar muchos ámbitos distintos que no han sido tratados con su debido formalismo en esta memoria (cohomología, grupos de estructura,...). Solo se ahondará en una de las definiciones para su estudio e intuición, la más sencilla, aunque por ende, la que menos sustancia

[11] La supersimetría completa de la teoría permite la existencia de partículas que no encajan con las observaciones a bajas energías, en el mundo que nos rodea. Para que esta sea una teoría consistente con las observaciones, ha de exigirse que se preserve únicamente la supersimetría “mínima”, dando lugar a la fenomenología de partículas que conocemos.

tiene en un estudio formal, siguiendo además con la idea que se mantiene desde el inicio de construir objetos cada vez mas complejos añadiendo aplicaciones sobre estos.

Definición 3.3. Variedad de Calabi-Yau

Sea M una variedad de Kähler compacta conexa n-dimensional, sea $\mathcal{B} \equiv \{U_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento extraído de las cartas que conforman el atlas de M. Dada una carta $(U, \phi = (z^i, \bar{z}^i)_{i=1}^n)$, podemos definir una $(n, 0)$-forma sobre un abierto:

$$\Omega\big|_U = \Omega_{i_1 \dots i_n}(z) \wedge_{j=1}^n dz^{i_j}$$

donde, $\Omega_{i_1 \dots i_n}$ son holomorfas. En caso de que exista Ω, tal que $\Omega\big|_U \neq 0 \ \forall U \in \mathcal{B}$, entonces la variedad se dirá **de Calabi-Yau**, típicamente denotada por CY.

Dicho de otra forma, una variedad se dirá de Calabi-Yau si existe una $(n, 0)$-forma holomorfa que no se anule en ningún punto de la variedad, siendo n la dimensión de la variedad.

Por si son de utilidad para la mejor comprensión de estas variedades, a continuación se muestran, sin explicación más allá de la definición pura y sin demostración de la equivalencia, definiciones alternativas de estas variedades:

Lema 3.2. Definiciones alternativas para variedades de Calabi-Yau

Sea M una variedad de Kähler n-dimensional compacta, son equivalentes:

- El grupo de estructura del fibrado tangente de M puede ser reducido de $U(n)$ a $SU(n)$.
- M tiene definida una métrica Kähler sobre ella cuya holonomía global esta contenida en $SU(n)$
- M posee una n-forma holomorfa que no se anula en ningún punto de la variedad.
- El fibrado canónico de M es el trivial.

En caso de verificarse alguna de las propiedades anteriores, la variedad se dirá de Calabi-Yau.

3.3.1.2. Propiedades de las CY

A continuación mencionaremos algunas de las propiedades más sencillas que verifican las variedades CY. Tanto estas variedades como sus propiedades precisan de matemáticas mucho más avanzadas que las presentadas en esta memoria, por lo que solo se darán nociones básicas cuya demostración sea asequible. Primero se incidirá en la repercusión principal de la existencia de la forma Ω y luego se propondrá la formulación histórica de las variedades de Calabi-Yau.

Previo a esto, necesitaremos un resultado auxiliar proveniente del análisis complejo.

Lema 3.3. Funciones holomorfas sobre variedades compactas.
Sea M una variedad compacta, sea f una función holomorfa sobre todo M. f será una función constante.
Demostración:

Por ser f holomorfa, la aplicación módulo de f, $|f| : M \to \mathbb{R}$ es continua. Por ser M compacta, $|f|(M) \subset \mathbb{R}$ es un compacto, por lo que $|f|$ presenta un máximo sobre M en cierto punto $p \in M$. Dado que el atlas de la variedad, A, forma un recubrimiento abierto, se tiene que $\exists (U, \phi) \in A$ con $p \in U$. Por ser f holomorfa sobre U y aplicando el principio del módulo máximo se tiene que $f(x) = \lambda \ \ \forall x \in U$. Por ser M conexa, podemos aplicar prolongación analítica, de donde se obtiene $f = \lambda$.

Proposición 3.5. Propiedades de la forma Ω

- **Clasificación de la forma Ω:**
  La forma Ω es cerrada, co-cerrada, y armónica.
- **Unicidad de la forma Ω:**
  La forma Ω es única salvo proporcionalidad

Demostración:

- **Clasificación de la forma Ω:**
  Partiendo la hipótesis de que la variedad es Kähler, se tiene por tanto que es compleja y posee una estructura casi compleja integrable, por lo que $d = \partial + \bar{\partial}$. Dado que Ω es holomorfa, se tiene $\bar{\partial}\Omega = 0$. Dado que es una n-forma, $\partial\Omega$ tendría primer grado $n + 1$ y por el Corolario 2.2.1 se tiene que $\partial\Omega = 0$, con lo que $d\Omega$=0, es decir, Ω es cerrada. De la misma forma, es co-cerrada [12], y por ser ambas, dado que $\Delta_d = dd^* + d^*d$, se tiene que $\Delta_d\Omega = 0$, es decir, Ω es armónica.
- **Unicidad de la forma Ω:**
  Sea $\tilde{\Omega}$ otra $(n, 0)$-forma que no se anula en ningún punto de la variedad distinta de Ω. Por

[12] Puede encontrarse esta definición según el operador estrella de Hodge en el Apéndice I.

construcción se verifica:

$$\exists f \text{ holomorfa } \mid \tilde{\Omega}(z) = f(z)\Omega(z) \quad \forall z \in M$$

Sin embargo, por el lema anterior, las únicas funciones holomorfas sobre toda la variedad, si la variedad es compleja, compacta y conexa son las constantes, por lo que se tiene $\tilde{\Omega} = \lambda\Omega$ $\lambda \in \mathbb{C}$.

Las variedades de Calabi-Yau presentan una invariancia topológica que las define dentro de las geometrías de Kähler, su primera clase de Chern se anula. Si bien esta caracterización es importante, la definición de las clases de Chern requiere de un arduo camino. En este trabajo, y uniendo con la motivación inicial de este tipo de variedades, daremos una noción completamente equivalente a esta caracterización pero mucho mas simple. En este contexto se tiene el resultado que, históricamente, ilustró la definición de las variedades de Calabi-Yau:

Proposición 3.6. Relación entre CY y el tensor de Ricci.
Sea M una variedad de Kähler, son equivalentes:

- M es una variedad de Calabi-Yau
- El tensor de Ricci, definido en 5.15, es constante según la derivada exterior.

Demostración:

- **CY $\Rightarrow$ Ricci plano :**
  Sea M una variedad de Calabi-Yau, por definición existe una $(n,0)$-forma Ω que no se anula en ningún punto; se tiene entonces que podemos definir la función:

  $$||\Omega||^2 \equiv \frac{1}{n!} g^{a_1\bar{b}_1}...g^{a_n\bar{b}_n}\Omega_{a_1...a_n}(z)\bar{\Omega}_{\bar{b}_1...\bar{b}_n}(\bar{z})$$

  que es una función real positiva, dado que $\Omega_{a_1...a_n}$ es holomorfa. Por la caracterización de las formas dada por la Definición de formas diferenciales, es antisimétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos índices. Por otro lado, contiene tantos índices distintos como la dimensión de la variedad (es maximal). Debe entonces ser igual, salvo por una función holomorfa, al símbolo de Levi-Civita con la función, que llamaremos f, no pudiendo anularse en ningún punto según la definición de Ω. Incluyendo esto en la definición de la primera función y utilizando la definición del tensor de Ricci se tiene:

$$||\Omega||^2 = \frac{|f|^2}{\sqrt{g}} \;\rightarrow\; \sqrt{g} = \frac{|f|^2}{||\Omega||^2} \;\rightarrow\; \mathcal{R} = -J \cdot \left[\partial\bar{\partial}\, ln\left(||\Omega||^2\right)\right]$$

De donde se obtiene que $\mathcal{R} = 0$, por ser la derivada antiholomorfa de una función holomorfa.

- **Ricci plano $\Rightarrow$ CY**:

  Hay dos caminos para probar esta implicación. Sin embargo no se detallarán al salirse de los conceptos que se presentan en esta memoria. La primera atraviesa conceptos de holonomía. El hecho de que la variedad sea Kähler restringe su grupo de holonomía a $U(n) \subset SO(n)$. La condición de que la curvatura de Ricci se anule lleva a que el grupo de holonomía sea $SU(n)$. Esto, junto al principio de holonomía, fuerza a que exista una forma de bigrado $(n, 0)$ que no se anule en ningún punto.

  La otra versión atraviesa invariantes topológicos, y demuestra que la curvatura de Ricci nula implica que la primera clase de Chern se anula, lo que a su vez implica que la variedad es de Calabi-Yau. Los detalles se pueden encontrar en [13].

El resultado anterior fue, de hecho, la definición que se dio en su momento de este tipo de variedades. Sin embargo, su uso tan intensivo en física ha llevado a que incluso se tengan definiciones no equivalentes por distintos autores, en función de las propiedades de la métrica, de su holonomía, propiedades de su fibrado tangente. Incluso en algunas referencias[13] se definen tratando de generalizar estas propiedades a variedades no compactas, como es el caso en que se exige $\Omega \wedge \bar{\Omega} \xrightarrow{asintóticamente} \frac{\omega^n}{n!}$ como condición sobre variedades no necesariamente compactas. Como se mencionó anteriormente, se preferirá no ahondar en estos farragosos terrenos.

