

Cálculo en variedades



Universidad de Oviedo

Autor: Miguel Pérez Alonso

Tutora: Concha Masa Noceda

Facultad: Ciencias

Año académico: 2021/22

Titulación: Doble Grado en Matemáticas y Física (opción B) - Grado en Matemáticas

Índice general

Introducción	1
1. Variedades: conceptos básicos	2
1.1. Primeras definiciones	2
1.2. Ejemplos de variedades	7
1.3. Variedades con frontera	10
1.4. Subvariedades	15
2. El espacio tangente	17
2.1. Campos vectoriales	20
3. Formas diferenciales	24
3.1. Tensores	24
3.2. Formas	28
3.3. Aplicaciones inducidas	33
3.4. Derivada exterior	36
4. Integración en variedades	42
4.1. Particiones de la unidad	42
4.2. Orientaciones	46
4.3. Integrales y teorema de Stokes	53
Conclusiones	65
Bibliografía	66

Introducción

Las variedades son los elementos centrales de la geometría diferencial. Se introdujeron en el siglo XIX a raíz del interés de estudiar una geometría no euclídea, aunque hasta la primera mitad del siglo XX no se formalizaron las definiciones y los términos que usamos en la actualidad. Ya sea en otras áreas de las Matemáticas o en campos como la Robótica, la Estadística, la Computación Gráfica o la Física Teórica [1], las variedades y las técnicas que se utilizan en su estudio tienen una gran importancia en el mundo de la investigación. Por familiaridad y para ilustrar esto último, a lo largo del trabajo se incluirán algunas aplicaciones a la Física Teórica de los conceptos vistos.

En este trabajo se dará una introducción a las variedades diferenciables y a cómo se desarrolla un cálculo diferencial e integral en las mismas. Se pretende que el trabajo esté autocontenido de manera que alguien con nociones básicas de Álgebra Lineal, Análisis y Topología pueda seguirlo en su totalidad. Aunque el contenido es algo denso, los resultados están demostrados con todo el detalle posible y hay varios ejemplos desarrollados para facilitar la comprensión.

Como objetivo final del trabajo se definirá la integración en variedades para demostrar la versión más general del teorema de Stokes, uno de los resultados centrales del cálculo vectorial y cuyas aplicaciones más simples se enseñan en casi todos los grados de ciencias e ingeniería.

Antes de empezar, nos gustaría dar un agradecimiento especial a Andrés Viña Escalar, quien impartió un curso extracurricular de Geometría Diferencial que resultó de gran ayuda para la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Variedades: conceptos básicos

1.1. Primeras definiciones

Antes de definir lo que es una variedad hace falta definir los elementos que la van a constituir. Como el enfoque de este trabajo será la integración en variedades, se pedirá que los espacios topológicos satisfagan una serie de propiedades que se suelen resumir como "ser localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n ".

Sea (M, τ) un espacio topológico. A lo largo de este trabajo supondremos que[1]

- M es Hausdorff: para todo $x, y \in M$ con $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ abiertos disjuntos de M tales que $x \in U, y \in V$.
- M es segundo numerable: la topología τ de M posee una base de abiertos numerable.
- Para todo $p \in M$ existen dos abiertos $U \in \tau, W \subset \mathbb{R}^n$ (W abierto con la topología usual) con $p \in U$ y un homeomorfismo $\psi : U \rightarrow W$.

El imponer estas propiedades puede resultar un poco arbitrario a primera vista, pero son necesarias si se quiere definir un cálculo que generalice el de \mathbb{R}^n .

A la hora de derivar e integrar, es muy común trabajar con sucesiones y límites. En un espacio Hausdorff se puede demostrar aplicando la definición de convergencia de una sucesión [2] que el límite de toda sucesión convergente es único. No tener esta garantía de la unicidad de los límites complica mucho las cosas.

Por otra parte, las otras dos condiciones dotan a las variedades de propiedades como la compacidad

local o la conexión local. Para lo que vamos a hacer en este trabajo nos interesa sobre todo la conexión local, que demostraremos para usarla posteriormente.

Estas condiciones también permiten introducir una métrica o tensor métrico en las variedades, que se utiliza, por ejemplo, para obtener las ecuaciones del movimiento de una teoría de campos en Física. [3]

Además de esto, en numerosas ocasiones usaremos el **convenio de suma de Einstein** para aligerar la notación. La regla es la siguiente:

- Si un índice mudo (es decir, que se puede cambiar por cualquier símbolo sin alterar el significado de la ecuación) aparece dos veces, una como subíndice y otra como superíndice, se sobreentiende que se suman. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^N x_i y^i \equiv x_i y^i \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g^{ij} x_i y_j \equiv g^{ij} x_i y_j. \quad (1.2)$$

- Los superíndices en el denominador de una fracción se consideran como subíndices a la hora de aplicar las reglas. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} f^i = \frac{\partial}{\partial x^i} f^i = \frac{\partial}{\partial x^1} f^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} f^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} f^3 \quad (1.3)$$

Dentro de este trabajo, se usa este convenio de suma en ecuaciones como (2.8), donde hay un sumatorio sobre el índice j , (3.31), donde hay r sumatorios sobre los índices i_1, \dots, i_r y l sumatorios sobre los índices j_1, \dots, j_l , y (3.54), donde se suma sobre el índice j y sobre los r índices i_1, \dots, i_r .

En todo momento se dejará claro cuántos términos tiene cada sumatorio y, naturalmente, cuando estas reglas no se apliquen, se pondrá un sumatorio donde corresponda.

Los índices se suelen poner arriba o abajo según si el objeto con el que trabajamos está relacionado con un espacio vectorial o su dual y cobrará más sentido en el capítulo 3.

Definición 1.1 Sea (M, τ) un espacio topológico, $U \in \tau$. Una aplicación

$\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama **carta sobre M** si es un homeomorfismo sobre su imagen y dicha imagen $\phi(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n . A la carta ϕ se le suele denotar (U, ϕ) para tener en cuenta su dominio.

Las cartas nos permitirán dar una noción parecida a las coordenadas en \mathbb{R}^n en espacios topológicos más abstractos: para cada punto p de M , tendremos una serie de funciones reales que nos definen el punto de \mathbb{R}^n correspondiente $\phi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$. Siguiendo esta notación muchas veces vamos a denotar (U, x^1, \dots, x^n) a la carta (U, ϕ) .

Definición 1.2 [4] Sea (M, τ) un espacio topológico. Llamaremos **atlas** C^∞ a un conjunto de cartas $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ tales que los abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ forman un recubrimiento abierto de M y tales que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ para algún par $i \neq j$, entonces la composición

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

es una función de clase C^∞ (en cuyo caso se dirá que ϕ y ψ son **cartas compatibles**).

La condición de que el "cambio de coordenadas" $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sea C^∞ nos asegura que no haya problemas de definición a la hora de usar cartas cuyos dominios se intersequen.

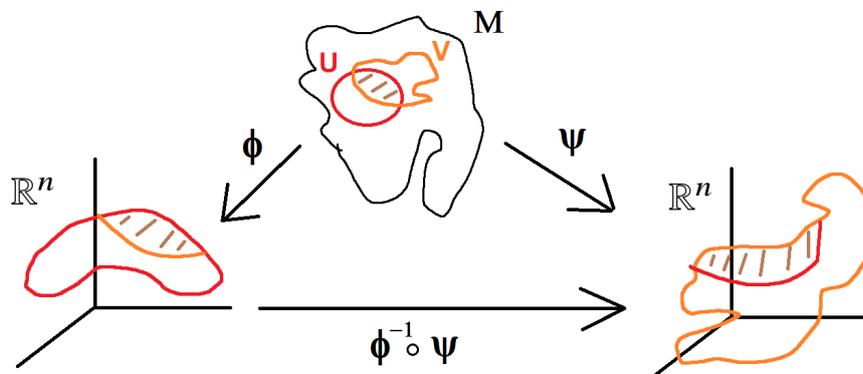


Figura 1.1: Conjuntos involucrados en un cambio de coordenadas entre dos cartas (U, ϕ) y (V, ψ)

Definición 1.3 Sea (M, τ) un espacio topológico. Al conjunto M junto con un atlas A de clase C^∞ se le llama **variedad diferenciable** (o simplemente **variedad**, en este trabajo siempre se usarán **variedades diferenciables**). Se impone que todas las cartas de A tengan como conjunto de llegada el mismo \mathbb{R}^n , a la dimensión n la llamaremos **dimensión de la variedad**.

Se puede demostrar ([1]) que la dimensión de una variedad es un invariante topológico, es decir, una variedad de dimensión n solo puede ser homeomorfa a otra variedad de dimensión n , lo que elimi-

na la necesidad de imponer que la dimensión de los \mathbb{R}^n sea siempre la misma. Como la demostración utiliza resultados bastante alejados del propósito de este trabajo, no la daremos.

Como curiosidad, el estudio de las variedades no está solamente limitado a las variedades reales. Si se quiere trabajar con números complejos, se pueden definir variedades analíticas $2n$ -dimensionales si las cartas tienen \mathbb{C}^n como llegada y exigiendo que los cambios de coordenadas sean funciones analíticas.

Definición 1.4 [4] *Una variedad diferenciable de dimensión n se llama **suave** si su atlas A es maximal, es decir, si existe otro atlas B tal que $A \subset B$, entonces $A = B$. A este atlas maximal se le llama también **estructura diferenciable** en M .*

Proposición 1.1 [4] *Todo atlas C^∞ de una variedad M está contenido en un único atlas maximal.*

Demostración:

Sea $A = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas cualquiera de M y consideramos el siguiente conjunto:

$$B = A \cup \{(\psi_j, V_j) \mid \phi_i \circ \psi_j^{-1} \text{ es } C^\infty \forall i \in I\} \quad (1.5)$$

Probemos que B es un atlas. Para ello habrá que ver que las cartas que hemos añadido sean compatibles con las cartas de A , es decir, que sus cambios de coordenadas sean C^∞ sobre la intersección de sus dominios.

Sean $(\psi_a, V_a), (\psi_b, V_b)$ tales que $V_a \cap V_b \neq \emptyset$. Como ambas cartas son compatibles con todas las cartas de A y los U_i forman un recubrimiento abierto de A , podemos encontrar una carta (ϕ_i, U_i) para cada punto de $V_a \cap V_b$ de forma que $\phi_i \circ \psi_a^{-1}$ y $\phi_i \circ \psi_b^{-1}$ son ambas C^∞ . Entonces

$$\psi_a \circ \psi_b^{-1} = (\psi_a \circ \phi_i^{-1}) \circ (\phi_i \circ \psi_b^{-1}). \quad (1.6)$$

Esto es una composición de dos aplicaciones que son C^∞ por hipótesis, por lo que $\psi_a \circ \psi_b^{-1}$ es C^∞ . Por tanto B es un atlas.

A partir de esto también podemos ver la maximalidad de B : cualquier carta compatible con B debe ser compatible con las cartas de A por definición, pero eso implica por la construcción de B que dicha carta pertenece a B .

Solo falta ver la unicidad. Sea B' otro atlas maximal que contenga a A . Entonces, de nuevo, todas las cartas de B' deben ser compatibles con las de A , por lo que pertenecen a B y tenemos que $B' \subset B$.

Como ambos atlas son maximales, se debe tener $B' = B$. ■.

Esta proposición nos va a permitir hablar siempre en términos de variedades suaves. Como siempre tenemos asegurada la existencia del atlas maximal, es conveniente usarlo para trabajar con nuestra variedad.

Entonces, cada vez que digamos "variedad" nos estaremos refiriendo a una variedad diferenciable y suave.

Definición 1.5 [4] Sea M una variedad de dimensión n y (U, ϕ) una carta sobre M . Se dice que una aplicación $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ si la composición $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ .

Observación: esta definición asegura que independientemente de la carta, f es C^∞ en cualquier punto $p \in U$. Si ψ es otra carta tal que p está en su dominio y f es C^∞ según ϕ ,

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}). \quad (1.7)$$

Como el primer paréntesis es C^∞ y el segundo es un cambio de coordenadas, que también estamos suponiendo C^∞ , la composición también lo es.

Ya que tenemos definidas funciones C^∞ , va a ser interesante definir sus derivadas parciales.

Definición 1.6 [4] Sea M una variedad de dimensión n , (ϕ, U) una carta de M y $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Se define la **derivada parcial** de f en el punto $p \in M$ con respecto a la coordenada x^i ($1 \leq i \leq n$) como

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)). \quad (1.8)$$

La derivada parcial también es una función C^∞ . Notando que $p = \phi^{-1}(\phi(p))$, podemos ver que

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \phi^{-1} = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}, \quad (1.9)$$

viendo ambas como funciones en $\phi(U)$. Como, por definición, $f \circ \phi^{-1}$ es C^∞ , la derivada parcial también lo es.

Vemos ahora cómo se definen aplicaciones entre variedades. De nuevo, nos apoyaremos en que las cartas nos permiten trasladarnos a \mathbb{R}^n .

Definición 1.7 [4] Sean M una variedad de dimensión n y L una variedad de dimensión m . Una función $f : M \rightarrow L$ se dice de clase C^∞ si la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función de clase C^∞ para toda carta (U, ϕ) de M y para toda carta (V, ψ) de L .

Observemos que si fijamos que la variedad L sea \mathbb{R} con el atlas formado por solo la identidad, una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ si $Id \circ f \circ \phi^{-1} = f \circ \phi^{-1}$ es C^∞ , de manera que recuperamos la definición 1.5.

Para acabar la sección, vamos a demostrar una de las propiedades topológicas de las variedades que vamos a necesitar para demostrar algunos resultados.

Proposición 1.2 Toda variedad M es localmente conexa por caminos (y por tanto localmente conexa).

Demostración:

Sea $p \in M$, V un entorno de p y (U, ϕ) una carta que tenga a p en su dominio. Buscamos un entorno de p conexo por caminos que esté contenido en V . Por definición de entorno existe un abierto W de M tal que $p \in W \subseteq V$.

Por definición de carta U es abierto, así que $U \cap W \subseteq U$ es un abierto homeomorfo al abierto $\phi(U \cap W) \subseteq \mathbb{R}^n$. Al ser $\phi(U \cap W)$ abierto, como \mathbb{R}^n es un espacio métrico existe una bola abierta $B(\phi(p), \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ tal que $\phi(p) \in B(\phi(p), \epsilon) \subseteq \phi(U \cap W)$. Las bolas de \mathbb{R}^n son conexas por caminos (todo par de puntos (x, y) se pueden unir con el camino $f(t) = (1-t)x + ty$), así que usando que ϕ es homeomorfismo

$$p \in \phi^{-1}(B(\phi(p), \epsilon)) \subseteq \phi^{-1}(\phi(U \cap W)) = U \cap W \subseteq V. \quad (1.10)$$

La antiimagen de la bola es abierta porque la bola es abierta y todo abierto es entorno de sus puntos, por lo que hemos encontrado un entorno de p conexo por caminos y contenido en V .

Concluimos que M es localmente conexa por caminos. ■

1.2. Ejemplos de variedades

El ejemplo más sencillo de variedad que se nos puede ocurrir es \mathbb{R}^n con la topología asociada a la métrica euclídea. Si consideramos como carta la identidad (que es claramente un homeomorfismo de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n) tenemos un atlas formado por una sola carta y le acabamos de dar a \mathbb{R}^n estructura de variedad de dimensión n .

Otro ejemplo más interesante es el de la banda de Möbius, [5] que se define como el espacio topológico $([0, 1]^2/R, \tau_{[0,1]^2/R}^R)$, donde $\tau_{[0,1]^2/R}^R$ es la topología cociente asociada a la relación R que relaciona los puntos $(0, y)$ con $(1, -y)$ y al resto de puntos de $[0, 1]^2$ consigo mismos. En la práctica, podemos considerar que esta topología funciona como la inducida de \mathbb{R}^2 en el conjunto $[0, 1]^2$, con la diferencia de que cuando incluyamos puntos de la forma $(0, y)$ tenemos que incluir los puntos $(1, -y)$ por estar relacionados. Podemos definir la carta siguiente:

$$\begin{aligned} \phi : U \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 0,4 \text{ ó } 0,6 < x \leq 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \phi(x, y) &= \begin{cases} (x, y) & \text{si } 0 \leq x \leq 0,4 \\ (x - 1, -y) & \text{si } 0,4 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para completar el atlas tomamos $V = \{(x, y) \mid 0,3 < x < 0,7\}$ y consideramos la identidad como carta. Claramente $U \cup V = [0, 1]^2$ y tanto ϕ como la identidad son homeomorfismos. En $U \cap V$ tenemos:

$$\phi \circ Id^{-1}(x, y) = \phi(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } 0,3 \leq x \leq 0,4 \\ (x - 1, -y) & \text{si } 0,6 \leq x \leq 0,7 \end{cases} \quad (1.12)$$

Que es una aplicación C^∞ y su inversa también lo es, por lo que la banda de Möbius cumple todas las condiciones para ser una variedad de dimensión 2.

Un tipo de variedades que tienen un interés enorme en Física Teórica son los grupos de Lie.

Definición 1.8 [6] *Sea G una variedad diferenciable. Si existe una operación binaria interna \cdot tal que (G, \cdot) es un grupo y además tanto \cdot como la aplicación que lleva cada elemento de G a su inverso son funciones de clase C^∞ se dice que G es un **grupo de Lie**.*

Los grupos de matrices (con la multiplicación) como

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \quad (1.13)$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\} \quad (1.14)$$

son todos grupos de Lie. Como ejemplo podemos considerar el siguiente: [6]

$$SU(2) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = \mathbb{I}_2, \det(A) = 1\}, \quad (1.15)$$

donde A^\dagger es el complejo conjugado de la matriz traspuesta de A .

La estructura de grupo de $SU(2)$ se tiene porque contiene la identidad y las inversas de las matrices de $SU(2)$, que también cumplen

$$AA^\dagger = A^\dagger A = Id \Rightarrow (AA^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger A^{-1} = Id, \quad \det(A^{-1}) = \det A = 1. \quad (1.16)$$

Para ver su estructura topológica vamos a aprovechar las dos condiciones que definen el grupo: sean

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}. \text{ Entonces si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger A = \mathbb{I}_2 \Rightarrow A^\dagger = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Ahora, calculando el determinante, si $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$,

$$\det A = aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1. \quad (1.18)$$

Juntado esta última condición con que podemos escribir los elementos de \mathbb{C}^2 como matrices 2×2 y que a su vez \mathbb{C}^2 es homeomorfo a \mathbb{R}^4 , concluimos que

$$SU(2) = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1\} \quad (1.19)$$

es homeomorfo a la esfera en \mathbb{R}^4 o 3-esfera S^3 . Por tanto la estructura topológica de $SU(2)$ vendrá dada por las imágenes de abiertos de \mathbb{R}^4 con la topología inducida en la 3-esfera.

