Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Trabajo Fin de Grado

El conocimiento especializado del profesorado de matemáticas para enseñar teoría de grafos en el Grado en Matemáticas

Ángel Jesús Caraduje Hurtado

Tutorado por Susana Montes Rodríguez y
Luis J. Rodríguez Muñiz

PCEO Grado en Física y Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias

Curso 2021-2022

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, una de las muchas salidas profesionales del Grado en Matemáticas es la docencia. Sin embargo, los planes de estudio de los grados en matemáticas de las diferentes universidades españolas no recogen ninguna asignatura específica, ni obligatoria ni optativa, de Didáctica de la Matemática, o Matemática Educativa. En este trabajo pretendemos acercarnos a este campo de investigación e iniciar una reflexión sobre el conocimiento para enseñar matemáticas.

En las últimas décadas, la preocupación por la formación del profesorado ha ido aumentando progresivamente. En España, son numerosos los trabajos publicados en los que se discute sobre la formación inicial tanto desde el punto de vista legislativo (Tiana Ferrer y col., 2013) como desde la propia práctica educativa (Muñiz Rodrıguez y col., 2016; Bolıvar, 2007). Los estudios sobre el profesorado suelen centrarse en las etapas obligatorias, enseñanza primaria y secundaria, pero también existe interés por la docencia universitaria (Muñoz, 1999; Pavıa, 2001). En este trabajo, nos centraremos en el conocimiento del profesorado de matemáticas en un ámbito universitario.

El interés por el estudio de la formación del profesorado tiene un objetivo claro: la búsqueda constante de la mejora del sistema educativo. Para lograrlo se plantean diferentes aspectos como la mejora de la formación inicial del profesorado y el diseño de planes de formación permanente orientados a profesionales en ejercicio. Si se quieren plantear propuestas fundamentadas resulta necesario saber más sobre cómo es el conocimiento del docente, cómo se genera, cómo se sustenta y qué estrategias posibilitan su ampliación (Climent Rodríguez, 2002).

Históricamente han surgido diferentes modelos para caracterizar el conocimiento del profesorado. En el Capítulo 2 intentaremos acotar qué entenderemos por conocimiento, así como presentar varios modelos para caracterizarlo. Nos interesará especialmente el modelo para el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. o MTSK[1].

Este modelo ha sido utilizado para tratar de comprender qué sabe, y qué debería saber, el profesorado de matemáticas en distintos niveles educativos. La mayor parte de estudios han sido realizados en la etapa de educación infantil, primaria, secundaria y bachillerato. No obstante, aunque en mucha menor cantidad, también hay algún trabajo en grados y másteres universitarios (Peñaherrera y col., 2021; Vasco-Mora y col., 2021).

Este vacío nos llevó a interesarnos por qué ocurría en el Grado en Matemáticas de la Universidad de Oviedo. Debido a la extensión del trabajo, decidimos analizar varias clases de una asignatura: Modelos de Optimización en Redes. En el Capítulo 3, se explicará la motivación de la elección de esta asignatura, así como la metodología llevada a cabo para la recogida de datos.

En el Capítulo 4, se expondrán los resultados obtenidos. Nos centraremos en realizar un análisis global intentando relacionar el tipo de conocimiento que la profesora moviliza en el aula con la tipología de las actividades y la temática de la clase. Aprovecharemos también para ejemplificar los tipos de conocimiento enmarcados en el MTSK, así como buscar posibles relaciones entre los mismos.

Finalmente, expondremos en el Capítulo 5 las conclusiones a las que hemos llegado e intentaremos formular alguna recomendación que contribuya a la formación permanente del profesorado de matemáticas.

[1]Del inglés, *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*.

Capítulo 2

Marco teórico

Desde la didáctica de la matemática, el interés sobre qué tipo de conocimiento tiene, o debería tener, el profesorado resulta un campo de desarrollo y mejora fundamental. Es en esta línea en la que surgen modelos generales para caracterizar su conocimiento. Uno de los trabajos pioneros en el ámbito del estudio del conocimiento del profesorado, no necesariamente de matemáticas, es el realizado por Shulman (L. S. Shulman, 1986). En este trabajo se realiza una distinción fundamental entre el conocimiento de la materia y el conocimiento de su didáctica.

En los últimos años, el grupo de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva ha desarrollado un modelo basándose en la distinción realizada por Shulman: el modelo del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas (Carrillo-Yañez y col., 2018). Este modelo, más específico, es el que usaremos para caracterizar el conocimiento.

Resulta importante destacar que estos modelos son cualitativos y basados en la observación. Para poder investigar y analizar el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, debemos ser capaces de encontrar indicios y evidencias del conocimiento. Se ha constatado que existe una relación entre ciertas situaciones que se pueden dar en el aula y el tipo de conocimiento que el profesorado moviliza en ellas (Flores-Medrano y col., 2013).

2.1. Sobre el conocimiento matemático

Antes de modelizar el conocimiento matemático debemos intentar delimitar qué es ese constructo al que nos referiremos cuando hablemos de *conocimiento*. Schoenfeld define el conocimiento de un individuo como la información que éste tiene disponible para usar con el fin de resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea (Schoenfeld, 2010).

Resulta interesante remarcar varios aspectos, empezando por explicar a qué nos referimos con *información disponible para usar*. La *información disponible* sería el conjunto de acciones y comprensiones de diferentes tipos, adaptables a las diferentes situaciones. Con esta definición, conocimiento y comprensión están inevitablemente ligadas (Skemp, 1971), entendiendo la comprensión como la asimilación de diferentes elementos dentro de esquemas que constituyen el conocimiento.

Se pueden establecer entonces cuatro tipos diferentes de compresión y, por tanto, de conocimiento. En un primer momento, Skemp definió dos categorías: comprensión relacional, saber qué hacer y por qué se debe hacer; y comprensión instrumental, saber aplicar las reglas sin entender el por qué (Skemp, 1971). Posteriormente, se introdujeron dos más: comprensión lógica, saber organizar qué se está haciendo de acuerdo a ciertos criterios de estructura (Skemp, 1979); y comprensión simbólica, saber conectar la notación empleada con la idea asociada (Skemp, 1982). Estas categorías nos dan ya una idea intuitiva de las diferentes dimensiones que se pueden considerar al hablar de conocimiento.

Continuando con la definición dada para el conocimiento, el elemento *para usar* es el elemento discriminante por excelencia de la misma. Actuando como filtro, nos restringe a considerar únicamente el conocimiento específico que se adapta a la situación concreta en la que se quiere utilizar (Carrillo y col., 2014). En nuestro caso, vamos a considerar únicamente el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas por lo que no entraríamos a considerar más que la información disponible del profesorado respecto a la práctica docente, obviando si tiene nociones de otros campos que no nos resulten de interés.

Cabe destacar que tal y como hemos definido el conocimiento, este *no tiene por qué ser correcto*. Por ello, no se debería entrar a diferenciar o juzgar si el conocimiento es correcto o incorrecto. Aunque esta distinción pueda ser interesante según el objetivo de la investigación, en este caso queremos saber qué conoce el profesorado, qué información posee. Es interesante también matizar que incorrecto no es lo mismo que falso (Carrillo y col., 2014). La información disponible puede ser veraz pero no adecuarse al fin con el que se usa y, por tanto, ser incorrecta.

Para entender el conocimiento que el profesorado de matemáticas moviliza en el aula, debemos ser capaces de encontrar un modelo que nos ayude a caracterizarlo. En las últimas décadas han surgido numerosos modelos con el fin de analizar y caracterizar dicho conocimiento. Nuestro punto de partida, en la sección 2.2, será la clasificación presentada por Shulman para los saberes básicos del profesorado.

2.2. Modelos previos de conocimiento del profesorado

El punto de partida se remonta al modelo planteado por Shulman. En él se aborda el conocimiento del profesorado para la enseñanza en general, pero supone la base teórica de modelos más específicos para el profesorado de matemáticas (Vasco Mora y col., 2015). Una de las grandes aportaciones al estudio y caracterización del conocimiento del profesorado recae en la distinción entre la materia y la enseñanza de la materia (L. S. Shulman, 1986).

De acuerdo al planteamiento de Shulman, se pueden establecer como mínimo siete categorías diferentes en las que agrupar los saberes básicos del docente (L. Shulman, 1987):

- Conocimiento del contenido.
- Conocimiento pedagógico general.
- Conocimiento del currículo.
- Conocimiento pedagógico del contenido.
- Conocimiento del alumnado y sus características de aprendizaje.

- Conocimiento del contexto educativo.

- Conocimiento de los fines educativos, propósitos y valores.

Las tres primeras categorías hacen referencia al dominio de conceptos y contenidos formales. Dentro del conocimiento del contenido se incluye el conocimiento propio de la asignatura, su estructura y su organización conceptual (Vasco Mora y col., 2015). Aquellos principios generales y estrategias para la gestión y organización del aula, que van mas allá del conocimiento del contenido, se consideran parte del conocimiento pedagógico general (L. Shulman, 1987). Finalmente, el conocimiento del currículo englobaría las herramientas desarrolladas en la práctica docente, los materiales y los programas de seguimiento de la docencia (L. Shulman, 1987).

Dentro de este conocimiento básico, se puede identificar también un bloque de categorías correspondientes a aspectos más sociales o educativos. El conocimiento del alumnado y sus características de aprendizaje ejemplifica esta afirmación. Esta categoría no hace referencia al desarrollo formal de la clase, sino a cada una de las alumnas que la componen (L. Shulman, 1987). Shulman también recoge la necesidad del profesorado de conocer sobre el contexto educativo: tanto sobre la gobernanza y financiación de la escuela, como sobre las propias comunidades y culturas y su organización (L. Shulman, 1987). Se completa el bloque con el conocimiento de los fines educativos, propósitos y valores, atendiendo también a sus raíces filosóficas e históricas.

La categoría restante, conocimiento pedagógico del contenido, es constituida por un conjunto de saberes intermedios entre el contenido y las formas de aprendizaje del contenido (L. Shulman, 1987). Los saberes profesionales del profesorado son parte fundamental de esta categoría; desarrollados en torno a ejemplos, formas de enseñanza y presentación de los contenidos

Nuestra concepción del contenido del conocimiento del profesorado se hereda directamente de Shulman (Carrillo y col., 2014). En particular, resultará fundamental la distinción entre las dos componentes relativas al contenido de la materia a enseñar y al conocimiento didáctico del contenido. Aunque la clasificación de conocimiento planteada por Shulman sea de carácter general (L. Shulman, 1987). En la Sección 2.3, abordaremos un modelo referido únicamente a la docencia de las matemáticas.

2.3. El modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

Ball y col. (Ball y col., 2008) desarrollaron un modelo específico para comprender los conocimientos matemáticos necesarios para llevar a cabo la labor de enseñanza de las matemáticas: el conocimiento matemático para la docencia, o MKT[1]. Este modelo, véase la Figura 2.1, mantiene la diferenciación esencial realizada por Shulman respecto al conocimiento del contenido y al conocimiento didáctico del contenido, además de incidir en su especifidad profesional (Vasco Mora y col., 2015).

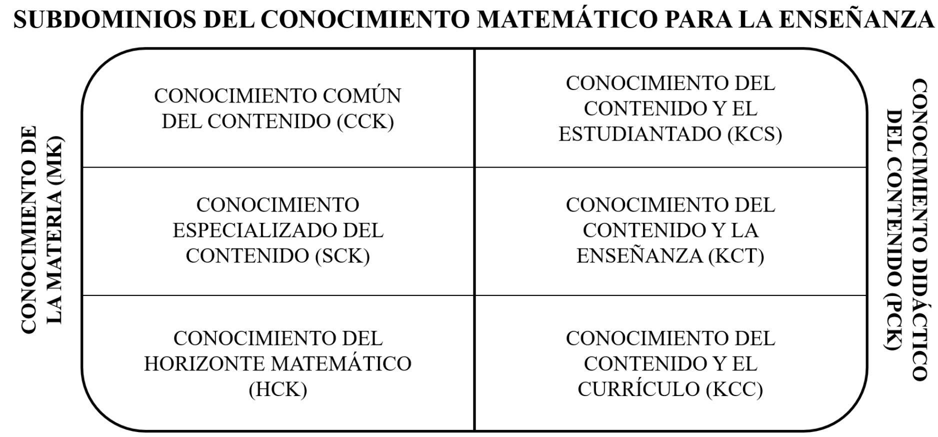


Figura 2.1: Esquema del modelo MKT. Elaboración propia.

La componente relativa al conocimiento del contenido de la materia, o MK[2], reivindica una comprensión profunda de los contenidos ligada a la comprensión de su aprendizaje y enseñanza (Carrillo y col., 2014). Esta reivindicación está reconocida como una de las grandes aportaciones del MKT (Carrillo-Yañez y col., 2018). El carácter especializado se traduce en un conocimiento del contenido distinto al de cualquier otro profesional, y distinto del necesario en la vida diaria (Ball y col., 2008). El modelo MKT se centra en el conocimiento exclusivo del profesorado de matemáticas en el ejercicio de su profesión (Montes y col., 2013).

[1]Del inglés, *Mathematical Knowledge for Teaching.*
[2]Del inglés, *Matter Knowledge.*

Dentro del dominio MK se distinguen tres subdominios: el conocimiento común del contenido (CCK[3]), el conocimiento específico del contenido (SCK[4]) y el conocimiento del horizonte matemático (HCK[5]). El modelo del conocimiento del profesorado de matemáticas se completa con tres subdominios que constituyen el conocimiento didáctico del contenido, o PCK[6]: el conocimiento del contenido y el estudiantado (KCS[7]), el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT[8]) y el conocimiento del contenido y el currículo (KCC[9]).

La separación en tres categorías del conocimiento del contenido supone una de las grandes aportaciones del modelo MKT (Carrillo y col., 2014). Se profundiza y avanza en la distinción de Shulman entre el conocimiento matemático general y el especializado, entendiendo por especializado el conocimiento que necesita el profesorado. Sin embargo, resulta de gran complicación determinar la especialización del conocimiento.

Para saber si una situación aporta evidencias sobre conocimiento común o especializado, debemos compararla con un hipotético conocimiento de una hipotética situación de un hipotético plan de estudios considerando un compendio de diferentes conocimientos deseables (Muñoz Catalán y col., 2015). Se tendría entonces una delimitación muy difusa entre subdominios que podría llevar a una potencial distracción. La obligación de tener que establecer un referente para poder discernir qué es común, solo conlleva a la distracción a la hora de realizar un estudio sobre el conocimiento del profesorado (Muñoz Catalán y col., 2015). Si bien resulta interesante la distinción entre común y especializado, es una cuestión que genera conflicto.

Otro de los grandes avances del MKT es el conocimiento del horizonte matemático (Carrillo y col., 2014). En este modelo se reconoce explícitamente la necesidad de establecer conexiones entre los contenidos y estructurar el conocimiento matemático. Además, distingue tres categorías basándose en la diferente naturaleza de los elementos contenidos en este subdominio. Considera, por una parte, ideas y conceptos; y, por otra,

[3]Del inglés, *Common Content Knowledge.*
[4]Del inglés, *Specialized Content Knowledge.*
[5]Del inglés, *Horizon Content Knowledge.*
[6]Del inglés, *Pedagogical Content Knowledge.*
[7]Del inglés, *Knowledge of Content and Students.*
[8]Del inglés, *Knowledge of Content and Teaching.*
[9]Del inglés, *Knowledge of Content and Curriculum.*

posibles estructuras y relaciones. Además, la tercera categoría se corresponde con los valores centrales de la disciplina; como la coherencia, la precisión y la consistencia de los razonamientos (Loewenberg Ball, 2009). Su naturaleza es diferente de los dos primeros y, salvo el primero, se alejan de la definición del conocimiento del horizonte matemático (Muñoz Catalán y col., 2015).

Un aspecto clave a discutir es el solapamiento del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del contenido. Resulta fundamental que el profesorado conozca la procedencia de los errores del estudiantado (Montes y col., 2013). El problema está en que la comprensión del error desde el punto de vista matemático se corresponde con un conocimiento especializado del contenido; mientras que su comprensión con el objetivo de saber cuáles son las dificultades que presenta el alumnado, se asocia al conocimiento del contenido y el estudiantado (Carrillo Yáñez y col., 2015). Aunque teóricamente no haya conflicto, dificulta la puesta en práctica del modelo. La comprensión matemática del error puede desdibujar el sentido del conocimiento del contenido y el estudiantado; además de reducir la operatividad de las caracterizaciones y limitaciones de los subdominios (Muñoz Catalán y col., 2015).

Finalmente, es necesario mencionar que el MKT se aleja de las matemáticas. Una de las grandes críticas que ha recibido es que se trata de un modelo que perfectamente podría hacer referencia a cualquier otra disciplina (Muñoz Catalán y col., 2015). En la búsqueda de la generalidad del conocimiento del profesorado, se pierden en cierta forma matices propios del aprendizaje y la didáctica de la matemática. A raíz del MKT, han ido surgiendo otros modelos más específicos que buscan refinar y profundizar en las ideas desarrolladas en él (Carrillo y col., 2014). En la sección 2.4 presentaremos uno de esos modelos: el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas.

2.4. El modelo de conocimiento especializado del profesorado de matemáticas (MTSK)

El modelo que utilizaremos para caracterizar el conocimiento específico del profesorado de matemáticas, o MTSK[10], es fruto de muchos trabajos desarrollados en las últimas décadas (Carrillo y col., 2014). Uno de los cuales es el desarrollado por Shulman, presentado en la sección 2.2. No obstante, la influencia más clara y directa se debe al modelo del conocimiento matemático para la docencia, el MKT, expuesto en la sección 2.3.

El objetivo de este modelo analítico es mejorar la comprensión del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas a corto plazo y, a largo plazo, convertirse en referente para la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas (Carrillo Yáñez y col., 2015). Manteniendo la división realizada por Shulman entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, busca resolver las críticas realizadas al MKT (Carrillo y col., 2014). En particular, se centra en la concepción de la especialización del conocimiento por la practica docente y en la especificidad del modelo a la enseñanza de las matemáticas. Se trata, por tanto, de un modelo específico para la comprensión del conocimiento usado por el profesorado para enseñar matemáticas (Muñoz Catalán y col., 2015); a diferencia de los modelos vistos anteriormente, cuyo objetivo o crítica era precisamente la generalidad del conocimiento de la materia a enseñar.

Respecto a la especifidad del conocimiento considerada por el MTSK, debemos tener en cuenta que este es un conocimiento profesional que no se puede desligar de la propia práctica docente. Se suele definir como un conocimiento personal, contextualizado, integrado y complejo, práctico, dinámico y parcialmente tácito (Carrillo y col., 2014). Con estos adjetivos queremos poner de manifiesto que el conocimiento del profesorado es propio de cada individuo y diferente, generado en su contexto profesional, integrador de diferentes saberes y en continua evolución. Además, este conocimiento surge por y para la práctica docente, si bien hay que resaltar que la experiencia en sí misma no constituye un aprendizaje sino que esta debe ir acompañada de un análisis y una reflexión (Carrillo y col., 2014).

[10] Del inglés, *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*.

Tenemos que asumir, por tanto, que el conocimiento del profesorado es el conjunto de saberes y experiencias que posee y usa en el desarrollo de la práctica docente, construido desde la formación inicial y cambiante durante toda su carrera profesional (Climent Rodríguez, 2002). Existen cuatro factores que resultan determinantes para el origen y evolución de este conocimiento especializado: las creencias e ideologías, la experiencia como discente, la experiencia como docente y los saberes académicos adquiridos (Vasco Mora y col., 2015). En este último factor se incluirían todos los saberes académicos relacionados tanto con las disciplinas como con los procesos de enseñanza-aprendizaje y el currículo (Climent Rodríguez, 2002).

Debemos tener presente que el MTSK es más que una propuesta teórica para modelizar el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas. Este modelo supone también una herramienta metodológica para analizar las prácticas docentes mediante sus categorías (Carrillo y col., 2014). La fuente más directa de obtención de información sobre el conocimiento que el profesorado moviliza en el aula es, precisamente, la observación en el aula (Contreras y col., 2018). Sin embargo, no es la única. La planificación del profesorado, los cuestionarios y las entrevistas también pueden ser una gran fuente de información (Flores-Medrano y col., 2013). Mediante la observación, podemos encontrar evidencias e indicios del conocimiento. Debemos remarcar que la observación tiene un sesgo claro por, entre otros, el contexto y la interpretación de quien investiga u observa (Contreras y col., 2018).

2.4.1. Subdominios y categorías del modelo MTSK

Tal y como se avanzaba, el modelo del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas mantiene la división entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido; aunque reordene los subdominios respecto al MKT o el modelo original de Shulman. Una novedad interesante que presenta en la definición de los dominios es la incorporación de una nueva categoría correspondiente a creencias y concepciones del profesorado sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje (Carrillo y col., 2014).

El conjunto de concepciones y creencias acerca de las matemáticas, de su enseñanza y aprendizaje, influyen y condicionan al profesorado en su práctica docente (Carrillo y col., 2014). Estas ideas, que en el fondo tienen una naturaleza similar a la del conocimiento, se distinguen por su naturaleza afectiva, su falsabilidad y su falta de estructuración (Carrillo Yáñez y col., 2015). Se sitúan en el centro del modelo porque se considera que permean el conocimiento contenido en cada uno de los subdominios, condicionando el conocimiento o su puesta en práctica en el aula (Escudero Avila y col., 2015).

Al tratarse de un modelo analítico, resulta necesaria la incorporación de este dominio para comprender completamente el conocimiento del profesorado. No obstante, la relación entre creencias y concepciones, y su integración en el conocimiento, no se ha estudiado en la profundidad necesaria para llegar a puntos de consenso (Escudero Avila y col., 2015). Por ello, se adoptará una posición pragmática respecto a estas ideas del profesorado y no se considerará que se puedan observar directamente, solo inferir en base a la práctica docente (Escudero Avila y col., 2015). Esta postura es similar a la habitual de descripción del contexto del profesorado en el centro educativo y del propio centro (Carrillo Yáñez y col., 2015).