3.3.1.3. Ejemplos de variedades de Calabi-Yau

Para ilustrar la existencia, la *apariencia* y el uso de estas variedades, se proponen a continuación dos ejemplos.

Ejemplo 3.4. El toroide. CY_1

[13] Más información sobre la extensión a variedades no compactas puede encontrarse en [21].

Sea M una variedad compleja de dimensión 1, automáticamente la forma canónica será cerrada, ya que $\omega \in \bigwedge^{1,1}(M) \Rightarrow d\omega = 0$, por lo que será una variedad de Kähler. Consideremos que la variedad es compacta. Sea la curva de variable x definida por:

$$y^2(x) = x^3 + ax + b \quad x \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

De esta forma podemos construir una 1-forma que no se anula en ningún punto de la variedad Ω mediante:

$$\Omega = \frac{1}{y(x)} dx$$

Los cálculos que demuestran que no se hace cero para ningún punto en la variedad pueden encontrarse en [22]. De esta manera, dotamos a la variedad de una estructura de CY.

Ejemplo 3.5. El quíntico. CY_3

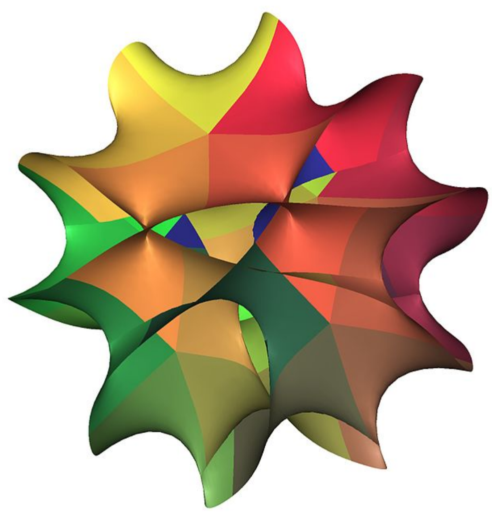

Figura 3.1: Ejemplo de sección bidimensional de un CY_3.[2]

Considérese $\mathbb{C}^5$ con su estructura trivial como variedad y la ecuación definida por las coordenadas canónicas z_1, z_2, z_3, z_4, f:

$$z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + f^5 = 0 \quad z_1, z_2, z_3, z_4, f \in \mathbb{C}$$

Dado el marco anterior, proyectemos entonces esta ecuación sobre el espacio proyectivo P^4 sobre el que ya hemos trabajado. En este contexto, una de las coordenadas se pierde. Por comodidad tomaremos a f como la coordenada que eliminamos en la proyección, de esta forma obtendríamos unas coordenadas $\alpha_{i=1}^4 \mid \alpha_i = z_i/f$ y la ecuación podría verse como:

$$\alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \alpha_3^5 + \alpha_4^5 = -1 \ ,$$

quedan entonces solo 3 coordenadas complejas, sobre el espacio proyectivo, independientes, y por tanto la hipersuperficie que da lugar a la solución de esta ecuación será de dimensión 3.

No se entrará en detalles sobre las comprobaciones pero la variedad generada por la ecuación anterior es claramente compacta[14] y admite una (3,0)-forma holomorfa como sigue:

$$\Omega = \frac{1}{\alpha_4^4} \ \wedge_{i=1}^3 d\alpha_i$$

que puede ser definida globalmente y nunca se anula, por lo que es, efectivamente, una variedad de Calabi-Yau.

En términos generales, cualquier polinomio de grado 5 igualado a 0, con expresión general:

$$\sum_{i,j,k,l,m} C_{ijklm} z_i z_j z_k z_l z_m = 0$$

define de hecho una variedad de Calabi-Yau.

3.3.2. Variedades Hiperkähler

Uno de los tipos de variedades de Kähler importante y, quizás, intuitivamente construibles, son las variedades Hiperkähler. El salto de las variedades de Kähler a las hiperkähler es, de hecho, muy análogo al del cuerpo de los complejos para generar el cuerpo no conmutativo de los cuaterniones.

3.3.2.1. Motivación

De nuevo, las aplicaciones de este tipo de variedades aparecen en la física teórica. Las soluciones no singulares a las ecuaciones de Einsten en el vacío[15], con una métrica definida positiva, se conocen

[14] Dada la topología usual sobre $\mathbb{C}$, Hausdorff, la preimagen de cualquier conjunto compacto de una aplicación $f : A \to \mathbb{C}$ será compacto, al serlo el -1 por ser unipuntual, y ser los polinomios continuos, la variedad que da solución a la ecuación será compacta

[15] Las ecuaciones de Einstein devuelven, en base al contenido material y energético del sistema, la geometría del espacio tiempo.

como instantones gravitatorios. Estos instantones son descritos por una variedad real 4-dimensional de ciertas características. Sin embargo, sus propiedades permiten extender esta variedad al caso complejo, donde estas soluciones toman la forma de una variedad Hyperkähler.

Definición 3.4. Variedades Hiperkähler

Sea H una variedad dotada de tres estructuras casi complejas I , J , K diferentes, verificando las identidad de los cuaterniones, esto es, verificando:

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -Id$$

Si la métrica es compatible respecto a cada una de ellas, y la forma canónica construida respecto a cada una de estas estructuras es cerrada, entonces la variedad se dirá **variedad Hiperkähler**.

Las variedades Hiperkähler pueden verse como una variedad H dotada de estructuras casi complejas que se comportan como las unidades imaginarias de los cuaterniones y que cada uno de los pares (H, I) , (H, J) , (H, K) tienen estructura de variedades de Kähler.

En analogía al estudio hecho para las Calabi-Yau se proponen a continuación, sin mostrar la equivalencia ni dar detalles, otras definiciones válidas, desde otro punto de vista, para las variedades Hyperkähler.

Lema 3.4. Definiciones alternativas para variedades Hyperkähler

Sea M una variedad de Kähler $2k$-dimensional compacta, son equivalentes:

- M tiene definida una métrica Kähler sobre ella cuya holonomía global esta contenida en $Sp(k)$[16].
- M posee tres estructuras casi complejas que verifican las condiciones dadas en la definición anterior de variedad Hyperkähler.

3.3.2.2. Propiedades de las variedades Hyperkähler

Basándonos en el ejemplo anterior y para comprender aún mas la profundidad de las variedades de Calabi-Yau, se presenta como primera propiedad de las variedades Hyperkähler la siguiente:

[16] $Sp(k)$ denota al grupo simpléctico

Proposición 3.7. Variedades Hyperkäher y Calabi-Yau.

Las variedades Hyperkähler son también variedades de Calabi-Yau.

Demostración:

> Sea M una variedad Hyperkähler de dimensión real n cuyas estructuras casi complejas asociadas son I,J y K, sean ω_I, ω_J y ω_K sus formas canónicas asociadas.

La demostración es trivial, aunque cruza, como la mayor parte de estudios sobre las Hyperkähler, la noción de holonomía. En este caso se tiene inmediato el resultado dado que $Sp(k) \subset SU(2k)$, y por la caracterización dada en el Lema 3.3, se tiene el resultado.

Existe una clasificación dada por Federigo Enriques y Kunihiko Kodaira conocida como clasificación de Enriques-Kodaira que separa las superficies complejas compactas en diez clases. Estas clases presentan en muchos casos propiedades similares y, bajo los criterios de la clasificación, existen invariantes por clase, como son los números de Hodge.[17] En el caso de las variedades Hyperkähler clasifica toda posible variedad compleja compacta de dimensión compleja dos vista como variedad Hyperkähler como equivalente a una superficie tipo K3[18] o a un toroide de dimensión real cuatro.

3.3.2.3. Ejemplos de variedades Hyperkähler

Si bien las 3 estructuras complejas deben poder ser definidas viendo la variedad como una variedad real $4n$-dimensional, en general se trabaja con la noción de estas variedades que procede de la holonomía, pero que no es tratada en esta memoria. Por esto, a continuación se propone un ejemplo que, si bien trivial, permite ver la construcción sin necesidad de utilizar holonomía.

Ejemplo 3.6. Variedad Hyperkähler trivial sobre $\mathbb{R}^4$

Consideremos $\mathbb{R}^4$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Podemos establecer cuatro endomorfismos que funcionan como las unidades imaginarias de los cuaterniones mediante las matrices:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando como tensor métrico la matriz identidad, es decir, suponiendo la métrica euclídea, tendremos

[17] Mas información sobre esta clasificación puede encontrarse en [23].

[18] Las superficies K3 son variedades compactas conexas de dimensión compleja dos que verifican ciertas propiedades.

una estructura de variedad real caracterizada por una única carta. El sistema de coordenadas asociado será $\phi = (t, x, y, z)$. En este contexto, las tres estructuras son integrables, ya que son constantes y las derivadas antiholomorfa y holomorfa son lineales.

Aplicando el teorema de Newlander Niremberg, podemos ver esta variedad como una variedad compleja 2-dimensional. Obteniendo las formas canónicas asociadas a cada estructura casi compleja:

$$\omega_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, todas son cerradas por ser constantes, por lo que la variedad compleja asociada a esta variedad es una variedad Hyperkähler.

Capítulo 4

Conclusiones

Para terminar, hagamos un breve resumen de la teoría discutida resaltando los resultados con mayor relevancia.

