Trabajo Fin de Estudios
Grado en matemáticas
Curso 2021-2022

Juegos cooperativos y probabilidades inferiores: el papel del índice de interacción

Autora:
Carmen Émbil Villagrá
Tutor:
Ignacio Montes Gutiérrez

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Fecha de Presentación: 15/07/2022

Índice general

Resumen **3**

1. Teoría de Juegos y Teoría de Probabilidades Imprecisas **4**
1.1. Juegos cooperativos 4
1.1.1. Primeros conceptos e interpretaciones 4
1.1.2. Derivada y propiedades 6
1.1.3. Core de un juego y juegos balanceados 8
1.1.4. Solución de un juego: el valor de Shapley y el valor de Banzhaf 10
1.2. Probabilidades imprecisas 11
1.2.1. El conjunto credal y las probabilidades inferiores coherentes 12
1.2.2. Interpretaciones 16
1.2.3. Probabilidades 2-monótonas y completamente monótonas 19
1.2.4. Otros modelos de probabilidades inferiores 22
1.3. Conexión entre ambas teorías 26

2. Índice de interacción **29**
2.1. Definición e interpretación 29
2.2. Interacción positiva y negativa 30
2.2.1. $\underline{P}$ coherente y no 2-monótona 31
2.2.2. $\underline{P}$ 2-monótona 32
2.2.3. Probabilidades comparativas 33
2.3. Expresión alternativa 34
2.3.1. Índice de interacción en términos de m 35
2.3.2. Linear Vacuous y Pari Mutuel Model 36
2.3.3. Probabilidades inferiores minitivas 40

3. Soluciones del juego basadas en el índice de interacción **43**
3.1. Primera aproximación 44
3.2. Segunda aproximación 50
3.3. Solución final 53

3.3.1. Comparación con Shapley y Banzhaf 59

4. Ejemplo real **61**
4.1. Solución de Shapley y solución de Banzhaf 64
4.2. Solución propia 65

5. Conclusiones **69**

A. Códigos **72**
A.1. 'ModuloTFG.py' 72
A.2. 'Ejemplo_2-1.py' 76
A.3. 'Ejemplo_2-2.py' 76
A.4. '2mon-extremos.py' 76
A.5. 'ExtremosConS0.py' 78
A.6. 'Ejemplo_3-3.py' 79
A.7. 'Solucion_3-4.py' 80
A.8. 'InnerApprox.py' 81
A.9. 'EjemploCapitulo4.py' 83

Bibliografía **84**

Resumen

La teoría de las probabilidades imprecisas ha sido desarrollada durante las últimas décadas con el objetivo de modelar experimentos y situaciones que no tienen la información necesaria para poder hacer uso de medidas de probabilidad. Por su parte, la teoría de juegos cooperativos estudia el comportamiento de una serie de agentes o jugadores en un problema de decisión en el que pueden agruparse para buscar un mayor beneficio común. En este trabajo conseguiremos construir un puente entre ambas, que utilizaremos para tratar problemas de la teoría de juegos desde la perspectiva de las probabilidades imprecisas.

Para ello dividimos la memoria en cuatro capítulos. En el primero describiremos las dos teorías por separado, en concreto nos centraremos en las probabilidades inferiores y los juegos cooperativos, logrando conectarlos matemáticamente. Una vez asentado este paralelismo estudiamos durante el capítulo 2 el índice de interacción: un concepto procedente de la teoría de juegos cooperativos sobre el que derivaremos una serie de resultados propios relacionándolo con las probabilidades imprecisas. El capítulo 3 es la parte más original y creativa del trabajo, en él se desarrollan una serie de soluciones basadas en este índice de interacción para juegos cooperativos. Se llegan a presentar hasta cuatro soluciones distintas, de las cuales dos presentan unas "buenas" propiedades bajo un tipo de probabilidades inferiores determinadas. Finalmente, en el capítulo 4 aplicamos estas dos soluciones a un problema real de cadenas de distribución. Así, seremos capaces de perfeccionar nuestras soluciones para que mantengan sus propiedades sobre cualquier tipo de probabilidad inferior y las compararemos con las soluciones consideradas como óptimas desde hace décadas en la teoría de juegos.

Como ya se adelantó, a lo largo del trabajo se desarrollaron una serie de resultados propios que se se identificarán en la memoria con la etiqueta (propio). Además, también se encontraron contraejemplos para completar ciertas secciones y ejemplos ilustrativos, siendo originales todos aquellos que no están citados. Por otro lado, los algoritmos de las soluciones presentadas en el capítulo 3 también son completamente originales, así como los programas informáticos desarrollados para implementarlos (a excepción de los que están citados) y que se presentan en los anexos.

Capítulo 1

Teoría de Juegos y Teoría de Probabilidades Imprecisas

Empezamos el trabajo introduciendo los conceptos básicos de las dos teorías que pretendemos conectar: las probabilidades inferiores y la teoría de juegos cooperativos. Realizaremos el análisis de ambas con la terminología y el enfoque que se hace en cada uno de los casos por separado. Así, en una última sección resumiremos los aspectos que las dos teorías tienen en común y además fijaremos la notación que utilizaremos durante el resto de la memoria.

1.1. Juegos cooperativos

Presentamos a continuación los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos que utilizaremos durante el resto del trabajo. En primer lugar haremos una introducción puramente matemática para la cual seguiremos mayoritariamente [3], utilizando la misma terminología y notación de esta referencia. Tras esto le daremos un sentido más aplicado y vemos cómo utilizaremos estos conceptos en el estudio de los juegos comparativos. Finalmente, presentamos las soluciones a juegos cooperativos más comúnmente utilizadas: el valor de Shapley y el valor de Banzhaf.

1.1.1. Primeros conceptos e interpretaciones

En la teoría de los juegos cooperativos se trabaja con las llamadas funciones de conjunto. Esta es la estructura más básica que abordaremos en el trabajo. Antes de dar su definición formal, dejemos claro que consideraremos que el conjunto de jugadores será finito y que será denotado por $X = \{x_1, ..., x_n\}$, siendo 2^X el conjunto de partes de X.

Definición 1.1. *Una **función de conjunto** en X es una aplicación $\xi : 2^X \longrightarrow \mathbb{R}$ que le asigna un número real a cada subconjunto de X.*

Se puede observar que en la definición anterior no se impone ninguna condición sobre la función. Sin embargo, las funciones de conjunto pueden satisfacer propiedades adicionales como las que se detallan a continuación. Estas son importantes puesto que las funciones de conjunto recibirán distintos nombres dependiendo las propiedades que satisfagan.

Definición 1.2. *Sea ξ una función de conjunto. Se definen las siguientes propiedades:*

1 *Aditividad:* $\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B)$ *para todo* $A, B \subseteq X$ *cumpliendo* $A \cap B = \emptyset$.

2 *Monotonía:* $\xi(A) \leq \xi(B) \quad \forall A \subseteq B$.

3 *Condición de vacío:* $\xi(\emptyset) = 0$.

4 *Normalización:* $\xi(X) = 1$

Veamos ahora cómo se definen los diferentes tipos de funciones de conjunto con los que se suele trabajar: juegos, capacidades y medidas de probabilidad. De aquí al final de la sección utilizaremos símbolos concretos para cada uno de ellos: ξ para funciones de conjunto generales, v para juegos y μ para capacidades.

Definición 1.3. *Sea ξ una función de conjunto, se dice que ξ es:*

- *Un* ***juego*** *cuando cumple la propiedad 3 ($\xi(\emptyset) = 0$).*
- *Una* ***medida*** *si es no negativa y cumple la propiedad de aditividad. Si además está normalizada nos encontramos ante una* ***medida de probabilidad****.*
- *Una* ***Capacidad*** $\mu : 2^X \longrightarrow \mathbb{R}$ *si cumple la propiedad de monotonía y la condición de vacío. También se les llama juegos monótonos y pueden estar normalizados.*

A partir de cualquier función de conjunto se define a su vez una función de conjunto conjugada.

Definición 1.4. *Sea ξ una función de conjunto cualquiera, se define su función conjugada como:*

$$\overline{\xi}(A) = \xi(X) - \xi(A^c) \ ,$$

para todo $A \subseteq X$.

A partir de esta definición, podemos obtener una versión simplificada en caso de estar trabajando con una capacidad normalizada:

$$\overline{\mu}(A) = 1 - \mu(A^c) \ . \tag{1.1}$$

Se cumplen automáticamente las siguientes propiedades para estos tipos de funciones:

Propiedades 1.1 ([3], Theorem 2.2)**.** *Sea ξ una función de conjunto cualquiera, su función conjugada cumple:*

- *Si la función de conjunto cumple la condición de vacío, $\xi(\emptyset) = 0$, entonces se cumple que $\overline{\xi}(X) = \xi(X)$, y conjugando dos veces se recupera la función de conjunto original: $\overline{\overline{\xi}} = \xi$.*
- *Si ξ es monótona, entonces $\overline{\xi}$ también lo será.*
- *Si ξ es aditiva entonces coincide con su conjugada: $\xi = \overline{\xi}$.*

Con las dos primeras propiedades tenemos que si ξ es un juego o capacidad normalizada, entonces $\overline{\xi}$ también lo será.

Veamos ahora alguna de sus interpretaciones. En teoría de juegos cooperativos trabajaremos exclusivamente con juegos monótonos normalizados μ. Estaremos modelando un problema de decisión con un conjunto de jugadores X que deberán agruparse en distintas coaliciones entre las que finalmente se repartirá un determinado premio. Formalmente, una coalición será un subconjunto $A \subseteq X$, y el valor del juego $\mu(A)$ indicará la ganancia mínima exigida por la coalición A. Una de las razones por las que elegir juegos normalizados es que nos permite trabajar de forma general, de manera que para cualquier situación nuestro premio total a repartir será igual a 1. Esto no es una restricción, sino que cualquier juego puede normalizarse dividiendo entre el valor del premio total.

La información que tendremos entonces para encontrar una posible solución a un juego determinado es la ganancia mínima asegurada para cada uno de los jugadores y las coaliciones posibles, y será lo que venga descrito por nuestra capacidad normalizada μ. Hay varias maneras de fijar esta μ, una de ellas es que, dependiendo del problema y en base a unos criterios acordados se asigna a cada uno de los jugadores y coaliciones la cantidad mínima "justa" que deberían llevarse. Otra a la que haremos alusión es que cada uno de los jugadores exige cuál es esta cantidad mínima que recibir al terminar el juego.

1.1.2. Derivada y propiedades

Para seguir con este estudio presentemos previamente la definición de derivada en este contexto. Esta será crucial para definir el concepto central del trabajo: el índice de interacción.