Respecto al conocimiento del contenido, este pasa a llamarse conocimiento matemático, MK[11]. Mantiene la especificidad planteada en el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Carrillo y col., 2014). Sin embargo, reordena su contenido en tres nuevos subdominios: el conocimiento de los temas (KoT[12]), el conocimiento de la estructura matemática (KSM[13]) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM[14]) (Vasco Mora y col., 2015). En la Figura 2.2, puede verse un esquema del MTSK. El planteamiento de estos dominios hace explícita la necesidad de que el profesorado de matemáticas, además de conocer los temas a enseñar, sea capaz de organizarlos según una estructura matemática y tenga conciencia de cómo se razona y desarrolla en matemáticas (Carrillo y col., 2014).

En este modelo, el conocimiento didáctico del contenido no contempla conocimientos pedagógicos generales en contextos de actividades matemáticas (Escudero Avila y col.,

[11] Ahora, del inglés, *Mathematical Knowledge.*
[12] Del inglés, *Knowledge of the Topics*
[13] Del inglés, *Knowledge of the Structure of Mathematics.*
[14] Del inglés, *Knowledge of Practices in Mathematics*

2015). El PCK está constituido por los conocimientos particulares y profesionales de docentes para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Su inclusión en el modelo está motivada por el reconocimiento a la importancia de que el profesorado entienda el contenido matemático como un contenido a enseñar, a aprender y a alcanzar en base a unos estándares (Carrillo y col., 2014). Está integrado por el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT[15]), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM[16]) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS[17]) (Vasco Mora y col., 2015).

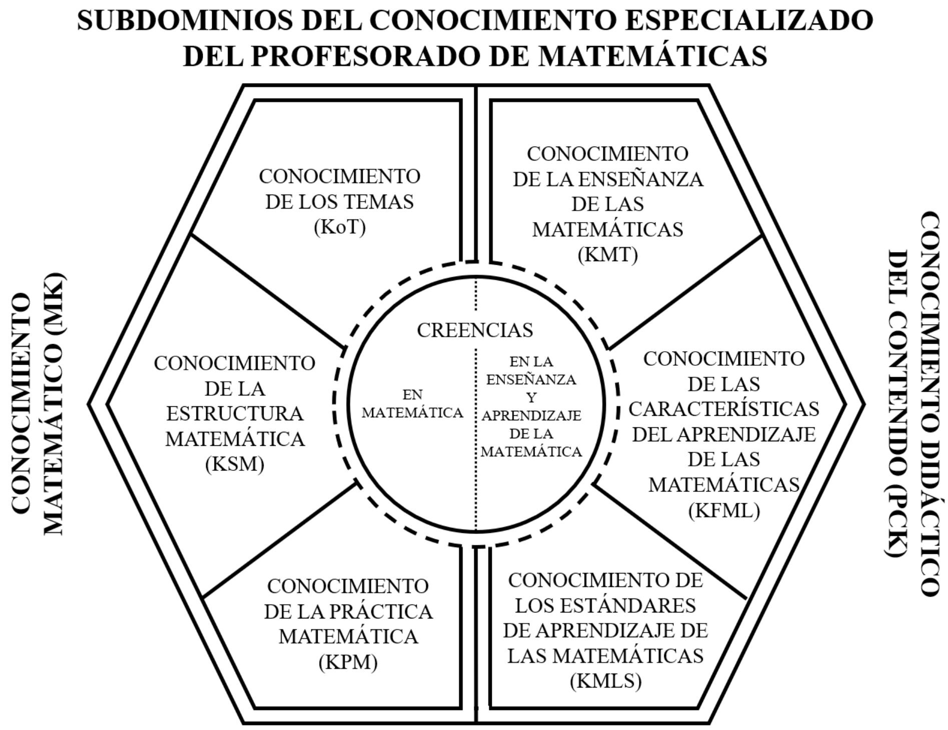


Figura 2.2: Esquema del modelo MTSK. Elaboración propia.

El MTSK define dentro de cada subdominio una serie de categorías internas que ayudan a la caracterización y clasificación del conocimiento que el profesorado de matemáticas utiliza. A continuación, desarrollaremos brevemente tanto los subdominios como las categorías internas de cada uno con el fin de comprender en mayor profundidad el modelo, puesto que resultan fundamentales para el MTSK (Carrillo y col., 2014).

[15]Del inglés, *Knowledge of Mathematics Teaching.*
[16]Del inglés, *Knowledge of the Features of Learning Mathematics.*
[17]Del inglés, *Knowledge of Mathematics Learning Standards.*

Conocimiento de los temas (KoT)

Este subdominio surge al reflexionar sobre el conocimiento común del contenido y el conocimiento especializado del contenido del MKT, teniendo en cuenta el problema expuesto en la Sección 2.3 sobre sus definiciones y delimitaciones (Vasco Mora y col., 2015). En el MTSK, el KoT no se restringe únicamente al contenido matemático de la materia a enseñar. En él están contenidas aquellas afirmaciones, postulados, o principios fundamentales centrales en las matemáticas (Carrillo Yáñez y col., 2015).

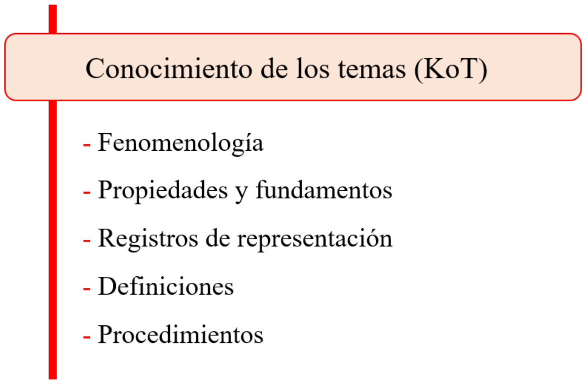


Figura 2.3: Esquema de las diferentes categorías consideradas para caracterizar el conocimiento de los temas. Elaboración propia.

Integra un conocimiento profundo, así como su fundamentación, que excede de lo esperado para el estudiantado (Escudero Avila y col., 2015). Además, se incluyen aquellos aspectos que permiten la creación de relaciones con contextos reales y con el propio contenido matemático, a modo de ejemplos (Muñoz Catalán y col., 2015).

Para caracterizar el contenido del KoT, se proponen cinco categorías generales que pueden utilizarse sea cual sea el tema que se esté abordando: fenomenología, propiedades y fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos (Carrillo y col., 2014). En la Figura 2.3 puede verse un esquema de estas categorías.

La categoría *fenomenología* presenta una dualidad en su caracterización. Por una parte, se puede ver como el conocimiento sobre los diferentes contextos en los que se podría identificar la materia que tratar (Carrillo y col., 2014). Que el profesorado conozca que los seguidores en una red social se pueden modelizar con grafos, sería un ejemplo de contexto en el que aparece la teoría de grafos. Pero, por otra parte, también se puede entender como fenomenología el conocimiento sobre los usos y aplicaciones del tema

(Carrillo y col., 2014), por ejemplo: saber que los algoritmos para buscar caminos de menor valor pueden usarse para decidir rutas de reparto.

En las *propiedades y fundamentos* consideramos el conocimiento de las propiedades y bases de los objetos matemáticos involucrados en el tema o en algún procedimiento del tema (Vasco Mora y col., 2015). Dentro de esta categoría se podría considerar, por ejemplo, el conocimiento del profesorado de que si en un grafo orientado existe un camino desde un vértice i a otro j y existe un camino del vértice j a un tercero k; entonces también existirá un camino de i a k.

Los *registros de representación* hacen referencia a las diferentes formas existentes de presentar el contenido matemático, así como el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado para esas representaciones (Carrillo y col., 2014). A modo de ejemplo, basta considerar un grafo expresado gráficamente o mediante el conjunto de vértices y aristas que lo componen.

Un objeto matemático se describe con el conjunto de propiedades que debe verificar. En *definiciones* se incluye el conocimiento que el profesorado tenga para describir o caracterizar un concepto (Vasco Mora y col., 2015). Cualquier proposición o teorema se enmarcaría dentro de esta categoría.

Finalmente, la última categoría utilizada para caracterizar el KoT, los *procedimientos*, involucra el conocimiento de algoritmos: cómo utilizarlos, cuándo se pueden usar, por qué se emplean de esa forma y qué características tienen sus soluciones (Carrillo y col., 2014). Los algoritmos de Ford-More-Bellman y Dijkstra para el cálculo de caminos de menor valor en grafos orientados son dos ejemplos posibles.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM)

Si el conocimiento de los temas surgía de la reflexión sobre el CCK y el SCK del modelo del conocimiento de las matemáticas para la enseñanza, el conocimiento de la estructura matemática surge tras reflexionar sobre el conocimiento del horizonte matemático planteado en el MKT (Vasco Mora y col., 2015). En la sección 2.3 discutimos sobre los distintos tipos de relaciones que se enmarcaban en el HKT. El MTSK los reorganiza dentro de distintos subdominios según la naturaleza del conocimiento involucrado en las relaciones. Así, las relaciones con elementos extramatemáticos se ubican en la fenomenología de KoT y las conexiones con valores o creencias, como la coherencia o el rigor, pasan a formar el subdominio propio del que hablamos previamente (Carrillo y col., 2014).

El KSM, por tanto, considera únicamente las conexiones entre ideas, conceptos y estructuras matemáticas. Debemos tener presente que estos subdominios no integran el conocimiento sobre cómo construir las relaciones y estructuras. Las formas de construcción serán objeto del siguiente subdominio, del conocimiento de la práctica matemática o KPM (Carrillo y col., 2014).

En este subdominio se entiende que el conocimiento matemático del profesorado no puede ser un conjunto de conceptos y elementos aislados, sino que debe formar un sistema de conexiones que los integre y relacione (Montes y col., 2013). Según el tipo de conexión involucrada se distinguen varias categorías, presentadas en la Figura 2.4. Las conexiones pueden ser vistas desde el punto de vista temporal o conceptual.

Entendemos por conexiones temporales aquellas que involucran conocimientos previos y posteriores en cuanto al proceso de construcción matemático (Escudero Avila y col., 2015). No debe entenderse desde el punto de vista curricular, sino desde el punto de vista estructural (Carrillo y col., 2014). Dan lugar a conexiones de complejización y simplificación. Por otra parte, la definición de objetos matemáticos genera conexiones en los conceptos y entre conceptos. Las primeras ya están consideradas dentro del conocimiento de los temas, en este subdominio nos interesan las conexiones entre conceptos que generan una estructura de las matemáticas (Carrillo y col., 2014).

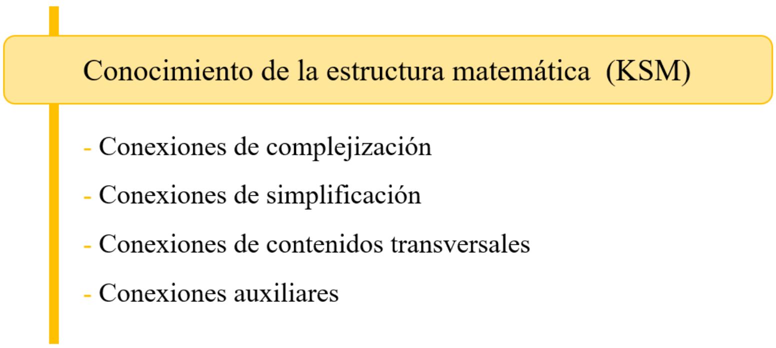


Figura 2.4: Esquema de las diferentes categorías consideradas para caracterizar el conocimiento de la estructura matemática. Elaboración propia.

Las *conexiones de complejización* se caracterizan por relaciones entre los contenidos que se están enseñando y contenidos posteriores. En su definición implica ver la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Vasco Mora y col., 2015). Todas las relaciones de integración de ideas y conceptos en teorías más complejas que los contengan pertenecen a esta categoría (Carrillo Yáñez y col., 2015). En teoría de grafos, al explicar los caminos de menor valor en los que el peso tiene un único criterio, que el profesorado conozca que existen generalizaciones a pesos multicriterio entra dentro de las conexiones de complejización.

En el punto opuesto, se encuentran las *conexiones de simplificación*. Se caracterizan por relaciones entre los contenidos que se están enseñando y contenidos anteriores. En su definición implica ver la matemática avanzada desde un punto de vista elemental (Vasco Mora y col., 2015). En este caso, las relaciones reflejan retrosprección de los contenidos explicados (Carrillo y col., 2014). En el caso de querer obtener caminos de menor valor, el conocimiento de que se pueden sumar los distintos pesos de los posibles caminos y ordenarlos para saber cuál es el menor ejemplifica esta categoría.

El tercer tipo de conexiones no es entre conceptos más simples o más complejos, sino entre aquellos que tienen alguna cualidad en común. Las *conexiones de contenidos transversales* suponen relaciones entre contenidos matemáticos, y los modos de pensamiento asociados, que comparten una característica común (Carrillo Yáñez y col., 2015).

Se puede ejemplificar considerando el conocimiento que el profesorado moviliza en el aula al introducir el concepto de infinito al hablar de posibles caminos en un grafo con un ciclo y números naturales. Al existir un ciclo, los posibles caminos se pueden relacionar con el número de veces que se realiza el ciclo, que es un número natural. La característica común que subyace a estos caminos y los números naturales es precisamente su infinitud.

Respecto a las *conexiones auxiliares*, como su propio nombre indica, aparecen cuando un objeto matemático sirve como auxiliar de otro (Vasco Mora y col., 2015). Uno de los casos más habituales para ilustrar esta categoría es el uso de ecuaciones para determinar las raíces de una función.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

El subdominio correspondiente al conocimiento de la práctica matemática surge del conocimiento del horizonte matemático del MKT. Al incorporarlo al modelo, se pone de manifiesto la necesidad del profesorado de conocer más allá de conceptos y relaciones establecidas (Carrillo y col., 2014). En concreto, comprende todos los procedimientos y características del trabajo matemático. Se puede considerar que este subdominio se encarga del conocimiento sobre cómo se construyen las estructuras y resultados en la disciplina (Carrillo Yáñez y col., 2015).

La lógica proposicional, los modos de proceder y la sintaxis matemáticas son parte fundamental del KPM. Promueve, por tanto, la necesidad de dotar al profesorado de estructuras lógicas de pensamiento; sean estas independientes del concepto abordado o referidas a una temática concreta (Vasco Mora y col., 2015). En la Figura 2.5 se muestran las dos categorías que se proponen para este subdominio y que son precisamente las prácticas ligadas a la matemática general y las prácticas ligadas a una temática en matemáticas.

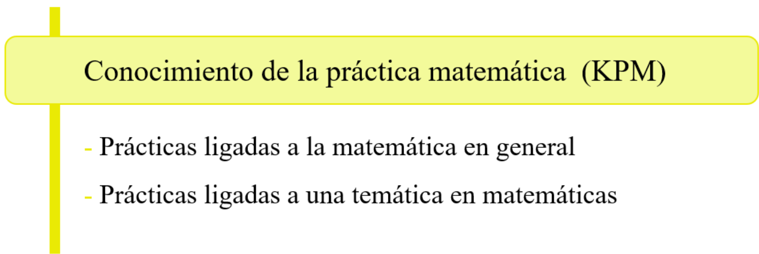


Figura 2.5: Esquema de las diferentes categorías consideradas para caracterizar el conocimiento de la práctica matemática. Elaboración propia.

Las *prácticas ligadas a la matemática en general* comprenden el conocimiento específico ligado a cómo se desarollan las matemáticas independientemente de la temática abordada. En esta categoría se incluye el conocimiento de las formas habituales de proceder en matemáticas como la búsqueda de contraejemplos para negar enunciados, la demostración de teoremas por reducción al absurdo, etc (Carrillo y col., 2014) Debemos matizar que al referirnos a estas formas de proceder, también estamos incluyendo el por qué se pueden usar o por qué es correcto usarlas; más allá de la memorización de las mismas.

Sobre las *prácticas ligadas a una temática en matemáticas* diremos que son una restricción de las generales a ciertos contextos. Por ejemplo, al trabajar en problemas de teoría de grafos con ordenadores, una máquina no es capaz de representar el infinito así que se debe tomar un número muy grande. El uso de un número muy grande a modo de infinito, basado en las limitaciones computacionales, para poder aplicar algoritmos de cálculo. Este sería un ejemplo de práctica ligada a una temática concreta puesto que si no estuviéramos en ese contexto concreto no necesitaríamos representar el infinito de esa forma.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

La acción de enseñar puede involucrar, o no, conocimiento de cómo puede ser llevada a cabo. En este subdominio hablaremos de conocimientos intrínsecamente ligados a los contenidos matemáticos que se quieren enseñar. Como en el resto de subdominios del PCK, los conocimientos contenidos en el KMT pueden estar respaldados por teorías e investigaciones en el campo de la educación matemática o por la observación y reflexión de la práctica docente (Carrillo y col., 2014).

No obstante, no se incluirán conocimientos generales sobre pedagogía; sino que únicamente se considerarán aquellos que tomen los contenidos matemáticos como objeto que enseñar. No se puede ver el conocimiento en matemáticas y la enseñanza de estas como dos elementos por separado, sino que se tendrán en cuenta únicamente los conocimientos donde el contenido condiciona el procesos de enseñanza (Carrillo Yáñez y col., 2015).

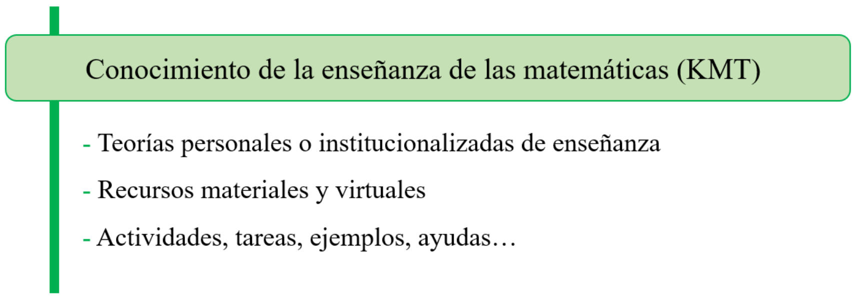


Figura 2.6: Esquema de las diferentes categorías consideradas para caracterizar el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. Elaboración propia.

Los conocimientos que posee el profesorado sobre las teorías personales e institucionalizadas de enseñanza y los recursos materiales y virtuales disponibles conforman este subdominio del MTSK, así como los conocimientos sobre diferentes actividades, tareas, analogías o ejemplos que puede usar en su labor docente. Estas tres categorías, véase la Figura 2.6, integran el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Escudero Avila y col., 2015).

La actuación del profesorado, y el uso que hace del conocimiento, está condicionada por cierto tipo de concepciones. Las distintas teorías e investigaciones en el campo de la educación matemática pueden fundamentar estas concepción, así como la observación y reflexión de las diferentes situaciones que pueden darse en el aula (Carrillo Yáñez y col., 2015).

Estas *teorías personales o institucionales de enseñanza* conforman la primera de las categorías que se pueden emplear para caracterizar el conocimiento del profesorado sobre la enseñanza de las matemáticas. El conocimiento de teorías o metodologías como la ludopedagogía o gamificación, así como la potencialidad de su uso para enseñar teoría de grafos, ilustran esta categoría.

La categoría anterior explicita la necesidad de conocer las formas de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático. En esa misma línea, *recursos materiales y virtuales* surge para integrar la comprensión de las distintas herramientas utilizadas para la enseñanza de cierto contenido matemático.

No se debe restringir únicamente al conocimiento de su existencia, sino que se deben contemplar también los beneficios y dificultades asociados a ellas (Carrillo Yáñez y col., 2015). Los recursos materiales y virtuales más habituales en un aula son el uso de libros de texto, apuntes, pizarras y proyectores; pero los programas informáticos especializados son herramientas con gran potencial que cada vez se usan con más frecuencia.

Finalmente, se consideran las *actividades, tareas, ejemplos, ayudas* como los elementos que denotan la intencionalidad de enseñanza del profesorado en un tema concreto. Aunque guarden una relación estrecha con la categoría anterior, resulta difícil desde el punto de vista analítico clasificarlos como recursos dada su amplitud (Carrillo y col., 2014).

Nuevamente, se considera que el profesorado no debe solo conocer ejemplos y actividades sobre unos contenidos; sino que debe saber cuándo usarlos, cómo usarlos y con qué objetivo. Resulta fundamental, entonces, la adecuación de los mismos a las situaciones en las que se requieren.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

En el modelo del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, el KFLM está formado por los conocimientos sobre las características de aprendizaje propias del contenido matemático. Al igual que ocurría con el KMT, no se puede desligar el aprendizaje de los conceptos que se quieren enseñar. Sin restarle importante al estudiantado, la motivación de este subdominio recae en el conocimiento del profesorado sobre los procesos de aprendizaje desde el punto de vista del contenido matemático (Carrillo Yáñez y col., 2015).

En la Figura 2.7 se muestran las categorías consideradas para caracterizar el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas: formas de aprendizaje, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, formas de interacción del alumnado con el contenido matemático y concepciones del estudiantado sobre matemáticas (Vasco Mora y col., 2015).

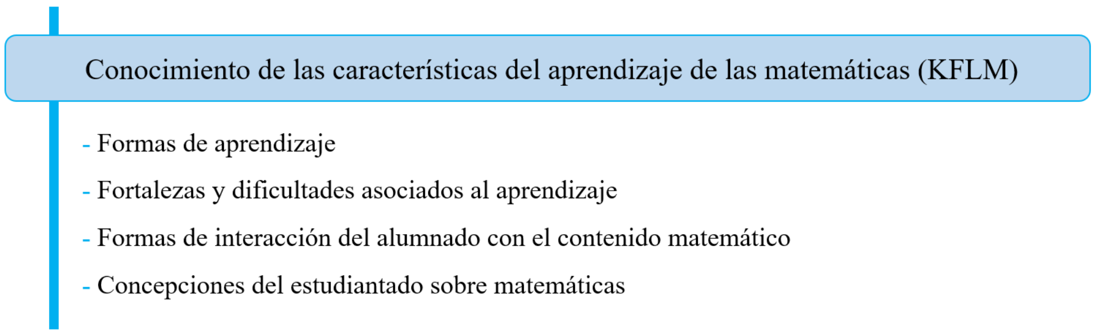


Figura 2.7: Esquema de las diferentes categorías consideradas para caracterizar el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Elaboración propia.

La primera de las categorías, *formas de aprendizaje*, integra el conocimiento de estructuras o teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiantado, así como su aportación a la caracterización del proceso de aprendizaje de las matemáticas (Vasco Mora y col., 2015). El conocimiento de la teoría de los niveles de desarrollo de Van Hiele y su posible aplicación a la teoría de grafos estaría contenido en este tipo de conocimiento.