Para dar un atlas usamos las llamadas proyecciones estereográficas:

$$\phi_1 : S^3 \setminus \{(-1, 0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow \frac{1}{1+x^0}(x^1, x^2, x^3), \quad (1.20)$$

$$\phi_2 : S^3 \setminus \{(1, 0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow \frac{1}{1-x^0}(x^1, x^2, x^3). \quad (1.21)$$

Es relativamente fácil ver que, como hemos quitado el único punto en el que el denominador se anula y solo estamos multiplicando las otras tres variables por un número, ϕ_1 y ϕ_2 son cartas de S^3 .

Utilizando la definición de la esfera podemos obtener una inversa de ϕ_2 : partiendo de que las tres últimas componentes han de tener la forma $(1 - y^0)x^i$, con y^0 la primera componente de ϕ_2^{-1} obtenemos:

$$(y^0)^2 + (1 - y^0)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^3 (x^i)^2}_{r^2} = 1 \Leftrightarrow y^0 = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} < 1 \quad (1.22)$$

De forma que la inversa es

$$\begin{aligned}\phi_2^{-1} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow S^3 \setminus \{1, 0, 0, 0\} \\ (x^1, x^2, x^3) &\rightarrow (y^0, (1 - y^0)x^1, (1 - y^0)x^2, (1 - y^0)x^3)\end{aligned}\tag{1.23}$$

Ahora tenemos $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(x^1, x^2, x^3) = (\frac{1-y^0}{1+y^0}x^1, \frac{1-y^0}{1+y^0}x^2, \frac{1-y^0}{1+y^0}x^3)$, que es una función de clase C^∞ , por lo que tenemos la estructura de variedad de dimensión 3. Utilizando un homeomorfismo entre S^3 y $SU(2)$ obtenemos también que $SU(2)$ es una variedad de dimensión 3.

1.3. Variedades con frontera

Si recordamos los principales resultados del cálculo vectorial en \mathbb{R}^n como el teorema de Stokes o el teorema de la divergencia, a la hora de integrar muchas veces es útil llevar el problema a la frontera del dominio de integración para simplificar los cálculos.

Si queremos intentar generalizar estos resultados a cualquier variedad, necesitamos introducir una noción de frontera en una variedad que no sea \mathbb{R}^n [1]. Consideremos el semiespacio superior de \mathbb{R}^n , al cual llamaremos \mathbb{H}^n , con la topología inducida por la topología usual de \mathbb{R}^n . El interior y la frontera de este conjunto son bien conocidos:

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}\tag{1.24}$$

$$\text{Int}(\mathbb{H}^n) = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}\tag{1.25}$$

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}\tag{1.26}$$

Definición 1.9 [4] *Un espacio topológico (M, τ) se llama **variedad topológica de dimensión n con frontera** si es Hausdorff, segundo numerable y para cada punto $p \in M$ existe V abierto de M que contiene a p , W abierto de \mathbb{H}^n y un homeomorfismo $\phi : V \rightarrow W$.*

Definición 1.10 [4] *Sea (M, τ) una variedad topológica con frontera, $U \in \tau$ y W un abierto de \mathbb{H}^n . Una aplicación $\phi : U \subset M \rightarrow W \subset \mathbb{H}^n$ se dirá **carta sobre M** si es un homeomorfismo. Si W es tal que $W \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$ se dice que ϕ es una **carta interior**. Si $W \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$, se dirá que ϕ es una **carta de frontera**.*

Esta definición de carta es algo más general que la que dimos para las variedades sin frontera: como $\text{Int}(\mathbb{H}^n)$ es homeomorfo a todo \mathbb{R}^n (podemos considerar $f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-1}, \ln(x^n))$),

por ejemplo) con una simple composición podemos considerar las cartas interiores como aplicaciones que toman valores en todo \mathbb{R}^n .

Definición 1.11 Sea (M, τ) un espacio topológico. Al conjunto M junto con un atlas A de clase C^∞ formado por cartas según la definición 1.10 se le llama **variedad diferenciable de dimensión n con frontera**. A un punto $p \in M$ contenido en el dominio de cualquier carta interior lo llamaremos **punto interior** de M . A un punto q tal que exista una carta de frontera (V, ψ) con $\psi(q) \in \partial\mathbb{H}^n$ lo llamaremos **punto frontera** de M .

Definición 1.12 Llamaremos **interior** de M (denotado $\text{Int}(M)$) al conjunto de todos los puntos interiores de M y **frontera** de M (denotada ∂M) al conjunto de los puntos frontera de M .

Como pasaba en el caso de las variedades sin frontera, podemos definir una estructura diferenciable cuya existencia está también asegurada por la proposición 1.1. De nuevo, nos referiremos a las variedades con frontera diferenciables y suaves como variedades con frontera a secas.

Es importante no confundir las definiciones de frontera e interior con las que se definen para espacios topológicos en general. En el contexto de variedades, a no ser que se especifique lo contrario, siempre se habla del interior y la frontera que acabamos de definir.

Respecto a la misma carta, un mismo punto no puede ser punto interior y punto frontera a la vez: si $p \in M$ no es un punto frontera, entonces o bien está en el dominio de una carta interior o bien una carta frontera (U, ϕ) lo envía a un punto que no está en $\partial\mathbb{H}^n$. En este último caso, podemos considerar la restricción de la carta a $U \cap \phi^{-1}(\text{Int}(\mathbb{H}^n))$, que es una carta interior y p está en su dominio. En todo caso tenemos que p es un punto interior.

Lo que no es claro con las definiciones es si un punto puede ser, por ejemplo, punto frontera según una carta pero a su vez ser punto interior según otra carta. En el siguiente resultado vemos que esto no es así.

Proposición 1.3 [1] Sea M una variedad con frontera y $p \in M$. Si existe una carta (U, ϕ) con

1. $\phi(U) \subset \mathbb{H}^n$

2. $\phi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ (p es un punto frontera),

entonces las condiciones 1 y 2 se cumplen para cualquier otra carta con p en su dominio.

Demostración:

Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que p está tanto en el dominio de una carta interior (V, ψ) como en el de la carta (U, ϕ) del enunciado. Al ser ambas cartas del mismo atlas, sabemos que tanto $\alpha = \phi \circ \psi^{-1}$ como $\alpha^{-1} = \psi \circ \phi^{-1}$ son funciones de clase C^∞ . En particular, α define un homeomorfismo entre $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ y $\phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$.

Definamos $x_0 = \psi(p)$, $y_0 = \phi(p) = \alpha(x_0)$. Como $y_0 \in \mathbb{R}^n$ podemos encontrar un entorno W de y_0 y una función $\eta : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ que coincida con α^{-1} en $W \cap \phi(U \cap V)$.

Por otro lado, estamos suponiendo que (V, ψ) es una carta interior, de forma que $\psi(V)$ es un abierto de \mathbb{R}^n . Como $x_0 \in \psi(V)$ existe una bola B centrada en x_0 tal que $x_0 \in B \subseteq \psi(U \cap V)$. Reduciendo el radio de la bola B podemos considerar que $B \subseteq \alpha^{-1}(W)$. $\alpha^{-1}(W)$ es a su vez el dominio de η , de forma que dentro de B , $\eta \circ \alpha|_B = \alpha^{-1} \circ \alpha|_B = Id_B$. Además como estamos trabajando con funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , la diferencial está bien definida.

Aplicando la regla de la cadena a la última igualdad tenemos que $D\eta(\alpha(x)) \circ D\alpha(x) = Id$ si x es un elemento de B , lo que implica que la jacobiana de $\alpha(x)$ no puede ser singular. Por el teorema de la aplicación abierta, α es abierta, por lo que $\alpha(B)$ es un abierto de \mathbb{R}^n que contiene a $y_0 = \alpha(x_0) = \phi(p) \in \phi(U)$. Además $\alpha(B) \subseteq \psi(V)$ y como (V, ψ) es una carta interior $\alpha(B) \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$.

Esto contradice la hipótesis de que $y_0 = \phi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. ■

En general, para cualquier variedad se puede probar que la frontera y el interior son disjuntos (ver [1] 1.37), pero la demostración requiere resultados fuera del alcance de este trabajo.

En topología general, el interior de un conjunto es abierto y la frontera es cerrada. Veamos que esto es consistente con las definiciones que acabamos de dar en variedades.

Proposición 1.4 [1] Sea M una variedad de dimensión n con frontera. Entonces ∂M es cerrado en M y una variedad de dimensión $n-1$, mientras que $\text{Int}(M)$ es un abierto de M y una variedad sin frontera de dimensión n .

Demostración:

Con lo visto hasta ahora tenemos que $M = \text{Int}(M) \cup \partial M$. Además, $\text{Int}(M) \cap \partial M = \emptyset$, por lo que si demostramos que el interior es abierto en M , su complementario (la frontera) será automáticamente cerrado en M .

Sea $x \in \text{Int}(M)$. Entonces por definición de punto interior existe un abierto U de M homeomorfo a un abierto $W \subseteq \mathbb{H}^n$ tal que $W \cap \partial\mathbb{H}^n = \emptyset$. Esto quiere decir que todo punto de U también es un punto interior, por lo que $U \subseteq \text{Int}(M)$. Entonces hemos probado que para todo $x \in \text{Int}(M)$ existe un abierto U de M tal que $x \in U \subseteq \text{Int}(M)$, lo que implica que $\text{Int}(M)$ es un abierto de M y por tanto ∂M es un cerrado en M .

Veamos ahora que ambas son variedades con la topología inducida o de subespacio. En esta topología las propiedades de ser Hausdorff y segundo numerable se heredan, por lo que solo tenemos que encontrar homeomorfismos con \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^{n-1} .

Sea p un punto frontera de M . Por definición existe una carta de frontera (U, ϕ) tal que $\phi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ y por tanto $\phi(p) \in \phi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$. Esto nos dice que la n -ésima componente de $\phi(p)$ es cero. Por tanto podemos restringir el homeomorfismo ϕ a un homeomorfismo de $\phi^{-1}(U \cap \partial\mathbb{H}^n)$ en $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ eliminando la última componente. $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ es un abierto con la topología inducida de $\partial\mathbb{H}^n$ y por tanto homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^{n-1} . Concluimos que para cada punto p tenemos un homeomorfismo con \mathbb{R}^{n-1} .

El caso del interior es bastante más directo, ya que dado $q \in \text{Int}(M)$ tenemos que existe una carta (V, ψ) con ψ homeomorfismo entre V y $\psi(V) \subseteq \text{Int}(\mathbb{H}^n) \subset \mathbb{R}^n$, pero podemos pasar a un homeomorfismo con \mathbb{R}^n haciendo la inclusión $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y restringiendo la imagen. ■

Esto que acabamos de demostrar son dos ejemplos de subconjuntos de una variedad que también tienen estructura de variedad. Veremos la definición formal de una subvariedad en la siguiente sección.

Antes, vamos a dar algunos ejemplos para dejar clara la diferencia entre las variedades con y sin frontera, así como la diferencia entre las definiciones de frontera e interior de topología y la definición 1.11.

Para ello, no nos vamos a complicar demasiado y vamos a considerar la bola (abierta) unidad en el plano

$$B = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}. \quad (1.27)$$

La frontera topológica de B es la circunferencia unidad

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad (1.28)$$

pero como B es un abierto de \mathbb{R}^2 podemos darle estructura de variedad con frontera con una única carta de la siguiente manera: consideramos la identidad de \mathbb{R}^2 restringiendo el dominio y la imagen a B y la componemos con una traslación dos unidades hacia arriba. [4]

Esto nos da un homeomorfismo entre B y la bola de centro $(0, 2)$ y de radio 1. Es fácil ver que esta bola es un abierto de \mathbb{H}^2 que no interseca a $\partial\mathbb{H}^2$, que es el eje horizontal, y por tanto es una carta interior. Entonces, por definición, la frontera de B en el contexto de las variedades es vacía porque todo punto de B está contenido en el dominio de una carta interior.

Ahora bien, si en lugar de la bola abierta tomamos la bola cerrada

$$D = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (1.29)$$

la situación cambia, porque D no es un abierto de \mathbb{R}^2 . B lo podemos cubrir con una sola carta interior como antes, pero para ver que los puntos de la circunferencia S^1 son puntos de frontera necesitamos un poco más de trabajo. [1] Consideremos la proyección estereográfica

$$\begin{aligned} \sigma : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow \frac{1}{1+z}(x, y) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Definimos

$$U_i^{+n} = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^i > 0\} \quad U_i^{-n} = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^i < 0\}. \quad (1.31)$$

Por la definición de σ tenemos que $\sigma^{-1}(U_i^{\pm 2}) = S^2 \cap U_i^{\pm 3}$ de forma que σ^{-1} lleva los $U_i^{\pm 2}$ a un hemisferio de S^2 . Además σ es la identidad en S^1 si la vemos como el ecuador de S^2 con $z = 0$. Usando que, al igual que en el caso de 4 dimensiones, la proyección estereográfica σ es un homeomorfismo y que las proyecciones $\pi_i(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^n)$ (donde $\widehat{x^i}$ indica que hemos omitido la componente x^i) nos dan otro homeomorfismo entre los hemisferios de la esfera y S^1 obtenemos el siguiente homeomorfismo:

$$\varphi_i = \pi_i \circ (\sigma^{-1})|_{U_i^{\pm 2} \cap D} : U_i^{\pm 2} \cap D \rightarrow \mathbb{H}^2. \quad (1.32)$$

Por construcción, la imagen de φ_i es una semicircunferencia de \mathbb{R}^2 . Si ahora tomamos un punto $p \in S^1 \cap U_2^{+2} \subset D$, por ejemplo $p = (0, 1)$, entonces $\sigma^{-1}(p) = (0, 1, 0)$, y haciendo la proyección π_2 tenemos $\phi(p) = (0, 0) \in \partial\mathbb{H}^2$, por lo que p es un punto frontera.

Concluimos que en este caso tanto la frontera topológica como la frontera de variedad del disco unidad D son la circunferencia S^1 .

1.4. Subvariedades

Como es costumbre en todas las estructuras matemáticas, una subvariedad va a ser un subconjunto de una variedad que también tiene estructura de variedad. Este concepto nos interesa principalmente porque si queremos demostrar el teorema de Stokes, más nos vale que la frontera de una variedad sea también una variedad donde podamos integrar.

Para que todo funcione bien vamos a pedir que los subconjuntos $S \subseteq M$ tengan la topología inducida o de subespacio. Si τ_M es la topología de la variedad M , se define la topología inducida en S como

$$\tau_{M|S} = \{U \cap S \mid U \in \tau_M\}. \quad (1.33)$$

Definición 1.13 [4] *Sea M una variedad de dimensión n y $S \subseteq M$. Se dice que S es una **subvariedad** de dimensión k si para cada $p \in S$ hay una carta $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ tal que $\phi = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ en $U \cap S$.*

*En estas condiciones la carta $(x^1, \dots, x^k) = \phi_S : U \cap S \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una carta de S con la topología inducida. Al número $n-k$ se le suele llamar **codimensión** de S .*

Las coordenadas que se hacen cero no tienen por qué estar en orden, pero con simplemente reorganizarlas obtenemos una carta equivalente y de la forma de la definición.

Notemos también que es completamente posible que la dimensión de la subvariedad también sea n : por ejemplo, en la carta (U, ϕ) de la definición podemos tomar $S = U$ de forma que ninguna de las coordenadas de ϕ se haga cero y tenemos que cualquier abierto U de M es una subvariedad de la misma dimensión que M . De hecho, el recíproco también se cumple [1], lo que nos permite concluir que las únicas subvariedades de dimensión n son los abiertos de M .

Vamos a acabar el capítulo probando que una subvariedad es una variedad y dando algunos ejemplos.

Proposición 1.5 [4] *Sea S una subvariedad de dimensión k de una variedad M y $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ una colección de cartas de M tal que $S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces $A = \{(U_i \cap S, \phi_{iS})\}_{i \in I}$ es un atlas para S , de forma que S es una variedad de dimensión k .*

Demostración:

Ya tenemos que los abiertos de A recubren S . Veamos que todas las cartas son compatibles. Sean $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ y $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ dos cartas de M con $U \cap V \neq \emptyset$. Por definición de subvariedad, en $U \cap V \cap S$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi &= (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) & \psi &= (y^1, \dots, y^k, 0, \dots, 0), \\ \phi_S &= (x^1, \dots, x^k) & \psi_S &= (y^1, \dots, y^k). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Por tanto $\phi_S \circ \psi_S^{-1}(x^1, \dots, x^k) = (y^1, \dots, y^k)$. Por definición de atlas de M , $\phi \circ \psi^{-1}$ es C^∞ así que todas sus componentes son C^∞ , en particular las k primeras. Por tanto $\phi_S \circ \psi_S^{-1}$ es C^∞ y queda probado que A es un atlas. En particular, S es una variedad porque un subespacio de un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable también tiene ambas propiedades. Como las restricciones de un homeomorfismo son homeomorfismos cambiando la imagen adecuadamente, las cartas ϕ_S son homeomorfismos de un abierto de S a un abierto de \mathbb{R}^k . ■

Ya vimos ejemplos de subvariedades en la proposición 1.4. Vamos a ver un ejemplo de un subconjunto de una variedad que no puede ser una variedad. [4]

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(1/x)\} \quad B = \{0\} \times (-1, 1) \tag{1.35}$$

A partir de esto definimos $S = A \cup B$. La clausura de este conjunto se conoce como *seno del topólogo* y es el contraejemplo más común de un conjunto conexo pero no localmente conexo.

Para verlo tomamos un punto $(0, y) \in B$. Cualquier bola que cojamos centrada en dicho punto (después de intersecarla con S) va a contener infinitos "trozos" de la curva A que no se podrán conectar mediante ningún camino contenido íntegramente en S . Por tanto estos puntos no tienen entornos conexos y S no es localmente conexo.

Esto podemos verlo como que no puede existir un homeomorfismo entre una bola de S centrada en $(0, y)$ y un abierto de \mathbb{R}^n , pues en \mathbb{R}^n siempre existe una bola conexa (por caminos) contenida en el abierto pero en S no puede ser conexa.

El contrarrecíproco de la proposición 1.2 también nos lleva a la misma conclusión: si S no es localmente conexa, no es una variedad.