Definición 1.5. *Sea ξ una función de conjunto cualquiera en X, consideramos el subconjunto $A \subseteq X$, y un elemento $x \in X$. Entonces la derivada de ξ en A con respecto a x se define como:*

$$\Delta_x \xi(A) = \xi(A \cup \{x\}) - \xi(A \backslash \{x\}) \ .$$

Notar que la propia función $\Delta_x\xi : 2^X \to \mathbb{R}$ es también una función de conjunto $\forall x \in X$ y por tanto, nos permite hacer derivadas a mayor orden con respecto a distintos índices.

Veamos el caso de las derivadas a segundo orden antes de definir una derivada general. Consideremos $x_i, x_j \in X$, con $x_i \neq x_j$, y $A \subseteq X$, y definamos:

$$\Delta_{x_i}\big(\Delta_{x_j}\xi(A)\big) = \xi(A \cup \{x_i, x_j\}) - \xi(A \cup \{x_j\}\backslash\{x_i\}) - \\ \xi(A \cup \{x_i\}\backslash\{x_j\}) + \xi(A\backslash\{x_i, x_j\}).$$

Se comprueba fácilmente que las derivadas con respecto a los dos índices son intercambiables:

$$\Delta_{x_i}\big(\Delta_{x_j}\xi(A)\big) = \Delta_{x_j}\big(\Delta_{x_i}\xi(A)\big).$$

Por tanto, denotaremos a las derivadas a segundo orden con respecto a los índices generales $x_i, x_j \in X$ como $\Delta_{x_i x_j}\xi(A)$. De forma similar se obtiene de manera recursiva una expresión para la derivada general a cualquier orden:

Definición 1.6. *Sean los subconjuntos $A, K \subseteq X$ y una función de conjunto ξ de X. La derivada de A con respecto a K se define como:*

$$\Delta_K\xi(A) = \sum_{L\subseteq K} (-1)^{|K\backslash L|}\xi\big((A\backslash K) \cup L\big).$$

Centrémonos ahora en las propiedades más importantes de los juegos y las capacidades:

Definición 1.7. *Sea una función de conjunto ξ, esta puede cumplir las siguientes propiedades:*

- ***Superaditividad**: si para todo $A, B \in 2^X$ con $A \cap B = \emptyset$ entonces*

  $$\xi(A \cup B) \geq \xi(A) + \xi(B).$$

  *Se dice **subaditiva** en el caso de que cumpla la desigualdad opuesta.*

- ***Supermodular**: si para todo $A, B \in 2^X$ se tiene que*

  $$\xi(A \cup B) + \xi(A \cap B) \geq \xi(A) + \xi(B).$$

  *De nuevo, en el caso de que se cumpla la desigualdad opuesta se dice que es **submodular**.*

- ***k-monótona**: para un $k \geq 2$ si para toda familia de k conjuntos $A_1, ..., A_k \in 2^X$ se cumple:*

  $$\xi\left(\cup_{i=1}^k\right) \geq \sum_{\substack{I\subset\{1,...,k\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1}\xi\big(\cap_{i\in I} A_i\big).$$

- ***Completamente monótona***: *si es k-monótona para todo* $k \geq 2$.
- ***Minitiva***: *si para cualquier* $A, B \in 2^X$:

$$\xi(A \cap B) = \text{mín}\{\xi(A), \xi(B)\}.$$

- ***Maxitiva***: *si para cualquier* $A, B \in 2^X$:

$$\xi(A \cup B) = \text{máx}\{\xi(A), \xi(B)\}.$$

Cada una de estas propiedades define un nuevo tipo de función de conjunto con unas determinadas características. Ahondaremos en esto más adelante desde la perspectiva de las probabilidades inferiores.

Por otro lado, será especialmente interesante introducir la la transformada de Möbius de una función de conjunto:

Definición 1.8. *Sea* ξ *una función de conjunto de* X. *La* ***transformada de Möbius*** *(o inversa de Möbius) de* ξ *es una función* $m : 2^X \to \mathbb{R}$ *definida como:*

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \xi(B)$$

para todo $A \subseteq X$.

Notar que a partir de la inversa de Möbius es posible recuperar la información que nos da la función de conjunto ξ a través de la siguiente expresión:

$$\xi(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

para todo $A \subseteq X$. Por tanto, la inversa de Möbius m es una representación equivalente de la función de conjunto ξ.

1.1.3. Core de un juego y juegos balanceados

A continuación vamos a analizar un concepto crucial en el estudio de los juegos cooperativos: su core.

Definición 1.9. *Sea* v *un juego cualquiera definido sobre un conjunto de jugadores* $X = \{x_1, ..., x_n\}$ *y* μ *una medida. El* ***core*** *del juego* v *se corresponde con el siguiente conjunto:*

$$core(v) = \{\mu : \mu(S) \geq v(S)\,,\ \forall S \subseteq X \text{ y } \mu(X) = v(X)\}\ ,$$

donde recordamos que una medida μ *es una función de conjunto monótona y tal que* $\mu(\emptyset) = 0$.

Es decir, el core de un juego v son aquellas medidas μ que dominan a v. Notar que, por definición, este conjunto es convexo y cerrado; veamos ahora cual es su interpretación en el contexto de los juegos cooperativos.

Si X denota al conjunto de jugadores, habíamos visto que v nos devolvía la ganancia mínima asegurada por cada coalición de jugadores. Por tanto, el core puede interpretarse como el conjunto de posibles repartos del premio que cumplen estas exigencias mínimas.

Veámoslo de manera explícita, la medida μ nos indica que el jugador x_i obtiene como premio el valor de la medida para ese jugador $\mu(x_i)$. De hecho, si volvemos a echar un vistazo a la definición comprobamos que automáticamente se impone que la coalición formada por todos los jugadores se lleva la cantidad total a repartir: $\mu(X) = v(X)$.

A partir de esta definición, parece intuitivo estudiar aquellos juegos cuyo core no esté vacío. Estos resultan ser los llamados juegos balanceados, veámoslo a partir de las siguientes definiciones y resultados:

Definición 1.10. *Sea $\mathcal{B} \subseteq 2^N$ una colección de conjuntos no vacíos, decimos que $\mathcal{B}$ es una* ***colección balanceada*** *si existe $\lambda_A > 0$ con $A \in \mathcal{B}$ tal que, para cada $x_i \in X$:*

$$\sum_{A \in \mathcal{B} \mid x_i \in A} \lambda_A = 1$$

Definición 1.11. *Se dice que un juego v sobre X es balanceado si para cualquier colección balanceada $\mathcal{B}$ se tiene que:*

$$v(X) \geq \sum_{A \in \mathcal{B}} \lambda_A v(A)$$

A partir de estas dos definiciones se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.2 (Bondareva-Shapley Theorem, weak form)**.** *Sea v un juego sobre X. Entonces el core(v) es no vacío si y solo si v es un juego balanceado.*

Así, tenemos que los juegos balanceados son aquellos cuyo core es no vacío. A partir de esta idea podemos dar una definición algo más restrictiva.

Definición 1.12. *Sea v un juego balanceado, se dice que es un* ***juego exacto*** *si para todo $S \in 2^n \backslash \{\emptyset\}$ existe un elemento en el core, $\mu \in core(v)$ tal que:*

$$v(S) = \min_{\mu \in core(v)} \mu(S) \ .$$

Es decir, que siempre podremos encontrar un elemento en el core que coincida con el valor del juego $v(S)$ para todo $S \subseteq 2^n \backslash \{\emptyset\}$.

1.1.4. Solución de un juego: el valor de Shapley y el valor de Banzhaf

Una solución de un juego es una asignación de la ganancia final a cada uno de los jugadores y coaliciones posibles. En la literatura se pueden encontrar varias propuestas de soluciones, siendo las más conocidas los valores de Shapley y Banzhaf (se llama "valor" a esa asignación final del premio).

El acercamiento de Shapley [10] fue axiomático y tuvo la intención de obtener una solución "justa", por lo que impuso que su solución, denotada como $\Phi(v)$, cumpliera las siguientes propiedades:

- Eficiencia: la suma del premio de cada uno de los jugadores debía ser igual al valor de de la gran coalición:

$$\sum_{x \in X} \Phi(v)(x) = v(X).$$

- Simetría: en el caso de que dos jugadores x_i, x_j cumplan que $v(S \cup \{x_i\}) = v(S \cup \{x_j\})$ para todo subconjunto S de X que no contenga a x_i ni x_j, entonces $\Phi_{x_i}(v) = \Phi_{x_j}(v)$.

- Jugador nulo (*dummy player*): si existe un jugador x_i tal que $v(A \cup \{x_i\}) = v(A)$ para todo subconjunto A, entonces $\Phi(v)(x_i) = 0$.

- Linealidad: para todos dos juegos v_1 y v_2 y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \Phi(v_1) + \lambda_2 \Phi(v_2).$$

Shapley ([10]) demostró que hay una única solución que cumple estas cuatro propiedades y la denominó como valor de Shapley:

Definición 1.13. *Sea v un juego, el valor de Shapley para cada jugador x_i tiene la siguiente expresión:*

$$\Phi(v)(x_i) = \sum_{A \not\supseteq \{x_i\}} \frac{t_A!(n - t_A - 1)!}{n!} \big(v(A \cup \{x_i\}) - v(A)\big),$$

donde $t_A = |A|$.

Lo interesante de esta solución no es solo que cumple las cuatro propiedades anteriores, sino también que es la única que lo hace [10]. Cuando el juego que estamos considerando es supermodular, el valor de Shapley se corresponde con el centro de gravedad del core y por tanto pertenece al mismo. Sin embargo, esto no siempre es cierto sin la hipótesis de supermodularidad.

Otra solución con la que se suele trabajar es el valor de Banzhaf:

Definición 1.14. *Sea v un juego, su valor de Banzhaf se define como:*

$$B(v)(x_i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{A \not\supseteq \{x_i\}} \big(v(A \cup \{x_i\}) - v(A)\big) \tag{1.2}$$

para todo $x_i \in X$.

Este valor cumple también las condiciones de simetría, linealidad y jugador nulo; sin embargo, no cumple el axioma de eficiencia, por lo que suele definirse también el llamado **valor de Banzhaf normalizado** que viene dado por:

$$\Psi(v)(x_i) = \frac{B(v)(x_i)}{\sum_{x_j \in X} B(v)(x_j)}$$

pese a que este pierde algunas propiedades del valor de Banzhaf como la linealidad. En este caso, tenemos que el valor normalizado de Banzhaf puede no pertenecer al core incluso bajo la hipótesis de supermodularidad.

Intentemos explicar el significado intuitivo de los valores de Shapley y Banzhaf. Si consideramos $v(A \cup \{x_i\}) - v(A)$ como la ganancia del jugador x_i tras unirse a la coalición A, entonces tanto el valor de Shapley como el de Banzhaf se pueden interpretar como el premio esperado para el jugador x_i teniendo en cuenta la probabilidad (llamémosla $p_A^{x_i}$) que tiene de unirse a las distintas coaliciones, pero en cada uno de los casos esta probabilidad varía.