Las *fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje* hacen referencia a los conocimientos del profesorado sobre los posibles puntos fuertes o débiles del estudiantado al enfrentarse a las matemáticas en general y a temas concretos (Vasco Mora y col., 2015). Merece la pena enfatizar que únicamente se considerarán dentro del modelo las fortalezas y dificultades asociadas a las características matemáticas del contenido, y no a las pedagógicas (Carrillo Yáñez y col., 2015).

En la categoría correspondiente a las *formas de interacción del alumnado con el contenido matemático* se recogen los conocimientos del profesorado acerca de las estrategias habituales y no habituales del estudiantado para abordar una determinada temática. El conocimiento del lenguaje o vocabulario usado comúnmente para referirse a los contenidos matemáticos particulares también está incluido (Carrillo y col., 2014). Un ejemplo que se podría enmarcar dentro de esta categoría es el conocimiento de las formas habituales de resolver un tipo de ejercicios en una temática concreta.

La última categoría de este subdominio hace referencia a las *concepciones del estudiantado sobre matemáticas*. Recoge el conocimiento sobre las expectativas e intereses del estudiantado respecto a los contenidos matemáticos concretos que se quieren enseñar (Vasco Mora y col., 2015). El conocimiento que tiene el profesorado sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociados a los distintos temas por el estudiantado.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

La importancia de que el profesorado comprenda qué está estipulado que el estudiantado aprenda en cada momento, y con qué nivel de desarrollo conceptual, motiva la inclusión de este subdominio dentro del conocimiento didáctico de las matemáticas. En la sección 2.2, vimos que el modelo de Shulman para el conocimiento del profesorado en general ya recogía como un saber básico y necesario el conocimiento del currículo (L. Shulman, 1987).

Precisamente, entendemos por currículo la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas y etapas educativas. El Ministerio de Educación y Formación Profesional de España define el currículo en el Artículo 6 de la LOMLOE[18] como "el conjunto de objetivos, competencias, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas".

Aunque esta ley elimine el concepto de estándares, nos resultan de gran utilidad conceptual al definirlos como indicadores u objetos que muestran el nivel de capacidad atribuible al estudiantado en un determinado momento académico para entender, construir y saber matemáticas (Carrillo y col., 2014). El profesorado puede construir los estándares de aprendizaje a partir del estudio o en contacto con diversas fuentes. Aunque normalmente lo hace adecuándose a un currículo institucional, también puede recurrir a la literatura de investigación que aborda estudios de estadios de conocimiento matemático (Carrillo y col., 2014).

El conocimiento que el profesorado de matemáticas tiene sobre lo que el estudiante debe, o puede, alcanzar en un curso académico concreto será considerado en este subdominio; así como lo que ha alcanzado en anteriores y alcanzará en posteriores. El KMLS también comprenderá los conocimientos del profesorado acerca de las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinado momentos educativos.

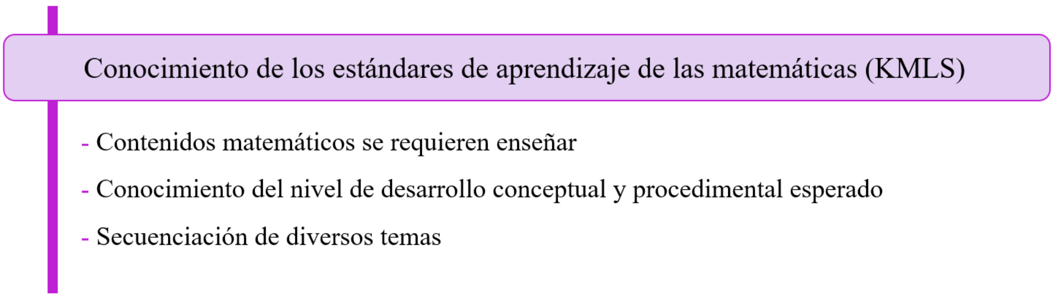


Figura 2.8: Esquema de las diferentes categorías consideradas para caracterizar el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Elaboración propia.

[18] Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Este subdominio está integrado por las tres categorías que se muestran en la Figura 2.8: contenidos matemáticos se requieren enseñar, conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de diversos temas.

En toda formación académica existen unos *contenidos matemáticos se requieren enseñar*. El conocimiento del profesorado respecto a estos constituye la primera de las categorías de caracterización del KMLS. El profesorado puede adquirir este conocimiento, ya sea consultando un documento rector que indique cuales deben ser estos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que se espera que el estudiantado desarrolle en ese momento académico (Carrillo y col., 2014).

Veamos, a modo de ejemplo, el caso del profesorado universitario que imparte una asignatura de teoría de grafos en un grado en matemáticas. El conocimiento que este utiliza para seleccionar qué temas son los apropiados para desarrollar las competencias específicas asociadas a la asignatura en la memoria de verificación del grado estaría integrado dentro de esta categoría

La segunda categoría comprende el *conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado* para una temática en un momento académico concreto. Integra el conocimiento sobre la profundidad con la que se debe abordar un determinado curso escolar, en relación con un ciclo académico determinado (Carrillo Yáñez y col., 2015). Merece la pena destacar que no solo se incluyen los niveles de desarrollo conceptual y procedimental esperados, si no que también los niveles de abstracción, complejización, etc.

Finalmente, la *secuenciación de diversos temas* atiende al conocimiento del profesorado sobre los posibles órdenes cronológicos que pueden llevarse a cabo al presentar la materia. Estos pueden ser correspondientes a contenidos del mismo curso, de anteriores y de posteriores. (Carrillo y col., 2014).

En el Capítulo 3, vamos a describir la metodología llevada a cabo para la recogida de información. A continuación, en el Capítulo 4, se analizarán los resultados obtenidos y se tratará de ilustrar cada categoría de los distintos subdominios.

Capítulo 3

Metodología

La preocupación de especialistas en el campo de la matemática y de la educación sobre qué se debería enseñar, y cómo, ha sido el motor de la investigación en educación matemática (Vasco Mora y col., 2015). Empleando diferentes métodos, tanto cuantitativos como cualitativos, se ha ido avanzando en este campo. Utilizando el MTSK, buscaremos caracterizar el conocimiento que moviliza en el aula una profesora de teoría de grafos en el ámbito universitario.

Para realizar esta investigación, hemos optado por una metodología cualitativa e interpretativa; basándonos en el diseño de un estudio de caso (Vasco Mora y col., 2015). Los instrumentos de recogida de información fueron la observación directa de clases no participante y el análisis en diferido de las mismas clases. Se utilizó un diario de campo para recoger información y se grabó el audio de las clases, tras obtener el consentimiento de la profesora. Las grabaciones fueron parcialmente transcritas, atendiendo a aquellos fragmentos con interés directo en el estudio.

3.1. Elección y contexto de la asignatura

La asignatura elegida, Métodos de Optimización en Redes (MOR), forma parte del plan de estudios del Grado en Matemáticas y de la Programación Conjunta de Enseñanzas Oficiales (PCEO) Grado en Física y Grado en Matemáticas. Enmarcada dentro del módulo de Investigación Operativa e impartida por el área de Estadística e Investigación

Operativa, es una asignatura de 6 créditos con tres horas semanales de clases expositivas y prácticas de aula impartidas por una única profesora. Este curso 2021-2022 ha sido el cuarto año consecutivo que la profesora ha impartido la parte teórica y práctica de la asignatura. Aunque MOR tiene también una hora a la semana de prácticas de ordenadores, en las que se resuelven problemas de grafos usando un programa informático especializado, estas son impartidas por otra profesora, por lo que se escapa del objetivo de este trabajo.

La PCEO es una oferta formativa que permite la obtención de varios títulos oficiales integrando en un plan de estudios las asignaturas de ambas titulaciones[1]. Esta oferta no constituye una titulación única, sino una planificación para cursar simultáneamente dos titulaciones ya existentes en la Universidad de Oviedo: el Grado en Física y el Grado en Matemáticas. En la Universidad de Oviedo, la PCEO Grado en Física y Grado en Matemáticas tiene dos posibles itinerarios claramente diferenciados. La diferencia fundamental resulta en el orden de las asignaturas, haciendo que la Opción A sea similar a cursar el Grado en Matemáticas e ir incorporando progresivamente asignaturas del Grado en Física; mientras que la Opción B sería como cursar el Grado en Física incorporando las asignaturas del Grado en Matemáticas.

Una de las características por las que se valoró la elección de esta asignatura es que, en el momento del desarrollo de las observaciones, tenía un único grupo de clases expositivas. Es decir, la profesora explica la materia a un único grupo de entre 70 y 75 estudiantes simultáneamente. Sin embargo, este grupo es muy heterogéneo debido a los planes de estudio anteriormente mencionados. La asignatura se encuentra localizada en el segundo curso del Grado en Matemáticas y en el de uno de los itinerarios de la PCEO, pero en el otro está en el cuarto curso. Por tanto, el bagaje y el grado de madurez matemática del estudiantado es especialmente diverso.

En el curso 2020-2021; de 75 estudiantes matriculados, 25 se correspondían con estudiantes del Grado en Matemáticas. De la PCEO Opción A provenían 24 estudiantes y 26 se encontraban cursando la PCEO Opción B.

[1] Acuerdo de 14 de junio de 2018, del Consejo de Gobierno de la Universidad de Oviedo, por el que se aprueban las directrices para la implantación y desarrollo de propuestas de programación conjunta de enseñanzas oficiales (PCEO).

Pese a la diferente trayectoria del estudiantado, no se observan grandes diferencias en la superación de la asignatura. En la Tabla 3.1 puede verse la tasa de rendimiento de MOR según el plan de estudios de procedencia del estudiantado. Se define la tasa de rendimiento (TR) como la relación porcentual entre el número de estudiantes que supera la asignatura y el número de estudiantes que se haya matriculado. En dicha tabla observamos que el año con más variación de resultados según la procedencia del estudiantado se corresponde con el curso 2017-2018, el último antes de que la profesora empezara a impartir la asignatura.

Tabla 3.1: Tasas de rendimiento de Modelos de Optimización en Redes, según el plan de estudios del estudiantado, de los últimos cuatro cursos. Elaboración propia. Fuente: "Estudio de rendimiento académico. Curso 2020-2021. Grado en Matemáticas con estudiantes de Doble Grado", Unidad Técnica de Calidad, Vicerrectorado de Gestión Académica, Universidad de Oviedo (2021).

TR (%)	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021
Matemáticas	78.6	86.7	100	96.2
Opción A	92.9	100	95.5	100
Opción B	73.9	91.3	100	100
Total	82.3	92.8	98.4	98.7

La tasa de rendimiento es un indicador que nos sirve, con una pequeña modificación, para comparar los resultados de cada asignatura con los resultados tanto del grado como de la universidad. Para ello, consideramos la TR de una titulación como la relación porcentual entre el número de créditos superados y el número de créditos matriculados.

Introducir este pequeño cambio en la definición resulta en una generalización de la anterior, puesto que todos los estudiantes que estén matriculados en una asignatura lo estarán con el mismo número de créditos; lo cual no ocurre al considerar el grado correspondiente. En la Tabla 3.2, observamos que los resultados de MOR están por encima tanto de los del Grado en Matemáticas, como de los de la Facultad de Ciencias (que comprende los estudios de Matemáticas y de Física) y la Universidad de Oviedo.

Tabla 3.2: Tasas de rendimiento de Modelos de Optimización en Redes, del Grado en Matemáticas, de la Facultad de Ciencias y de la Universidad de Oviedo de los últimos cuatro cursos. Elaboración propia. Fuente: "Estudio de rendimiento académico. Curso 2020-2021. Grado en Matemáticas con estudiantes de Doble Grado", Unidad Técnica de Calidad, Vicerrectorado de Gestión Académica, Universidad de Oviedo (2021).

TR (%)	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021
MOR	82.3	92.8	98.4	98.7
Matemáticas	72.4	73.0	83.7	74.0
Fac. Ciencias	76.3	78.8	86.7	81.0
U.O.	74.9	76.0	82.2	74.3

Por otro lado, los contenidos de la asignatura también fueron un factor importante a tener en cuenta. La asignatura cuenta con cuatro temas enmarcados en la teoría de grafos. Estos contenidos resultan novedosos para el estudiantado de la asignatura, independientemente de su origen. MOR es la primera asignatura en la que se presenta al estudiantado nociones de teoría de grafos. Por tanto, los contenidos de la asignatura no son especialmente complicados y, dada la temática, resultan bastante atractivos al combinar una formulación teórica y una representación gráfica. El temario de la asignatura es el siguiente:

1. Introducción a la teoría de grafos
2. Árboles y arborescencias
3. Camino de menor valor
4. Redes de flujo

Finalmente, pero no por ello menos importante, debemos destacar la buena voluntad y predisposición de la profesora para realizar este estudio. Su colaboración resultó un factor imprescindible y fundamental a la hora de seleccionar la asignatura. Debo reconocer que esta postura no me sorprendió. Al cursar la asignatura en el curso 2019-2020, y hablar con compañeras que la cursaron otros cursos, todas destacan las ganas y buen ánimo de la profesora de MOR.

3.2. Objetivos del estudio

El objetivo general de este trabajo fin de grado es realizar una aproximación al conocimiento especializado de una profesora de teoría de grafos a través del análisis de su práctica. Es importante remarcar que se trata de una caracterización descriptiva de un caso, no se busca generalizar al conocimiento del profesorado de teoría de grafos ni de otras áreas de conocimiento.

Tampoco se pretende categorizar el conocimiento especializado que el profesorado tiene, solo el que moviliza para impartir unas clases concretas. El análisis se realizará usando el modelo del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas desarrollado por el grupo de la Universidad de Huelva: el MTSK (Carrillo y col., 2014); desarrollado en la sección 2.4.

Como objetivo específico, se tratará de encontrar posibles relaciones entre las categorías contenidas en los subdominios del MTSK en un contexto de enseñanza de teoría de grafos.

3.3. Método de recogida de datos

Una vez seleccionada la asignatura, y con el apoyo de la profesora, decidimos utilizar un método de observación directa. Con el consentimiento de la profesora, se grabó el audio de las cinco sesiones a las que se acudió. La presencia en el aula se realizó en las sesiones correspondientes al 25, 27 y 29 de octubre y 3 y 5 de noviembre.

A la profesora se le informó de que la investigación que íbamos a desarrollar se enmarcaba en el campo de la educación matemática. En concreto, en la constatación empírica de teorías que intentan describir modelos que caracterizan el conocimiento que el profesorado moviliza cuando da clase de matemáticas.

La fecha de inicio de la observación, el 25 de octubre, fue seleccionada coincidiendo con el inicio del tema tres de la asignatura: camino de menor valor. Al decidir analizar el conocimiento que la profesora moviliza en sus clases de MOR, buscamos cuál era el mejor momento para la observación siguiendo varios criterios:

- Inicio de tema: que se comenzara un tema o sección para poder realizar la observación desde el principio.
- Autocontenido: que no dependiera o ampliara estrictamente conceptos vistos en temas anteriores, por simplicidad del estudio.
- Equilibrio entre teoría y práctica: que hubiera tanto carga teórica como de aplicación práctica y/o desarrollo de algoritmos.

Tras plantearle a la profesora estos criterios de selección, nos recomendó empezar las observaciones al iniciar el tema tres y acordamos continuarlas hasta que se hubiera obtenido la información necesaria. En este caso, aunque se observaron cinco sesiones, decidimos quedarnos con las cuatro primeras sesiones por contenido y extensión de este trabajo.

El tema correspondiente a caminos de menor valor resultó la mejor opción al transcurrir en paralelo al tema anterior, correspondiente a árboles y arborescencias. Aunque pueda haber procedimientos y nociones similares puesto que están enmarcados dentro del mismo curso, el objetivo y forma de trabajo de cada uno de los dos temas difiere. Además, el inicio del tema tres consiste en los algoritmos de búsqueda de caminos de menor valor en grafos orientados, asegurando el equilibrio deseado entre teoría y práctica.

Al incorporarnos al aula para realizar las observaciones y las grabaciones se informó al estudiantado de la labor de observación que se iba a realizar; incidiendo en el carácter descriptivo, y no prescriptivo, de esta. Asimismo, se comunicó al estudiantado que se iba a grabar el audio de las clases, aclarando en todo momento que no eran el sujeto de observación y animando a que las clases discurrieran con normalidad.

Combinando las anotaciones del diario de campo y el visionado en diferido de las grabaciones, se seleccionaron los fragmentos más interesantes para nuestro estudio. Las transcripciones de estos fragmentos pueden encontrarse en el Anexo A. Cada transcripción se acompaña de un código, para facilitar futuras revisiones de las grabaciones, y de un pequeño texto descriptivo de la intervención. Además, se explicita el subdominio y la categoría del MTSK en la que se enmarcaría el indicio de conocimiento observado que la profesora moviliza en la correspondiente intervención. Todas las figuras incluidas en el anexo, salvo aquellas en las que se indique lo contrario, son de elaboración propia en base a lo dibujado por la profesora en la pizarra. Estos dibujos, tablas y esquemas también forman parte del conocimiento movilizado por la profesora en el aula y, en consecuencia, también son objeto de este estudio. Todas las figuras tienen también asociados indicios clasificados atendiendo a la categorización del MTSK.

En el Capítulo 4 se analizarán los indicios de conocimiento especializado observado en las clases de la profesora. Trataremos de describir cualitativamente cómo es el conocimiento que hemos observado que ha movilizado en el aula desde una perspectiva global. También detallaremos los indicios correspondientes a cada subdominio e intentaremos analizarlos para constatar evidencias del conocimiento de la profesora.

Capítulo 4

Análisis de las observaciones

Tras acudir al aula y observar a la profesora en cinco sesiones, decidimos analizar únicamente las cuatro primeras por extensión del trabajo y contenido de las mismas. En el Capítulo 3 expusimos cómo se seleccionaron los fragmentos recogidos en el Anexo A. Posteriormente, las intervenciones fueron analizadas para tratar de deducir qué conocimiento movilizaba la profesora en sus intervenciones. Fruto de este análisis se asoció a cada una de ellas una serie de indicios de conocimiento clasificados siguiendo el MTSK, expuesto en la Sección 2.4.

Resulta importante remarcar por qué asociamos indicios a las intervenciones y no evidencias. Al tratarse de un modelo cualitativo basado en la observación e interpretación, no podemos pretender una objetividad absoluta puesto que la representación del mundo de cada sujeto es, necesariamente, subjetiva (Carrillo y col., 2014). Adoptaremos, por tanto, el sentido de la objetividad planteado por Fourez (Fourez, 1997), y aceptado por el grupo de investigación que ha desarrollado el MTSK (Carrillo y col., 2014): "ser objetivo es respetar las reglas de una subjetividad compartida".

Tal y como definimos el conocimiento matemático en la Sección 2.1, este debe ir acompañado de la reflexión. Por tanto, consideraremos que la profesora moviliza cierto conocimiento cuando vaya acompañado de un fin concreto, más allá de la experiencia o la repetición de patrones. Consideraremos como *indicios* las sospechas de que el profesorado puede tener un conocimiento concreto; mientras que las *evidencias* serán las afirmaciones de la existencia de dicho conocimiento (Carrillo Yáñez y col., 2015).

Asumimos, por tanto, que para poder hablar de evidencias necesitamos una confirmación de las sospechas, ya sea por cúmulo de indicios que las respalden o por constatación por parte de la profesora. En este trabajo nos hemos restringido únicamente a la observación como método de recogida de datos, por lo que consideraremos que hay una evidencia de conocimiento por parte de la profesora cuando esté apoyada por varios indicios o la afirmación sea inequívoca en su intervención. Hay otros estudios, de mayor extensión, en los que se utiliza la entrevista como método de constatación (Vasco Mora y col., 2015).

Así pues, en principio, asociamos a las intervenciones de la profesora indicios de conocimiento. Analizando los fragmentos globalmente y relacionando los indicios, buscaremos obtener evidencias más fuertes de conocimiento.

4.1. Descripción global de los indicios encontrados

Al analizar las grabaciones se identificaron un total de 68 intervenciones de la profesora en las que hay indicios de algún conocimiento matemático especializado. Estos fragmentos se complementan con las 18 figuras del Anexo A correspondientes a esquemas, representaciones gráficas y tablas dibujadas en la pizarra o proyectadas con el ordenador. El total de indicios observados asciende a 145, claramente muy superior al número de intervenciones y figuras.

Esta situación se debe al carácter integral del conocimiento matemático del profesorado. Aunque el MTSK establezca subdominios para clasificar analíticamente el conocimiento, no debemos entenderlos como compartimentos disjuntos (Carrillo y col., 2014). Será posible, por tanto, encontrar intervenciones en las que el profesorado movilice conocimientos de diferentes categorías. Para ilustrar este aspecto del MTSK vamos a analizar, a modo de ejemplo, el siguiente fragmento:

> `[251021-1630]` *Ya no es un problema global como en el tema dos [... que] se buscaba cómo conectar cuatro ciudades de forma óptima. Ahora busco cómo conectar una con otra de forma óptima y paso del resto. Lo que pasa es que como lo voy a replicar y lo voy a hacer para [todas]. Parece que estoy haciendo lo mismo pero el*

planteamiento es completamente distinto. [...] Aquí vamos vértice a vértice.

Por una parte, resulta claro que la profesora comprende los algoritmos y sus propiedades. Enfatiza la diferencia que habrá al trabajar con ellos, movilizando un conocimiento correspondiente al subdominio KoT en la categoría de *procedimientos*.

Paralelamente, parece intentar adelantarse a un problema que podría surgir: que el estudiantado piense que es lo mismo porque los procedimientos son parecidos. Desconocemos si esta advertencia la hace por conocimiento de la similitud entre los algoritmos o por su experiencia como docente de la asignatura. La profesora podría saber que un error habitual del estudiantado a la hora de enfrentarse a este tipo de problemas es usar los algoritmos del tema anterior porque el objetivo es parecido. Por ello, podemos identificar un indicio de KFLM de *formas de interacción del alumnado con el contenido matemático*.

Finalmente, remarca la diferencia entre el tema actual y el anterior incidiendo en el objetivo de cada uno de ellos. Podríamos considerar, por tanto, un indicio de KMLS correspondiente a la *secuenciación de diversos temas*.

