

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

TRABAJO FIN DE GRADO DE FÍSICA

Introducción a la teoría de cuerdas

Autor:
Pablo MENÉNDEZ

Tutora:
Yolanda LOZANO

7 de julio de 2022



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Índice general

Resumen	3
1. Introducción	5
1.1. Relatividad Especial	5
1.1.1. Aspectos básicos	5
1.1.2. Coordenadas del cono de luz	8
1.1.3. Mecánica relativista	10
1.2. Mecánica cuántica	13
1.2.1. Cuantización de un sistema clásico	13
1.2.2. Oscilador armónico cuántico	15
2. Cuerdas relativistas	17
2.1. Parametrización general	17
2.1.1. Superficies espaciales	18
2.1.2. Superficies espacio-temporales	20
2.2. Gauges temporales y parametrización espacial	29
2.2.1. Gauge estático	29
2.2.2. Gauge general	38
2.2.3. Gauge del cono de luz	48
3. Cuerdas cuánticas relativistas	55
3.1. Partícula puntual cuántica relativista	55
3.2. Cuerdas abiertas con extremos libres	61
3.2.1. Cuantización de la cuerda relativista abierta con extremos libres	61
3.2.2. Relaciones de conmutación y operadores creación y aniquilación	65
3.2.3. Operadores de Virasoro	72
3.2.4. Invariancia Lorentz	75
3.2.5. Espacio de estados	79
3.3. Cuerdas cerradas	82

ÍNDICE GENERAL

4. Cuerdas abiertas en D-branas	89
4.1. Cuerdas abiertas en Dp -branas	90
4.2. Cuerdas abiertas entre Dp -branas paralelas	94
4.3. Cuerdas abiertas entre Dp - y Dq -branas paralelas	96
5. Conclusiones	98
Bibliografía	100

Resumen

Uno de los grandes retos de la Física actual es conseguir una teoría del todo, una teoría unificada capaz de explicar todos los fenómenos de la naturaleza, desde los agujeros negros hasta las reacciones dentro de un núcleo atómico. El primer gran paso fue dado en el siglo XIX, cuando Maxwell y otros científicos consiguieron unificar la electricidad y el magnetismo, dando lugar al electromagnetismo. Un siglo después, a finales de los años sesenta, se produjo una segunda unificación: la relación entre el electromagnetismo y la interacción débil se hizo evidente, dando lugar a la teoría electrodébil. Para poder explicar con precisión los fenómenos microscópicos es necesario la mecánica cuántica. Tanto la teoría electrodébil como la fuerza fuerte han sido correctamente cuantizadas, dando lugar respectivamente a la teoría cuántica electrodébil y a la cromodinámica cuántica, que conjuntamente forman el Modelo Estándar de la física de partículas. Sin embargo, el Modelo Estándar no recoge una de las cuatro fuerzas fundamentales: la gravedad. Aunque es satisfactoriamente explicada de forma clásica por la relatividad general, la cuantización de la fuerza gravitatoria no ha sido posible hasta el momento. No obstante, una teoría cuántica de la gravedad es necesaria para explicar el universo en sus tiempos más prematuros. Sin gravedad cuántica no hay unificación, y sin unificación no hay teoría del todo.

Aquí es donde entra en juego la teoría de cuerdas, una teoría en continuo desarrollo que desde hace décadas se ha establecido como la principal candidata para acabar siendo nuestra teoría del todo. En este trabajo se estudiará la teoría de cuerdas en su forma más sencilla: la teoría de cuerdas bosónica. Aunque su incapacidad para explicar los fermiones hace que no sea una teoría realista, incluye muchos de los conceptos necesarios para entender la teoría de cuerdas más avanzada. Además, como veremos, se trata de una teoría cuántica en la que la gravedad surge por sí sola, lo que hace que sea de gran interés.

El trabajo se dividirá en cuatro capítulos. Comenzaremos introduciendo los conceptos básicos de relatividad especial y mecánica cuántica necesarios para comprender el resto del contenido. A continuación, nos adentraremos en las cuerdas relativistas, tanto abiertas como cerradas, estudiando sus ecuaciones del movimiento, condiciones de contorno, cantidades conservadas... Seguidamente, cuantizaremos la teoría, obte-

ÍNDICE GENERAL

niendo los estados correspondientes a las vibraciones de las cuerdas y discutiendo las partículas a las que están asociadas. Finalizaremos estudiando posibles configuraciones alternativas de las cuerdas abiertas.

Todo el trabajo está basado en el libro *A First Course in String Theory*, escrito por el profesor e investigador del MIT Barton Zwiebach. Puede verse como una revisión bibliográfica en la que yo, Pablo Menéndez Trillo, reestructuro y reescribo el contenido del libro haciendo hincapié en las partes que me han parecido más importantes para comprender esta introducción a la teoría de cuerdas. Este trabajo puede resultar útil e interesante para cualquier otro estudiante con los conocimientos adquiridos en el Grado de Física de la Universidad de Oviedo.

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo fijaremos la notación e introduciremos los conceptos básicos de relatividad especial y mecánica cuántica necesarios para seguir este trabajo. Comenzaremos resumiendo los aspectos más básicos de relatividad especial y estudiando las transformaciones infinitesimales de Lorentz. Seguidamente, introduciremos el sistema de coordenadas del cono de luz, muy utilizado en el desarrollo de la teoría de cuerdas. A continuación haremos una revisión de la mecánica relativista, obteniendo la conocida relación entre masa, energía y momento. Con respecto a la mecánica cuántica, hablaremos sobre el proceso de cuantización de un sistema clásico e introduciremos las dos interpretaciones de la evolución de un sistema cuántico: la representación de Schrödinger y la representación de Heisenberg. Finalizaremos este capítulo de introducción haciendo una revisión del oscilador armónico cuántico, cuyas propiedades serán útiles en el entendimiento de la teoría cuántica de cuerdas.

1.1. Relatividad Especial

Como ya hemos comentado, comenzamos presentando los aspectos básicos de la relatividad especial y fijando la notación que utilizaremos en el resto del trabajo.

1.1.1. Aspectos básicos

La Teoría de la Relatividad Especial, introducida por primera vez en 1905 por Albert Einstein, es una teoría basada en el hecho de que las leyes de la Física son las mismas en todos los sistemas inerciales. Dados dos sistemas de referencia inerciales K y K' definidos respectivamente por los 4-vectores:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct', x', y', z'), \quad (1.1)$$

1.1. RELATIVIDAD ESPECIAL

donde c denota la velocidad de la luz, una transformación de Lorentz es una ecuación lineal:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.2)$$

que relaciona ambos sistemas dejando invariante la Física observada por cada uno de ellos. En la anterior ecuación (y en todo el trabajo) hemos utilizado el convenio de Einstein, por el cual índices repetidos representan suma. Si el sistema K' se mueve a una velocidad V con respecto a K , algunas consecuencias de la Relatividad Especial son:

1. **La velocidad de la luz c es la velocidad máxima entre K' y K : $V < c$.**

2. **Relatividad de la simultaneidad:** dos sucesos simultáneos en el sistema K no tienen por qué serlo en el sistema K' :

$$t_A = t_B \not\Rightarrow t'_A = t'_B. \quad (1.3)$$

3. **Contracción de las distancias:** si desde el sistema K' se mide una distancia $\Delta x'$, entonces desde el sistema K se mide una distancia:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \leq \Delta x' \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \geq 1. \quad (1.4)$$

4. **Dilatación del tiempo:** si desde el sistema K' se mide un intervalo temporal $\Delta t'$, entonces desde el sistema K se mide un intervalo temporal:

$$\Delta t = \Delta t' \gamma \geq \Delta t' \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \geq 1. \quad (1.5)$$

5. **La velocidad de la luz c es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.**

A pesar de que los intervalos espaciales Δx y temporales Δt dependen del sistema de referencia, existe una cantidad, conocida como **intervalo de sucesos** Δs^2 y definida como:

$$-\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2, \quad (1.6)$$

que se mantiene invariante bajo transformaciones de Lorentz, es decir:

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2. \quad (1.7)$$

Las transformaciones de Lorentz se pueden entender entonces como aquellas transformaciones lineales $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ entre dos sistemas de referencia inerciales que dejan

1.1. RELATIVIDAD ESPECIAL

invariante el intervalo de sucesos Δs^2 . Una implicación de la invariancia de Δs^2 es que la matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ que define la transformación lineal ha de satisfacer:

$$\det\Lambda = \pm 1. \quad (1.8)$$

El principio de la Relatividad Especial se puede reformular como:

Las leyes de la Física son invariantes bajo transformaciones que mantienen constante el intervalo de sucesos Δs^2 .

Dependiendo del valor de Δs^2 , los intervalos de sucesos se clasifican en:

1. **Intervalos temporales:** $\Delta s^2 > 0$. Se puede viajar de un suceso a otro a una velocidad inferior a la velocidad de la luz. En este caso se puede tomar la raíz y definir: $\Delta s = \sqrt{\Delta s^2}$.
2. **Intervalos de género luz:** $\Delta s^2 = 0$. Ambos sucesos se pueden conectar mediante un rayo de luz.
3. **Intervalos espaciales:** $\Delta s^2 < 0$. Para viajar de un suceso a otro es necesaria una velocidad mayor a la velocidad de la luz.

Si los sucesos en cuestión están separados por una distancia infinitesimal entonces el intervalo infinitesimal correspondiente es:

$$-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (1.9)$$

o, de forma más compacta:

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.10)$$

donde hemos definido la **métrica de Minkowski**:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

A partir de esta métrica podemos ‘bajar’ los índices y definir:

$$dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu = (-dx^0, dx^1, dx^2, dx^3), \quad (1.12)$$

de manera que (1.10) se reescribe como:

$$-ds^2 = dx_\mu dx^\mu. \quad (1.13)$$

1.1. RELATIVIDAD ESPECIAL

Además, definimos la matriz inversa a $\eta_{\mu\nu}$ como $\eta^{\mu\nu}$. Observando (1.11) se tiene que $\eta^{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$, y la relación de inversión se escribe: $\eta^{\nu\rho}\eta_{\rho\mu} = \delta_{\mu}^{\nu}$. La matriz inversa $\eta_{\mu\nu}$ nos permite ‘subir’ los índices:

$$dx^{\mu} = \eta^{\mu\nu} dx_{\nu}. \quad (1.14)$$

Las expresiones (1.12) y (1.14) se mantienen para cualquier otro 4-vector b^{μ} :

$$b^{\mu} \longrightarrow b_{\mu} = \eta_{\mu\nu} b^{\nu} = (-b^0, b^1, b^2, b^3) \quad \text{y} \quad b^{\mu} = \eta^{\mu\nu} b_{\nu}. \quad (1.15)$$

Dados dos 4-vectores a^{μ} y b^{μ} , se define su producto escalar como:

$$a \cdot b = a^{\mu} b_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \quad (1.16)$$

De acuerdo con esta definición, (1.13) implica que $-ds^2 = dx \cdot dx$.

Consideremos ahora una transformación de Lorentz infinitesimal, es decir, una transformación de la forma:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad \text{con} \quad \delta x^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu} x_{\nu}, \quad (1.17)$$

donde $\epsilon^{\mu\nu}$ es una matriz de constantes infinitesimales. Por ser una transformación de Lorentz sabemos que ha de dejar invariante el intervalo de sucesos, en este caso infinitesimal, $-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$. Es decir:

$$\delta(\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}) = 0 \Rightarrow 2\eta_{\mu\nu}(\delta x^{\mu})x^{\nu} = 2\eta_{\mu\nu}(\epsilon^{\mu\rho} x_{\rho})x^{\nu} = 2\epsilon^{\mu\rho} x_{\rho} x_{\mu} = 0. \quad (1.18)$$

Si descompusiéramos la matriz $\epsilon^{\mu\nu}$ en su parte simétrica y antisimétrica, es sencillo comprobar que la parte antisimétrica no contribuiría a la expresión $2\epsilon^{\mu\rho} x_{\rho} x_{\mu}$, luego (1.18) implica que la parte simétrica de $\epsilon^{\mu\nu}$ es nula y por tanto $\epsilon^{\mu\nu}$ es una matriz antisimétrica. En conclusión, las transformaciones de Lorentz infinitesimales son de la forma:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu\nu} x_{\nu} \quad \text{con} \quad \epsilon^{\mu\nu} \text{ matriz antisimétrica.} \quad (1.19)$$

1.1.2. Coordenadas del cono de luz

Existe un sistema de coordenadas a priori un poco extraño que nos resultará realmente útil en el estudio de la teoría de cuerdas. Se definen las **coordenadas del cono de luz** como las transformaciones:

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^1) \quad \text{y} \quad x^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - x^1). \quad (1.20)$$

Así, en 4 dimensiones, el sistema de coordenadas completo viene dado por:

$$(x^+, x^-, x^2, x^3). \quad (1.21)$$

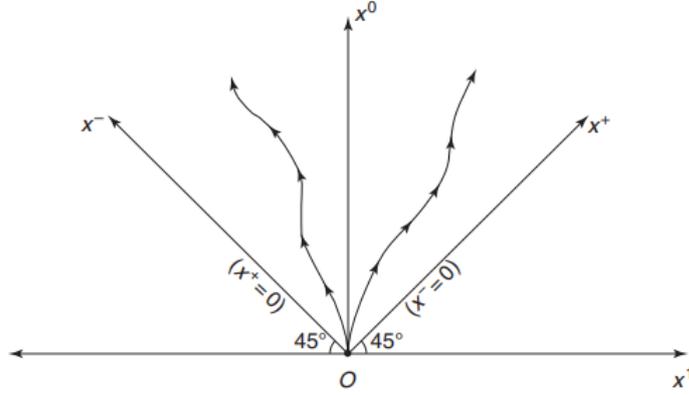


Figura 1.1: Coordenadas del cono con dos ejemplos de posibles movimientos físicos.

Las coordenadas x^2 y x^3 , llamadas **coordenadas transversales**, no se ven afectadas. x^+ y x^- son llamadas coordenadas del cono de luz porque sus correspondientes ejes de coordenadas son las trayectorias de haces de luz viajando a lo largo del eje x^1 . Un haz de luz viajando en la dirección positiva del eje x^1 satisface $x^- = 0$, correspondiéndose por definición con el eje x^+ . Análogamente, un haz de luz viajando en la dirección negativa del eje x^1 satisface $x^+ = 0$, correspondiéndose por definición con el eje x^- . Esto puede verse en la Figura 1.1, donde cualquier movimiento físico ha de mantenerse dentro del cono y nunca presentar una pendiente superior a $\pm 45^\circ$ (ya que en ese caso su velocidad superaría la velocidad de la luz).

Tanto x^+ como x^- tienen el mismo derecho a ser interpretadas como coordenadas temporales. Por convenio, tomamos x^+ como el tiempo del cono de luz. El tiempo usual al que estamos acostumbrados se caracteriza por ir siempre hacia delante para cualquier movimiento físico. No obstante, el tiempo del cono de luz x^+ presenta una propiedad particular: para rayos de luz viajando en la dirección negativa del eje x^1 el tiempo x^+ permanece constante, $x^+ = 0$.

Tomando diferenciales en (1.20) es sencillo probar que el intervalo infinitesimal (1.9) se puede expresar como:

$$-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (1.22)$$

o, de nuevo de forma más compacta:

$$-ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.23)$$

1.1. RELATIVIDAD ESPECIAL

donde hemos definido la **métrica del cono de luz**:

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

Vemos como esta métrica separa los subespacios de las coordenadas del cono de luz y de las coordenadas transversales. Esta es la razón por la que este sistema de coordenadas nos será útil en el futuro.

Para cualquier 4-vector b^μ podemos definir sus componentes del cono de luz de forma análoga a como hicimos en (1.20):

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^0 + b^1) \quad \text{y} \quad b^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^0 - b^1). \quad (1.25)$$

Utilizando esta definición es sencillo comprobar que para dos 4-vectores a^μ y b^μ se cumple:

$$-a^-b^+ - a^+b^- = -a^0b^0 + a^1b^1, \quad (1.26)$$

luego el producto escalar (1.16) se puede reescribir como:

$$a \cdot b = -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + a^3b^3 = \hat{\eta}_{\mu\nu}a^\mu b^\nu. \quad (1.27)$$

Considerando la expresión $a \cdot b = a^\mu b_\mu$ tenemos:

$$a \cdot b = a^+b_+ + a^-b_- + a^2b_2 + a^3b_3, \quad (1.28)$$

y comparando con (1.27) llegamos a:

$$b_+ = -b^- \quad \text{y} \quad b_- = -b^+, \quad (1.29)$$

luego en este caso $b^\mu \rightarrow b_\mu = (-b^-, -b^+, b^2, b^3)$ y se puede seguir utilizando la métrica para subir y bajar índices:

$$b_\mu = \hat{\eta}_{\mu\nu}b^\nu \quad \text{y} \quad b^\mu = \hat{\eta}^{\mu\nu}b_\nu. \quad (1.30)$$

1.1.3. Mecánica relativista

Dejando a un lado las coordenadas del cono de luz, consideremos una partícula libre moviéndose en una trayectoria temporal. Se define su tiempo propio τ como el tiempo medido por un observador que se mueva con la partícula. Para dicho observador, la partícula está quieta, es decir, $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, y por tanto el intervalo infinitesimal (1.9) es:

$$ds^2 = (dx^0)^2 = cd\tau^2. \quad (1.31)$$

1.1. RELATIVIDAD ESPECIAL

Utilizando la invariancia del intervalo ds^2 tenemos que para cualquier otro observador:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.32)$$

Dado que ds^2 es invariante bajo transformaciones de Lorentz, $d\tau^2$ también lo será. **El tiempo propio es una cantidad característica de cada trayectoria, es invariante Lorentz.** Además, es posible demostrar que dados dos puntos A y B en el espacio-tiempo, de todas las trayectorias entre A y B el tiempo propio es máximo para aquella que se corresponde con una línea recta en el espacio tiempo.

Para estudiar la trayectoria de la partícula aplicamos el **principio de mínima acción**: la trayectoria de la partícula es aquella para la que la acción es un extremo, $\delta S = 0$. Intentemos determinar la acción de la partícula libre, cuya trayectoria en el espacio tiempo es una línea recta. Por un lado, dado que las ecuaciones del movimiento se obtienen a partir de la acción y queremos que sean invariantes Lorentz, la acción también ha de ser invariante Lorentz. Dado que el tiempo propio no solo es invariante Lorentz sino que también alcanza un extremo para la trayectoria de la partícula que estamos considerando (por ser una línea recta), postulamos que la acción es proporcional al tiempo propio:

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (1.33)$$

donde la constante de proporcionalidad se obtiene de imponer que en el límite no relativista se recupere la acción no relativista: $S_{NR} = \int \frac{1}{2} m \vec{v}^2 dt$, y el signo menos lo introducimos convenientemente para que posteriormente la energía de la partícula sea positiva. El Lagrangiano de la partícula se obtiene identificando:

$$S = \int L dt \Rightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-mc^2}{\gamma}. \quad (1.34)$$

Utilizando mecánica lagrangiana básica se obtiene que el momento de la partícula y la ecuación del movimiento son, respectivamente:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \dot{\vec{x}} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad (1.35)$$

es decir, el momento es constante. La energía se obtiene como:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2. \quad (1.36)$$

Combinando (1.35) y (1.36) se llega a la conocida relación:

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p} \cdot \vec{p} c^2. \quad (1.37)$$

1.1. RELATIVIDAD ESPECIAL

Definiendo el 4-momento $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$, se cumple:

$$p^2 = p \cdot p = p_\mu p^\mu = -m^2 c^2. \quad (1.38)$$

Volvamos ahora a las coordenadas del cono de luz. De acuerdo con (1.25) y (1.29), las componentes del cono de luz del 4-momento son:

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 + p^1) = -p_- \quad \text{y} \quad p^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 - p^1) = -p_+. \quad (1.39)$$

Podemos preguntarnos cuál de las dos componentes se corresponde con la energía del cono de luz. Que el tiempo del cono de luz sea x^+ nos podría hacer concluir que la energía del cono de luz es p^+ , y nos estaríamos equivocando, ya que la energía del cono de luz resulta ser p^- . Para justificarlo, adentrémonos por un momento en física cuántica y consideremos la función de onda de una partícula puntual con energía E y momento \vec{p} :

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_0 x^0 + \vec{p} \cdot \vec{x})\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right). \quad (1.40)$$

Esta función de onda satisface la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^0} = \frac{E}{c} \psi. \quad (1.41)$$

Análogamente, la evolución temporal en las coordenadas del cono de luz y la energía del cono de luz E_{cl} han de relacionarse por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = \frac{E_{cl}}{c} \psi \quad (1.42)$$

Escribiendo (1.40) en términos de las coordenadas del cono de luz:

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_+ x^+ + p_- x^- + p_2 x^2 + p_3 x^3)\right) \quad (1.43)$$

se obtiene que:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = -p_+ \psi. \quad (1.44)$$

Comparando con (1.42) concluimos finalmente que $-p_+ = \frac{E_{cl}}{c}$ o, equivalentemente, utilizando (1.39):

$$p^- = \frac{E_{cl}}{c}. \quad (1.45)$$

Finalizamos utilizando (1.27) para reescribir (1.38) en términos de las coordenadas del cono de luz:

$$p^2 = p \cdot p = -p^- p^+ - p^+ p^- + p^2 p^2 + p^3 p^3 = -2p^+ p^- + p^2 p^2 + p^3 p^3 = -m^2 c^2. \quad (1.46)$$

1.2. MECÁNICA CUÁNTICA

Cabe mencionar que a lo largo del trabajo no trabajaremos con 4 dimensiones espacio-temporales, sino con un valor genérico $D = d + 1$, donde d es el número de dimensiones espaciales. Como veremos, la consistencia de la teoría de cuerdas acabará determinando la dimensionalidad de nuestro espacio tiempo. Las expresiones relativistas en un espacio-tiempo de $d + 1$ dimensiones son análogas a las que hemos visto para 4 dimensiones: la única modificación es que en el caso genérico el índice espacial recorre $i = 1, 2, \dots, d$. En el sistema de coordenadas del cono de luz, a las coordenadas transversales simplemente nos referiremos con el índice I , de manera que el sistema de coordenadas completo se representa por:

$$(x^+, x^-, x^I) = (x^+, x^-, x^2, \dots, x^d). \quad (1.47)$$

1.2. Mecánica cuántica

A lo largo de este trabajo veremos que para que la teoría de cuerdas que vamos a desarrollar sea compatible con la realidad no basta con que sea una teoría relativista, sino que también ha de ser una teoría cuántica. A continuación se explica cuál será el proceso que seguiremos para construir una teoría cuántica y se presentan las dos interpretaciones usuales de la evolución temporal en mecánica cuántica.

1.2.1. Cuantización de un sistema clásico

El procedimiento que utilizaremos para construir una teoría cuántica de cuerdas consiste en desarrollar una teoría clásica para después aplicarle una primera cuantización. La primera cuantización consiste en sustituir las variables canónicas clásicas posición x y momento p por los operadores hermíticos (con autovalores reales) \mathbf{x} y \mathbf{p} respectivamente, satisfaciendo las relaciones de conmutación canónicas:

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = 0, \quad [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = 0, \quad [\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (1.48)$$

La última relación de conmutación es equivalente al principio de incertidumbre de Heisenberg: que el conmutador de dos operadores sea diferente de 0 es equivalente a que los observables asociados no puedan ser medidos simultáneamente con una precisión arbitraria.

A la hora de estudiar la evolución temporal de un sistema cuántico existen dos posibles representaciones: la representación de Schrödinger y la representación de Heisenberg. Por un lado, en la **representación de Schrödinger** los operadores no poseen dependencia temporal implícita (aunque sí pueden tenerla explícita), mientras que los estados están cambiando constantemente de acuerdo con la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{d}{dt}|\psi, t\rangle = \mathbf{H}|\psi, t\rangle, \quad (1.49)$$

1.2. MECÁNICA CUÁNTICA

donde \mathbf{H} es el Hamiltoniano del sistema. Por otro lado, en la **representación de Heisenberg** son los operadores los que cambian en el tiempo, mientras que los estados se encuentran fijos. Los operadores de Heisenberg pueden poseer dependencia temporal tanto implícita como explícita. A lo largo del trabajo utilizaremos ambas representaciones según nos convenga, por lo que nos interesa conocer como se pasa de un tipo de operador a otro. Dado un operador de Schrödinger \mathbf{A} , se define su operador de Heisenberg asociado como:

$$\mathbf{A}(t) = e^{i\mathbf{H}t} \mathbf{A} e^{-i\mathbf{H}t}. \quad (1.50)$$

Esta definición está motivada por el interés de que los operadores de Heisenberg satisfagan las mismas relaciones de conmutación que los operadores de Schrödinger a los que están asociados. Efectivamente, es sencillo comprobar que la definición (1.50) implica:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{C} \Rightarrow [\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)] = \mathbf{C}(t). \quad (1.51)$$

A continuación se muestran dos ejemplos. En el primero se parte de un operador de Schrödinger independiente del tiempo y a partir de él se obtiene el operador de Heisenberg correspondiente con dependencia temporal implícita. En el segundo se parte de un operador de Schrödinger dependiente explícitamente del tiempo y a partir de él se obtiene el operador de Heisenberg dependiente tanto implícita como explícitamente del tiempo. Tanto $\mathbf{A}(t)$ como $\mathbf{B}(t)$ vienen dados por la definición (1.50)

$$\text{Op. Schrödinger: } \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \text{Op. Heisenberg: } \mathbf{A}(t). \quad (1.52)$$

$$\text{Op. Schrödinger: } \mathbf{A} + t\mathbf{B} \quad \longrightarrow \quad \text{Op. Heisenberg: } \mathbf{A}(t) + t\mathbf{B}(t).$$

Dado un operador de Heisenberg $\mathbf{A}(t)$ proveniente de un operador de Schrödinger \mathbf{A} , su evolución temporal viene dada por:

$$i \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + [\mathbf{A}(t), \mathbf{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t); t)], \quad (1.53)$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t); t)$ es el Hamiltoniano de Heisenberg asociado al Hamiltoniano de Schrödinger $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; t)$, que puede depender explícitamente del tiempo o no. Cuando el operador de Schrödinger no tiene dependencia explícita temporal, entonces $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ y la evolución temporal se reduce a:

$$i \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = [\mathbf{A}(t), \mathbf{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t); t)]. \quad (1.54)$$

De (1.54) se deduce que cuando el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo entonces (dado que conmuta consigo mismo) es una constante del movimiento.

1.2. MECÁNICA CUÁNTICA

Cuando el Hamiltoniano no depende del tiempo entonces los estados estáticos de Heisenberg y los estados dinámicos de Schrödinger se relacionan por:

$$|\psi, t\rangle = e^{-i\mathbf{H}t}|\psi\rangle. \quad (1.55)$$

Los estados ‘físicos’ que describen la realidad y por tanto nos interesan en última instancia son los estados de Schrödinger.

Con todo esto, nuestro procedimiento para obtener los sistemas cuánticos es el siguiente. Partiremos de un sistema clásico con sus correspondientes ecuaciones del movimiento, y lo cuantizaremos utilizando el mecanismo de primera cuantización. Una vez dispongamos de los operadores de Schrödinger y de sus relaciones de conmutación, los convertiremos en operadores de Heisenberg que, de acuerdo (1.51), satisfarán las mismas relaciones. A continuación, postularemos el Hamiltoniano cuántico del sistema y estudiaremos la evolución temporal de los operadores de Heisenberg. La cuantización será coherente si se recuperan las ecuaciones del movimiento del sistema clásico. Finalmente, construiremos el espacio de estados estáticos y, mediante la ecuación (1.55) (ya que todos nuestros Hamiltonianos serán independientes del tiempo), construiremos los estados físicos.

Finalizamos este capítulo de introducción recordando algunos aspectos básicos del oscilador armónico simple cuántico que nos serán útiles en la cuantización de la teoría de cuerdas.