Capítulo 2

El espacio tangente

Ahora introduciremos el concepto de curva en una variedad, motivados por la forma en la que se suele introducir el plano tangente a una superficie. En las superficies de \mathbb{R}^3 , dado un punto p y un vector tangente \vec{v} a dicho punto se puede asociar una curva en la superficie que pase por p y tenga \vec{v} como vector tangente.

Definición 2.1 Sea M una variedad de dimensión n , $p \in M$ y (U, ϕ) una carta sobre M . Una **parametrización de una curva** en M que pasa por p es una aplicación $\sigma : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ para algún $\delta > 0$ tal que $\sigma(0) = p$ y $\phi \circ \sigma$ es una función de clase C^∞ .

Al igual que con las superficies, la parametrización σ define un operador que actúa sobre las funciones diferenciables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en un entorno del punto p

$$\dot{\sigma}(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \sigma)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.1)$$

Esta composición se puede ver también de la siguiente manera: si ϕ es una carta sobre M y $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$,

$$\left. \frac{d(f \circ \sigma)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (2.2)$$

Dada una variedad M y un punto $p \in M$ podemos considerar el conjunto de todas las curvas en M que pasan por p . En este conjunto podemos definir la siguiente relación de equivalencia[7]: dos curvas σ_1 y σ_2 están relacionadas si y solo si $\dot{\sigma}_1(0) = \dot{\sigma}_2(0)$. La demostración de que esto es una relación de equivalencia es trivial dado que la igualdad es una relación de equivalencia.

Definición 2.2 Sea M una variedad y sean σ_1 y σ_2 dos curvas en M . El conjunto de las clases de equivalencia de la relación

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \Leftrightarrow \dot{\sigma}_1(0) = \dot{\sigma}_2(0) \quad (2.3)$$

forma un espacio vectorial llamado **espacio tangente de M en p** y que denotaremos T_pM .

La estructura de espacio vectorial de T_pM se puede ver a partir de la linealidad de la derivada: si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y σ_1, σ_2 son dos parametrizaciones de curvas

$$[\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2] = \lambda_1[\sigma_1] + \lambda_2[\sigma_2] \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\lambda_1\sigma_1(t) + \lambda_2\sigma_2(t))|_{t=0} = \lambda_1\dot{\sigma}_1(0) + \lambda_2\dot{\sigma}_2(0), \quad (2.4)$$

que siempre es cierto. Otra definición equivalente la podemos dar a partir de la ecuación (2.2), ya que si $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ podemos escribir

$$\frac{d\sigma}{dt}|_{t=0} = \dot{\sigma}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.5)$$

que podemos ver como una combinación lineal del conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1, \dots, n}$. El espacio vectorial generado por estos operadores también es el espacio tangente, ya que dada cualquier combinación lineal de las derivadas parciales podemos construir una curva $x(t)$ a partir de las coordenadas del vector tangente tales que la derivada en $t = 0$, $\dot{x}(0)$, sean esas mismas coordenadas [3].

Proposición 2.1 Sea M una variedad de dimensión n , (U, ϕ) y (V, ψ) dos cartas de M diferentes y $p \in U \cap V$. Entonces el espacio tangente a p dado por ambas cartas es el mismo.

Demostración:

Denotemos $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ y $\psi(p) = (y^1(p), \dots, y^n(p))$ a las coordenadas de cada una de las cartas. Utilizando la definición de la derivada parcial de una función en M ,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \quad \frac{\partial f}{\partial y^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y^i}(\psi(p)). \quad (2.6)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\psi \circ \phi^{-1}$ nos da las coordenadas y^i en función de las x^i ,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)). \quad (2.7)$$

Aplicando la regla de la cadena a la primera composición, que son funciones de las coordenadas y^i , y usando que $\psi \circ \phi^{-1}(\phi(p))$ nos da las coordenadas $y^i(p)$ tenemos

$$\frac{\partial(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(p) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}. \quad (2.8)$$

Como los $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ son números, esto es una combinación lineal de los operadores $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}$ actuando sobre f , que es una función arbitraria. Por tanto, los operadores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ que generan el espacio tangente según la carta ϕ se pueden poner como combinaciones lineales de los operadores que generan el espacio tangente según ψ . Concluimos que ambos espacios son iguales. ■

Vamos a poner un ejemplo de espacio tangente para ilustrar algo mejor el concepto. Ya que tenemos el ejemplo de $SU(2)$ como grupo de Lie, calculemos el espacio tangente en su elemento neutro del grupo $SU(n)$, que denotaremos $\mathfrak{su}(n)$ y se suele llamar su álgebra de Lie [8].

Las álgebras de Lie, al igual que los grupos de Lie, son muy importantes en Física: por ejemplo, toda la teoría del espín de las partículas en mecánica cuántica se puede explicar usando representaciones de $\mathfrak{su}(2)$, que son acciones del álgebra de Lie sobre espacios vectoriales.

En el grupo $SU(n)$ el elemento neutro es la identidad. Recordemos que este grupo está formado por las matrices complejas $n \times n$ que satisfacen $A^\dagger A = Id$ y $\det A = 1$.

Tomemos una curva en $SU(n)$, $\sigma(t) = A(t)$ con $A(t) \in SU(n)$ para todo t tal que $\sigma(0) = Id$. Entonces, derivando en $t = 0$

$$\dot{\sigma}(0) = 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(Id) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A^\dagger(t)A(t)) = A'(0)^\dagger A(0) + A^\dagger A'(0) = A'(0) + A'(0)^\dagger. \quad (2.9)$$

Como la derivada $A'(0)$ es un vector tangente, tenemos que todos los elementos $B \in \mathfrak{su}(n)$ deben cumplir $B + B^\dagger = 0$. Veamos si estos son todos. Considerando la exponencial (de matrices) de una matriz de este tipo,

$$\exp(B)(\exp(B))^\dagger = \exp(B)(\exp(B^\dagger)) = \exp(B + B^\dagger) = \exp(0_{n \times n}) = Id. \quad (2.10)$$

Por tanto $\exp(B) \in U(n)$, por lo que podemos tomar la curva $\exp(tB)$ y derivarla en $t = 0$ para obtener $B = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tB) \in \mathfrak{u}(n)$. Este cálculo, de hecho, es un resultado general para cualquier grupo de Lie de matrices; si una matriz está en el álgebra de Lie, su exponencial debe estar en su grupo correspondiente.

Hasta ahora solo hemos usado la condición de $AA^\dagger = Id$. Usemos ahora que el determinante debe ser siempre 1. Teniendo en cuenta que si $B \in \mathfrak{su}(n)$ entonces $\exp(B) \in SU(n)$ y la fórmula $\det(\exp(B)) = e^{tr(B)}$ [8], tenemos

$$1 = \det(\exp(B)) = e^{tr(B)} = e^0 \Rightarrow tr(B) = 0. \quad (2.11)$$

Por tanto, $\mathfrak{su}(n) = \{B \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) | B + B^\dagger = 0, tr(B) = 0\}$ es el conjunto de matrices antihermíticas y con traza 0.

2.1. Campos vectoriales

Ahora vamos a generalizar el concepto de campo vectorial a variedades. Normalmente un campo vectorial es una función que a cada punto de \mathbb{R}^n le asigna un vector también de \mathbb{R}^n . Como en variedades la estructura de espacio vectorial la tenemos en el espacio tangente, usaremos los vectores tangentes para definir los campos vectoriales.

Definición 2.3 Sea M una variedad de dimensión n . Llamamos **fibrado tangente de M** (denotado TM) a la unión disjunta de todos los espacios tangentes de M :

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{(p, x) \mid x \in T_p M\} \quad (2.12)$$

El fibrado tangente (y en general, la teoría de fibrados) es una parte muy interesante del estudio de las variedades y tiene numerosas aplicaciones, pero están fuera del alcance de este trabajo. Por ejemplo, las llamadas teorías gauge en Física utilizan unas aplicaciones llamadas conexiones o derivadas covariantes que se definen usando fibrados y sirven para construir un lagrangiano, que es la parte central de la teoría. [3]

El concepto de fibrado tangente lo usaremos para definir los campos vectoriales:

Definición 2.4 [1] Sea M una variedad de dimensión n . Fijada una carta (U, ϕ) , un **campo vectorial** sobre $A \subseteq M$ es una aplicación $X : A \subset M \rightarrow TM$ que a cada punto p de A le asigna un vector tangente $X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M$. Se impone que las componentes de X_p , $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$, sean funciones C^∞ en $U \cap A$.

Los campos vectoriales tienen una relación muy estrecha con las curvas en las variedades.

Definición 2.5 Sea M una variedad, X un campo vectorial definido sobre un abierto $U \subseteq M$. Una **curva integral** de X es una curva $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\frac{d\sigma(t)}{dt} = X(\sigma(t))$ para todo $t \in I$.

Como $\sigma(t) \in M$, el campo vectorial evaluado en este punto es

$$X(\sigma(t)) = X^i(\sigma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.13)$$

Entonces si $\frac{d\sigma}{dt} = X(\sigma(t))$, obtenemos la condición $\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1(t), \dots, x^n(t))$. Esto, fijado un punto inicial de la curva, nos da un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Como las componentes X^i son C^∞ , el teorema de Picard para ecuaciones diferenciales nos garantiza la existencia

y unicidad de una solución. Por tanto, cada campo vectorial tiene asociada una única curva integral que pasa por ese punto y su vector tangente lo da el campo vectorial.

Por último vamos a definir unos campos vectoriales especiales que aparecen en la frontera de una variedad. Estos campos nos van a servir para definir orientaciones de la frontera en la sección 4.2.

Definición 2.6 [4] *Sea M una variedad con frontera y $p \in \partial M$. Un vector tangente $X_p \in T_p M$ apunta hacia dentro si $X_p \notin T_p(\partial M)$ y existe una curva $\sigma : [0, \epsilon] \rightarrow M$ que cumpla*

1. $\sigma(0) = p$
2. $\sigma((0, \epsilon]) \subseteq \text{Int}(M)$
3. $\dot{\sigma}(0) = X_p$.

Un vector tangente se dice que apunta hacia fuera si $-X_p$ apunta hacia dentro.

Proposición 2.2 [1] *Sea M una variedad con frontera de dimensión n y $p \in M$. Un vector $v \in T_p M$ apunta hacia dentro si y solo si su n -ésima componente es estrictamente positiva.*

Demostración:

\implies | Sea $v \in T_p M$ con $p \in \partial M$ un vector tangente que apunta hacia dentro. Por definición existe una curva σ tal que $\sigma(0) = p$ y $\dot{\sigma}(0) = v$. Si ahora consideramos una carta de frontera (U, ϕ) con $p \in U$ tenemos que $\phi(p) = \phi(\sigma(0)) \in \partial \mathbb{H}^n$. Por tanto por definición de $\partial \mathbb{H}^n$, $x^n(p) = 0$. Usando que σ es continua y derivando según (2.2),

$$v^n = \frac{d}{dt}(x^n(\sigma(t)))\Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{dx^n(\sigma(t))}{t} \geq 0. \quad (2.14)$$

Si $v^n = 0$ tendríamos que $v \in T_p(\partial M)$, que no puede ser por definición, así que $v^n > 0$.

\impliedby | Supongamos que $v^n > 0$. Podemos definir la parametrización de una curva $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ como $\sigma(t) = \phi^{-1}(v^1 t, \dots, v^n t)$, con ϕ la misma carta de la otra implicación. Claramente $\dot{\sigma}(0) = v$ y por construcción para cada $0 < t < \epsilon$, $\sigma(t) \in U$. Aplicando ϕ tenemos que

$$\phi \circ \sigma(t) = (v^1 t, \dots, v^n t) \in \phi(U). \quad (2.15)$$

Como $v^n t > 0$ tenemos que $(v^1 t, \dots, v^n t) \notin \partial \mathbb{H}^n$ y por tanto $\sigma((0, \epsilon]) \subseteq \text{Int}(M)$.

Finalmente, como $\sigma(0)$ será un punto de U , si cambiamos el dominio de σ a $[0, \epsilon]$ tenemos que v cumple las tres condiciones para ser un vector que apunta hacia dentro. ■

De este resultado podemos ver que para cada carta (U, ϕ) con coordenadas (x^1, \dots, x^n) el campo vectorial $V(p) = \frac{-\partial}{\partial x^n}$ apunta hacia fuera para todo punto donde las coordenadas x^i estén definidas. Este campo en particular será relevante en la relación entre una variedad y su frontera.

Para ver la dependencia explícita de las coordenadas que se usan para definir el espacio tangente, vamos a considerar el campo vectorial $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$ definido sobre \mathbb{R}^2 con las coordenadas polares como carta. Esto es, si x e y son las coordenadas dadas por la identidad,

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta. \quad (2.16)$$

Gráficamente, en las coordenadas (r, θ) , el campo vectorial X asignará a cada punto un vector vertical de módulo 1 (no es más que una traslación del vector $(0, 1)$). Sin embargo, en las coordenadas (x, y) esto no tiene por qué ser así. Para calcular su expresión usamos la ecuación (2.8):

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (2.17)$$

Por tanto, en las coordenadas (x, y) tenemos que $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Gráficamente, esto nos va a dar vectores tangentes a la circunferencia centrada en el origen que pasa por cada punto. Vemos que, dependiendo de la carta utilizada, el campo vectorial es muy diferente, así que hay que tener cuidado con las coordenadas que se utilizan.

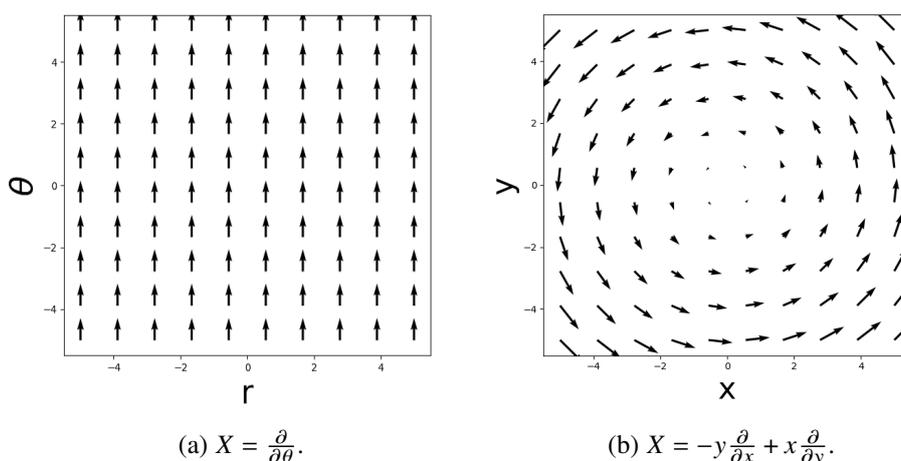


Figura 2.1: Representación gráfica del campo vectorial X en coordenadas polares (izquierda) y cartesianas (derecha).

Capítulo 3

Formas diferenciales

Vistos los conceptos básicos de las variedades, estamos en condiciones de empezar a desarrollar un cálculo en variedades. En este capítulo introducimos los objetos que vamos a integrar y derivar, las formas diferenciales, y daremos sus propiedades más importantes.

3.1. Tensores

Definición 3.1 Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una función $T : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **multilineal** si para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene:

$$T(v_1, \dots, v_i + w_i, \dots, v_n) = T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + T(v_1, \dots, w_i, \dots, v_n) \quad (3.1)$$

$$T(v_1, \dots, av_i, \dots, v_n) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \quad (3.2)$$

Definición 3.2 Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial. Al espacio de todas las aplicaciones lineales $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ se le llama **espacio dual** de V y se denota V^* .

Proposición 3.1 Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita. Entonces V y V^* tienen la misma dimensión.

Demostración:

Sea $n = \dim V$. Entonces podemos considerar una base $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$. Asociada a esta base definimos la **base dual** de V^* como sigue:

$$\begin{aligned} e^k &: E \mapsto \mathbb{R} \\ e_i &\mapsto \delta_i^k \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donde δ_i^k es la delta de Kronecker. Veamos que $\{e^1, \dots, e^n\}$ es base:

- Sistema libre: sea $(\lambda_i)_{i=1}^n$ elementos de \mathbb{R} tales que $\sum_i \lambda_i e^i = 0$. Entonces

$$\lambda_j = \sum_i \lambda_i \delta_i^j = \sum_i \lambda_i e^i(e_j) = 0(e_j) = 0 \text{ para todo } j \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ para todo } j. \tag{3.4}$$

- Sistema generador: sea $T \in E^*$, si $T(e_i) = c_i \in \mathbb{R}$ entonces tenemos que $T = \sum_i c_i e^i$.

Como la base dual tiene n elementos, concluimos que la dimensión es la misma. ■

Definición 3.3 [6] Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial. Un **tensor (k, l)** o tensor k veces contravariante y l veces covariante es una aplicación de la forma

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.5}$$

tal que T es multilineal.

Definición 3.4 Sea T un tensor (k, l) sobre un espacio vectorial V de base $\{e_i\}_{i=1}^n$. Llamaremos **componentes de T** a los siguientes números reales:

$$T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_l}) \tag{3.6}$$

Definición 3.5 Sea S un tensor (k, l) y T un tensor (p, q) . Se define el **producto tensorial** de S y T , $S \otimes T$ como

$$\begin{aligned} S \otimes T &: \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k+p \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l+q \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R} \\ S \otimes T(v^1, \dots, v^{k+p}, v_1, \dots, v_{l+q}) &= S(v^1, \dots, v^k, v_1, \dots, v_l) T(v^{k+1}, \dots, v^{k+p}, v_{l+1}, \dots, v_{l+q}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se puede ver a partir de la definición que el producto tensorial de S y T es un tensor $(k + p, l + q)$. Observemos que, en general, $S \otimes T$ no tiene que ver con $T \otimes S$ por la forma en que está definido el producto tensorial.

El producto tensorial es lineal en ambos argumentos y asociativo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (aX + bY) \otimes T(v_1, \dots, v_{k+p}, v^1, \dots, v^{l+q}) &= (aX + bY)(v_1, \dots, v_k, v^1, \dots, v^l)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+p}, v^{l+1}, \dots, v^{l+q}) = \\ &= aX(v_1, \dots, v^l)T(v_{k+1}, \dots, v^{l+q}) + bY(v_1, \dots, v^l)T(v_{k+1}, \dots, v^{l+q}) = aX \otimes T + bY \otimes T. \end{aligned} \quad (3.8)$$

El otro caso es completamente análogo. La asociatividad se tiene por la asociatividad de los números reales.