En esta intervención, la profesora podría haber movilizado entonces conocimientos correspondientes a tres subdominios diferentes: KoT, KFLM y KMLS. En general, casi todos los fragmentos seleccionados en el anexo contienen dos indicios de conocimiento. Hay varios que tienen un único indicio asociado, fundamentalmente cuando la profesora realiza alguna definición, y en alguna intervención como la mostrada anteriormente se consideran tres subdominios, pero nunca más.

Al considerar la distribución de indicios identificados según el subdominio en el que se enmarcarían, se ve que esta distribución dista considerablemente de ser homogénea. En la Figura 4.1 podemos ver un diagrama de sectores en el se representa el porcentaje de indicios correspondiente a cada subdominio.

Casi la mitad de los indicios, el 47 %, se incluyen en el subdominio KoT. Estudios realizados del conocimiento especializado del profesorado universitario de matemáticas sobre estadística (Peñaherrera y col., 2021) o sobre álgebra (Vasco-Mora y col., 2021) también encuentran que el subdominio más utilizado es el KoT; por lo que no resulta sorprendente que el subdominio con mayor presencia sea este. Sin embargo, a diferencia de estos estudios, nosotros sí que encontramos indicios de KSM y KPM; un 5 % y un 8 % respectivamente. Esto supone que en torno al 60 % de los indicios identificados se corresponderían con conocimiento matemático.

Resulta interesante especificar varios aspectos de los trabajos anteriormente citados. Estos estudios fueron realizados analizando profesorado que impartía clases de estadística (Peñaherrera y col., 2021) y de álgebra (Vasco-Mora y col., 2021) en un grado en ingeniería en una universidad de Ecuador. En la Sección 2.1, enfatizábamos el carácter contextual del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas (Carrillo y col., 2014). Se podría pensar entonces que el enfoque y la metodología podría ser diferente según, entre otros factores, el grado en el que se impartiera la asignatura y, consecuentemente, el tipo de conocimiento que movilizarían sería diferente. En nuestro caso, al encontrarnos en un grado en matemáticas, podemos plantearnos que la estructura y la práctica matemática estarán presentes y, de hecho, hemos encontrado indicios de estos conocimientos.

Figura 4.1: Porcentaje de indicios identificados de cada subdominio del MKTS. Elaboración propia.

El 40 % de los indicios pertenecen a contenido didáctico de las matemáticas. Estos indicios se catalogan mayoritariamente como KMT. La presencia de KFLM, un 8 % del total, es bastante menor al 27 % correspondiente a KMT. Finalmente, también se identificaron un 5 % de indicios de KMLS.

Para poder afirmar la existencia de evidencias, necesitamos conocer más en detalle cómo es el conocimiento que la profesora ha movilizado y cuándo. Aunque las cuatro sesiones que se presenciaron fuesen consecutivas, hay una gran diferencia de contenidos y finalidades en ellas. La primera sesión, correspondiente al 25 de octubre de 2021, coincidió con el inicio del tema. Por tanto, la lección fue enfocada sobre todo a su presentación y comparación con la anterior. En la siguiente sesión, el 27 de octubre, se presentaron varios resultados teóricos necesarios para la formulación del primero de los dos algoritmos para el cálculo de caminos de menor valor. El 29 de octubre se presentó el primer algoritmo y se trabajaron varios grafos con él. Finalmente, el 3 noviembre se introdujo la teoría restante para el segundo algoritmo; que también se formuló y utilizó.

Merece la pena destacar que la propia descripción de las cuatro sesiones supone que la profesora ha seguido un orden lógico en las mismas. Ha secuenciado y presentado de forma gradual los contenidos teórico-prácticos necesarios para explicar la formulación y uso de los dos algoritmos. Desde esta visión global, podemos considerar bastantes indicios de KFLM en su categorización de *secuenciación de diversos temas*. Posteriormente, en la Sección 4.6 retomaremos esta cuestión para intentar afirmar la existencia de evidencias en este sentido.

Tabla 4.1: Desglose por subdominios de los indicios encontrados cada día al analizar las clases de la profesora.

	25/10/2021	25/10/2021	29/10/2021	03/11/2021
KoT	8	17	19	25
KSM	4	2	1	0
KPM	6	2	2	2
KMT	2	10	12	15
KFLM	5	2	3	1
KMLS	6	1	0	0
Total	31	34	37	43

De momento, en base a la descripción de las clases, vamos a ver si existen diferencias en los indicios de conocimiento movilizado por la profesora según la temática de la sesión. Si consideramos su distribución por días, aunque según avanzan las clases el número total de indicios aumenta, no se aprecian diferencias especialmente reseñables respecto al total. No ocurre lo mismo al desglosar los indicios observados cada día en función del subdominio en el que se enmarcarían, véase la Tabla 4.1.

Es interesante observar cómo según avanzan las sesiones y se va profundizando en el contenido matemático, el número de indicios de KoT y KMT suben mientras que del resto de subdominios disminuyen sus apariciones. Resulta necesario plantearse la existencia de relaciones entre estos subdominios. Intuitivamente, al avanzar en el tema y profundizar en los contenidos, puede resultar cada vez más necesario plantearse cómo enseñarlos, qué recursos tenemos y cómo podemos ejemplificarlos para que se entiendan mejor. Debemos, por tanto, analizar cómo es el contenido dentro de cada subdominio y buscar posibles relaciones en las transcripciones.

También destaca considerablemente, la disminución de indicios asociados a KMLS. Prácticamente todos se encuentran en la primera sesión, correspondiente a la contextualización del tema. En la Sección 4.7 veremos que, además, casi todos los indicios se corresponden con secuenciación de diversos temas. Parece razonable entonces, afirmar que una vez presentado el tema, la profesora no recurre a este tipo de conocimientos. Una situación similar parece ocurrir con el subdominio asociado al conocimiento de la estructura matemática (KSM).

Para poder explorar las relaciones anteriormente planteadas, y explorar la posibilidad de otras, resultará de gran interés analizar cómo es el conocimiento dentro de cada subdominio. En las secciones posteriores, abordaremos la distribución de los indicios en función de la categoría con la que se correspondan.

4.2. Sobre el conocimiento de los temas (KoT)

El mayor porcentaje de indicios identificados, tanto sobre el total como sobre cada uno de los días, se corresponde con conocimientos del tema. La categoría más frecuente, véase Figura 4.2, es la relativa a los *procedimientos*. Debemos tener en cuenta que nos encontramos analizando cuatro sesiones cuyo objetivo es la presentación de dos algoritmos para el cálculo de caminos de menor valor. Por tanto, resulta bastante razonable que esta categoría sea la más frecuente.

En total, hemos identificado 25 fragmentos en los que se discute sobre los algoritmos. Todas las intervenciones en las que se explican cómo usarlos, cuándo utilizarlos y cuándo no, por qué de esa forma o qué se obtiene al utilizarlos presentan indicios de conocimiento de los temas caracterizados dentro de esta categoría.

En la siguiente intervención la profesora incide sobre cuándo se debe usar cada algoritmo, remarcando la importancia de usar el algoritmo de Dijkstra únicamente cuando no haya pesos negativos.

> `[031121-1612-b]` *Si en los pesos hay alguno negativo, [Dijkstra] no vale. Aplicar se puede aplicar porque aplicar se puede aplicar todo. Pero no está garantizado que encuentre el óptimo porque este teorema solo se puede usar para pesos positivos.*

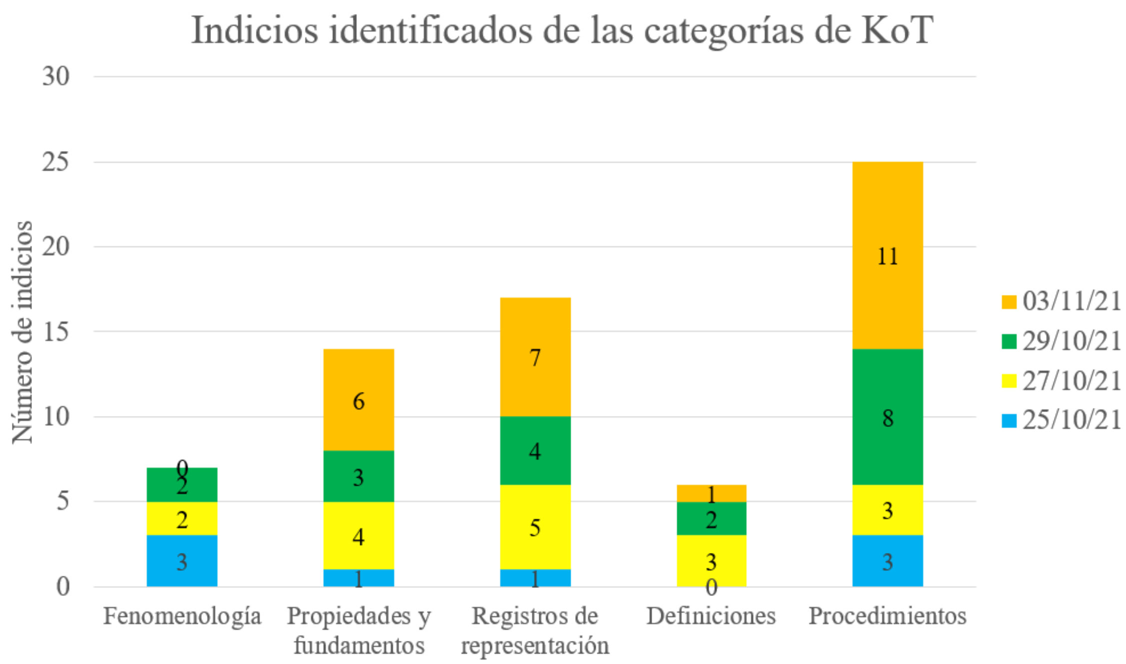


Figura 4.2: Número de indicios identificados de cada categoría de KoT en las distintas clases.

Según avanza el tema y se profundiza en los algoritmos, la profesora moviliza en más ocasiones algún conocimiento categorizado como procedimientos. Este aumento constata la relación entre los contenidos que la profesora quiere enseñar y el conocimiento matemático que moviliza. Estaríamos, por tanto, ante una evidencia de este tipo de KoT.

Para la categoría de *propiedades y fundamentos* se han identificado 14 indicios, 6 de los cuales se corresponden con fragmentos de la última clase. El siguiente fragmento caracteriza esta categoría de forma muy clara porque se pone de manifiesto una de las propiedades básicas de los caminos de menor valor.

> `[271021-1628]` *Si yo tengo los caminos de menor valor entre uno y otro [vértices y estos] tienen diez vértices en el medio, también conozco los caminos de menor valor a los vértices intermedios. Por lo que decís, si no tendría una forma más corta de llegar, con menos valor. ¿Por qué sera esto importante para el algoritmo? Porque me permite encontrarlos todos a la vez. [...] Computacionalmente ahorro tiempo. [...] Este resultado que veremos a continuación permite trabajar en bloque aunque mi problema es local y voy vértice a vértice.*

Como ya se comentó previamente, la obtención de caminos de menor valor es el eje vertebrador de las sesiones analizadas. Resulta entendible que sus propiedades y fundamentos aparezcan recurrentemente. Estas intervenciones sustentan la afirmación de más evidencias de KoT en el desarrollo de las clases de la profesora.

Se han identificado 7 indicios que se corresponderían con un conocimiento de los temas que podríamos categorizar como *fenomenología*. La mayor parte de ellos, 5, se encontraron en las dos primeras clases; correspondientes a la presentación del tema y a la explicación de las bases para el desarrollo del primer algoritmo.

La disminución en la frecuencia de esta categoría contrasta con un aumento de indicios referidos a procedimientos y propiedades y fundamentos. Sería interesante plantearse una relación inversa entre ellas, asociada a los contenidos desarrollados en cada sesión.

En el siguiente fragmento la profesora dibuja un grafo en la pizarra simulando conexiones entre ciudades para presentar el tema e ilustrar el tipo de problemas que se van a querer resolver mediante caminos de menor valor, véase la Figura 4.3. Se considera que la profesora, en esta intervención, moviliza un conocimiento que podemos incluir dentro de esta categoría porque está mostrando un contexto real en el que aparecen los caminos de menor valor.

[251021-1629-b] *Imaginaos que es una red de distribución de camiones que llevan un producto [...] y quieren ver cuál es el camino más corto. Ahora explicamos qué es eso de más corto, porque no tiene por qué ser corto de distancia.*

Respecto a los indicios encontrados para los *registros de representación*, prácticamente todos se corresponden con representaciones gráficas de grafos. En la la Figura 4.3, puede verse un esquema del grafo dibujado por la profesora en la pizarra para completar el fragmento anterior.

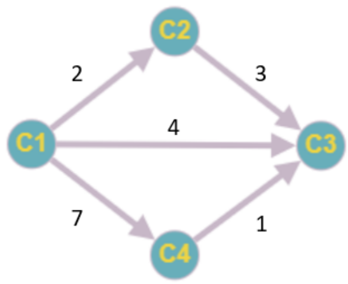


Figura 4.3: Grafo dibujado en la pizarra por la profesora simulando conexiones entre ciudades.

Aunque se pudiera pensar que los conocimientos correspondientes a la categoría de *definiciones* serían de los más movilizados, no es así. Únicamente se han encontrado seis indicios, que se corresponden con los teoremas en los que se fundamentan los algoritmos, una definición de un conjunto y la descripción formal de ambos los algoritmos. La falta de observaciones de esta categoría no debe sorprendernos puesto que prácticamente la totalidad de los elementos matemáticos utilizados fueron definidos al iniciar la asignatura, en el tema 1 de la misma. A modo de ejemplo, presentamos la intervención en la que define el conjunto de vértices optimizables que se utiliza en los algoritmos.

[291021-1523] V' *es el conjunto de vértices que yo aún puedo optimizar, es decir, que igual puedo encontrar un camino mejor para llegar a ellos. Inicialmente son todos, todos los que no sean la raíz. En este caso son el dos, el tres y el cuatro.*

4.3. Sobre el conocimiento de la estructura matemática (KSM)

En la Figura 4.4 está representado el número de indicios identificados de las distintas categorías de KSM. Se puede ver que, de los 7 indicios que se han observado, 3 se corresponden con conexiones de contenidos transversales. La parte práctica del tema permitió a la profesora conectar y comparar, en muchas de las intervenciones, los contenidos del tema anterior y los de este. Tratándose de problemas diferentes, tienen en común los conceptos y propiedades básicas de teoría de grafos que ambos temas comparten. Es por ello que, cada uno de los indicios lo encontramos en una sesión diferente.

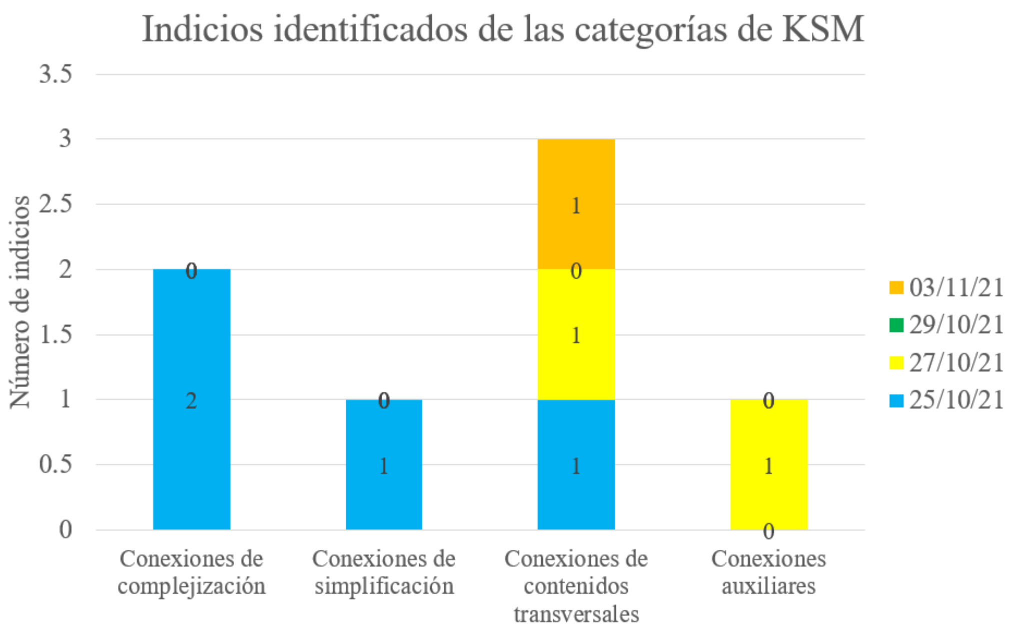


Figura 4.4: Número de indicios identificados de cada categoría de KSM en las distintas clases.

Pese a las relaciones existentes entre los temas, el fragmento que mejor simboliza las *conexiones de contenidos transversales* está referido a la solución de cierto tipo de problemas. Esta intervención es una de las que primero se registraron. En ella la profesora presenta los contenidos que se van a desarrollar en las siguientes semanas y explica, y por tanto relaciona, que hay otra asignatura en el grado cuyos contenidos permitirán resolver los mismos problemas.

Este es un buen fragmento porque relaciona indicios de dos subdominios diferentes: KSM y KMLS. En este caso, nos interesa que al hablar de la programación lineal, como teoría y herramienta, está estableciendo una conexión de contenidos transversales. La característica común que relaciona los contenidos es su utilidad para resolver un tipo de problemas.

> `[251021-1629-a]` *Vamos con el tema 3, que se llama camino de menor valor. Lo primero es que es un tema en el que se trabaja muchísimo hoy en día porque es un tema súper importante. Tenéis una asignatura en tercero [...] en el Grado en Matemáticas [y cuarto en la PCEO] que es Programación Matemática donde algunos problemas aplicados se pueden resolver aplicando grafos, planteándolo mediante un grafo, o planteándolo mediante programación lineal. Pero son problemas bastante típicos y, de hecho, ya digo que hoy en día se sigue investigando en eso y nosotros hacemos cosas. No es un tema para nada que esté acabado, todo lo contrario: hay mucho dinero por el camino.*

Del resto de categorías se han encontrado muy pocos indicios. Tres en la sesión de presentación de la asignatura y una en la de fundamentación del primer algoritmo. Estas dos sesiones sirven en muchos casos para enmarcar los contenidos del tema en una teoría superior y recordar los conceptos que sirven para desarrollarla, por lo que es lógico que el resto de indicios se correspondan sobretodo con *conexiones de complejización y simplificación*.

Respecto a las de complejización, resalta un fragmento en el que, precisamente, se sitúa un problema en un contexto mucho más general. La profesora aprovecha un ejercicio de caminos de menor valor para ilustrar al estudiantado las posibles vías de desarrollo y aplicación de los grafos. Evidentemente, supone una complicación del problema que se escapa de la asignatura. Pero resulta interesante, porque permite al alumnado interaccionar con el contenido desde un punto de vista real.

> `[251021-1634-a]` *¿Qué pasa si aquí tengo varios criterios? Por ejemplo: peso, coste y comodidad. Quiero buscar la forma mejor respecto a los tres criterios. Igual el que es más corto es caro. [...] No puedes hacer una media porque uno son euros y otro son kilómetros. Eso se llaman problemas multicriterio.*

En otro fragmento de la misma clase, hablando de la práctica matemática y la forma de construir el conocimiento, la profesora reflexiona sobre la nomenclatura y el lenguaje matemático. En esta intervención, se presenta la función valor absoluto desde el punto de vista de sus características más básicas. En este caso, el contexto es fundamental. Se habla a estudiantes universitarios sobre la función valor absoluto tal y como se le presentaría a un estudiante de los primeros cursos de secundaria. Esta reflexión parece indicar una retrospección de la profesora sobre dicha función y supone un buen ejemplo de esta categoría.

> `[251021-1648]` *Hay mucha nomenclatura que es una manera de simplificar y escribir menos. [...] Cuando daba clase en un máster de ortodoncia, [a la función valor absoluto la llamábamos] la función "quitar el signo" porque lo entendían mucho mejor.*

En *conexiones auxiliares* únicamente se identificó un indicio de conocimiento. Una posible explicación sería el carácter autocontenido y básico de la asignatura. Los contenidos desarrollados en las sesiones que se analizaron no presentan grandes dificultades teóricas o de cálculo que requirieran contenidos auxiliares. En este fragmento, el único identificado, la profesora conecta el ejemplo con sucesiones de números negativos.

> `[271021-1613]` *Esto seguro que se puede poner con algo de sucesiones. Algo que va decreciendo [...] Existirían caminos con valor que tienden a menos infinito. Para que haya una cota inferior de valores lo que tiene que ocurrir es que no haya circuitos de valor negativo. No digo que esto sea una prueba, esto es una conjetura hecha a partir del razonamiento. Estoy intentando explicar el enunciado de un teorema que dice eso, [...] de hecho, el teorema dice que es un si y solo si.*

4.4. Sobre el conocimiento de la práctica matemática (KPM)

El día que más indicios de KPM se encontraron fue el primero, entre los que destacan los correspondientes a prácticas generales en matemáticas. Esta observación se podría explicar teniendo en cuenta que la primera sesión es de presentación del contenido que se va a tratar, por lo que no es una sesión en la que se entre en profundidad en la obtención de caminos de menor valor.

Así como en la Sección 4.2 vimos que los procedimientos ganaban espacio al profundizar en el tema, las prácticas matemáticas lo pierden. Podríamos explicar esta relación inversa entre categorías pensando, nuevamente, en la temática de las sesiones. En las primeras, predominan los conceptos generales y, con ellos, las demostraciones y preguntas generales. En las últimas sesiones se tratan los algoritmos. La teoría da paso a la práctica, haciendo que los indicios correspondientes a KoT en procedimientos aumenten y los de KPM disminuyan.