1.2.2. Oscilador armónico cuántico

Consideramos un oscilador armónico clásico con energía cinética $T = \frac{p^2}{2m}$ y con energía potencial $V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, donde ω es la frecuencia de oscilación. Es sencillo comprobar aplicando mecánica lagrangiana que el Hamiltoniano clásico del sistema coincide con su energía:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (1.56)$$

Cuantizamos el sistema definiendo los operadores hermíticos \mathbf{x} y \mathbf{p} satisfaciendo $[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar$. A partir de estos operadores definimos los operadores adimensionales:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\mathbf{x}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad [\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i. \quad (1.57)$$

El Hamiltoniano del sistema cuántico puede escribirse en términos de estos operadores:

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{\mathbf{p}}^2 + \hat{\mathbf{x}}^2). \quad (1.58)$$

1.2. MECÁNICA CUÁNTICA

Definimos ahora los operadores:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1. \quad (1.59)$$

Es sencillo comprobar que el Hamiltoniano se puede reescribir ahora como:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.60)$$

Definimos también el operador:

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{N}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}^\dagger, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{a}] = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{N} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.61)$$

De esta forma, los autovalores del Hamiltoniano vienen determinados por los autovalores de \mathbf{N} . Escribiendo los autoestados de \mathbf{N} de forma genérica como:

$$|\nu\rangle \longrightarrow \mathbf{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle, \quad (1.62)$$

es posible demostrar que el espectro de autovalores de \mathbf{N} son los números naturales (incluyendo el 0), por lo que escribimos ahora dichos autoestados como $|n\rangle$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. En consecuencia, el operador \mathbf{N} es llamado **operador número**. De acuerdo con la última igualdad de (1.61), el espectro de autovalores de la energía es:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.63)$$

La energía está cuantizada en términos de $\hbar\omega$, y el estado fundamental $|0\rangle$, también llamado estado vacío, tiene energía $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. También es posible demostrar que los operadores \mathbf{a} y \mathbf{a}^\dagger satisfacen:

$$\mathbf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \mathbf{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.64)$$

Es decir, los operadores \mathbf{a} y \mathbf{a}^\dagger disminuyen y aumentan el nivel n , luego son llamados **operadores aniquilación y creación** respectivamente. Estos tres operadores aparecerán recursivamente en la cuantización de la teoría de cuerdas.

Capítulo 2

Cuerdas relativistas

Las siguientes páginas estarán dedicadas a estudiar las cuerdas relativistas desde una perspectiva clásica, sin adentrarnos en la mecánica cuántica. Estudiar el movimiento de una cuerda es equivalente a estudiar la superficie que define en el espacio-tiempo. Así, este capítulo estará estructurado entorno a la parametrización utilizada para describir dicha superficie espacio-temporal, a la que nos referiremos como *hoja de universo*. Comenzaremos considerando el caso más general, en la que ninguna condición es impuesta sobre los parámetros. Deduiremos la acción de la cuerda relativista y obtendremos las ecuaciones del movimiento, las condiciones de contorno y las cantidades conservadas asociadas a la cuerda. Una de las propiedades que satisfará la acción es que será invariante bajo reparametrización. Esto nos permitirá imponer una clase de gauges temporales a partir de los cuales podremos deducir propiedades de la cuerda y resolver explícitamente las ecuaciones del movimiento.

2.1. Parametrización general

Consideramos una cuerda relativista moviéndose en un espacio d -dimensional. La superficie bidimensional descrita por la cuerda en el espacio-tiempo es conocida como **hoja de universo**. No debemos confundir dicha superficie espacio-temporal con la superficie espacial resultante de unir las posiciones de la cuerda a lo largo del tiempo, a la cual nos referiremos simplemente como **superficie de la cuerda**. Comenzaremos estudiando este tipo de superficies, más familiares para nosotros al no estar involucrada la coordenada temporal, para después adentrarnos en la hoja de universo, que es lo que realmente nos interesa.

2.1.1. Superficies espaciales

Dada una superficie \mathcal{S} , para poder estudiar sus propiedades es necesario parametrizarla, y al tratarse de un objeto bidimensional, se requieren dos parámetros: ξ^1 y ξ^2 . El espacio paramétrico se define a partir de los rangos en los que se mueven ξ^1 y ξ^2 , y la superficie es la imagen del espacio paramétrico bajo la función:

$$\vec{X}(\xi^1, \xi^2) = (X^1(\xi^1, \xi^2), \dots, X^n(\xi^1, \xi^2)). \quad (2.1)$$

donde hemos denotado a la función vectorial \vec{X} y a cada función X^i en mayúsculas para evitar confundirlas con las propias coordenadas espaciales \vec{x} y x^i . Trazando las líneas en las que ξ^1 se mantiene constante y haciendo lo mismo con ξ^2 se obtiene un mallado que cubre la superficie, de manera que ξ^1 y ξ^2 pueden verse como coordenadas de la superficie, al menos localmente.

Nuestro primer paso es calcular el área de un pequeño elemento de la superficie espacial \mathcal{S} . En primer lugar calculamos el área dA de la imagen de un rectángulo infinitesimal del espacio paramétrico de lados $d\xi^1$ y $d\xi^2$, obteniendo ([1], Section 6.1):

$$dA = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Así, el área total de un elemento de la superficie viene dado por:

$$A = dA = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2}\right)^2}, \quad (2.3)$$

donde la integración se realiza entre los puntos del espacio paramétrico cuyas imágenes delimitan dicho elemento.

Dado un elemento cualquiera de la superficie, es obvio que su área no debe depender de la parametrización utilizada para calcularla. En otras palabras, el área ha de ser **invariante bajo reparametrización**. Es posible demostrar que, efectivamente, la ecuación (2.3) es invariante bajo reparametrización, pero también es muy laborioso. Así, nos interesa reescribir dicha expresión de manera que la invariancia se vea de forma clara.

Sea $d\vec{X}$ un vector tangente a la superficie y sea ds su longitud, se cumple $ds^2 \equiv (ds)^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X}$. Escribiendo $d\vec{X}$ como $d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} d\xi^i$ se llega a:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} d\xi^i\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j} d\xi^j\right) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j. \quad (2.4)$$

Definiendo $g_{ij}(\xi) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j}$, (2.4) puede escribirse como:

$$ds^2 = g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j. \quad (2.5)$$

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

A $g_{ij}(\xi)$ se le denomina **métrica inducida en \mathcal{S}** , y explícitamente viene dada por:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Volviendo a (2.3), resulta que $g = \det g_{ij}$ es igual a la cantidad dentro de la raíz, luego podemos reescribir:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}. \quad (2.7)$$

Aunque la invariancia para nosotros todavía no es obvia, la anterior expresión del funcional de área se dice que es **manifiestamente invariante bajo reparametrización**. A continuación comprenderemos el porqué de esta denominación.

Sea $\tilde{\xi}^1(\xi^1, \xi^2)$, $\tilde{\xi}^2(\xi^1, \xi^2)$ una reparametrización de nuestra superficie. Por el teorema del cambio de variable sabemos que:

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \end{pmatrix} \right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = |M| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2, \quad (2.8)$$

$$d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \end{pmatrix} \right| d\xi^1 d\xi^2 = |\tilde{M}| d\xi^1 d\xi^2,$$

donde se han definido las matrices $M_{ij} = \partial \xi^i / \partial \tilde{\xi}^j$ y $\tilde{M}_{ij} = \partial \tilde{\xi}^i / \partial \xi^j$ y se ha denotado $M = \det M_{ij}$, $\tilde{M} = \det \tilde{M}_{ij}$. Combinando ambas expresiones de (2.8) se deduce la propiedad:

$$|M| |\tilde{M}| = 1. \quad (2.9)$$

Dado que la longitud de un vector no depende de la parametrización, de (2.5) se tiene que:

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q, \quad (2.10)$$

o, equivalentemente, aplicando la regla de la cadena y la definición de \tilde{M}_{ij} :

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} = \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj} = (\tilde{M}^T)_{ip} \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{qj}. \quad (2.11)$$

Aplicando determinantes se deduce:

$$g = \tilde{g} \tilde{M}^2 \Rightarrow \sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} |\tilde{M}|. \quad (2.12)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (2.8), (2.12) y (2.9) se obtiene:

$$\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int |M| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} |\tilde{M}| = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}, \quad (2.13)$$

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

quedando así probada la invariancia bajo reparametrización. Es decir, una vez sabido como se transforma la métrica, la invariancia se obtiene de forma casi inmediata, razón por la cual se dice que (2.7) es invariante de forma manifiesta.

2.1.2. Superficies espacio-temporales

Pasamos ahora al estudio de las superficies espacio-temporales, de las cuales nuestra hoja de universo es un caso particular. De nuevo, al tratarse de objetos bidimensionales, se requieren dos parámetros para describirlas, en este caso denotados por $\xi^1 = \tau$ y $\xi^2 = \sigma$. Asumiremos que $[\tau] = T$ y $[\sigma] = L$, anticipando una relación entre τ y el tiempo y σ y las posiciones en la cuerda. Así, definimos el espacio paramétrico de manera que τ abarca toda la recta real, mientras que σ está restringido a un intervalo finito: $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Utilizando la notación relativista y de forma análoga a la ecuación (2.1), la superficie es la imagen del espacio paramétrico bajo la función:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \left(X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma) \right). \quad (2.14)$$

Al igual que en el caso de las superficies espaciales, hemos denotado a las funciones en mayúsculas para no confundirlas con las coordenadas espacio-temporales. A dichas funciones X^μ las llamaremos **coordenadas de la cuerda**.

Dado que el desarrollo es similar al hecho anteriormente para superficies espaciales, es de suponer que el análogo relativista al diferencial de área dA dado por (2.2) sigue siendo válido en este caso. No obstante, es posible demostrar ([1], Section 6.3) que para superficies espacio-temporales definidas por el movimiento físico de una cuerda la expresión dentro de la raíz resulta ser negativa. Puesto que el área ha de ser un número real, intercambiamos los términos para obtener:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2}, \quad (2.15)$$

donde \cdot denota el producto relativista, lo que nos garantiza que el área sea invariante Lorentz. Denotando $\dot{X}^\mu = \partial X^\mu / \partial \tau$ y $X'^\mu = \partial X^\mu / \partial \sigma$ resulta:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.16)$$

Construcción de la acción

Es vital para el estudio del movimiento de una cuerda relativista que todos los observadores de Lorentz obtengan el mismo valor al calcular la acción. Como ya hemos comentado, la expresión para el área dada por (2.16) es invariante Lorentz, luego una acción que sea proporcional a (2.16) es una buena candidata para darnos las ecuaciones del movimiento. Este razonamiento es análogo al realizado en (1.33)

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

para expresar la acción de una partícula relativista en términos de su tiempo propio. En dicho caso, las ecuaciones del movimiento obtenidas fueron las correctas, por lo que esperamos que ocurra lo mismo ahora.

Dado que $[S] = ML^2/T$ y $[A] = L^2$, para conseguir unidades de acción debemos multiplicar el área por una cantidad con unidades de M/T , por ejemplo, fuerza partido de velocidad. La velocidad por excelencia que no puede faltar en unas ecuaciones del movimiento relativistas es la velocidad de la luz c . Por otro lado, existe una fuerza característica de la cuerda, su tensión T_0 , que tendría sentido que influyera en la determinación de su trayectoria. Así, concluimos que la cantidad T_0/c es una buena candidata para multiplicar a (2.16) y conseguir las unidades buscadas. Establecemos entonces que la acción de la cuerda relativista viene dada por:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (2.17)$$

donde τ_i y τ_f determinan el tiempo inicial y final entre los cuales quiere estudiarse el movimiento. Próximamente trataremos un simple ejemplo en el que se comprenderá el porqué del signo menos que hemos introducido y se comprobará que T_0 es la cantidad correcta con unidades de fuerza a considerar (cualquier cantidad con unidades de fuerza nos habría servido por el momento, pero veremos que T_0 es la correcta). La expresión (2.17) es conocida como **acción de Nambu-Goto** de la cuerda relativista.

Además de ser invariante Lorentz, es necesario que la acción sea invariante bajo reparametrización. Dado que la deducción del funcional de área (2.16) se ha basado en una analogía con el funcional (2.3), invariante bajo reparametrización, es de esperar que (2.16) también lo sea. A continuación deducimos la expresión manifiestamente invariante de (2.16), de forma similar a como hicimos con las superficies espaciales.

Utilizando el análogo relativista de (2.4) dado por (1.13), se tiene:

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (2.18)$$

Definiendo la **métrica inducida en la hoja de universo** como:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

obtenemos:

$$-ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (2.20)$$

Así, denotando $\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta}$, la expresión manifiestamente invariante bajo reparametrización de la acción de Nambu-Goto resulta ser:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}. \quad (2.21)$$

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

La similitud con (2.7) resulta evidente, y la demostración de la invariancia es exactamente la misma que la realizada en su caso. Dado que la acción de Nambu Goto es invariante bajo reparametrización, así lo serán las ecuaciones del movimiento que se deduzcan de ella. Esto nos da total libertad para escoger la parametrización que más nos convenga en cada caso, lo que será de vital importancia en el resto del capítulo.

Condiciones de contorno y ecuaciones del movimiento

Volviendo a (2.17), hacemos variar la acción para obtener las condiciones de contorno y las ecuaciones del movimiento. Nos limitaremos a estudiar variaciones en las que los estados inicial y final de la cuerda estén especificados, es decir, $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$. Considerando la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (2.22)$$

la variación resulta ser:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right). \quad (2.23)$$

Nos conviene introducir la notación $\mathcal{P}_\mu^\tau = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{X}^\mu$, $\mathcal{P}_\mu^\sigma = \partial \mathcal{L} / \partial X^{\mu'}$, explícitamente:

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.25)$$

Así, aplicando la regla de la cadena, (2.23) se puede reescribir como:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right). \quad (2.26)$$

Aplicamos ahora el principio de mínima acción. Por partes:

- La primera expresión contiene una derivada total en τ , luego estará formado por términos proporcionales a $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$ y $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$. Al estar considerando variaciones en los que el estado inicial y final de la cuerda están especificados, estos términos se anulan.
- La segunda expresión contiene una derivada total en σ . Evaluando en los límites de la integral espacial, para cada coordenada $\mu = 0, 1, \dots, d$, dentro de la integral temporal habrá una contribución de:

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma_1) \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_1) - \delta X^\mu(\tau, 0) \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0). \quad (2.27)$$

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

Es decir, obtenemos un total de $2(d+1)$ términos que han de anularse independientemente. Al estar involucradas las posiciones inicial $\sigma = 0$ y final $\sigma = \sigma_1$ de la cuerda, estas son las **condiciones de contorno** de la cuerda relativista. Denotemos por $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ a una de las dimensiones y a la coordenada de uno de los extremos respectivamente. Vemos como existen dos opciones: $\delta X^{\hat{\mu}}(\tau, \hat{\sigma}) = 0$ y $\mathcal{P}_{\hat{\mu}}^{\sigma}(\tau, \hat{\sigma}) = 0$. La primera consiste en fijar el valor $X^{\hat{\mu}}(\tau, \hat{\sigma})$, es decir, hacer que la coordenada $\hat{\mu}$ del extremo $\hat{\sigma}$ no cambie en el tiempo. Esta condición de contorno es la conocida **condición de contorno de tipo Dirichlet**:

$$\text{C.C. Dirichlet: } \boxed{\frac{\partial X^{\hat{\mu}}}{\partial \tau}(\tau, \hat{\sigma}) = 0, \quad \hat{\mu} \neq 0.} \quad (2.28)$$

La razón de excluir la coordenada temporal $\mu = 0$ de este tipo de condición de contorno es que, al estar asociando el parámetro τ con el tiempo, se requiere que el tiempo fluya con τ . No puede ocurrir que el tiempo permanezca constante cuando el parámetro temporal está siendo modificado:

$$\partial_{\tau} X^0(\tau, \sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_1]. \quad (2.29)$$

La segunda opción es conocida como **condición de extremo libre**:

$$\text{Extremo libre: } \boxed{\mathcal{P}_{\hat{\mu}}^{\sigma}(\tau, \hat{\sigma}) = 0.} \quad (2.30)$$

Se denomina de esta forma porque el extremo es libre de hacer lo que sea necesario para conseguir que se satisfaga (2.30). De (2.29) concluimos que la coordenada temporal ha de satisfacer esta condición de contorno en ambos extremos:

$$\mathcal{P}_0^{\sigma}(\tau, 0) = \mathcal{P}_0^{\sigma}(\tau, \sigma_1) = 0. \quad (2.31)$$

Para cada una de las coordenadas espaciales y para cada uno de los extremos cualquiera de los tipos de condiciones de contorno son válidos. Lógicamente, al no tener extremos, las cuerdas cerradas no han de satisfacer condiciones de contorno de ningún tipo.

- Finalmente, el tercer término de (2.26) ha de anularse para cualquier variación δX^{μ} . De aquí se concluyen las **ecuaciones del movimiento** de la cuerda relativista, válido tanto para cuerdas abiertas como para cuerdas cerradas:

$$\text{Ecuaciones del movimiento: } \boxed{\frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} = 0.} \quad (2.32)$$

Volviendo al estudio de las condiciones de contorno, a continuación se presenta el concepto de **D-branas**, importante en la discusión de la conservación del momento

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

de la cuerda. Dada una cuerda relativista abierta tal que uno de sus extremos satisface la condición de contorno de Dirichlet en alguna de sus dimensiones espaciales, esto quiere decir que dicho extremo debe vivir en un objeto sin poder salir de él. Dicho objeto, concretamente un hiperplano, se conoce como Dp -brana, donde D viene de Dirichlet y p denota las dimensiones del hiperplano.

Para comprenderlo mejor, consideremos el ejemplo de la Figura 2.1. En un espacio tridimensional, $d = 3$, supongamos que el extremo $\sigma = 0$ satisface la condición de Dirichlet $X^3(\tau, 0) = 0$ y condición de extremo libre en las coordenadas X^1 y X^2 . Entonces el extremo $\sigma = 0$ debe permanecer en el plano (x^1, x^2) , en el cual puede moverse libremente. Dicho plano es una $D2$ -brana. Supongamos además que el extremo $\sigma = \sigma_1$ satisface las condiciones de Dirichlet $X^3(\tau, \sigma_1) = x_1^3$ y $X^2(\tau, \sigma_1) = 0$, y condición de extremo libre en la coordenada X^1 . Entonces el extremo $\sigma = \sigma_1$ debe permanecer en el eje x^1 desplazado, en el cual puede moverse libremente. Dicha recta es una $D1$ -brana.

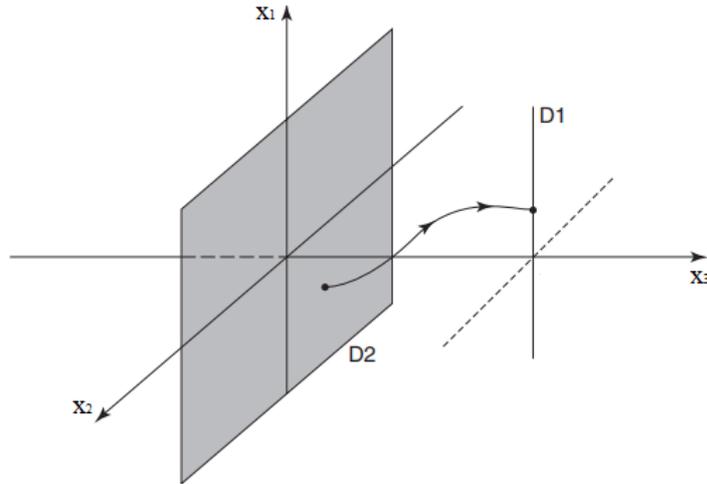


Figura 2.1: Cuerda abierta cuyos extremos $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_1$ están sujetos a una $D2$ -brana y a una $D1$ -brana respectivamente.

De forma general, en un espacio d -dimensional, si en el extremo $\hat{\sigma}$ se definen condiciones Dirichlet en n de sus coordenadas o, equivalentemente, condiciones de extremo libre en $p = d - n$ de sus coordenadas entonces dicho extremo se encuentra sujeto a una Dp -brana, en la cual puede moverse libremente. A una Dd -brana, espacio en el que se mueve una cuerda cuyos extremos son libres en todas sus coordenadas, la llamaremos **D -brana cubridora de espacio**.

Cantidades conservadas

Pasamos ahora al estudio de cantidades conservadas dentro de nuestra hoja de universo. En teoría clásica de campos se define una **corriente conservada** como un k -vector j^α satisfaciendo:

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0, \quad (2.33)$$

donde k denota la dimensión del lugar donde habita la corriente. Dicho lugar puede ser el espacio-tiempo usual en el que vivimos, un subespacio suyo, la hoja de universo de nuestra cuerda relativista... Cada corriente conservada da lugar a una **carga conservada**, dada por la integral en el espacio de la componente temporal:

$$Q = \int d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^k j^0, \quad (2.34)$$

y satisfaciendo:

$$\frac{dQ}{d\xi^0} = 0. \quad (2.35)$$

Centrándonos en nuestra hoja de universo, el hecho de que la densidad lagrangiana (2.22) solamente dependa de las derivadas de las coordenadas de la cuerda con respecto a los parámetros y no de las coordenadas en sí tiene dos consecuencias:

1. El Lagrangiano es invariante bajo traslación espacio-temporal. Aplicando teoría clásica de campos, es posible demostrar que esta invariancia da lugar a las siguientes corrientes conservadas:

$$j_\mu^\alpha = \mathcal{P}_\mu^\alpha : \quad (j_\mu^0, j_\mu^1) = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma). \quad (2.36)$$

En este caso, j_μ^α es un 2-vector, ya que la hoja de universo es un espacio bidimensional. Además, hemos escrito la corriente con un subíndice μ que recorre las $d+1$ dimensiones de nuestro espacio-tiempo. Esto quiere decir que para dimensión existe una corriente conservada: tenemos una familia de corrientes conservadas. La ecuación (2.33) se particulariza a:

$$\partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.37)$$

Es decir, recuperamos las ecuaciones del movimiento (2.32). Aplicando (2.34) obtenemos la carga conservada asociada a cada corriente:

$$Q_\mu = p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (2.38)$$

Estas cargas conservadas han aparecido debido a la invariancia de nuestro lagrangiano con respecto a traslaciones espacio-temporales, luego podemos identificarlas con el **momento espacio-temporal** de la cuerda relativista. Por esa razón las hemos

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

denotado por p_μ . De esto se deduce que \mathcal{P}_μ^τ es la σ -densidad de momento espacio-temporal en la dirección μ . Podemos comprobar explícitamente que se satisface la ecuación (2.35). Utilizando (2.37):

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} d\sigma = -\mathcal{P}_\mu^\sigma \Big|_0^{\sigma_1}. \quad (2.39)$$

Para cuerdas cerradas $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_1$ representan el mismo punto, luego la anterior expresión se hace 0. Para cuerdas abiertas con extremos libres en la dirección μ , también se anula debido a (2.30). Sin embargo, ¿qué ocurre cuando los extremos satisfacen condiciones de Dirichlet en alguna de sus direcciones? En ese caso el momento de la cuerda no tiene por qué conservarse en dichas direcciones, pero sí ha de hacerlo el momento conjunto de la cuerda y de la D -brana a la que esté sujeta.

Hemos visto que para cuerdas cerradas y cuerdas abiertas con extremos libres el momento p_μ se conserva con respecto al parámetro temporal τ :

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \quad \text{cuerdas cerradas y abiertas con extremos libres.} \quad (2.40)$$

Eligiendo la simple parametrización $\tau = t$ (recordemos que la invariancia bajo reparametrización nos permite elegirla a nuestro gusto), a la que más tarde nos referiremos como gauge estático, obtenemos la conservación del momento de la cuerda con respecto al tiempo:

$$\frac{dp_\mu}{dt} = 0 \quad \text{cuerdas cerradas y abiertas con extremos libres.} \quad (2.41)$$

En resumen, dada una cuerda relativista:

1. Si es cerrada, entonces el momento p_μ se conserva en el tiempo en todas sus direcciones espacio-temporales.
2. Si es abierta, entonces el momento p_μ se conserva en el tiempo en las direcciones espacio-temporales en donde sus extremos son libres. En las direcciones con condiciones de Dirichlet p_μ no se conserva de forma general, pero sí lo hace el momento total de la cuerda y de la D -brana. Dado que en la coordenada temporal los extremos han de ser libres, **la energía de la cuerda relativista $E = p^0$ siempre se conserva.**

La segunda consecuencia de que todos los términos de la densidad lagrangiana (2.22) sean de la forma $\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}$ es:

2. El Lagrangiano es invariante Lorentz. Esto ya lo sabíamos, ya que sus términos son productos escalares relativistas. No obstante, se puede comprobar explícitamente

2.1. PARAMETRIZACIÓN GENERAL

que cualquier término de la forma $\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}$ (siendo ξ^α y ξ^β igual a τ o σ) es invariante Lorentz. De acuerdo con lo visto en (1.19), recordemos que una transformación infinitesimal de Lorentz es de la forma $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$, con $\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu$ y $\epsilon^{\mu\nu}$ una matriz antisimétrica. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) &= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \delta X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) \\
 &= \eta_{\mu\nu} \left(\epsilon^{\mu\rho} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \epsilon^{\nu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\beta} \right) \\
 &= \epsilon_{\nu\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \epsilon_{\mu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\beta} \\
 &= (\epsilon_{\nu\rho} + \epsilon_{\rho\nu}) \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde en la última línea hemos cambiado los índices $\mu \rightarrow \rho$ y $\rho \rightarrow \nu$ (podemos hacerlo, son índices mudos) y hemos utilizado la antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu}$ ($\epsilon_{\nu\rho} = -\epsilon_{\rho\nu}$) para deducir la invariancia Lorentz. Aplicando de nuevo teoría clásica de campos, es posible demostrar que esta invariancia da lugar a las siguientes corrientes conservadas:

$$j_{\mu\nu}^\alpha = \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha : \quad (j_{\mu\nu}^0, j_{\mu\nu}^1) = (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau, \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma). \tag{2.43}$$

Por construcción, es inmediato observar que se trata de un tensor antisimétrico, luego en un espacio-tiempo D -dimensional existen $D(D-1)/2$ corrientes conservadas debido a la invariancia Lorentz. En este caso la ecuación (2.33) se particulariza a:

$$\partial_\alpha \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial \sigma} = 0, \tag{2.44}$$

y aplicando (2.34) obtenemos las cargas conservadas:

$$Q_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^{\sigma_1} (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau). \tag{2.45}$$

Al igual que las corrientes, estas cargas conservadas son antisimétricas. Para darles una interpretación, consideremos el espacio-tiempo usual de 4 dimensiones. Por ser $M_{\mu\nu}$ antisimétrico, existen 6 cargas conservadas: por un lado M_{01} , M_{02} y M_{03} están asociadas a los boosts en cada una de las tres direcciones espaciales. Por otro lado, M_{12} , M_{13} y M_{23} están asociadas a las rotaciones y, consecuentemente, se corresponden con el momento angular de la cuerda en cada una de las tres direcciones.

Parámetro de pendiente y unidades naturales

Finalizamos esta sección reescribiendo la acción de Nambu Goto de una forma equivalente. Es un hecho que en la mayoría de los trabajos recientes de teoría de cuerdas se utiliza una cantidad adimensional alternativa para referirse a la tensión de la cuerda. Dada una cuerda relativista abierta con tensión T_0 , se define el **parámetro de pendiente** α' como la constante de proporcionalidad que relaciona el momento angular J de dicha cuerda, medido en unidades de \hbar , si fuera rígida y estuviera rotando alrededor de su eje, con el cuadrado de su energía E :

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2. \quad (2.46)$$

De acuerdo con esta definición, es posible demostrar que el parámetro de pendiente y la tensión de la cuerda se relacionan como:

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}. \quad (2.47)$$

Es decir, α' y T_0 resultan equivalentes y podemos utilizar indistintamente uno u otro. Así, (2.17) se reescribe como:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'\hbar c^2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.48)$$

Utilizando unidades naturales, $\hbar = c = 1$, tenemos $T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ y:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.49)$$

Análogamente, en unidades naturales podemos reescribir (2.24) y (2.25) como:

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.50)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.51)$$

De aquí en adelante y salvo que se diga lo contrario, utilizaremos unidades naturales.

Resumiendo, en esta sección hemos considerado la hoja de universo de una cuerda relativista, la hemos descrito a partir de los parámetros τ y σ asociados al tiempo y a las coordenadas espaciales respectivamente, y la hemos utilizado para deducir la acción de la cuerda. Después, hemos aplicado el principio de Hamilton para obtener las condiciones de contorno y las ecuaciones de movimiento en su forma más general.