Teorema 3.1 [7] *Sea V un espacio vectorial de dimensión n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\{e^1, \dots, e^n\}$ su base dual asociada. Entonces el conjunto de todos los productos tensoriales de la forma*

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \quad (3.9)$$

es una base del espacio vectorial que forman todos los tensores $(0, k)$. Por tanto, este espacio tiene dimensión n^k .

Demostración:

- Sistema generador: Tomemos una colección de k vectores $w_i = a_i^j e_j$ con $1 \leq i \leq k$ y T un tensor $(0, k)$ cualquiera.

En primer lugar, observemos que por la definición de producto tensorial y de base dual

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k}. \quad (3.10)$$

Ahora vemos cuál es la acción de la candidata a base sobre los vectores w_i . Recordemos que esto son tensores y por tanto lineales en todos sus argumentos, de forma que las constantes salen todas multiplicando:

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(w_1, \dots, w_k) = e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(a_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, a_k^{j_k} e_{j_k}) = \quad (3.11)$$

$$a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} = a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}. \quad (3.12)$$

Por último calculamos la acción de T usando lo anterior.

$$\begin{aligned} T(w_1, \dots, w_k) &= T(a_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, a_k^{j_k} e_{j_k}) = a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k} T(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \\ &= T(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}(w_1, \dots, w_k) = \\ &= T_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}(w_1, \dots, w_k). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por tanto vemos que el tensor T es una combinación lineal de los productos tensoriales de la base. Como aplicación,

$$T = T_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k}. \quad (3.14)$$

- Sistema libre: supongamos que existen n^k escalares $a_{i_1 \dots i_k}$ tales que $a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = 0$. Entonces para cualquier $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$ se debe tener

$$a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0 \Rightarrow \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow a_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} = a_{j_1 \dots j_k} = 0 \quad \forall 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n, \quad (3.16)$$

de forma que los $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$ son linealmente independientes y por tanto una base. ■

De forma totalmente análoga se puede obtener una versión de este resultado para tensores $(l, 0)$ y, juntando ambos, para tensores (k, l) en general.

Definición 3.6 [6] Sea T un tensor $(0, l)$.

- T se dice **simétrico** en los índices a y b si

$$T(v_1, \dots, v_a, \dots, v_b, \dots, v_l) = T(v_1, \dots, v_b, \dots, v_a, \dots, v_l) \quad \forall v_1, \dots, v_l \in V \quad (3.17)$$

- T se dice **antisimétrico** en los índices a y b si

$$T(v_1, \dots, v_a, \dots, v_b, \dots, v_l) = -T(v_1, \dots, v_b, \dots, v_a, \dots, v_l) \quad \forall v_1, \dots, v_l \in V \quad (3.18)$$

Estas propiedades de simetría se definen de forma análoga para tensores $(k, 0)$ y (k, l) . En este último caso los índices covariantes y contravariantes van por separado, es decir, no se pueden permutar índices de arriba con índices de abajo.

En general, se dice que T es totalmente simétrico si $P(T) = T(v_{P(1)}, \dots, v_{P(k)}) = T$ para toda permutación $P \in S_k$ y totalmente antisimétrico si $P(T) = \text{signo}(P)T$. El signo de P se define como $+1$ si P es par y -1 si P es impar.

3.2. Formas

Definición 3.7 Sea M una variedad de dimensión n y $p \in M$. Llamaremos **espacio cotangente** a M en p al espacio dual de $T_p M$. Lo denotaremos $T_p^* M$. Dada una base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ de $T_p M$ denotaremos a su base dual como $\{dx^1, \dots, dx^n\}$.

Definición 3.8 Sea M una variedad de dimensión n y $p \in M$. Una **r -forma** o **r -forma diferencial** ($r \geq 1$) es un tensor r veces covariante y totalmente antisimétrico que actúa sobre r copias del espacio tangente a M en p y cuyas componentes sean de clase C^∞ . Se define también una **0-forma** como una función C^∞ definida sobre M .

El concepto de forma no es nuevo para alguien que haya visto algo de análisis real. Si miramos a la definición, una r -forma toma r vectores y devuelve un número real. Una 0-forma actuaría sobre 0 copias del espacio tangente, así que podemos pensar que actúa directamente sobre M .

Las 1-formas son funciones del espacio tangente en \mathbb{R} , es decir, los elementos del espacio cotangente $T_p^* M$. En términos de análisis, toman combinaciones lineales de derivadas parciales y dan un número.

Una 2-forma sería una aplicación $\alpha : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal, que toma dos vectores tangentes y devuelve un número real $\alpha(v_1, v_2)$. Esto es lo que se introduce en álgebra lineal como una forma bilineal (en este caso antisimétrica) sobre el espacio tangente.

Definición 3.9 Sea α una r -forma y β una s -forma. Se define el **producto exterior** de α y β , denotado $\alpha \wedge \beta$, como

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \frac{1}{r!s!} \sum_{P \in S_{r+s}} \text{signo}(P) \alpha(v_{P(1)}, \dots, v_{P(r)}) \beta(v_{P(r+1)}, \dots, v_{P(r+s)}) = \\ &= \frac{1}{r!s!} \sum_{P \in S_{r+s}} \text{signo}(P) P(\alpha \otimes \beta). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por la definición del producto tensorial, $\alpha \wedge \beta$ es un tensor $(r + s, 0)$. Veamos que es antisimétrica haciendo actuar una permutación cualquiera P_0 :

$$\begin{aligned}
P_0(\alpha \wedge \beta) &= \frac{1}{r!s!} \sum_{P \in S_{r+s}} \text{signo}(P) P_0(P(\alpha \otimes \beta)) = \\
&= \sum_{P \in S_{r+s}} \text{signo}(P) \text{signo}(P_0) \text{signo}(P_0) P_0(P(\alpha \otimes \beta)) = \\
&= \frac{1}{r!s!} \text{signo}(P_0) \sum_{P \in S_{r+s}} \text{signo}(P) \text{signo}(P_0) P_0(P(\alpha \otimes \beta)) = \text{signo}(P_0) \alpha \wedge \beta, \quad (3.20)
\end{aligned}$$

donde al final hemos usado que para todo grupo G y $g \in G$, $gG = G$, de forma que a la hora de considerar las permutaciones tenemos las mismas multiplicando por P_0 que sin multiplicar por P_0 . Por tanto el producto exterior de dos formas es una forma.

Notemos que si $\alpha = f(x^1, \dots, x^n)$ es una 0-forma, entonces el producto exterior de $\alpha \wedge \beta$ es una forma cuyas componentes son el producto de f por las componentes de β .

Claramente, no todos los tensores son formas, por lo que ahora vamos a dar un resultado parecido al teorema 3.1 para ver la dimensión de los espacios de las formas.

Teorema 3.2 [7] *El espacio de las r -formas $\Lambda_p^r(M)$ en una variedad M de dimensión n tiene una base formada por*

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \quad (3.21)$$

Por tanto, $\dim \Lambda_p^r(M) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$.

Demostración:

En primer lugar, notamos que $\Lambda_p^r(M)$ es un subespacio del espacio vectorial de todos los tensores $(0, r)$ porque la suma de tensores antisimétricos es antisimétrica y un tensor antisimétrico multiplicado por un número real también es antisimétrico.

- Sistema generador: como las r -formas son tensores, sabemos que podemos expresar cualquier r -forma ω usando la base del espacio cotangente así:

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \quad (3.22)$$

Ahora bien, sabemos que esta forma es totalmente antisimétrica, por lo que

$$\frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \text{signo}(P) P(\omega) = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \underbrace{\text{signo}(P) \text{signo}(P)}_1 \omega = \omega. \quad (3.23)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \text{signo}(P) P(\omega) = \omega_{i_1 \dots i_r} \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \text{signo}(P) P(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r}) = \\ &= \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Entonces cualquier forma ω es combinación lineal de los $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$.

- Sistema libre: supongamos que existen constantes $a_{i_1 \dots i_r}$ tales que

$a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0$. Entonces para cualquier $1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n$,

$$a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = a_{i_1 \dots i_r} \sum_{P \in S_r} \text{signo}(P) P(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r})(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 0.\quad (3.25)$$

Como ya probamos que los productos tensoriales son linealmente independientes en el teorema 3.1, todos los sumandos deben ser 0 por separado. En particular, el correspondiente a la permutación identidad debe ser 0. Por tanto,

$$\begin{aligned}a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{i_1 \dots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k} &= a_{j_1 \dots j_k} = 0 \quad \forall 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n,\end{aligned}\quad (3.26)$$

y tenemos la independencia lineal de los productos exteriores.

- Dimensión: un poquito más adelante demostraremos que si existen dos índices $i_j = i_k$ iguales en la forma $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, entonces dicha forma es 0. Esto nos dice que de los n índices, tenemos que escoger r de ellos sin repetición. Por tanto, el número de posibilidades no nulas para los i_1, \dots, i_r son $\binom{n}{r}$. ■

Veamos ahora unas cuantas propiedades del producto exterior.

Proposición 3.2 [1] Sean $\alpha, \beta, \eta, \omega, \xi$ formas diferenciales sobre la misma variedad M con α una r -forma y β una l -forma. Entonces:

1. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \eta = a(\alpha \wedge \eta) + b(\beta \wedge \eta) \quad (3.27)$$

$$\eta \wedge (a\alpha + b\beta) = a(\eta \wedge \alpha) + b(\eta \wedge \beta) \quad (3.28)$$

$$2. \alpha \wedge \beta = (-1)^{r_l} \beta \wedge \alpha$$

3. Para todo conjunto de 1-formas $\omega^1, \dots, \omega^r$ y vectores tangentes v_1, \dots, v_r ($1 \leq r \leq n$) se cumple

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r(v_1, \dots, v_r) = \det(\omega^j(v_i)), \quad (3.29)$$

donde $(\omega^j(v_i))$ es una matriz $r \times r$.

Demostración:

1. Esta es inmediata por la linealidad del producto tensorial.

2. La forma general de α y β es

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad \beta = \beta_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}. \quad (3.30)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \alpha_{i_1 \dots i_r} \beta_{j_1 \dots j_l} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ \beta \wedge \alpha &= \alpha_{i_1 \dots i_r} \beta_{j_1 \dots j_l} (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como el producto exterior es asociativo, al serlo el producto tensorial, la diferencia entre ambas expresiones de (3.31) son kl transposiciones que reordenan los dx^i y los dx^j , y por la antisimetría de las formas sale un factor $(-1)^{kl}$.

3. Procedamos por inducción. Para el producto de dos 1-formas tenemos que, por definición,

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1) = \det \begin{pmatrix} \alpha(v_1) & \alpha(v_2) \\ \beta(v_1) & \beta(v_2) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Para el caso general, suponemos que el resultado se cumple para las 1-formas w_2, \dots, w_r . Entonces aplicando la definición de producto exterior a w_1 y al resto por separado

$$\begin{aligned} w^1 \wedge \dots \wedge w^r(v_1, \dots, v_r) &= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{P \in S_r} \text{signo}(P) w^1(v_{P(1)}) (w^2 \wedge \dots \wedge w^r(v_{P(2)}, \dots, v_{P(r)})) = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{P \in S_r} \text{signo}(P) w^1(v_{P(1)}) \det(w^i(v_{P(j)})), \quad i, j = 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Esto no es más que desarrollar el determinante de $(w^i(v_j))$ por la fila de w^1 , ya que las permutaciones las podemos separar con la transposición $(v_{P(1)} v_{P(k)})$ para todos los valores de k y tendremos, para cada uno de los r valores de $v_{P(1)}$ posibles, $(r-1)!$ veces un determinante

de los menores de la matriz rxr . Estos determinantes, como al final estamos permutando filas o columnas, serán todos el mismo excepto por el signo de la permutación, que se cancela con el $signo(P)$ del sumatorio. Por tanto, tenemos el resultado. ■

Como consecuencia del teorema 3.2 y de la antisimetría de las formas, podemos hacer varias observaciones [1]:

1. Si dos índices cualesquiera se repiten, $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0$. En efecto, permutando los índices repetidos con una trasposición (que es impar) sale que la forma coincide con su opuesto, de manera que es 0.
2. Recíprocamente a lo anterior, la condición de "dos índices se repiten implica cero" implica antisimetría. Supongamos que para una r -forma $\alpha(v_1, \dots, a, \dots, a, \dots, v_r) = 0$ para todo $a \in T_p M$. Entonces, en particular se cumple para las sumas:

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha(v_1, \dots, a + b, \dots, a + b, \dots, v_r) = \\
 &= \underbrace{\alpha(v_1, \dots, a, \dots, a, \dots, v_r)}_0 + \alpha(v_1, \dots, a, \dots, b, \dots, v_r) + \\
 &+ \alpha(v_1, \dots, b, \dots, a, \dots, v_r) + \underbrace{\alpha(v_1, \dots, b, \dots, b, \dots, v_r)}_0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \alpha(v_1, \dots, a, \dots, b, \dots, v_r) &= -\alpha(v_1, \dots, b, \dots, a, \dots, v_r) \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

3. $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0$ si algún conjunto de los r índices es linealmente dependiente.

Supongamos sin pérdida de generalidad que el último índice es el linealmente dependiente, es decir, $i_r = a^j i_j$ ($j = 1, \dots, r - 1$). Entonces, por la multilinealidad de las formas:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}} \wedge dx^{i_r} = a^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}} \wedge dx^{i_j}. \quad (3.35)$$

Como estamos sumando j desde 1 hasta $r - 1$, siempre va a haber un índice repetido en todos los sumandos y por tanto la forma es 0.

Esto nos dice que para todo $r > n$, con n la dimensión de la variedad, no existen formas diferenciales no nulas, pues uno de los vectores sobre los que actúe la forma siempre va a ser combinación lineal de n de ellos.

La proposición 3.2 y el teorema 3.2 nos dan toda la información necesaria para calcular productos exteriores sin pasar por el producto tensorial. Como ejemplo, podemos hacer el producto exterior de las siguientes formas en una variedad cualquiera de dimensión 5:

$$\alpha = x^1 \cos(x^2) dx^1 \wedge dx^4 + x^2 dx^2 \wedge dx^3 \quad \beta = \sin(x^1) dx^2 \wedge dx^5 + x^1 dx^1 \wedge dx^5. \quad (3.36)$$

Implícitamente estamos fijando una carta con coordenadas (x^1, \dots, x^5) y un espacio tangente sobre el que definir las formas. El producto exterior es

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (x^1 \cos(x^2) dx^1 \wedge dx^4 + x^2 dx^2 \wedge dx^3) \wedge (\sin(x^1) dx^2 \wedge dx^5 + x^1 dx^1 \wedge dx^5) = \\ &= x^1 \cos(x^2) dx^1 \wedge dx^4 \wedge \sin(x^1) dx^2 \wedge dx^5 + x^1 \cos(x^2) dx^1 \wedge dx^4 \wedge \sin(x^1) dx^2 \wedge dx^4 + \\ &\quad + x^2 dx^2 \wedge dx^3 \wedge \sin(x^1) dx^2 \wedge dx^4 + x^2 dx^2 \wedge dx^3 \wedge x^1 dx^1 \wedge dx^5. \end{aligned} \quad (3.37)$$

En primer lugar notamos que el segundo y tercer sumandos son ambos cero porque aparecen diferenciales repetidos: en el segundo tenemos $dx^4 \wedge dx^4$ y en el tercero, $dx^3 \wedge dx^3$. El resto del cálculo no es más que multiplicar las funciones y encadenar los símbolos \wedge . Al final nos queda

$$\alpha \wedge \beta = x^1 \sin(x^1) \cos(x^2) dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^5 + x^2 x^1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^5. \quad (3.38)$$

Si queremos, podemos poner los dx^i en orden teniendo cuidado con los signos que puedan aparecer al permutar los índices.

3.3. Aplicaciones inducidas

En análisis funcional o en álgebra lineal se ve que una función entre espacios vectoriales $f : X \rightarrow Y$ define de manera más o menos natural otra función en los duales $f^* : Y^* \rightarrow X^*$.

En variedades pasa algo parecido: como siempre, al intentar encontrar un análogo de lo que pasa entre espacios vectoriales vamos a tener que introducir los espacios tangentes en algún lado.

Definición 3.10 [1] Sean M y N dos variedades no necesariamente de la misma dimensión y

$F : M \rightarrow N$ una función C^∞ . Fijado un punto $p \in M$, se llama **diferencial** de F a la aplicación siguiente:

$$\begin{aligned} F_* : T_p M &\rightarrow T_{F(p)} N \\ X_p &\rightarrow X_p(g \circ F), \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde g es una función C^∞ sobre N . A F_* también se le denota dF_p o $F_{*,p}$ en la bibliografía.

En términos de curvas, F_* lleva el vector tangente en p de una curva σ al vector tangente en $F(p)$ de la curva $F(\sigma)$.

Es bastante fácil ver que

$$F_*(X_p + Y_p)(g) = (X_p + Y_p)(g \circ F) = X_p(g \circ F) + Y_p(g \circ F) = F_*(X_p) + F_*(Y_p), \quad (3.40)$$

y que, si $a \in \mathbb{R}$, $F_*(aX_p) = aF_*(X_p)$.

Como F_* es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, podemos representarla por una matriz. Consideremos bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ de $T_p M$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^r} \right\}$ de $T_{F(p)} N$ (recordemos que M y N no tienen por qué ser de la misma dimensión). Bajo estas condiciones F va a dar un vector de la forma $(F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^r(x^1, \dots, x^n)) \in T_{F(p)} N$. Entonces, usando la regla de la cadena,

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (g) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (g \circ F) \right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^j}. \quad (3.41)$$

Si queremos ver esto para cualquier función no tenemos más que quitar la g , de forma que las coordenadas de F_* en la base de $T_{F(p)} N$ son las parciales $\frac{\partial F^j}{\partial x^i}$. Así que la matriz coordenada de F_* es la matriz jacobiana de F en el punto p .

Ahora podemos considerar la aplicación adjunta de F_* , que denotaremos $F^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ y se define como $(F^* \alpha)(v) = \alpha(F_* v)$ con $\alpha \in T_{F(p)}^* N$. En términos sencillos, F^* transforma una 1-forma de N en una 1-forma de M . La matriz coordenada de F^* es la traspuesta de la de F_* ,

$$F^*(dy^j) = dx^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}. \quad (3.42)$$

En la bibliografía, a F^* se le suele llamar el *pullback* o **aplicación regrediente** de F . Usando la estructura de espacio vectorial de las formas vemos que F^* es lineal:

$$F^*(a\alpha + b\beta)(v) = (a\alpha + b\beta)(F_* v) = a\alpha(F_* v) + b\beta(F_* v) = (aF^* \alpha + bF^* \beta)(v). \quad (3.43)$$

Esta aplicación se puede extender de 1-formas a k -formas y se suele denotar de la misma manera.