Hemos comenzado definiendo el concepto de variedad y, en base a las propiedades de las cartas, hemos dado las nociones de variedad real y variedad compleja. Tras esto, hemos construido una estructura vectorial sobre las variedades reales (espacio y fibrado tangentes) y una estructura algebraica (álgebras tensorial y exterior). A través de estas estructuras hemos generalizado nociones, como la de derivada, al terreno de las variedades.

Tras estudiar estas estructuras en el ámbito real, hemos complexificado las variedades reales por medio de un endomorfismo, la estructura casi compleja. Para ello hemos dado las condiciones necesarias y suficientes para ver una variedad real como una compleja y viceversa, mediante el teorema de Newlander & Niremberg.

En el capítulo 2 hemos definido las variedades de Kähler, deduciendo varias propiedades exóticas relativas a operadores sobre el álgebra exterior. Gracias a la relación entre los laplacianos según las derivadas exterior, holomorfa y antiholomorfa, hemos establecido una descomposición del grupo de homología en base a los grupos de cohomología de Dolbeault sobre las variedades de Kähler. Esta descomposición llevó a obtener ciertas condiciones necesarias para que un espacio topológico pueda ser dotado de un estructura de variedad de Kähler, dadas en base a invariantes topológicos, los números de Betti.

Posteriormente, en el capítulo 3, hemos hecho un ligero estudio sobre unas variedades de Kähler específicas, las variedades de Calabi-Yau, tratando de ilustrar su uso en física teórica y entendiendo cómo éste puede relacionarse con invariantes topológicos, como la primera clase de Chern. A pesar del interés de las clases de Chern como invariantes topológicos, por la complejidad y el espacio que requerirían, no se ha podido dar formalidad sobre este tema.Para terminar hemos dado la noción de variedades Hyperkähler, con una breve y casi dogmática introducción a sus propiedades, ya que son variedades que típicamente se estudian desde el punto de vista de la holonomía.

Como conclusión, las variedades de Kähler son geometrías muy ricas dentro de las geometrías complejas. Exhiben propiedades bastante inusuales que nos permiten relacionar el espacio topológico subyacente a la variedad con diferentes aspectos del álgebra externa. Y, dentro de su clasificación, existen variedades que sirven como sustento para teorías físicas muy avanzadas.

Bibliografía

[1] Ilka Agricola, Giovanni Bazzoni, Oliver Goertsches, Panagiotis Konstantis, and Sönke Rollenske. *On the history of the Hopf problem.* 57:1–9, Apr 2018. URL: `https://doi.org/10.1016%2Fj.difgeo.2017.10.014`, `doi:10.1016/j.difgeo.2017.10.014`.

[2] Andrew J. Hanson. Calabiyau5, 2014. [Online; accessed May, 2022]. URL: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CalabiYau5.jpg`.

[3] Panagiotis Angelinos. *Hodge theory of compact manifolds.* URL: `https://static1.squarespace.com/static/5a409a83a803bbafedd09784/t/5ab853faf950b75093399ac5/1522029563781/hodge_notes.pdf`.

[4] Various Authors. Hodge star operator, June 2021. URL: `https://ncatlab.org/nlab/show/Hodge+star+operator#ComponentExpression`.

[5] Chad Berkich. *Homology, cohomology and the de Rham theorem.* URL: `http://math.uchicago.edu/~may/REU2021/REUPapers/Berkich.pdf`.

[6] Jun Hou Fung. *Serre duality and applications*, Sep 2013. URL: `https://math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Fung.pdf`.

[7] Allen Hatcher. *Algebraic topology. Chapter 2. Homology.* Cambridge University Press, 2002.

[8] Daniel Huybrechts. *Complex geometry: An introduction. Chapter III: Kähler Manifolds.* World Publishing Corporation, 2010.

[9] Kunihiko Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures.* Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[10] Tu Loring W. *An Introduction to Manifolds.* Springer, New York, 2011.

[11] Sean M. Carroll. *Manifolds*, Dec 1997. URL: `https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll2.html`.

[12] Zachary Maddock. *Dolbeault cohomology.* URL: https://ncatlab.org/nlab/files/MaddockDolbeault09.pdf.

[13] Emanuel Malek. *Advanced topics in string and field theory: Complex manifolds and Calabi-Yau manifolds*, Apr 2019. URL: http://www.emanuelmalek.com/Teaching/Complex/Chapter4.pdf.

[14] Mark.Howison. Stereographic projection in 3d, 2007. [Online; accessed January, 2022]. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Esfera_de_Riemann#/media/Archivo:Stereographic_projection_in_3D.png.

[15] University of California Riverside [no Author specified]. *Manifolds with boundary.* URL: https://math.ucr.edu/~res/math260s10/manwithbdy.pdf.

[16] Polytope24. Calabi yau formatted, 2015. [Online; accessed May, 2022]. URL: https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Calabi_yau_formatted.svg.

[17] Joaquín Pérez Muñoz. *Geometría y Topología.* URL: http://www.ugr.es/local/jperez/.

[18] Alexandru Scorpan. *The wild world of 4-manifolds.* American Mathematical Society, 2021.

[19] Andrei Smilga. *Comments on the Newlander-Nirenberg theorem*, 2019. URL: https://arxiv.org/abs/1902.08549, doi:10.48550/ARXIV.1902.08549.

[20] Selim Tawfik. *Deformations of Compact Complex Manifolds.* Université du Québec, Montreal, 2015. URL: https://archipel.uqam.ca/7665/1/M13844.pdf.

[21] Cumrun Vafa. *Calabi-Yau spaces*, simons workshop, 2004. URL: http://insti.physics.sunysb.edu/ITP/conf/simonsworkII/talks/Vafa12345.pdf.

[22] Stefan Vandoren. Lectures on riemannian geometry, part ii: Complex manifolds, Apr 2022. URL: https://webspace.science.uu.nl/~vando101/MRIlectures.pdf.

[23] Chris A. M. Peters Antonius Ven Wolf P. Barth, Klaus Hulek. *Compact complex surfaces.* Springer, 2004.

[24] Robin Zhang. *Poincaré duality.* 2016. URL: http://math.columbia.edu/~rzhang/files/PoincareDuality.pdf.

Capítulo 5

Apéndice I. Profundizando en el álgebra exterior

En la Sección 2.3 construimos una estructura algebraica sobre las variedades, el álgebra exterior, cuyos principales objetos son las formas, su producto exterior asociado, la noción de derivada exterior, etc.

Los objetos principales definidos en esa sección y en las siguientes de la memoria son los necesarios para construir como tal las variedades Kähler y tener unas herramientas mínimas para explorarlas.

En este apéndice se trataran ciertos operadores, propiedades y clasificaciones de las formas más allá de lo estrictamente necesario en la sección 2, con el objetivo de obtener una mayor cantidad de información y dar unas nociones básicas en caso de que se carezca de ellas. Por simplicidad a la hora de refererise a ellas, las ecuaciones mas relevantes serán numeradas, en contraposición al resto de la memoria.

I.I Formas Armónicas y teoría de Hodge

En primer lugar existe un operador de gran relevancia en el estudio de variedades, así como lo es en las ecuaciones diferenciales, el laplaciano. Existe una extensión de la noción del laplaciano, según la derivada exterior, sobre formas. A través y durante su construcción, es posible llegar a condiciones algo restrictivas sobre el que una variedad sea de Kähler. A continuación iremos definiendo los operadores con mayor relevancia para este estudio y dando unas pinceladas sobre sus ideas intuitivas con el fin de poder aplicarlos al estudio de las geometrías de Kähler.

Existe un método para construir una noción de dualidad entre las formas, sabiendo qué, como se mencionó en el Corolario 2.2.1, en toda variedad de dimensión finita, existe un número finito tal que las formas de mayor grado que éste se anulan. De esta manera, podemos establecer una relación entre las formas de cierto grado y las de grado dimensión de la variedad sustrayendo éste, por medio del operador **estrella de Hodge.**

Para definir el operador estrella de Hodge debemos atravesar primero la noción de elemento de volumen.

Antes de proseguir, quisiera clarificar que muchos de los conceptos a continuación presentados tienen muchas definiciones alternativas y equivalentes. Algunas, bastante típicas, son menos exigentes con las hipótesis, como el exigir el ser una variedad real orientable en vez de pedir que admita una estructura de variedad compleja. Se han decidido incluir estas definiciones y proposiciones así con el fin de no densificar el trabajo, ya que, para nuestro objetivo únicamente serán necesarias las nociones aplicables a variedades de Kähler y al restringir estas nociones a variedades con estas propiedades se pueden evitar muchas comprobaciones y conceptos asociados.

Definición 5.1. Elemento o Forma de volumen[1]

Sea M una variedad real de dimensión n admitiendo una estructura de variedad compleja y con una métrica g definida por un tensor de tipo (1,1), g. Dada una carta $(U, \phi = (x_i)_{i=1}^n)$, se define entonces la **forma de volumen asociada a la métrica g en la carta** (U, ϕ) como: [2]

$$vol_g(U) = \sqrt{|g|} \wedge_{i=1}^n dx_i \tag{5.1}$$

La anterior forma está asociada a la idea de volumen sobre las variedades. Se usará vol_g para referirse a la forma de volumen asociada a una métrica independientemente del abierto sobre el que se esté. En estos momentos lo utilizaremos para comprobar una versión formal de la definición del operador estrella de Hodge.