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

También hemos aplicado teoría clásica de campos para obtener las cantidades conservadas debidas a la invariancia del Lagrangiano bajo traslación espacio-temporal y bajo transformaciones de Lorentz. Si observamos las ecuaciones (2.24) y (2.25), la resolución de las ecuaciones del movimiento (2.32) se antoja muy complicada. No obstante, todavía no hemos utilizado una propiedad en la que ya hemos insistido: la invariancia de la acción bajo reparametrización. Una buena elección de los parámetros τ y σ nos permitirá simplificar las ecuaciones del movimiento, e incluso hallar su solución de forma explícita. Esto lo abordamos a continuación.

2.2. Gauges temporales y parametrización espacial

Comenzamos estudiando la parametrización más sencilla e intuitiva, conocida como gauge estático. Aunque no es la ideal para describir el movimiento general de la cuerda relativista, nos permite deducir algunas propiedades interesantes, siendo además una buena forma de introducirnos en el tema.

2.2.1. Gauge estático

El conocido como **gauge estático** es una parametrización temporal de la hoja de universo en la que las líneas de τ constante son determinadas por la intersección de los hiperplanos de t constante con la hoja de universo. Es decir, es una parametrización en la que para cada punto Q de la hoja de universo se toma $\tau(Q) = t(Q)$ o, equivalentemente:

$$X^0(\tau, \sigma) = \tau. \quad (2.52)$$

Bajo esta identificación, las líneas de τ constante son ‘cuerdas estáticas’, de ahí el nombre gauge estático. Por otro lado, de momento, el parámetro σ sigue sin tener una expresión concreta más allá de moverse entre los extremos $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_1$. Bajo esta parametrización se cumple:

$$\begin{aligned} X^{\mu'} &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \\ \dot{X}^\mu &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \right) = \left(1, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

es decir, la componente temporal tiene un tratamiento diferente a las componentes espaciales. Algunas expresiones que nos resultarán útiles posteriormente son:

$$\dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}, \quad \dot{X}^2 = -1 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2, \quad X'^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2. \quad (2.54)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

A continuación utilizamos el gauge estático para estudiar un ejemplo muy sencillo que nos permitirá aclarar dos aspectos que dejamos en el aire a la hora de definir la acción de Nambu Goto: el signo menos y la cantidad de dimensionalización T_0 .

Cuerda rígida estática

El ejemplo consiste en una cuerda relativista rígida en un espacio d -dimensional. Sin pérdida de generalidad, asumimos que se extiende a lo largo de la coordenada x^1 , con extremos en $(0, \vec{0})$ y $(a, \vec{0})$, $a > 0$, donde el vector $\vec{0}$ recorre las $d - 1$ dimensiones restantes. Es decir, ambos extremos de la cuerda satisfacen condiciones de Dirichlet en todas sus dimensiones y, de acuerdo con la discusión de la sección anterior, los puntos $(0, \vec{0})$ y $(a, \vec{0})$ son $D0$ -branas. En este caso nos conviene trabajar en términos de T_0 en lugar de α' . Recordemos que estamos trabajando con unidades naturales, luego $c = 1$ y se omite en las ecuaciones (2.17), (2.24) y (2.25).

Podemos escribir las coordenadas de la cuerda como:

$$X^0(\tau, \sigma) = \tau, \quad X^1(\tau, \sigma) = f(\sigma), \quad X^2 = \dots = X^d = 0, \quad (2.55)$$

donde $f(\sigma)$ es una función arbitraria estrictamente creciente y continua en $\sigma \in [0, 1]$ y satisfaciendo $f(0) = 0$, $f(\sigma_1) = a$. Básicamente, f determina la parametrización espacial de la cuerda.

En primer lugar, comprobemos que la configuración (2.55) tiene sentido físico, es decir, satisface las ecuaciones de movimiento (2.32). En (2.53) vemos como ni $X^{\mu'}$ ni \dot{X}^μ tienen dependencia en τ luego, de acuerdo con (2.24), $\partial \mathcal{P}_\mu^\tau / \partial \tau = 0$. Así, las ecuaciones del movimiento (2.32) se reducen a:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \right) = 0. \quad (2.56)$$

A partir de (2.55) se obtiene:

$$\dot{X}^\mu = (1, 0, \vec{0}), \quad X^{\mu'} = (0, f', \vec{0}), \quad (\dot{X})^2 = -1, \quad (X')^2 = (f')^2, \quad \dot{X} \cdot X' = 0, \quad (2.57)$$

donde hemos denotado $f' = df/d\sigma > 0$, por ser f estrictamente creciente. Sustituyendo en (2.25):

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -T_0 \frac{X'_\mu}{\sqrt{(f')^2}} = -T_0 \frac{X'_\mu}{f'}. \quad (2.58)$$

Para $\mu \neq 1$, $X'_\mu = 0 = \mathcal{P}_\mu^\sigma$, luego (2.56) se satisface trivialmente. Para $\mu = 1$, $X'_1 = f'$, luego $\mathcal{P}_1^\sigma = -T_0$ y, puesto que T_0 no depende de σ al ser un parámetro característico de la cuerda, de nuevo se satisface (2.56).

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

Una vez confirmado que la configuración (2.55) sigue las reglas de la física, evaluemos la acción de Nambu Goto. Sustituyendo (2.57) en (2.17):

$$\begin{aligned} S &= -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(f')^2} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{df}{d\sigma} \\ &= -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt (f(\sigma_1) - f(0)) = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a). \end{aligned} \quad (2.59)$$

La acción no depende de f , es decir, no depende de la parametrización. Esto es una comprobación explícita de la invariancia bajo reparametrización. Por otro lado, sabemos que la acción es la integral temporal del lagrangiano $L = T - V$, donde T y V denotan la energía cinética y potencial respectivamente. Nuestra cuerda está estática, por lo que tiene una energía cinética nula. Así:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt (-V). \quad (2.60)$$

De (2.59) y (2.60) identificamos:

$$V = T_0 a. \quad (2.61)$$

Dado que $T = 0$, concluimos que la energía de la cuerda es $E = T_0 a$. La cuerda relativista tiene energía por el simple hecho de estar estirada. Además, cuanto mayor sea la tensión o la longitud de la cuerda, mayor será dicha energía. Esto tiene todo el sentido del mundo, y nos dice que T_0 es la cantidad correcta con unidades de energía a considerar en la acción de Nambu Goto. Además, esta energía es energía en reposo, es decir, masa. Concretamente, la masa por unidad de longitud μ_0 de esta cuerda relativista es igual a su tensión:

$$m = \mu_0 a = E = T_0 a \Rightarrow \mu_0 = T_0. \quad (2.62)$$

Por otro lado, la expresión $E = T_0 a$ explica el porqué de la introducción de un signo menos en (2.17). Si no lo hubiéramos considerado habríamos obtenido una energía negativa, lo cual carece de sentido físico.

Volviendo a una cuerda relativista arbitraria y continuado con el gauge estático, nos preguntamos si es posible definir de alguna forma su velocidad de manera que nos resulte útil para interpretar las ecuaciones del movimiento. Aquí entra el concepto de velocidad transversal.

Velocidad transversal

Lo primero que se nos viene a la cabeza es utilizar la expresión usual de velocidad: $\partial \vec{X} / \partial t$. No obstante, esta definición no tiene sentido físico: $\partial \vec{X} / \partial t$ es un vector en

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

la dirección de σ constante, y dado que σ lo podemos escoger de forma totalmente arbitraria debido a la invariancia bajo reparametrización, $\partial\vec{X}/\partial t$ puede apuntar en la dirección que nosotros queramos, lo cual no nos resulta para nada informativo.

A pesar de que el vector $\partial\vec{X}/\partial t$ no nos es útil para describir el movimiento de la cuerda, podemos utilizarlo para construir uno que sí lo sea. Dada una cuerda en un tiempo fijado t , tomemos un punto cualquiera p (en la cuerda) y consideremos el plano ortogonal a ella que pase por dicho punto. Un instante de tiempo después, el plano seguirá intersectando a la cuerda, ahora en otro punto p' . Se define la **velocidad transversal** \vec{v}_\perp como la velocidad usual asumiendo que el punto p se ha desplazado a p' o, equivalentemente, como la componente de $\partial\vec{X}/\partial t$ contenida en el plano ortogonal a la cuerda. Ninguna parametrización es necesaria para definir esta noción de velocidad: **la velocidad transversal es una noción de velocidad invariante bajo reparametrización**. Matemáticamente se define como:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial\vec{X}}{\partial s}, \quad (2.63)$$

donde hemos definido $s(\sigma)$ como la longitud de la cuerda en el intervalo $[0, \sigma]$. La introducción de s es útil porque es posible demostrar que $\partial\vec{X}/\partial s$ es un vector unitario tangente a la cuerda:

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \quad \left[\Rightarrow \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \right]. \quad (2.64)$$

Dado que tanto $\partial\vec{X}/\partial t$ como $\partial\vec{X}/\partial s$ son vectores tangentes a la superficie de la cuerda (por ir en la dirección de σ constante y de t constante respectivamente), de (2.63) se concluye que \vec{v}_\perp también lo será. Así, para cada punto de la cuerda, la velocidad transversal es un vector perpendicular a ella y tangente a su superficie espacial. Vemos como el movimiento en la dirección longitudinal no nos importa en absoluto. Esto de nuevo se debe a la invariancia bajo reparametrización: para hablar del movimiento dentro de la cuerda es necesario establecer una estructura en ella, una distribución de sus puntos, una parametrización. Al poder escoger la parametrización a nuestro gusto, el movimiento longitudinal resulta insignificativo.

Dada su invariancia bajo reparametrización, nos interesa que \vec{v}_\perp aparezca explícitamente en la acción de nuestra cuerda relativista. A partir de (2.53) es sencillo calcular:

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - v_\perp^2}, \quad (2.65)$$

pudiendo reescribir así (2.17) como:

$$S = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - v_\perp^2}, \quad (2.66)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

donde no hemos cancelado $d\sigma$ para que la integral se haga hasta un parámetro fijo (la longitud de la cuerda $s(\sigma_1)$ es variable). Identificamos el Lagrangiano como:

$$L = - \int T_0 ds \sqrt{1 - v_\perp^2}, \quad (2.67)$$

donde, de acuerdo con lo discutido en (2.61), $T_0 ds$ es la energía en reposo de un trozo infinitesimal de cuerda. Así, el Lagrangiano (2.67) puede interpretarse como la generalización del Lagrangiano (1.34) de una partícula puntual relativista.

El gauge estático también nos permite estudiar el comportamiento de los extremos de una cuerda relativista. Esto lo abordamos a continuación.

Movimiento de los extremos de la cuerda

En primer lugar, veamos qué implicación tiene el hecho de que la coordenada temporal siempre satisfaga condiciones de extremo libre: $\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = 0$. Utilizando (2.53) y (2.65) y cancelando los diferenciales $d\sigma$, de (2.51) se obtiene:

$$\mathcal{P}^{\sigma, \mu} = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}^\mu + \left(1 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - v_\perp^2}}. \quad (2.68)$$

Para $\mu = 0$ se cumple $\dot{X}^0 = 1$ y $\partial X^0 / \partial s = \partial t / \partial s = 0$, luego:

$$\mathcal{P}^{\sigma, 0} = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)}{\sqrt{1 - v_\perp^2}}. \quad (2.69)$$

Dado que el denominador bajo ningún concepto puede ser infinito, la única forma de que se satisfaga (2.31) es:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0 \quad \text{para} \quad \sigma = 0, \sigma = \sigma_1. \quad (2.70)$$

Independientemente de la parametrización considerada, σ se mantiene constante a lo largo de la trayectoria de los puntos extremos: $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_1$. Esto quiere decir que para dichos puntos la velocidad sí está bien definida, $\vec{v} = \partial \vec{X} / \partial t$. Así, dado que $\partial \vec{X} / \partial s$ es un vector tangente a la cuerda, de la ecuación (2.70) se concluye que **los puntos extremos se mueven perpendicularmente a ella**. Sustituyendo (2.70) en la definición de velocidad transversal (2.63) se obtiene: $\vec{v}_\perp = \vec{v}$, como era de esperar.

Supongamos ahora que la cuerda está inmersa en una D -brana cubridora de espacio, es decir:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = 0 \quad \forall \mu = 0, 1, \dots, d, \quad \sigma = 0, \sigma = \sigma_1. \quad (2.71)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

Utilizando (2.70) podemos simplificar (2.68) en los extremos:

$$\mathcal{P}^{\sigma,\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(1-v^2) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{1-v^2} \frac{\partial X^\mu}{\partial s} \quad \text{para } \sigma = 0, \sigma = \sigma_1, \quad (2.72)$$

y quedándonos con las coordenadas espaciales:

$$\vec{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{1-v^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \quad \text{para } \sigma = 0, \sigma = \sigma_1. \quad (2.73)$$

Dado que $\partial \vec{X} / \partial s$ tiene módulo 1, no puede ser idénticamente nulo. Así, el único modo de satisfacerse (2.71) en todas las direcciones espaciales es:

$$v = 1 \quad \text{para } \sigma = 0, \sigma = \sigma_1. \quad (2.74)$$

Es decir, **los extremos de una cuerda relativista con extremos libres en todas sus direcciones se mueven a la velocidad de la luz.**

Llegados a este punto, es momento de sacar provecho de la invariancia de la acción bajo σ -parametrización para simplificar las ecuaciones del movimiento (2.32).

Parametrización espacial de la hoja de universo

La forma más sencilla de parametrizar espacialmente la hoja de universo consiste en parametrizar la cuerda en un tiempo dado, digamos $t = 0$, y propagar coherentemente dicha parametrización a lo largo de la superficie de la cuerda. Así, una vez escogida la parametrización de la cuerda inicial, quedará determinada la parametrización de la superficie de la cuerda que, junto a la parametrización temporal, dará lugar a la parametrización completa de la hoja de universo.

La forma más intuitiva de extender la parametrización es la que se muestra en la Figura 2.2: supongamos que hemos descrito la cuerda en $t = 0$ con una parametrización $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Dado un σ_0 arbitrario pero fijo, en el gauge estático definimos la línea de σ_0 constante a lo largo de la superficie de la cuerda como la línea que parte de σ_0 en $t = 0$ y que en cada tiempo t es ortogonal a la cuerda definida en dicho instante. En otras palabras, en cada punto de la superficie de la cuerda los vectores tangente a la cuerda $\partial \vec{X} / \partial \sigma$ y tangente a las líneas de σ constante $\partial \vec{X} / \partial t$ son ortogonales:

$$\text{Condición de parametrización 1: } \boxed{\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0.} \quad (2.75)$$

Directamente de la anterior ecuación se deduce que, extendiendo de esta forma la parametrización espacial, se cumple:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \quad (2.76)$$

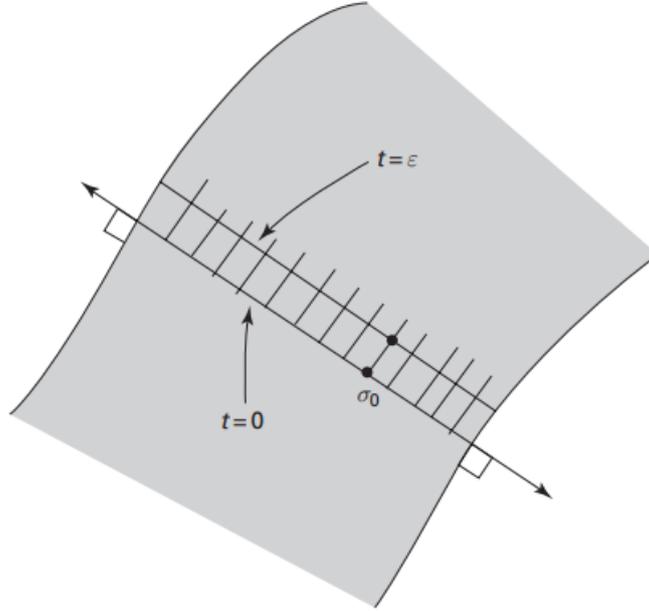


Figura 2.2: Extensión de la parametrización espacial a partir de una parametrización inicial dada.

no solo para los extremos, sino para todos los puntos de la cuerda.

Por otro lado, de la ecuación (2.53) se tiene que $X'_0 = 0$ y $\dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$, luego sustituyendo en (2.51) obtenemos $\mathcal{P}_0^\sigma = 0$. Sustituyendo ahora en la ecuación del movimiento (2.22) para la coordenada temporal $\mu = 0$ resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_0^\tau}{\partial t} = 0. \quad (2.77)$$

Es decir, como consecuencia de exigir que en cada instante las líneas de σ constante sean perpendiculares a la cuerda se tiene que **la σ -densidad de energía \mathcal{P}_0^τ se conserva en el tiempo**, es decir, la cantidad de energía que lleva cada trozo infinitesimal de cuerda $d\sigma$ no cambia en el tiempo.

Teniendo en cuenta (2.75), tratemos ahora de encontrar una parametrización concreta de la cuerda en el instante inicial que reduzca a una expresión familiar las ecuaciones del movimiento. En la coordenada temporal ya hemos visto que la ecuación del movimiento implica la conservación de la densidad de energía en el tiempo. Estudiemos ahora las direcciones espaciales. Combinando (2.64), (2.75) y (2.76) con (2.54) y sustituyendo en (2.50) y (2.51) tenemos que:

$$\mathcal{P}^{\tau,0} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}}, \quad \vec{\mathcal{P}}^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}. \quad (2.78)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

$$\vec{p}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\sqrt{1-v_\perp^2}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}. \quad (2.79)$$

Así, la ecuación (2.77) implica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} \right) = 0. \quad (2.80)$$

Teniendo esto en cuenta, las ecuaciones del movimiento (2.22) en las direcciones espaciales resultan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) &= \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sqrt{1-v_\perp^2}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} &= \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right). \end{aligned} \quad (2.81)$$

La ecuación anterior se asemeja a una ecuación de ondas. De hecho, si exigimos que σ satisfaga la condición de parametrización:

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1-v_\perp^2}, \quad (2.82)$$

entonces las ecuaciones del movimiento se reducen a:

$$\text{Ecuación de ondas: } \boxed{\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}}. \quad (2.83)$$

Es decir, si tomamos una parametrización σ en el instante inicial satisfaciendo (2.82) y la extendemos en el tiempo imponiendo la ortogonalidad (2.75) entonces las ecuaciones del movimiento de la cuerda relativista se reducen a una **ecuación de ondas**. Lo que nos viene a decir (2.82) es que, en cada punto de la cuerda, la variación de la longitud de la cuerda $s(\sigma)$ con respecto al parámetro σ es igual a la cantidad $\sqrt{1-v_\perp^2}$ (donde la velocidad transversal depende del punto de la cuerda en cuestión).

Veamos que consecuencias tiene la condición de parametrización (2.82). Sustituyéndola en (2.78) obtenemos:

$$\mathcal{P}^{\tau,0} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\sqrt{1-v_\perp^2}}{\sqrt{1-v_\perp^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha'}. \quad (2.84)$$

Es decir, la σ -densidad de energía no solo se conserva en el tiempo sino que también es constante a lo largo de las cuerdas: **la σ -densidad de energía es una constante**

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

de la hoja de universo. Yendo más allá, de acuerdo con (2.38), la energía total de la cuerda se calcula como:

$$E = p^0 = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}^{\tau,0} d\sigma = \frac{\sigma_1}{2\pi\alpha'}, \quad (2.85)$$

y como consecuencia tenemos que el límite superior de σ viene determinado por la energía E y por la tensión α' de la cuerda:

$$\sigma \in [0, \sigma_1] \quad \text{con} \quad \sigma_1 = 2\pi\alpha'E. \quad (2.86)$$

Finalmente, con respecto a las condiciones de contorno, sustituimos (2.82) en (2.79) para obtener:

$$\vec{p}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}. \quad (2.87)$$

Así, las condiciones de contorno de extremo libre (2.30) se reducen a:

$$\mathbf{C. \ contorno \ ext. \ libres:} \quad \boxed{\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{en} \quad \sigma = 0, \sigma = \sigma_1.} \quad (2.88)$$

Podemos dar una expresión alternativa a (2.82). Elevando al cuadrado y utilizando (2.64) y (2.76) resulta:

$$\mathbf{Condición \ de \ parametrización \ 2:} \quad \boxed{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 = 1.} \quad (2.89)$$

En resumen, tomamos una cuerda en un instante inicial y la dotamos de una parametrización espacial satisfaciendo la condición (2.89). A continuación extendemos esta parametrización en el tiempo utilizando la condición (2.75), obteniendo la parametrización espacial completa de la superficie de la cuerda. Esto, junto a la parametrización temporal del gauge estático, nos da una parametrización completa de la hoja de universo de la cuerda relativista en la cual la densidad de energía es una constante, las ecuaciones del movimiento se reducen a una ecuación de ondas (2.83) y las condiciones de contorno de extremo libre a unas meras condiciones de Neumann (2.88).

Una vez estudiado el caso más sencillo e intuitivo, a continuación presentamos una generalización del gauge estático que nos preparará el camino para posteriormente, utilizando el gauge del cono de luz, resolver explícitamente las ecuaciones del movimiento de una cuerda abierta con extremos libres.

2.2.2. Gauge general

La clase de gauges temporales que vamos a estudiar surge de igualar el parámetro τ a una combinación lineal de las coordenadas de la cuerda:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau, \quad (2.90)$$

con n_μ un $d + 1$ -vector y λ una constante. Al escoger n_μ y λ estamos fijando la combinación lineal y por tanto determinando la parametrización temporal τ de la hoja de universo. Podemos comprender (2.90) de la siguiente forma: fijados n_μ , λ y τ , consideramos dos puntos cualesquiera x_1^μ y x_2^μ satisfaciendo $n_\mu x^\mu = \lambda\tau$. Entonces, el vector $x_2^\mu - x_1^\mu$ uniendo ambos puntos satisface $n_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu) = 0$, es decir, es ortogonal al vector n_μ . Así, concluimos que los puntos del espacio-tiempo satisfaciendo $n_\mu x^\mu = \lambda\tau$ forman un hiperplano perpendicular a n_μ . Dado que las coordenadas X^μ son los puntos del espacio-tiempo contenidos en la hoja de universo, el conjunto de puntos X^μ satisfaciendo (2.90) es la intersección entre la hoja de universo y dicho hiperplano. Así, elegir n_μ es equivalente a elegir un hiperplano, cuya intersección con la hoja de universo determina las líneas en las que el parámetro temporal τ permanece constante. Tomando $n_\mu = (1, \vec{0})$ y $\lambda = 1$ entonces recuperamos el gauge estático, $X^0(\tau, \sigma) = \tau$. Los hiperplanos perpendiculares a $n_\mu = (1, \vec{0})$ son aquellos en los que t permanece constante, como ya comentamos en su momento.

En cada instante de tiempo podemos interpretar la línea de τ constante como una nueva ‘cuerda’. Aunque no se trata de la cuerda real (salvo en el gauge estático), nos resulta indiferente tratarla como tal: al resolver las ecuaciones del movimiento estaremos describiendo la evolución de la hoja de universo, y nos da igual que dicha hoja haya sido creada por una cuerda u otra.

Aunque hasta el momento hemos considerado $[\tau] = T$ y $[\sigma] = L$ ($c = 1 \Rightarrow [\tau] = [\sigma] = L$), de aquí en adelante asumiremos que τ y σ son parámetros adimensionales. Además, resulta útil reescribir la condición de parametrización (2.90) de una forma equivalente:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p)\tau, \quad (2.91)$$

donde $p_\mu(\tau)$ es el momento de la cuerda. En (2.41) hemos visto que p_μ se conserva para cuerdas cerradas y cuerdas abiertas con extremos libres, pero no para cuerdas sujetas a D -branas. Para que el desarrollo de esta sección también sea válido en el segundo caso, asumiremos que n^μ es escogido de manera que $n \cdot p$ se conserve independientemente de las condiciones de contorno. De esta forma, lo único que hemos hecho ha sido definir $\tilde{\lambda}$ tal que $\lambda = \tilde{\lambda}(n \cdot p)$. Lo que ganamos reescribiendo de esta forma la condición de parametrización es que, al aparecer n_μ en ambos lados de la igualdad, su norma se hace irrelevante y únicamente nos importa su dirección.

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

Veamos ahora si hay alguna forma de determinar $\tilde{\lambda}$. Teniendo en cuenta que estamos trabajando con unidades naturales, hagamos un análisis dimensional. Por un lado, dado que n_μ es adimensional, $[n \cdot X] = L$. Por otro lado $[n \cdot p] = M = L^{-1}$ y $[\tau] = 1$, luego $[\tilde{\lambda}] = L^2$. Dado que en unidades naturales las unidades de fuerza son $[F] = L^{-2}$, $\tilde{\lambda}$ ha de ser proporcional a la inversa de una fuerza. La fuerza característica de nuestra cuerda relativista es su tensión T_0 o, equivalentemente, el parámetro de pendiente $\alpha' = 1/2\pi T_0$. Así, asumimos que $\tilde{\lambda}$ es proporcional a α' y, yendo más allá, asumimos que la constante de proporcionalidad es 2 para cuerdas abiertas y 1 para cuerdas cerradas. De esta forma llegamos a la siguiente **condición de parametrización temporal**:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau \quad \text{con} \quad \begin{cases} \beta = 2 & \text{cuerdas abiertas.} \\ \beta = 1 & \text{cuerdas cerradas.} \end{cases} \quad (2.92)$$

Más tarde entenderemos el motivo de asignar dichas constantes de proporcionalidad.

Una vez determinada la parametrización temporal, es momento de buscar una parametrización espacial que simplifique las ecuaciones del movimiento. En el caso concreto del gauge estático impusimos unas condiciones que acabaron resultando en la conservación tanto temporal como espacial de la densidad de energía y que redujeron las ecuaciones del movimiento a una simple ecuación de ondas. Generalizando el caso concreto del gauge estático, impongamos la conservación total de la cantidad $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ y veamos que ocurre.

$$\text{Gauge estático: } (1, \vec{0}) \cdot \mathcal{P}^\tau = \mathcal{P}^{\tau,0} \text{ constante de la hoja de universo} \Rightarrow \quad (2.93)$$

$$\text{Gauge general: } n \cdot \mathcal{P}^\tau \text{ constante de la hoja de universo.}$$

Además, en el estudio de la solución de las ecuaciones del movimiento nos resultará útil que, para cuerdas abiertas, el límite superior de la parametrización espacial sea $\sigma_1 = \pi$. Por otro lado, para cuerdas cerradas se toma por convenio $\sigma_1 = 2\pi$. Así, los requerimientos que ha de cumplir nuestra parametrización espacial σ son que $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ sea una constante de la hoja de universo y que $\sigma_1 = \pi$ para cuerdas abiertas y $\sigma_1 = 2\pi$ para cuerdas cerradas. Es posible demostrar ([1], Section 9.2) que estos dos requerimientos se resumen en una única **condición de parametrización espacial**:

$$(n \cdot p)\sigma = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \tilde{\sigma}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \beta = 2 & \text{cuerdas abiertas.} \\ \beta = 1 & \text{cuerdas cerradas.} \end{cases} \quad (2.94)$$

La interpretación de la anterior ecuación viene a ser que, dado un punto Q en una cuerda y en un tiempo dado τ , el valor $\sigma(Q)$ es proporcional a la integral de la densidad de momento $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ sobre el trozo de cuerda $[0, \sigma(Q)]$.

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

Veamos las consecuencias de estas imposiciones. Haciendo el producto escalar de n^μ con la ecuación del movimiento (2.22) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0. \quad (2.95)$$

Dado que $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ es una constante de la hoja de universo, se conserva en el tiempo, luego la anterior ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0, \quad (2.96)$$

es decir, $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ es independiente de σ . Por otro lado, teniendo en cuenta que $n \cdot p$ es constante, se cumple $\frac{d}{d\tau}(n \cdot p) = 0$, luego haciendo el producto escalar de n con la ecuación (2.39) obtenemos que:

$$\frac{d}{d\tau}(n \cdot p) = - (n \cdot \mathcal{P}^\sigma) \Big|_0^{\sigma_1} = 0. \quad (2.97)$$

Lo que hacemos para garantizar que se satisfaga la expresión anterior es requerir que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ se anule en los extremos de la cuerda, lo que junto a (2.96) implica:

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0 \quad \text{para cuerdas abiertas.} \quad (2.98)$$

Veamos que implicación tiene esto. De (2.51) se tiene:

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot X) - (\dot{X})^2 \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.99)$$

Teniendo en cuenta (2.92): $\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot X) = \alpha'(n \cdot p) \equiv cte$ y $\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot X) = 0$, luego:

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \alpha'(n \cdot p)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.100)$$

Así, la ecuación (2.98) resulta equivalente a que, para cuerdas abiertas, $\dot{X} \cdot X' = 0$. Esto es equivalente a la condición (2.75) que impusimos en el gauge estático para extender la parametrización.