En el caso de Shapley, $p_A^{x_i} = \frac{t!(n-t-1)!}{n!}$ con $t = |A|$, lo que nos dice que la probabilidad de unirse a una coalición dependerá del tamaño de la misma; lo que a su vez significa que coaliciones del mismo tamaño son igual de probables. Por otro lado, en el caso de Banzhaf $p_A^{x_i} = \frac{1}{2^{n-1}}$ lo que significa que todas las coaliciones son igual de probables, y el valor de Banzhaf se correspondería con una media aritmética entre los valores obtenidos para todas las posibles coaliciones.

Uno de los objetivos de este trabajo será proponer una nueva solución en base al llamado índice de interacción que estudiaremos en detalle durante la sección 2.

1.2. Probabilidades imprecisas

Presentamos a continuación los conceptos y resultados básicos de las probabilidades imprecisas. Se entiende por probabilidades imprecisas a todos los modelos que sirven como una generalización y extensión de las probabilidades bajo situaciones de falta de información. A lo largo de esta sección se introducirán los modelos más relevantes de esta teoría, siguiendo la terminología y notación de [1].

Dentro de todos estos modelos, uno de los más generales es el de las probabilidades inferiores.

Definición 1.15. *Se considera un conjunto $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Una función $\underline{P} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ se dice que es una* ***probabilidad inferior*** *si cumple las siguientes propiedades:*

(1) $\underline{P}(\emptyset) = 0$.

(2) $\underline{P}(X) = 1$.

(3) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{P}(A) \leq \underline{P}(B)$ *(monotonía).*

A partir de ella se define la probabilidad superior conjugada.

Definición 1.16. *Sea un conjunto X y $\underline{P}$ una probabilidad inferior sobre X, se define la* ***probabilidad superior (conjugada)*** $\overline{P}(A) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ *como:*

$$\overline{P}(A) = 1 - \underline{P}(A^c) \quad \forall A \subseteq X \ . \tag{1.3}$$

Estos son los conceptos fundamentales sobre los que se construye todo el trabajo. Por ello, en lo que resta de sección veremos en más detalle algunas propiedades e interpretaciones de las probabilidades inferiores y superiores, así como algunos tipos particulares que serán de interés a lo largo del trabajo.

1.2.1. El conjunto credal y las probabilidades inferiores coherentes

Asociado a una probabilidad inferior se puede definir un conjunto de probabilidades denominado conjunto credal.

Definición 1.17. *Sea $\underline{P}$ una probabilidad inferior sobre un conjunto X con probabilidad superior conjugada $\overline{P}$. Se define el* ***conjunto credal*** $\mathcal{M}(\underline{P})$ *como el conjunto cerrado y convexo de probabilidades que dominan a $\underline{P}$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\underline{P}) &= \{P \,|\, P(A) \geq \underline{P}(A) \ \forall A \subseteq X\} \\ &= \{P \,|\, P(A) \leq \overline{P}(A) \ \forall A \subseteq X\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

En lo sucesivo impondremos la condición de ***evitar pérdida segura*** *lo que significa que habrá al menos una probabilidad perteneciente al conjunto credal, es decir, que este conjunto es no vacío: $\mathcal{M}(\underline{P}) \neq \emptyset$.*

La segunda línea de la ecuación (1.4) sigue de aplicar la definición 1.16, lo que significa que basta con conocer la probabilidad inferior o la superior para tener toda la información a cerca de este conjunto. Al tratarse de un conjunto cerrado y convexo por definición sabemos que está completamente determinado por sus puntos extremos.

Definición 1.18. *En cualquier conjunto convexo $\mathcal{M}$, $P \in \mathcal{M}$ es un* ***punto extremo*** *de $\mathcal{M}$ si $P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$ para algún $P_1, P_2 \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in [0,1]$ implica que $P_1 = P_2 = P$.*

Además, en el caso de tener un conjunto X de cardinal 3, la probabilidad inferior viene determinada por las cotas inferior y superior de los conjuntos unipuntuales. Los espacios con tres elementos serán especialmente interesantes a la hora de proponer ejemplos. Veamos uno de lo presentado hasta el momento:

Ejemplo 1.1. Imaginemos a una alumna de matemáticas que ha solicitado una plaza para hacer el doctorado en el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) y que está esperando a su resolución. Existen tres posibles respuestas: que ha sido admitida (A), que su solicitud ha sido denegada (D) o que se encuentra en lista de espera (L).

Sin embargo, una manera de plantear esta situación es ver que, en realidad, no podemos conocer al completo todos los factores que juegan un papel en esta decisión debido a la alta subjetividad de estos procesos. Por ello, en lugar de dar una probabilidad fija para cada uno de los posibles resultados, lo que podremos ofrecer es una cota inferior en función de los factores que sí conocemos:

	A	D	L	AD	AL	DL
$\underline{P}$	0.4	0.1	0.3	0.6	0.7	0.4
$\overline{P}$	0.6	0.3	0.4	0.7	0.9	0.6

Tabla 1.1: Tabla de probabilidades inferiores y superiores del ejemplo 1.1.

Puede comprobarse que los valores aquí propuestos cumplen todas las propiedades de la definición 1.15 asumiendo que $\underline{P}(\emptyset) = 0$ y $\underline{P}(\{ADL\}) = 1$. De la misma manera, los valores de la segunda fila para $\overline{P}$ se han calculado siguiendo la relación de dualidad de la definición 1.16.

Representémoslo gráficamente. Recordemos que un espacio probabilístico en tres dimensiones puede estudiarse a través de la representación de un 3-simplex, que no es más que el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado por las ternas (x, y, z) de forma que $x, y, z \geq 0$ y $x + y + z = 1$. De esta manera cada probabilidad es un punto en el simplex. En el caso de representar el conjunto credal, y dado que este es un conjunto de probabilidades, lo que tendremos es un subconjunto del simplex acotado por $\underline{P}$ y $\overline{P}$ tal y como se puede apreciar en el conjunto sombreado de la figura 1.1.

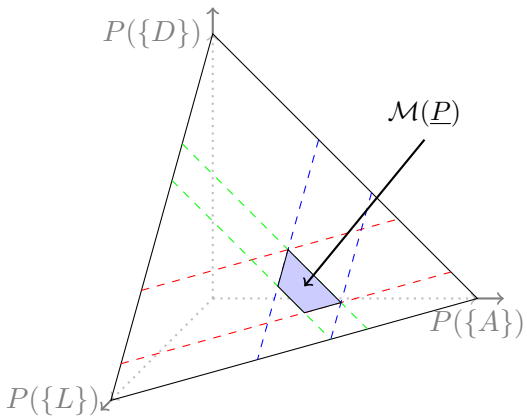


Figura 1.1: Representación gráfica de las probabilidades pertenecientes a $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Al estar imponiendo la condición de evitar pérdida segura, sabemos que la intersección de estas regiones siempre será no vacía, y el conjunto credal ($\mathcal{M}(\underline{P})$) coincide en este caso con la sección sombreada de la figura. Sin embargo, es importante matizar que en general el conjunto credal de una probabilidad inferior no tiene por qué coincidir con la región delimitada por la probabilidad inferior, sino que está contenido en ella. Así, veremos que distintos conjuntos credales pueden dar lugar a las mismas probabilidades inferiores.

A continuación, mostraremos por qué es interesante imponer una serie de condiciones extra a nuestra probabilidad inferior a través de una modificación del ejemplo anterior.

Ejemplo 1.2. Consideremos el mismo ejemplo que en el caso anterior con una ligera modificación (que repercute a su vez en la probabilidad superior conjugada):

	A	D	L	AD	AL	DL
$\underline{P}$	0.4	0.1	0.3	0.6	0.5	0.4
$\overline{P}$	0.6	0.5	0.4	0.7	0.9	0.6

Intentemos encontrar una probabilidad $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $P(\{AL\}) = \underline{P}(\{AL\}) = 0.5$. Sabemos que $P(\{A\}) \geq \underline{P}(\{A\}) = 0.4$ y $P(\{L\}) \geq \underline{P}(\{L\}) = 0.3$, por lo que usando la propiedad aditiva de las probabilidades:

$$P(\{AL\}) = P(\{A\}) + P(\{L\}) \geq 0.4 + 0.3 = 0.7 > 0.5 = \underline{P}(\{AL\}).$$

Vemos que no podremos encontrar ninguna $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ que lo cumpla. Es decir, la probabilidad inferior asignada al conjunto $\{AL\}$ es demasiado pequeño y nunca se puede alcanzar. Para asegurar que existe una $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $P(S) = \underline{P}(S)$ para todo $S \subseteq X$, se impone la llamada condición de coherencia.

Definición 1.19. *Una probabilidad inferior* $\underline{P}$ *se dice* ***coherente*** *si* $\underline{P}(A) = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} P(A)$ *para todo* $A \subseteq X$.

Esto implica que, si trabajamos con una probabilidad inferior coherente, entonces para cualquier conjunto existe una probabilidad en el conjunto credal que alcanza la probabilidad inferior en dicho conjunto.

Veamos algunas de las propiedades derivadas de imponer esta condición.

Proposición 1.3 ([11])**.** *Sea* $\underline{P}$ *una probabilidad inferior coherente con probabilidad superior conjugada* $\overline{P}$. *Para todo* $A, B \subseteq X$ *se cumple:*

(1) $\underline{P}(A) = \min\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$.

(2) $\overline{P}(A) = \max\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$.

(3) $\underline{P}(A) \leq \overline{P}(A)$.

(4) $\overline{P}(A \cup B) \leq \overline{P}(A) + \overline{P}(B)$.

(5) $\underline{P}(A \cup B) \leq \underline{P}(A) + \overline{P}(B)$.

(6) Si $A \cap B = \emptyset$ *entonces* $\underline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$ *(en general, las probabilidades inferiores no son aditivas, tampoco bajo coherencia).*

(7) Si $A \cap B = \emptyset$ *entonces* $\overline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \overline{P}(B)$.

Las probabilidades inferiores coherentes serán la base de nuestro estudio a la hora de proponer soluciones a juegos cooperativos. Sin embargo, presentan un problema y es que distintos conjuntos credales pueden dar lugar a las mismas probabilidades inferiores. Será más fácil verlo a través del dibujo de un ejemplo 3-dimensional.