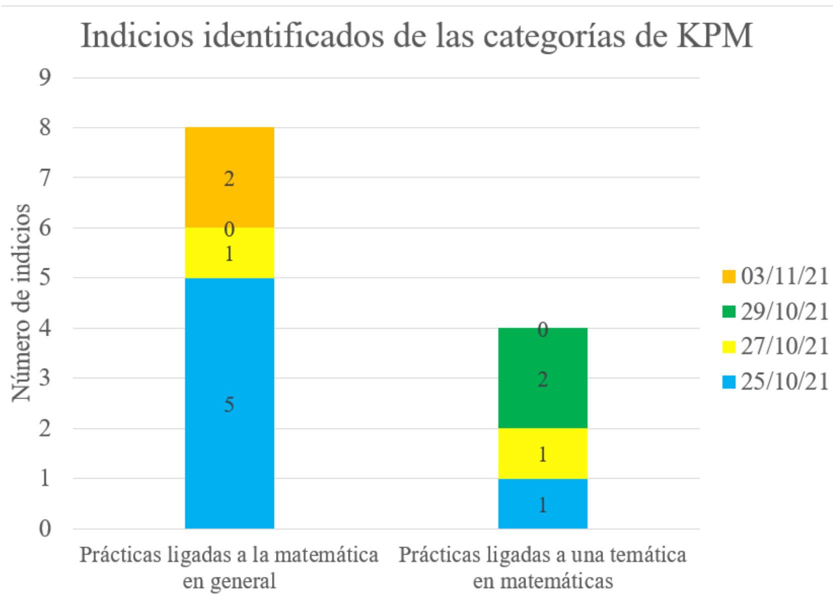


Figura 4.5: Número de indicios identificados de cada categoría de KPM en las distintas clases.

De los 12 indicios de conocimiento encontrados para este subdominio, véase la Figura 4.5, 8 se corresponden a *prácticas ligadas a la matemática en general*. Suelen aparecer cuando la profesora plantea al estudiantado preguntas. Generalmente presenta dos o tres enunciados y pide al estudiantado que le digan si son verdaderos o falsos. Si resultan ser verdaderos, la demostración es corta y, antes de realizarla, explica cómo se deberían probar. Algunas veces las indicaciones son generales, recomendaciones sobre la reducción al absurdo o la inducción por ejemplo, y otras se ajustan a una temática concreta. Si es falso busca un contraejemplo, movilizando conocimientos generales sobre la práctica matemática.

En el siguiente fragmento, tras realizar un ejercicio, la profesora plantea la posibilidad de generalización del método. En su intervención enfatiza el fundamento de la práctica matemática. No solo define qué entenderíamos por método en matemáticas, lo cual sería un indicio de KoT en la categoría de definiciones; sino que va más allá y explicita cómo considera que se construyen estos métodos desde el punto de vista formal. Se trata por tanto de un indicio de conocimiento acerca de la construcción de una práctica general en matemáticas.

> `[251021-1646]` *Vamos a buscar métodos para hacer esto sin pasar por el cálculo de todos los caminos. Y un método en matemáticas, ¿qué es? Es buscar teoría: teoremas, proposiciones o resultados que nos permitan hacer esto. [...] Nuestros métodos siempre salen de afirmaciones matemáticas.*

De conocimiento de *prácticas ligadas a una temática en matemáticas*, se han identificado seis indicios. Suelen aparecer referidos al uso de programas informáticos para el tratamiento y resolución de problemas de obtención de caminos de menor valor. A modo de ejemplo, se ha seleccionado un fragmento en el que se explica cómo trabajan con el infinito las máquinas y por qué.

> `[291021-1514]` *La máquina como no tiene elección de ponerlo infinito lo que hace es poner un número muy grande, uno con muchísimos ceros, y ya es un infinito.*

4.5. Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

En la última de las sesiones analizadas, se abordó el segundo algoritmo. Además, se hicieron varios ejercicios, a modo de ejemplo, para compararlos. Resulta interesante ver que en esta clase, de los 39 indicios totales, se identificaron 15 de KMT en sus distintas categorías, véase la Figura 4.6.

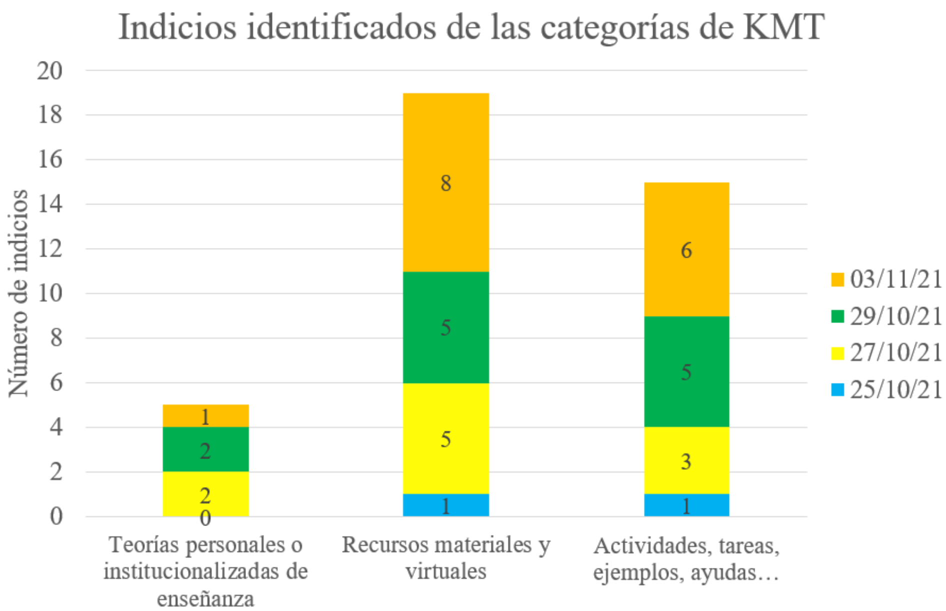


Figura 4.6: Número de indicios identificados de cada categoría de KMT en las distintas clases.

Recursos materiales y virtuales es la categoría más frecuente de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas identificada, sobretodo por el uso de la pizarra para escribir y dibujar. Por otra parte, la profesora proporciona al estudiantado los apuntes de la asignatura a través de la plataforma virtual. Aunque no se haya tenido en cuenta para el análisis de las clases, el estudiantado podía seguir en todo momento los contenidos con un dispositivo electrónico o en papel.

Tenemos que remarcar que en casi todas las figuras realizadas por la profesora en la pizarra se han identificado indicios de KoT en *registros de representación*, puesto que complementa el dibujo con anotaciones y texto en el que se hace referencia a distintos elementos del grafo correspondiente utilizando representaciones diferentes. También tienen asociadas indicios de KMT en recursos materiales y virtuales, por su uso de la pizarra y del proyector como apoyo a la docencia.

Sin embargo, considero que se debe remarcar la proyección de los algoritmos sobre la pizarra. En la Figura 4.7 pueden verse las indicaciones que se han de seguir para ejecutar el algoritmo de Ford-Moore-Bellman. Estas indicaciones se mostraban a un lado de la pizarra mientras en el otro se aplicaban sobre un grafo a modo de ejemplo.

Algoritmo de Ford-Moore-Bellman: descripción

Sea $R = (V, A, p)$ una red fuertemente conexa con $p(i,j) = p_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall e = (i,j) \in A$ y sin circuitos de valor negativo.
Objetivo: encontrar un CMV desde el vértice r al resto de vértices.

1. Tomamos $V' = V - \{r\}$, y definimos

$$d(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = r \\ p_{ri} & \text{si } i \in \Gamma(r) \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad l(i) = \begin{cases} r & \text{si } i \in \Gamma(r) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Sea $v \in V'$ de manera que $d(v) = \min\{d(i) \mid i \in V'\}$.
   i Actualizo $V' = V' - \{v\}$.
   ii Para todo $j \in \Gamma(v)$, calcular $t_j = d(v) + p_{vj}$.
   Si $t_j < d(j)$, hacer $V' = V' \cup \{j\}$, $d(j) = t_j$ y $l(j) = v$.
3. Si $|V'| > 0$, ir al paso 2. Si $|V'| = 0$, parar, ya tenemos los CMV desde r hasta i para todo $i \in V$.

Figura 4.7: Diapositiva proyectada con el algoritmo de Ford-Moore-Bellman [Recuperada de los apuntes de la asignatura (Montes, S., Modelos de Optimización en Redes, Curso 2021-2022, Universidad de Oviedo, documento inédito)].

Si obviamos el uso de la pizarra y el proyector, la categoría de la que más indicios de conocimiento de la enseñanza matemática se han encontrado es la correspondiente a *actividades, tareas, ejemplos, ayudas*. Podría sorprender que en la primera sesión no se hayan apreciado, pero no debería. En la presentación del tema, los ejemplos planteados por la profesora no son con el fin de ayudar a la comprensión de unos contenidos; sino con el objetivo de ilustrar la existencia y utilidad de los caminos de menor valor. Por tanto, estos se enmarcarían dentro del KoT en la fenomenología. Según avanzan las sesiones, aumenta el número de indicios de actividades, tareas, ejemplos, ayudas y disminuye el de fenomenología.

Se debe recordar que la intencionalidad resulta fundamental para poder hablar de conocimiento. En el siguiente fragmento, la intencionalidad es clara. El ejemplo propuesto por la profesora pretende enseñar, de forma clara y visual, por qué no se pueden tener un ciclo con peso negativo al buscar caminos de menor valor. Tras dibujar en la pizarra un grafo de orden cinco con un circuito entre tres vértices de valor positivo, véase la Figura 4.8, modifica el peso de una de las aristas consiguiendo un ciclo de valor negativo y observa cómo serían los caminos.

> [271021-1612] *Vamos a poner un ejemplo. [...] La forma de llegar al cinco puede ser por un camino que vale once, o por un camino que vale veinte, o veintinueve, etcétera. El más corto está claro que es por arriba, el que vale 11. Pero si yo le pongo ahí un menos cinco [en vez de un cinco] cada vez que gire ahí voy decreciendo. Entonces, [...] la primera vez vale siete, la segunda seis, la siguiente cinco, la siguiente cuatro, la siguiente tres... Entro en un bucle infinito que siempre decrece.*

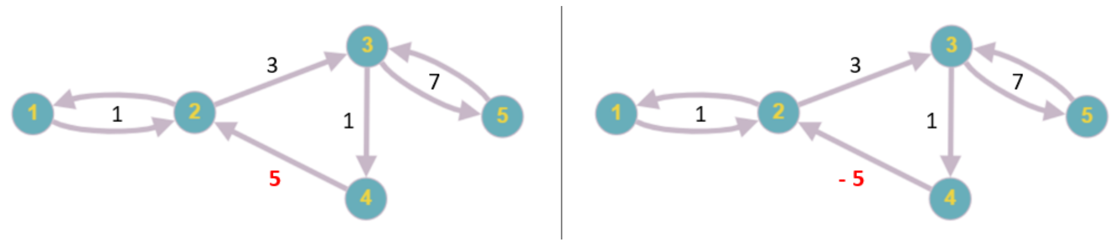


Figura 4.8: Grafos dibujados en la pizarra por la profesora a modo de ejemplo. A la derecha, grafo con un ciclo positivo y, a la izquierda, mismo grafo con un ciclo negativo.

Finalmente, el siguiente fragmento se corresponde con el inicio de la segunda sesión. La profesora manifiesta en su intervención la intención de formular dos preguntas que sirvan de presentación al contenido matemático que explicará a continuación. Muestra, por tanto, una finalidad concreta orientada a la enseñanza de las matemáticas. En concreto, podemos considerarlo como un indicio de conocimiento didáctico de las matemáticas enmarcado en la categoría de *teorías personales e institucionalizadas de enseñanza* del KMT.

> [271021-1606] *Voy a hacer dos preguntas, pensamos y ya luego cuento la teoría.*

4.6. Sobre el conocimiento de las características del aprendizaje de matemáticas (KFLM)

Los indicios de KFLM observados se corresponden en gran medida a las categorías de fortalezas y dificultades de aprendizaje y formas de interacción del alumnado con el contenido matemático, véase la Figura 4.9.

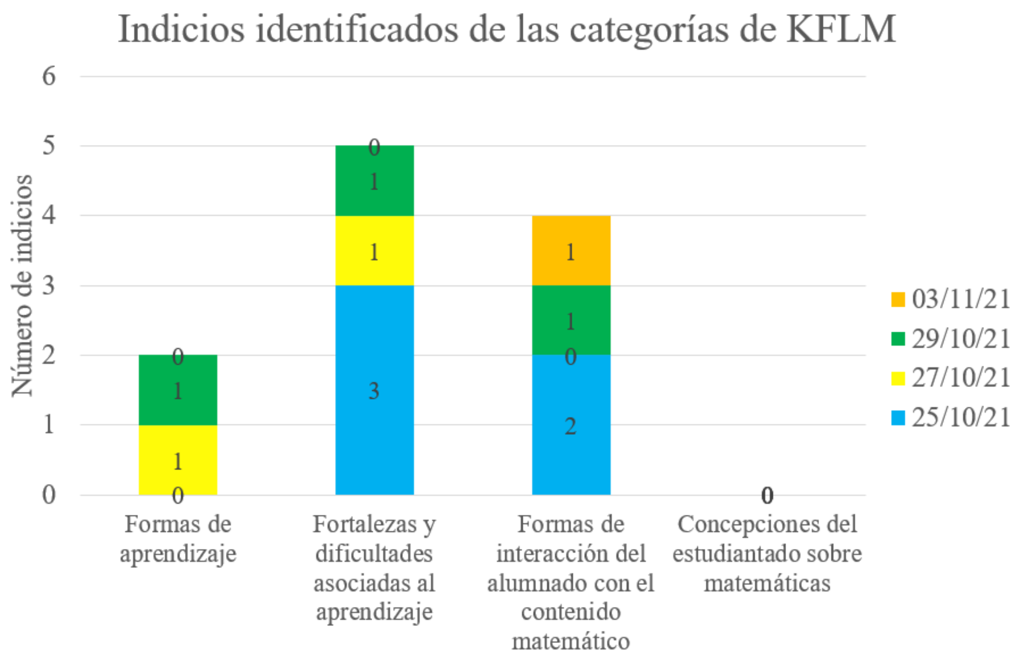


Figura 4.9: Número de indicios identificados de cada categoría de KFLM en las distintas clases.

Llama la atención no haber encontrado ningún indicio correspondiente a *concepciones del estudiantado sobre matemáticas*. Aunque se valoró la presencia de alguno, se decidió desestimarlo. En alguna intervención, la profesora interpeló a la clase exponiéndole que cierto contenido era muy sencillo o muy fácil. Si se hubiera explicitado para quién era fácil, podría haberse valorado. Al dejarlo en el aire, no queda nada claro que haya utilizado un conocimiento sobre qué piensa el estudiantado sobre dicho contenido o cuál es su percepción.

La categoría que más aparece, 5 veces, es la correspondiente a *fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje*. En el siguiente fragmento se recoge una intervención de la profesora en el que anima al estudiantado a intentar aplicar uno de los algoritmos, avisando sobre uno de los errores más comunes: liarse con los subíndices.

> `[291021-1546]` *Lo bueno sería que intentéis hacer [el de los apuntes, que es distinto.] Esto solo tiene una opción: practicar. Porque si el primero que haces es el del examen, es fácil que lo hagas mal. Es muy sencillo, pero te puedes liar con los subíndices. [...] Practicáis a ver si os sale y, si no os sale, pues me lo preguntáis sin ningún problema.*

Generalmente, este tipo de indicios de conocimiento, han aparecido junto a otros subdominios como KMT en actividades, tareas, ejemplos, ayudas. No obstante, poder establecer alguna relación sería precipitado.

Respecto a las *formas de interacción del alumnado con el contenido matemático*, resaltan sobre todo las intervenciones en las que la profesora asume la estrategia que el estudiantado utilizaría para abordar un problema. Suele aparecer sobre todo ligado a los procedimientos y resulta complicado discernir cuándo moviliza un conocimiento referido a procedimientos (KoT) y cuándo KFLM en esta categoría.

Al plantear una situación con un grafo con pesos multicriterio, la profesora asume en el siguiente fragmento que el estudiantado realizaría una media entre los pesos. Esta estrategia es errónea y la profesora trata de adelantarse.

> `251021-1634-a`*¿Qué pasa si aquí tengo varios criterios? Por ejemplo: peso, coste y comodidad. Quiero buscar la forma mejor respecto a los tres criterios. Igual el que es más corto es caro. [...] No puedes hacer una media porque uno son euros y otro son kilómetros. Eso se llaman problemas multicriterio.*

Finalmente, se identificaron 2 posibles indicios de KFLM correspondientes a *formas de aprendizaje*. De entre ellas, la más clara para ejemplificar la categoría se corresponde con una recomendación de la profesora. En la intervención, la profesora advierte al estudiantado que la memorización no es una buena estrategia. Asumimos la existencia del indicio, pero haría falta saber qué reflexión se encuentra detrás de la advertencia y cuál es su fin.

[291021-1531] *Tenéis el algoritmo. Si queréis mecanizar, mecanizáis todo lo que os de la gana pero yo creo que te vuelves loco con la mitad si no lo estás entendiendo. Si lo entiendes es mucho más lógico y es más fácil no equivocarse, como casi todo.*

Ha resultado complicado de identificar indicios concretos de conocimiento de este subdominio. No obstante, la forma de secuenciar el tema para mostrar los algoritmos desde un punto de vista constructivo, también denota conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. Podríamos, de hecho, considerar la existencia de una evidencia del mismo al considerar el conjunto de las sesiones de manera global.

4.7. Sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Tal y como veíamos en la Sección 4.1, los indicios relativos a KMLS se encuentran prácticamente en su totalidad en la primera sesión. El objetivo aparente de la primera sesión era presentar y contextualizar los caminos de menor valor y los algoritmos para obtenerlos.

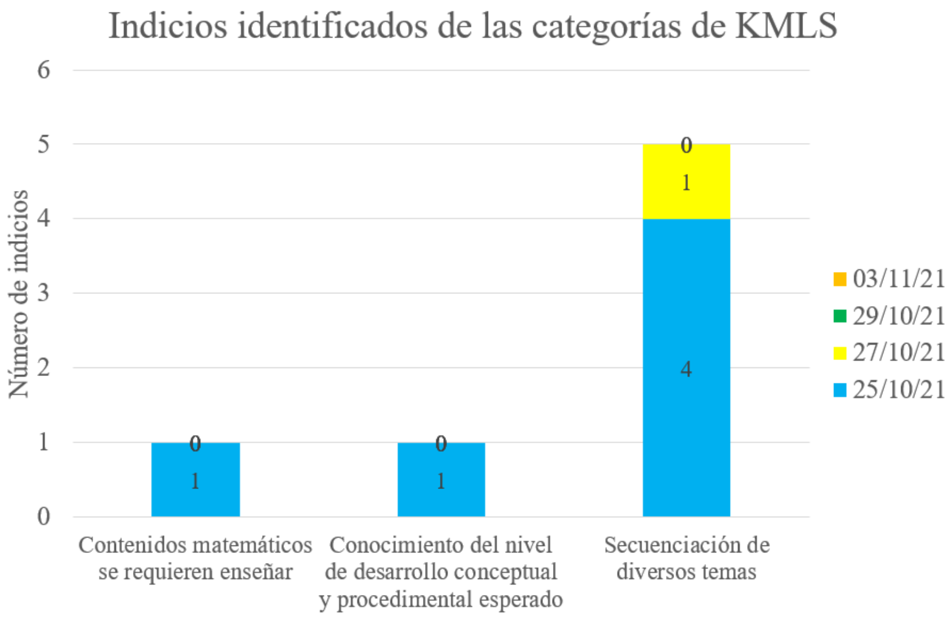


Figura 4.10: Número de indicios identificados de cada categoría de KMLS en las distintas clases.

Se tiene que casi todos los indicios, 5 de 7, se corresponden con la categoría de *secuenciación de diversos temas*, véase la Figura 4.10. En consecuencia, parece razonable intuir que pueda existir alguna relación para la profesora entre esta categoría y la forma de contextualización de un contenido matemático. En el siguiente fragmento, la profesora incide en las diferencias fundamentales de los temas para marcar claramente la diferencia entre contenidos, para secuenciarlos de forma lógica.

> `[251021-1630]` *Ya no es un problema global como en el tema dos [... que] se buscaba cómo conectar cuatro ciudades de forma óptima. Ahora busco cómo conectar una con otra de forma óptima y paso del resto. Lo que pasa es que como lo voy a replicar y lo voy a hacer para [todas]. Parece que estoy haciendo lo mismo pero el planteamiento es completamente distinto. [...] Aquí vamos vértice a vértice.*

Respecto a los *contenidos matemáticos que se requieren enseñar*, solo se encontraron indicios correspondientes a esta categoría en una de las intervenciones de la profesora. En la siguiente intervención, correspondiente a la primera sesión, plantea al estudiantado qué tipo de problemas se van a enseñar; conectándolos con contenidos que se espera que se aprendan en cursos superiores.

> `[251021-1629-a]` *Vamos con el tema 3, que se llama camino de menor valor. Lo primero es que es un tema en el que se trabaja muchísimo hoy en día porque es un tema súper importante. Tenéis una asignatura en tercero [...] en el Grado en Matemáticas [y cuarto en la PCEO] que es Programación Matemática donde algunos problemas aplicados se pueden resolver aplicando grafos, planteándolo mediante un grafo, o planteándolo mediante programación lineal. Pero son problemas bastante típicos y, de hecho, ya digo que hoy en día se sigue investigando en eso y nosotros hacemos cosas. No es un tema para nada que esté acabado, todo lo contrario: hay mucho dinero por el camino.*

De la categoría correspondiente al *conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*, se identificó también un único indicio. La profesora plantea una complejización del problema, pero remarca que no es lo que espera que se sepa resolver.

Se pretende que el estudiantado, al tratarse de un curso básico de teoría de grafos, alcance un nivel de desarrollo conceptual y procedimental acorde.

> `[251021-1634-b]` *Otra cosa que se hace es cuando no se conoce exactamente el valor [del camino] y se dice que es aproximadamente dos. Esas son las matemáticas aproximadas, que son más complicadas de manejar. Nosotros estamos al nivel de punto de partida con el caso básico.*

Hemos realizado un análisis global de los indicios, por subdominios y por días, y estudiado dónde estos se enmarcan dentro de las posibles categorías de los subdominios. Además, hemos conseguido encontrar tanto evidencias de distintos tipos de conocimiento, como posibles relaciones entre ellos . En la Sección 4.8 se expondrán más en profundidad las evidencias y relaciones entre subdominios encontradas.

4.8. Discusión de los resultados

Del análisis de los indicios resulta interesante remarcar varios aspectos. Uno de ellos, fundamental para entender cómo es el conocimiento que el profesorado de matemáticas moviliza en el aula, es la evolución de los diferentes indicios según avanza el tema; véase Figura 4.11. Claramente, el subdominio del MTSK que más presente está en todas las sesiones es el conocimiento de los temas (KoT). Esta observación concuerda con otros estudios relativos al conocimiento del profesorado universitario sobre medidas de centralización y dispersión (Peñaherrera y col., 2021) y sobre álgebra lineal (Vasco-Mora y col., 2021).