Para cuerdas cerradas no podemos justificar de la misma manera que se satisfaga (2.98), ya que al no tener extremos no existe ningún punto en el que sepamos a ciencia cierta que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ se anula. No obstante, nos gustaría que (2.98) también fuera válida en ese caso. Para ello, teniendo en cuenta (2.100), para cuerdas cerradas imponemos nosotros mismos que, en cada instante de tiempo, $\dot{X} \cdot X'$ se anule en todos los puntos de la cuerda, es decir, imponemos que la extensión de la parametrización espacial venga determinada por la ortogonalidad entre las líneas de σ y τ constante. Esta

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

forma de extender σ nos permite concluir que (2.98) es válida tanto para cuerdas abiertas como para cuerdas cerradas. De hecho, si particularizamos (2.98) para el caso del gauge estático, en el que $X^{0'} = 0$, recuperamos la condición de parametrización (2.75): $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0$.

Combinando (2.98) con la condiciones de parametrización temporal (2.92) y espacial (2.94) podemos deducir una nueva restricción. De (2.50) tenemos:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot X) - (X')^2 \frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.101)$$

Teniendo en cuenta (2.92): $\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot X) = \alpha'(n \cdot p) \equiv cte$ y $\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot X) = 0$. Además, $\dot{X} \cdot X' = 0$, luego:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 \beta \alpha'(n \cdot p)}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.102)$$

Derivando la condición (2.94) con respecto a σ obtenemos $n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau$, y sustituyendo la anterior ecuación:

$$1 = \frac{(X')^2}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \Rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0. \quad (2.103)$$

Particularizando para el caso del gauge estático, donde \dot{X}^2 y X'^2 vienen dados por (2.54), recuperamos la condición de parametrización (2.89): $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 = 1$. En conclusión, las condiciones de parametrización (2.92) y (2.94) se pueden reescribir como:

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad (2.104)$$

reduciéndose en el caso particular del gauge estático a las condiciones (2.75) y (2.89) respectivamente. Se pueden combinar ambas expresiones para obtener una única condición:

$$\text{Condición de parametrización: } \boxed{(\dot{X} \pm X')^2 = 0}. \quad (2.105)$$

Veamos ahora que ocurre con las ecuaciones del movimiento. De (2.103) tenemos que $\dot{X}^2 = -X'^2$, lo que es sencillo comprobar que implica:

$$\mathcal{P}^{\tau,\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}^{\sigma,\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}. \quad (2.106)$$

Entonces las ecuaciones del movimiento (2.32) se reducen de nuevo a simples ecuaciones de ondas:

$$\text{Ecuación de ondas: } \boxed{\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0}, \quad (2.107)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

recuperando (2.83) para el caso particular del gauge estático. Además, de (2.106) se concluye que las condiciones de contorno de extremo libre se reducen a unas condiciones de Neumann:

$$\mathbf{C.contorno\ ext.\ libres:} \quad \boxed{\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{en} \quad \sigma = 0, \sigma = \sigma_1.} \quad (2.108)$$

Resumiendo, una vez especificada la parametrización temporal a través de (2.92), el procedimiento para determinar la parametrización espacial ha sido el inverso al utilizado en el gauge estático, llegando en ambos casos a las mismas conclusiones. En el gauge estático parametrizamos la cuerda en un instante inicial de manera que las ecuaciones del movimiento se redujeran a ecuaciones de ondas, y extendimos dicha parametrización imponiendo que las líneas de σ y τ constante fueran perpendiculares. Vimos que esas condiciones implicaban la conservación de la densidad de energía en la hoja de universo. En el caso general, parametrizamos espacialmente la hoja imponiendo directamente la conservación de $n \cdot \mathcal{P}^\tau$. Esta imposición implica, por un lado, que las líneas de σ y τ constante sean perpendiculares (para cuerdas abiertas) y, por otro lado, que las ecuaciones del movimiento sean ecuaciones de ondas. Es decir, ambos procedimientos son equivalentes (salvo por el hecho de que para cuerdas cerradas la condición de ortogonalidad no sale de forma natural sino que hay que imponerla).

Una vez comprendido que el desarrollo realizado en este apartado es una generalización del realizado para el gauge estático, ya estamos en condiciones de comprender por qué asignamos inicialmente $\beta = 2$ para cuerdas abiertas y $\beta = 1$ para cuerdas cerradas. En el gauge estático obtuvimos $\sigma_1 = 2\pi\alpha'E$. Ahora, para cuerdas abiertas estamos imponiendo $\sigma_1 = \pi$, luego $1 = 2\alpha'E$. Particularizando (2.92) para el gauge estático ($X^0 = \tau$):

$$X^0 = \beta\alpha'E\tau \Rightarrow 1 = \beta\alpha'E \Rightarrow \beta = 2. \quad (2.109)$$

La comprobación de que $\beta = 1$ para cuerdas cerradas es totalmente análoga.

A continuación procedemos a resolver la ecuación de ondas (2.107) de forma general para una cuerda relativista abierta inmersa en una D -brana cubridora de espacio, es decir, cuyos extremos son libres en todas las direcciones.

Cuerdas abiertas con extremos libres: Solución general

La solución más general para una ecuación diferencial del tipo ecuación de ondas $\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$ es:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)), \quad (2.110)$$

con f^μ y g^μ funciones arbitrarias. En lo que sigue, nuestro objetivo es utilizar las condiciones de contorno (2.108) para reescribir la solución (2.110) de manera que

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

tenga una interpretación física. De momento no tendremos en cuenta las condiciones de parametrización (2.104).

Aplicando la condición de contorno (2.108) en $\sigma = 0$:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0 \Rightarrow f^{\mu'}(\tau) = g^{\mu'}(\tau) \Rightarrow g^\mu = f^\mu + c^\mu, \quad (2.111)$$

donde c^μ es una constante. Redefiniendo f^μ como $f^\mu + c^\mu/2$, resulta:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)) \quad (2.112)$$

Aplicando la condición de contorno (2.108) en $\sigma = \sigma_1 = \pi$:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0 \Rightarrow f^{\mu'}(\tau + \pi) = f^{\mu'}(\tau - \pi), \quad (2.113)$$

es decir, $f^{\mu'}$ es una función periódica con periodo 2π . Este es el motivo de haber impuesto $\sigma_1 = \pi$ anteriormente: se obtiene un periodo natural 2π que simplifica en gran medida las expresiones siguientes. Como consecuencia de la periodicidad, $f^{\mu'}$ está bien descrita en toda la recta real por su desarrollo en serie de Fourier:

$$f^{\mu'}(x) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^\mu \cos nx + c_n^\mu \sin nx), \quad (2.114)$$

donde f_1^μ , b_n^μ y c_n^μ son los coeficientes de Fourier dados por:

$$\begin{aligned} f_1^\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\mu'}(x) dx, \\ b_n^\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\mu'}(x) \cos nxdx, \\ c_n^\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\mu'}(x) \sin nxdx. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Integrando y redefiniendo b_n^μ y c_n^μ de manera que contengan a las constantes de integración, tenemos:

$$f^\mu(x) = f_0^\mu + f_1^\mu x + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^\mu \cos nx + c_n^\mu \sin nx). \quad (2.116)$$

Sustituyendo en (2.112) y simplificando:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^\mu \cos n\tau + c_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma. \quad (2.117)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

A la constante f_1^μ se le puede dar una sencilla interpretación física. Utilizando (2.106), podemos calcular:

$$\mathcal{P}^{\tau,\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (-nb_n^\mu \sin n\tau + nc_n^\mu \cos n\tau) \cos n\sigma. \quad (2.118)$$

De acuerdo con (2.38), el momento total viene dado por:

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau,\mu}(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (2.119)$$

La integral sobre los términos con $\cos n\sigma$ se anula, luego concluimos que:

$$p^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \Rightarrow f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu, \quad (2.120)$$

es decir, f_1^μ viene a representar el momento p^μ de la cuerda. Definiendo $x_0^\mu = f_0^\mu$, (2.117) se reescribe como:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^\mu \cos n\tau + c_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma. \quad (2.121)$$

El primer término se corresponde con la posición de la que parte en el instante inicial el ‘punto central’ de la cuerda $\sigma = \pi/2$. El segundo término se corresponde con la contribución dada por el momento lineal. El tercer término se debe a las oscilaciones de la cuerda. Si todos los coeficientes b_n^μ y c_n^μ se anulan entonces (2.121) representa el movimiento de una partícula puntual.

Resultará útil reescribir (2.121) de una forma alternativa. En primer lugar, definimos unas constantes complejas a_n^μ como:

$$a_n^\mu = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2\alpha'}} (c_n^\mu - ib_n^\mu), \quad (2.122)$$

donde la razón de incluir el término $\sqrt{\alpha'}$ es que los nuevos coeficientes sean adimensionales. De esta forma, se cumple:

$$\begin{aligned} b_n^\mu \cos n\tau + c_n^\mu \sin n\tau &= -\frac{i}{2} ((c_n^\mu + ib_n^\mu) e^{in\tau} - (c_n^\mu - ib_n^\mu) e^{-in\tau}) \\ &= -\frac{i\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Definimos ahora unos nuevos coeficientes α_n^μ como:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1. \quad (2.124)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

Cabe destacar que α_n^μ están definidos $\forall n \in \mathbb{Z}$, y además $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$. Teniendo esto en cuenta, junto con (2.123) y (2.124), podemos reescribir (2.121) como:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (2.125)$$

Esta es la solución general de la ecuación de ondas (2.107) para una cuerda abierta satisfaciendo las condiciones de contorno de extremo libre (2.108). Para terminar, la ecuación (2.125) nos permite escribir \dot{X}^μ y $X^{\mu'}$ como:

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}, \quad (2.126)$$

$$X^{\mu'} = -i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin n\sigma e^{-in\tau}, \quad (2.127)$$

y combinándolas:

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (2.128)$$

Cabe decir que (2.125) solamente será válida para describir el movimiento físico de una cuerda abierta con extremos libres si satisface las condiciones de parametrización (2.104). Es decir, debemos encontrar los coeficientes α_n^μ que hagan que (2.125) describa un movimiento físico. Para ello utilizaremos un caso concreto de la clase de gauges temporales (2.90) conocido como gauge del cono de luz. Antes de eso, estudiemos la solución general de la ecuación de ondas para cuerdas cerradas.

Cuerdas cerradas: Solución general

Retrocedemos en nuestro desarrollo y volvemos a considerar la ecuación de ondas $\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$. Nuestro objetivo ahora es resolverla para cuerdas cerradas, es decir, cuerdas que no satisfacen ningún tipo de condiciones de contorno, pero si la condición de identificación:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in [0, 2\pi]. \quad (2.129)$$

En este caso escribimos la solución general como:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma), \quad (2.130)$$

donde X_L^μ representa una onda moviéndose en la dirección negativa de σ ($L \leftrightarrow \text{left}$) y X_R^μ una onda moviéndose en la dirección positiva de σ ($R \leftrightarrow \text{right}$). Resulta conveniente definir dos nuevas variables independientes:

$$\left. \begin{array}{l} u = \tau + \sigma \\ v = \tau - \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow X^\mu = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v). \quad (2.131)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

La identificación (2.129) se traduce en:

$$X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) = X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi) \quad (2.132)$$

o, equivalentemente:

$$X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) = X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi). \quad (2.133)$$

Puesto que u y v son variables independientes, se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial v} X_L^\mu(u + 2\pi) = \frac{\partial}{\partial v} X_L^\mu(u) = \frac{\partial}{\partial u} X_R^\mu(v) = \frac{\partial}{\partial u} X_R^\mu(v - 2\pi) = 0, \quad (2.134)$$

luego:

$$\begin{aligned} X_L^{\mu'}(u + 2\pi) - X_L^{\mu'}(u) &= \frac{\partial}{\partial u} (X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi)) = 0, \\ X_R^{\mu'}(v + 2\pi) - X_R^{\mu'}(v) &= \frac{\partial}{\partial v} (X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u)) = 0, \end{aligned} \quad (2.135)$$

donde $'$ denota la derivada de cada función con respecto a su argumento. En conclusión, (2.135) nos dice que tanto $X_L^{\mu'}(u)$ como $X_R^{\mu'}(v)$ son funciones periódicas con periodo 2π , luego de nuevo están bien descritas en toda la recta real por sus desarrollos en serie de Fourier, que en este caso nos interesa escribir como:

$$\begin{aligned} X_L^{\mu'}(u) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \\ X_R^{\mu'}(v) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

La constante de normalización $\sqrt{\alpha'/2}$ ha sido introducida para posteriormente obtener expresiones análogas a las de las cuerdas abiertas (proximamente lo veremos). No debemos confundir los coeficientes α_n^μ con los de las cuerdas abiertas, aunque se escriban igual son diferentes. Integrando (2.136) resulta:

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) &= \frac{1}{2} x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \\ X_R^\mu(v) &= \frac{1}{2} x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-inv}, \end{aligned} \quad (2.137)$$

donde $x_0^{L\mu}$ y $x_0^{R\mu}$ son constantes de integración. Es sencillo comprobar que la condición (2.133) implica:

$$\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu, \quad (2.138)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

lo que en breves momentos veremos que implica que solamente hay una variable de momento. Sustituyendo (2.137) en (2.130) teniendo en cuenta (2.138) y definiendo $x_0^\mu = \frac{1}{2}(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu})$ resulta:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}). \quad (2.139)$$

Esta es la solución general de la ecuación de ondas (2.107) para una cuerda cerrada. De nuevo resulta interesante escribir las derivadas de las coordenadas, en este caso:

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) + X_R^{\mu'}(\tau - \sigma), \\ X^{\mu'} &= X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) - X_R^{\mu'}(\tau - \sigma), \end{aligned} \quad (2.140)$$

y combinándolas utilizando (2.136):

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu + X^{\mu'} &= 2X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}, \\ \dot{X}^\mu - X^{\mu'} &= 2X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \end{aligned} \quad (2.141)$$

Gracias a la constante de normalización $\sqrt{\alpha'/2}$ introducida en (2.136), se obtienen expresiones análogas a las obtenidas para cuerdas abiertas en (2.128), con la diferencia de que ahora se deben considerar los coeficientes $\bar{\alpha}_n^\mu$ o α_n^μ en función de si se trata de la suma o de la resta. Más tarde agradeceremos que (2.128) y (2.141) estén expresados de la misma forma.

Al igual que hicimos para las cuerdas abiertas, podemos integrar la densidad de momento (dada por (2.106)):

$$\mathcal{P}^{\tau, \mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \right) \quad (2.142)$$

para obtener el momento de la cuerda cerrada:

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau, \mu}(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0^\mu, \quad (2.143)$$

de donde se obtiene una relación análoga a la primera de las relaciones (2.124):

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu, \quad (2.144)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

es decir, el coeficiente α_0^μ representa el momento de la cuerda. Esto junto a (2.138) nos permite concluir que, a pesar de haber descompuesto nuestra solución como la suma de dos ondas, ambas tienen el mismo momento y, por tanto, como ya anticipamos, solamente existe una variable de momento.

De nuevo cabe mencionar que para que (2.139) represente el movimiento de una cuerda cerrada real han de satisfacerse las condiciones de parametrización (2.104). Al igual que con las cuerdas abiertas, para estudiar esto utilizaremos el gauge del cono de luz, que presentamos a continuación.

2.2.3. Gauge del cono de luz

El conocido como **gauge del cono de luz (LCG)** es un caso particular de la clase de gauges temporales presentada en la sección anterior en el cual en las condiciones de parametrización (2.92) y (2.94) se toma el vector:

$$n_\mu = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \vec{0}), \quad (2.145)$$

de manera que, de acuerdo con lo visto en la Sección 1.1.2, se cumple $n \cdot X = X^+$ y $n \cdot p = p^+$, donde X^+ es la coordenada temporal del cono de luz. Entonces, de acuerdo con lo discutido en la sección anterior, la condición de parametrización espacial consiste en imponer que $\mathcal{P}^{\tau,+}$ sea una constante de la hoja de universo, y las ecuaciones (2.92) y (2.94) se reducen a:

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad p^+ \sigma = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} \mathcal{P}^{\tau,+}(\tau, \tilde{\sigma}). \quad (2.146)$$

Particularicemos la condición (2.105) para esta parametrización. Recordemos que en las coordenadas del cono de luz el producto escalar de dos vectores viene dado por: $a \cdot b = -a^- b^+ - a^+ b^- + a^I b^I$, donde $I = 2, \dots, d$ es el índice refiriéndose a las coordenadas transversales X^I . Así, (2.105) se reescribe como:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = (\dot{X} \pm X') \cdot (\dot{X} \pm X') = 0 \Rightarrow -2(\dot{X}^+ \pm X^{+'})(\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0 \quad (2.147)$$

De (2.146) tenemos que $\dot{X}^+ = \beta \alpha' p^+$, y $X^{+'} = 0$, luego la anterior ecuación implica:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\beta \alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2, \quad (2.148)$$

donde hemos asumido que $p^+ \neq 0$. Como ya hemos discutido en la Sección 1.1.2, $p^+ = 0$ solamente ocurre en el caso de una partícula sin masa viajando en el sentido negativo de la dirección x^1 . Esto es un caso muy particular, por lo que simplemente no lo consideraremos.

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

La expresión (2.148) es realmente útil: nos permite obtener la posición en la coordenada X^- (salvo por una constante de integración, x_0^-) en función de la posición en las coordenadas transversales X^I y del momento p^+ . Llegados a este punto, nos conviene diferenciar los casos de cuerdas abiertas con extremos libres y cuerdas cerradas.

LCG en cuerdas abiertas con extremos libres

Si observamos la solución general (2.125), para cuerdas abiertas con extremos libres, el movimiento en la dirección X^- viene determinado por x_0^- y por los coeficientes α_n^- . Tratemos de determinar los coeficientes α_n^- en función de los coeficientes α_n^I . Para ello hacemos uso de (2.128):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (2.149)$$

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (2.150)$$

Sustituyendo en (2.148) y reescribiendo los sumatorios:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Identificando a ambos lados, obtenemos:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (2.152)$$

Una vez obtenidos los coeficientes α_n^- en función de los coeficientes α_n^I , llegamos a la siguiente conclusión: la dinámica de una cuerda relativista abierta con extremos libres viene determinada de forma completa por los valores arbitrarios:

$$x_0^-, \quad x_0^I, \quad p^+, \quad \alpha_n^I. \quad (2.153)$$

La posición en la coordenada temporal X^+ viene determinada por p^+ según:

$$X^+(\tau, \sigma) = X^+(\tau) = 2\alpha' p^+ \tau. \quad (2.154)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

La posición en las coordenadas transversales X^I viene determinada por x_0^I y por α_n^I según:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (2.155)$$

Finalmente, la posición en la coordenada X^- viene determinada por x_0^- y por α_n^- según:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (2.156)$$

donde los α_n^- se calculan a partir de los α_n^I de acuerdo con la ecuación (2.152).

El motivo de haber utilizado el gauge y las coordenadas de cono de luz para resolver explícitamente las ecuaciones del movimiento es la simplicidad de la ecuación (2.148). El producto escalar en las coordenadas de cono de luz nos ha permitido despejar las derivadas de X^- sin necesidad de tomar la raíz cuadrada, y la parametrización del gauge del cono de luz ha simplificado la expresión debido a que $X^{+'} = 0$ y \dot{X}^+ es una constante. Esto nos ha permitido llegar sin muchos problemas a la relación (2.152), que relaciona los coeficientes de las coordenadas transversales con los de la coordenada X^- .

La combinación cuadrática de osciladores presente en (2.152) será realmente importante a la hora de cuantizar la cuerda relativista, y es por eso que recibe un nombre:

$$\text{Modo transversal de Virasoro:} \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (2.157)$$

De este modo, (2.152) se puede escribir como:

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad (2.158)$$

y, particularizando para $n = 0$, utilizando (2.124) resulta:

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = 2\alpha'p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp \Rightarrow 2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp. \quad (2.159)$$

Es sencillo ver que la posición en la coordenada X^- se puede reescribir como:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (2.160)$$

es decir, los modos transversales de Virasoro son los coeficientes de expansión de la coordenada X^- .

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

Finalmente, podemos utilizar el gauge del cono de luz para calcular la masa de una cuerda relativista abierta con extremos libres describiendo un movimiento arbitrario. Para ello utilizamos la fórmula relativista (1.46):

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I. \quad (2.161)$$

Utilizando (2.159), (2.157) y (2.124) tenemos:

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \right) = p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n^{I*} c_n^I. \quad (2.162)$$

Sustituyendo en (2.161):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I. \quad (2.163)$$

De esta expresión se concluyen dos cosas. Por un lado, puesto que para cada $n \in \mathbb{Z}$ $\alpha_n^{I*} \alpha_n^I = |\alpha_n^I|^2 \geq 0$, se tiene que $M^2 \geq 0$ y por tanto la masa de la cuerda relativista es, como era de esperar, un número real (tomado convenientemente positivo). Por otro lado, puesto que los coeficientes α_n^I se escogen de forma arbitraria, podemos ajustarlos a nuestro gusto para obtener una cuerda con una masa arbitraria. La cuerda tendrá masa nula cuando todos los coeficientes α_n^I se anulen.

LCG en cuerdas cerradas

De acuerdo con (2.139), para cuerdas cerradas el movimiento en la dirección X^- viene determinado por x_0^- y por los coeficientes α_n^- y $\bar{\alpha}_n^-$. Tratemos de determinar dichos coeficientes en función de los coeficientes α_n^I y $\bar{\alpha}_n^I$. Aquí es donde agradecemos que (2.128) y (2.141) estén expresados de la misma forma, y es que el desarrollo es análogo al hecho para cuerdas abiertas, obteniendo en este caso dos relaciones, una para los coeficientes $\bar{\alpha}_n^-$ y $\bar{\alpha}_n^I$ y otra para los coeficientes α_n^- y α_n^I :

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{1}{p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I \quad \text{y} \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (2.164)$$

Las conclusiones son análogas a las obtenidas para la cuerda abierta: la dinámica de una cuerda relativista cerrada viene determinada de forma completa por los valores arbitrarios:

$$x_0^-, \quad x_0^I, \quad p^+, \quad \bar{\alpha}_n^I, \quad \alpha_n^I. \quad (2.165)$$

La posición en la coordenada temporal X^+ viene determinada por p^+ según:

$$X^+(\tau, \sigma) = X^+(\tau) = \alpha' p^+ \tau. \quad (2.166)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

La posición en las coordenadas transversales X^I viene determinada por x_0^I , $\bar{\alpha}_n^I$ y α_n^I según:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}). \quad (2.167)$$

Finalmente, la posición en la coordenada X^- viene determinada por x_0^- , $\bar{\alpha}_n^-$ y α_n^- según:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^- e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma}). \quad (2.168)$$

donde los $\bar{\alpha}_n^-$ y los α_n^- se calculan a partir de los $\bar{\alpha}_n^I$ y los α_n^I de acuerdo con la ecuación (2.164).

Al haber dos tipos de coeficientes α , las cuerdas cerradas también poseen dos tipos diferentes de modos transversales de Virasoro:

Modos transversales de Virasoro: $\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I$, $L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$.

$$(2.169)$$

Así, podemos reescribir (2.164) como:

$$\sqrt{2\alpha'}\bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp \quad \text{y} \quad \sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp \quad (2.170)$$

Particularizando para $n = 0$, de (2.138) se concluye que

$$\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp, \quad (2.171)$$

y utilizando (2.144) resulta:

$$p^+ p^- = \frac{2}{\alpha'} \bar{L}_0^\perp = \frac{2}{\alpha'} L_0^\perp. \quad (2.172)$$

Finalizamos calculando la masa de una cuerda relativista cerrada describiendo un movimiento arbitrario. Para llegar a una expresión de la misma forma a la obtenida para la cuerda abierta, definimos los coeficientes a_n^μ y \bar{a}_n^μ de acuerdo con las expresiones:

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n} \quad \text{y} \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad (2.173)$$

$$\bar{\alpha}_n^\mu = \bar{a}_n^\mu \sqrt{n} \quad \text{y} \quad \bar{\alpha}_{-n}^\mu = \bar{a}_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1,$$

Además, estas definiciones implican $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$ y $\bar{\alpha}_{-n}^\mu = (\bar{\alpha}_n^\mu)^*$. Ahora sí, utilizamos la fórmula relativista (1.46):

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I, \quad (2.174)$$

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

que junto a (2.172), (2.169) y (2.144) nos permite obtener:

$$\begin{aligned}
2p^+p^- &= \frac{4}{\alpha'}\bar{L}_0^\perp = \frac{4}{\alpha'}L_0^\perp = \frac{2}{\alpha'}(\bar{L}_0^\perp + \bar{L}_0^\perp) \\
&= \frac{2}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^I\bar{\alpha}_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\alpha}_n^{I*}\bar{\alpha}_n^I + \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{I*}\alpha_n^I\right) \\
&= \frac{2}{\alpha'}\left(\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\alpha}_n^{I*}\bar{\alpha}_n^I + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{I*}\alpha_n^I\right) \\
&= p^I p^I + \frac{2}{\alpha'}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{a}_n^{I*}\bar{a}_n^I + \sum_{n=1}^{\infty}na_n^{I*}a_n^I\right).
\end{aligned} \tag{2.175}$$

Sustituyendo finalmente en (2.174):

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{a}_n^{I*}\bar{a}_n^I + \sum_{n=1}^{\infty}na_n^{I*}a_n^I\right). \tag{2.176}$$

De nuevo, al poder elegir los coeficientes a_n^I y \bar{a}_n^I a nuestro gusto, de acuerdo con esta teoría podemos conseguir cuerdas cerradas con masas arbitrarias. Además, la cuerda tendrá masa nula solamente cuando todos los coeficientes a_n^I y \bar{a}_n^I se anulen.

Aquí finaliza nuestro estudio de las cuerdas relativistas. Resumiendo, comenzamos estudiando la hoja de universo en su parametrización más general, obteniendo las ecuaciones del movimiento y las condiciones de contorno. A continuación impusimos diferentes parametrizaciones temporales. Por un lado, el gauge estático nos permitió estudiar propiedades interesantes de la cuerda, tales como el movimiento de los extremos libres. Por otro lado, utilizando el gauge general y la parametrización espacial que garantiza la conservación de $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ resolvimos las ecuaciones del movimiento, sin llegar a imponer las condiciones de parametrización. Finalmente, utilizamos el gauge del cono de luz para imponer las condiciones de parametrización, lo que introdujo una dependencia entre los parámetros que describen el movimiento de la cuerda.

Todos los desarrollos de este capítulo se han hecho desde una perspectiva clásica, dejando a un lado la mecánica cuántica. Llegados a este punto, es lógico preguntarnos si las cuerdas relativistas clásicas constituyen realmente una teoría que describa de forma razonable la realidad que nos rodea, y la respuesta es no. La justificación viene dada por un hecho que ya hemos comentado: la masa de los estados asociados tanto a las cuerdas abiertas como a las cuerdas cerradas puede adoptar cualquier valor arbitrario. Sin embargo, los estados de las partículas presentes en nuestro universo

2.2. GAUGES TEMPORALES Y PARAMETRIZACIÓN ESPACIAL

no exhiben un espectro continuo de masas. Como veremos en las próximas páginas, la cuantización de la teoría soluciona este inconveniente, además de resolver ciertas ambigüedades tales como determinar el número de dimensiones del espacio-tiempo.