Ejemplo 1.3. Recuperamos el ejemplo 1.1 para ver que, gráficamente si aplicamos el razonamiento inverso, distintos conjuntos credales pueden dar lugar a las mismas probabilidades inferiores:

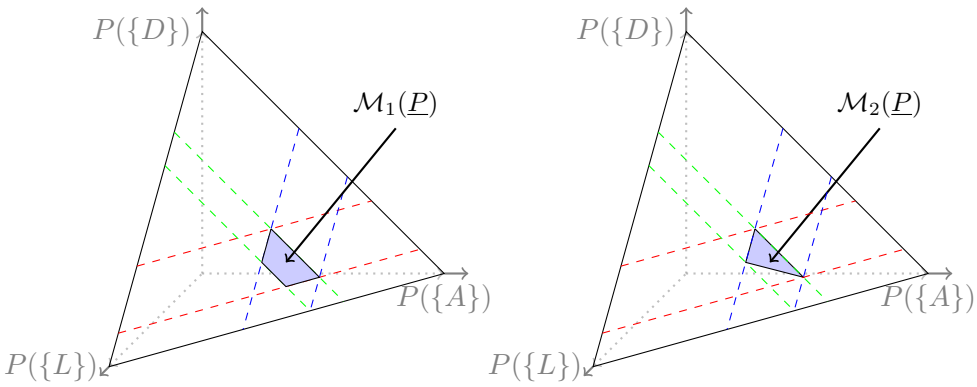


Figura 1.2: Representación gráfica de dos conjuntos credales $\mathcal{M}_1(\underline{P})$ y $\mathcal{M}_2(\underline{P})$ que dan lugar a las mismas probabilidades inferiores.

Vemos que, pese a que el segundo espacio sombreado contiene menos probabilidades posibles que el primero, las cotas inferior y superior de las probabilidades de los sucesos son las mismas, dando lugar a la misma probabilidad inferior. Es decir, estos dos conjuntos credales cumplen que

$$\text{ínf}\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P}_1)\} = \text{ínf}\{P(A) \mid P \in \mathcal{M}(\underline{P}_2)\}$$

para todo $A \subseteq X$, y por eso tienen asociada la misma probabilidad inferior.

1.2.2. Interpretaciones

Al igual que ocurre en teoría de la probabilidad, existen distintas maneras de interpretar las probabilidades inferiores. Veremos ahora alguna de las interpretaciones más utilizadas en estas teorías aunque no serán las que utilizaremos durante el resto del trabajo.

Interpretación epistémica: se utiliza en el contexto de estudios de los posibles resultados de un experimento. En principio, estos están descritos por una probabilidad P_0 de la cual, sin embargo, no tenemos toda la información. Por ello, se interpretan $\underline{P}$ y $\overline{P}$ como las cotas inferior y superior, respectivamente, de esta probabilidad. Es decir:

$$\underline{P}(A) \leq P(A) \leq \overline{P}(A) \qquad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

De esta manera, $\mathcal{M}(\underline{P})$ es el conjunto de todas las posibles probabilidades compatibles para P_0. Aclaremos esto a través de un ejemplo:

Ejemplo 1.4. Supongamos que tenemos una urna con bolas de colores naranja, blanco y morado y queremos calcular la probabilidad de sacar una bola de un color determinado. Sin embargo, no tenemos toda la información que nos gustaría, sino que sólo sabemos que de las 6 bolas totales 3 son naranjas, es decir que toda la información que tenemos de nuestra urna es:

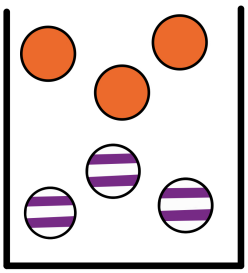


Figura 1.3: Representación de la urna de nuestro experimento para el ejemplo 1.4.

Por un lado somos capaces de calcular exactamente la probabilidad de extraer una bola naranja. Sin embargo, a la hora de calcular la probabilidad para una bola blanca sabemos que como mínimo puede ser 0 en caso de que el resto de bolas sean moradas, y como máximo puede ser 0.5 en caso de que todas las restantes sean blancas. Lo mismo ocurriría para las bolas moradas, esto se codifica en términos de probabilidades inferiores como indica la siguiente tabla:

	N	B	M	NB	NM	BM
$\underline{P}$	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
$\overline{P}$	0.5	0.5	0.5	1	1	0.5

Tabla 1.2: Probabilidad inferior y superior de sacar una bola naranja (N), blanca (B) o morada (M) de la urna.

Vemos que en el caso de una bola naranja o la unión de una blanca y una morada, la probabilidad es conocida y por tanto las probabilidades inferior y superior coinciden.

Interpretación comportamental: se encuentra dentro de la interpretación subjetiva de las probabilidades, es decir, que cada sujeto hará una asignación individual de esta probabilidad haciendo que las probabilidades puedan diferir de un sujeto a otro. En concreto, nos centraremos en la interpretación de Bruno de Finetti [2]. En teoría de la probabilidad esta nos dice que el valor de $P(A)$ de un evento $A \subseteq X$ es el precio justo por el que comprar una apuesta en dicho evento. En caso de obtener una oferta menor significaría que nos interesaría comprar la apuesta y en caso contrario nos interesaría venderla.

Matemáticamente, que $P(A)$ sea el precio justo se describe a través de la variable aleatoria indicadora de un evento A, I_A, para la cual conocemos su esperanza $E_p(I_A) = P(A)$. Si compramos la apuesta por este precio obtendremos el siguiente beneficio esperado

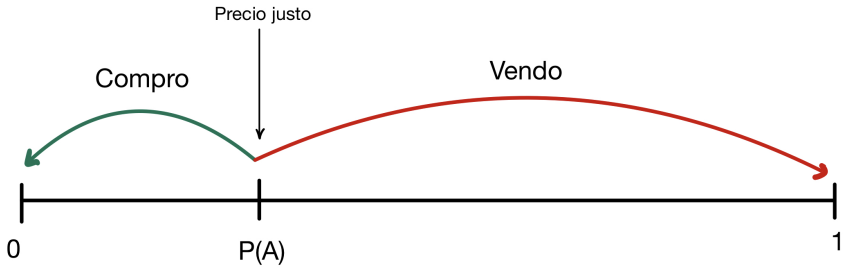
$$E_P\big(I_A - P(A)\big) = P(A) - P(A) = 0.$$

Si por el contrario, compramos la apuesta por un precio mayor $P(A) + \epsilon$ o menor $P(A) - \epsilon$ del considerado justo

$$E_P\big(I_A - (P(A) - \varepsilon)\big) = E_P\big(I_A - P(A)\big) + \varepsilon = \varepsilon.$$

$$E_P\big(I_A - (P(A) + \varepsilon)\big) = E_P\big(I_A - P(A)\big) - \varepsilon = -\varepsilon.$$

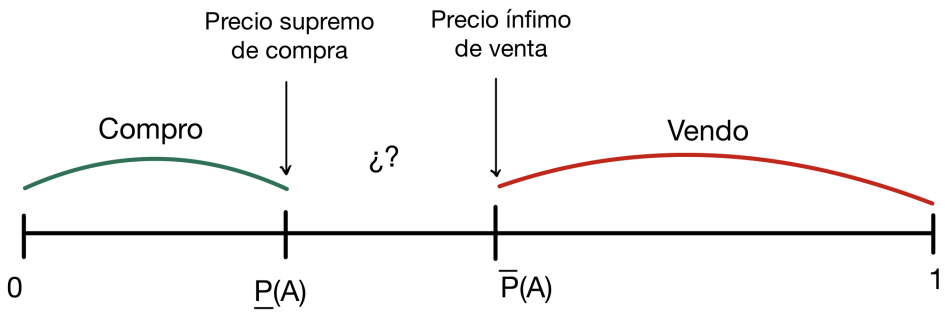
De ahí que, cuando se nos ofrece un precio menor por la apuesta, nos interese comprarla, pero si se nos ofrece un precio superior sea más conveniente venderla. Gráficamente:



Aquí vemos que existe una cierta brusquedad a la hora de pasar de comprar a vender.

Ejemplo 1.5. Supongamos que el precio justo de una apuesta es 0.20 EUR, en ese caso tendríamos que si nos la ofrecen por 0.19 EUR nos interesaría comprarla, mientras que por 0.21 EUR nos interesaría venderla. Tenemos entonces que una diferencia de 2 céntimos es lo que nos separa de tomar una decisión tan brusca como comprar o vender una apuesta.

Es aquí donde las probabilidades inferiores nos permiten abordar el problema desde una perspectiva algo más realista. En este caso la probabilidad inferior $\underline{P}(A)$ de un evento $A \subseteq X$ representa el supremo de los precios que estamos dispuestos a pagar por comprar la apuesta, mientras que $\overline{P}(A)$ representaría el ínfimo de los precios por los que estamos dispuestos a venderla. Haciendo así que exista una zona intermedia en la que realmente no sabemos si lo que nos interesa es comprarla o venderla.



Ejemplo 1.6. Recuperando el ejemplo 1.5 en el que teníamos una probabilidad modelando nuestra apuesta, tomemos en su lugar $\underline{P}(A) = 0.15$ y $\overline{P}(A) = 0.25$. En este caso tenemos un margen en el que no sabemos lo que realmente nos interesaría, si vender o comprar la apuesta entre 15 y 25 céntimos, lo cual se aproxima mucho más a un problema real.

1.2.3. Probabilidades 2-monótonas y completamente monótonas

Hasta ahora hemos estudiado un caso muy general de probabilidades imprecisas: las probabilidades inferiores coherentes. Sin embargo, resultan ser algo difíciles de manejar desde el punto de vista práctico: por ejemplo, no existe un procedimiento sencillo para calcular los puntos extremos del conjunto credal. Además, como se mostró en el ejemplo 1.3, varios conjuntos credales pueden dar lugar a la misma probabilidad inferior. Estos problemas se pueden resolver imponiendo la condición adicional de 2-monotonía.

Presentamos entonces un nuevo modelo: las probabilidades inferiores 2-monótonas. Este tipo de probabilidades son menos generales pero resultan ser muy manejables y permiten realizar ciertos cálculos de manera más sencilla, tal y como veremos a continuación.

Definición 1.20. *Una probabilidad inferior $\underline{P}$ es **2-monótona** si para todo $A, B \subseteq X$ se cumple:*

$$\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B) \ . \tag{1.5}$$

Es interesante comparar esta definición con la propiedad aditiva de una probabilidad:

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Es decir, si dada una probabilidad queremos calcular la suma de probabilidades de dos eventos, basta con encontrar su unión e intersección y sumar sus correspondientes probabilidades. Sin embargo, en el caso de las probabilidades inferiores -tal y como se adelantaba con las propiedades de la coherencia- no será posible, y lo único que podremos hacer es dar cotas y desigualdades.

Esta es una de las razones por las que este caso particular es especialmente interesante, una de sus primeras propiedades es que 2-monotonía implica coherencia, por lo que podemos heredar los resultados derivados hasta el momento para probabilidades inferiores coherentes.