En la clase de presentación y contextualización de la asignatura, destaca la presencia de indicios de conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). Paralelamente, la categoría de KoT más abundante en la primera sesión es la de fenomenología. En el resto de sesiones a penas hay indicios de estos tipos de conocimiento. Además, la profesora reduce progresivamente el uso de conocimientos de la estructura y de la práctica matemática (KSM y KPM).

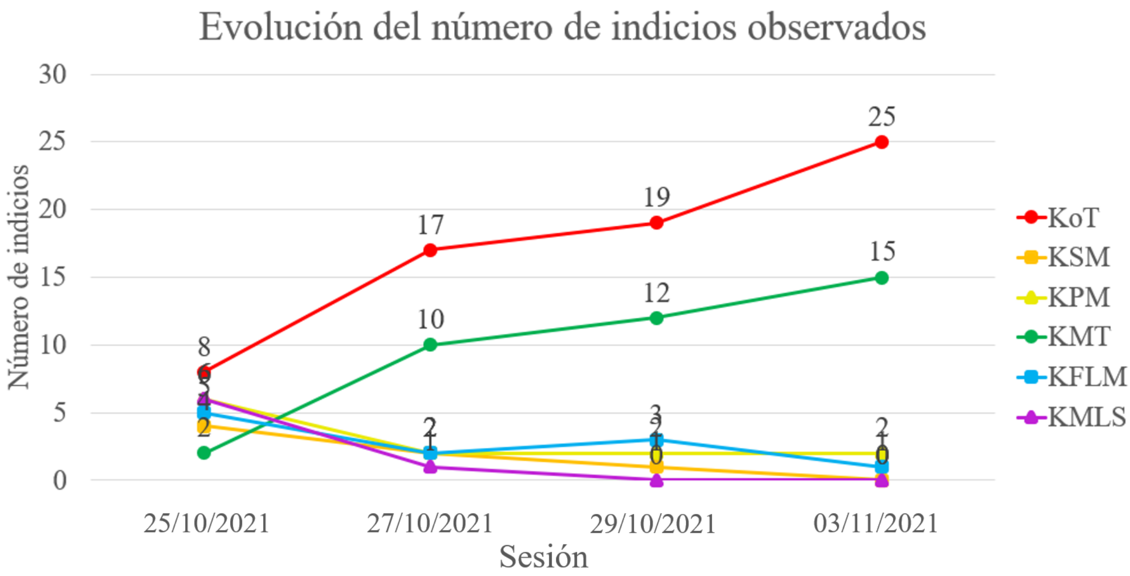


Figura 4.11: Evolución del número de indicios identificados para cada subdominio.

Este cúmulo de indicios, y de su ausencia, no solo constituyen evidencias de KMLS, KSM y KPM; sino que también ayudan a caracterizar el conocimiento especializado que la profesora utiliza para contextualizar el contenido matemático que quiere tratar y dar una idea general de la ubicación del tema en un esquema de conocimientos más complejo.

Al profundizar en el tema y presentar los algoritmos, los ejemplos planteados desde el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) cambian su objetivo. Según avanzan las sesiones, el conocimiento de los temas KoT cambia y con él, los ejemplos. De un uso predominante de ejemplos ligados a conocimientos correspondientes a fenomenología, se pasa a ligarlos a un conocimiento de procedimientos. En las primeras sesiones, se busca ilustrar el sentido e interés del contenido que se está presentando. Una vez presentados los algoritmos, el objetivo pasa a ser entender ambos y sus propiedades. Este aspecto supone una evidencia clara de KMT puesto que la intencionalidad de estos ejemplos resulta clave para entender cómo estructura y desarrolla las clases la profesora. Cabe destacar, que estas actividades y ejemplos se utilizan en varias ocasiones para adelantarse o resolver posibles dificultades del estudiantado. Tenemos, por tanto, dos relaciones muy claras entre distintos subdominios: KoT-KMT y KMT-KFLM.

No obstante, la relación que se observa entre KoT y KMT es más profunda en las sesiones observadas. Las evidencias identificadas de conocimiento de diferentes registros de representación, tienen una doble conexión con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Por una parte, las diferentes formas de representar grafos y tablas están asociados a un conocimiento de actividades, tareas o ejemplos. Pero también se asocian con la movilización por parte de la profesora de conocimiento de recursos materiales al combinar en muchas ocasiones pizarra y proyector.

Merece la pena destacar que no todas las relaciones que se han observado tienen la misma naturaleza. Podemos establecer una relación inversa entre diferentes categorías del KoT. Las primeras sesiones son teóricas y hay un mayor número de indicios de las categorías correspondientes a fenomenología, definiciones y propiedades y fundamentos. Las dos últimas sesiones tienen un carácter más práctico y los indicios de conocimiento relativos a procedimientos desplazan a los anteriores. Tenemos, entonces, que en una asignatura de teoría de grafos con un gran contenido práctivo; la profesora moviliza claramente dos tipos de conocimiento según el contenido que trata en la sesión correspondiente. Hay, por tanto, una gran diferencia entre el conocimiento movilizado en las clases teóricas y en las prácticas.

En esta línea, también se observa una posible relación que sería interesante seguir estudiando. Los pocos indicios de conocimiento de la práctica matemática (KPM) se observaron también en clases teóricas. En las clases prácticas, tal y como se comentaba, se observó un mayor número de indicios relativos a procedimientos. Podría resultar interesante profundar en esta observación con la premisa de que en las clases teóricas domina el KPM en las demostraciones, mientras que en las prácticas lo hace el KoT.

Del análisis global de los indicios y la estructura de las sesiones, se puede concluir también que hay evidencias de un conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM). La organización de las sesiones y el contenido movilizado según el objetivo planteado, supone un marco contextual en el que se evidencia KFLM.

Debo reconocer que la delimitación del subdominio KFLM, así como de sus categorías, resulta muy complicada. La evidencia más clara a la que hemos llegado se basa en el contexto global y depende directamente de la observación de muchos indicios. Sin duda, uno de los retos futuros de este modelo es la profundización en los subdominios relativos al conocimiento didáctico del contenido, en especial el KFLM, y de sus categorías para conseguir que sean lo más precisas y descriptivas posible. En esta línea, en las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, ya se planteó la posibilidad de reformular las categorías correspondientes al KFLM (Carrillo Yáñez y col., 2015).

A continuación, en el Capítulo 5, para finalizar este trabajo, se hará un resumen de las evidencias encontradas y se expondrán algunas propuestas para seguir profundizando en el conocimiento específico del profesorado de matemáticas y su modelización.

Capítulo 5

Conclusiones

El conocimiento especializado que la profesora ha movilizado resulta bastante complejo. En las cuatro sesiones observadas se han visto indicios y evidencias de todos los subdominios del MTSK, aunque de unos más que de otros. Resulta especialmente interesante remarcar las relaciones que se han establecido entre los diferentes subdominios y sus categorías. Si bien alguna de las evidencias y relaciones estaba avalada por la literatura, hemos conseguido profundizar más en el MTSK y establecer cuestiones propias de las sesiones que observamos.

Una cuestión a resaltar es que los estudios consultados (Peñaherrera y col., 2021; Vasco-Mora y col., 2021) se realizaron en un grado en ingeniería. En ellos, no se observan tantas evidencias de conocimiento especializado del profesorado. En nuestro caso, al encontrarnos en una asignatura del Grado en Matemáticas, tendría sentido asumir que la contextualización podría ser más específica y, en consecuencia, que se movilizara un conocimiento del contenido más amplio. No obstante, no se debería generalizar esta conclusión al Grado en Matemáticas sin realizar estudios en otras asignaturas y áreas del conocimiento. Estos estudios resultarían de gran interés para conocer la especificidad del profesorado de matemáticas del grado dentro de los estudios universitarios generales y suponen una posible línea de investigación futura.

Debemos, por tanto, seguir explorando la características propias que se han identificado. Estas también podrían ser fundamentales para sustentar una mayor especifidad del modelo de conocimiento del profesorado en el ámbito de la teoría de grafos. Al fin y al cabo, la asignatura de Modelización y Optimización en Redes es impartida por el área de conocimiento de Estadística e Investigación Operativa. Podría considerarse entonces que los contenidos se alejan de cierta forma de hacer matemáticas propia de otras ramas de la misma, como puede ser el Álgebra o la Topología. Podría resultar interesante plantearse una posible adaptación o modificación del MTSK para el conocimiento especializado del profesorado de estadística. En el trabajo relativo a la docencia universitaria de medidas de centralización y de dispersión (Peñaherrera y col., 2021), ya se plantea esta posibilidad.

Finalmente, creo necesario poner en valor qué ha supuesto para mí el contacto con el contenido matemático desde el análisis de su didáctica. Al realizar las observaciones y el análisis detallado de las sesiones, una vez interiorizado el MTSK, se desarrolla una visión analítica tanto del contenido como de la didáctica del contenido muy diferente a la visión como estudiante.

Desde que inicié este trabajo, he podido asistir a varias exposiciones de trabajos fin de grado de distintos problemas de caminos de menor valor: con pesos multicriterio y con costes difusos. Si bien el conocimiento del contenido resulta muy importante, también es interesante fijarse en el proceso de construcción del conocimiento, en el proceso de aprendizaje. La conexión y progresión en el planteamiento de los contenidos, la anticipación a los problemas y el uso acertado de ejemplos me parecen fundamentales para la enseñanza de cualquier contenido en teoría de grafos.

La introducción en los planes de estudio de los grados en matemáticas de asignaturas específicas de didáctica de las matemáticas podría resultar de gran interés. Su introducción es la cuarta de las "24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente" planteadas en Enero de 2022 por el Ministerio de Educación y Formación Profesional. Pero, más allá de la mejora de la formación del profesorado, este ámbito de las matemáticas completaría los contenidos del grado. Además de aportar una visión diferente de los mismos, favorecería la transmisión del conocimiento matemático y redundaría en una mejora de la educación matemática de la sociedad.

Considero que el MTSK se ha revelado como una herramienta potencialmente muy útil para diagnosticar problemas en los procesos de aprendizaje-enseñanza y diseñar formaciones específicas, aunque también generales. Resulta también importante que estas formaciones no se pierdan en la generalidad y sean diseñadas y llevadas a cabo por profesionales de la educación matemática, que combinen el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de su didáctica.

Bibliografía

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?

Bolıvar, A. (2007). La formación inicial del profesorado de secundaria y su identidad profesional.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. & Montes, M. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.*

Carrillo Yáñez, J., Contreras González, L. C., Montes Navarro, M. Á. y col. (2015). Reflexionando sobre el conocimiento del profesor: Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. 15 Y 16 de septiembre 2015.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á. y col. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Climent Rodríguez, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática : un estudio de caso* (Tesis doctoral). http://hdl.handle.net/10272/2742

Contreras, L. C., Carrillo, J. & Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa.

Escudero Avila, D. I., Carrillo Yáñez, J., Flores Medrano, E., Climent Rodrıguez, N., Contreras González, L. C., Montes Navarro, M. Á. y col. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D. I. & Aguilar, Á. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK.

Fourez, G. (1997). *Alfabetización científica y tecnológica: acerca de las finalidades de la enseñanza de las ciencias*. Ediciones Colihue SRL.

Loewenberg Ball, D. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures.

Montes, M., Contreras, L. C. & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK.

Muñiz Rodrıguez, L., Alonso Velázquez, P., Rodrıguez Muñiz, L. J., Valcke, M. y col. (2016). ¿ Hay un vacıo en la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria en España respecto a otros paıses? *Revista de educación.*

Muñoz, J. M. E. (1999). La formación permanente del profesorado universitario: cultura, polıtica y procesos. *RIFOP: Revista interuniversitaria de formación del profesorado: continuación de la antigua Revista de Escuelas Normales*, (34), 133-157.

Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á. & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analıtico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18 (3), 1801-1817.*

Pavıa, V. S. F. (2001). El desarrollo profesional del profesorado universitario: circunstancias, problemas y propuestas. *Profesorado. Revista de Currıculum y Formación de Profesorado*, *5*(2), 103-130.

Peñaherrera, C., Segovia, V., Vasco, D. & Climent, N. (2021). Conocimiento especializado de un profesor universitario sobre medidas de centralización y de dispersión, aplicando el modelo MTSK. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *108*, 99-117.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Skemp, R. R. (1971). The psychology of learning mathematics. *Penguin Books*.

Skemp, R. R. (1979). Goals of learning and qualities of understanding. *Mathematics teaching*, *88*, 44-49.

Skemp, R. R. (1982). Symbolic Understanding. *Mathematics Teaching*, *99*, 59-61.

Tiana Ferrer, A. y col. (2013). Los cambios recientes en la formación inicial del profesorado en España: una reforma incompleta. *Revista española de educación comparada*.

Vasco Mora, D. L. y col. (2015). Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario.

Vasco-Mora, D., Climent-Rodrıguez, N. & Escudero-Ávila, D. (2021). Interconnections between Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge of a University Lecturer in Linear Algebra. *Mathematics*, *9*(20), 2542.

Apéndice A

Transcripciones

Los fragmentos de clases expositivas (CE) y prácticas de aula (PA) transcritas se corresponden al tema 3 de la asignatura: Camino de menor valor. Se eligieron las clases correspondientes al 25, 27 y 29 de octubre y 3 de noviembre coincidiendo con el inicio del tema 3.

Los fragmentos se encuentran identificados en negrita según día, el mes y el año en el que se realizó la grabación, así como la hora aproximada para futuras revisiones de las grabaciones. En caso de coincidencia de fecha y hora, se asigna una letra en orden alfabético para indicar el orden cronológico. Así, las etiquetas son de la forma ddmmaa-hhhh(-a,b,c,...).

Todos los fragmentos se acompañan de un pequeño texto descriptivo de la intervención. En azul, se explicita el subdominio y, entre paréntesis, la categoría en la que se enmarcaría el indicio de conocimiento que la profesora moviliza en el correspondiente fragmento. Finalmente, se incluye la transcripción en cursiva.

Todas las figuras incluidas, salvo en las que se indique lo contrario, son de elaboración propia en base a lo dibujado por la profesora en la pizarra.

[251021-1609] Se inicia la clase con una presentación de Luis Rodríguez Muñiz y Ángel Jesús Caraduje Hurtado para explicar al alumnado qué datos vamos a recoger y con qué finalidad, remarcando el carácter descriptivo de la investigación para que la clase se desarrolle con total normalidad.

[251021-1629-a] Se empieza el tema 3 conectando los contenidos con otras asignaturas de cursos superiores y con la investigación que se realiza a día de hoy en este campo. **KSM** (conexiones transversales), **KMLS** (contenidos matemáticos se requieren enseñar)

> *Vamos con el tema 3, que se llama camino de menor valor. Lo primero es que es un tema en el que se trabaja muchísimo hoy en día porque es un tema súper importante. Tenéis una asignatura en tercero [...] en el Grado en Matemáticas [y cuarto en la PCEO] que es Programación Matemática donde algunos problemas aplicados se pueden resolver aplicando grafos, planteándolo mediante un grafo, o planteándolo mediante programación lineal. Pero son problemas bastante típicos y, de hecho, ya digo que hoy en día se sigue investigando en eso y nosotros hacemos cosas. No es un tema para nada que esté acabado, todo lo contrario: hay mucho dinero por el camino.*

[251021-1629-b] La profesora dibuja un grafo en la pizarra simulando conexiones entre ciudades para ejemplificar el tipo de problemas que se van a querer resolver mediante caminos de menor valor, véase la Figura A.1. **KoT** (fenomenología), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

> *Imaginaos que es una red de distribución de camiones que llevan un producto [...] y quieren ver cuál es el camino más corto. Ahora explicamos qué es eso de más corto, porque no tiene por qué ser corto de distancia.*

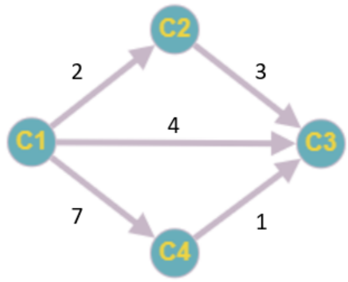


Figura A.1: Grafo dibujado en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[251021-1630] Aprovecha el ejemplo para resaltar la diferencia existente con los problemas de temas anteriores. **KoT** (procedimientos), **KFLM** (formas de interacción del alumnado con el contenido matemático), **KMLS** (secuenciación de diversos temas)

> *Ya no es un problema global como en el tema dos [... que] se buscaba cómo conectar cuatro ciudades de forma óptima. Ahora busco cómo conectar una con otra de forma óptima y paso del resto. Lo que pasa es que como lo voy a replicar y lo voy a hacer para [todas]. Parece que estoy haciendo lo mismo pero el planteamiento es completamente distinto. [...] Aquí vamos vértice a vértice.*

[251021-1632] Se menciona cómo se resolverá el problema resaltando una propiedad del algoritmo. **KoT** (procedimientos), **KFLM** (fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje), **KMLS** (secuenciación de diversos temas)

> *Como los algoritmos lo hacen para las tres a la vez, nos va a parecer que estamos haciendo lo mismo que el tema dos pero es completamente distinto, sino no daríamos otro tema.*

[251021-1634-a] Se conecta el ejemplo planteado con otro problema en el que haya más variables, un problema más acorde a la realidad, para enseñarle al alumnado las posibles vías de desarrollo y aplicación de los grafos. **KoT** (fenomenología), **KSM** (conexiones de complejización), **KFLM** (formas de interacción del alumnado con el contenido matemático)

¿Qué pasa si aquí tengo varios criterios? Por ejemplo: peso, coste y comodidad. Quiero buscar la forma mejor respecto a los tres criterios. Igual el que es más corto es caro. [...] No puedes hacer una media porque uno son euros y otro son kilómetros. Eso se llaman problemas multicriterio.

[251021-1634-b] También se plantea la posibilidad de que los pesos de las diferentes aristas no sean conocidas, sino que sean aproximaciones. Conectando de nuevo el ejemplo con otro de mayor dificultad. **KoT** (fenomenología), **KSM** (conexiones de complejización), **KMLS** (conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado)

Otra cosa que se hace es cuando no se conoce exactamente el valor [del camino] y se dice que es aproximadamente dos. Esas son las matemáticas aproximadas, que son más complicadas de manejar. Nosotros estamos al nivel de punto de partida con el caso básico.

[251021-1635] Se remarca cuáles son los caminos más cortos anticipándose a los problemas de comprensión que pudieran surgir. **KFLM** (fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje)

En los apuntes está más adelante, pero es que me gusta dejarlo claro de mano.

[251021-1637] Se incide nuevamente en las diferencias fundamentales entre los temas dos y tres con vistas al planteamiento y resolución de ejercicios por parte del alumnado. **KPM** (prácticas ligadas a la matemática en general), **KFLM** (fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje), **KMLS** (secuenciación de diversos temas)

Aquí [en el tema 3] trabajamos vértice a vértice. Y aquí [en el tema 2], trabajamos en global: todos los vértices a la vez. [...] El problema cuando llegan ejercicios aplicados es que no os van a decir de qué tema son, os van a dar un enunciado y tenéis que plantearlo.

[251021-1638] Se introduce la importancia y utilidad de conocer resultados matemáticos, como los teoremas, a la hora de resolver problemas o avanzar en el conocimiento matemático puesto que se trata de una disciplina constructiva. **KPM** (prácticas ligadas a la matemática en general)

> *Querremos minimizar la suma de los pesos del camino. Iremos vértice a vértice. Lo que pasa es que los vamos a trabajar todos a la vez porque nos va a costar lo mismo, como veremos con un teorema. [...] Al final las matemáticas tienen estas cosas, a veces por los teoremas podemos acortar el trabajo.*

[251021-1639] Siguiendo con la introducción del tema, se plantea el objetivo aprovechando para enfatizar en la diferencia práctica entre usar grafos orientados y no orientados. Además, recuerda un problema que tuvieron varios estudiantes y trata de prevenir que lo vuelvan a cometer explicando por qué es mejor usar grafos no orientados cuando se pueden usar. **KoT** (procedimientos), **KPM** (prácticas ligadas a una temática en matemáticas), **KMLS** (secuenciación de diversos temas)

> *En el tema dos empezamos con el caso [de una red] no orientada. Aquí [en el tema tres], empezamos por el [caso] orientado. Empezamos por el caso más habitual en la aplicación. [...] El caso no orientado siempre suele ser más fácil. [... Un ejercicio que puse] se podía modelizar como [un grafo] no orientado y algunas personas pusieron un grafo con todos los arcos [bidireccionales]. Es verdad, es isomorfo, sale igual. Pero es trabajar más para aplicar un algoritmo más lento para nada. Si podéis modelizarlo como [un grafo] no orientado seguramente será más rápido y, a veces, más sencillo.*

[251021-1646] Una vez realizado, se plantea la generalización del método enfatizando el fundamento de la práctica matemática. **KPM** (prácticas ligadas a la matemática en general)

Vamos a buscar métodos para hacer esto sin pasar por el cálculo de todos los caminos. Y un método en matemáticas, ¿qué es? Es buscar teoría: teoremas, proposiciones o resultados que nos permitan hacer esto. [...] Nuestros métodos siempre salen de afirmaciones matemáticas.

[251021-1648] Hablando de la práctica matemática y la forma de construir el conocimiento, se plantean varias reflexiones sobre la nomenclatura y el lenguaje matemático. **KSM** (conexiones de simplificación), **KFLM** (formas de aprendizaje)

Hay mucha nomenclatura que es una manera de simplificar y escribir menos. [...] Cuando daba clase en un máster de ortodoncia, [a la función valor absoluto la llamábamos] la función "quitar el signo" porque lo entendían mucho mejor.

[251021-1649] Para acabar la clase, se plantean varias preguntas sobre los caminos de menor valor que el alumnado puede resolver intuitivamente utilizando los contenidos de temas anteriores. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KPM** (prácticas ligadas a la matemática en general)

¿Los caminos de menor valor del vértice r a los demás forman una arborescencia de unión de salida de valor mínimo? La respuesta es no, pero para decir que algo es falso hay que poner un contraejemplo [...] para que yo no vea que lo dices al azar.

[271021-1606] Se inicia la clase planteando unas preguntas que servirán de hilo conductor de la sesión. **KMT** (teorías personales o institucionalizadas de enseñanza)

Voy a hacer dos preguntas, pensamos y ya luego cuento la teoría.