[1] Esta definición puede hacerse también, como otras que se han tomado a lo largo de la memoria, sobre variedades diferenciales reales, sin embargo exigen condiciones que no se han explicado, por lo que se han hecho directamente sobre variedades que admiten una estructura compleja.

[2] La notación $|g|$ hace referencia al determinante del tensor g.

Definición 5.2. Operador estrella de Hodge

Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n, denotando V^* su dual, y sean g una métrica definida en el espacio y vol_g su forma de volumen asociada. Llamaremos operador **estrella de Hodge**, denotado por $\star$, a la aplicación lineal $\star : \bigwedge^k(V) \longrightarrow \bigwedge^{n-k}(V)$ que verifica:

$$\alpha \wedge \star\beta = \mathrm{g}(\alpha, \beta)\ vol_g \quad \forall \alpha, \beta \in \bigwedge^k(V)$$

De nuevo, al igual que ocurría con la derivada exterior y las derivadas holomórfica y antiholomórfica, cometemos un ligero abuso de notación. En este caso, la estrella de Hodge parte del espacio de k-formas y llega al espacio de $(n-k)$-formas. Sin embargo como está bien definida y mantiene las propiedades para todos y cada uno de los espacios, se suele llamar en general $\star$ independientemente del grado de la forma sobre la que actúa.

Proposición 5.1. Existencia, unicidad y cálculo de la estrella de Hodge

En las condiciones de la definición anterior, el operador estrella de Hodge está bien definido, existe, es único, y dada una base determinada, podemos expresar las componentes de la forma resultante como:[3]

$$(\star\beta)_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-k}} = \frac{\sqrt{|g|}}{k!} \beta^{\mu_1 \ldots \mu_k} \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_k \lambda_1 \ldots \lambda_{n-k}} \tag{5.2}$$

La prueba podrá encontrarse detallada en [4], dónde parten de la primera definición y comprueban de forma algo farragosa la existencia y la unicidad, para luego por un proceso algo tedioso obtener las coordenadas de una base de las k-formas al pasar por el operador y con ello construyen las componentes de la imagen de cualquier k-forma.

La estrella de Hodge sirve para generalizar varios conceptos a variedades que antes solo se encontraban en terrenos como el análisis, las ecuaciones diferenciales o la geometría de curvas y superficies en $\mathbb{R}^n$. Esto es un resultado directo de alguna de las propiedades del operador. Por ejemplo, podemos ver al operador estrella de Hodge como una extensión del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 5.1. Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Sea $\mathbb{R}^3$ dotado de estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la métrica usual dada por el producto escalar, y sea $\{e^i\}_{i=1}^3$ la base canónica, podemos computar directamente la estrella de hodge de las siguientes formas:

$$\star(e_1 \wedge e_2) = e_3 \quad \star(e_2 \wedge e_3) = e_1 \quad \star(e_3 \wedge e_1) = e_2$$

[3] Denotando por ϵ al símbolo de Levi-Civita.

De esta forma se observa que, por linealidad, la estrella de Hodge permite extender la noción de producto vectorial sobre $\mathbb{R}^3$

Como ya se comentó, de aplicar la estrella de Hodge dos veces se tendría:

$$\Omega^k(V) \xrightarrow{\star} \Omega^{n-k}(V) \xrightarrow{\star} \Omega^k(V)$$

De ahí el aspecto de dualidad de este operador. Se tiene entonces la siguiente definición:

Definición 5.3. Dual de Hodge
Sea $\alpha \in \Omega^k(V) \ \in \mathbb{N}$, se llamará **dual de Hodge** o simplemente dual en caso de entenderse por el contexto, a la $(n-k)$-forma $\star\alpha$, siendo n la dimensión de V.

El operador estrella de Hodge presenta las siguiente propiedades básicas:

Proposición 5.2. Propiedades del operador $\star$
Dada una variedad real M de dimensión n admitiendo una estructura de variedad compleja y dotada de una métrica g proveniente de un producto escalar $<,>$ y sea g el tensor métrico asociado a esta; sea $\star$ el operador estrella de Hodge, y sean $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ se tiene:

- **Dualidad:**
  Se verifica que $\star(\star\alpha) = (-1)^{k(n-k)}\alpha$
- **Compatibilidad:**
  Se verifica que $< \star\alpha, \star\lambda > = < \alpha, \lambda >$
- **Dual de la unidad:**
  Se verifica $\star 1 = vol_g$

Demostración:

- $\star(\star\alpha) = (-1)^{k(n-k)}\alpha$:
  Para mostrar esta propiedad utilizaremos la caracterización por coordenadas dada en la Proposición 5.1, suponiendo $\beta \in \Omega^k(V)$ se tiene:

$$(\star\star\beta)_{\lambda_1\ldots\lambda_k} = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!}(\star\beta)^{\mu_1\ldots\mu_{n-k}}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{n-k}\lambda_1\ldots\lambda_k}$$

$$(\star\star\beta)_{\lambda_1\ldots\lambda_k} = \frac{|g|}{k!(n-k)!}\beta_{\eta_1\ldots\eta_k}\epsilon^{\eta_1\ldots\eta_k\mu_1\ldots\mu_{n-k}}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{n-k}\lambda_1\ldots\lambda_k}$$

Reordenando los índices en los símbolos de Levi-Civita y teniendo en cuenta permutaciones:

$$(\star\star\beta)_{\lambda_1\ldots\lambda_k} = -1^{k(n-k)}\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_k} \Rightarrow \star\star\beta = -1^{k(n-k)}\beta \quad \forall\beta\in\Omega^k(V)$$

- $\star 1 = vol_g$:

  Se tiene directamente, para cada carta $(U, \phi = (x_i)_{i=1}^n)$:[4]

$$(\star 1)_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \frac{\sqrt{|g|}}{n!}\ 1\ \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_k\lambda_1\ldots\lambda_n} \xrightarrow{contrayendo} \star 1 = \sqrt{|g|}\ \wedge_{i=1}^n dx_i = vol_g(U)$$

Se observa que, el dual del dual no lleva de nuevo, de forma general, al elemento inicial, dependerá del grado de las formas.

Por otro lado, la mayor utilidad de la estrella de Hodge no es solo su valor como operador per se, si no su capacidad para generalizar operadores más importantes. En geometría diferencial, el operador estrella de Hodge sirve para extender, mismamente, la noción del laplaciano de $\mathbb{R}^n$ a cualquier variedad diferenciable o compleja. Previo a esto, optamos por definir la co-derivada o dual de la derivada externa:

Definición 5.4. Co-derivada externa

Sea M una variedad, $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma, y sean d_k la derivada exterior de k-formas y $\star_k$ el operador estrella de Hodge sobre k-formas, se define el **operador co-derivada** sobre k-formas δ_k como:

$$d_k^*\alpha = (-1)^{k(n-k)} \star_k d_k \star_k \alpha \tag{5.3}$$

Al igual que ocurre con el resto de operadores, se puede tomar su actuación en general y definir el operador d^* para formas de cualquier grado, teniendo en cuenta esta vez el signo, que puede variar en función del grado de la forma sobre la que se aplique el operador.

La propiedad mas básica, heredada del hecho de que $d^2 = 0$ y $\star^2 = \pm 1$, es que también podría definirse una cohomología sobre el dual de la derivada externa[5]

Corolario 5.0.1. Cohomología sobre la co-derivada externa

Sea d^* el operador co-derivada, se verifica:

$$d^{*2} = 0$$

[4]Se resalta, el factorial dividiendo se cancela con la suma de todas las permutaciones dadas por el símbolo ϵ, dado que serían las permutaciones de n elementos, y por tanto $n!$

[5]No se ahondará en este tema, solo decir que la caracterización del generar una cohomología puede ocurrir siempre y cuando la aplicación de dos veces un operador se anule siempre, como ocurre con la derivada externa.

Definición 5.5. Laplaciano de Hodge

Se define el operador **laplaciano de Hodge**, o simplemente laplaciano, en el contexto de variedades, como el operador:[6]

$$\Delta = d^* d + d\ d^* \tag{5.4}$$

A continuación un par de propiedades básicas de este operador:

Proposición 5.3. Propiedades del laplaciano de Hodge

Sea M una variedad, se tiene:

- $\Delta_k : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$
- $\Delta = (d + d^*)^2$
- $\star\Delta - \Delta\star = 0$

Demostración

La primera propiedad es trivial viendo los dominios e imágenes de ambos operadores que definen Δ. La segunda propiedad es sencilla de probar utilizando $(d + d^*)^2 = d^2 + d^{*2} + d\ d^* + d^*\ d$ y sabiendo, como se vio previamente, que $d^2 = d^{*2} = 0$. La tercera propiedad es también inmediata utilizando la propiedad de dualidad de la Proposición 5.2

Un ejemplo para comprobar que, efectivamente, en variedades sencillas a las que estamos acostumbrades, el laplaciano de Hodge recupera la noción de laplaciano es su actuación sobre $\mathbb{R}^3$:

Ejemplo 5.2. Recuperando operadores diferenciales usuales

Con las estructuras anteriormente definidas se ha dicho que se generalizaron ciertos conceptos, veamos el por qué.

Tomemos una variedad compleja, aunque veámosla como variedad real $2n$-dimensional por simplicidad, M; y tomemos $f \in \Omega^0(M)$ o, equivalentemente, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sea d el operador derivada externa, se tiene entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_i$$

En la base de diferenciales $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{2n}$. De esta forma se observa una analogía clara $d \iff \nabla$, siendo ∇ el operador gradiente típico en geometría real y análisis. Cómo ya se observó en el Ejemplo

[6] En general se utilizará Δ en referencia al laplaciano de Hodge, salvo que se vayan a utilizar otros operadores laplacianos que serán definidos mas tarde, caso en que se utilizará la notación Δ_d.