Otra de sus nuevas propiedades es que en este caso el estudio del conjunto credal y de las probabilidades inferiores 2-monótonas sí que será equivalente. Es decir, existe una correspondencia uno-a-uno entre ambos. Además, debido a que el estudio de un conjunto credal -por ser cerrado y convexo- es equivalente al estudio de sus puntos extremos, esto nos hace mucho más fácil el estudio de este tipo de probabilidades. Hasta ahora, el estudio de estos puntos extremos no era algo necesariamente sencillo, ya que podía incluso llegar a existir un número infinito de ellos. Sin embargo, tras imponer las condiciones de 2-monotonía, veremos que estos pueden calcularse de manera simple.

El **método de las permutaciones** sirve para para calcular los puntos extremos del conjunto credal: dada una probabilidad inferior 2-monótona $\underline{P}$,

existen dos maneras equivalentes de calcular los puntos extremos del conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$, ambas a partir de $\{P_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$ siendo S_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$.

La primera es asignar la probabilidad inferior acumulada para cada una de las permutaciones:

$$\begin{aligned}
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(1)}\}) &= \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}).\\
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(2)}\}) &= \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \omega_{\sigma(2)}\}) - \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}).\\
&\ldots\\
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(i)}\}) &= \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(i)}\}) - \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(i-1)}\}).\\
&\ldots\\
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(n)}\}) &= 1 - \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(n-1)}\}).
\end{aligned}$$

La segunda es idéntica, pero asignando la probabilidad superior acumulada:

$$\begin{aligned}
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(1)}\}) &= \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}).\\
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(2)}\}) &= \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \omega_{\sigma(2)}\}) - \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}).\\
&\ldots\\
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(i)}\}) &= \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(i)}\}) - \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(i-1)}\}).\\
&\ldots\\
P_\sigma(\{\omega_{\sigma(n)}\}) &= 1 - \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(n-1)}\}).
\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento para todas las permutaciones del espacio de probabilidades obtendremos entonces todos los puntos extremos del conjunto credal. Este algoritmo no solo nos da una manera de calcular los puntos extremos sino que también nos dice que a lo sumo habrá $n!$ puntos extremos en un espacio de n elementos. Eso sí, es importante matizar que en este procedimiento pueden obtenerse puntos extremos repetidos por lo que, a priori, solo podemos dar una cota superior para este número.

Ejemplo 1.7. Podemos recuperar el ejemplo 1.1 de nuestra alumna de matemáticas para ver que su probabilidad inferior cumple la condición de 2-monotonía. Esto lo sabemos ya que toda probabilidad inferior coherente en un espacio de cardinal 3 es 2-monótona.

	A	D	L	AD	AL	DL
$\underline{P}$	0.4	0.1	0.3	0.6	0.7	0.4

Veamos cómo se computan sus puntos extremos en este caso con el algoritmo que acabamos de presentar.

Puntos extremos	**A**	**D**	**L**	
$\sigma_1 = (1,2,3) \to P_{\sigma_1}$	0.4	0.2	0.4	
$\sigma_2 = (1,3,2) \to P_{\sigma_2}$	0.4	0.3	0.3	
$\sigma_3 = (2,1,3) \to P_{\sigma_3}$	0.5	0.1	0.4	
$\sigma_4 = (2,3,1) \to P_{\sigma_4}$	0.4	0.3	0.3	(repetido)
$\sigma_5 = (3,1,2) \to P_{\sigma_5}$	0.6	0.1	0.3	
$\sigma_6 = (3,2,1) \to P_{\sigma_6}$	0.6	0.1	0.3	(repetido)

Tabla 1.3: Ejemplo del cálculo de los puntos extremos del conjunto credal a partir de una probabilidad inferior 2-monótona.

Vemos que se obtienen 2 puntos repetidos, por lo que en total tendremos 4 puntos extremos de nuestro conjunto credal tal y como se veía en la figura 1.1. Al tratarse de una probabilidad inferior 2-monótona tiene sentido entonces ver que el dibujo del conjunto credal a partir de sus probabilidades inferiores y el número de sus puntos extremos coinciden, ya que son representaciones equivalentes.

Esta noción de 2-monotonía puede extenderse a las llamadas probabilidades completamente monótonas.

Definición 1.21. *Una probabilidad inferior $\underline{P}$ se dice que es* ***completamente monótona*** *si para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $A_1, ..., A_k \subseteq X$ cumple:*

$$\underline{P}\left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,...,k\}} (-1)^{|I|+1} \underline{P}\big(\cap_{i \in I} A_i\big) \ . \tag{1.6}$$

De hecho, esta última expresión no es más que una generalización para todo k del concepto introducido en la definición 1.20. La expresión para las probabilidades 2-monótonas se recupera fijando $k = 2$.

A este tipo de probabilidades también se les suele dar el nombre de **funciones de creencia** en el contexto de teoría de la evidencia [9]. Esta teoría fue desarrollada durante los años 60 y le da una nueva interpretación a las probabilidades inferiores a través de una función $m : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ llamada **asignación básica de probabilidad**, de forma que para cada suceso A, $m(A)$ representa la evidencia que apoya la ocurrencia de dicho suceso. Esta función satisface:

1.- $m(\emptyset) = 0$, y

2.- $\sum_{A \subset X} m(A) = 1$,

y permite definir una probabilidad inferior completamente monótona mediante la ecuación (1.7):

$$\underline{P}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B). \tag{1.7}$$

Es importante destacar que a la hora de determinar los valores de $\underline{P}(A)$ a través de esta ecuación, los únicos términos que nos interesan de la suma son los llamados **conjuntos focales**, que son aquellos conjuntos C tales que $m(C) > 0$.

Sin embargo, aunque esta función m es más comúnmente utilizada en el contexto de la teoría de la evidencia, puede definirse para cualquier tipo de probabilidad inferior $\underline{P}$. De hecho, existe una manera general de recuperar la asignación básica de probabilidad, y es haciendo uso de la **inversa de Möbius** descrita en la siguiente ecuación

$$\begin{array}{rccl} m: & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & m(A) := \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \underline{P}(B). \end{array} \tag{1.8}$$

Como decíamos, esta es una función definida para cualquier tipo de probabilidad inferior, de manera que podemos pasar de funciones m a funciones $\underline{P}$ y viceversa gracias a las ecuaciones (1.7) y (1.8). En general, la imagen de esta inversa de Möbius es todo $\mathbb{R}$, pudiendo incluso tomar valores negativos. Sin embargo, en el caso de las funciones de creencia, el siguiente resultado restringe su imagen a valores positivos.

Proposición 1.4 ([9])**.** *$\underline{P}$ es una función de creencia si y solo si $m(A) \geq 0$ para todo $A \subseteq X$.*

Este resultado proporciona un método para comprobar si una probabilidad inferior coherente es una medida de creencia o no: basta calcular la inversa de Möbius mediante la ecuación (1.8), y si todos los valores son no-negativos, la probabilidad inferior será una medida de creencia; en cambio, si en algún suceso el valor es negativo, no sería una medida de creencia.

1.2.4. Otros modelos de probabilidades inferiores

Ahora que ya hemos presentado los conceptos básicos de la teoría de probabilidades inferiores introduciremos otros modelos concretos con los que trabajaremos en la siguiente sección:

Funciones minitivas: surgen de añadir una condición extra a la probabilidad inferior de la intersección de dos sucesos. $\underline{P}$ es minitiva si para todo $A, B \subseteq X$ se cumple:

$$\underline{P}(A \cap B) = \text{mín}\{\underline{P}(A), \underline{P}(B)\}.$$

A partir de esta expresión podemos extender esta condición para su probabilidad superior conjugada, que entonces debe cumplir:

$$\overline{P}(A \cup B) = \text{máx}\{\overline{P}(A), \overline{P}(B)\}.$$

Teniendo en cuenta que X es un espacio finito, la condición anterior es equivalente a $\overline{P}(A) = \text{máx}_{x\in A}\, \overline{P}(\{x\})$ para todo $A \subseteq X$. Por ello, podemos definir la siguiente función que actúa sobre los conjuntos unipuntuales del espacio:

$$\begin{array}{rccl} \pi: & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & \pi(x) := \overline{P}(\{x\}). \end{array} \tag{1.9}$$

De esta manera, la probabilidad superior de un conjunto puede expresarse como:

$$\overline{P}(A) = \operatorname*{máx}_{x\in A} \pi(x).$$

Toda función minitiva es una función de creencia y por tanto también 2-monótona.

A continuación, definiremos dos tipos de probabilidades inferiores a partir de la 'contaminación' de una probabilidad conocida P_0. Estos dos nuevos modelos describen situaciones en las que, pese a conocer, a priori, una probabilidad bien definida para cada uno de los eventos $A \subseteq X$, existe un valor de distorsión $\delta > 0$ que añade una incertidumbre adicional al problema.

Pari Mutuel Model: este modelo tiene su origen en las carreras de caballos y se define a partir de una probabilidad P_0 y un parámetro $\delta > 0$ de forma que:

$$\underline{P}_{PMM}(A) = \text{máx}\{(1+\delta)P_0(A) - \delta, 0\} \tag{1.10}$$

para todo $A \subseteq X$. El motivo de tomar esta definición como máximo entre la probabilidad contaminada y 0 es asegurarse de que nunca obtendremos una probabilidad negativa. Estas probabilidades inferiores son siempre 2-monótonas pero no son medidas de creencia en general.

Linear Vacuous (o ϵ-contamination model): una probabilidad inferior se dice que es una Linear Vacuous si existe una probabilidad P_0 y un parámetro $\delta \in (0,1)$ tales que la probabilidad inferior cumple:

$$\underline{P}_{LV}(A) = \begin{cases} (1-\delta)P_0(A) & \forall A \subset X. \\ 1 & A = X. \end{cases}$$

Las probabilidades inferiores Linear Vacuous son casos particulares de funciones de creencia, es decir, son completamente monótonas y por tanto también 2-monótonas.

Probabilidades comparativas

Se dice que $\underline{P}$ es una probabilidad comparativa si existe $\mathcal{L} \subseteq X \times X$ tal que $\mathcal{M}(\underline{P})$ puede expresarse como:

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P \mid P(\{x_i\}) \geq P(\{x_j\})\ \forall (x_i, x_j) \in \mathcal{L}\}.$$

De esta manera, la probabilidad inferior se obtiene a partir de comparaciones entre las probabilidades de los unipuntuales. Una manera muy visual de mostrar estas relaciones es a través de grafos. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo 1.8. Sea un conjunto de cardinal 4: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y las siguientes relaciones:

$$P(\{x_3\}) \leq P(\{x_2\}), \quad P(\{x_2\}) \leq P(\{x_1\}), \quad P(\{x_4\}) \leq P(\{x_2\}).$$

Construimos su grafo asociado de manera que si $P(\{x_i\}) \geq P(\{x_j\})$, entonces se añade un arco del jugador x_i al jugador x_j:

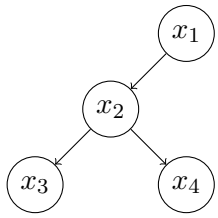


Figura 1.4: Grafo correspondiente a las relaciones de desigualdad del ejemplo 1.8.