Capítulo 3

Cuerdas cuánticas relativistas

Lo comentado en el último párrafo del capítulo anterior sirve como motivación para buscar una teoría más allá de la teoría de cuerdas relativistas. Dado que el problema de esta teoría es que da cabida a cuerdas con masas arbitrarias mientras que en la naturaleza la masa de las partículas está cuantizada, la solución más intuitiva es cuantizar la teoría. Para ello, le aplicaremos el proceso de primera cuantización, explicado en la Sección 1.2.1. Comenzaremos estudiando la cuantización de la partícula puntual relativista, lo que nos será útil al tratar con cuerdas y nos hará ganar experiencia. Seguidamente estudiaremos la cuantización de las cuerdas abiertas con extremos libres: definiremos operadores, postularemos un Hamiltoniano, estudiaremos relaciones de conmutación y definiremos operadores con especial interés... y finalizaremos analizando el espacio de estados. Finalmente, repetiremos este proceso para cuerdas cerradas, mostrando en todo momento las analogías y diferencias con las cuerdas abiertas.

3.1. Partícula puntual cuántica relativista

En primer lugar resolveremos las ecuaciones del movimiento de una partícula puntual relativista libre utilizando las coordenadas y el gauge del cono de luz. Sabemos que el Lagrangiano de una partícula puntual relativista libre de masa m parametrizada por τ (adimensional) viene dado por:

$$L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}, \quad (3.1)$$

donde $\dot{x}^\mu = \partial x^\mu / \partial \tau$. El momento asociado a este lagrangiano se calcula como:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \quad (3.2)$$

3.1. PARTÍCULA PUNTUAL CUÁNTICA RELATIVISTA

y las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan en, como era de esperar, la conservación en el tiempo de las componentes del momento:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.3)$$

Análogamente a como hicimos para la cuerda relativista en (2.146), para imponer el gauge del cono de luz establecemos:

$$x^+(\tau) = \frac{p^+}{m^2}\tau, \quad (3.4)$$

donde el factor m^{-2} nos garantiza que las unidades funcionen. Considerando la componente + de (3.2) tenemos:

$$p^+ = \frac{m\dot{x}^+}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m} \Rightarrow \dot{x}^2 = -\frac{1}{m^2}. \quad (3.5)$$

y combinando esto último con (3.2) resulta:

$$p_\mu = m^2\dot{x}_\mu. \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta la conservación de p_μ , a partir de (3.6) podemos resolver para la coordenada $-$:

$$\frac{dx^-}{d\tau} = \frac{1}{m^2}p^- \Rightarrow x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau \quad (3.7)$$

y para las coordenadas transversales:

$$\frac{dx^I}{d\tau} = \frac{1}{m^2}p^I \Rightarrow x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2}\tau, \quad (3.8)$$

donde x_0^- y x_0^I son constantes de integración. Resumiendo, utilizando el gauge del cono de luz, la solución de las ecuaciones del movimiento de la partícula puntual relativista libre son:

$$x^+(\tau) = \frac{p^+}{m^2}\tau, \quad x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau, \quad x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2}\tau. \quad (3.9)$$

A primera vista, para determinar la dinámica de la partícula es necesario conocer los valores arbitrarios de p^μ , x_0^- y x_0^I . No obstante, combinando (3.5) y (3.6) y desarrollando el producto escalar en las coordenadas del cono de luz se llega a:

$$p^2 + m^2 = 0 \Rightarrow -2p^+p^- + p^I p^I + m^2 = 0 \Rightarrow p^- = \frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2), \quad (3.10)$$

es decir, la componente $-$ del momento queda determinada por las componentes + y transversales y por la masa de la partícula. Así, de (3.9) concluimos que el movimiento

3.1. PARTÍCULA PUNTUAL CUÁNTICA RELATIVISTA

de una partícula puntual relativista libre de masa m está descrito por los parámetros arbitrarios independientes:

$$x_0^-, \quad x_0^I, \quad p^+, \quad p^I. \quad (3.11)$$

Llegados a este punto, pasamos a cuantizar la partícula. El procedimiento es el discutido en la Sección 1.2.1: en primer lugar y basándonos en lo visto hasta ahora elegiremos unas variables dinámicas ‘básicas’ a partir de las cuales se pueda describir el movimiento de la partícula. A continuación estableceremos relaciones de conmutación entre dichas variables, transformándolas así en operadores, tanto de Schrödinger como de Heisenberg. Seguidamente, definiremos el Hamiltoniano y comprobaremos que a partir de él se recuperan para nuestros operadores de Heisenberg las ecuaciones de movimiento clásicas que acabamos de deducir. Finalmente, definiremos el espacio de estados y los correspondientes estados físicos.

Como ya hemos visto, los parámetros (3.11) determinan el movimiento de la partícula relativista. No obstante, la simetría entre las coordenadas x^I y los momentos p^I resulta conveniente en la cuantización. Así, en lugar de considerar a x_0^I como variables dinámicas, consideramos a x^I , por lo que las variables dinámicas ‘básicas’ de nuestra partícula son:

$$x_0^-, \quad x^I, \quad p^+, \quad p^I. \quad (3.12)$$

A partir de estas variables definimos los operadores hermíticos de Schrödinger independientes del tiempo (los escribimos en **negrita** para diferenciarlos de sus autovalores):

$$\mathbf{Operadores de Schrödinger:} \quad (\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{x}^I, \quad \mathbf{p}^+, \quad \mathbf{p}^I) \quad (3.13)$$

y postulamos que todos sus conmutadores se anulan excepto:

$$[\mathbf{x}^I, \mathbf{p}^J] = i\eta^{IJ}, \quad [\mathbf{x}_0^-, \mathbf{p}^+] = i\eta^{-+} = -i. \quad (3.14)$$

Lo que estamos haciendo al imponer estas relaciones de conmutación es tener en cuenta el principio de incertidumbre de Heisenberg, por el cual es imposible medir simultáneamente la posición y el momento en una dirección determinada. A partir de los operadores básicos independientes (3.13) se construyen el resto de operadores de forma análoga a las expresiones clásicas (3.9) y (3.10), es decir:

$$\mathbf{x}^+(\tau) = \frac{\mathbf{p}^+}{m^2}\tau, \quad \mathbf{x}^-(\tau) = \mathbf{x}_0^- + \frac{\mathbf{p}^-}{m^2}\tau, \quad \mathbf{p}^- = \frac{1}{2\mathbf{p}^+}(\mathbf{p}^I\mathbf{p}^I + m^2). \quad (3.15)$$

Vemos como los operadores \mathbf{x}^+ y \mathbf{x}^- , a pesar de ser operadores de Schrödinger, tienen dependencia temporal explícita. Las relaciones de conmutación que involucren a los nuevos operadores (3.15) vienen determinadas por las relaciones (3.14).

3.1. PARTÍCULA PUNTUAL CUÁNTICA RELATIVISTA

Los correspondientes operadores básicos de Heisenberg dependientes implícitamente del tiempo son:

$$\textbf{Operadores de Heisenberg: } \quad (\mathbf{x}_0^-(\tau), \quad \mathbf{x}^I(\tau), \quad \mathbf{p}^+(\tau), \quad \mathbf{p}^I(\tau)). \quad (3.16)$$

De acuerdo con lo discutido en la Sección 1.2.1, sabemos que estos operadores deben satisfacer las mismas relaciones de conmutación que los operadores de Schrödinger, es decir, todos los conmutadores nulos salvo:

$$[\mathbf{x}^I(\tau), \mathbf{p}^J(\tau)] = i\eta^{IJ}, \quad [\mathbf{x}_0^-(\tau), \mathbf{p}^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i. \quad (3.17)$$

Además, de los operadores de Schrödinger (3.15) se obtienen los operadores de Heisenberg $\mathbf{x}^+(\tau)$, $\mathbf{x}^-(\tau)$ y $\mathbf{p}^-(\tau)$, de los cuales $\mathbf{x}^+(\tau)$ y $\mathbf{x}^-(\tau)$ presentan dependencia tanto explícita como implícita en el tiempo, mientras que $\mathbf{p}^-(\tau)$ solamente presenta dependencia implícita.

Nuestro siguiente paso es determinar el Hamiltoniano de nuestra partícula. Para ello nos basaremos en el hecho de que el Hamiltoniano debe generar la evolución temporal, es decir, $H \longleftrightarrow \partial/\partial\tau$. Por otro lado, sabemos que p^- es la energía del cono de luz, luego su operador asociado genera la evolución del tiempo del cono de luz x^+ , es decir, $p^- \longleftrightarrow \partial/\partial x^+$. Combinando estas dos identificaciones y utilizando la condición de gauge $x^+(\tau) = \frac{p^+}{m^2}\tau$:

$$\left. \begin{array}{l} H \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{p^+}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^+} \\ p^- \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^+} \end{array} \right\} \Rightarrow H \longleftrightarrow \frac{p^+}{m^2} p^-. \quad (3.18)$$

Esto nos sirve para postular nuestro Hamiltoniano de Heisenberg como:

$$\mathbf{H}(\tau) = \frac{\mathbf{p}^+(\tau)}{m^2} \mathbf{p}^-(\tau) \quad (3.19)$$

o, expresándolo en términos de nuestros operadores básicos:

$$\boxed{\mathbf{H}(\tau) = \frac{1}{2m^2} (\mathbf{p}^I(\tau) \mathbf{p}^I(\tau) + m^2)}. \quad (3.20)$$

El Hamiltoniano no tiene dependencia explícita temporal luego, de acuerdo con lo discutido en la Sección 1.2.1, es una constante del movimiento, $\mathbf{H}(\tau) = \mathbf{H}$.

A continuación, utilizamos este Hamiltoniano para determinar las ecuaciones del movimiento de nuestros operadores de Heisenberg. Lo esperado sería recuperar las ecuaciones del movimiento clásicas (3.3) y (3.6). Esto nos confirmaría que las relaciones de conmutación (3.14) y el Hamiltoniano (3.20) postulados son los correctos.

3.1. PARTÍCULA PUNTUAL CUÁNTICA RELATIVISTA

Como ya hemos comentado en la Sección 1.2.1, la evolución temporal de un operador de Heisenberg $\mathbf{A}(\tau)$ únicamente dependiente del tiempo de forma implícita viene determinada por:

$$i \frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau} = [\mathbf{A}(\tau), \mathbf{H}(\tau)], \quad (3.21)$$

mientras que para un operador de Heisenberg $\mathbf{B}(\tau)$ dependiente tanto implícita como explícitamente del tiempo:

$$i \frac{d\mathbf{B}(\tau)}{d\tau} = i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} + [\mathbf{B}(\tau), \mathbf{H}(\tau)]. \quad (3.22)$$

Así, la evolución temporal de nuestros operadores básicos (3.16) y de $\mathbf{p}^-(\tau)$ viene dada por (3.21), mientras que la de $\mathbf{x}^+(\tau)$ y la de $\mathbf{x}^-(\tau)$ viene dada por (3.22). Comenzamos por nuestros operadores básicos (para estos cálculos cabe recordar que el Hamiltoniano está constituido por los momentos transversales \mathbf{p}^I , los cuales conmutan con los demás operadores salvo con las coordenadas transversales \mathbf{x}^I):

$$\mathbf{p}^+ \longrightarrow i \frac{d\mathbf{p}^+(\tau)}{d\tau} = [\mathbf{p}^+(\tau), \mathbf{H}(\tau)] = 0. \quad (3.23)$$

$$\mathbf{p}^I \longrightarrow i \frac{d\mathbf{p}^I(\tau)}{d\tau} = [\mathbf{p}^I(\tau), \mathbf{H}(\tau)] = 0. \quad (3.24)$$

De momento vamos bien, las componentes + y transversales del momento se conservan, de acuerdo con la ecuación clásica (3.3). Veamos ahora \mathbf{x}_0^- :

$$\mathbf{x}_0^- \longrightarrow i \frac{d\mathbf{x}_0^-(\tau)}{d\tau} = [\mathbf{x}_0^-(\tau), \mathbf{H}(\tau)] = 0. \quad (3.25)$$

Como era de esperar, \mathbf{x}_0^- también se conserva, y es que clásicamente se trataba de una constante de integración. Con respecto a \mathbf{x}^I :

$$\mathbf{x}^I \longrightarrow i \frac{d\mathbf{x}^I(\tau)}{d\tau} = [\mathbf{x}^I(\tau), \mathbf{H}(\tau)] = \left[\mathbf{x}^I(\tau), \frac{1}{2m^2} (\mathbf{p}^I(\tau)\mathbf{p}^I(\tau) + m^2) \right] = i \frac{\mathbf{p}^I}{m^2}, \quad (3.26)$$

donde hemos utilizado la propiedad de los conmutadores $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$. De la anterior expresión se deduce:

$$\frac{d\mathbf{x}^I}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}^I}{m^2}, \quad (3.27)$$

de acuerdo con la ecuación clásica (3.6). Continuamos ahora con $\mathbf{p}^-(\tau)$:

$$\mathbf{p}^- \longrightarrow i \frac{d\mathbf{p}^-(\tau)}{d\tau} = [\mathbf{p}^-(\tau), \mathbf{H}(\tau)] = 0, \quad (3.28)$$

3.1. PARTÍCULA PUNTUAL CUÁNTICA RELATIVISTA

obteniendo de nuevo la conservación del momento en el tiempo. Finalizamos con los operadores \mathbf{x}^- y \mathbf{x}^+ , para los cuales debemos tener en cuenta (3.15):

$$\mathbf{x}^- \longrightarrow i \frac{d\mathbf{x}^-(\tau)}{d\tau} = i \frac{\partial \mathbf{x}^-}{\partial \tau} + [\mathbf{x}^-(\tau), \mathbf{H}(\tau)] = \frac{\mathbf{p}^-}{m^2}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{x}^+ \longrightarrow i \frac{d\mathbf{x}^+(\tau)}{d\tau} = i \frac{\partial \mathbf{x}^+}{\partial \tau} + [\mathbf{x}^+(\tau), \mathbf{H}(\tau)] = \frac{\mathbf{p}^+}{m^2}, \quad (3.30)$$

Recuperamos de nuevo la ecuación clásica (3.6). Habiendo comprobado que todos nuestros operadores de Heisenberg satisfacen las ecuaciones de movimiento clásicas, concluimos que las relaciones de conmutación (3.14) y el Hamiltoniano (3.20) postulados son los correctos.

Finalizamos estableciendo el espacio de estados y determinando los estados físicos. En mecánica cuántica los estados independientes del tiempo son etiquetados por un conjunto maximal de operadores conmutantes. De acuerdo con las relaciones de conmutación (3.14) concluimos que un conjunto de tales características solamente puede contener un operador de las parejas $(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}^I)$ y un operador de la pareja $(\mathbf{x}_0^-, \mathbf{p}^+)$. Existen cuatro posibilidades, y dado que normalmente se trabaja en el espacio de momentos, nos decantamos por los operadores \mathbf{p}^+ y \mathbf{p}^I . Así, denotamos a los estados estáticos de la partícula como:

$$\text{Estados estáticos de la partícula puntual: } |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.31)$$

donde p^+ es el autovalor de \mathbf{p}^+ y \vec{p}_T es el vector cuyas componentes son los autovalores de \mathbf{p}^I :

$$\mathbf{p}^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \mathbf{p}^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^I |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta (3.20), los autovalores del Hamiltoniano son:

$$\mathbf{H} |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.33)$$

Finalmente, dado que el Hamiltoniano es una constante del movimiento, los estados físicos de la partícula vienen dado por (1.54), en este caso:

$$|p^+, \vec{p}_T, \tau\rangle = \exp\left(-i \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) \tau\right) |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.34)$$

Resumidamente, una vez conocida la teoría clásica de la partícula puntual relativista, hemos cuantizado la teoría definiendo unos operadores básicos y postulado unas relaciones de conmutación y un Hamiltoniano. A partir de él hemos estudiado la evolución temporal de los operadores de Heisenberg, y dado que las ecuaciones del movimiento obtenidas coinciden con las ecuaciones clásicas, concluimos que las

relaciones de conmutación y el Hamiltoniano son correctos. Finalmente, hemos definido un espacio de estados estáticos a partir del momento de la partícula y, a través del Hamiltoniano, hemos definido los estados físicos, que satisfacen la ecuación de Schrödinger. Una vez ganada experiencia con la partícula puntual, a continuación nos sumergimos en las cuerdas abiertas con extremos libres. La dificultad aumenta, pero el procedimiento viene a ser análogo, por lo que los conocimientos que acabamos de adquirir nos resultarán útiles en lo que sigue.

3.2. Cuerdas abiertas con extremos libres

3.2.1. Cuantización de la cuerda relativista abierta con extremos libres

A continuación procedemos a cuantizar la teoría de cuerdas abiertas con extremos libres utilizando el gauge del cono de luz. La teoría clásica de este tipo de cuerdas, a la que nos referiremos continuamente a partir de ahora, la hemos estudiado en la Sección 2.2.3 del capítulo anterior, donde además utilizamos el gauge del cono de luz. El procedimiento que utilizaremos para cuantizar esta teoría es análogo al utilizado para cuantizar la partícula puntual relativista. En primer lugar y basándonos en la teoría desarrollada para la partícula cuántica relativista, elegiremos unas variables dinámicas ‘básicas’ a partir de las cuales podamos describir el movimiento de la cuerda. A continuación estableceremos relaciones de conmutación entre dichas variables, transformándolas así en operadores, tanto de Schrödinger como de Heisenberg. Finalmente, postularemos un Hamiltoniano y comprobaremos que a partir de él se recuperan para nuestros operadores de Heisenberg las ecuaciones de movimiento clásicas vistas en el capítulo anterior.

Basándonos en el éxito que tuvimos eligiendo las variables dinámicas independientes (3.12) para la partícula relativista, en este caso seleccionamos las variables dinámicas:

$$x_0^-, \quad X^I, \quad p^+, \quad \mathcal{P}^{\tau,I}. \quad (3.35)$$

Así, nuestros operadores hermíticos de Schrödinger independientes son:

$$\text{Operadores de Schrödinger:} \quad (\mathbf{x}_0^-, \quad \mathbf{X}^I(\sigma), \quad \mathbf{p}^+, \quad \mathcal{P}^{\tau,I}(\sigma)). \quad (3.36)$$

Análogamente a como hicimos para la partícula, postulamos que todos sus conmutadores se anulen excepto:

$$[\mathbf{X}^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [\mathbf{x}_0^-, \mathbf{p}^+] = i\eta^{-+} = -i, \quad (3.37)$$

donde se ha introducido una delta de Dirac que refleja el hecho de que solamente se produce interferencia en la medida de la posición y el momento cuando son toma-

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

das en el mismo punto de la cuerda. Los correspondientes operadores de Heisenberg dependientes implícitamente del tiempo son:

$$\text{Operadores de Heisenberg: } (\mathbf{x}_0^-(\tau), \mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{p}^+(\tau), \mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma)), \quad (3.38)$$

con sus correspondientes relaciones de conmutación, todas nulas excepto:

$$[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau, J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [\mathbf{x}_0^-(\tau), \mathbf{p}^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i. \quad (3.39)$$

A continuación debemos postular el Hamiltoniano. Análogamente a como razonamos para la partícula puntual, el Hamiltoniano debe generar la evolución temporal, es decir, $H \longleftrightarrow \partial/\partial\tau$. Además, sabemos que p^- es la energía del cono de luz, luego su operador asociado genera la evolución del tiempo del cono de luz X^+ , es decir, $p^- \longleftrightarrow \partial/\partial X^+$. En este caso, la condición de gauge de cono de luz es $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$, luego:

$$\left. \begin{aligned} H &\longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial\tau} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial x^+} \\ p^- &\longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^+} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H \longleftrightarrow 2\alpha' p^+ p^-. \quad (3.40)$$

Así, postulamos que nuestro Hamiltoniano de Heisenberg viene dado por:

$$\mathbf{H}(\tau) = 2\alpha' \mathbf{p}^+(\tau) \mathbf{p}^-(\tau). \quad (3.41)$$

No posee dependencia temporal explícita, luego este Hamiltoniano también es una constante del movimiento, $\mathbf{H}(\tau) = \mathbf{H}$. Además, recordando los modos transversales de Virasoro vistos en el capítulo anterior, de acuerdo con (2.159) el Hamiltoniano coincide con el modo, o en este caso operador, transversal de Virasoro \mathbf{L}_0^\perp :

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}_0^\perp. \quad (3.42)$$

Para comprobar que el Hamiltoniano nos devuelve las ecuaciones del movimiento clásicas, nos interesa escribirlo en función de los operadores básicos. Para ello tenemos en cuenta la expresión (2.148). De ella se deduce:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}^- + X^{-'} &= \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'} + 2\dot{X}^I X^{I'}) \\ \dot{X}^- - X^{-'} &= \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'} - 2\dot{X}^I X^{I'}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{X}^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'}). \quad (3.43)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Usando ahora la expresión (2.106) ($\mathcal{P}^{\tau,\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$) tanto para la coordenada – como para las coordenadas transversales, tenemos:

$$\mathcal{P}^{\tau,-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau,I} \mathcal{P}^{\tau,I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (3.44)$$

De esta forma, teniendo en cuenta que $p^- = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau,-}$, resulta:

$$\boxed{\mathbf{H}(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau,I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau,I}(\tau, \sigma) + \frac{\mathbf{X}^{I'}(\tau, \sigma) \mathbf{X}^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right)}. \quad (3.45)$$

Veamos ahora si este Hamiltoniano devuelve las ecuaciones del movimiento clásicas. Recordemos que, de acuerdo con lo visto en el capítulo anterior, dichas ecuaciones se reducían a simples ecuaciones de ondas:

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0. \quad (3.46)$$

Por un lado, utilizando (3.21), la evolución temporal de \mathbf{X}^I viene dada por :

$$\begin{aligned} i\dot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma) &= [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{H}(\tau)] \\ &= \left[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left(\mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') + \frac{\mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma')}{(2\pi\alpha')^2} \right) \right] \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') \right] \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left(\mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') \left[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') \right] \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') \right) \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' 2\mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma') i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= 2\pi i\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau,I}(\tau, \sigma') \delta(\sigma' - \sigma) = 2\pi i\alpha' \mathcal{P}^{\tau,I}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde en la tercera línea hemos utilizado:

$$[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma')] = \frac{\partial}{\partial \sigma'} [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] = 0, \quad (3.48)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

en la cuarta: $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, en la quinta la relación de conmutación (3.39) y en la sexta la simetría de la delta de Dirac: $\delta(x) = \delta(-x)$ y la propiedad:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad \text{en } (a, b). \quad (3.49)$$

Resumiendo, llegamos a:

$$\dot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma), \quad (3.50)$$

lo que a su vez implica:

$$\dot{\mathcal{P}}^{\tau, I}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \ddot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma). \quad (3.51)$$

Por otro lado, utilizando de nuevo (3.21), la evolución temporal de $\mathcal{P}^{\tau, I}$ viene dada por:

$$\begin{aligned} i\dot{\mathcal{P}}^{\tau, I}(\tau, \sigma) &= [\mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma), \mathbf{H}(\tau)] \\ &= \left[\mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left(\mathcal{P}^{\tau, J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau, J}(\tau, \sigma') + \frac{\mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma')}{(2\pi\alpha')^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' \left[\mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' \left(\mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \left[\mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \right] \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \right) \\ &= \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') i\eta^{IJ} \delta'(\sigma' - \sigma) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' \mathbf{X}^{I''}(\tau, \sigma') \delta(\sigma' - \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \mathbf{X}^{I''}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde en la tercera línea hemos utilizado: $[\mathcal{P}^{\tau, I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau, J}(\tau, \sigma')] = 0$, en la cuarta: $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, en la quinta la relación de conmutación (3.39) junto a $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}]$ y en la sexta la propiedad:

$$\int_a^b f(x)\delta'(x)dx = \int_a^b -f'(x)\delta(x)dx \quad (3.53)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

y la propiedad (3.49). Resumiendo, llegamos a:

$$\dot{\mathcal{P}}^{\tau,I}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \mathbf{X}^{I''}(\tau, \sigma) \quad (3.54)$$

Combinando (3.51) y (3.54) llegamos a nuestra ecuación de ondas deseada para las coordenadas transversales:

$$\ddot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma) - \mathbf{X}^{I''}(\tau, \sigma) = 0. \quad (3.55)$$

Aunque no lo haremos, de forma análoga aunque un poco más extensa y complicada es posible demostrar que del Hamiltoniano (3.45) también se obtiene la ecuación de ondas para la coordenada $-$.

Además, dado que tanto $\mathbf{x}_0^-(\tau)$ como $\mathbf{p}^+(\tau)$ conmutan con el Hamiltoniano, inmediatamente se concluye que son operadores constantes. Esto concuerda con la teoría clásica, en la cual \mathbf{x}_0^- es una constante de integración y el momento \mathbf{p}^+ se conserva en el tiempo.

Finalmente, con respecto a las condiciones de contorno, al cuantizar la teoría éstas simplemente se convierten en ecuaciones de operadores. En nuestro caso, la condición de extremos libres $\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma) = 0$ en $\sigma = 0, \pi$ se convierte en la ecuación:

$$\partial_\sigma \mathbf{X}^\mu(\tau, \sigma) = 0 \quad \text{en} \quad \sigma = 0, \pi, \quad (3.56)$$

es decir, el operador $\partial_\sigma \mathbf{X}^\mu$ se anula en los extremos.

Resumiendo, hemos definido unos operadores básicos (3.36) y partir de ellos hemos postulado las relaciones de conmutación (3.37) y el Hamiltoniano (3.45). A partir del Hamiltoniano hemos estudiado la evolución temporal de los operadores de Heisenberg, obteniendo unas ecuaciones del movimiento que concuerdan con las ecuaciones clásicas vistas en el capítulo anterior, lo que nos dice que estamos yendo por el buen camino. No obstante, la expresión correcta para el Hamiltoniano es ligeramente diferente, como veremos próximamente. Antes de eso, resulta útil reescribir las relaciones de conmutación (3.39) de una forma discreta, ya que la delta de Dirac no suele ser una buena compañera de viaje. Esto lo abordamos a continuación.