[271021-1611] Se remarca una dificultad que se suele tener al empezar a trabajar con grafos. **KoT** (fenomenología), **KFLM** (fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje)

Es poco intuitivo porque siempre pensamos [...] en pesos positivos, pero puede haber pesos negativos. Es verdad que lo más habitual es que un peso sea una distancia o un tiempo y sea algo positivo. Pero puede haber veces que, por ejemplo en cuestiones económicas, sean cosas que pueden dar ganancias o pérdidas y puede ser positivo o negativo. Vamos a poner un ejemplo.

[271021-1612] Además de enfatizar en esa dificultad, se pone un ejemplo visual para remarcar el problema. Se empieza dibujando en la pizarra un grafo de orden 5 con un circuito entre tres vértices de valor positivo, para a continuación modificar el peso de una de las aristas consiguiendo un ciclo de valor negativo, véase la Figura A.2. **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

Vamos a poner un ejemplo. [...] La forma de llegar al cinco puede ser por un camino que vale once, o por un camino que vale veinte, o veintinueve, etcétera. El más corto está claro que es por arriba, el que vale 11. Pero si yo le pongo ahí un menos cinco [en vez de un cinco] cada vez que gire ahí voy decreciendo. Entonces, [...] la primera vez vale siete, la segunda seis, la siguiente cinco, la siguiente cuatro, la siguiente tres... Entro en un bucle infinito que siempre decrece.

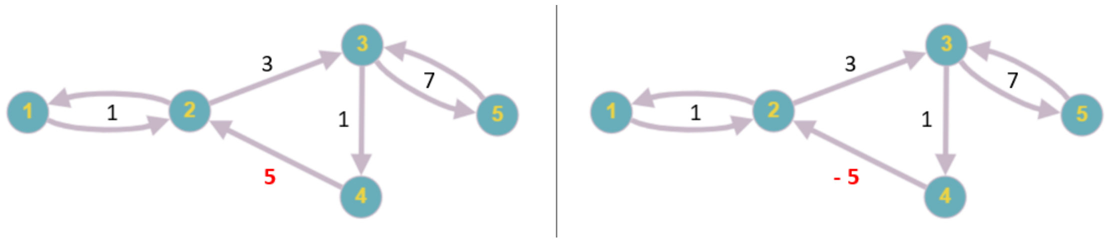


Figura A.2: Grafos dibujados en la pizarra por la profesora. A la derecha, grafo con un ciclo positivo y, a la izquierda, mismo grafo con un ciclo negativo.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[271021-1613] La profesora conecta el ejemplo con sucesiones de números negativos. Esta idea resultará de gran importancia en futuras clases cuando se vaya a demostrar uno de los teoremas importantes del tema. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KSM** (conexiones auxiliares), **KPM** (prácticas ligadas a la matemática en general)

Esto seguro que se puede poner con algo de sucesiones. Algo que va decreciendo [...] Existirían caminos con valor que tienden a menos infinito. Para que haya una cota inferior de valores lo que tiene que ocurrir es que no haya circuitos de valor negativo. No digo que esto sea una prueba, esto es una conjetura hecha a partir del razonamiento. Estoy intentando explicar el enunciado de un teorema que dice eso, [...] de hecho, el teorema dice que es un si y solo si.

[271021-1615] Se enuncia y explica el teorema. **KoT** (definiciones)

Teorema 3.1: en una red fuertemente conexa existen los caminos de menor valor (CMV) de cualquier i a cualquier j (entre cualquier par de vértices) si, y solo si, la red no tiene circuitos de valor negativo.

[271021-1618] Se toma el ejemplo anterior y, en vez de considerar cinco o menos cinco como el peso de la arista de cuatro a dos, se plantea el problema de saber cuál es el mínimo valor a partir del cual dejan de existir los caminos de menor valor. Se convierte el problema de los pesos en una inecuación a la cuál hay que encontrar solución: $4+x \geq 0$. **KoT** (registros de representación), **KSM** (conexiones de contenidos transversales)

¿Para qué valores de equis existen caminos de valor menor de cualquier vértice a cualquier vértice? [Un estudiante contesta que para menos cuatro o más] Muy bien, es mayor o igual. Con el igual también nos vale. [... Dejan de existir para valores] estrictamente menores. [...] Para cualquier equis que sea mayor o igual que menos cuatro [$x \geq -4$] el circuito que hay es positivo, o nulo, y existe [CMV]. En este ejemplo, si equis menor que menos cuatro [$x < -4$] entonces no existen todos los caminos de menor valor: no quiere decir que no pueda existir alguno.

[271021-1619] La profesora enfatiza que este tipo de ejercicios son muy habituales y ha dejado en la plataforma virtual ejercicios con los que pueden practicar. **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[En el Campus Virtual] está el test del año pasado, que se hizo online. Hay cien preguntas y podéis practicar. [... Aunque no son todas totalmente distintas,] hay diez bloques con diferentes datos.

[271021-1628] Se discute sobre propiedades de los caminos de menor valor que serán de utilidad posteriormente para entender un resultado teórico de gran utilidad práctica para el desarrollo de la asignatura. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KMLS** (secuenciación de diversos temas)

Si yo tengo los caminos de menor valor entre uno y otro [vértices y estos] tienen diez vértices en el medio, también conozco los caminos de menor valor a los vértices intermedios. Por lo que decís, si no tendría una forma más corta de llegar, con menos valor. ¿Por qué sera esto importante para el algoritmo? Porque me permite encontrarlos todos a la vez. [...] Computacionalmente ahorro tiempo. [...] Este resultado que veremos a continuación permite trabajar en bloque aunque mi problema es local y voy vértice a vértice.

[271021-1630] Se enuncia el teorema. Además, la profesora acompaña la explicación con la realización de un esquema en la pizarra para facilitar la comprensión del mismo, véase la Figura A.3. **KoT** (definiciones)

Teorema 3.2: si Π_{rs} es un camino de menor valor de "r" a "s" e "i" es un vértice intermedio de ese camino, el subcamino de Π_{rs} hasta "i" es un camino de menor valor de "r" a "i", Π_{ri}.

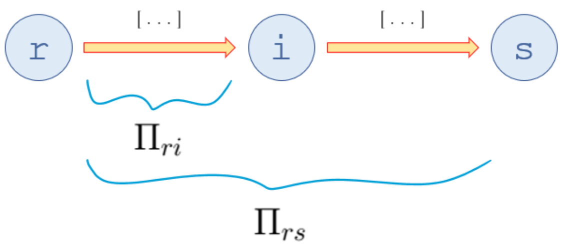


Figura A.3: Esquema dibujado en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[271021-1633] La profesora incide nuevamente en cuál será el objetivo final: usar los teoremas vistos para encontrar un algoritmo para determinar los caminos de menor valor. Además, contextualiza históricamente la teoría y los procedimientos enfatizando la necesidad de un ordenador para poder desarrollar la teoría de grafos. **KoT** (fenomenología), **KPM** (prácticas ligadas a una temática en matemáticas

> *Con estos dos teoremas y el 3.3, que es el siguiente que voy a dar, ya consiguieron encontrar un método para encontrar los caminos [de menor valor] y lo hicieron Ford, Moore y Bellman en los años [mil novecientos] cincuenta y seis, cincuenta y siete y cincuenta y ocho. Esto en matemáticas es de antes de ayer. Esta es una técnica bastante novedosa porque si no hubiese ordenadores, grafos se cae. Los grafos se usan con tres mil, cuatro mil, setenta mil [datos] entonces la teoría es preciosa: la podemos poner en un cuadro; pero no sirve para nada si no tenemos una máquina que haga las cuentas. Al final, fijaros, [...] son unas matemáticas ya hechas para pasarlas al ordenador, para llegar a un algoritmo para luego implementarlo. Sin ordenador esto no tenía sentido. Los ordenadores no son de hace tanto, aunque os parezca increíble. [...] Y por eso toda esta teoría es muy reciente.*

[271021-1635] Se explica qué condiciones se necesitan para implementar el algoritmo de Ford, Moore y Bellman (FMB). **KoT** (propiedades y fundamentos)

> *El algoritmo de Ford, Moore y Bellman, es un algoritmo para encontrar caminos de menor valor de un i a cualquier otro j para cualquier red [...] que no tenga circuitos de valor negativo y que sea, vamos a decirle, fuertemente conexa para que i sea cualquiera. En realidad nos vale con que sea cuasifuertemente conexa con raíz de salida en i. [...] Vamos a pedir más de lo que necesitamos, pero así nos garantizamos que i pueda ser cualquiera.*

[271021-1636] Se introduce un nuevo algoritmo, el de Dijkstra, y su relación con el anterior. **KoT** (propiedades y fundamentos)

Pero, Dijkstra lo mejoró en el cincuenta y nueve. [...] No es capaz de mejorarlo [totalmente] porque [el de FMB] es muy bueno, es el que existe todavía en los ordenadores. Lo mejora, no en cualquier red, sino para redes con todos los pesos positivos. [...] Si los comparáis, Dijkstra hace menos pasos que FMB: es como FMB pero nunca vuelve para atrás.

[271021-1639] Se incide sobre cuándo se debe usar cada algoritmo, remarcando por qué cuando se tienen todos los pesos positivos resulta más conveniente usar el algoritmo de Dijkstra. **KoT** (procedimientos), **KMT** (teorías personales o institucionales de enseñanza), **KFLM** (fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje)

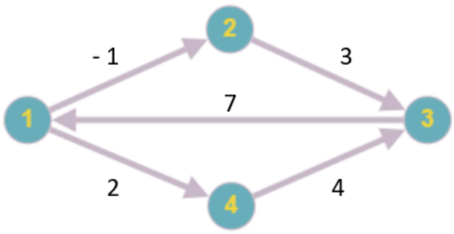
Voy a poner la receta como si fuese la academia, pero esto hay que entenderlo. Si la red solo tiene pesos positivos se aplica Dijkstra, porque es más rápido, más eficiente. Con las redes nuestras que tienen ocho vértices qué mas da, pero cuando tengáis ochenta mil puede ser la diferencia entre tener que esperar cinco minutos o diez, o más. Por suerte las máquinas cada vez son mejores y esperamos menos. [...] Si la red tiene algún peso negativo, vale con que tenga uno, no tengo más opción que aplicar Ford-Moore-Bellman.

[271021-1641] Se enuncia, sintetizadamente, el último teorema que se necesita para obtener el algoritmo de Ford-Moore-Bellman. **KoT** (definiciones)

Teorema 3.3: Sea $R = (V, A, p)$ una red orientada fuertemente conexa sin circuitos negativos. Dada una colección de caminos cualesquiera $\{\pi_{ri} \mid i \in V\}$ del vértice r al resto de vértices i [...] con valores $d(i)$, y $d(r) = 0$. Estos caminos son los de menor valor si, y solo si, $d(i) \leq d(j) + p_{ji}$ $\forall i, j \in V$ tales que $p_{ji} \in A$.

[271021-1642] Además, se acompaña la explicación del mismo con un ejemplo en la pizarra para facilitar la comprensión del mismo, véase la Figura A.4. **KoT** (procedimientos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

¿Son estos los caminos de menor valor? ¿Cuál habría que cambiar? [...] El algoritmo va a buscar caminos que cumplan esto y por el teorema sabrá que son de menor valor. Va a ser un proceso constructivo. [... Fijaos que] $d(3)$ en este caso no lo cumple. [Cogimos el camino por abajo que vale seis y] va a fallar que sea menor o igual que $d(2) + p_{23}$, que ir por arriba. Hay otra forma mejor de ir de uno a tres. [...] No es trivial, pero parece que tiene sentido.



	Camino	Valor
π_{11} :	1	0
π_{12} :	$1 \to 2$	-1
π_{13} :	$1 \to 4 \to 3$	6
π_{14} :	$1 \to 4$	2

Figura A.4: Grafo y tabla dibujada en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[271021-1651] Para acabar la clase, la profesora introduce el primero de los algoritmos que se verán en este tema. En la parte izquierda de la pizarra, plantea un grafo sencillo en el que va a buscar los caminos más cortos del vértice uno al resto. Para lograr el objetivo, aplica el algoritmo proyectado en la parte derecha; ver figuras A.5 y A.7. **KoT** (procedimientos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

Vamos a ver el algoritmo y aplicarlo aunque sea en un ejemplo muy muy sencillo, aunque no sea [... el de los apuntes] que es un poco más largo. El próximo día lo hacemos. [...] El que está ahí me gusta porque se ve la diferencia con Dijkstra. Hay un paso que no se daría en Dijkstra que aquí hay que darlo por ser Ford-Moore-Bellman. Ahí está el algoritmo. Voy a poner uno muy sencillo para aplicarlo y que nos dé tiempo en los tres minutos que quedan.

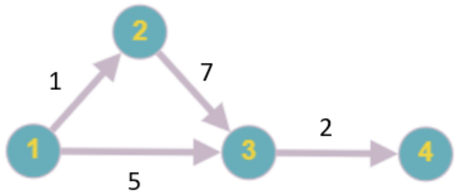


Figura A.5: Grafo dibujado en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[291021-1507] Se inicia la clase cambiando el grafo planteado en la sesión anterior para adaptarlo a lo que se quiere enseñar y enfatizar las diferencias existentes entre los dos algoritmos que se van a utilizar en esta lección, véase la Figura A.6. **KoT** (procedimientos), **KMT** (teorías personales o institucionalizadas de enseñanza)

> *Cambié un poco el grafo que estaba haciendo de ejemplo [...] porque me puse a buscar, que no lo tenía apuntado, y justo el que os había puesto como ejemplo sería igual hacerlo por Ford-Moore-Bellman que hacerlo por Dijkstra. Entonces, quería uno sencillín pero que no sea idéntico para que luego se pueda explicar la diferencia cuando haga el otro así que lo cambié un poco. Podría dejar el que está ahí en los apuntes pero es que si me pongo a hacer ese, os dormís. [...] Voy a hacer otro porque así tenéis que copiar y también tenemos que pensar y no es solo mirar unas transparencias.*

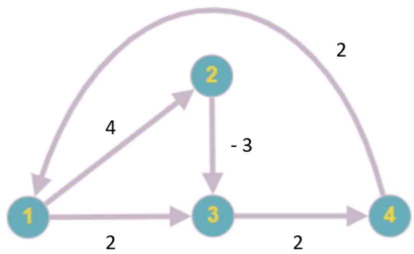


Figura A.6: Grafo dibujado en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[291021-1508] La profesora anima al alumnado a que pregunte si no entiende algún paso del algoritmo, dejando claro que es algo totalmente nuevo y que no tendrían por qué saber hacerlo. **KFLM** (formas de interacción del alumnado con el contenido matemático)

No he hecho ningún ejercicio, no hemos hecho nada parecido. Si alguien no entiende un paso que levante la mano y diga no lo entiendo. No tiene que decir nada más y yo lo repito. ¿Vale? Porque aunque hubieseis estudiado todo, todo, todo hasta ayer; podríais no entender esto porque es algo nuevo. [...] Que preguntéis no da la sensación ni de que estudiasteis ni de que no estudiasteis, aparte de que las sensaciones no puntúan. [...] Si voy en este despacio y todos lo entendéis, pero ahí os necesito, [...] no tengo ni que hacer más.

[291021-1512] Empieza la explicación del algoritmo destacando su forma de representación en tabla y cómo la idea es ir actualizando los valores de la tabla en sucesivos pasos. **KoT** (procedimientos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

El paso uno es etiquetar las distancias y los precedentes [...] para cada vértice. Por una cuestión de que quede más cómodo de ver y visualizar, se pone en modo tabla. [...] Los vértices son uno, dos, tres y cuatro. Vamos a hacer las distancias y luego los antecedentes.

[291021-1513] Remarca cómo se deben ir rellenando los valores de la tabla mientras proyecta la formulación teórica del algoritmo en la pizarra, véase la Figura A.7. **KoT** (procedimientos)

[Cuando] el vértice es la propia raíz, la distancia se marca como cero. Fijaos, es cero si es la propia raíz, es el peso si es un sucesor[, si hay un arco directo del uno a él,] e infinito en otro caso.

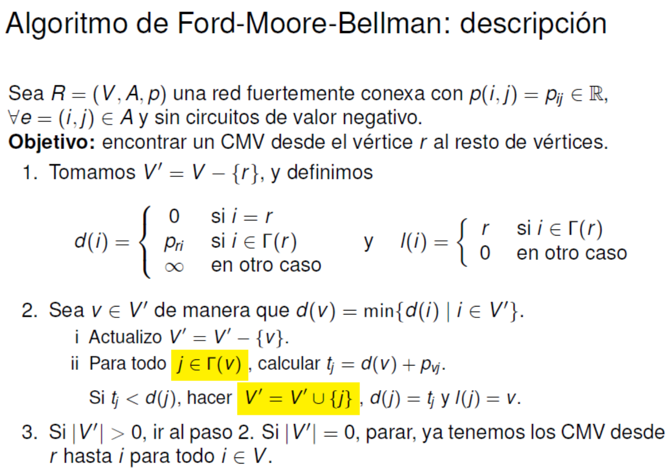


Figura A.7: Diapositiva proyectada con el algoritmo de Ford-Moore-Bellman [Recuperada de los apuntes de la asignatura (Montes, S., Modelos de Optimización en Redes, Curso 2021-2022, Universidad de Oviedo, documento inédito)].
KoT (definiciones), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[291021-1514] La profesora remarca que al aplicar el algoritmo con el ordenador, al no poder considerar el infinito, asigna un número muy grande a los vértices que no son ni el propio ni sucesores. **KoT** (fenomenología), **KPM** (prácticas ligadas a una temática en matemáticas)

> *La máquina como no tiene elección de ponerlo infinito lo que hace es poner un número muy grande, uno con muchísimos ceros, y ya es un infinito.*

[291021-1520] Se explica cómo se van actualizando los valores de la tabla con el segundo paso del algoritmo. Además, esta actualización la hace con dos colores diferentes para que se vean claras las diferencias donde las haya. **KoT** (procedimientos)

> *Si lo mejoro, si la etiqueta es mejor que la que ya había, entonces incorporo ese vértice y recalculo la tabla; que voy a poner luego en otro color para que quede claro.*

[291021-1521] Se vuelve a enfatizar sobre la orientación de estos procedimientos hacia su implementación en ordenadores. **KoT** (fenomenología)

Esto es una notación totalmente computacional, V' no puede ser V' unión con nada sino que recalculamos. Matemáticamente, si quisiésemos ser muy correctos, tendríamos que [definir V_2 como la unión del conjunto y el vértice. Luego, definir V_3 como otra unión y así sucesivamente].

[291021-1523] Se explica el significado de V'. **KoT** (definiciones)

V' es el conjunto de vértices que yo aún puedo optimizar, es decir, que igual puedo encontrar un camino mejor para llegar a ellos. Inicialmente son todos, todos los que no sean la raíz. En este caso son el dos, el tres y el cuatro.

[291021-1524-a] La profesora plantea una cuestión teórica, aplicada al ejemplo que se está haciendo, sobre los fundamentos del algoritmo. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

Un pregunta que no tiene que ver, aunque si un poco, con el algoritmo: ¿por qué no está el uno? ¿Por qué no puedo optimizar el camino al uno? [...] Porque no existen circuitos de valor negativo. Si los hubiese, sí podría mejorar pero ya llego sin moverme y si el camino se mejorase es porque hay un circuito de valor negativo. Esto se presupone que no. Por eso el uno nos lo descarta de mano.

[291021-1524-b] A continuación, explica la diferencia anunciada entre los dos algoritmos dejando ver por qué el de Dijkstra será más eficiente cuando todos los pesos son positivos. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

El uno nos lo descarta de mano; pero al dos, tres y cuatro empezamos diciendo ¡espera! que igual puedo llegar de una forma mejor. Cuando aquí llego y digo voy a fijar el tres lo saco [del conjunto de vértices que aún podemos optimizar, V',] porque es como que parece que llegué. Digo parece porque esa va a ser la diferencia con el otro algoritmo. Cuando sea el siguiente, al tres llegué y fin. Sale de aquí y *nunca va a volver a entrar. En este caso en Ford-Moore-Bellman puede volver a entrar en este [punto del algoritmo]. He puesto el ejemplo así para que veáis que vuelve a entrar [en V'.]*

[291021-1530] Tras la explicación del siguiente paso del algoritmo, se vuelve a incidir en que la diferencia entre usar Ford-Moore-Bellman y Dijkstra es que el conjunto de optimizables puede aumentar haciendo que el primer algoritmo sea más lento. **KoT** (procedimientos)

Esto que está en amarillo aquí es la única diferencia con el siguiente algoritmo, [...] el conjunto de optimizables puede incrementarse. [...] Al haber [pesos] negativos puedo mejorar caminos que ya había encontrado si, de repente, cojo un arco negativo. No hay circuitos pero sí hay pesos negativos. En el caso de positivos, cogía este porque era el camino más corto para llegar al tres; por arriba sé que es más largo [...]. Eso en el siguiente algoritmo va a ser mucho más corto.

[291021-1531] Se recomienda al estudiantado no memorizar procedimientos sin entender qué se está haciendo porque es mucho más fácil equivocarse de esa forma. **KFLM** (formas de aprendizaje)

Tenéis el algoritmo. Si queréis mecanizar, mecanizáis todo lo que os de la gana pero yo creo que te vuelves loco con la mitad si no lo estás entendiendo. Si lo entiendes es mucho más lógico y es más fácil no equivocarse, como casi todo.