Definición 3.11 Sea β una k -forma ($k \geq 1$) sobre una variedad N y X_1, \dots, X_k campos vectoriales sobre otra variedad M . Dada una aplicación $F : M \rightarrow N$ se define la **aplicación regrediente** o *pullback* de F para k -formas como

$$\begin{aligned} F^* : \Lambda_{F(p)}^k(N) &\rightarrow \Lambda_p^k(M) \\ (F^* \beta)_p(X_1, \dots, X_k) &= \beta(F_*(X_{1p}), \dots, F_*(X_{kp})). \end{aligned} \quad (3.44)$$

En caso de que α sea una 0-forma sobre N (es decir, una función C^∞), se define $F^* \alpha = \alpha \circ F : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Las aplicaciones regredientes tienen algunas propiedades que nos van a interesar.

Sean S, T dos funciones entre variedades, β una k -forma y γ una l -forma.

- De la definición de F_* vemos que

$$(ST)_*(X_p(g)) = X_p(g \circ S \circ T) = X_p((g \circ S) \circ T) = T_*(X_p(g \circ S)) = T_*S_*(X_p). \quad (3.45)$$

Usando este resultado,

$$((ST)^*\beta)(v_1, \dots, v_k) = \beta((ST)_*v_1, \dots, (ST)_*v_k) = \beta(T_*S_*v_1, \dots, T_*S_*v_k) = T^*S^*\beta(v_1, \dots, v_k), \quad (3.46)$$

por lo que concluimos que

$$(ST)_* = T_*S_*, \quad (ST)^* = T^*S^*. \quad (3.47)$$

- Calculamos ahora el *pullback* de un producto exterior.

$$F^*(\beta \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) = (\beta \wedge \gamma)(F_*v_1, \dots, F_*v_k, F_*w_1, \dots, F_*w_l). \quad (3.48)$$

Mirando a la definición de producto exterior tenemos que

$$(\beta \wedge \gamma)(F_*v_1, \dots, F_*v_k, F_*w_1, \dots, F_*w_l) = (\beta(F_*v_1, \dots, F_*v_k) \wedge \gamma(F_*w_1, \dots, F_*w_l)) = F^*(\beta) \wedge F^*(\gamma). \quad (3.49)$$

Por último, damos una propiedad de las n -formas que nos va a ser útil más adelante.

Proposición 3.3 [7] Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^∞ y $\alpha = h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ una n -forma. Entonces:

$$f^*(h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f) \det(Jf) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3.50)$$

Demostración:

Implícitamente estamos fijando un punto p en una variedad y trabajando con el espacio tangente a p . Por (3.49), como α es el producto exterior de la 0-forma h con una n -forma, podemos calcular f^*h y $f^*dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ por separado. En primer lugar,

$$f^*h(x) = h(f_*(x)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x). \quad (3.51)$$

Solo nos falta probar la parte del determinante. Llamemos A a la matriz jacobiana de f en el punto p y a_j^i a sus entradas por simplicidad y para hacer la notación más parecida a la de un cambio de base. Usando la multilinealidad de las formas

$$\begin{aligned} f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(e_1, \dots, e_n) &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(f_*e_1, \dots, f_*e_n) = \\ &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(a_1^{i_1}e_{i_1}, \dots, a_n^{i_n}e_{i_n}) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ahora bien, los sumandos de los n sumatorios que tenemos serán no nulos cuando todos los índices sean distintos, en cuyo caso tendremos en la n -forma una permutación de los números $(1, 2, \dots, n)$. Por tanto, el sumatorio realmente lo estamos tomando sobre las permutaciones de S_n . Entonces, usando la antisimetría de las formas y la fórmula de Leibniz para el determinante,

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) &= \underbrace{\sigma_{i_1 \dots i_n}}_{\in S_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{signo}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \det(A) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_1, \dots, e_n). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Juntando esto con (3.51) tenemos el resultado. ■

3.4. Derivada exterior

El producto exterior es solo una de las herramientas que hay para construir formas. En análisis real es muy familiar el concepto de diferencial de una función usando sus derivadas parciales. En cierto modo, podemos ver la diferencial de una función de n variables como un operador que toma las derivadas parciales de la función de partida y nos devuelve un número real al evaluarlo en un punto.

Esto es exactamente lo que definimos como una 1-forma, y vimos también que las funciones reales son por definición 0-formas, de manera que tomando la diferencial hemos pasado de una 0-forma a una 1-forma.

Veamos ahora cómo se generaliza esta idea de la diferencial a una r -forma cualquiera en variedades.

Definición 3.12 Sea M una variedad de dimensión n , $T_p M$ un espacio tangente cualquiera de M , $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Lambda_p^r(M)$. La **derivada exterior** se define como la aplicación $d : \Lambda_p^r(M) \rightarrow \Lambda_p^{r+1}(M)$ dada por

$$d\alpha = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (3.54)$$

Claramente la derivada exterior de una r -forma es una $(r+1)$ -forma, ya que tenemos un producto exterior de $r+1$ 1-formas. Para una 0-forma arbitraria $f(x_1, \dots, x_n)$

$$df = \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n, \quad (3.55)$$

y vemos que la derivada exterior coincide con la diferencial ordinaria. De hecho, si comparamos con la definición de la derivada exterior podemos usar esto para dar una expresión alternativa de la derivada exterior:

$$d\alpha = d(\alpha_{i_1 \dots i_r}) \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \quad (3.56)$$

Como generalización de la diferencial, este operador va a ser bastante relevante a la hora de hacer cálculos, así que no está de más conocer algunas propiedades.

Proposición 3.4 [7],[5] Sean α y β dos formas diferenciales sobre una variedad M , α una r -forma.

1. $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$ si $\beta \in \Lambda_p^r(M)$
2. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$ si $\beta \in \Lambda_p^s(M)$
3. $d(d(\alpha)) = d^2\alpha = 0$
4. Si $f : M \rightarrow N$ es C^∞ , con N una variedad, entonces $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$

Demostración:

1. Aplicando la definición

$$d(\alpha + \beta) = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial (\alpha + \beta)_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (3.57)$$

Ahora bien, usando la linealidad de los tensores,

$$(\alpha + \beta)_{i_1 \dots i_r} = (\alpha + \beta)(e_1, \dots, e_r) = \alpha(e_1, \dots, e_r) + \beta(e_1, \dots, e_r) = \alpha_{i_1 \dots i_r} + \beta_{i_1 \dots i_r}. \quad (3.58)$$

Por tanto

$$d(\alpha + \beta) = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} + \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial \beta_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = d\alpha + d\beta. \quad (3.59)$$

2. Como tenemos ya la linealidad probada, podemos considerar formas del tipo

$$\alpha = u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad \beta = v dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}, \quad (3.60)$$

con $u(x_1, \dots, x_n), v(x_1, \dots, x_n)$ dos funciones C^∞ (es decir, 0-formas). Podemos calcular muy fácilmente la derivada exterior de este tipo de formas:

$$d\alpha = \frac{\partial u}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (3.61)$$

Entonces, usando la regla del producto con u y v ,

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d((u \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (v dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s})) = \\ &= d((uv \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s})) = \\ &= (v du + u dv) \wedge ((dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s})) = \\ &= (du \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (v dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) + (-1)^r (u dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dv \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) = \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde el factor $(-1)^r$ lo introducimos al permutar el dv con los dx^{i_k} por la antisimetría de las formas.

3. En esta propiedad estamos utilizando que las componentes de α son funciones de clase C^∞ .

$$d^2\alpha = d\left(\frac{1}{r!} \left(\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}\right) = \frac{1}{r!(r+1)!} \left(\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j \partial x^k}\right) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (3.63)$$

Esto es cero directamente, ya que, por la simetría de las derivadas segundas,

$$\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j = -\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j \partial x^k} dx^j \wedge dx^k = -\frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k \partial x^j} dx^j \wedge dx^k. \quad (3.64)$$

Como las variables j y k son ambas mudas (estamos sumando sobre ellas) el último término es exactamente el mismo que el primero y por tanto $d^2\alpha = 0$.

4. El resultado se cumple trivialmente si α es una 0-forma. Procedamos, entonces, por inducción.

Supongamos cierto el resultado para una k -forma ω y tomemos una $(k+1)$ -forma $\alpha = \omega \wedge dx^j$.

Por tanto, usando la propiedad 2 y la ecuación (3.49),

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx^j)) &= f^*(d\omega \wedge dx^j + (-1)^k \omega \wedge d(dx^j)) = \\ &= \underbrace{f^*(d\omega \wedge dx^j)}_{d^2(x^j)=0} + f^*(\omega \wedge d(dx^j)) = \\ &= f^*(d\omega \wedge dx^j) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^j) = d(f^*\omega \wedge f^*(dx^j)) = d(f^*(\omega \wedge dx^j)) = d(f^*\alpha). \blacksquare \end{aligned} \quad (3.65)$$

Vamos a comprobar que la derivada exterior está bien definida, ya que su definición podría depender, en principio, de las coordenadas que hayamos introducido en el espacio tangente a través de una carta.

Teorema 3.3 [1],[4] *La derivada exterior $d : \Lambda_p^k(M) \rightarrow \Lambda_p^{k+1}(M)$ es independiente de la carta utilizada y es la única aplicación que cumple las propiedades de la proposición 3.4.*

Demostración:

Sea $p \in M$ y tomemos dos cartas (U, ϕ) y (V, ψ) tales que $p \in U \cap V$. Sea ω una forma cualquiera de M . Por la propiedad 4 de la proposición 3.4, podemos introducir la identidad como $\phi^*(\phi^{-1})^*$ en $d\omega$, donde recordemos que como ϕ va de M a \mathbb{R}^n , ϕ^* va de las k -formas de \mathbb{R}^n a las k -formas de M . Entonces,

$$d\omega = d(\phi^*((\phi^{-1})^*\omega)) = \phi^*d((\phi^{-1})^*\omega). \quad (3.66)$$

Ahora, como $\phi \circ \psi^{-1}$ es C^∞ ,

$$(\phi \circ \psi^{-1})^*d((\phi^{-1})^*\omega) = d((\phi \circ \psi^{-1})^*(\phi^{-1})^*\omega) = d((\psi^{-1})^*\omega). \quad (3.67)$$

En la última igualdad usamos la ecuación (3.47). Por otra parte, componiendo con ψ^* ,

$$\psi^*(\phi \circ \psi^{-1})^*d((\phi^{-1})^*\omega) = \psi^* \circ (\phi^{-1})^* \circ \phi^*d((\phi^{-1})^*\omega) = \phi^*d((\phi^{-1})^*\omega) = \psi^*((\psi^{-1})^*\omega), \quad (3.68)$$

por lo que concluimos que $d\omega$ es independiente de la carta.

Demostramos ahora la unicidad. Sea $D : \Lambda_p^k(M) \rightarrow \Lambda_p^{k+1}(M)$ otra aplicación que cumple las propiedades de la proposición 3.4. Como para una función C^∞ se tiene que cumplir que Df es una 1-forma, podemos concluir que al evaluar en un vector tangente,

$$Df(v) = vf = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = df(v). \quad (3.69)$$

Para una k -forma arbitraria, primero notamos que si dos formas ω_1 y ω_2 coinciden en cierto entorno V de p , entonces $D\omega_1 = D\omega_2$ en V . Esto se puede ver tomando $\eta = \omega_1 - \omega_2$ y multiplicando por una función C^∞ que sea idénticamente 1 en V (en la sección 4.1 veremos que en efecto se pueden construir funciones C^∞ de este tipo), llamémosla ψ . Como ω_1 y ω_2 coinciden en V ,

$$\psi\eta = 0 \Rightarrow D(\psi\eta) = D\psi \wedge \eta + \psi \wedge D\eta = 0. \quad (3.70)$$

Como ψ es la constante 1, $D(\psi) = 0$ en V , por lo que concluimos por linealidad que $D\eta = D\omega_1 - D\omega_2 = 0$ en todo V .

Ahora tomamos una k -forma $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ arbitraria. Como las componentes de ω son C^∞ y con la ayuda de funciones C^∞ del mismo tipo que ψ , podemos definir una forma $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_k}$ que coincida con ω en cierto entorno V de p y que tanto sus componentes como las coordenadas \tilde{x}^i sean funciones C^∞ . [1]

Entonces, podemos aplicar el argumento de antes y decir que $D\omega = D\tilde{\omega}$ en V . Por tanto, en todo V se cumple

$$D\omega = D\tilde{\omega} = D(\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_k}). \quad (3.71)$$

Al desarrollar la D del producto solo contribuye la parte de $D\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k}$ porque ya probamos que para una función $Df = df$. Por tanto, $D(df) = D^2f = 0$ en las \tilde{x}^i . Entonces, volviendo a usar esto junto con que ω y $\tilde{\omega}$ coinciden en V ,

$$\begin{aligned} D\omega &= (D\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k}) \wedge d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_k} = (d\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k}) \wedge d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_k} = \\ &= (d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = d\omega. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Concluimos que la derivada exterior es única ■.

El apartado 3 de la proposición 3.4 nos abre una cuestión bastante interesante: si una forma α se puede escribir como $\alpha = d\omega$, entonces $d\alpha = 0 = d^2\omega$. ¿Son todas las formas tales que su derivada exterior es 0 de este tipo?

Definición 3.13 Una forma diferencial α se dice **cerrada** si $d\alpha = 0$.

Definición 3.14 Una r -forma diferencial α se dice **exacta** si existe una $(r-1)$ -forma β tal que $\alpha = d\beta$.

Es claro que, según estas definiciones, toda forma exacta es cerrada porque $d\alpha = d^2\beta = 0$. El recíproco no es cierto. [6] Como contraejemplo consideraremos la siguiente 1-forma sobre la variedad $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \alpha_1(x, y)dx + \alpha_2(x, y)dy. \quad (3.73)$$

Calculemos la derivada exterior de α :

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} dy \wedge dy = \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (y^2 - x^2) \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (y^2 - x^2) dx \wedge dy = 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Si α fuera exacta existiría una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (3.75)$$

Esto tiene como única solución $f(x, y) = \arctan(y/x) + C$, que no es una función continua en M , pues tiene discontinuidades en toda la recta $x = 0$.

Si denotamos $d_k : \Lambda_p^k(M) \rightarrow \Lambda_p^{k+1}(M)$ a la derivada exterior de k -formas, esto es un homomorfismo entre espacios vectoriales. Por tanto podemos considerar, a partir de la propiedad $d_k^2 = 0$, el cociente $H^k(M) \equiv \text{Ker}(d_k)/\text{Im}(d_{k-1})$, que lo podemos ver como las clases de formas cerradas pero no exactas. Resulta que $H^k(M)$ es un grupo [1] y se le llama k -ésimo grupo de cohomología de De Rham. Estos grupos son unos invariantes topológicos que tienen interés en temas más avanzados de la teoría de variedades. Por ejemplo, usando la invariancia de estos grupos se puede demostrar la invariancia de otras características como la dimensión de la variedad.

Por último y para cerrar con un ejemplo relevante, vamos a calcular las derivadas exteriores de las formas en \mathbb{R}^3 . [6] Tomemos en primer lugar una forma $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$. Su derivada exterior es

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) dx \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) dz \wedge dy + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) dy \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Vemos que si tomamos la función vectorial $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $d\omega$ nos da el rotacional de $\vec{\omega}$. De la misma forma, podemos ver que la derivada exterior de una 0-forma nos da el gradiente en la base (dx, dy, dz) y que la derivada exterior de una 2-forma es la divergencia.

Sea $\omega = \omega_3 dx \wedge dy + \omega_2 dy \wedge dz + \omega_1 dz \wedge dx$. Entonces

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (3.77)$$

Capítulo 4

Integración en variedades

4.1. Particiones de la unidad

En esta sección definiremos las particiones de la unidad, una herramienta muy útil para separar los conjuntos sobre los que integraremos. En \mathbb{R}^n es muy habitual dividir el dominio donde se integra (por ejemplo si integramos funciones pares en un intervalo simétrico o con funciones a trozos). En las variedades cuyo atlas tiene más de una carta nos encontraremos con una situación en la que tenemos que separar las integrales en cada abierto que forma el atlas. Como una variedad puede tener hasta infinitas cartas, las particiones de la unidad nos van a asegurar que al integrar en toda la variedad no nos encontremos "infinitos no deseados".

Definición 4.1 [4] Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección arbitraria de subconjuntos de un espacio topológico (X, τ) . $\{A_i\}_{i \in I}$ se dice **localmente finita** si todo punto de X tiene un entorno U tal que $U \cap A_i = \emptyset$ excepto para un número finito de índices.

Definición 4.2 Sea (X, τ) un espacio topológico y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación cualquiera. Se define el **soporte de f** (denotado $\text{sop}(f)$) como la clausura del conjunto

$$P = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \tag{4.1}$$

Definición 4.3 Sea M una variedad de dimensión n . Una **partición de la unidad** (C^∞) es una colección de aplicaciones (C^∞) $\{f_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. $f_i(p) \geq 0$ para todo $p \in M$.
2. La familia de los soportes $\{sop(f_i)\}_{i \in I}$ es localmente finita.
3. $\sum_{i \in I} f_i = 1$.

Dado un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de M , diremos que una partición de la unidad está **subordinada** al recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ si $sop(f_i) \subseteq U_i$ para todo $i \in I$.

La propiedad 2 nos dice que en cada punto de M todas las f_i son cero excepto un número finito de ellas, por lo que la suma de la propiedad 3 va a ser siempre finita.

En la demostración del teorema 3.3 la función ψ que definimos es una función que pertenece a una partición de la unidad. El otro uso que le vamos a dar a las particiones de la unidad es a la hora de integrar en una variedad cuyo atlas tenga varias cartas. [1] Escogiendo una partición de la unidad C^∞ subordinada a los abiertos del atlas, podemos separar la integral en toda la variedad de forma que solo trabajemos con unas coordenadas (una carta) a la vez.

Que exista siempre una partición de la unidad tan conveniente no es para nada trivial, así que probaremos su existencia. Antes de nada vamos a dar un ejemplo de cómo podrían ser las funciones de una partición de la unidad C^∞ .