En general, una probabilidad comparativa no es 2-monótona pero sí coherente. Será de vital importancia encontrar entonces un método que nos permita calcular los puntos extremos de este conjunto credal ya que no podremos utilizar el método de las permutaciones para probabilidades 2-monótonas. Para ello, resumiremos las deducciones detalladas en [6].

Tal y como se prueba en el Lema 2 de [6], los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P})$ se corresponden con las medidas de probabilidad uniforme de algunos subconjuntos $A \subseteq X$.

Para encontrar estos subconjuntos definamos $H(x_j)$ como el conjunto de antecesores de x_j, considerando que todo elemento es antecesor suyo ($x_j \in H(x_j)$) por convenio, y utilizando la notación $H(A) = \cup_{x \in A} H(x)$.

Por ejemplo, siguiendo el ejemplo 1.8 los antecesores de x_3 serían $H(x_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y de $H(x_3, x_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Definamos el siguiente conjunto para simplificar notación:

$$\mathcal{H} := \{\emptyset \neq B \subseteq X : B = H(A) \text{ para algún } A\}.$$

Una vez introducidos todos estos conceptos, se prueba en [6] que:

Lema 1.5 ([6], Lemma 4)**.** *Sea $B \in \mathcal{H}$, si existen $B_1, B_2 \in \mathcal{H}$ tales que $B_1 \cup B_2 = B$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, entonces la probabilidad uniforme sobre el conjunto B (P_B), no es un punto extremo del conjunto credal.*

Una vez sabido esto, se tiene una manera directa de encontrar los extremos de $\mathcal{M}(\underline{P})$ tal y como se describe en el siguiente teorema:

Teorema 1.6 ([6], Theorem 1)**.** *El conjunto de puntos extremos del conjunto credal coincide con el conjunto de probabilidades uniformes P_A generadas por los conjuntos $B \in \mathcal{H}$ que no pueden ser descompuestas como se detalla en el lema 1.5.*

Aclararemos este procedimiento calculando los puntos extremos del conjunto credal del ejemplo inicial 1.8:

	P			
	x_1	x_2	x_3	x_4
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	0
$\{x_1, x_2, x_4\}$	$1/3$	$1/3$	0	$1/3$
$\{x_1, x_2\}$	$1/2$	$1/2$	0	0
$\{x_1\}$	1	0	0	0

Tabla 1.4: Puntos extremos del conjunto credal del ejemplo 1.8.

Hemos obtenido así una manera de calcular los puntos extremos del conjunto credal para las probabilidades comparativas pese a no ser estas probabilidades inferiores 2-monótonas.

Resumen de la sección:

Para terminar con la introducción a las probabilidades inferiores, veamos un resumen de los distintos tipos de probabilidades que se han definido hasta el momento y que utilizaremos durante el resto de la memoria.

Todas ellas son probabilidades inferiores coherentes y, a excepción de las probabilidades comparativas, también son 2-monótonas. Además, también guardan distintas relaciones entre ellas: el modelo Linear Vacuous es a su vez una función de creencia y un caso particular de un probability interval; por su parte las funciones minitivas son siempre funciones de creencia y los modelos Pari Mutuel son también un caso de probability intervals.

De manera esquemática, se tiene entonces que:

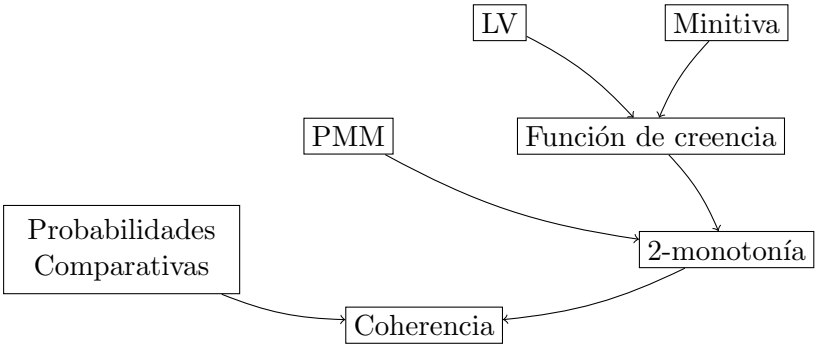


Figura 1.5: Esquema resumen de los principales tipos de probabilidades inferiores.

1.3. Conexión entre ambas teorías

Una vez presentadas las ideas principales de estas dos teorías llega el momento de hacer evidente su paralelismo.

Juegos monótonos normalizados y probabilidades inferiores.
Empecemos por las definiciones básicas, en primer lugar, a partir de la definición 1.2 y las definiciones posteriores tenemos que los juegos monótonos normalizados se corresponden con probabilidades inferiores según su definición en 1.15. Por tanto, a partir de las ecuaciones (1.1) y (1.3) vemos que la función conjugada de una capacidad normalizada coincide con una probabilidad superior conjugada. Además, en ambos casos se define y utiliza la transformada de Möbius de forma idéntica, en el caso de las probabilidades inferiores para trabajar con asignaciones básicas de probabilidad.

Juegos superaditivos y probabilidades 2-monótonas. Juegos completamente monótonos y funciones de creencia.
El siguiente paralelismo viene con la definición de los distintos tipos de juegos y probabilidades inferiores. Si nos fijamos en las propiedades 1.7 y las definiciones 1.20 y 1.21 observamos que las capacidades normalizadas supermodulares y completamente monótonas, coinciden con probabilidades inferiores 2-monótonas y completamente monótonas (o funciones de creencia) respectivamente. En cuanto a la definición de minitividad, es exactamente la misma, y la primera de las propiedades de 1.7 coincide con la propiedad (6) de 1.3 de las probabilidades 2-monótonas.

Core de un juego y conjunto credal.
Fijémonos ahora en el core de un juego v. Este se correspondía con todas las medidas μ que dominan a v. El valor de estas medidas μ sobre un jugador

x_i se interpretaban como aquellas soluciones compatibles con las ganancias mínimas impuestas por cada coalición. Si recordamos la definición 1.17, vemos que el core de un juego coincide el conjunto credal, que se interpretaba como aquel conjunto cerrado y convexo de probabilidades compatibles con las cotas dadas por las probabilidades inferiores y superiores. Por tanto, y como ya comentamos, están completamente determinados por sus puntos extremos, que en el caso de las probabilidades 2-monótonas se podían calcular con el método de las permutaciones. Si recuperamos la idea de derivada 1.5 de la teoría de juegos, vemos que cada una de las probabilidades definida para cada elemento se corresponde con la derivada con respecto a ese elemento de todos los anteriores.

Juegos balanceados y probabilidades coherentes.

Finalmente, recordemos la definición 1.17 y el teorema 1.2, par ver que un juego balanceado no es más que una probabilidad inferior que evita pérdida segura; es decir, aquellas que tienen un conjunto credal no vacío. Por otra parte, si echamos un vistazo a las definiciones 1.12 y 1.19 ambas nos dicen que para todo $S \subseteq X$ existe un elemento del core o conjunto credal respectivamente (que ya sabemos que se identifican) que coincide con el juego o probabilidad inferior (que también se identifica). Por tanto, un juego exacto se identifica con una probabilidad inferior coherente.

Ha quedado de manifiesto que las estructuras de estas dos teorías son matemáticamente idénticas y lo único que cambia entre ellas es la terminología, veamos un esquema resumen y decidamos qué notación y nomenclatura utilizaremos de aquí en adelante.

Probabilidades imprecisas	**Juegos cooperativos**
Espacio muestral (X)	Conjunto de jugadores (X)
Probabilidad inferior ($\underline{P}$)	Juego monótono normalizado (v)
Conjunto credal ($\mathcal{M}(\underline{P})$)	Core de un juego ($core(v)$)
$\underline{P}$ que evita pérdida segura	Juego balanceado
Probabilidad inferior coherente	Juego exacto
Probabilidad inferior 2-monotonía	Juego supermodular
Función de creencia	Juego completamente monótono
Probabilidad inferior minitiva	Juego minitivo

Tabla 1.5: Comparación entre los conceptos fundamentales de la teoría de juegos cooperativos y las probabilidades imprecisas.

Dada la identificación entre ambas teorías, el objetivo del trabajo será trabajar en el contexto de la teoría de juegos cooperativos pero utilizando las herramientas y resultados que nos dan las probabilidades inferiores.

Entonces, de aquí en adelante hablaremos de un conjunto de jugadores

X y trabajaremos con juegos monótonos normalizados (o juegos monótonos normalizados) que, al corresponderse con una probabilidad inferior identificaremos por la letra $\underline{P}$. Hablaremos de *conjuntos credales* y de *cores* indistintamente para hacer referencia al conjunto presentado en 1.9 y utilizaremos la notación y los nombres procedentes de las probabilidades imprecisas a la hora de hacer referencia a las distintas propiedades de una probabilidad inferior.

En definitiva, dado un conjunto de jugadores X, diremos que se define un juego $\underline{P}$ que podrá cumplir las condiciones de coherencía, 2-monotonía, minitividad... de manera que queda definida una notación sólida para el resto de la memoria.

Capítulo 2

Índice de interacción

El índice de interacción es uno de los puntos fundamentales del trabajo, por lo que en este capítulo estudiaremos a fondo sus características e interpretaciones. Para ello, presentamos su definición original desde la teoría de juegos cooperativos, para después estudiar alguna de sus propiedades desde el punto de vista de las probabilidades inferiores. En la segunda sección, enfatizaremos la importancia de su signo estudiando las distintas posibilidades dependiendo del tipo de probabilidad inferior a considerar y dándole una interpretación a cada uno de los casos. Finalmente, se encuentran expresiones concretas de este índice para los tipos de probabilidades inferiores 2-monótonas introducidos en el primer capítulo.

2.1. Definición e interpretación

Al estar trabajando en la teoría de juegos cooperativos será especialmente interesante estudiar cuánto aporta cada jugador a una coalición. Intuitivamente dado un juego v, la ganancia que aporta un nuevo jugador x_i a una coalición A en la que no estaba previamente ($x_i \notin A$) se define como:

$$v(A \cup \{x_i\}) - v(A) = \Delta_{x_i} v(A) \ ,$$

que identificamos con la derivada con respecto a x_i siempre que $x_i \notin A$. En esta línea, se puede definir también una cantidad general para x_i que nos indique cómo interactúa este en promedio con las posibles coaliciones A tales que $A \subseteq X \backslash \{x_i\}$. Existen varias maneras de hacer esta media ponderada, pero si recordamos las definiciones de la sección 1.1.4, los valores de Shapley y Banzhaf no son más que dos posibles maneras de computar este promedio:

$$\Phi(v)(x_i) = \sum_{S \subseteq X \backslash \{x_i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \Delta_{x_i} v(S), \tag{2.1}$$

$$B(v)(x_i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq X \backslash \{x_i\}} \Delta_{x_i} v(S), \tag{2.2}$$

para cada jugador x_i con s el cardinal de S y n el cardinal de X.