5.1, el operador $\star$ se puede ver en este tipo de variedades como el producto vectorial. De esta manera se tiene directamente que la composición de ambos es el operador rotacional:

$$\star \iff \times \qquad d \iff \nabla \qquad d\star \iff \nabla\times$$

La extensión del operador divergencia es algo mas complicada. Aplicando resultados típicos de cálculo diferencial, una vez visto lo anterior, es sencillo comprobar su expresión:

$$\nabla\cdot \iff \star d \star$$

Y de esta forma se tendrá:

$$\Delta_d = d^* \ d + d \ d^* \quad \iff \quad \nabla \cdot \nabla - \nabla \times \nabla\times = \Delta$$

$$\Delta_d \iff \Delta$$

De esta forma, en los terrenos usuales del análisis, cuando definamos variedades triviales sobre espacios que ya conocemos, tratando las funciones típicas como 0-formas, los operadores de Hodge extienden las nociones relativas a los operadores mas importantes del cálculo diferencial correctamente.

Una reflexión interesante para el estudio que se pretende hacer en esta memoria, dedicada sobre todo a variedades complejas, es sobre qué derivada construir los operadores estrella y laplaciano de Hodge. Cómo se vio al dotar de una estructura compleja a las variedades reales, los conceptos como las formas graduadas o la derivada exterior se parten en dos, en función de la holomorfía o antiholomorfía, pasando de formas graduadas a formas bigraduadas, de derivada exterior a derivadas holomorfa y antiholomorfa, etc; de esta forma los operadores anteriores también tienen cierta, no ambigüedad, pues estan bien definidos, si no, de alguna forma, necesidad de ampliarse hacia estos nuevos conceptos en la geometría compleja.

Definición 5.6. Coderivadas en variedades complejas. Laplacianos (anti)holomórfos
Sea M una variedad compleja, se definen los operadores:

- **Co-derivada holomorfa:**

$$\partial_k^* = (-1)^{k(n-k)} \star_k \partial_k \star_k \tag{5.5}$$

  actuando sobre una (k,0)-forma

- **Co-derivada antiholomorfa:**

$$\bar{\partial}_k^* = (-1)^{k(n-k)} \star_k \bar{\partial}_k \star_k \tag{5.6}$$

actuando sobre una (0,k)-forma

- **Laplaciano holomorfo:**

$$\Delta_{\partial} = \partial\ \partial^* + \partial^*\ \partial \tag{5.7}$$

- **Laplaciano antiholomorfo:**

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\ \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\ \bar{\partial} \tag{5.8}$$

El abuso de notación sobre cualquier tipo de forma en vez de solo las de grado k será equivalente al de los operadores definidos con anterioridad. La buena definición de estos operadores se hereda de los operadores en los que se basa su construcción.

Corolario 5.0.2. Descomposición de la co-derivada exterior

Dada la linealidad del operador estrella de Hodge y la derivada exterior, se tiene:

$$d^* = \partial^* + \bar{\partial}^*$$

Si se computa, puede verse que el laplaciano es, debido a la propiedad anterior, un operador autoadjunto. Se obtiene entonces la relación:[7]

$$\Delta\alpha = |d\alpha|^2 + |d^*\alpha|^2$$

De donde se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 5.4. Inclusión de funciones armónicas en clases de cohomología

Por la propiedad anterior, se tiene:

$$\Delta\alpha = 0 \iff d\alpha = d^*\alpha = 0$$

El desarrollo previo, con motivo de relacionar las funciones armónicas con la cohomología de Dolbeault,

[7]Mas información sobre esto en [3], capítulo 3.

es válido también para la $\bar{\partial}$.

La definición de estos operadores no es tan relevante en el estudio de variedades complejas en general, al menos desde el punto de vista mas topológico y algebraico, y saliéndose del análisis de las formas. Sin embargo, concretamente en el caso de las variedades de Kähler, como se comprueba en la Proposición 3.1, se dan propiedades bastante restrictivas que permiten ver los operadores como equivalentes (salvo por una constante) lo que relaciona sus espectros de soluciones. Las soluciones al operador laplaciano, por analogía al caso del operador laplaciano común, se conocen como armónicos. En el caso del operador laplaciano sobre $\mathbb{R}^n$ las soluciones se llaman funciones armónicas. En este nuevo contexto se presentan las formas armónicas:

Definición 5.7. Formas armónicas, espacios de formas armónicas. Sea M una variedad real, sea Δ el operador laplaciano relativo a su derivada exterior. Se denomina **forma armónica** a cualquier forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ verificando:

$$\Delta\alpha = 0$$

En el caso de las variedades complejas, esta definición es extensible a los tres laplacianos definibles. De esta forma, dada una (p, q)-forma, se tendrá que es:

- Armónica: $\Delta_d\alpha = 0$
- Armónica bajo el laplaciano holomorfo: $\Delta_\partial\alpha = 0$
- Armónica bajo el laplaciano antiholomorfo: $\Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0$

Dada esta clasificación, al ser soluciones de una ecuación diferencial en términos de las derivadas exteriores, se tienen los espacios:

- **Espacio de r-formas armónicas:**

$$\mathcal{H}^r(M) \equiv \{\alpha \text{ r-forma sobre } M \mid \Delta_d\alpha = 0\} \tag{5.9}$$

- **Espacio de las (p, q)-formas armónicas:**

$$\mathcal{H}^{p,q}(M) \equiv \{\alpha\ (p, q)\text{-forma sobre } M \mid \Delta_\partial\alpha = \Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0\} \tag{5.10}$$

Existen otros dos operadores, si bien importantes en la teoría de derivada de los operadores de Hodge sobre variedades, quizás no tan estrictamente necesarios salvo para teoremas de caracterización de

Kähler compactas, y con análogos en $\mathbb{R}^n$ mas difusos. Por consistencia con lo presentado en secciones anteriores de la memoria, se definen a continuación:

Definición 5.8. Operador de Lefschetz. Dual del operador de Lefschetz Sea M una variedad compleja, dotada de una forma canónica ω, se definen los operadores:

$$\begin{array}{rccc} L_k: & \bigwedge^k M & \longrightarrow & \bigwedge^{k+2} M \\ & \alpha & \longrightarrow & \alpha \wedge \omega \end{array} \tag{5.11}$$

conocido como **operador de Lefschtez**, denotado usualmente por L independientemente de la forma sobre la que actúa. Asimismo,

$$\Lambda_k \equiv (-1)^{k(n-k)} \star \; L \star \tag{5.12}$$

conocido como **dual del operador de Lefschetz** o operador dual de Lefschetz. La notación es la misma que en el caso anterior; se le ha llamado Λ en vez de L^* por ser típicamente denotado así en la bibliografía.

La buena definición de estos operadores y su linealidad es trivial según las propiedades del producto externo.

I.II Tensores y conexiones sobre variedades.

Tanto por su uso y estudio en si mismo como por su importancia a la hora de interpretar y modelizar teorías, existen ciertas nociones relativas a las variedades reales, extensibles a las complejas, de las que es imprescindible hablar en este tipo de descripciones y que, de hecho, también presentan ciertas propiedades especiales en las variedades de Kähler. Abogando por la simplicidad y debido a la longitud de esta memoria, no se hará un análisis extenso, pero sí se definirán algunos conceptos bastante relevantes.

Definición 5.9. Símbolos de Christoffel

Sea M una variedad compleja n-dimensional, vista como una variedad diferenciable $2n$-dimensional, y sea g la métrica asociada, con g su tensor métrico subyacente; se definen los **símbolos de Christoffel**, denotados por $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, como sigue:[8]

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \tag{5.13}$$

En general, los símbolos de Christoffel pueden entenderse también como la parte sin torsión. Dicho de otra forma, que "funciona correctamente" con la derivada covariante, de forma análoga a la derivada usual sobre funciones.

Los símbolos de Christoffel sirven para definir una cantidad que sí tiene una intuición clara, conocida como curvatura de Riemann. Es un tensor que ilustra, de forma local, cuán cerca esta la variedad de ser plana.

Definición 5.10. Curvatura de Riemann

En las condiciones de definición de los símbolos de Christoffel, se define el tensor de tipo (1,3) conocido como **curvatura de Riemann** como:

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\tau} - \partial_\nu \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} + \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\tau} \tag{5.14}$$

En base a este tensor, que mide de forma local esta curvatura, podemos definir el objetivo de esta rápida reflexión sobre las variedades típica en relatividad general, la curvatura de Ricci.

Definición 5.11. Tensor de Ricci. Curvatura de Ricci. En el marco de las definiciones anteriores, podemos definir los siguientes objetos matemáticos:

$$\mathcal{R}_{\sigma\nu} = R^{\rho}_{\sigma\rho\nu} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{R} = g^{\sigma\nu}\mathcal{R}_{\sigma\nu} \tag{5.15}$$

Siendo el primero el **tensor de Ricci**, un tensor de tipo (2,0), y el segundo la **curvatura de Ricci**, un escalar al haber contraído todos los índices, la traza del tensor de Ricci.