3.2.2. Relaciones de conmutación y operadores creación y aniquilación

Las relaciones de conmutación:

$$[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.57)$$

tienen una interpretación intuitiva según el principio de indeterminación: las medidas simultáneas de la posición y del momento de la cuerda interfieren mutuamente cuando

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

son tomadas en la misma dirección y en el mismo punto de la cuerda. No obstante, la presencia de la delta de Dirac dificulta su tratamiento, por lo que es conveniente reescribirlas de una forma alternativa más sencilla de manejar. Para ello, recordemos la solución explícita obtenida para las coordenadas transversales en la Sección 2.2.3:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (3.58)$$

donde x_0^I y α_n^I son parámetros arbitrarios. En su momento, para llegar a esta expresión partimos de la ecuación de ondas $\ddot{X}^\mu - X^{\mu\prime\prime} = 0$ para una cuerda con extremos libres en todas sus direcciones y satisfaciendo el gauge del cono de luz (2.146). Al cuantizar, de nuevo estamos considerando el gauge del cono de luz, y como acabamos de ver en la sección anterior, tanto la ecuación de ondas como las condiciones de contorno de extremo libre se mantienen. Así, la expansión (3.58) sigue siendo válida, en este caso en forma de operadores:

$$\mathbf{X}^I(\tau, \sigma) = \mathbf{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (3.59)$$

Queremos reescribir de forma discreta el conmutador entre $\mathbf{X}^I(\tau, \sigma)$ y $\mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma)$. De acuerdo con (3.50), $\mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma)$ también se puede escribir en términos de los coeficientes α_n^J . Así, nuestro objetivo es determinar las relaciones de conmutación entre los α_m^I y los α_n^J , y entre \mathbf{x}_0^I y los α_n^J . Comenzamos por α_m^I y α_n^J :

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = i? \quad (3.60)$$

En primer lugar utilizamos (3.50) para reescribir el conmutador (3.57) como:

$$[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi i \alpha' \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.61)$$

Tomando la derivada espacial con respecto a σ :

$$[\mathbf{X}^{I'}(\tau, \sigma), \dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi i \alpha' \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.62)$$

Consideramos ahora el conmutador:

$$[(\dot{\mathbf{X}}^I \pm \mathbf{X}^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{\mathbf{X}}^J \pm \mathbf{X}^{J'})(\tau, \sigma')]. \quad (3.63)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Aporta cuatro términos. Por un lado:

$$\begin{aligned}
\left[\dot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma), \dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma') \right] &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tau^2} [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] \right. \\
&\quad \left. - [\ddot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] - [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \ddot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma')] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tau^2} [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] \right. \\
&\quad \left. - [\mathbf{X}^{I''}(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] - [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J''}(\tau, \sigma')] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\tau^2} [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] \right. \\
&\quad \left. - \frac{d}{d\sigma^2} [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] - \frac{d}{d\sigma'^2} [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

donde hemos utilizado la ecuación de ondas (3.55). Los tres términos se anulan debido a la relación $[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] = 0$. Por otro lado:

$$\left[\mathbf{X}^{I'}(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \right] = \frac{d}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma'} [\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] = 0, \tag{3.65}$$

anulándose de nuevo debido a la relación $[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^J(\tau, \sigma')] = 0$. Por último, consideramos los términos cruzados:

$$\pm \left[\dot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \right] \pm \left[\mathbf{X}^{I'}(\tau, \sigma), \dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma') \right]. \tag{3.66}$$

El segundo término viene dado por (3.62), y el primero:

$$\begin{aligned}
\left[\dot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma), \mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma') \right] &= - \left[\mathbf{X}^{J'}(\tau, \sigma'), \dot{\mathbf{X}}^I(\tau, \sigma) \right] = -2\pi i \alpha' \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma) \\
&= 2\pi i \alpha' \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'),
\end{aligned} \tag{3.67}$$

donde hemos utilizado la propiedad: $\delta'(x) = -\delta'(-x)$. Así, ambos términos son iguales, luego:

$$\left[(\dot{\mathbf{X}}^I \pm \mathbf{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\mathbf{X}}^J \pm \mathbf{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi i \alpha' \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \tag{3.68}$$

y razonando análogamente:

$$\left[(\dot{\mathbf{X}}^I \pm \mathbf{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\mathbf{X}}^J \mp \mathbf{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0. \tag{3.69}$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Recordemos ahora la ecuación (2.150), válida también en forma de operadores:

$$\dot{\mathbf{X}}^I \pm \mathbf{X}^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (3.70)$$

Utilizamos esta expresión junto a (3.68) con el signo positivo para obtener:

$$2\alpha' \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 4\pi i \alpha' \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.71)$$

Esta expresión es válida para $\sigma, \sigma' \in [0, \pi]$. No obstante, como veremos a continuación, nos conviene que también sea válida para $\sigma, \sigma' \in [-\pi, 0]$. Para comprobarlo, a partir de (3.70) definimos una función 2π -periódica según:

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} = \begin{cases} (\dot{\mathbf{X}}^I + \mathbf{X}^{I'}) (\tau, \sigma) & \text{si } \sigma \in [0, \pi], \\ (\dot{\mathbf{X}}^I - \mathbf{X}^{I'}) (\tau, -\sigma) & \text{si } \sigma \in [-\pi, 0). \end{cases} \quad (3.72)$$

Si $\sigma \in [-\pi, 0)$ y $\sigma' \in [0, \pi]$ o viceversa, entonces la parte izquierda de (3.71) viene dada por (3.69), es decir, es nula. Por otro lado, la parte derecha también se anula ya que en este caso σ y σ' no pueden ser iguales. Si $\sigma, \sigma' \in [-\pi, 0)$, entonces la parte izquierda de (3.71) viene dada por:

$$\left[(\dot{\mathbf{X}}^I - \mathbf{X}^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{\mathbf{X}}^J - \mathbf{X}^{J'}) (\tau, -\sigma') \right], \quad (3.73)$$

y utilizando (3.68), esto es igual a:

$$-4\pi i \alpha' \eta^{IJ} \frac{d}{d(-\sigma)} \delta(-\sigma + \sigma') = 4\pi i \alpha' \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.74)$$

Concluimos así que efectivamente (3.71) es válida para $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$ o, equivalentemente, dada la 2π -periodicidad, para $\sigma, \sigma' \in [0, 2\pi]$. Cancelando el término $2\alpha'$ en (3.71) se llega finalmente a:

$$\sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.75)$$

Recordemos que estamos buscando una expresión para los conmutadores de la forma $[\alpha_m^I, \alpha_n^J]$. La forma más directa de sacar dichos conmutadores del sumatorio es aplicarle las integrales:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'}. \quad (3.76)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Al introducir las en la parte izquierda de (3.75) solamente sobrevive el término con $m' = m$ y $n' = n$:

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J]. \quad (3.77)$$

Al introducir las en la parte derecha resulta:

$$\begin{aligned} i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\ = i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{in\sigma} = -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\ = -n\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Así, igualando (3.77) y (3.78), finalmente llegamos a la relación deseada:

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \Rightarrow \boxed{[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}}. \quad (3.79)$$

En conclusión, dada una dirección transversal I , todos los operadores α_m^I y α_n^I conmutan entre sí salvo aquellos para los que la suma de sus subíndices se anula:

$$\dots [\alpha_{-1}^I, \alpha_1^I] = -1, \quad [\alpha_0^I, \alpha_0^I] = 0, \quad [\alpha_1^I, \alpha_{-1}^I] = 1, \quad \dots \quad (3.80)$$

Cabe destacar que el operador α_0^I conmuta con el resto de operadores. Esto tiene sentido, ya que por definición (2.124) recordemos que $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$, luego por la relación de conmutación canónica de la mecánica cuántica usual solo se espera que tenga conmutador no nulo con x_0^I . Una vez llegado a las relaciones (3.79), nos gustaría expresarlas de una forma que nos resulten familiares. Esto se consigue definiendo unos nuevos operadores \mathbf{a}_n , a los que nos referiremos como **osciladores**. Tomando como inspiración la definición (2.124), se definen como:

$$\alpha_n^I = \mathbf{a}_n^I \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = \mathbf{a}_{-n}^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1. \quad (3.81)$$

Una consecuencia de esta definición es que $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I \forall n \in \mathbb{Z}$. Cuando m y n son ambos positivos o negativos $m+n \neq 0$, por lo que el conmutador de (3.79) es 0, de lo que se deduce:

$$[\mathbf{a}_m^I, \mathbf{a}_n^J] = [\mathbf{a}_m^{I\dagger}, \mathbf{a}_n^{J\dagger}] = 0. \quad (3.82)$$

Por otro lado, cuando m es positivo y n negativo entonces (3.79) se reescribe como:

$$[\sqrt{m}\mathbf{a}_m^I, \sqrt{n}\mathbf{a}_n^{J\dagger}] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ} \Rightarrow [\mathbf{a}_m^I, \mathbf{a}_n^{J\dagger}] = \frac{m}{\sqrt{mn}}\delta_{m,n}\eta^{IJ}, \quad (3.83)$$

llegando finalmente a:

$$\boxed{[\mathbf{a}_m^I, \mathbf{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}}. \quad (3.84)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Recordando lo discutido en la Sección 1.2.2, hemos llegado a que los osciladores \mathbf{a}_m^I y $\mathbf{a}_m^{I\dagger}$ satisfacen las relaciones de conmutación propias de los operadores aniquilación y creación respectivamente del oscilador armónico cuántico. Para cada coordenada transversal I y para cada natural m existe una pareja de operadores creación y aniquilación. Esto puede interpretarse como que el movimiento de las coordenadas transversales viene dado por un compendio infinito de osciladores armónicos simples con frecuencias determinadas por los números naturales $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m^{I\dagger} &\longleftrightarrow \mathbf{a}_{-m}^I : && \text{Operadores creación.} \\ \mathbf{a}_m^I &\longleftrightarrow \mathbf{a}_m^I : && \text{Operadores aniquilación.} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Pasamos ahora a estudiar las relaciones de conmutación entre \mathbf{x}_0^I y los \mathbf{a}_n^J :

$$[\mathbf{x}_0^I, \mathbf{a}_n^J] = i? \quad (3.86)$$

Partimos de nuevo de la expresión:

$$[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi i \alpha' \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.87)$$

donde recordemos que $\mathbf{X}^I(\tau, \sigma)$ viene dado por la expansión:

$$\mathbf{X}^I(\tau, \sigma) = \mathbf{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (3.88)$$

Integramos a ambos lados de (3.87) con respecto a σ en el intervalo $[0, \pi]$. En el lado izquierdo los términos acompañando a los operadores α_n^I no contribuyen, ya que $\int_0^\pi \cos n\sigma d\sigma = 0$. En el lado derecho, la delta de Dirac aporta un factor 1. Así:

$$\left[\mathbf{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' i \eta^{IJ}. \quad (3.89)$$

Por simple visualización, escribimos explícitamente $\dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma')$:

$$\dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma') = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^J + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n' \neq 0} \alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} \cos n'\sigma'. \quad (3.90)$$

Como ya hemos comentado, α_0^I conmuta con el resto de operadores $\alpha_{n'}^J$, luego su término en (3.84) no contribuye y el conmutador se reduce a:

$$\left[\mathbf{x}_0^I, \dot{\mathbf{X}}^J(\tau, \sigma') \right] = 2i\alpha' \eta^{IJ}, \quad (3.91)$$

o equivalentemente:

$$\sum_{n' \in \mathbb{Z}} [\mathbf{x}_0^I, \alpha_{n'}^J] \cos n'\sigma' e^{-in'\tau} = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}. \quad (3.92)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Separando el término de $n' = 0$ del resto de términos:

$$[\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} \left[\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_{n'}^J e^{-in'\tau} + \boldsymbol{\alpha}_{-n'}^J e^{in'\tau} \right] \cos n'\sigma' = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}. \quad (3.93)$$

Aplicamos ahora a ambos lados el operador integral $\int_0^\pi d\sigma' \cos n\sigma'$. Los términos sin dependencia con σ' se hacen 0, ya que $\int_0^\pi \cos n\sigma d\sigma = 0$. Así, solamente tiene contribución no nula el sumatorio, del cual solamente sobrevive el término con $n' = n$:

$$\left[\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_n^J e^{-in\tau} + \boldsymbol{\alpha}_{-n}^J e^{in\tau} \right] = [\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_n^J] e^{-in\tau} + [\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_{-n}^J] e^{in\tau} = 0. \quad (3.94)$$

La única forma de que esta expresión sea válida para cualquier valor de τ es que ambos términos se anulen por separado. En consecuencia:

$$[\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_n^J] = 0 \quad \text{si } n \neq 0 \quad (3.95)$$

y, volviendo a (3.93):

$$[\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}. \quad (3.96)$$

En conjunto podemos escribir:

$$\boxed{[\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_n^J] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ} \delta_{n,0}.} \quad (3.97)$$

Teniendo en cuenta la definición (2.124), la relación (3.96) se reduce a la relación de conmutación canónica entre los operadores posición y momento:

$$\boxed{[\mathbf{x}_0^I, \mathbf{p}^J] = i\eta^{IJ}.} \quad (3.98)$$

Resumiendo, en esta sección hemos visto que las relaciones de conmutación continuas (3.57) de las coordenadas transversales resultan ser equivalentes a una colección numerable de relaciones entre operadores creación y aniquilación (3.84) y a la relación canónica entre la posición y el momento (3.98). Dado que en mecánica cuántica la información depositada en un operador viene dada por sus relaciones de conmutación, lo anterior implica que de aquí en adelante podamos olvidarnos de los operadores \mathbf{X}^I y $\mathcal{P}^{\tau,I}$ y podamos trabajar con los familiares operadores creación $\boldsymbol{\alpha}_n^{I\dagger}$ y aniquilación $\boldsymbol{\alpha}_n^I$ y los modos fundamentales \mathbf{x}_0^I y \mathbf{p}^I . Dado que los otros dos operadores que formaban nuestro conjunto de operadores básicos: \mathbf{x}_0^- y \mathbf{p}^+ , también son modos fundamentales, concluimos que el conjunto básico de operadores de la teoría cuántica de cuerdas abiertas con extremos libres está formado por cuatro modos fundamentales más una colección infinita de operadores creación y aniquilación.

3.2.3. Operadores de Virasoro

En la anterior sección hemos profundizado en el estudio de las coordenadas transversales $\mathbf{X}^I(\tau, \sigma)$. Del operador $\mathbf{X}^+(\tau, \sigma)$ no hay mucho que decir, ya que el gauge del cono de luz $\mathbf{X}^+(\tau, \sigma) = \mathbf{X}^+(\tau) = 2\alpha' \mathbf{p}^+ \tau$ lo especifica por completo. Por tanto, únicamente nos falta adentrarnos en el operador $\mathbf{X}^-(\tau, \sigma)$. Recordando lo visto en la Sección 2.2.3, la coordenada $X^-(\tau, \sigma)$ puede expresarse como:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (3.99)$$

donde

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (3.100)$$

son los llamados modos transversales de Virasoro, satisfaciendo:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad \left(2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp \right). \quad (3.101)$$

Para llegar a las anteriores expresiones hemos tratado a los coeficientes α_n^I como variables clásicas conmutativas. Al cuantizar la teoría hemos de tener cuidado con la definición de los ahora llamados **operadores transversales de Virasoro**, y es que los operadores α_n^I no necesariamente conmutan. Cuando $n \neq 0$ se tiene que $(n-p) + p = n \neq 0$, luego $\delta_{(n-p)+p,0} = 0$ y, de acuerdo con las relaciones de conmutación (3.79), α_{n-p}^I y α_p^I conmutan. Así, cuando $n \neq 0$ no hay problema en definir los operadores transversales de Virasoro como:

$$\mathbf{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I, \quad n \neq 0 \quad (3.102)$$

y afirmar que satisfacen la relación:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} \mathbf{L}_n^\perp, \quad n \neq 0, \quad (3.103)$$

es decir, hablar de los operadores de Virasoro \mathbf{L}_n^\perp es equivalente a hablar de los operadores α_n^- .

No obstante, cuando $n = 0$, de acuerdo con (3.79): $[\alpha_{-p}^I, \alpha_p^I] = -p \neq 0$. El conmutador no es nulo, luego la definición del operador \mathbf{L}_0^\perp dada por (3.100) y la satisfacción de la relación (3.101) no tienen por qué ser compatibles. Al final del capítulo anterior vimos como la variable clásica L_0^\perp participaba directamente en el cálculo de la masa de las cuerdas. Además, en la Sección 3.2.1 obtuvimos que, asumiendo la veracidad de (3.101), el operador \mathbf{L}_0^\perp y el Hamiltoniano coinciden. Dada su trascendencia, es obligatorio profundizar en sus propiedades y en sus consecuencias.

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Comenzamos definiendo el operador L_0^\perp de acuerdo con la expresión clásica (2.106) (más tarde lo redefiniremos si es necesario):

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I. \quad (3.104)$$

La simplicidad con la que actúan los operadores aniquilación sobre el estado vacío hace que nos interese que aparezcan a la derecha. De acuerdo con (3.85), esto se cumple para el primer sumatorio, pero no para el segundo. Así, reescribimos el segundo sumatorio como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{IJ} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Sustituyendo en (3.104):

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \quad (3.106)$$

Vemos como ordenar el operador L_0^\perp de manera que los operadores aniquilación se muevan a la derecha tiene como consecuencia la aparición de un término de ordenación: $\frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p$, que claramente diverge. Esto resulta bastante chocante, y no es algo que nos interese en absoluto. De momento, vamos a mantener la calma e ignorar parcialmente el problema. Por un lado, redefinimos el operador L_0^\perp ignorando el término de ordenación:

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I\dagger} \alpha_n^I, \quad (3.107)$$

de manera que sea un operador ‘bien ordenado’ (con los operadores aniquilación a la derecha) y sin términos divergentes. Además, las relaciones $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$ garantizan que L_0^\perp sea un operador hermítico. Por otro lado, teniendo en cuenta que el modo transversal de Virasoro clásico L_0^\perp satisface $2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp$, introducimos una constante de ordenación a que haga que dicha relación se siga satisfaciendo en forma de operadores:

$$2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + a). \quad (3.108)$$

Siendo estrictos, dicha constante de ordenación a se correspondería con el término $\frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p$. No obstante, por el momento la trataremos como una constante

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

indeterminada. Su determinación, si es que es posible (veremos que sí lo es), es un problema del futuro.

¿Cuáles son las consecuencias de haber redefinido el operador L_0^\perp e introducido la constante de ordenación a ? Por un lado, en la Sección 3.2.1 definimos el Hamiltoniano como $H = 2\alpha' \mathbf{p}^+ \mathbf{p}^-$. De acuerdo con esta definición y con la relación (3.108), el Hamiltoniano viene dado por:

$$H = L_0^\perp + a. \quad (3.109)$$

Puesto que L_0^\perp es hermítico, el Hamiltoniano también, como era de esperar. Por otro lado, haciendo el cálculo de la masa (en este caso operador) al igual que en (2.162) se llega a:

$$M^2 = -\mathbf{p}^2 = 2\mathbf{p}^+ \mathbf{p}^- - \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) - \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I = \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I\dagger} \alpha_n^I \right). \quad (3.110)$$

Comparando esta expresión con (2.163) se concluye que la constante de ordenación a genera un salto de a/α' en la masa al cuadrado de la cuerda.

Una vez estudiado con detenimiento el operador L_0^\perp , resulta interesante determinar las relaciones de conmutación de los operadores transversales de Virasoro. Aunque no lo haremos debido a su extensión, es posible demostrar (ref) que dichos operadores satisfacen:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m - n) L_{m+n}^\perp + \frac{D - 2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}. \quad (3.111)$$

Es decir, dos operadores de Virasoro diferentes nunca conmutan. El conmutador de dos operadores de Virasoro con números m y n resulta ser un nuevo operador de Virasoro con número $m + n$. Sí además $m + n = 0$, es decir, el operador resultante del conmutador es L_0^\perp , entonces aparece un término que depende de m y del número de dimensiones del espacio-tiempo D . Las relaciones de conmutación para los operadores de Virasoro contrastan con las obtenidas en (3.79) para los operadores α_n^I , los cuales conmutan siempre salvo cuando $m + n = 0$. Por último, también es posible demostrar que se cumple $(L_n^\perp)^\dagger = L_{-n}^\perp \forall n \in \mathbb{Z}$ o, equivalentemente, $(\alpha_n^-)^\dagger = \alpha_{-n}^- \forall n \in \mathbb{Z}$.

En resumen, en esta sección hemos estudiado el comportamiento bajo la cuantización de los operadores de Virasoro L_n^\perp o, equivalentemente, de los operadores α_n^- . Nos hemos detenido principalmente en el operador L_0^\perp debido a la ambigüedad de su definición, y hemos visto como la cuantización de la teoría provoca una modificación en el valor de la masa de la cuerdas. Dicha modificación depende de la constante de ordenación a que hemos introducido. Nuestro siguiente objetivo es determinarla, y lo haremos exigiendo la invariancia Lorentz de la teoría cuántica.

3.2.4. Invariancia Lorentz

En la Sección 2.1 vimos como la invariancia de la teoría de cuerdas clásica bajo transformaciones de Lorentz nos permitía determinar un conjunto de cargas conservadas:

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^{\sigma_1} (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau). \quad (3.112)$$

Al cuantizar un sistema clásico cabe la posibilidad de que se pierdan algunas simetrías presentes en la teoría clásica. Si la teoría cuántica que estamos desarrollando para la cuerdas abiertas perdiera la invariancia Lorentz entonces dejaría de ser válida y echaría por tierra todo lo que hemos estado haciendo. Una forma de comprobar que se mantiene esta simetría consiste en cuantizar las cargas conservadas $M_{\mu\nu}$, convertirlas en operadores y ver si se comportan como deberían. Veremos como la exigencia de que la teoría cuántica sea invariante Lorentz nos permite determinar el parámetro de ordenación a , y no solo eso... también fija el número de dimensiones de nuestro espacio-tiempo.

Comenzamos reescribiendo (3.112) en términos de los modos fundamentales y de los parámetros α_n^μ . Utilizando (2.106) ($\mathcal{P}^{\tau,\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$) tenemos:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma. \quad (3.113)$$

Por ser cargas conservadas, sabemos que $M_{\mu\nu}$ son independientes de τ . Así, de los productos $X^\mu \dot{X}^\nu$ y $X^\nu \dot{X}^\mu$ solamente contribuirán a la integral aquellos términos sin dependencia temporal. Explícitamente:

$$\begin{aligned} X^\mu &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma, \\ \dot{X}^\mu &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma, \end{aligned} \quad (3.114)$$

luego los términos $X^\mu \dot{X}^\nu$ no dependientes de τ son:

$$x_0^\mu \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu \cos^2 n\sigma. \quad (3.115)$$

Considerando los términos análogos para $X^\nu \dot{X}^\mu$, haciendo la integral y recordando la definición $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ resulta:

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \quad (3.116)$$

Debido a la antisimetría de $M^{\mu\nu}$, todas sus componentes no nulas se resumen en: M^{+-} , M^{+I} , M^{-I} y M^{IJ} con $I \neq J$. Por un lado, $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$, luego $x_0^+ = \alpha_n^+ = 0$ para $n \neq 0$. Así:

$$M^{+-} = -x_0^- p^+ \quad \text{y} \quad M^{+I} = -x_0^I p^+. \quad (3.117)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Una de las exigencias que le hemos de imponer a los operadores $M^{\mu\nu}$ es que tengan autovalores reales o, equivalentemente, que sean hermíticos. El producto de dos operadores hermíticos es hermítico si dichos operadores conmutan. Los operadores \mathbf{x}_0^- y \mathbf{p}^+ no conmutan ($[\mathbf{x}_0^-, \mathbf{p}^+] = -i$), pero lo podemos solucionar simetrizando el término y definiendo:

$$\mathbf{M}^{+-} = -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_0^- \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^+ \mathbf{x}_0^-). \quad (3.118)$$

Por otro lado, los operadores \mathbf{x}_0^I y \mathbf{p}^+ sí conmutan, luego simplemente definimos:

$$\mathbf{M}^{+I} = -\mathbf{x}_0^I \mathbf{p}^+. \quad (3.119)$$

Con respecto a \mathbf{M}^{IJ} con $I \neq J$, clásicamente tenemos:

$$\mathbf{M}^{IJ} = x_0^I p^J - x_0^J p^I - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^J - \alpha_{-n}^J \alpha_n^I). \quad (3.120)$$

Al tratarse de coordenadas transversales diferentes los operadores posición y momento conmutan, luego dichos términos son hermíticos. Con respecto al último término, se cumple $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$, luego también es hermítico. Además, está bien ordenado ya que los operadores aniquilación aparecen a la derecha de los operadores creación. Así, podemos definir:

$$\mathbf{M}^{IJ} = x_0^I p^J - x_0^J p^I - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^J - \alpha_{-n}^J \alpha_n^I). \quad (3.121)$$

Por último estudiamos los operadores de la forma \mathbf{M}^{-I} . Clásicamente:

$$\mathbf{M}^{-I} = x_0^- p^I - x_0^I p^- - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-). \quad (3.122)$$

Los operadores \mathbf{x}_0^- y \mathbf{p}^I conmutan, luego dicho término es hermítico y lo dejamos como está. Por otro lado, \mathbf{x}_0^I y \mathbf{p}^- no conmutan, luego dicho término debemos simetrizarlo al igual que hicimos en (3.118). Con respecto al último término, se cumple $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$ y $(\alpha_n^-)^\dagger = \alpha_{-n}^-$ luego también es hermítico. Además, los operadores α_n^- son equivalentes a los operadores de Virasoro, que como vimos en la sección anterior están bien ordenados. Con todo esto, definimos:

$$\mathbf{M}^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-). \quad (3.123)$$

Utilizando las relaciones (3.103) y (3.108), esto es equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-I} = & x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (\mathbf{L}_0^\perp + a) + (\mathbf{L}_0^\perp + a) x_0^I) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\mathbf{L}_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_n^I \mathbf{L}_n^\perp). \end{aligned} \quad (3.124)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Ya hemos convertido las cargas conservadas $M^{\mu\nu}$ en operadores hermíticos y bien ordenados. ¿Cómo podemos estudiar ahora si se mantiene la invariancia Lorentz? Una forma de verlo es comprobar que estos nuevos operadores satisfacen las relaciones de conmutación esperadas. Centrémonos en la relación de conmutación:

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0. \quad (3.125)$$

Este conmutador debe anularse ya que no se espera que se produzcan interferencias en las medidas simultáneas de una cantidad física en dos direcciones diferentes (análogamente a $[\mathbf{x}_0^I, \mathbf{x}_0^J] = 0$ y a $[\mathbf{p}^I, \mathbf{p}^J] = 0$). Utilizando (3.124), las relaciones de conmutación de los operadores de Virasoro (3.111) y las relaciones de conmutación de los operadores α_n^I (3.79) es posible demostrar (no lo haremos debido a su extensión y dificultad) que dicho conmutador resulta ser:

$$\begin{aligned} [M^{-I}, M^{-J}] &= \frac{1}{\alpha' p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \\ &\cdot \left(m \left(1 - \frac{1}{24}(D-2) \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24}(D-2) + a \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.126)$$

donde recordemos que D es el número de dimensiones de nuestro espacio-tiempo y a la constante de ordenación. No hay posibilidad de que los términos del sumatorio se anulen entre ellos, por lo que cada uno de los términos debe anularse independientemente. Así:

$$m \left(1 - \frac{1}{24}(D-2) \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24}(D-2) + a \right) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.127)$$

Para que esta expresión se anule para cualquier número natural, ambos términos entre paréntesis han de anularse por separado, es decir:

$$1 - \frac{1}{24}(D-2) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{24}(D-2) + a = 0. \quad (3.128)$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$\boxed{D = 26.} \quad (3.129)$$

Es decir, el espacio-tiempo de la teoría de cuerdas cuánticas abiertas tiene ni más ni menos que 26 dimensiones, 1 dimensión temporal y 25 dimensiones espaciales. De aquí en adelante el índice I de las coordenadas transversales recorrerá: $I = 2, \dots, 25$. Sustituyendo $D = 26$ en la segunda ecuación se obtiene el valor de la constante de ordenación:

$$\boxed{a = -1.} \quad (3.130)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

Con este valor de a la relación (3.108) pasa a escribirse:

$$2\alpha' \mathbf{p}^- = \frac{1}{\mathbf{p}^+} (\mathbf{L}_0^\perp - 1), \quad (3.131)$$

el Hamiltoniano (3.109):

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}_0^\perp - 1, \quad (3.132)$$

y el operador masa al cuadrado (3.110):

$$\mathbf{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{I\dagger} \mathbf{a}_n^I \right). \quad (3.133)$$

Resumiendo, queremos que la invariancia Lorentz sobreviva bajo la cuantización de nuestra teoría. Una condición necesaria para que se mantenga esta simetría viene dada por la relación de conmutación (3.125) o, equivalentemente, por que nuestro espacio-tiempo tenga $D = 26$ dimensiones y la constante de ordenación introducida en la sección anterior sea $a = -1$. Como consecuencia de esto último, la masa de la cuerdas disminuye en un factor $\frac{1}{\alpha'}$ con respecto al valor obtenido en la teoría clásica.

Recordemos que el verdadero valor de la constante de ordenación hallado en la sección anterior es $\frac{1}{2}(D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n$, a priori divergente. Nosotros ignoramos este problema de divergencia y la tratamos como si fuera una simple constante indeterminada a , sin preocuparnos por su verdadero valor. Finalmente hemos conseguido determinar $a = -1$. ¿Es compatible el valor obtenido imponiendo la invariancia Lorentz con el parámetro de ordenación verdadero discutido en la sección anterior? Sorprendentemente sí. El quid de la cuestión se encuentra en la función zeta de Riemann y en su interpretación de la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} n$. La función zeta de Riemann se define para los números complejos con parte real estrictamente positiva como:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \text{Re}(z) > 1. \quad (3.134)$$

Es posible extender analíticamente esta función para todo el plano complejo excepto para $z = 1$. Para $z = -1$ se obtiene:

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}, \quad (3.135)$$

resultado para nada intuitivo de la suma de todos los naturales, pero que no por ello deja de ser válido. De esta forma y ya teniendo en cuenta $D = 26$, el parámetro de ordenación verdadero resulta ser:

$$\frac{1}{2}(D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{24}(D-2) = -1, \quad (3.136)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

coincidiendo efectivamente con el valor obtenido imponiendo la invariancia Lorentz.

Finalizamos este capítulo construyendo e interpretando el espacio de estados de la teoría cuántica de cuerdas abiertas.