Consideremos la función real $f(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$ y $f(t) = 0$ en otro caso. Se puede ver que f es C^∞ ([1] 2.20) y, como $f(t) > 0$ para todo $t > 0$, si definimos

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}, \quad (4.2)$$

por la definición de f el denominador nunca es 0 y g es una función C^∞ . Además g cumple que $g(t) = 0$ si $t \leq 0$ y $g(t) = 1$ si $t \geq 1$. Para darle más versatilidad a estas funciones, hacemos un cambio de variable para que la parte no constante esté definida en el intervalo $[a, b]$ con $a < b$ y multiplicamos la x al cuadrado para que sea simétrica:

$$x \rightarrow \frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow \rho(x) = 1 - g\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right). \quad (4.3)$$

Como todo lo que hemos hecho es componer con funciones C^∞ , ρ es C^∞ también. El gráfico de esta función es como un bache que vale 1 en el intervalo $[-a, a]$ (ver la figura 5.1) y su soporte es el compacto $[-b, b]$. A este tipo de funciones se les suele llamar *bump functions* o funciones test.

La versión que nos interesa es la generalización a \mathbb{R}^n :

$$\rho(x) = 1 - g\left(\frac{\|x\|^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right), \quad (4.4)$$

donde estamos tomando la norma euclídea de x . A partir de esto, componiendo con una carta (U, ϕ) podemos construir funciones C^∞ de este tipo definidas en un entorno de cualquier punto de la variedad.

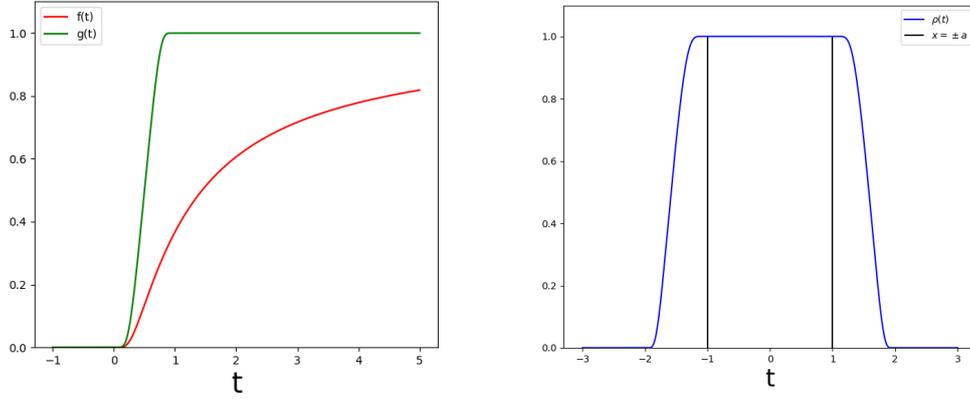


Figura 4.1: A la izquierda, gráficas de $f(t)$ y $g(t)$ según la ecuación (4.2). A la derecha, gráfica de $\rho(t)$ según la ecuación (4.4) para $a = 1, b = 2$.

Lema 4.1 [4] Sea M una variedad y $f_1, \dots, f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($k \geq 1$) funciones reales. Entonces

$$\text{sop}\left(\sum_i f_i\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{sop}(f_i) \quad (4.5)$$

Demostración:

Si $\sum_i f_i \neq 0$, entonces al menos una de las f_i es distinta de 0. Por tanto,

$$\left\{x \in M \mid \sum_i f_i \neq 0\right\} \subset \bigcup_{i=1}^k \{x \in M \mid f_i \neq 0\}. \quad (4.6)$$

Como al tomar la clausura se respetan los contenidos, tenemos el resultado. ■

Proposición 4.1 [4] Sea M una variedad compacta de dimensión n y $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de M . Entonces existe una partición C^∞ de la unidad $\{f_i\}_{i \in I}$ subordinada a dicho recubrimiento.

Demostración:

Como tenemos un recubrimiento abierto, para cada punto $q \in M$ existe un abierto U_{i_q} , una carta (V_q, ϕ_q) y una función $\psi_q = \rho_q \circ \phi_q$ de clase C^∞ con ρ_q de la forma (4.4). El soporte de ψ_q lo podemos escoger contenido en el abierto U_{i_q} : como ρ_q tiene soporte compacto podemos, sin pérdida de generalidad, tomar $\text{sop}(\rho_q) \subseteq \phi_q(U_{i_q})$. Como ϕ es un homeomorfismo, $\phi^{-1}(\text{sop}(\rho_q))$ es compacto

(en particular cerrado) en M . Entonces,

$$\text{sop}(\psi_q) = \overline{(\rho_q \circ \phi_q)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subseteq \overline{\phi_q^{-1}(\text{sop}(\rho_q))} = \phi_q^{-1}(\text{sop}(\rho_q)) \subseteq \phi_q^{-1}(\phi_q(U_{i_q})) = U_{i_q}. \quad (4.7)$$

Como $\psi_q(q) > 0$ por construcción y ψ_q es una función C^∞ existirá un entorno abierto $W_q \subseteq U_{i_q}$ de q tal que ψ_q sea estrictamente positiva en W_q .

La familia $\{W_q\}_{q \in M}$ forma entonces un recubrimiento abierto de M . Por compacidad, existirá un subrecubrimiento finito $\{W_{q_1}, \dots, W_{q_m}\}$ que tendrá asociadas sus funciones ψ_{q_j} correspondientes.

Podemos construir las siguientes funciones:

$$\psi = \sum_{j=1}^m \psi_{q_j} \quad \varphi_j = \frac{\psi_{q_j}}{\psi} \quad (4.8)$$

Es fácil ver que $\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1$ y que todas son funciones C^∞ con soporte compacto (por tanto localmente finito) al ser reescalados de las ψ_{q_j} , por lo que las φ_j forman una partición de la unidad. Además, $\text{sop}(\varphi_j) \subseteq \text{sop}(\psi_j) \subseteq U_{i_q}$.

Lo único que nos falta para ver que la partición de la unidad $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ está subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$ es que el conjunto de índices del recubrimiento original sea el mismo que el de las funciones.

Para cada $j = 1, \dots, m$ escogemos un índice $\tau(j) \in I$ tal que $\text{sop}(\varphi_j) \subset U_{\tau(j)}$. Puede ser que esta condición se cumpla para varios índices entre 1 y m , por lo que definimos, para cada $\mu \in I$,

$$h_\mu = \sum_{\tau(j)=\mu} \varphi_j. \quad (4.9)$$

En caso de que no haya ningún j para el que $\tau(j) = \mu$, definiremos $h_\mu = 0$. Entonces, tenemos una colección de funciones $\{h_i\}_{i \in I}$ tales que

$$\sum_{i \in I} h_i = \sum_{i \in I} \sum_{\tau(j)=i} \varphi_j = \sum_{j=1}^m \varphi_j = 1. \quad (4.10)$$

Por el lema 4.1,

$$\text{sop}(h_i) \subseteq \text{sop}\left(\sum_{\tau(j)=i} \varphi_j\right) \subseteq \cup_{\tau(j)=i} \text{sop}(\varphi_j) \subseteq U_i. \quad (4.11)$$

Por tanto, las $\{h_i\}_{i \in I}$ son una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$. ■

Este resultado se puede generalizar a variedades no compactas pero requiere del concepto de paracompacidad y unos cuantos lemas previos y no lo vamos a usar a la hora de definir las integrales. La demostración se puede encontrar en [1], teorema 2.23.

4.2. Orientaciones

Antes de poder definir la integración en una variedad, debemos tomar una precaución para asegurarnos de que podamos generalizar todos los resultados del cálculo en \mathbb{R}^n : nuestras variedades han de tener una "orientación" definida. De no tener una orientación, por ejemplo en \mathbb{R} , decir que la integral desde a hasta b es menos la integral de b hasta a no tendría sentido.

En un espacio vectorial cualquiera, se dice que dos bases (con sus elementos en un orden determinado) definen la misma orientación si su matriz de cambio de base tiene determinante positivo.

Esta condición define una relación de equivalencia y a cada clase de equivalencia se le llama orientación del espacio vectorial. En dimensión finita, los espacios vectoriales solo tienen dos orientaciones [4], que se suelen denotar μ y $-\mu$.

En variedades, los espacios vectoriales que tenemos son los espacios tangentes en cada punto. Entonces, si queremos orientar la variedad inspirándonos en esto, habrá que buscar una forma de orientar todos los espacios tangentes con continuidad de forma que no haya cambios "bruscos".

Definición 4.4 Sea M una variedad de dimensión n y $U \subset M$ un abierto. Un **referencial local** en U es una tupla (X_1, \dots, X_n) de n campos vectoriales de forma que para todo $p \in U$, (X_{1p}, \dots, X_{np}) es una base ordenada del espacio tangente T_pM . Si $U = M$, el referencial es global.

Dentro de los referenciales locales podemos introducir la siguiente relación de equivalencia:

$$(X_1, \dots, X_n) \sim (Y_1, \dots, Y_n) \Leftrightarrow (X_{1p}, \dots, X_{np}) \text{ y } (Y_{1p}, \dots, Y_{np}) \text{ definen la misma orientación de } T_pM. \quad (4.12)$$

A la clase del referencial (X_1, \dots, X_n) la denotaremos $[(X_1, \dots, X_n)]$.

Definición 4.5 [4] Sea M una variedad de dimensión n . Se define una **orientación puntual** como una aplicación μ que a cada punto $p \in M$ le asigna una orientación de T_pM que denotaremos $\mu_p = \mu(p)$. Esto es,

$$\mu_p = [(X_{1p}, \dots, X_{np})] \quad (4.13)$$

para ciertos campos vectoriales X_1, \dots, X_n .

Definición 4.6 [4] Una orientación puntual μ es **continua** en p si existe un entorno V de p tal que μ esté dada por un único referencial local. Es decir, si para todo $q \in V$ tenemos que

$$\mu_q = [(Y_{1q}, \dots, Y_{nq})] \quad (4.14)$$

y los campos Y_1, \dots, Y_n son los mismos para todos los puntos. Si μ es continua en todo punto de M se dice que es continua a secas.

Llamaremos *orientación a una orientación puntual continua en M* y M será *orientable* si tiene una orientación.

Observemos que, aunque compartan el mismo nombre, esta definición de continuidad para las orientaciones no es la misma que la de continuidad para una aplicación cualquiera entre espacios topológicos. Siempre que hablemos de la continuidad de una orientación nos referimos a la que acabamos de definir.

Proposición 4.2 [4] *Toda variedad M conexa, orientable y de dimensión finita tiene exactamente dos orientaciones.*

Demostración:

Por hipótesis, nuestra variedad es orientable, por lo que al menos existe una orientación puntual μ que es continua. En primer lugar comprobamos que puede existir más de una orientación.

Por definición de orientación, en cada punto $p \in M$ tenemos que $\mu(p) \equiv \mu_p$ es una orientación de T_pM que vendrá dada por una clase de equivalencia $[(X_{1p}, X_{2p}, \dots, X_{np})]$. Sin embargo, podemos definir la orientación dada por $\tilde{\mu}(p) = [(X_{2p}, X_{1p}, \dots, X_{np})]$ cambiando dos de los campos vectoriales de orden.

La matriz de cambio de base entre las dos bases ordenadas de T_pM tiene determinante -1 pues es la identidad con las filas primera y segunda permutadas, así que esta nueva orientación es diferente a la original. Como μ es continua, es inmediato que la nueva orientación $\tilde{\mu}$ también lo es. Además en cada punto $\tilde{\mu}$ nos da la orientación contraria a μ ya que los espacios tangentes solo tienen dos orientaciones posibles.

Sean μ y ν dos orientaciones de M . Por definición, en cada punto $p \in M$ tenemos que $\mu(p) = \mu_p$ y $\nu(p) = \nu_p$ son orientaciones de T_pM , que serán o bien la misma o bien opuestas ya que el determinante de un cambio de base será o positivo (misma clase de equivalencia) o negativo. Definimos la siguiente aplicación:

$$f : M \rightarrow \{1, -1\}$$

$$p \rightarrow f(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_p = \nu_p \\ -1 & \text{si } \mu_p = -\nu_p \end{cases} \quad (4.15)$$

Fijemos un punto $q \in M$. Por la continuidad de las orientaciones, existe un entorno conexo U de p (por la proposición 1.2) donde $\mu = [(X_1, \dots, X_n)]$ y $\nu = [(Y_1, \dots, Y_n)]$ para ciertos campos vectoriales X_i, Y_j que son C^∞ sobre U . En cada punto u de U , podemos dar una matriz de cambio de base entre las bases de $T_u M$ que define cada orientación y que dependa de p .

Las entradas de esta matriz serán continuas, al serlo los referenciales, y por tanto su determinante también será continuo. Como la matriz de cambio de base no puede ser singular y U es conexo, por el teorema del valor medio este determinante será siempre estrictamente positivo o siempre estrictamente negativo en U , de forma que o bien $\mu = \nu$ o bien $\mu = -\nu$.

Esto implica que f es constante en U , que era un entorno conexo de un punto q cualquiera. Veamos que f tiene que ser constante en todo M . Sea B el conjunto de abiertos de M tales que f es constante en dichos abiertos. Como para todo punto existe un entorno donde f es constante, todo punto de M está en algún $S \in B$.

Fijado un punto $x_0 \in M$ definimos $V = \{x \in M | f(x) = f(x_0)\}$ y $W = \{x \in M | f(x) \neq f(x_0)\}$. Se tiene que V y W son abiertos (son la unión de abiertos de B), disjuntos y $V \cup W = M$. Como M es conexa y $V \neq \emptyset$, tiene que darse necesariamente que $V = M$ y $W = \emptyset$.

Por tanto f es constante en todo M y solo existen dos orientaciones posibles: μ y $-\mu$ ■.

Definición 4.7 Una variedad M de dimensión finita se dice **orientada** si es orientable y se ha elegido una de sus dos orientaciones posibles.

Si pensamos en \mathbb{R}^n , la función determinante de una matriz $n \times n$ es una aplicación que toma n vectores, devuelve un número real y es antisimétrica bajo el cambio de argumentos. Es decir, el determinante, que lo usamos para definir orientaciones en el espacio tangente, es una n -forma en \mathbb{R}^n . En una variedad cualquiera de dimensión n , las n -formas también están muy relacionadas con las orientaciones.

Lema 4.2 [4] Una orientación $[(X_1, \dots, X_n)]$ de una variedad M de dimensión n es continua si y solo si para todo punto $p \in M$ existe una carta $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, con U entorno de p , tal que la n -forma $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ evaluada en (X_1, \dots, X_n) es estrictamente positiva.

Demostración:

\implies | Sea $\mu = [(X_1, \dots, X_n)]$ una orientación continua y $p \in M$. Como las variedades son localmente conexas por la proposición 1.2, podemos escoger una carta (U, ϕ) con U entorno conexo de p .

Por hipótesis en este entorno la orientación μ viene dada por la clase de equivalencia de un referencial (Y_1, \dots, Y_n) .

Si tenemos que $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, entonces $Y_j(p) = b_j^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}$ con $b_j^i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Estas funciones son continuas y nos dan la matriz de cambio de base $B_p = (b_j^i(p))$ entre las derivadas parciales y los Y_j en cada punto. Por la proposición 3.3,

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(Y_1, \dots, Y_n) &= \det(B_p)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^1} \right) = \\ &= \det(B_p) \delta_1^1 \dots \delta_n^n = \det(B_p). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Como la matriz B_p es un cambio de base, su determinante nunca es cero. Además como U es conexo, podemos aplicar el teorema del valor medio para decir que nunca cambia de signo en todo U . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que este signo es positivo, ya que si es negativo podemos considerar la carta $(U, \psi = (-x^1, \dots, x^n))$ y al repetir el proceso el signo de $\det(B_p)$ es positivo.

Por último nos fijamos en que dentro de U , $\mu = [(X_1, \dots, X_n)] = [(Y_1, \dots, Y_n)]$. Entonces, la matriz C de cambio de base de los X_i a los Y_j tiene determinante positivo. Volviendo a aplicar la proposición 3.3 obtenemos que

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(X_1, \dots, X_n) = \det(C_p)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(Y_1, \dots, Y_n)) > 0. \quad (4.17)$$

\Leftarrow | Partimos ahora de un punto p arbitrario, la carta (U, ϕ) y la orientación $\mu = [(X_1, \dots, X_n)]$. Como antes, podemos expresar los campos vectoriales como $X_j = a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, de forma que, si $A_p = (a_j^i(p))$ y aplicando la proposición 3.3,

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(X_1, \dots, X_n) = \det(A_p)(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = \det(A_p) > 0. \quad (4.18)$$

Este determinante es positivo ya que, por hipótesis, $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(X_1, \dots, X_n) > 0$. Por tanto, la matriz A_p de cambio de base está bien definida en todo U y tenemos que $[(X_1, \dots, X_n)]$ define la misma orientación que las parciales en U . Concluimos que μ es continua en p . Como p era arbitrario, μ es continua en todo M . ■

Usando este lema podemos dar el siguiente resultado.

Teorema 4.1 [4] *Una variedad M de dimensión n es orientable si y solo si existe una n -forma C^∞ que no se anula nunca en M .*

Demostración:

\implies | Tomemos una orientación $\mu = [(X_1, \dots, X_n)]$. Por el lema 4.2, para cada punto $p \in M$ existe una carta $(U_p, x_p^1, \dots, x_p^n)$, con U entorno de p , tal que:

$$dx_p^1 \wedge \dots \wedge dx_p^n(X_1, \dots, X_n) > 0 \quad (4.19)$$

Consideremos la familia de cartas $\{(U_p, \phi_p)\}_{p \in M}$. Como los U_p forman un recubrimiento de M , por la proposición 4.1 podemos considerar una partición de la unidad $\{\alpha_p\}$ subordinada a él. Por las propiedades de finitud local podemos definir la siguiente n -forma:

$$\omega = \sum_{p \in M} \alpha_p dx_p^1 \wedge \dots \wedge dx_p^n \quad (4.20)$$

ω es C^∞ al serlo las funciones de la partición de la unidad. Fijado un punto $q \in M$ tenemos que al menos α_q es estrictamente positiva. El resto también tienen que ser mayores o iguales que cero por definición, así que es claro que $\omega(p)(X_{1p}, \dots, X_{np}) > 0$.

\Leftarrow | Sea ω una n -forma C^∞ que no se anula en ningún punto de M . En cada punto $p \in M$ podemos escoger una base ordenada de $T_p M$ (X_{1p}, \dots, X_{np}) tal que $\omega(X_{1p}, \dots, X_{np}) > 0$.