Nuestro estudio se centra ahora en el caso de considerar la interacción de dos jugadores distintos x_i y x_j con cualquier coalición $S \subseteq X \backslash \{x_i, x_j\}$, que también puede identificarse con la segunda derivada con respecto a x_i y x_j de S:

$$v(S \cup \{x_i, x_j\}) - v(S \cup \{x_i\} - v(S \cup \{x_j\}) + v(S) = \Delta_{x_i x_j} v(S).$$

Para este caso, existen también los llamados índices de interacción de Shapley y Banzhaf que hacen el promedio entre todas las posibles interacciones:

$$I^{SH}_{x_i,x_j}(v) = \sum_{S \subseteq N \backslash \{i,j\}} \frac{s!(n-s-2)!}{(n-1)!} \Delta_{i,j} v(S), \tag{2.3}$$

$$I^{B}_{i,j}(v) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{S \subseteq N \backslash \{x_i,x_j\}} \Delta_{i,j} v(S). \tag{2.4}$$

En nuestro caso, abordaremos este estudio desde el contexto de las probabilidades inferiores, por lo que se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1. *Dado un juego $\underline{P}$ sobre un conjunto de jugadores $X = \{x_1, ..., x_n\}$, definimos el* ***índice de interacción*** *entre x_i y x_j con S como:*

$$I_{x_i,x_j}(S) = \underline{P}(S \cup \{x_i, x_j\}) - \underline{P}(S \cup \{x_i\}) - \underline{P}(S \cup \{x_j\}) + \underline{P}(S), \tag{2.5}$$

para todo $S \subseteq X$ y para todo $x_i, x_j \notin S$ distintos.

Este concepto será el centro de lo que queda de trabajo: estudiaremos sus distintas propiedades desde la perspectiva de las probabilidades inferiores y postularemos varias soluciones a juegos en función de este.

2.2. Interacción positiva y negativa

El signo de este índice de interacción $I_{x_i,x_j}(S)$ será especialmente relevante ya que nos indicará si existe una 'buena' o 'mala' interacción entre x_i y x_j en presencia de la coalición S. En caso de que el índice de interacción sea mayor que cero se habla de sinergia o interacción positiva entre los jugadores x_i y x_j. Esto puede verse de manera más explícita si reescribimos este índice de interacción:

$$I_{x_i,x_j}(S) \geq 0 \Leftrightarrow \underline{P}(S \cup \{x_i, x_j\}) - \underline{P}(S) \geq \\ \big(\underline{P}(S \cup \{x_i\}) - \underline{P}(S)\big) + \big(\underline{P}(S \cup \{x_j\}) - \underline{P}(S)\big)$$

es decir, que la contribución de ambos jugadores juntos en la coalición es mayor que la suma de sus contribuciones por separado y por tanto hay una

ganancia extra que indica que a los jugadores les interesará entrar juntos en dicha coalición.

En caso contrario, si el índice de interacción es menor que cero se dice que hay una interacción negativa entre los jugadores x_i y x_j:

$$I_{x_i,x_j}(S) \leq 0 \Leftrightarrow \underline{P}(S \cup \{x_i, x_j\}) - \underline{P}(S) \leq \\ \big(\underline{P}(S \cup \{x_i\}\big) - \underline{P}(S)) + \big(\underline{P}(S \cup \{x_j\}) - \underline{P}(S)\big)$$

de manera que no les interesará cooperar juntos ya que sus ganancias por separado serían mayores.

Ahora que le hemos dado una interpretación al índice de interacción llega el momento de empezar con uno de los objetivos fundamentales del trabajo: estudiar esta cantidad desde el contexto de las probabilidades inferiores. Por ello, en la siguiente sección intentaremos encontrar para qué tipo de probabilidades inferiores el signo del índice de interacción está completamente determinado y para qué otras no podemos asegurar nada.

2.2.1. $\underline{P}$ coherente y no 2-monótona

Recordemos que una probabilidad inferior es **coherente** si:

$$\underline{P}(A) = \min_{P \in \mathcal{M}(P)} P(A) \quad \forall A \subseteq X.$$

Comenzamos mostrando un ejemplo que prueba que si $\underline{P}$ es coherente pero no es 2-monótona, el índice de interacción no tiene por qué ser siempre no negativo.

Ejemplo 2.1. Tomemos un juego con 5 jugadores, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\underline{P}$ la probabilidad inferior coherente que se define como la envolvente inferior de las siguientes probabilidades:

$$P_1 = (0.32, 0.27, 0.07, 0.16, 0.18).$$
$$P_2 = (0.48, 0.14, 0.33, 0.02, 0.03).$$
$$P_3 = (0.16, 0.08, 0.02, 0.42, 0.32).$$

Consideremos la coalición inicial $S = \{x_1, x_2\}$ y los jugadores x_4 y x_5. Usando las propiedades de las probabilidades coherentes se obtienen los siguientes

valores:

$$\begin{aligned}
\underline{P}(S\cup\{x_4,x_5\}) &= \text{mín}\{P_1(S\cup\{x_4,x_5\}),P_2(S\cup\{x_4,x_5\}),P_3(S\cup\{x_4,x_5\})\}\\
&= \text{mín}\{0.93,0.67,0.98\}=0.67.\\
\underline{P}(S\cup\{x_4\}) &= \text{mín}\{P_1(S\cup\{x_4\}),P_2(S\cup\{x_4\}),P_3(S\cup\{x_4\})\}\\
&= \text{mín}\{0.75,0.64,0.66\}=0.64.\\
\underline{P}(S\cup\{x_5\}) &= \text{mín}\{P_1(S\cup\{x_5\}),P_2(S\cup\{x_5\}),P_3(S\cup\{x_5\})\}\\
&= \text{mín}\{0.77,0.65,0.56\}=0.56.\\
\underline{P}(S) &= \text{mín}\{P_1(S),P_2(S),P_3(S)\}\\
&= \text{mín}\{0.59,0.62,0.24\}=0.24.
\end{aligned}$$

Por tanto, el índice de interacción de esta coalición será:

$$I_{x_4,x_5}(S)=\underline{P}(S\cup\{x_4,x_5\})-\underline{P}(S\cup\{x_4\})-\underline{P}(S\cup\{x_5\})+\underline{P}(S)=-0.29<0.$$

Hemos encontrado un ejemplo que nos muestra que la propiedad de coherencia no asegura un índice de interacción positivo o, incluso, no negativo. Pero veamos que de este mismo ejemplo podemos obtener todos los casos posibles para el índice de interacción.

Tomemos ahora la misma coalición inicial $S=\{x_1,x_2\}$ pero los jugadores $\{x_3\}$ y $\{x_5\}$, esta vez utilizaremos directamente el programa 'Ejemplo_2-1.py' del anexo A.2 para ver que:

$$I_{x_3,x_5}(S)=\underline{P}(S\cup\{x_3,x_5\})-\underline{P}(S\cup\{x_3\})-\underline{P}(S\cup\{x_5\})+\underline{P}(S)=0.$$

Finalmente, si consideramos la misma coalición $S=\{x_1,x_2\}$ y los jugadores $\{x_3\}$ y $\{x_4\}$ se obtiene un índice de interacción positivo:

$$I_{x_3,x_4}(S)=\underline{P}(S\cup\{x_3,x_4\})-\underline{P}(S\cup\{x_3\})-\underline{P}(S\cup\{x_4\})+\underline{P}(S)=0.02\ .$$

Esto nos muestra que la propiedad de coherencia de una probabilidad inferior no nos asegura nada acerca del índice de interacción.

2.2.2. $\underline{P}$ 2-monótona

Visto el resultado del apartado anterior, nos preguntamos entonces si imponiendo alguna condición adicional se puede garantizar el signo no negativo del índice de interacción. Esto implicaría que a los jugadores nunca les perjudicaría formar alianzas, sino que siempre les interesaría cooperar entre ellos o, en el peor de los casos, nunca les perjudicaría. Viene aquí el primer resultado original del trabajo, donde conseguimos demostrar que con una probabilidad inferior 2-monótona siempre podemos asegurar la no negatividad del índice de interacción.

Proposición 2.1 (Propia)**.** *Toda probabilidad inferior $\underline{P}$ 2-monótona tiene un índice de interacción no negativo.*

Demostración. Por definición de 2-monotonía sabemos que para todo $A, B \subseteq X$ se cumple:

$$\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B).$$

Tomemos una coalición S, dos jugadores x_i, $x_j \notin S$ y veamos que la interacción $I_{x_i,x_j}(S)$ es no negativa. Basta tomar $A = S \cup \{x_i\}$ y $B = S \cup \{x_j\}$, de manera que $A \cup B = S \cup \{x_i, x_j\}$ y $A \cap B = S$ y tenemos:

$$\underline{P}(S \cup \{x_i, x_j\}) + \underline{P}(S) \geq \underline{P}(S \cup \{x_i\}) + \underline{P}(S \cup \{x_j\}),$$

lo que implica:

$$\underline{P}(S \cup \{x_i, x_j\}) - \underline{P}(S \cup \{x_i\}) - \underline{P}(S \cup \{x_j\}) + \underline{P}(S) \geq 0. \qquad \square$$

Se comprueba que el índice de interacción para probabilidades inferiores 2-monótonas es siempre no negativo y que por tanto, en este tipo de juegos, a los jugadores siempre les interesará formar alianzas entre ellos.

Puesto que, a excepción de las probabilidades comparativas que estudiaremos en la siguiente subsección, el resto de modelos son casos particulares de probabilidades inferiores 2-monótonas, se tiene que para todos ellos el índice de interacción será siempre mayor o igual a cero.

2.2.3. Probabilidades comparativas

Queda entonces estudiar el signo de las probabilidades comparativas. Si recordamos el esquema de la figura 1.5, todos los tipos de probabilidad presentados eran 2-monótonas a excepción de las probabilidades comparativas, que eran un caso particular de las probabilidades coherentes. Eso significa que, a priori, no se puede garantizar que la interacción sea siempre no negativa. Eso sí, dado que son un modelo más restrictivo que las probabilidades inferiores coherentes, cabe preguntarse si en este caso, a pesar de que no se cumpla la condición de 2-monotonía, sí se puede obtener alguna conclusión sobre el signo de la interacción. Veámoslo con un contraejemplo.