Se recuerda que las definiciones dadas de estos objetos son claramente locales, por lo que, de forma

[8] Al ser notación típica de la geometría real no se ha hecho mucho hincapié. Intrínsecamente se están tomando unas coordenadas $(x^\mu)_{\mu\in I}$ y las derivadas se han denotado como $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$

directa, en gran cantidad de casos no serán constantes, si no que al seleccionar puntos de la variedad nos darán información concreta sobre estos.

Capítulo 6

Apéndice II. Cohomología e invariantes topológicos

Existe toda una extensa rama de las matemáticas, relativa a las varieades, conocida como cohomología, que permite encontrar caracterizaciones de ciertas estructuras matemáticas en el ámbito de la geometría diferencial, relacional las propiedades topológicas con operadores sobre estos objetos y, en general, dar herramientas para la clasificación de variedades.

El propósito de esta sección será definir formalmente varios elementos que permiten caracterizar la existencia de estructuras de Kähler sobre variedades compactas, como los números de Betti o de Hodge, así como propiedades topológicas que describen ciertas nociones importantes en física en algunas de estas variedades, como las clases de Chern.

Inicialmente estudiaremos un mínimo de homología, tanto porsencillez en su definición como por su importancia en la descripción de las geometrías de Kähler, mas adelante abordaremos un terreno mucho mas amplio, el de la cohomología.

II.I Homología y números de Betti

En la definición de cualquier estructura matemática suele ser sencillo construir subestructuras del mismo tipo sobre ella, como ocurre con los grupos y subgrupos o los espacios vectoriales y subespacios vectoriales. Sin embargo en el caso de las variedades la definición de este tipo de relaciones no es inmediata, de hecho, existen diversos tipos de subvariedades atendiendo a las nociones de inmersión o encaje (del inglés *embedding*). En nuestro caso, trabajaremos con la definición posiblemente mas intuitiva de subvariedad.

Durante esta sección utilizaremos la notación H^n para referirnos al semi-espacio positivo de dimensión n, esto es, $H^n = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ con la topología heredada de la usual de $\mathbb{R}^n$.

Definición 6.1. Subvariedad.
Sea M una variedad, $M = (\mathrm{M}, A)$ siendo M un espacio topológico sobre un conjunto X y A un atlas asociado, con $A = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ verificando $Im\{\phi_i\} \subset \mathbb{E}^n \ \forall i \in I$ para algún $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espacio euclídeo. Sea $N \subset X$; M se dirá **subvariedad** de M si se verifica:

$$\forall p \in N \ \exists \ (U, \phi) \in A \text{ tal que } p \in U \text{ y } \phi(N \cap U) = \mathbb{E}^m \cap \phi(U) \text{ para algún } m \leq n$$

Dónde $\mathbb{E}^m$ se toma como el subespacio $\{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{E}^n \mid x_j = 0 \ \forall j \geq m\}$
En caso de que para todo punto de la subvariedad, la carta asociada sea diferenciable (holomórfica) la subvariedad se dirá diferenciable (holomórfica).

De esta forma podemos extender la noción de subestructuras al terreno de las variedades. Por otro lado existen varios conceptos relacionados con la topología que precisan de una noción mas intrínseca que la heredada bajo el espacio topológico subyacente a la variedad, para ello, se precisa una definición intermedia entre las nociones de espacio topológico y de variedad.

Definición 6.2. Variedad topológica
Sea M un espacio topológico, M se dirá **variedad topológica** en caso de que se verifique:

$$\forall p \in \mathrm{M} \ \exists U \in \mathcal{N}^p \text{ verificando } \exists \phi \text{ homeomorfismo } \phi : U \longrightarrow \mathbb{E}$$

Para algún $\mathbb{E}$ espacio euclídeo.

De esta forma se le exige únicamente al espacio ser localmente homeomorfo con algún espacio euclídeo, no la existencia de un atlas que verifique las propiedades de una variedad y mucho menos el dotar al espacio de esta estructura extra.

Proposición 6.1. Variedades y variedades topológicas

Una variedad (real, compleja) puede verse como una variedad topológica con una estructura de variedad dada a través de un atlas (real, complejo).

Demostración:

Sea M una variedad, sea $\{U_i\}_{i\in I}$ el recubrimiento abierto del espacio topológico M subyacente que conforman los abiertos de las cartas del atlas, sean $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{E}$ sus funciones asociadas, cuyo codominio es un espacio euclídeo.

$$\mathrm{M} = \bigcup_{i\in I} U_i \implies \forall p \in \mathrm{M}\ \exists U_j\ j \in I \mid p \in U_j \implies$$
$$\implies \forall p \in \mathrm{M}\ \exists U_j \in \mathcal{N}^p \mid \phi_j : U_j \to \mathbb{E} \text{ es homeomorfismo.}$$

Y por tanto M es localmente homeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{E}$, M es variedad topológica.

El recíproco sin embargo no es cierto, existen ejemplos, como puede ser E_8[1] de variedades topológicas que no pueden ser dotadas de un atlas real. A las variedades topológicas, además, pueden asociárseles estructuras de variedad diferentes, un ejemplo trivial sería una variedad topológica dotada de una estructura compleja o de una estructura real; mientras la variedad cambia, la variedad topológica es la misma para ambas visiones.

Dada la noción de variedad topológica, puede definirse correctamente su idea de frontera:

Definición 6.3. Interior y frontera de una variedad.

Sea M un espacio topológico verificando ser una variedad topológica y ser Hausdorff, M se dirá **con frontera** si es localmente homeomorfo al espacio H^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

Se denominará en este contexto **frontera**, denotada por $\partial\mathrm{M}$[2], a aquellos puntos de la variedad topológica para los que alguna carta lleva al subespacio $\{(x_i)_{i=1}^n \in H^n \mid x_n = 0\}$ de H^n. El interior estará formado por aquellos puntos para los que alguna carta lleve al subespacio $\{(x_i)_{i=1}^n \in H^n \mid x_n > 0\}$, denotando el conjunto por $\mathring{\mathrm{M}}$.

Proposición 6.2. Propiedades de la frontera de variedades topológicas.

Sea M una variedad topológica con frontera, $\partial\mathrm{M}$ su frontera y $\mathring{\mathrm{M}}$ su interior, se verifica:

[1] Esto es consecuencia del teorema de Rokhlin. Mas información en [18], capítulo 3.

[2] La notación para la frontera de una variedad y para la derivada holomorfa de formas es la misma, se sobreentenderá a qué se hace referencia por el contexto, si se aplica sobre una variedad o sobre una forma.

- $\text{M}= \partial\text{M} \sqcup \mathring{\text{M}}$

- Si M es dotada de una estructura de variedad M n-dimensional, se verifica que ∂M como conjunto es una subvariedad y que, heredando la estructura de la variedad M, ∂M es una variedad $(n-1)$-dimensional.

- $\partial\partial\text{M} = \emptyset$

Demostración:

Las demostraciones pueden ser encontradas en [15].

A pesar de poder imaginar, en base a la primera de las propiedades y la similitud de los conceptos, que las nociones de frontera e interior de una variedad podrían inducirse por las nociones topológicas relativas en el espacio topológico subyacente, la tercera de las propiedades anteriores permite comprobar que esto no ocurre, ya que, en cualquier caso, la frontera de la frontera de cualquier conjunto, dado un espacio topológico, siempre es ella misma, no define una cohomología como lo hace en el caso de las fronteras sobre variedades.

Definición 6.4. ***p*-cadena. Frontera de *p*-cadena.**
Sea M una variedad diferenciable y conexa [3] sea $\{N_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de subvariedades de M p-dimensionales heredando la estructura de variedad de M; sea $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, se define una **p-cadena** como la suma formal:

$$a_p = \sum_{i=1}^{n} c_i N_i$$

A la que se le asocia la noción de frontera:

$$\partial a_p = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial N_i$$

En caso, como se ha definido, de que los coeficientes $\{c_i\}$ sean reales, entonces la p-cadena se dirá real, en caso de que sean complejos, se dirá compleja. La única exigencia formal que le pediremos a los coeficientes es la estructura de anillo. Por estabilidad de la suma formal, existe una extensión utilizando la noción de grupo únicamente. Sin embargo para el objetivo de este trabajo, se prefiere dar una condición mas fuerte por simplicidad.

Partiendo de las definiciones anteriores, podemos definir los siguientes conjuntos:

[3] Al hablar de variedad conexa se hace referencia a que su espacio topológico subyacente es conexo.

- $Z_p = \{a_p \mid \partial a_p = \emptyset\}$ El conjunto de p-cadenas sin frontera.

- $B_p = \{\partial a_{p+1}\}$ El conjunto de fronteras de las $(p+1)$-cadenas.

Podemos dotar ambos conjuntos de estructura de grupos mediante la suma formal, tal y como se definieron las cadenas en la Definición 5.15. Haciendo esto, comprobando que $B_p \leq Z_p$, dado que $\partial\partial a_{p+1} = \emptyset$, podemos tomar el grupo cociente, en su defecto, el espacio cociente.

Definición 6.5. Grupo de homología de orden p sobre M.
Sea M una variedad, sea M la variedad topológica con frontera subyacente, sean Z_p y B_p definidos anteriormente, se define el **grupo de homología de orden p sobre M** como el grupo cociente entre estos:

$$H_p = Z_p/B_p$$

Los elementos de este grupo son las clases de equivalencia $z_p \sim z_p + \partial z_{p+1}$, conocidas como clases de homología.