3.2.5. Espacio de estados

De acuerdo con lo discutido al final de la Sección 3.2.2, los operadores básicos de la teoría cuántica de cuerdas abiertas son un conjunto infinito de operadores creación y aniquilación: $(\mathbf{a}_n^{I\dagger}, \mathbf{a}_n^I)$, y dos parejas de modos fundamentales: $(\mathbf{x}_0^I, \mathbf{p}^I)$ y $(\mathbf{x}_0^-, \mathbf{p}^+)$. Estos modos fundamentales coinciden con los operadores básicos de la partícula cuántica relativista discutida en la Sección 3.1, luego al igual que hicimos entonces, consideramos los estados fundamentales:

$$\text{Estados fundamentales de la cuerda abierta: } |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.137)$$

donde p^+ es el autovalor de \mathbf{p}^+ y \vec{p}_T es el vector cuyas componentes son los autovalores de \mathbf{p}^I :

$$\mathbf{p}^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \mathbf{p}^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^I |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.138)$$

Estos estados fundamentales son tratados como estados vacíos por parte de los osciladores, de manera que son destruidos por los operadores aniquilación \mathbf{a}_n^I :

$$\mathbf{a}_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall I = 2, \dots, 25. \quad (3.139)$$

La forma de crear estados a partir de los estados fundamentales es muy sencilla: simplemente hacemos actuar sobre $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ los operadores creación $\mathbf{a}_n^{I\dagger}$. Recordemos que para cada una de las coordenadas transversales hay infinitos de estos operadores:

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1^{2\dagger} & \mathbf{a}_2^{2\dagger} & \dots & \mathbf{a}_n^{2\dagger} & \dots & \\ \mathbf{a}_1^{3\dagger} & \mathbf{a}_2^{3\dagger} & \dots & \mathbf{a}_n^{3\dagger} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{a}_1^{25\dagger} & \mathbf{a}_2^{25\dagger} & \dots & \mathbf{a}_n^{25\dagger} & \dots & \end{array} \quad (3.140)$$

Podemos escribir la base general de nuestro espacio de estados como:

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(\mathbf{a}_n^{I\dagger} \right)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.141)$$

donde el número entero no negativo $\lambda_{n,I}$ denota el número de veces que aparece cada operador creación $\mathbf{a}_n^{I\dagger}$. Nosotros nos limitaremos al caso en el que solamente haya un

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

número finito de operadores creación actuando sobre el estado fundamental, es decir, solamente un número finito de $\lambda_{n,I}$ son diferentes de 0. Dado que todos los operadores creación conmutan entre ellos, el orden en el que aparezcan resulta irrelevante. Los estados generales de nuestro espacio de estados se forman a partir de combinaciones lineales de los estados $|\lambda\rangle$. Al igual que hicimos para la partícula puntual, a partir de los estados estáticos $|\lambda\rangle$ podemos formar los estados físicos dependientes del tiempo como:

$$|\lambda, \tau\rangle = \exp(-i\mathbf{H}\tau) |\lambda\rangle = \exp(-i(L_0^\perp - 1)\tau) |\lambda\rangle. \quad (3.142)$$

Tratemos de interpretar nuestro espacio de estados. Para ello, detengámonos por un momento en el operador masa al cuadrado:

$$\mathbf{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{I\dagger} \mathbf{a}_n^I \right). \quad (3.143)$$

El operador presente en la masa al cuadrado es bastante interesante, y se le denomina **operador número** \mathbf{N}^\perp (equivalente al operador número (1.61) definido en el oscilador armónico):

$$\mathbf{N}^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{I\dagger} \mathbf{a}_n^I \Rightarrow \mathbf{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + \mathbf{N}^\perp) \quad (3.144)$$

De esta manera, de acuerdo con (3.107), $\mathbf{L}_0^\perp = \alpha' \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I + \mathbf{N}^\perp$. Algunas propiedades de \mathbf{N}^\perp muy sencillas de demostrar son, por un lado:

$$[\mathbf{N}^\perp, \mathbf{a}_n^{I\dagger}] = n \mathbf{a}_n^{I\dagger} \quad \text{y} \quad [\mathbf{N}^\perp, \mathbf{a}_n^I] = -n \mathbf{a}_n^I, \quad (3.145)$$

recordándonos a las relaciones (1.61) del oscilador armónico. Por otro lado, al ser un operador bien ordenado:

$$\mathbf{N}^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (3.146)$$

Como consecuencia de (3.145) y (3.146) se obtiene la propiedad más importante:

$$\mathbf{N}^\perp |\lambda\rangle = N_\lambda^\perp |\lambda\rangle \quad \text{con} \quad N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}. \quad (3.147)$$

Esta propiedad junto a (3.144) implica que cada operador creación $\mathbf{a}_n^{I\dagger}$ presente en el estado $|\lambda\rangle$ aporta n unidades de $1/\alpha'$ a la masa al cuadrado de la cuerda. Dado que los autovalores de \mathbf{N}^\perp son $N_\lambda^\perp = 0, 1, 2, \dots$, de acuerdo con (3.144) los posibles valores de la masa al cuadrado son:

$$\alpha' M^2 = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (3.148)$$

3.2. CUERDAS ABIERTAS CON EXTREMOS LIBRES

¡La masa está cuantizada! Se soluciona así el problema presente en la teoría clásica de cuerdas abiertas comentado al comienzo de este capítulo. Algo que resulta sorprendente es que cuando $N_\lambda^\perp = 0$, es decir, para los estados fundamentales, la masa al cuadrado resulta ser negativa:

$$\mathbf{M}^2|p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(-1 + \mathbf{N}^\perp)|p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'}|p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.149)$$

Los estados de la forma $|\lambda\rangle = |p^+, \vec{p}_T\rangle$ están asociados a partículas conocidas como **taquiones**, presentes en la teoría cuántica de campos escalares. Estas partículas, cuya masa es un número imaginario, son puramente teóricas y sugieren una posible inestabilidad de la teoría cuántica de cuerdas abiertas libres, es decir, inmersas en una D25-brana.

Consideremos ahora los estados excitados con menor masa. De acuerdo con (3.148) estos estados poseen una masa $M^2 = M = 0$, correspondiéndose con $N_\lambda^\perp = 1$, es decir, son aquellos estados $|\lambda\rangle$ en los que solamente aparece un operador creación de la forma $\mathbf{a}_1^{I\dagger}$. El índice transversal I recorre $I = 2, \dots, 25$, luego hay 24 estados de este tipo:

$$\mathbf{a}_1^{I\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \mathbf{M}^2\mathbf{a}_1^{I\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad I = 2, \dots, 25. \quad (3.150)$$

Es posible encontrar una analogía entre estos estados y los estados fotónicos de la teoría cuántica de campos electromagnéticos, pudiendo concluirse que están asociados a un campo electromagnético, se corresponden con **fotones**. Cada uno de los 24 estados (3.150) se corresponde con fotón con momento p^μ y con una polarización determinada. Para entender esto, consideremos nuestro espacio-tiempo usual de 4 dimensiones. Una onda electromagnética propagándose en cualquier dirección con un momento fijado puede escribirse como una superposición de dos ondas planas. Estas dos ondas planas representan dos estados de polarización diferentes. Al pasar a un espacio-tiempo de 26 dimensiones, los estados de polarización independientes dejan de ser 2 y pasan a ser 24. La cuantización de la teoría permite que existan estos estados fotónicos: si no hubiera un salto negativo de masa, solamente existiría un estado con masa nula y por tanto no habría polarización posible.

Para terminar, consideremos los estados con masa $M^2 = 1/\alpha'$. Estos estados, asociados a partículas conocidas como **tensores masivos**, se corresponden con $N_\lambda^\perp = 2$, es decir, son aquellos estados $|\lambda\rangle$ en los que aparece o bien un operador creación de la forma $\mathbf{a}_2^{I\dagger}$ o bien dos operadores creación de la forma $\mathbf{a}_1^{I\dagger}$. Existen un total de 324 de estados de este tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^{I\dagger}\mathbf{a}_1^{J\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \mathbf{M}^2\mathbf{a}_1^{I\dagger}\mathbf{a}_1^{J\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle &= \frac{1}{\alpha'}, \quad I, J = 2, \dots, 25. \\ \mathbf{a}_2^{I\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \mathbf{M}^2\mathbf{a}_2^{I\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle &= \frac{1}{\alpha'}, \quad I, J = 2, \dots, 25. \end{aligned} \quad (3.151)$$

3.3. Cuerdas cerradas

Una vez profundizado en la cuantización de las cuerdas abiertas, la cuantización de las cuerdas cerradas será mucho más ameno, y es que no solo el procedimiento es el mismo, sino que la mayoría de los cálculos son análogos a los que ya hemos hecho. Definimos los mismos operadores hermíticos de Schrödinger independientes que para la cuerda abierta:

$$\text{Operadores de Schrödinger: } (\mathbf{x}_0^-, \mathbf{X}^I(\sigma), \mathbf{p}^+, \mathcal{P}^{\tau,I}(\sigma)), \quad (3.152)$$

y postulamos exactamente las mismas relaciones de conmutación, es decir, todas nulas excepto:

$$[\mathbf{X}^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [\mathbf{x}_0^-, \mathbf{p}^+] = i\eta^{-+} = -i, \quad (3.153)$$

Así, los operadores de Heisenberg asociados y sus relaciones de conmutación son:

$$\text{Operadores de Heisenberg: } (\mathbf{x}_0^-(\tau), \mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathbf{p}^+(\tau), \mathcal{P}^{\tau,I}(\tau, \sigma)), \quad (3.154)$$

$$[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [\mathbf{x}_0^-(\tau), \mathbf{p}^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i. \quad (3.155)$$

De forma totalmente análoga a como hicimos anteriormente, postulamos el Hamiltoniano de Heisenberg:

$$\mathbf{H}(\tau) = \alpha' \mathbf{p}^+ \mathbf{p}^-, \quad (3.156)$$

en este caso con un factor 1 en lugar de 2 ya que el gauge del cono de luz es $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ en lugar de $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$. Si las relaciones de conmutación y el Hamiltoniano son correctos, entonces deberíamos recuperar para nuestros operadores de Heisenberg las ecuaciones del movimiento clásicas de una cuerda cerrada, es decir, ecuaciones de ondas. Hasta ahora la cuantización de las cuerdas cerradas ha sido equivalente a la cuantización de las cuerdas abiertas, para las cuales vimos como efectivamente se recuperaban las ecuaciones de ondas. Esto nos permite concluir lo mismo para el caso que nos concierne en el presente.

Al igual que hicimos para las cuerdas abiertas, nos gustaría expresar la relación de conmutación continua:

$$[\mathbf{X}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau,J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (3.157)$$

como una colección infinita numerable de relaciones de conmutación. Para ello, recordemos la expansión de las coordenadas transversales X^I en términos de los coeficientes α_n^I y $\bar{\alpha}_n^I$ (2.167), ahora en forma de operadores:

$$\mathbf{X}^I(\tau, \sigma) = \mathbf{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}). \quad (3.158)$$

3.3. CUERDAS CERRADAS

Basándonos en que los coeficientes $\bar{\alpha}_n$ y α_n resultaban de la expansión de X_L^I y X_R^I respectivamente, a los operadores $\bar{\alpha}_n^I$ nos referiremos como operadores a izquierda y a los α_n^I como operadores a derecha. Así, nuestro objetivo es hallar las relaciones de conmutación entre los operadores a izquierda y a derecha y \mathbf{x}_0^I . El procedimiento es el mismo que el seguido para cuerdas abiertas, y dado que las ecuaciones para los dos tipos de cuerdas resultan ser iguales (salvo porque para cuerdas cerradas existen dos tipos de operadores α_n^I y $\bar{\alpha}_n^I$ en lugar de uno), el trabajo sucio ya lo hemos hecho en la Sección 3.2.2. En su momento llegamos a las ecuaciones:

$$\left[(\dot{\mathbf{X}}^I \pm \mathbf{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\mathbf{X}}^J \pm \mathbf{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi i \alpha' \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.159)$$

y:

$$\left[(\dot{\mathbf{X}}^I \pm \mathbf{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\mathbf{X}}^J \mp \mathbf{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0, \quad (3.160)$$

que siguen siendo válidas en este caso ya que para su deducción se han utilizado expresiones comunes para los dos tipos de cuerdas. Para cuerdas cerradas, recordemos que habíamos llegado a las ecuaciones (2.141) para la suma y la resta de las derivadas de las coordenadas. En forma de operadores para las coordenadas transversales:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}^I + \mathbf{X}^{I'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \\ \dot{\mathbf{X}}^I - \mathbf{X}^{I'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

A diferencia de lo que ocurría para las cuerdas abiertas, en las que las ecuaciones (3.70) solamente eran válidas para $\sigma \in [0, \pi]$ y tuvimos que definir una función para poder trabajar en un intervalo de longitud 2π , en este caso las ecuaciones (3.161) son directamente válidas para $\sigma \in [0, 2\pi]$ (ya que ahora $\sigma_1 = 2\pi$). Procediendo de forma totalmente análoga a como hicimos para las cuerdas abiertas, es sencillo ver que se llega a las siguientes relaciones de conmutación para los operadores α_n^I y $\bar{\alpha}_n^I$:

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}. \quad (3.162)$$

Además, en este caso (3.160) nos permite concluir que los operadores a izquierda y a derecha conmutan:

$$[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^I] = 0. \quad (3.163)$$

Definimos los operadores \mathbf{a}_n^I y $\bar{\mathbf{a}}_n^I$ de forma análoga a como lo hicimos clásicamente en (2.173):

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu &= \mathbf{a}_n^\mu \sqrt{n} \quad \text{y} \quad \alpha_{-n}^\mu = \mathbf{a}_n^{\mu\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \\ \bar{\alpha}_n^\mu &= \bar{\mathbf{a}}_n^\mu \sqrt{n} \quad \text{y} \quad \bar{\alpha}_{-n}^\mu = \bar{\mathbf{a}}_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.164)$$

3.3. CUERDAS CERRADAS

y razonando idénticamente a como hicimos para las cuerdas abiertas obtenemos las relaciones de conmutación:

$$\boxed{[\mathbf{a}_m^I, \mathbf{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}, \quad [\bar{\mathbf{a}}_m^I, \bar{\mathbf{a}}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}.} \quad (3.165)$$

Dado que de nuevo se satisfacen las relaciones de conmutación propias de los operadores creación y aniquilación, concluimos que para coordenada transversal I y para cada natural n existen dos parejas de operadores creación y aniquilación:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m^{I\dagger} \longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{-m}^I \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{a}}_m^{I\dagger} \longleftrightarrow \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{-m}^I &: && \text{Operadores creación.} \\ \mathbf{a}_m^I \longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_m^I \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{a}}_m^I \longleftrightarrow \bar{\boldsymbol{\alpha}}_m^I &: && \text{Operadores aniquilación.} \end{aligned} \quad (3.166)$$

Con respecto a las relaciones de conmutación entre \mathbf{x}_0^I y los operadores a izquierda y a derecha, de forma análoga a como hicimos para cuerdas abiertas se llega a:

$$[\mathbf{x}_0^I, \boldsymbol{\alpha}_n^J] = [\mathbf{x}_0^I, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^J] = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} i\eta^{IJ} \delta_{n,0}, \quad (3.167)$$

y teniendo en cuenta la relación (2.144) y $\boldsymbol{\alpha}_0^I = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0^I$:

$$\boxed{[\mathbf{x}_0^I, \mathbf{p}^J] = i\eta^{IJ}.} \quad (3.168)$$

En conclusión, la teoría cuántica de cuerdas cerradas tiene como operadores básicos los mismos modos fundamentales que las cuerdas abiertas, es decir, $\mathbf{x}_0^-, \mathbf{p}^+, \mathbf{x}_0^I$ y \mathbf{p}^I , además de dos conjuntos de operadores creación y aniquilación $(\mathbf{a}_n^{I\dagger}, \mathbf{a}_n^I)$ y $(\bar{\mathbf{a}}_n^{I\dagger}, \bar{\mathbf{a}}_n^I)$ equivalentes a dos copias de los correspondientes operadores para cuerdas abiertas.

Con respecto a los operadores de Virasoro, la discusión es la misma que para cuerdas abiertas. Para $n \neq 0$ las relaciones de conmutación (3.162) nos permiten definir sin problema los operadores de acuerdo a su definición clásica dada en (2.169):

$$\bar{\mathbf{L}}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{n-p}^I \bar{\boldsymbol{\alpha}}_p^I, \quad \mathbf{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{\alpha}_{n-p}^I \boldsymbol{\alpha}_p^I, \quad (3.169)$$

y también concluir que satisfacen las relaciones clásicas:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^- = \frac{2}{\mathbf{p}^+} \bar{\mathbf{L}}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'} \boldsymbol{\alpha}_n^- = \frac{2}{\mathbf{p}^+} \mathbf{L}_n^\perp. \quad (3.170)$$

Sin embargo, para $n \neq 0$ de nuevo ha de tenerse en cuenta el orden de los operadores. Al igual que para cuerdas abiertas, por un lado definimos los operadores bien

3.3. CUERDAS CERRADAS

ordenados:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0^\perp &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_0^I \boldsymbol{\alpha}_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_{-p}^I \boldsymbol{\alpha}_p^I = \frac{\alpha'}{4} \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{I\dagger} \mathbf{a}_n^I, \\ \bar{\mathbf{L}}_0^\perp &= \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0^I \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{-p}^I \bar{\boldsymbol{\alpha}}_p^I = \frac{\alpha'}{4} \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{\mathbf{a}}_n^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_n^I, \end{aligned} \quad (3.171)$$

donde hemos utilizado las relaciones (2.138) ($\boldsymbol{\alpha}_0^I = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0^I$), (2.144) ($\boldsymbol{\alpha}_0^I = \sqrt{\alpha'/2} \mathbf{p}^I$) y (3.166). Por otro lado, introducimos constantes de ordenación en las relaciones clásicas (2.170):

$$\sqrt{2\alpha'} \boldsymbol{\alpha}_0^- = \frac{2}{\mathbf{p}^+} (\mathbf{L}_0^\perp + a), \quad \sqrt{2\alpha'} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_0^- = \frac{2}{\mathbf{p}^+} (\bar{\mathbf{L}}_0^\perp + b) \quad (3.172)$$

Utilizando de nuevo las relaciones (2.138) y (2.144) se llega a:

$$\mathbf{p}^+ \mathbf{p}^- = \frac{2}{\alpha'} (\mathbf{L}_0^\perp + a) = \frac{2}{\alpha'} (\bar{\mathbf{L}}_0^\perp + b). \quad (3.173)$$

Dado que los sectores izquierdo (operadores $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^I$ y $\bar{\mathbf{L}}_n^\perp$) y derecho (operadores $\boldsymbol{\alpha}_n^I$ y \mathbf{L}_n^\perp) se comportan como dos cuerdas abiertas independientes, los razonamientos de las Secciones 3.2.3 y 3.2.4 son perfectamente aplicables. Así, es posible demostrar que la imposición de la invariancia Lorentz de nuevo implica que la dimensionalidad del espacio-tiempo sea $D = 26$ y que las constantes de ordenación sean $a = b = -1$. Entonces, (3.173) se escribe como:

$$\mathbf{p}^+ \mathbf{p}^- = \frac{2}{\alpha'} (\mathbf{L}_0^\perp - 1) = \frac{2}{\alpha'} (\bar{\mathbf{L}}_0^\perp - 1), \quad (3.174)$$

lo que nos permite recuperar la relación clásica (2.171), ahora en forma de operadores:

$$\bar{\mathbf{L}}_0^\perp = \mathbf{L}_0^\perp. \quad (3.175)$$

Veamos las consecuencias que tiene la introducción de las constantes de ordenación en las relaciones (3.174). Por un lado, podemos reescribir el Hamiltoniano (3.156) como:

$$\mathbf{H} = \alpha' \mathbf{p}^+ \mathbf{p}^- = 2(\mathbf{L}_0^\perp - 1) = 2(\bar{\mathbf{L}}_0^\perp - 1) = \mathbf{L}_0^\perp + \bar{\mathbf{L}}_0^\perp - 2, \quad (3.176)$$

y el operador masa al cuadrado, basándonos en el desarrollo hecho para llegar a (2.176):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &= 2\mathbf{p}^+ \mathbf{p}^- - \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I = \frac{2}{\alpha'} (\mathbf{L}_0^\perp + \bar{\mathbf{L}}_0^\perp - 2) - \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I \\ &= \frac{2}{\alpha'} \left(-2 + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{\mathbf{a}}_n^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_n^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{I\dagger} \mathbf{a}_n^I \right). \end{aligned} \quad (3.177)$$

3.3. CUERDAS CERRADAS

Si comparamos esta expresión con la expresión clásica (2.176) vemos que la cuantización de la teoría resulta en una disminución de la masa de las cuerdas cerradas en un factor $\frac{4}{\alpha'}$ con respecto a la teoría clásica. El salto de masa debido a la cuantización es 4 veces mayor para cuerdas cerradas que para cuerdas abiertas. Ya que estamos aquí, definimos los **operadores número** N^\perp y \bar{N}^\perp como:

$$\left. \begin{aligned} N^\perp &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{I\dagger} \mathbf{a}_n^I \\ \bar{N}^\perp &= \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{\mathbf{a}}_n^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_n^I \end{aligned} \right\} \Rightarrow M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (3.178)$$

Teniendo en cuenta (3.171), se cumple:

$$L_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I + N^\perp, \quad \bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} \mathbf{p}^I \mathbf{p}^I + \bar{N}^\perp, \quad (3.179)$$

luego (3.175) implica:

$$N^\perp = \bar{N}^\perp. \quad (3.180)$$

Se trata de una igualdad de operadores. Dado que la definición última de un operador viene determinada por su acción sobre los estados, concluimos que los operadores N^\perp y \bar{N}^\perp deben tener los mismos autovalores al actuar sobre los estados de nuestra cuerda cerrada. Como veremos justo a continuación, esto influye en la construcción del espacio de estados de la teoría de cuerdas cerradas.

Al igual que para cuerdas abiertas, consideramos los estados fundamentales:

$$\mathbf{Estados\ fundamentales\ de\ la\ cuerda\ cerrada:} \quad |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.181)$$

donde p^+ es el autovalor de \mathbf{p}^+ y \vec{p}_T es el vector cuyas componentes son los autovalores de \mathbf{p}^I :

$$\mathbf{p}^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \mathbf{p}^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^I |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.182)$$

De nuevo, estos estados fundamentales son tratados como estados vacíos por parte de los osciladores, de manera que son destruidos por los operadores aniquilación \mathbf{a}_n^I y $\bar{\mathbf{a}}_n^I$:

$$\mathbf{a}_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall I = 2, \dots, 25, \quad (3.183)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall I = 2, \dots, 25.$$

En este caso existen dos tipos de operadores creación, a izquierda $\bar{\mathbf{a}}_n^{I\dagger}$ y a derecha $\mathbf{a}_n^{I\dagger}$, así que podemos definir los siguientes estados generales a partir del estado fundamental:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(\mathbf{a}_n^{I\dagger} \right)^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} \left(\bar{\mathbf{a}}_m^{J\dagger} \right)^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.184)$$

3.3. CUERDAS CERRADAS

Los operadores número actúan sobre estos estados como:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle &= N_\lambda^\perp |\lambda\rangle \quad \text{con} \quad N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}, \\ \bar{\mathbf{N}}^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle &= \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp |\lambda\rangle \quad \text{con} \quad \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} m \bar{\lambda}_{m,J}. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Como ya hemos discutido, la igualdad (3.180) implica que para que un estado $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ pertenezca a nuestro espacio de estados ha de satisfacer:

$$N_\lambda^\perp = \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp. \quad (3.186)$$

En definitiva y en conjunto, la base general de nuestro espacio de estados es:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\mathbf{a}_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\bar{\mathbf{a}}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.187)$$

$$\text{satisfaciendo:} \quad N_\lambda^\perp = \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp.$$

Por ejemplo, el estado $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = (\mathbf{a}_2^{I\dagger})^2 \bar{\mathbf{a}}_3^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ no pertenece a nuestro espacio de estados, ya que:

$$\mathbf{N}^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = 4|\lambda, \bar{\lambda}\rangle, \quad \bar{\mathbf{N}}^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = 3|\lambda, \bar{\lambda}\rangle. \quad (3.188)$$

Dado que los autovalores de \mathbf{N}^\perp y $\bar{\mathbf{N}}^\perp$ son $N_\lambda^\perp = \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp = 0, 1, 2, \dots$, de acuerdo con (3.178) los posibles valores de la masa al cuadrado son:

$$\alpha' M^2 = -4, 0, 4, 8, \dots \quad (3.189)$$

Como era de esperar, la cuantización de la teoría se traduce en una cuantización de la masa. Los estados fundamentales: $|\lambda\rangle = |p^+, \vec{p}_T\rangle$, con $N_\lambda^\perp = \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp = 0$, poseen una masa al cuadrado negativa: $M^2 = -\frac{4}{\alpha'}$, y de nuevo están asociados a **partículas escalares** o **taquiones**. La masa al cuadrado de los taquiones de las cuerdas cerradas es 4 veces mayor que la de los taquiones de las cuerdas abiertas. Al igual que para las cuerdas abiertas, la presencia de estas partículas evidencia la insostenibilidad de la teoría de cuerdas bosónicas y la necesidad de una teoría más allá, como la teoría de supercuerdas.

Centrémonos ahora en los estados excitados de menor masa. Estos estados cumplen $M^2 = M = 0$ y $N_\lambda^\perp = \bar{N}_{\bar{\lambda}}^\perp = 1$, es decir, son aquellos en los que aparece un operador creación a izquierdas y un operador creación a derechas, ambos con índice 1:

$$\mathbf{a}_1^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 \mathbf{a}_1^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad I, J = 2, \dots, 25. \quad (3.190)$$

3.3. CUERDAS CERRADAS

Hay un total de $24^2 = 576$ estados de este tipo. Fijado un momento p^μ , consideremos el estado general de masa $M = 0$:

$$\sum_{I,J} R_{IJ} \mathbf{a}_1^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.191)$$

donde R_{IJ} es una matriz cuadrada cualquiera de tamaño 24×24 . La matriz R_{IJ} , como cualquier otra matriz cuadrada, puede descomponerse como la suma de una matriz simétrica de traza nula \hat{S}_{IJ} , una matriz antisimétrica A_{IJ} y una matriz producto de la matriz identidad $S' \delta_{IJ}$:

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}. \quad (3.192)$$

$$\hat{S}_{IJ} = S_{IJ} - \frac{1}{24} \delta_{IJ} S \quad \text{con} \quad S_{IJ} = \frac{1}{2} (R_{IJ} + R_{JI}) \quad \text{y} \quad S = \delta^{IJ} S_{IJ},$$

$$A_{IJ} = \frac{1}{2} (R_{IJ} - R_{JI}),$$

$$S' = \frac{S}{24} \quad \text{con} \quad S = \delta^{IJ} S_{IJ}. \quad (3.193)$$

De esta forma, la combinación de estados (3.191) puede expresarse separadamente en tres grupos linealmente independientes:

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} \mathbf{a}_1^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.194)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} \mathbf{a}_1^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.195)$$

$$S' \mathbf{a}_1^{I\dagger} \bar{\mathbf{a}}_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.196)$$

Al igual que ocurría para las cuerdas abiertas y los estados fotónicos, es posible encontrar una analogía entre los estados (3.194) y los estados de gravitones de la teoría cuántica de campos gravitatorios. Cada uno de los estados que forman la combinación lineal (3.194) están asociados a **gravitones**. Dado que una matriz simétrica con traza nula de dimensión 24×24 tiene $\frac{1}{2}(24 \cdot 25) + 1 = 299$ componentes independientes, concluimos que para cada momento p^μ hay 299 estados de gravitones con polarizaciones independientes. Por otro lado, la combinación de estados (3.195) está asociada al **campo de Kalb-Ramond**, una generalización del campo electromagnético. Aunque no profundizaremos en ello, se dice que las cuerdas llevan carga de Kalb-Ramond. Por último, el estado (3.196) está asociado a un campo escalar de masa nula conocido como **dilaton**, cuyo valor esperado controla el acoplamiento de las cuerdas.