A su vez en p tenemos una carta (U, x^1, \dots, x^n) , con U conexo, y localmente podemos expresar $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ con $f \neq 0$ en todo U .

De nuevo, por el teorema del valor medio, f no puede cambiar de signo. Si f es positiva, entonces

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) > 0. \quad (4.21)$$

En caso contrario, si $f < 0$, entonces para la carta $(U, -x^1, \dots, x^n)$ se cumple (4.21), y por el lema 4.2, M es orientable. ■

Vamos a dar ahora otra caracterización de la orientabilidad que en determinados contextos es más conveniente porque es mucho más fácil de comprobar en variedades con atlas pequeños.

Definición 4.8 [4] *Sea M una variedad. Si para todo par de cartas sobre M , (U, ϕ) y (V, ψ) , el determinante de la matriz jacobiana de $\phi \circ \psi^{-1}$ tiene signo positivo en todo punto de $U \cap V$, diremos que el atlas de M es un **atlas orientado** y que las cartas (U, ϕ) y (V, ψ) tienen la misma orientación.*

Como las variedades solo tienen dos orientaciones posibles, si un par de cartas (U, ϕ) y (V, ψ) cumplen que el determinante de la jacobiana de $\phi \circ \psi^{-1}$ es negativo diremos que las cartas tienen orientaciones opuestas.

Teorema 4.2 [4] Una variedad M es orientable si y solo si tiene un atlas ordenado.

Demostración:

\Leftarrow | Sea A un atlas orientado de M . Para cada carta (U, x^1, \dots, x^n) y $p \in U$ definimos la candidata a orientación μ como:

$$\mu(p) = \mu_p = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \right]. \quad (4.22)$$

Si (V, y^1, \dots, y^n) es otra carta de A con $p \in V$, por definición de atlas orientado, $\det(\partial y^j / \partial x^i)^j_i > 0$, por lo que las dos cartas que tenemos definen la misma orientación. Esto prueba que μ es una orientación puntual bien definida. Además es continua porque en cada punto p existe un entorno de p (U) donde μ viene dada únicamente por las parciales.

\Rightarrow | Sea $\mu = [(X_1, \dots, X_n)]$ una orientación de M . Por el lema 4.2 cada punto p tiene una carta $(U_p, x_p^1, \dots, x_p^n)$ tal que

$$dx_p^1 \wedge \dots \wedge dx_p^n(X_1, \dots, X_n) > 0. \quad (4.23)$$

Consideramos el atlas $A = \{(U_p, x_p^1, \dots, x_p^n)\}_{p \in M}$. Para ver que es orientado nos fijamos en que, dados $p, q \in M$ tales que $U_p \cap U_q \neq \emptyset$, tenemos por hipótesis que:

$$dx_p^1 \wedge \dots \wedge dx_p^n(X_1, \dots, X_n) > 0, \quad dx_q^1 \wedge \dots \wedge dx_q^n(X_1, \dots, X_n) > 0. \quad (4.24)$$

Pero por la proposición 3.3

$$dx_p^1 \wedge \dots \wedge dx_p^n(X_1, \dots, X_n) = \det \left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j} \right) dx_q^1 \wedge \dots \wedge dx_q^n(X_1, \dots, X_n). \quad (4.25)$$

Lo que implica que $\det \left(\frac{\partial x_p^i}{\partial x_q^j} \right) > 0$ y por tanto el atlas A es orientado. ■

En algunos libros de la bibliografía ([3], por ejemplo) se da como única definición de variedad orientable la dada por un atlas orientado. Ahora que hemos demostrado que las dos posibles definiciones son equivalentes, podemos usar siempre la que más nos convenga.

Definición 4.9 [1] Sean M y N dos variedades orientadas de dimensión finita y $F : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre ellas. Se dice que F **conserva orientaciones** si para cada $p \in M$, el isomorfismo de espacios tangentes dF_p lleva bases orientadas de $T_p M$ a bases orientadas de $T_{F(p)} N$ con la misma orientación que N . En caso contrario, se dirá que F **invierte orientaciones**.

Hasta ahora todos los resultados son válidos para variedades con o sin frontera. La frontera de una variedad, sin embargo, tiene algún detalle especial.

Proposición 4.3 [4] *Sea M una variedad orientable de dimensión n con frontera. Entonces ∂M es orientable.*

Demostración:

Por el teorema 4.1, será suficiente encontrar una $(n - 1)$ -forma que no sea 0 en ningún punto de la frontera. Sea X un campo vectorial que apunta hacia fuera en ∂M . Consideremos la n -forma no nula ω de M , que existe por el teorema 4.1, y supongamos que la $(n - 1)$ -forma $\omega(X, v_2, \dots, v_n) = \iota_X \omega$ se hace cero en algún punto $q \in \partial M$. Entonces, dada una base $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de $T_q(\partial M)$, si le añadimos el vector X , que por definición no está en $T_q(\partial M)$, tenemos una base de $T_q M$. Entonces:

$$\omega(X_q, e_1, \dots, e_{n-1}) = \iota_X \omega(e_1, \dots, e_{n-1}) = 0 \quad (4.26)$$

Como ω se anula en la base, por linealidad se anula en todo $T_q M$, lo que contradice que ω nunca se anule. Por tanto $\iota_X \omega$ no se anula en ningún punto de la frontera y ∂M es orientable. ■

Este resultado nos dice que, dada una orientación de ∂M , añadiendo el vector X podemos pasar a una orientación de M y viceversa.

Entre los ejemplos de la sección 1.2, \mathbb{R}^n y $SU(2)$ (o la 3-esfera S^3) son variedades orientables.

La banda de Möbius es el ejemplo clásico de una variedad que no es orientable. Para variedades con pocas cartas, la forma más conveniente de comprobar esto es con el teorema 4.2. Si calculamos la matriz jacobiana del cambio de cartas (1.12)

$$G = \phi \circ Id^{-1}(x, y) = \phi(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } 0,3 \leq x \leq 0,4 \\ (x - 1, -y) & \text{si } 0,6 \leq x \leq 0,7 \end{cases} \quad (4.27)$$

obtenemos la matriz

$$JG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

que tiene determinante -1, por lo que no es orientable.

Esto también se puede demostrar argumentando por reducción al absurdo. Supongamos que hay un atlas orientado (U_i, ϕ_i) de la banda de Möbius, que denotaremos M . Si definimos la proyección

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \\ (x, y) &\rightarrow [(x, y)]_R\end{aligned}\tag{4.29}$$

donde R es la relación que define la banda y $\sigma(x) = \text{signo}(J(\phi_i^{-1} \circ \pi(x, 0)))$, esta función está bien definida y localmente es constante, porque estamos suponiendo que M es orientable. Sin embargo como tenemos $(x + 1, y) \sim (x, -y)$ se cumple que $\phi_i^{-1} \circ \pi(x + 1, y) = \phi_i^{-1} \circ \pi(x, -y)$. Esto implica que $\sigma(1) = -\sigma(0)$, lo que es una contradicción.

4.3. Integrales y teorema de Stokes

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para integrar en variedades. Nuestro objeto a integrar serán las formas diferenciales. En particular, en una variedad de dimensión n solo podremos integrar n -formas. Si queremos integrar una p -forma con $p < n$, tendremos que hacerlo en una subvariedad de dimensión p .

¿Por qué solo podemos integrar n -formas y no, por ejemplo, una función por sí sola? La respuesta es que una función no se puede integrar de manera intrínseca, con resultado independiente de las coordenadas. Por ejemplo, si C es una bola de \mathbb{R}^n y tomamos la función $f(x) \equiv 1$, entonces [1]

$$\int_C f dV = \text{Vol}(C)\tag{4.30}$$

no es invariante bajo un cambio de coordenadas. Entonces, motivados por nuestro afán de generalizar las integrales múltiples y por el hecho de que en \mathbb{R}^n el volumen de un paralelepípedo de dimensión k viene dado por el determinante de k vectores (una k -forma), vamos a utilizar las formas diferenciales para introducir una integral independiente de las coordenadas.

Como el espacio de las n -formas tiene dimensión 1, la expresión más general de una n -forma es $\alpha = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, con f una función C^∞ . Vamos a pedir que las n -formas que integremos tengan soporte compacto para asegurar la integrabilidad Riemann [4] de f cuando nuestra variedad sea \mathbb{R}^n .

Definición 4.10 *Un subconjunto de \mathbb{R}^n se llama **dominio de integración** si es acotado y su frontera tiene medida (de Lebesgue) cero.*

Definición 4.11 [1] Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de integración y $\alpha = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ una n -forma con soporte compacto contenido en D . Se define la integral de α como

$$\int_D \alpha = \int_D f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_D f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n \quad (4.31)$$

Una vez definida la integración de formas en \mathbb{R}^n , podemos apoyarnos en ella para pasar a una variedad arbitraria.

Definición 4.12 [1] Sea M una variedad de dimensión n con un atlas orientado, (U, ϕ) una carta sobre M y $\alpha = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ una n -forma con soporte compacto contenido en U . Se define la **integral de α en U** como

$$\int_U \alpha = \pm \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \alpha, \quad (4.32)$$

donde el \pm es $+$ si la carta (U, ϕ) tiene la misma orientación que el atlas de M y $-$ si tiene la orientación opuesta.

Observemos que $(\phi^{-1})^* \alpha = (f \circ \phi^{-1}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ es una n -forma definida en \mathbb{R}^n , de la que acabamos de ver cómo se calcula la integral.

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\phi^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ \Lambda_{\phi^{-1}(p)}^n(M) & \xrightarrow{(\phi^{-1})^*} & \Lambda_p^n(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Figura 4.2: Acción de las aplicaciones involucradas en la integral (4.32).

Si M tiene solo una carta, esto nos proporciona toda la integración que necesitamos. Pero como ya hemos visto, muchas variedades necesitan un atlas formado por varias cartas.

Definición 4.13 [4] Sea M una variedad orientada de dimensión n , α una n -forma en M con soporte compacto, $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto del soporte de α tal que los U_i formen parte del atlas de M y sus cartas tengan la misma orientación y $\{\psi_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$. Se define la **integral de α sobre M** como

$$\int_M \alpha = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \psi_i \alpha. \quad (4.33)$$

Como mencionamos antes, en cada U_i solo un número finito de funciones de la partición de la unidad serán distintas de cero, por lo que $\alpha = \sum_i \psi_i \alpha$ es una suma finita.

Además, el soporte de $\psi_i \alpha$ es siempre compacto, pues por definición es un cerrado y está contenido en el soporte de α , que es compacto.

$$\text{sop}(\psi_i \alpha) \subset \text{sop}(\psi_i) \cap \text{sop}(\alpha) \subset \text{sop}(\alpha). \quad (4.34)$$

Luego $\psi_i \alpha$ es una n -forma con soporte compacto, así que la podemos integrar.

Como viene siendo costumbre, vamos a comprobar que estas integrales son independientes de las cartas o particiones de la unidad que utilicemos.

Proposición 4.4 [1] Sean D y E dos dominios de integración en \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n y $G : \bar{D} \rightarrow \bar{E}$ un difeomorfismo. Si $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ es una n -forma en \bar{E} , entonces:

$$\int_D G^* \omega = \pm \int_E \omega \quad (4.35)$$

Donde el \pm es positivo si G preserva orientaciones y es negativo si las invierte.

Demostración:

Denotemos (y^1, \dots, y^n) a las coordenadas de E y (x^1, \dots, x^n) a las de D . Usando el teorema del cambio de variable y la proposición 3.3,

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_E f dx^1 \dots dx^n = \int_D (f \circ G) |\det(DG)| dx^1 \dots dx^n = \\ &= \pm \int_D (f \circ G) \det(DG) dx^1 \dots dx^n = \pm \int_D G^* \omega. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Si G preserva orientaciones, su matriz jacobiana tendrá determinante positivo por lo que $|\det(DG)| = \det(DG)$. Si las invierte, el determinante es negativo y $|\det(DG)| = -\det(DG)$, lo que justifica los casos del \pm . ■

Proposición 4.5 [1],[4] La integral definida en 4.13 es independiente de las cartas y de las particiones de la unidad utilizadas.

Demostración:

Para la primera parte basta demostrar el resultado para un par de cartas (U, ϕ) y (V, ψ) tales que $\text{sop}(\alpha) \subseteq U \cap V$. Como el cambio de coordenadas $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \phi(U)$ es un difeomorfismo,

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \alpha = \int_{\psi(U)} (\phi \circ \psi^{-1})^* (\phi^{-1})^* \alpha = \int_{\phi(U)} ((\psi^{-1})^* \circ \phi^* \circ (\phi^{-1})^*) \alpha = \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \alpha. \quad (4.37)$$

Esto cubre el caso de que las cartas tengan tanto la misma orientación como diferente orientación: en el primer caso $\phi \circ \psi^{-1}$ preserva orientaciones y en el otro caso $\phi \circ \psi^{-1}$ las invierte, introduciendo un factor -1 como se vio en la proposición 4.4. Pero como las cartas inducen orientaciones opuestas, aparece un segundo signo menos que se cancela con el anterior.

Para las particiones de la unidad consideramos dos atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ de M y dos particiones de la unidad $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ y $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ subordinadas a los recubrimientos $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{V_j\}_{j \in J}$ respectivamente. Entonces tenemos que

$$\sum_{i \in I} \int_{U_i} \gamma_i \alpha = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \gamma_i \underbrace{\sum_{j \in J} \sigma_j}_{1} \alpha = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{U_i} \gamma_i \sigma_j \alpha. \quad (4.38)$$

Al final hemos usado que, como la suma en j es finita, podemos intercambiarla con la integral. Ahora bien, como el soporte de las γ_i está contenido en los U_i y el soporte de las σ_j está contenido en los V_j , $\text{sop}(\gamma_i \sigma_j) \subseteq U_i \cap V_j$. Además, como las particiones son arbitrarias, podríamos haber intercambiado las U con las V y las γ con las σ y haber llegado exactamente a lo mismo. Por tanto,

$$\sum_{i \in I} \int_{U_i} \gamma_i \alpha = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{U_i \cap V_j} \gamma_i \sigma_j \alpha = \sum_{j \in J} \int_{V_j} \sigma_j \alpha, \quad (4.39)$$

y llegamos a que el resultado no depende de la partición de la unidad. ■

Veamos que la integral así definida conserva las propiedades clásicas de las integrales conocidas en \mathbb{R}^n (Riemann, Lebesgue-Stieltjes, Lebesgue,...)

Proposición 4.6 [1] Sean M y N variedades orientadas de la misma dimensión n y ω, η dos n -formas con soporte compacto en M . Entonces:

(a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta$

(b) Si denotamos $-M$ a M con la orientación inversa entonces $\int_{-M} \omega = - \int_M \omega$

(c) Si $\omega > 0$ para todo punto de M , entonces $\int_M \omega > 0$

(d) Si $F : N \rightarrow M$ es un difeomorfismo entonces

$$\int_M \omega = \pm \int_N F^* \omega, \quad (4.40)$$

donde el \pm es positivo si F preserva orientaciones y es negativo si las invierte.

Demostración:

Sea $\{\psi_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de M .

(a) Usando la linealidad de los *pullbacks* y de la integral en \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \int_M a\omega + b\eta &= \sum_{i \in I} \int_M \psi_i(a\omega + b\eta) = \sum_{i \in I} \int_{\phi_i(U_i)} (\phi_i^{-1})^*(\psi_i(a\omega + b\eta)) = \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\phi_i(U_i)} (a(\phi_i^{-1})^*(\psi_i\omega) + b(\phi_i^{-1})^*(\psi_i\eta)) = \\ &= \sum_{i \in I} a \int_{\phi_i(U_i)} (\phi_i^{-1})^*(\psi_i\omega) + b \int_{\phi_i(U_i)} (\phi_i^{-1})^*(\psi_i\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta \end{aligned} \quad (4.41)$$

(b) Por la definición de la integral 4.13, si probamos el resultado para una carta de M será suficiente, pues al ser variedades orientadas, todas las cartas de M tendrán la misma orientación, que es la contraria a una carta de $-M$.

Dada la carta $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ de M , definimos la carta $(U, \tilde{\phi}) = (U, -x^1, \dots, x^n)$ de $-M$.

Tenemos que $\det(J(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})) = -1$.

Por la proposición 3.3 se cumple que si $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$,

$$\begin{aligned} (\phi^{-1})^*\omega &= (f \circ \phi^{-1})d(x^1 \circ \phi^{-1}) \wedge \dots \wedge d(x^n \circ \phi^{-1}) \\ (\tilde{\phi}^{-1})^*\omega &= (f \circ \tilde{\phi}^{-1})d(x^1 \circ \tilde{\phi}^{-1}) \wedge \dots \wedge d(x^n \circ \tilde{\phi}^{-1}) = \\ &= -(f \circ \tilde{\phi}^{-1})d(x^1 \circ \phi^{-1}) \wedge \dots \wedge d(x^n \circ \phi^{-1}), \end{aligned} \quad (4.42)$$

ya que con $\tilde{\phi}$ sacamos un signo menos en $dx^1 \circ \tilde{\phi}^{-1} = -dx^1 \circ \phi^{-1}$.

Entonces, si llamamos $r^i = x^i \circ \phi^{-1}$ llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\phi}(U)} (\tilde{\phi}^{-1})^*\omega &= \int_{\tilde{\phi}(U)} -(f \circ \tilde{\phi}^{-1})dr^1 \wedge \dots \wedge dr^n = \\ &= - \int_{\tilde{\phi}(U)} (f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \tilde{\phi}^{-1}) \underbrace{|J(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})|}_1 dr^1 \wedge \dots \wedge dr^n. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ahora, como estamos en \mathbb{R}^n , podemos aplicar el teorema del cambio de variable a la última línea para obtener

$$\int_{\tilde{\phi}(U)} (\tilde{\phi}^{-1})^*\omega = - \int_{\phi(U)} (f \circ \phi^{-1})dr^1 \wedge \dots \wedge dr^n = - \int_{\tilde{\phi}(U)} (\phi^{-1})^*\omega. \quad (4.44)$$

Por tanto, concluimos que $\int_M \omega = - \int_{-M} \omega$.

- (c) Si (U, ϕ) es una carta con la misma orientación que la que define ω , por el teorema 4.1, $(\phi^{-1})^*\omega$ será una función positiva multiplicada por la forma $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, por lo que en la suma que define la integral de ω aparecen integrales de funciones positivas en \mathbb{R}^n , que son positivas.
- (d) Al tener ω soporte compacto en M , si la recubrimos con cartas (U_i, ϕ_i) por compacidad existe un número finito de abiertos U_i tal que $\text{sop}(\omega) \subseteq \bigcup_i U_i$. Con la ayuda de una partición de la unidad podemos escribir ω como una suma de n -formas α_k cuyo soporte está contenido en uno solo de los abiertos, que llamaremos U_k .