Dada una variedad M, y sea R el anillo de coeficientes $\{c_i\}_{i=1}^n \subset R$, el grupo de homología de orden p sobre M en base a los coeficientes del grupo R se denota por $H_p(M, R)$, por ejemplo $H_p(M, \mathbb{R})$ o $H_p(M, \mathbb{C})$. En caso de que no se especifique el grupo de coeficientes respecto al que se esta tomando el grupo de homología, se sobreetenderá que es $(\mathbb{Z}, +)$. De esta manera, $H_p(M) = H_p(M, \mathbb{Z})$

La importancia de la construcción de estos grupos es que son invariantes bajo homotopías, y por tanto, propiedades topológicas que se preservarán a través de homeomorfismos, como caso concreto de homotopía.

Teorema 6.1. Invariancia de los grupos de homología
Sean X e Y espacios topológicos verificando:

- X e Y son variedades topológicas

- X e Y son homotópicamente equivalentes.

Entonces los grupos $H_n(\mathrm{X})$ y $H_n(\mathrm{Y})$ son isomorfos para todo n. Más aún, si una variedad topológica es conexa y contráctil, todos sus grupos de homología son 0 excepto $H_0 \cong \mathbb{Z}$.
Demostración:

La demostración no será detallada en esta memoria, ya que exige atravesar primero grupos de homología singular y conceptos en los que no merece la pena hacer hincapié. No obstante, los detalles pueden encontrarse en [7] en la Sección 2. La idea de la demostración es tomar una aplicación continua entre X e Y, la cuál induce un homomorfismo entre los grupos de homología, de donde, utilizando la equivalencia homotópica, se puede comprobar que el homomorfismo inducido es, de hecho, un isomorfismo.

Definición 6.6. Números de Betti.
Sea M una variedad topológica. Se define el r-ésimo número de Betti, b_r como:[4]

$$b_r = rank(H_r(M)) \tag{6.1}$$

Viendo $H_r(M, R)$ como R-espacio vectorial en caso de que sea un cuerpo, puede definirse también:

$$b_r = dim_R(H_r(M, R)) \tag{6.2}$$

En caso de que haya ambigüedad, se denota $b_r(M)$, haciendo referencia a la variedad a la que nos referimos.

Podríamos dar los números de Betti para cualquier anillo R. Sin embargo, en lo que concierne a este trabajo, los únicos anillos que nos interesarán serán $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. La definición se da únicamente sobre $\mathbb{R}$ ya que los números de Betti dependen únicamente de la característica del anillo, no del anillo concreto, y los tres ejemplos anteriores tienen la misma característica, 0.[5].

Ejemplo 6.1. Intuición de números de Betti sobre el toro.
Históricamente, a los números de Betti se les ha dado varias intuiciones geométricas, quizás la mas intuitiva es la relativa a los huecos k-dimensionales. En esta intuición podemos ver al número de Betti b_k como el número de huecos k-dimensionales presentes en el objeto geométrico, tomando b_0 como el número de componentes conexas.
De esta forma, podemos considerar un toroide en $\mathbb{R}^3$ con la topología usual.

- b_0 será el número de componentes conexas, es decir $b_0 = 1$.
- b_1 será el número de huecos unidimensionales en el toro, esto es, el número de agujeros circulares de la figura. En este caso tenemos el agujero central del toro y la cavidad interior $b_1 = 2$.

[4] la notación $rank(\mathbb{G})$ hace referencia al rango del grupo $\mathbb{G}$.
[5] Esto puede verse fácilmente a través del rango del grupo de homología sobre anillos en vez de la noción de dimensión sobre un cuerpo, ambas equivalentes en el caso de los cuerpos

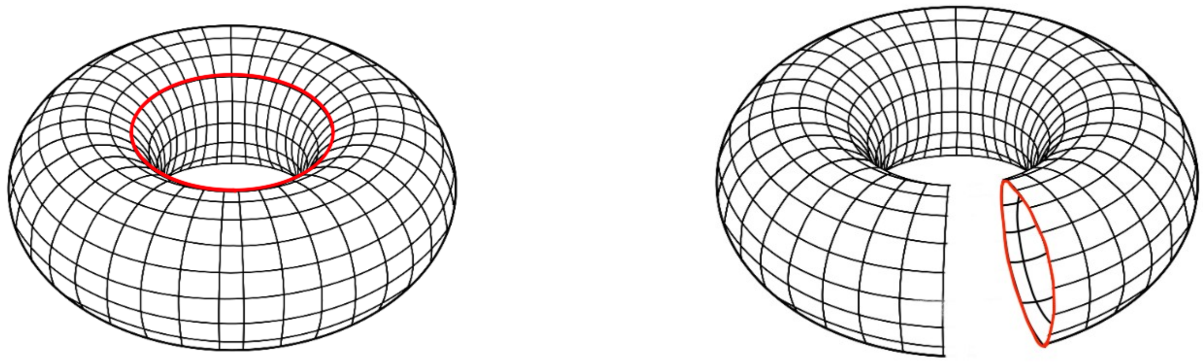

Figura 6.1: Intuición del primer número de Betti en el toro. Hay dos “agujeros” unidimensionales contenidos. Se muestran en color rojo.

- b_2 será el número de huecos bidimensionales, esto es, cavidades “transitables” completamente encerradas bajo una superficie. Solo se tiene la cavidad del toro, $b_2 = 1$.

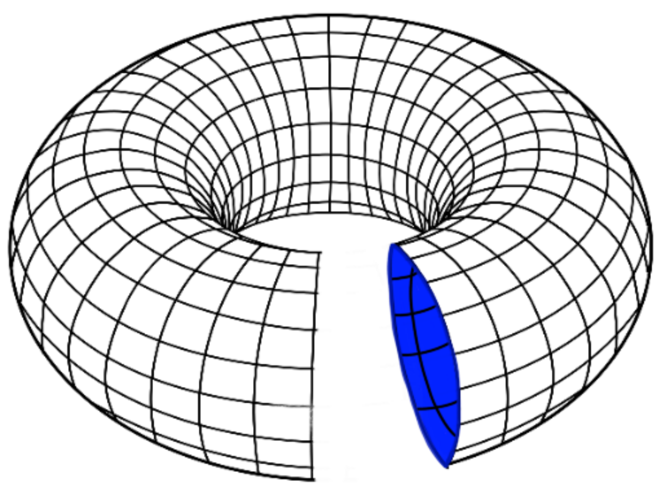

Figura 6.2: Intuición del segundo número de Betti en el toro. Hay una zona transitable cubierta completamente por la superficie de la figura. Se muestra en color azul.

Ejemplo 6.2. Intuición de números de Betti sobre la botella de Klein.

Otro ejemplo, menos sencillo, pero igual de valioso para la intuición de los números de Betti es el de la botella de Klein.

Siguiendo el esquema anterior:

- $b_0 = 1$, al presentar una sola componente conexa.
- $b_1 = 1$, ya que solo existe un hueco unidimensional, la cavidad interior de la botella.

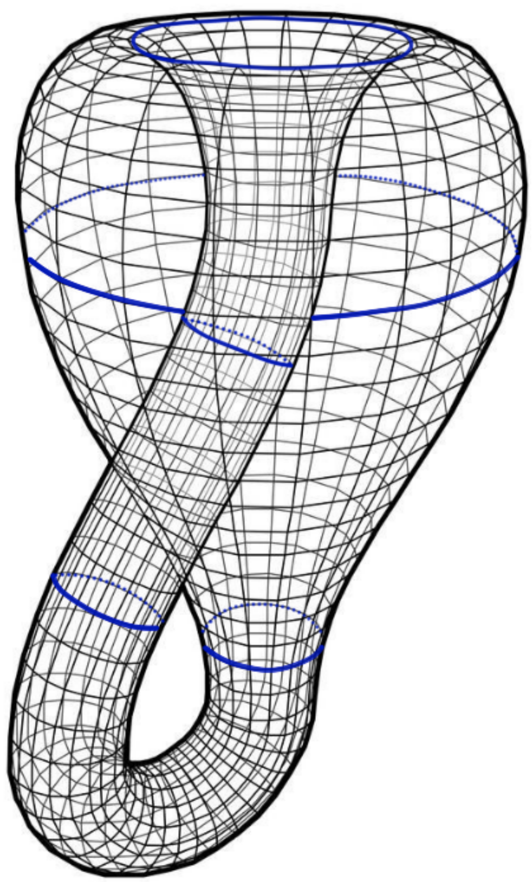

Figura 6.3: Intuición del primer número de Betti en la botella de Klein. Hay un único "hueco" unidimensional en la figura. Se señala en azul en múltiples puntos para mejorar su visionado.

- $b_2 = 0$, ya que no existe ninguna cavidad bidimensional en la figura. Si tratamos de transitar la figura por el aparente interior de la superficie siempre podremos salir al exterior por algún camino.

La importancia de los números de Betti, en lo que nos concierne, es doble. Por un lado, permite definir elementos mas elaborados que sirven como criterios para la comprobación de cuando una variedad puede dotarse de una estructura de variedad Kähler. Por otro lado, los mismos números funcionan en parte como una de estas caracterizaciones para variedades compactas. De esta manera es importante comprobar que los números de Betti son invariantes topológicos. Sin embargo, dado que la equivalencia homotópica de espacios induce un isomorfismo en los grupos de homología H^n, este resultado es trivial.