Capítulo 4

Cuerdas abiertas en D -branas

Hasta ahora, siempre que hemos tratado con cuerdas abiertas hemos considerado que sus extremos son libres en todas las direcciones, es decir, que están inmersos en una D -brana cubridora de espacio o, equivalentemente, en una $D25$ -brana. ¿Qué ocurre cuando los extremos satisfacen condiciones de Dirichlet en alguna dirección? Podemos reformular la pregunta como: ¿Qué ocurre cuando los extremos están sujetos a D -branas de menor dimensión? En este capítulo estudiaremos algún caso concreto de cuerdas abiertas sujetas a Dp -branas, con p no necesariamente igual a 25.

Antes de nada, conviene recordar el concepto de Dp -brana. Una Dp -brana es el hiperplano p -dimensional al que están sujetos los extremos de una cuerda satisfaciendo condiciones de Dirichlet en $n = d - p$ de sus coordenadas. Para visualizarlo, consideremos un espacio tridimensional, $d = 3$. Por un lado, si las coordenadas X^2 y X^3 satisfacen las condiciones de Dirichlet $X^2(\tau, 0) = X^2(\tau, \pi) = X^3(\tau, 0) = X^3(\tau, \pi) = 0$ y la coordenada X^1 satisface condiciones de extremo libre, entonces los extremos han de permanecer en el eje x^1 , en donde pueden moverse libremente. Dicho eje es una $D1$ -brana. La coordenada X^1 es tangencial a la $D1$ -brana, mientras que las coordenadas X^2 y X^3 son normales a la $D1$ -brana. Por otro lado, si solamente satisface las condiciones de Dirichlet la coordenada X^3 y la coordenada X^2 pasa a satisfacer condiciones de extremo libre, entonces los extremos han de permanecer en el plano (x^1, x^2) , donde pueden moverse libremente. Dicho plano es una $D2$ -brana. Las coordenadas X^1 y X^2 son tangenciales a la $D2$ -brana, y la coordenada X^3 es normal a la $D2$ -brana. Esta configuración se muestra en la Figura 4.1. Finalmente, si las tres coordenadas satisfacen condiciones de extremo libre entonces pueden moverse sin restricciones por todo el espacio tridimensional, tratándose de una $D3$ -brana o D -brana cubridora de espacio.

Volviendo a nuestro espacio de 25 dimensiones espaciales, las D -branas cubridoras de espacio ya han sido estudiadas en profundidad en los capítulos anteriores. En este

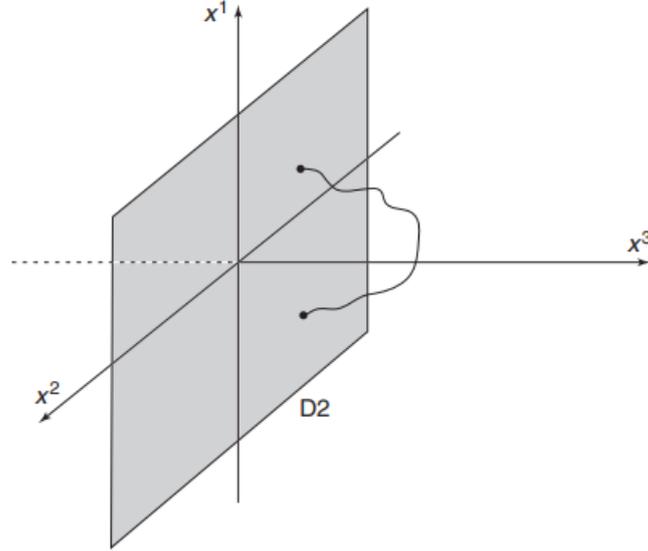


Figura 4.1: Cuerda abierta con ambos extremos sujetos a una $D2$ -brana.

capítulo estudiaremos las tres diferentes configuraciones alternativas más sencillas. Comenzaremos estudiando el caso más concreto, en el cual ambos extremos están sujetos a una misma Dp -brana. A continuación estudiaremos el caso en el que los extremos están sujetos a dos Dp -branas paralelas. Finalizaremos generalizando lo anterior al caso en el que un extremo está sujeto a una Dp -brana y el otro a una Dq -brana paralela, con $p \neq q$. Utilizaremos en todo momento el gauge del cono de luz.

4.1. Cuerdas abiertas en Dp -branas

En este primer caso consideramos una cuerda abierta en un espacio-tiempo $d + 1$ -dimensional cuyos extremos están sujetos a una misma Dp -brana. En un espacio tridimensional se correspondería, por ejemplo, con la configuración de la Figura 4.1. Los extremos satisfacen condiciones de extremo libre (condiciones de Neumann) en p direcciones espaciales, y condiciones de Dirichlet en las $d - p$ direcciones restantes. Análogamente a lo discutido para el espacio tridimensional, las coordenadas satisfaciendo condiciones de Neumann son tangenciales a la Dp -brana, mientras que las coordenadas satisfaciendo condiciones de Dirichlet son normales a la Dp -brana. Dado que la coordenada temporal siempre satisface condiciones de Neumann, podemos

4.1. CUERDAS ABIERTAS EN DP -BRANAS

agrupar todas las coordenadas como:

$$\underbrace{X^0, X^1, \dots, X^p}_{\substack{\text{coordenadas tangenciales} \\ \text{coordenadas NN}}}, \underbrace{X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d}_{\substack{\text{coordenadas normales} \\ \text{coordenadas DD}}} \quad (4.1)$$

donde NN y DD denotan Neumann-Neumann y Dirichlet-Dirichlet respectivamente. Las coordenadas tangenciales han de satisfacer las condiciones de contorno de Neumann:

$$X^{m'}(\tau, 0) = X^{m'}(\tau, \pi) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p, \quad (4.2)$$

y las coordenadas normales han de satisfacer las condiciones de contorno de Dirichlet:

$$X^a(\tau, 0) = X^a(\tau, \pi) = \hat{x}^a, \quad a = p + 1, \dots, d, \quad (4.3)$$

donde \hat{x}^a es un conjunto de $(d - p)$ constantes que fijan la posición de la Dp -brana. Para poder usar el gauge del cono de luz es necesario que haya una coordenada espacial que satisfaga condiciones de Neumann para así acompañar a X^0 en la definición de X^+ y X^- . Así, excluimos el caso $p = 0$ de nuestro estudio. Denotando por i a las coordenadas transversales de Neumann y por a a las coordenadas transversales de Dirichlet, agrupamos las coordenadas del cono de luz como:

$$\underbrace{X^+, X^-}_{NN}, \underbrace{\{X^i\}, \{X^a\}}_{DD}, \quad i = 2, \dots, p, \quad a = p + 1, \dots, d. \quad (4.4)$$

Nuestro objetivo final es estudiar como se modifica el espacio de estados con respecto al obtenido para la D -brana cubridora de espacio. El procedimiento va a ser el mismo que el utilizado anteriormente, pero en este caso debemos diferenciar entre los dos tipos de coordenadas. La ecuación (2.148), que relaciona las derivadas de la coordenada X^- con las derivadas de las coordenadas transversales, sigue siendo válida ahora, ya que para deducirla no se han utilizado las condiciones de contorno, simplemente se ha aplicado el gauge del cono de luz. La reescribimos separando las coordenadas tangenciales y normales:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = \frac{1}{4\alpha' p^+} \left((\dot{X}^i \pm X^{i'})^2 + (\dot{X}^a \pm X^{a'})^2 \right). \quad (4.5)$$

Además, todos los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para las coordenadas de las cuerdas abiertas con extremos libres siguen siendo válidos para las coordenadas tangenciales de la configuración que estamos discutiendo en el presente. Así, la ecuación (2.150) se satisface para las coordenadas tangenciales:

$$\dot{X}^i \pm X^{i'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^i e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (4.6)$$

4.1. CUERDAS ABIERTAS EN DP -BRANAS

Recordemos que la ecuación (4.5) fue de vital importancia tanto para hallar la relación entre los α_n^- y los α_n^I como para acabar determinando las relaciones de conmutación entre los osciladores. Así, para conocerla completamente, nos interesa conocer las expresiones $\dot{X}^a \pm X^{a'}$ para las coordenadas normales. Si son similares a (4.6) entonces iremos por buen camino. Partiendo de la solución general y de las condiciones de contorno:

$$X^a(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^a(\tau + \sigma) + g^a(\tau - \sigma)), \quad X^a(\tau, 0) = X^a(\tau, \pi) = \hat{x}^a, \quad (4.7)$$

es posible demostrar que la solución, escrita ya en términos de osciladores, es:

$$X^a(\tau, \sigma) = \hat{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma. \quad (4.8)$$

Si la comparamos con la solución (2.125) para una cuerda con extremos libres vemos como no existe una contribución dada por el momento de la cuerda, lo cual tiene sentido ya que en dichas direcciones los extremos han de permanecer fijos, lo que se incumpliría si hubiera una contribución de la forma $p^a \tau$. Además, las condiciones de contorno hacen que el término con dependencia espacial tenga forma de seno en vez de coseno. A partir de esta solución se obtienen las expresiones:

$$\dot{X}^a \pm X^{a'} = -\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^a e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (4.9)$$

Estas ecuaciones son muy similares a (4.6), lo que nos facilita enormemente el trabajo. Lo único que cambia es el signo menos y que $n = 0$ no contribuye en este caso. En cuanto a la cuantización del sistema, introducimos los operadores hermíticos \mathbf{X}^a y $\mathcal{P}^{\tau, a}$ con las correspondientes relaciones de conmutación:

$$[\mathbf{X}^a(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau, b}(\tau, \sigma')] = i\delta^{ab}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.10)$$

Cabe decir que al cuantizar la teoría los valores \hat{x}^a no se convierten en operadores, sino que siguen siendo números. La Dp -brana que estamos considerando está fijada, por lo que los valores \hat{x}^a no son parámetros que influyan en la descripción del movimiento de la cuerda.

El signo menos de (4.9) no influye en el desarrollo explicado en su momento para obtener las relaciones de conmutación entre los osciladores, luego concluimos que los operadores α_n^a de las coordenadas normales también satisfacen:

$$[\alpha_m^a, \alpha_n^b] = m\delta^{ab}\delta_{m+n,0}, \quad m, n \neq 0, \quad (4.11)$$

donde en este caso hemos excluido los operadores con número 0 ya que no existen. Definiendo los operadores \mathbf{a}_n^a y $(\mathbf{a}_n^a)^\dagger$ a partir de los α_n^a como siempre hicimos, de nuevo satisfacen las relaciones de conmutación de los operadores aniquilación y creación, luego siguen siendo interpretados como tal.

4.1. CUERDAS ABIERTAS EN DP -BRANAS

Definimos el operador de Virasoro L_0^\perp en analogía con (3.107), diferenciando ahora las coordenadas tangenciales y normales:

$$L_0^\perp = \alpha' \mathbf{p}^i \mathbf{p}^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{i\dagger} \mathbf{a}_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{a\dagger} \mathbf{a}_n^a. \quad (4.12)$$

El término del momento solo recoge las coordenadas tangenciales ya que, como ya hemos comentado, el momento de las coordenadas normales es nulo. Además, se sigue satisfaciendo la relación:

$$2\alpha' \mathbf{p}^- = \frac{1}{\mathbf{p}^+} (L_0^\perp - 1). \quad (4.13)$$

La determinación de la constante de ordenación y de la dimensionalidad $D = 26$ del espacio tiempo es análoga a la hecha para la D -brana cubridora de espacio. Finalmente, de acuerdo con (4.13), de igual forma a como hemos hecho hasta ahora se obtiene el operador masa al cuadrado:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{i\dagger} \mathbf{a}_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{a\dagger} \mathbf{a}_n^a \right). \quad (4.14)$$

Finalizamos construyendo el espacio de estados. Los estados fundamentales son etiquetados por $|p^+, \vec{p}\rangle$, donde ahora $\vec{p} = (p^2, \dots, p^p)$ solamente recorre las coordenadas transversales tangenciales. El resto de estados se obtienen haciendo actuar los operadores creación, tanto tangenciales $\mathbf{a}_n^{i\dagger}$ como normales $\mathbf{a}_n^{a\dagger}$:

$$|\lambda\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^p (\mathbf{a}_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^d (\mathbf{a}_m^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}} \right] |p^+, \vec{p}\rangle, \quad (4.15)$$

Los estados dependientes del tiempo: $|\lambda, \tau\rangle = e^{-i\mathbf{H}\tau} |\lambda\rangle$ dependen de τ , p^+ y p^i . Haciendo la transformada de Fourier, la dependencia de estas variables se corresponde respectivamente con dependencia en x^+ , x^- y x^i . Precisamente, estas son las coordenadas que forman la Dp -brana. Esto nos dice que los campos asociados a los estados (4.15) viven en la Dp -brana.

Fijado un momento p^μ , el estado fundamental $|p^+, \vec{p}\rangle$ posee una masa al cuadrado: $M^2 = -\frac{1}{\alpha'}$. Se trata de un estado taquiónico de igual masa que el encontrado para la D -brana cubridora de espacio.

Centrémonos ahora en el primer nivel excitado, cumpliendo $M^2 = 0$. Este estado posee o bien un operador creación tangencial $\mathbf{a}_1^{i\dagger}$ o bien un operador creación normal $\mathbf{a}_1^{a\dagger}$. Consideremos primero el caso:

$$\mathbf{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle, \quad M^2 \mathbf{a}_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad i = 2, \dots, p. \quad (4.16)$$

4.2. CUERDAS ABIERTAS ENTRE Dp -BRANAS PARALELAS

Se trata de $(p + 1) - 2$ estados sin masa cuyo índice vive en la Dp -brana. Se puede encontrar una analogía entre estos estados y los estados fotónicos (3.150) encontrados para la $D25$ -brana. En ese caso se hallaron 24 estados fotónicos, siendo $26 = 24 + 2$ la dimensionalidad del espacio-tiempo. En este caso se hallan $(p + 1) - 2$ estados, siendo $(p + 1)$ la dimensionalidad de la Dp -brana, espacio donde viven. Concluimos así que los estados (4.16) son estados fotónicos. Existe un campo electromagnético viviendo en la Dp -brana. Consideremos ahora el caso:

$$\mathbf{a}_1^{a\dagger}|p^+\vec{p}\rangle, \quad \mathbf{M}^2\mathbf{a}_1^{a\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad a = p + 1, \dots, d. \quad (4.17)$$

Son $(d - p)$ estados sin masa cuyos índices no viven en la Dp -brana, luego se corresponden con campos escalares. Hay un campo escalar viviendo en la Dp -brana por cada dirección normal a ella.

Resumiendo, hemos desarrollado una teoría para cuerdas abiertas con ambos extremos sujetos a una misma Dp -brana. Los cálculos han sido análogos a los realizados para una cuerda con extremos libres. Los estados fundamentales de nuevo se corresponden con estados taquiónicos. En el primer estado excitado nos encontramos tanto campos escalares como estados fotónicos.

Pasamos ahora al estudio de nuestro segundo caso de interés: cuerdas abiertas cuyos extremos están sujetos a dos Dp -branas paralelas.

4.2. Cuerdas abiertas entre Dp -branas paralelas

Consideramos una cuerda abierta en un espacio $d + 1$ -dimensional cuyos extremos $\sigma = 0$ y $\sigma = \pi$ están sujetos a sendas Dp -branas localizadas en $x^a = \hat{x}_1^a$ y $x^a = \hat{x}_2^a$ respectivamente. Cuando $\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a = 0^a$ entonces ambas Dp -branas coinciden y este caso se reduce al estudiado en la sección anterior. El procedimiento seguido para estudiar esta configuración es el mismo que para la anterior, luego omitiremos aún más el número de pasos que se muestran explícitamente. Seguimos teniendo $(p + 1)$ coordenadas Neumann-Neumann y $(d - p)$ coordenadas Dirichlet, luego de nuevo utilizaremos la notación:

$$\underbrace{X^+, X^-, \{X^i\}}_{NN} \underbrace{\{X^a\}}_{DD}, \quad i = 2, \dots, p, \quad a = p + 1, \dots, d. \quad (4.18)$$

En este caso las condiciones de contorno de las coordenadas normales son:

$$X^a(\tau, 0) = \hat{x}_1^a, \quad X^a(\tau, \pi) = \hat{x}_2^a, \quad a = p + 1, \dots, d, \quad (4.19)$$

y la solución obtenida es:

$$X^a(\tau, \sigma) = \hat{x}_1^a + (\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a)\frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma. \quad (4.20)$$

4.2. CUERDAS ABIERTAS ENTRE DP -BRANAS PARALELAS

De nuevo, no hay contribución por parte del momento de la cuerda en estas direcciones como consecuencia de las condiciones de contorno. No obstante, en este caso sí se puede definir el oscilador α_0^a como:

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^a = \frac{1}{\pi}(\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a). \quad (4.21)$$

La solución (4.20) genera las expresiones:

$$\dot{X}^a \pm X^{a'} = -\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^a e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (4.22)$$

que coincide con la expresión (4.9) de la sección anterior salvo porque ahora también se incluye $n = 0$. De esta forma, razonando idénticamente, cuantizamos directamente la teoría y definimos el operador de Virasoro L_0^\perp como:

$$L_0^\perp = \alpha' \mathbf{p}^i \mathbf{p}^i + \frac{1}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{i\dagger} \mathbf{a}_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{a\dagger} \mathbf{a}_n^a, \quad (4.23)$$

y afirmamos que satisface la relación (4.13). Utilizando (4.21), el operador masa al cuadrado resulta ser:

$$M^2 = \left(\frac{\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{i\dagger} \mathbf{a}_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{a\dagger} \mathbf{a}_n^a \right). \quad (4.24)$$

Cuando $\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a = 0$ entonces, como era de esperar, se recupera la ecuación (4.14). Vemos como hay una contribución a la masa por el hecho de estar estirada entre dos Dp -branas, y cuanto mayor sea la separación mayor es dicha contribución. Dado que la tensión de la cuerda es $T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'}$, este término se corresponde con la energía clásica de una cuerda estirada entre los dos hiperplanos. El espacio de estados sigue siendo representado por el estado general:

$$|\lambda\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^p (\mathbf{a}_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^d (\mathbf{a}_m^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}} \right] |p^+, \vec{p}\rangle. \quad (4.25)$$

Fijado un momento p^μ , el estado fundamental $|p^+, \vec{p}\rangle$ tiene una masa al cuadrado:

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} + \left(\frac{\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2. \quad (4.26)$$

Existe una separación crítica: $|\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a| = 2\pi\sqrt{\alpha'}$ para la cual el estado fundamental representa un campo escalar sin masa. Para separaciones menores, el estado fundamental es un estado taquiónico, y para separaciones mayores representa un campo

4.3. CUERDAS ABIERTAS ENTRE Dp - Y Dq -BRANAS PARALELAS

escalar masivo. Asumiendo una separación entre las Dp -branas positiva, el primer nivel excitado posee una masa:

$$M^2 = \left(\frac{\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 > 0. \quad (4.27)$$

Hay un total de $(d - p)$ estados de la forma $\mathbf{a}_1^{a\dagger}|p^+\vec{p}\rangle$. Dado que sus índices no viven en las Dp -branas, son campos escalares masivos. Por otro lado, hay $(p + 1) - 2$ estados de la forma $\mathbf{a}_1^{i\dagger}|p^+\vec{p}\rangle$, cuyos índices sí viven en las Dp -branas. De acuerdo con lo discutido en la sección anterior podríamos pensar que se trata de un campo electromagnético. Sin embargo, los campos electromagnéticos masivos en un espacio-tiempo D -dimensional no tienen $D - 2$ estados independientes, sino $D - 1$. Así, uno de los campos escalares $\mathbf{a}_1^{a\dagger}|p^+\vec{p}\rangle$ ha de unirse a los $(p + 1) - 2$ estados para formar un campo electromagnético. El estado en cuestión viene dado por:

$$\sum_a (\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a) \mathbf{a}_1^{a\dagger}|p^+\vec{p}\rangle, \quad (4.28)$$

donde el vector $\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a$ es normal a ambas Dp -branas y nos lleva de una a otra.

Finalizamos hablando sobre cuerdas abiertas cuyos extremos están sujetos a una Dp -brana y a una Dq -brana respectivamente.

4.3. Cuerdas abiertas entre Dp - y Dq -branas paralelas

Consideramos una cuerda abierta en un espacio $d + 1$ -dimensional cuyos extremos $\sigma = 0$ y $\sigma = \pi$ están sujetos respectivamente a una Dp -brana localizadas en $x^a = \hat{x}_1^a$ y a una Dq -brana localizada en $x^a = \hat{x}_2^a$, con $1 \leq q \leq p \leq 25$. En un espacio tridimensional un ejemplo sería la configuración que se muestra en la Figura 2.1. Cuando $p = q$ entonces se recupera el caso anterior. Ahora, además de direcciones NN y DD existen coordenadas que en el extremo $\sigma = 0$ satisfacen condición de Neumann mientras que en el extremo $\sigma = \pi$ satisfacen condición de Dirichlet. Así, introducimos la notación:

$$\underbrace{X^+, X^-}_{NN}, \underbrace{\{X^i\}}_{ND}, \underbrace{\{X^r\}}_{DD}, \underbrace{\{X^a\}}_{DD}, \quad i = 2, \dots, q; \quad r = q + 1, \dots, p; \quad a = p + 1, \dots, d. \quad (4.29)$$

Las coordenadas NN han sido estudiadas al considerar la $D25$ -brana en el capítulo anterior, y las coordenadas DD entre dos branas paralelas han sido estudiadas en la sección anterior. Así, únicamente debemos estudiar las coordenadas ND. Lo haremos muy resumidamente. Estas coordenadas satisfacen las condiciones de contorno:

$$X^{r'}(\tau, 0) = 0, \quad X^r(\tau, \pi) = \hat{x}_2^r, \quad r = q + 1, \dots, p. \quad (4.30)$$

4.3. CUERDAS ABIERTAS ENTRE DP - Y DQ -BRANAS PARALELAS

La solución obtenida es:

$$X^r = \hat{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\text{impar}}} \frac{2}{n} \alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}r} \cos \frac{n\sigma}{2}, \quad (4.31)$$

generando las expresiones:

$$\dot{X}^r \pm X^{a'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\text{impar}}} \alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}(\tau \pm \sigma)}. \quad (4.32)$$

El operador de Virasoro L_0^\perp se define como:

$$L_0^\perp = \alpha' \mathbf{p}^i \mathbf{p}^i + \frac{1}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{i\dagger} \mathbf{a}_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{a\dagger} \mathbf{a}_n^a + \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\text{impar}}} \frac{m}{2} \mathbf{a}_{\frac{m}{2}}^{r\dagger} \mathbf{a}_{\frac{m}{2}}^r, \quad (4.33)$$

y satisface la relación:

$$2\alpha' \mathbf{p}^- = \frac{1}{\mathbf{p}^+} (L_0^\perp + a). \quad (4.34)$$

En este caso hemos de tener cuidado con la constante de ordenación a . El hecho de que aparezcan números semienteros hace que el desarrollo no sea análogo al visto para la $D25$ -brana. En este caso es posible demostrar que:

$$a = -1 + \frac{1}{16}(p - q). \quad (4.35)$$

El operador masa al cuadrado resulta ser:

$$\mathbf{M}^2 = \left(\frac{\hat{x}_2^a - \hat{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{i\dagger} \mathbf{a}_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{a}_n^{a\dagger} \mathbf{a}_n^a + \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\text{impar}}} \frac{m}{2} \mathbf{a}_{\frac{m}{2}}^{r\dagger} \mathbf{a}_{\frac{m}{2}}^r \right). \quad (4.36)$$

Cuando $p = q$ entonces $a = -1$ y no hay coordenadas ND, luego se recupera la expresión (4.24), como era de esperar.

El espacio de estados se construye haciendo actuar cada uno de los tres tipos de operadores creación sobre los estados fundamentales $|p^+, \vec{p}\rangle$, con $\vec{p} = (p^2, \dots, p^a)$. Fijado el momento p^μ , el estado fundamental $|p^+, \vec{p}\rangle$ es un campo escalar que puede ser taquiónico, sin masa o masivo dependiendo de la separación de las D -branas y del valor $p - q$. El primer nivel excitado es de la forma $\mathbf{a}_{\frac{1}{2}}^{r\dagger} |p^+, \vec{p}\rangle$, correspondiéndose con $(p - q)$ campos escalares.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la teoría de cuerdas en su forma más simple: la teoría de cuerdas bosónica. Nuestro estudio comenzó en el Capítulo 2, donde estudiamos la dinámica de una cuerda relativista. Basándonos en la invariancia Lorentz y en la invariancia bajo reparametrización, dedujimos la acción en su forma más general, la acción de Nambu-Goto (2.17), a partir de la cual obtuvimos las ecuaciones del movimiento y las condiciones de contorno de la cuerda. A continuación hicimos uso de la invariancia bajo reparametrización para estudiar una clase de gauges temporales, con sus correspondientes parametrizaciones espaciales. El gauge estático nos permitió deducir que los extremos libres de una cuerda abierta se mueven a la velocidad de la luz. Haciendo uso del gauge general resolvimos las ecuaciones del movimiento para cuerdas abiertas con extremos libres y cuerdas cerradas, y mediante el gauge del cono de luz impusimos las condiciones de parametrización. Llegados a este punto, nos dimos cuenta de que la teoría de cuerdas relativistas no describe fielmente la física conocida, y es que es compatible con partículas con un espectro continuo de masas. Es necesario ir más allá, es necesario desarrollar una teoría cuántica.

A ello nos dedicamos en el Capítulo 3, donde utilizamos nuestros conocimientos adquiridos en el capítulo anterior para cuantizar la teoría. La teoría cuántica resultó estar reproducida por modos fundamentales y por un conjunto de operadores creación y aniquilación. Para garantizar su consistencia fue necesario introducir una constante de ordenación α' , y, como consecuencia, un salto en la masa de las cuerdas. Además, vimos como la invariancia de Lorentz no solo especifica dicho salto de masa sino que determina la dimensionalidad del espacio tiempo: $D = 26$. El espacio de estados se construyó haciendo actuar los operadores creación sobre los estados fundamentales, determinados por el momento de la cuerda. Para cuerdas abiertas con extremos libres obtuvimos estados fotónicos, y para cuerdas cerradas estados de gravitones.

Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos cuerdas abiertas cuyos extremos no son

libres, si no que están sujetos a diferentes configuraciones de D -branas. Aunque la discusión es análoga a la de extremos libres, vimos como la dificultad de estudio de este tipo de cuerdas aumenta. Obtuvimos campos electromagnéticos que viven en las branas, dando lugar a un número de estados fotónicos que depende de la dimensionalidad del espacio donde viven.

Ni en el postulado de la acción de Nambu-Goto ni en el postulado del Hamiltoniano cuántico hemos tenido en consideración la teoría de la relatividad general. Sin embargo, el estudio de las cuerdas cerradas ha dado lugar a estados de gravitones. Así, la teoría de cuerdas es una teoría en la que la gravedad surge por sí sola, y al ser una teoría cuántica, es una teoría cuántica de la gravedad. No obstante, como ya hemos comentado en el resumen inicial, la teoría de cuerdas bosónicas que hemos estudiado no es una teoría realista, ya que no incluye a las partículas fermiónicas. Para poder describir tanto a los bosones como a los fermiones es necesario considerar la teoría de supercuerdas, que a pesar de ser más complicada, utiliza muchos de los conceptos presentados en este trabajo. En ese caso, la invariancia Lorentz impone que la dimensionalidad del espacio tiempo sea 10 en lugar de 26. Además, la teoría de supercuerdas no da cabida a los taquiones, solucionando así la inestabilidad de la teoría bosónica.

De esta forma, la teoría de supercuerdas es una teoría cuántica de la gravedad que incluye tanto a las partículas constituyentes de la materia como a las partículas mediadoras de las interacciones, presentándose así como la principal candidata a ser una teoría del todo. No obstante, se espera que aún falten largos años para poder verificarla experimentalmente. Un posible modo sería detectar dimensiones extra. Otro, descubrir experimentalmente la supersimetría, muy presente en la teoría de supercuerdas. En cualquier caso, un correcto entendimiento de la teoría es necesario para su verificación, por lo que el futuro trabajo de nuestros investigadores se antoja clave para alcanzar la ansiada teoría del todo.

Bibliografía

- [1] B. Zwiebach. (2004). A First Course in String Theory. Cambridge University Press.