Para cada una de las α_k podemos llevar la carta (U_k, ϕ_k) a la carta $(F^{-1}(U_k), \phi_k \circ F)$ de N . Como F es un difeomorfismo el soporte de $F^*\alpha_k$ está contenido en $F^{-1}(U_k) \subseteq N$ y estamos en las condiciones de la proposición 4.4 si F preserva orientaciones. En caso contrario podemos aplicar el apartado (b) de esta proposición y volvemos a estar en las condiciones de 4.4.

Entonces el resultado queda probado para las α_k . Como ω la podíamos expresar como una suma finita de ellas y la integral es lineal concluimos que $\int_M \omega = \pm \int_N F^*\omega$. ■

Vamos a desarrollar un ejemplo para que la notación con los *pullbacks* quede más clara. Consideremos la circunferencia S^1 . Tenemos un atlas formado por las dos cartas siguientes:

$$\begin{aligned} \phi : S^1 \setminus \{(1, 0)\} &\rightarrow (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} & \psi : S^1 \setminus \{(-1, 0)\} &\rightarrow (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{R} \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\rightarrow \theta & (\cos \theta, \sin \theta) &\rightarrow \theta \end{aligned} \quad (4.45)$$

Intentemos calcular la integral sobre S^1 de la 1-forma $\omega = xy^2 dx$. Primero necesitamos saber cuánto valen $(\phi^{-1})^*\omega$ y $(\psi^{-1})^*\omega$, que por cómo elegimos las cartas va a ser lo mismo. Por la ecuación (3.49) y la proposición 3.4 tenemos

$$(\phi^{-1})^*(x^2 y dx) = (\phi^{-1})^*(x^2 \wedge y \wedge dx) = (\phi^{-1})^*x^2 (\phi^{-1})^*y d((\phi^{-1})^*x). \quad (4.46)$$

Notemos que este procedimiento es general para las n -formas: lo único que tenemos que hacer es calcular el *pullback* de cada coordenada y hacer el producto exterior cuando sea necesario. Calculamos cada término por separado evaluando en un punto $p \in S^1$ (la que sería nuestra N en la definición):

$$(\phi^{-1})^*x^2(p) = x^2(\phi^{-1}(p)) = x^2((\cos \theta, \sin \theta)) = \cos^2 \theta \quad (4.47)$$

$$(\phi^{-1})^*y(p) = y(\phi^{-1}(p)) = y((\cos \theta, \sin \theta)) = \sin \theta \quad (4.48)$$

$$d((\phi^{-1})^*x) = d(\cos \theta) = -\sin \theta d\theta. \quad (4.49)$$

Juntándolo todo, $(\phi^{-1})^*\omega = -\cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$.

Ahora nos encontramos con un "ligero" problema: como no podemos cubrir S^1 con una sola carta necesitamos introducir una partición de la unidad (en este caso de dos funciones) y vamos a tener que integrar $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ multiplicada por una función de la partición que nos tenemos que inventar. Podemos usar algo de la forma (4.4), pero entonces podemos ir abandonando toda esperanza de calcular la integral analíticamente.

En este caso realmente no hacía falta utilizar una partición de la unidad porque, como estamos en \mathbb{R} , tal y como hemos definido la integral en la definición 4.11, los conjuntos de medida 0 no afectan al valor de la integral, ya que la integral de la forma la pasamos a una integral ordinaria en \mathbb{R} . Entonces, podemos utilizar solo una de las cartas para integrar en todo S^1 porque solo estamos dejando un punto fuera del dominio de ϕ . Así que podemos decir que

$$\int_{S^1} \omega = \int_{(0,2\pi)} (\phi^{-1})^*\omega = -\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{4} \quad (4.50)$$

En una situación donde no estemos en \mathbb{R}^n no podemos utilizar este tipo de argumentos, por lo que sería conveniente tener alguna otra técnica de integración que no pase por particiones de la unidad y nos permita hacer cálculos sin tener que recurrir a métodos numéricos.

Proposición 4.7 [1] *Sea M una variedad orientada de dimensión n , ω una n -forma con soporte compacto en M . Supongamos que podemos encontrar una cantidad finita de funciones*

$F_i : \overline{D}_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ ($1 \leq i \leq k$) con D_i dominios de integración abiertos tales que:

1. *La restricción $F_i : D_i \rightarrow M$ es un difeomorfismo que preserva orientaciones y $F_i(D_i) \equiv W_i$ es un abierto de M .*
2. *$W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$*
3. *$\text{sop}(\omega) \subset \overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_k$ (de forma que $F_i^*\omega$ tiene soporte contenido en los compactos \overline{D}_i)*

Entonces se cumple que

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega. \quad (4.51)$$

Demostración:

Como en el apartado (d) de la proposición 4.6, bastará demostrar el caso en el que ω tenga soporte contenido en una sola carta (U, ϕ) . Definimos los siguientes conjuntos:

$$A_i = F_i^{-1}(U \cap W_i) \subset \mathbb{R}^n, \quad B_i = F(A_i) = U \cap W_i \subset M, \quad C_i = \phi(B_i) = \phi \circ F_i(A_i) \subset \phi(U) \quad (4.52)$$

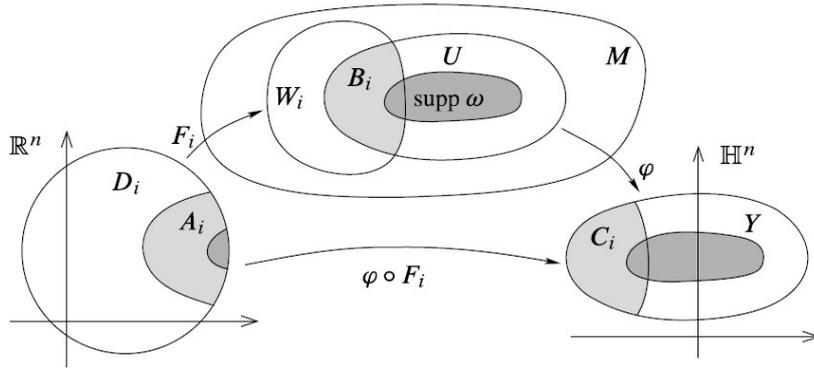


Figura 4.3: Conjuntos que intervienen en la demostración de la presente proposición. Tomada de [1] (16.8).

Como \overline{D}_i son cerrados y acotados, por el teorema de Heine-Borel son compactos. A partir de esto podemos ver que $\partial W_i \subseteq F_i(\partial D_i)$ usando la continuidad de los F_i . En efecto, la frontera de W_i se puede expresar como

$$\partial F_i(D_i) = \partial W_i = \overline{W_i} \cap \overline{M} \setminus W_i = \overline{F_i(D_i)} \cap \overline{\mathbb{R}^n} \setminus F_i(D_i) \subseteq F_i(\overline{D_i}) \cap F_i(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus D_i) = F_i(\partial D_i), \quad (4.53)$$

por lo que concluimos que la frontera de W_i también tiene medida 0.

De la definición de A_i vemos que ∂C_i también tiene medida cero. Recordamos que $C_i = \phi(U \cap W_i)$ y por tanto $(\phi^{-1})^*$ tiene soporte compacto contenido en $\overline{C_1} \cup \dots \cup \overline{C_n}$. Entonces usando las propiedades de la integral en \mathbb{R}^n

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} (\phi^{-1})^* \omega. \quad (4.54)$$

Aplicando la proposición 4.4,

$$\int_{C_i} (\phi^{-1})^* \omega = \int_{A_i} (\phi \circ F_i)^* (\phi^{-1})^* \omega = \int_{A_i} F_i^* \circ \phi^* \circ (\phi^{-1})^* \omega = \int_{D_i} F_i^* \omega. \quad (4.55)$$

En la última igualdad hemos usado que $A_i = F_i^{-1}(U \cap W_i) \subseteq D_i$ y que el soporte de $F_i^* \omega$ está contenido en $\overline{D_i}$, pero como la frontera tiene medida cero podemos quitar la clausura. Sustituyendo esto en

el sumatorio obtenemos el resultado ■.

Esta proposición también se cumple si los abiertos W_i cubren M excepto en un conjunto de medida cero [1].

Pongamos un ejemplo para ver cómo funciona este método.

Nuestra variedad M va a ser la 2-esfera S^2 y vamos a considerar la siguiente 2-forma de \mathbb{R}^3 :

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \quad (4.56)$$

Consideramos el dominio de integración $D = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ (recordemos que S^2 tiene dimensión 2) y elegimos la parametrización en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} F : \overline{D} = [0, \pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow S^2 \\ (\theta, \varphi) &\rightarrow (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Es bien conocido que, si restringimos su dominio al abierto $D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, F es un difeomorfismo y que el determinante de su matriz jacobiana es $\sin \theta$, que en $(0, \pi)$ es siempre positivo. Como la matriz coordenada de la diferencial dF es esta misma jacobiana, F lleva bases orientadas de $T_p\mathbb{R}^2$ a bases con la misma orientación de $T_{F(p)}S^2$, por lo que preserva orientaciones [1].

Estamos, entonces, en condiciones de aplicar la proposición 4.7. Vamos a calcular $F^*\omega$ usando la definición y las proposiciones 3.3 y 3.4.

$$F^* dx = d(F^*x) = d(\sin \theta \cos \varphi) = \cos \theta \cos \varphi d\theta - \sin \theta \sin \varphi d\varphi \quad (4.58)$$

$$F^* dy = \cos \theta \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cos \varphi d\varphi \quad (4.59)$$

$$F^* dz = -\sin \theta d\theta \quad (4.60)$$

Utilizando esto calculamos los productos exteriores

$$\begin{aligned} F^*(dy \wedge dz) &= F^*dy \wedge F^*dz = (\cos \theta \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cos \varphi d\varphi) \wedge (-\sin \theta d\theta) = \\ &= -\cos \theta \sin \varphi \underbrace{\sin \theta d\theta \wedge d\theta}_0 - \sin^2 \theta \cos \varphi d\varphi \wedge d\theta = \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta \wedge d\varphi. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Análogamente llegamos a

$$F^*(dz \wedge dx) = -\sin^2 \theta \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta \quad (4.62)$$

$$F^*(dx \wedge dy) = \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi. \quad (4.63)$$

Juntándolo todo,

$$F^* \omega = \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi + \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi + \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi. \quad (4.64)$$

Si en el cuarto sumando usamos $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ aparece un $-\sin^3 \theta \sin^2 \varphi$ que se cancela con el segundo sumando, de forma que podemos simplificar un poco:

$$F^* \omega = \underbrace{(\sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \sin^2 \varphi)}_{\cos^2 \varphi (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) = \cos^2 \varphi \sin \theta} d\theta \wedge d\varphi = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \quad (4.65)$$

Entonces

$$\int_{S^2} \omega = \int_D F^* \omega = \int_D \sin \theta d\theta \wedge d\varphi = \int_D \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi. \quad (4.66)$$

Concluimos el capítulo con la demostración del teorema de Stokes, para la que nos hemos estado preparando durante todo el trabajo.

Teorema 4.3 (de Stokes) [1] *Sea M una variedad de dimensión n con frontera y ω una $(n-1)$ -forma con soporte compacto en M . Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (4.67)$$

Si $\partial M = \emptyset$, se impone $\int_{\partial M} \omega = 0$.

Demostración:

Empezamos demostrando el caso de $M = \mathbb{H}^n$. Como ω tiene soporte compacto, podemos suponer que dicho soporte está contenido en un rectángulo $A = [-R, R]^{n-1} \times [0, R]$ tal que $\omega(x^1, \dots, x^n) = 0$ cuando cualquiera de las componentes x^j es R . La forma general de la $(n-1)$ -forma ω es

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (4.68)$$

donde $\widehat{dx^i}$ indica que se ha omitido la variable x^i (por ejemplo $dx \wedge \widehat{dy} \wedge dz = dx \wedge dz$). Entonces, por definición de derivada exterior,

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (4.69)$$

ya que si $i \neq j$ uno de los dx^j se repite y la forma resultante es 0. Además al ordenar los productos exteriores hay que arrastrar un signo menos $i - 1$ veces. Como ya estamos en \mathbb{H}^n la integral de $d\omega$ es

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_A \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^n. \quad (4.70)$$

Fijémonos en que, como las parciales de ω son funciones C^∞ , podemos integrar primero en la variable que queramos. Si escogemos integrar en la variable x^i primero en cada término del sumatorio, resulta que todos los términos con $i \neq n$ se anulan:

$$\int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n = \int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R [\omega_i]_{x_i=-R}^{x_i=R} dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n = 0, \quad (4.71)$$

ya que habíamos impuesto que si alguna de las componentes era R , ω se anula al estar fuera de su soporte.

Para el término $i = n$, como x^n es la única variable que integramos de 0 a R ,

$$\int_{\mathbb{H}^n} \omega = (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R [\omega_n]_{x_n=0}^{x_n=R} dx^1 \dots dx^{n-1} = (-1)^n \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \omega(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}. \quad (4.72)$$

Veamos que esto coincide con la integral de ω .

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_i(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (4.73)$$

Como estamos en $\partial \mathbb{H}^n$ la coordenada x^n es siempre nula (y por tanto constante). Esto implica que la diferencial y por tanto el *pullback* de x^n siempre será 0 en $\partial \mathbb{H}^n$. Entonces, el único término que contribuye es el término en el que omitimos dx^n en la integral, es decir, el de $i = n$:

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \quad (4.74)$$

Esto es igual que la integral de (4.72) salvo un factor $(-1)^n$. Este factor viene de que \mathbb{H}^n y su frontera no siempre tienen la misma orientación. Implícitamente estamos escogiendo para \mathbb{H}^n la orientación

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right]. \quad (4.75)$$

$-\frac{\partial}{\partial x^n}$ es un campo vectorial que apunta hacia fuera de $\partial \mathbb{H}^n$, entonces por la proposición 4.3 este campo vectorial induce una orientación en $\partial \mathbb{H}^n$ a partir de una orientación de \mathbb{H}^n . Resulta que en términos de las clases de equivalencia,

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} \right] = - \left[\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} \right] = (-1)^n \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right]. \quad (4.76)$$

Entonces tenemos que, cuando n es par, (x^1, \dots, x^n) tienen orientación positiva y, cuando n es impar, tienen orientación negativa, por lo que se introduce un signo menos y hemos recuperado el $(-1)^n$ que nos faltaba para probar el teorema.

Ahora consideramos otro caso especial: $M = \mathbb{R}^n$. En este caso, el soporte de ω es un cubo $[-R, R]^n$, por lo que todas las componentes de ω son cero, por el mismo argumento que hicimos en (4.71), y ambos lados de la ecuación (4.67) son cero. Esto también prueba el teorema en el caso de una variedad sin frontera arbitraria.

Una vez que tenemos probados los casos \mathbb{R}^n y \mathbb{H}^n , tenemos casi todo el trabajo hecho para una variedad con frontera M cualquiera.

Primero probamos el teorema en el caso de que ω tiene su soporte compacto contenido en una sola carta (U, ϕ) . Entonces, por la proposición 3.4, apartado 4,

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} (\phi^{-1})^* d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} d((\phi^{-1})^*)\omega = \int_{\partial\mathbb{H}^n} (\phi^{-1})^*\omega, \quad (4.77)$$

puesto que ya tenemos el teorema probado en \mathbb{H}^n . Para llegar a una integral en ∂M , nos damos cuenta de que si ϕ restringido a la frontera de M es un difeomorfismo que preserva o invierte orientaciones, según si tiene o no la misma orientación que M , podemos aplicar la proposición 4.6, apartado (d), para obtener el resultado que queremos. En el caso de que ϕ invierta orientaciones, aparecería un signo menos adicional en la primera igualdad de (4.77) que se compensaría con el que aparece al volver a ∂M .

Por último, dejamos que ω sea una $(n-1)$ -forma arbitraria con soporte compacto. Por ser dicho soporte compacto podemos elegir un recubrimiento finito de cartas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1,2,\dots,k}$ y una partición de la unidad $\{\psi_i\}_{i=1,2,\dots,k}$ subordinada a él. Entonces, aplicando repetidas veces el caso anterior,

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial M} \psi_i \omega = \sum_{i=1}^k \int_M d(\psi_i \omega) = \sum_{i=1}^k \int_M (d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega). \quad (4.78)$$

Como estamos trabajando con una suma finita, podemos intercambiarla con la integral para concluir que

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \sum_{i=1}^k (d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega) = \int_M \underbrace{d\left(\sum_{i=1}^k \psi_i\right)}_{d(1)=0} \wedge \omega + \int_M \left(\sum_{i=1}^k \psi_i\right) d\omega = \int_M d\omega. \blacksquare \quad (4.79)$$

Conclusiones

En este trabajo hemos dado una introducción a la geometría diferencial en variedades y hemos demostrado los resultados básicos del cálculo en variedades diferenciables. La mayoría del contenido visto no se da en el grado de Matemáticas, pero las demostraciones que hemos dado utilizan numerosos teoremas y técnicas aprendidas en las asignaturas de Análisis Matemático, Topología y Álgebra Lineal.

Como el objetivo final del trabajo era la demostración del teorema de Stokes, a algunas partes de la teoría, como la correspondiente a las subvariedades, les faltan muchos detalles y resultados que se pueden encontrar en la bibliografía.

Como posible expansión de este trabajo, se pueden introducir los conceptos de métrica y de variedad riemanniana y ver cómo lo visto en el capítulo 5 se aplica en este nuevo tipo de variedades, dando lugar a la teoría de Hodge.

También se puede profundizar en las pinceladas vistas de grupos y álgebras de Lie o la teoría de fibrados vectoriales, además de ver con detalle sus aplicaciones en Física Teórica o en otras áreas de las Matemáticas.

Bibliografía

- [1] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York (2013).
- [2] J. Munkres, *Topology*, Featured Titles for Topology, Prentice Hall, Incorporated (2000).
- [3] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications (2013).
- [4] L. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Universitext, Springer New York (2010).
- [5] A. Viña Escalar, *Geometría diferencial*, Universidad de Oviedo, Servicio de Publicaciones (2000).
- [6] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, CRC Press (2018).
- [7] M. Spivak, *Calculus On Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus*, Avalon Publishing (1971).
- [8] D. Bleeker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications (2013).