Corolario 6.1.1. Invariancia de los números de Betti.
Los números de betti son invariantes por homotopías, por tanto, son invariantes topológicos.

Las propiedades de los números de Betti relativas a las variedades de Kähler serán exploradas en el Capítulo 3. Sin embargo, a continuación se da una restricción importante en los números de Betti, o, visto de otra forma, un isomorfismo nada trivial entre los grupos de homología.

Teorema 6.2. Dualidad de Poincaré.
Sea M una variedad compacta de dimensión n, se verifica:

$$H_k(M, R) \cong H_{n-k}(M, R)$$

Para cualquier anillo R.

Demostración:

> La prueba puede ser encontrada en [24]. Parte de la construcción sobre $\mathbb{R}$ y generaliza para cualquier anillo.

De la relación anterior entre grupos de distintos órdenes se tiene la siguiente dualidad relativa a los números de Betti.

Corolario 6.2.1. Dualidad en números de Betti.
Sea M una variedad m-dimensional compacta, se verifica:

$$b_r(M) = b_{m-r}(M)$$

II.II Cohomologías de de Rham y Doulbeault

La descripción anterior y la construcción de los números de Betti se basan en la propiedad de que la frontera de la frontera es siempre el vacío. Siempre que planteamos la construcción de un operador ∂ que presume esta propiedad, esto es, que $\partial\partial A = 0\ \forall A$, automáticamente encontramos un camino para una formulación matemática semejante.

Este tipo de procedimientos, en que asociamos estructuras matemáticas a operaciones que cumplen la propiedad anterior se denomina **cohomología**, y funciona como una herramienta enormemente importante a la hora de dar propiedades topológicas y algebraicas en ámbitos como el de las variedades.

Si recordamos, con anterioridad ya vimos otros operadores que verifican la propiedad que permite definir una cohomología relativa a ellos. En nuestro caso, la derivada exterior d y las derivadas (anti)holomórficas ∂ y $\bar{\partial}$, en este contexto, presentan una cohomología asociada.

En el estudio relativo a la derivada exterior podemos hacer referencia de nuevo a las formas cerradas y exactas. Se recuerda, las formas cerradas son aquellas formas α que verifican $d\alpha = 0$, mientras que las formas exactas son aquellas que verifican que existe una forma β tal que $\alpha = d\beta$, dado que la derivada exterior presenta la propiedad de que $d^2 = 0$, cualquier forma exacta es cerrada, pero no a la inversa.

Esta afirmación es, en realidad, un método para definir los conjuntos Z_p y B_p del caso anterior. La extensión de estos conjuntos al ámbitos de la derivada exterior es trivial y permite definir los grupos de Cohomología de de Rham.

Definición 6.7. Grupo y clases de cohomología de de Rham.
Sea M una variedad real n-dimensional, sea α_k una k-forma. Se definen las **formas cerradas** como el conjunto de formas $Z_p = \{\alpha_p \mid d\alpha_p = 0\}$, y las **formas exactas** como el conjunto de formas $B_p = \{d\alpha_{p-1}\}$.
Dotando a estos dos conjuntos de una estructura de grupos, trivialmente con la suma de formas, se define el **grupo de cohomología de de Rham de orden p** $H^p_{d.R.}$ como el grupo cociente:

$$H^p_{d.R.} = Z_p/B_p$$

En analogía a los grupos de homología, los elementos de $H^p_{d.R.}$ son clases de equivalencia $\alpha_p \sim \alpha_p + d\beta_{p-1}$

llamadas **clases de cohomología.**

Los grupos anteriores son, en variedades diferenciables, la principal relación entre las propiedades topológicas del espacio topológico subyacente a la variedad y las formas sobre esta. Esto se da a través del teorema de de Rham.

Teorema 6.3. Teorema de de Rham.
Sea M una variedad real y $p \in \mathbb{N}$. Se verifica:

$$H^p_{d.R.}(M) \cong H_k(M) \tag{6.3}$$

Demostración:

La demostración puede encontrarse en Teorema 5.8 en [5].

Por lo que será indistinto hablar de grupos de homología o de grupos de cohomología de de Rham.

Del mismo modo que en el caso anterior, las derivadas ∂ y $\bar{\partial}$ sobre formas definen una cohomología, al verificar la propiedad $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$. La cohomología relevante para la descripción que buscamos se conoce como cohomología de Dolbeault o $\bar{\partial}$-cohomología, y es la relativa al operador $\bar{\partial}$. De esta manera definimos de nuevo los conjuntos anteriores, esta vez, debiendo explicitar el bigrado de las formas, al estar trabajando directamente sobre la estructura compleja de la variedad en la que nos encontremos.

Definición 6.8. Cohomología de Dolbeault. Números de Hodge.
Sea M una variedad compleja n-dimensional compacta, denotando como α una (p,q)-forma. Denotando $Z^{p,q}_{\bar{\partial}}$ el conjunto de formas $\bar{\partial}$-cerradas, esto es, que verifican $\bar{\partial}\alpha = 0$, y denotando de igual manera las formas $\bar{\partial}$-exactas como $B^{p,q}_{\bar{\partial}} = \{\alpha \mid \alpha = \bar{\partial}\beta,\ \beta \in \bigwedge^{p,q-1}(M)\}$.

Al igual que en casos anteriores, se tiene $B^{p,q}_{\bar{\partial}} \subset Z^{p,q}_{\bar{\partial}}$, de donde podemos definir el **grupo de cohomología de Dolbeault** como el cociente:

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) = Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)/B^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \tag{6.4}$$

La $\mathbb{C}$-dimensión de este cociente visto como espacio vectorial se conoce como **números de Hodge**, denotados por $h^{p,q}(M)$:

$$h^{p,q}(M) = dim_{\mathbb{C}}\left(H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)\right) \tag{6.5}$$

Los números de Hodge se pueden entender intuitivamente como una extensión de los números de Betti en geometría diferencial complejas. Sin embargo, no son propiedades topológicas en general, pudiendo demostrarse que lo son para cualquier variedad compleja y conexa de dimensión 1[6]. La utilidad de los números de Hodge radica, para lo que nos concierne, en sus propiedades sobre geometrías Kähler, las cuáles son discutidas en el Capítulo 3.

Típicamente, los números de Hodge se representan mediante una estructura conocida como **diamante de Hodge**, justificándose en que los valores de p y q no puede superar la dimensión de la variedad. Como ejemplo, para describir una variedad 3-dimensional, se representan los números de Hodge como:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & h^{33} & & & \\
 & & h^{32} & & h^{23} & & \\
 & h^{31} & & h^{22} & & h^{13} & \\
h^{30} & & h^{21} & & h^{12} & & h^{03} \\
 & h^{20} & & h^{11} & & h^{02} & \\
 & & h^{10} & & h^{01} & & \\
 & & & h^{00} & & &
\end{array}$$

Como ejemplo mas concreto, en el caso de los $CY3$ simplemente conexos, como se menciona en el capítulo correspondiente, son descritos por:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{11} & & 0 & \\
1 & & h^{21} & & h^{21} & & 1 \\
 & 0 & & h^{11} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

Dónde la única libertad a la hora de seleccionar números de Hodge en este tipo de variedades serán los cuatro números centrales, quedando el resto ligado por propiedades como primera clase de Chern nula o la dualidad de Serre[7], una generalización de la dualidad de Poincaré. Atendiendo a las propiedades dadas además sobre variedades de Kähler, se puede ver que los únicos números independientes serán h^{11} y h^{21}

[6] Realmente es inmediato al dotar la variedad de estructura de Kähler y usar la descomposición dada en Proposición 3.4

[7] Mas información sobre esta dualidad en [6]. Utilizando teoría de haces.

Existen unas clases de cohomología más que, no solo funcionan como invariantes topológicos, si no que están relacionadas con el tensor de Ricci $\mathcal{R}$, definido en el Apéndice I, sin embargo, al ser específicas de las variedades de Kähler, su construcción y propiedades prefiere darse en el estudio específico de las variedades de Kähler del Capítulo 3.

Para terminar, por completitud, daremos una noción equivalente a las cohomologías de Dolbeault y de de Rham definidas anteriormente que permiten extender esta noción.

Como ya se comentó, en los tres casos tratados en esta sección, el objeto fundamental en la definición de cualquiera de estas clases de cohomología es la existencia de un operador d que verifica $d^2 = 0$. En este contexto, existe una forma más directa de construir cualquier cohomología por medio de aplicaciones. Daremos el ejemplo con la derivada exterior, que se comporta sobre el espacio de las formas como:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M) \xrightarrow{d} ...$$

Recordando que, realmente, a cada espacio n se le haya asociado un operador d_n, por lo que estrictamente debería describirse como:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2} \Omega^3(M) \xrightarrow{d_3} ...$$

de donde, trivialmente, podemos recuperar los grupos de cohomología de de Rham mediante el cociente:

$$H^n_{d.R.}(M) = ker\{d_n\}/Im\{d_{n-1}\}$$

De esta forma queda patente el hecho de que cualquier operador de tipo $A^2 = 0$ define unos grupos de cohomología y, por tanto, que los resultados anteriores pueden extenderse. Por ejemplo, podemos considerar una cohomología semejante a la de Dolbeault pero referida al operador ∂, cuyos grupos de cohomología denotaremos por $H^{p,q}_{\partial}(M)$.