[291021-1540] La profesora explica cómo los teoremas vistos anteriormente fundamentan el primer algoritmo y cómo el teorema que falta ayuda a optimizar el procedimiento. **KoT** (propiedades y fundamentos)

Estáis construyendo una colección de caminos de forma que d_i siempre es menor o igual que $d_j + p_{ji}$ [... y por el teorema 3.3] aseguras que esos caminos que vas *construyendo son los de menor valor. Por otro lado, necesitamos el [teorema] 3.2 para saber que cuando yo tengo el camino al cuatro, también tengo el camino al tres si está como [vértice] intermedio. Puedo trabajar en conjunto. Lo único que va a hacer el teorema que nos falta para poder probar el siguiente algoritmo es ver que si no hay valores negativos no hace falta nunca recular, que se puede ir siempre en un proceso para adelante.*

[291021-1541] Tras concluir con el algoritmo, se obtiene una tabla de la que se tiene que extraer la información sobre los caminos de menor valor, véase la Figura A.8. Con el resultado del algoritmo escrito en la pizarra, se van identificando los distintos caminos. La profesora completa la información correspondiente al camino desde uno a tres y va preguntando al estudiantado, previamente separado en grupos en función de su distribución en el aula, por la información correspondiente al resto de caminos. **KoT** (procedimientos), **KPM** (prácticas ligadas a una temática en matemáticas)

Está perfectamente terminado el algoritmo pero no he contestado nada. [...] Vamos a coger el camino de menor valor desde el uno [al resto de vértices]. Esto sale directamente de la tabla [...] El valor del camino está aquí, que son las distancias. Es solo copiar. Y la forma de llegar es por los precedentes. Al vértice tres, llego desde el dos. Y al dos, llego desde el uno. Deshago el camino hasta llegar al uno.

V	1	2	3	4
d	0	4	1	3
l	0	1	2	3

	Camino	Valor
π_{11} :	1	0
π_{12} :	$1 \to 2$	4
π_{13} :	$1 \to 2 \to 3$	1
π_{14} :	$1 \to 2 \to 3 \to 4$	3

Figura A.8: A la izquierda, tabla resultante tras aplicar el algoritmo al grafo de la Figura A.6. A la derecha, caminos de menor valor extraídos de la tabla.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[291021-1546] Se anima al estudiantado a intentar aplicar el algoritmo a diferentes grafos para practicar y que no lo hagan mal en el examen. **KFLM** (fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje)

Lo bueno sería que intentéis hacer [el de los apuntes, que es distinto.] Esto solo tiene una opción: practicar. Porque si el primero que haces es el del examen, es fácil que lo hagas mal. Es muy sencillo, pero te puedes liar con los subíndices. [...] Practicáis a ver si os sale y, si no os sale, pues me lo preguntáis sin ningún problema.

[291021-1547] Se plantea otro ejemplo diferente. Se proyecta una tabla, resultado de haber aplicado el algoritmo de Ford-Moore-Bellman a un grafo con cinco vértices. Repitiendo la dinámica anterior, se busca que el estudiantado identifique los caminos de menor valor del vértice uno al resto, véase la Figura A.9. **KoT** (procedimientos), **KMT** (teorías personales o institucionales de enseñanza)

Vamos a hacer muchas preguntas para que todo el mundo participe. [...] No pasa nada si os equivocáis, por eso no pregunto a uno: para que nadie se agobie. Lo que quiero es que estéis pensando, intentando aprender; si no perdemos el tiempo. [...] Estamos buscando caminos de menor valor de [un vértice] a cinco. ¿Quién es la raíz de salida? [El vértice] uno, queda identificada al final del algoritmo por el cero-cero. Hay ocho cosas que hacer, elegís la que queráis y contestáis por orden valor o camino. Si una fila se equivoca, la de detrás contesta.

V	1	2	3	4	5
d	0	1	3	5	8
l	0	4	1	3	1

	Camino	Valor
π_{12} :	$1 \to 3 \to 4 \to 2$	1
π_{13} :	$1 \to 3$	3
π_{14} :	$1 \to 3 \to 4$	5
π_{15} :	$1 \to 5$	8

Figura A.9: A la izquierda, tabla proyectada. A la derecha, caminos de menor valor extraídos de la tabla.

KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[291021-1552] Se concluye el ejercicio mostrando una representación gráfica alternativa a la tabla. Además, conecta el resultado con las arborescencias explicadas en el tema anterior. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KSM** (conexiones de contenidos transversales)

Eso que está ahí [proyectado] son los caminos de menor valor dibujados. Es una representación gráfica, mediante nuestros grafos habituales, de los caminos de menor valor. ¿Siempre es una arborescencia de unión? [...] No tiene por qué serlo, pero en este caso sí lo es. Llegamos del [vértice] uno a todos, pero no es de menor valor.

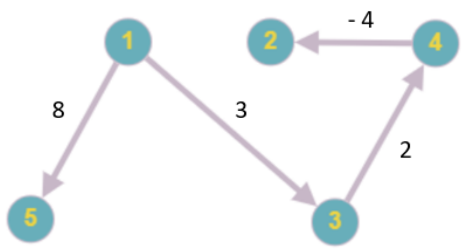


Figura A.10: Grafo dibujado en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación),**KMT** (recursos materiales y virtuales)

[291021-1554] Se finaliza la clase proponiendo un ejercicio para repasar y afianzar los trabajado en esta clase. **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

Para el fin de semana, haced el ejercicio dos. Os tendría que salir. [...] Sería conveniente que lo intentaseis porque así lo dejáis fijado y no hay que mirarlo más. Si no, dentro de quince días no os vais a acordar de nada de esta clase.

[031121-1609] Se inicia la clase incidiendo en la motivación del algoritmo de Dijkstra: mejorar el algoritmo de Ford-Moore-Bellman. **KoT** (propiedades y fundamentos)

Vamos a ver una forma mejorada [del algoritmo de Ford-Moore-Bellman] que da un año después de su formulación Dijkstra. Mejora el algoritmo anterior cuando los pesos son todos positivos. ¿En qué sentido mejora? Es casi igual [...] pero es un poco más corto. Voy a explicar brevemente qué dice el resultado [que nos falta] y luego vemos el algoritmo.

[031121-1611] Se explica el fundamento del teorema que servirá de base, junto con los vistos previamente, para la formulación del algoritmo de Dijkstra. También se incide en las diferencias que permiten la mejora del algoritmo visto anteriormente. **KoT** (propiedades y fundamentos)

> *Si quiero buscar los CMV [de un vértice a otro], no necesito buscar en todos sino solamente en aquellos vértices i que sean sucesores del vértice con el que estamos trabajado. Si lo leéis con calma es lo que dice: en realidad no hace falta buscar los mínimos de todos. Si os acordáis de Ford-Moore-Bellman, [...] ahora no hace falta buscar en todos.*

[031121-1612-a] La profesora destaca que el número de pasos que habrá que realizar con este algoritmo es conocido de antemano, a diferencia de lo que ocurría con el otro. Este es el criterio por el cuál se considera que uno es más óptimo que el otro. **KoT** (procedimientos)

> *Lo bueno aquí es que el conjunto de vértices a optimizar nunca va a crecer, gracias a este resultado. [...] Hay un número finito de pasos que conocemos a priori que son uno menos que el número de vértices. Sin embargo, en Ford-Moore-Bellman no sabemos cuánto va a tardar porque puedo sacar un vértice y luego volver a meterlo. Esto hace que el algoritmo sea más largo. Si tenéis todo pesos positivos, nunca debéis utilizar Ford-Moore-Bellman porque puede ser más largo y no merece la pena. Cuando estéis con grafos reales, más largo puede ser una diferencia de cinco minutos en la ejecución.*

[031121-1612-b] Se remarca la importancia de usar el algoritmo de Dijkstra únicamente cuando no haya pesos negativos. **KoT** (procedimientos)

> *Si en los pesos hay alguno negativo, [Dijkstra] no vale. Aplicar se puede aplicar porque aplicar se puede aplicar todo. Pero no está garantizado que encuentre el óptimo porque este teorema solo se puede usar para pesos positivos.*

[031121-1616] La profesora explica cuál va a ser el desarrollo de la clase. **KMT** (teorías personales e institucionalizadas de aprendizaje)

> *Voy a comparar [ambos algoritmos] y luego lo aplico en un ejemplo a ver si así lo entendemos mejor.*

[031121-1617] Se proyecta el algoritmo en la pizarra para remarcar visualmente en qué punto se diferencia del visto anteriormente, véase la Figura A.11. **KoT** (procedimientos)

> *Fijaros, este es el de Dijkstra. La única diferencia con el de Ford-Moore-Bellman es lo que está en amarillo.*

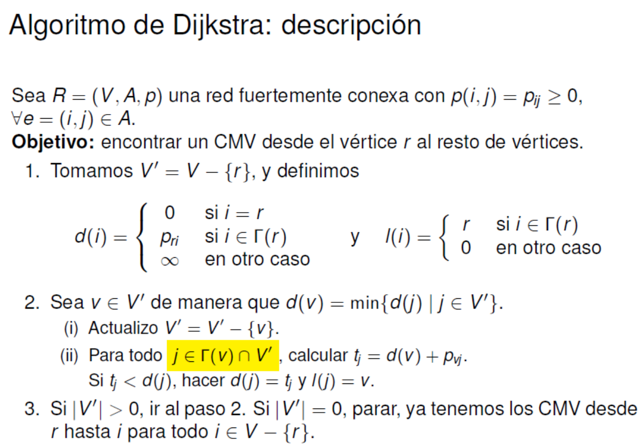


Figura A.11: Diapositiva proyectada con el algoritmo de Dijkstra [Recuperada de los apuntes de la asignatura (Montes, S., Modelos de Optimización en Redes, Curso 2021-2022, Universidad de Oviedo, documento inédito)].
KoT (definiciones, **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[031121-1619] La profesora plantea a modo de ejemplo un grafo, véase la Figura A.12, que ilustre este nuevo procedimiento al estudiantado. Se buscará obtener los caminos de menor valor desde el vértice uno al resto usando el algoritmo de Dijkstra mientras se mantiene proyectada en la pizarra su formulación, mostrada en la Figura A.11. **KoT** (procedimientos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

Supongamos el siguiente grafo. Me lo voy a inventar sobre la marcha. Voy a considerar que el uno es la raíz de salida y quiero encontrar los caminos de menor valor desde uno [al resto de vértices].

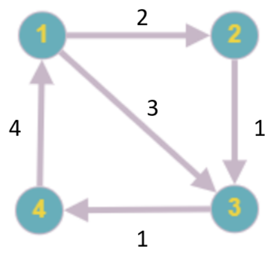


Figura A.12: Grafo dibujado en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[031121-1621] Remarca la importancia de usar cada algoritmo cuando se debe usar. **KoT** (procedimientos), **KFLM** (formas de interacción del alumnado con el contenido matemático)

Como todos los pesos son positivos, los dos [algoritmos] son válidos. Pero ¿cuál es mejor? Dijkstra. No uso un algoritmo más largo si puedo usar uno más corto. Eso es un problema grave y, en el lenguaje que nosotros entendemos, un problema que quita puntos en el examen. En una empresa sería grave que no sepas un algoritmo mejor, que encima es famoso y conocido, y en clase quita puntos.

[031121-1622] Se agrupa al estudiantado aleatoriamente, según su distribución en el aula, y se va preguntando por los valores necesarios para completar el primer paso del algoritmo, véase la Figura A.13. **KoT** (procedimientos)

Vamos a ponerlo en modo tabla porque es más cómodo. [...] Primero los vértices: uno, dos, tres y cuatro. El primer paso es idéntico a Ford-Moore-Bellman. Tengo que poner las distancias de cada vértice que no sea el mismo o uno que no sea sucesor. ¿Quién quiere? No pasa nada, vamos allá. ¿Cuánto vale la distancia al uno? Cero, muy bien. ¿Y al dos? Dos porque es el peso del arco que va del uno *al dos. ¿Hay un arco al tres? Sí, por lo tanto ¿cuánto vale d_3? Sí, tres. ¿Y d_4? Infinito porque no hay arco desde el uno. Esto quiere decir que no hay arco. El ordenador lo que hace es poner un número muy grande. Como luego va a comparar distancias y coger el mínimo, no lo va a considerar y está. [En la siguiente fila] van los predecesores. Idéntico a Ford-Moore-Bellman.*

V	1	2	3	4
d	0	2	3	∞
l	0	1	1	0

Figura A.13: Tabla dibujada en la pizarra por la profesora y completada con ayuda del estudiantado.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[031121-1625] Continuando con el algoritmo, se explica la propiedad fundamental de este y por qué el conjunto de vértices por optimizar solo se reduce. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

¿Quién es el de menor distancia al uno? El dos. Decimos entonces que V' van a ser tres y cuatro. [Quito el dos y] nunca más va a volver a aparecer. Esa es la ventaja de Dijkstra. [...] Hemos encontrado el camino de menor valor al dos. Si es el vértice al que llego primero, por ningún otro sitio voy a poder llegar mejor porque no hay arcos negativos. Si salgo por otro lado, ya pago más que directamente. [...] Ahora considero también los sucesores del dos y tengo que hacer [el siguiente paso] para todo j perteneciente a $\Gamma(2 \cup V'$, que es solo el tres. Sin embargo, si esto fuese Ford-Moore-Bellman, hay que hacerlo para el uno y para el tres. Ya trabajas el doble ahí. Solo tengo que recalcular si puedo llegar al tres de una forma mejor.

[031121-1627] En este ejemplo se da el caso de que hay un empate y se explica por qué no se debe recalcular todo. **KoT** (procedimientos)

Solo recalculo si mejoro [el camino]. Como no mejoro, no trabajo en balde. Es verdad que en este caso, a veces pongo los ejemplos y yo misma me sorprendo, *hay un empate. Podríamos decir que lo mismo me da ir de frente que ir por arriba y luego bajar. Pero si ya tenía un camino para qué voy a recalcular. Aunque sea computacionalmente recolocar cosas, me va a costar más trabajo. No merece la pena.*

[031121-1630] Continúa con el algoritmo actualizando los valores de la tabla. Esta actualización se hace con dos colores diferentes para que se vean claras las diferencias donde las haya. Además, remarca el número de iteraciones que serán necesarias para finalizar el algoritmo. **KoT** (procedimientos)

Tengo que recalcular los valores para el cuatro. [...] El paso dos [del algoritmo] lo voy a dar solamente tres veces: una para el vértice dos, otra para el tres y otra para el cuatro. Lo hago tres veces porque hay tres vértices que no son la raíz.

[031121-1631-a] Una vez finalizado el algoritmo se extraen los caminos de menor valor de la tabla, véase la Figura A.14. **KoT** (procedimientos)

Los caminos de menor valor [que podemos extraer de la tabla] son ir directamente del uno al dos, del uno al tres y, luego, el uno-tres-cuatro. Está claro que no son únicos.

V	1	2	3	4
d	0	2	3	4
l	0	1	1	3

		Camino	Valor
π_{12}	:	$1 \to 2$	2
π_{13}	:	$1 \to 3$	3
π_{14}	:	$1 \to 3 \to 4$	4

Figura A.14: A la izquierda, tabla resultante tras aplicar el algoritmo al grafo de la Figura A.12. A la derecha, caminos de menor valor extraídos de la tabla.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[031121-1631-b] Basándose en el grafo utilizado en el ejemplo, véase la Figura A.12, se obtienen varias conclusiones. La primera es que los caminos de menor valor no son únicos en general. A modo de contraejemplo, la profesora muestra en la pizarra dos de las posiblidades que hay para seleccionarlos, véase la Figura A.15. En base a esta selección, se ve también que los caminos de menor valor no forman en general una arborescencia de unión, véase la Figura A.16. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KPM** (prácticas ligadas a la matemática en general), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

> *Os puedo poner aquí que los caminos de menor valor son el uno-dos, el uno-tres y el uno-dos-tres-cuatro. Pero, si me da la gana, también puedo deciros que los caminos de menor valor son el uno-dos, el uno-dos-tres y el uno-tres-cuatro. También son caminos de menor valor. Este ejemplo nos sirve de dos cosas. Lo primero para demostrar que los caminos de menor valor no son únicos en general. Si dibujáis [los primeros] no solo no forman una arborescencia de unión de valor mínimo sino que no es arborescencia de unión. [...] Muchos de los ejemplos que hemos hecho acaban formándola, pero no tiene por qué.*

	Camino	Valor
π_{12} :	$1 \to 2$	2
π_{13} :	$1 \to 3$	3
π_{14} :	$1 \to 2 \to 3 \to 4$	4

	Camino	Valor
π_{12} :	$1 \to 2$	2
π_{13} :	$1 \to 2 \to 3$	3
π_{14} :	$1 \to 3 \to 4$	4

Figura A.15: Alternativas planteadas en la pizarra por la profesora para los caminos de menor valor correspondientes al grafo de la Figura A.12.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

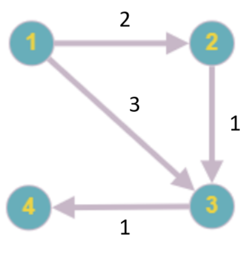


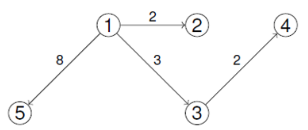
Figura A.16: Grafo dibujado en la pizarra por la profesora.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[031121-1634] Se proyecta en la pizarra otro ejemplo. Siguiendo la dinámica descrita anteriormente, se busca la participación activa del estudiantado completando una tabla con los caminos de menor valor, véase la Figura A.17 derecha. En un principio se muestra únicamente la tabla obtenida al aplicar el algoritmo de Dijkstra a un grafo y, una vez obtenidos los caminos, se muestra su representación gráfica, véase la Figura A.17 izquierda. Este ejemplo se encuentra resuelto en el material que la profesora sube en la plataforma virtual de la asignatura. **KoT** (procedimientos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

> *Vamos a analizar el ejemplo [que hay resuelto en los apuntes...]. Este es el final del algoritmo. Si miráis, evidentemente hay cuatro pasos porque el grafo tiene cinco vértices. Y solo cuatro. Ahora bien, de ahí ¿qué deducimos? ¿Cuál es la raíz de salida? [...] Por grupos, rápido que ya lo sabéis muy bien y es demasiado fácil, camino y valor. [...] Al fondo de la clase a la izquierda, camino y valor al dos. Venga, por aquí adelante, al tres. [...] Tiene esta forma de ahí. Recordad que no tiene por qué ser única cuando hay empates.*

Algoritmo de Dijkstra: ejemplo

	1	2	3	4	5
d	0	2	3	5	8
l	0	1	1	3	1



	Camino	Valor
π_{12} :	$1 \to 2$	2
π_{13} :	$1 \to 3$	3
π_{14} :	$1 \to 3 \to 4$	5
π_{15} :	$1 \to 5$	8

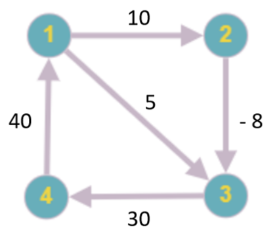
Figura A.17: A la izquierda, fragmento de la diapositiva proyectada con el algoritmo de Dijkstra [Modificada de los apuntes de la asignatura (Montes, S., Modelos de Optimización en Redes, Curso 2021-2022, Universidad de Oviedo, documento inédito)]. A la derecha, tabla dibujada en la pizarra por la profesora y completada con ayuda del estudiantado.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[031121-1637] Apoyándose en el ejemplo anterior, explica la diferencia que hay entre buscar arborescencias de unión de valor mínimo (tema dos) y buscar caminos de menor valor (tema 3). **KoT** (propiedades y fundamentos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, tareas)

En este caso, sí es una arborescencia de unión: no tiene ciclos ni circuitos y une a todos, así que genial. Tiene cuatro arcos. Salen del uno. Es arborescencia de unión, pero no es de valor mínimo. Esta tiene valor quince y la de valor mínimo, si aplicáis el algoritmo del tema dos, es esta con valor catorce. ¿Por qué? De cara a unirlas todas, esto es más barato porque pago siete [uniendo el vértice cinco al tres]. Pero para llegar del uno al cinco es más caro, pagaría diez pasando por el tres cuando puedo llegar directamente pagando ocho. [Al buscar caminos de menor valor] trabajo localmente, vértice a vértice, aunque haga un algortimo global lo que me interesa es optimizar cada vértice. [Al buscar arborescencias de unión de valor mínimo] busco optimizar un conjunto de vértices, encontrar la unión para todos. Es un problema distinto.

[031121-1643] A continuación se resuelve uno de los ejercicios planteados, véase la Figura A.18 izquierda, enfatizando nuevamente en que buscar caminos de menor valor supone resolver varios problemas a la vez. Se resuelve el ejercicio aplicando el algoritmo de Ford-Moore-Bellman, obteniéndose la tabla de la Figura A.18 derecha. **KoT** (propiedades y fundamentos), **KMT** (actividades, tareas, ejemplos, ayudas)

Tenemos aquí una red y me dice que haga varias cosas con ella. Vamos a hacer muy rápido las partes que son fáciles. [...] Es parecido al que hice de ejemplo. Es muy evidente dónde está el mejor camino pero vamos a hacer los algoritmos para practicar con un ejemplo sencillo. Apartado a, encuentra un camino de menor valor de[l vértice] uno al resto. [...] Tres problemas independientes con una solución de a una, pero son tres problemas independientes. ¿Lo véis? Del uno al dos, del uno al tres y del uno al cuatro. Tres problemas que solucionamos a la vez. [...] De momento solo tenemos dos opciones, ¿cuál vamos a usar? ¿Dijkstra o Ford-Moore-Bellman? [...] Ford-Moore-Bellman porque hay pesos negativos, el otro no se puede usar. Dijkstra no da siempre el óptimo si hay pesos negativos. No quiere decir que no pueda dar el óptimo, pero no tenemos garantizado que lo dé. No lo podemos aplicar. [...] Apartado b, cuál es el camino de menor valor de uno a cuatro. ¿Qué nos salió según esta tabla? Al cuatro se llega a través del tres, al tres a partir del *dos y del dos a partir del uno. Así que sería 1-2-3-4 y eso vale treinta y dos.*



V	1	2	3	4
d	0	10	2	32
l	0	1	2	3

Figura A.18: A la izquierda, grafo propuesto en el ejercicio. A la derecha, tabla obtenida tras aplicar el algoritmo de Ford-Moore-Bellman al grafo propuesto.
KoT (registros de representación), **KMT** (recursos materiales y virtuales)

[031121-1656] Para finalizar la clase, se comenta el siguiente apartado. La profesora también dice qué ejercicios va a realizar para que el estudiantado lo sepa con anterioridad a la práctica de aula. **KoT** (procedimientos)

> *[En el apartado c,] os pide que apliquéis el algoritmo de Dijkstra. Se puede aplicar lo que pasa que no sabemos si da el óptimo. De hecho, si lo aplicáis no os va a dar el óptimo. Es para que lo veáis. Aplicar se puede aplicar, pero no permite obtener el camino mejor siempre. Y luego, es muy interesante el apartado d. Lo haré yo el viernes porque es chulo y además repasa una cosa del tema dos. Haré también el ejercicio cinco que también tiene algo que ver con el tema dos.*