Ejemplo 2.2. Sea un juego con 5 jugadores $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y las relaciones $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_4, x_5)\}$ con el siguiente grafo asociado:

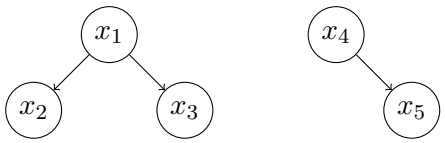


Figura 2.1: Grafo correspondiente al ejemplo 2.2.

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 1.2.4, calculamos los puntos extremos del conjunto credal, obteniendo:

	P				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	0	0
$\{x_1, x_2\}$	$1/2$	$1/2$	0	0	0
$\{x_1, x_3\}$	$1/2$	0	$1/2$	0	0
$\{x_1\}$	1	0	0	0	0
$\{x_4, x_5\}$	0	0	0	$1/2$	$1/2$
$\{x_4\}$	0	0	0	1	0

Tabla 2.1: Puntos extremos del conjunto credal.

Si tomamos ahora $S_1 = \{x_1, x_4\}$ y los jugadores x_2 y x_3 obtenemos el siguiente valor para el índice de interacción:

$$I_{x_2,x_3}(S_1) = \underbrace{\underline{P}(S_1 \cup \{x_2, x_3\})}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\underline{P}(S_1 \cup \{x_2\})}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\underline{P}(S_1 \cup \{x_3\})}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\underline{P}(S_1)}_{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{6}.$$

Si por el contrario, elegimos la coalición $S_2 = \{x_1, x_2\}$ y los jugadores x_3 y x_4 se obtiene que:

$$I_{x_3,x_4}(S_2) = \underline{P}(S_2 \cup \{x_3, x_4\}) - \underline{P}(S_2 \cup \{x_3\}) - \underline{P}(S_2 \cup \{x_4\}) + \underline{P}(S_2) = 0.$$

Finalmente, para la coalición $S_3 = \{x_4, x_5\}$ y los jugadores x_1 y x_2 el índice es positivo:

$$I_{x_1,x_2}(S_3) = \underline{P}(S_3 \cup \{x_1, x_2\}) - \underline{P}(S_3 \cup \{x_1\}) - \underline{P}(S_3 \cup \{x_2\}) + \underline{P}(S_3) = 0.17.$$

Donde para los dos últimos cálculos se ha utilizado el programa 'Ejemplo_2-2.py' del anexo A.3. Por tanto, se comprueba que las probabilidades comparativas no aseguran nada acerca del signo del índice de interacción al igual que ocurría con las probabilidades inferiores coherentes. De hecho, puesto que toda propiedad comparativa es coherente, hubiera bastado con este contraejemplo para mostrar que la coherencia no garantiza que la interacción sea siempre no negativa, como ya habíamos visto en el ejemplo 2.1.

2.3. Expresión alternativa

Acabamos de ver que, a pesar de que en general el índice de interacción puede tomar valores tanto negativos como positivos, si se impone la condición de 2-monotonía sí se garantiza que para todas las coaliciones y todos los jugadores tendrá un valor no negativo. Por ello, el segundo objetivo de este trabajo será estudiar el índice de interacción para los modelos 2-monótonos que se introdujeron en el capítulo 1. A lo largo de esta sección nos planteamos encontrar (y encontraremos) expresiones alternativas que simplifiquen el cálculo del índice de interacción para cada uno de esos modelos.

2.3.1. Índice de interacción en términos de m

Se estudia en primer lugar el caso general, intentando expresar el índice de interacción $I_{x_i,x_j}(S)$ de cualquier tipo de probabilidad inferior (incluso no coherente) en términos de la inversa de Möbius con la definición dada en 1.8. Si recordamos, esta función m puede tomar valores en todo $\mathbb{R}$ para una probabilidad inferior $\underline{P}$ general; excepto cuando trabajamos con funciones de creencia, que su imagen se restringe a valores positivos.

Proposición 2.2 (Propia)**.** *Sea $X = \{x_1, ..., x_2\}$ un conjunto de jugadores y un juego $\underline{P}$, el índice de interacción se puede expresar en términos de la transformada de Möbius como:*

$$I_{x_i,x_j}(S) = \sum_{A \subseteq S} m(A \cup \{x_i, x_j\}) \ , \tag{2.6}$$

para todo par de jugadores x_i, x_j y toda coalición $S \subseteq X \backslash \{x_i, x_j\}$.

Demostración. Reescribimos cada uno de los sumandos del índice de interacción en función de la transformada de Möbius:

$$\underline{P}(S \cup \{x_i, x_j\}) - \underline{P}(S \cup \{x_i\}) - \underline{P}(S \cup \{x_j\}) + \underline{P}(S) =$$
$$\sum_{A \subseteq S \cup \{x_i,x_j\}} m(A) - \sum_{B \subseteq S \cup \{x_i\}} m(B) - \sum_{C \subseteq S \cup \{x_j\}} m(C) + \sum_{D \subseteq S} m(D).$$

Trabajemos con los dos primeros sumandos por un lado y los dos segundos por otro. Al operar la primera resta:

$$\sum_{A \subseteq S \cup \{x_i,x_j\}} m(A) - \sum_{B \subseteq S \cup \{x_i\}} m(B),$$

nos quedaremos con los conjuntos que sumamos en el primer término pero que no sumamos en el segundo. Entonces, tendremos los subconjuntos de $S \cup \{x_i, x_j\}$ que necesariamente contienen al elemento x_j. Es decir, con el siguiente conjunto de conjuntos: $\mathcal{A}_1 = \{A \subseteq S \cup \{x_i, x_j\} \mid x_j \in A\}$.

Trabajamos análogamente con la segunda resta:

$$- \sum_{C \subseteq S \cup \{x_j\}} m(C) + \sum_{D \subseteq S} m(D).$$

En este caso, como estamos considerando los subconjuntos de $S \cup \{x_j\}$ y restándoles todos los subconjuntos de S es claro que nos quedaremos con los subconjuntos de $S \cup \{x_j\}$ que contengan necesariamente al elemento x_j. Es decir, $\mathcal{A}_2 = \{B \subseteq S \cup \{x_j\} \mid x_j \in B\}$.

Entonces, la expresión del índice de interacción dada en la ecuación (2.5) se puede simplificar a:

$$\sum_{A \subseteq \mathcal{A}_1} m(A) - \sum_{B \subseteq \mathcal{A}_2} m(B)$$

que a su vez puede reescribirse de forma explícita como:

$$\sum_{A \subseteq S \cup \{x_i\}} m(A \cup \{x_j\}) - \sum_{A \subseteq S} m(A \cup \{x_j\}).$$

Pero ahora vemos que esto nos deja con los subconjuntos de $S \cup \{x_i, x_j\}$ que incluyen necesariamente a los elementos x_i y x_j, por lo que la expresión puede simplificarse aún más, obteniendo el resultado deseado:

$$\sum_{A \subseteq S} m(A \cup \{x_i, x_j\}). \qquad \square$$

De manera que hemos conseguido dar una expresión alternativa y compacta del índice de interacción en términos de la inversa de Möbius. Ahora bien, es importante matizar que al estar trabajando con probabilidades inferiores generales, los sumandos de la expresión (2.6) pueden no pertenecer al intervalo $[0, 1]$, siempre y cuando $\underline{P}$ no sea una función de creencia. De hecho, para el caso de las probabilidades inferiores 2-monótonas, lo que nos dice la proposición 2.1 es que la suma de la ecuación (2.6) es no negativa, pero puede que alguno de sus sumandos sea negativo.

En cambio si $\underline{P}$ es una medida de creencia, sabemos que m siempre está en $[0, 1]$, por lo que no solo el índice de interacción es no negativo como se vio en la proposición 2.1, sino que todos los sumandos de esta expresión del índice de interacción son no negativos.

2.3.2. Linear Vacuous y Pari Mutuel Model

Linear Vacuous:

Recordemos que una probabilidad inferior se dice que es *Linear Vacuous* si existen P_0 una probabilidad y $\delta \in (0, 1)$ tales que la probabilidad inferior cumple:

$$\underline{P}_{LV}(A) = \begin{cases} (1-\delta)P_0(A) & \text{si } A \subseteq X \ . \\ 1 & \text{si } A = X. \end{cases} \tag{2.7}$$

Por simplicidad, vamos a suponer que P_0 asigna probabilidad no nula a todos los conjuntos no vacíos, lo que implica que $\underline{P}_{LV}$ es no nula excepto para el vacío. Esto tiene un sentido claro en la interpretación de los juegos cooperativos porque significa que todas las coaliciones, y en particular todos los jugadores, quieren recibir un premio no nulo, de manera que $P_0(A) = 1 \Leftrightarrow A = X$.

Proposición 2.3 (Propia)**.** *Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de jugadores y $\underline{P}$ un juego del tipo Linear Vacuous generado por una probabilidad P_0 y un parámetro de distorsión δ. Para todo $x_i, x_j \in S$ ($x_i \neq x_j$) y $S \subseteq X \setminus \{x_i, x_j\}$ se tienen dos posibles opciones:*

- *La coalición a estudiar no involucra a todos los jugadores ($S \cup \{x_i, x_j\} \neq X$): entonces el índice de interacción se anula.*
- *La coalición sí involucra a todos los jugadores ($S \cup \{x_i, x_j\} = X$): el índice de interacción es estrictamente positivo e igual a δ:*

$$I_{x_i,x_j}(S) = \delta.$$

Demostración. Empezamos por el caso en el que $S \cup \{x_i, x_j\} \neq X$. Entonces, el índice de interacción definido en 2.5 no es más que (sustituyendo directamente):

$$(1-\delta)\big[P_0(S \cup \{x_i, x_j\}) - P_0(S \cup \{x_i\}) - P_0(S \cup \{x_j\}) + P_0(S)\big] \tag{2.8}$$

Como P_0 es una medida de probabilidad podemos utilizar el tercer axioma de Kolmogorov para operar las uniones, ya que por definición de índice de interacción $x_i, x_j \notin S$.

$$\begin{aligned}(1-\delta)\big[\cancel{P_0(S)} + P_0(\{x_i, x_j\}) - \cancel{P_0(S)} - \\ P_0(\{x_i\}) - \cancel{P_0(S)} - P_0(\{x_j\}) + \cancel{P_0(S)}\big] =\end{aligned}$$

$$(1-\delta)\left[P_0(\{x_i, x_j\}) - P_0(\{x_i\}) - P_0(\{x_j\})\right] = 0$$

Comprobando que, siempre que la coalición no sea la de todos los jugadores del juego, el índice de interacción de una probabilidad de tipo Linear Vacuous será cero.

Veamos ahora qué sucede si la coalición es la de todos los jugadores juntos: $S \cup \{x_i, x_j\} = X$. Esto significa que $\underline{P}_{LV}(S \cup \{x_i, x_j\}) = 1$, por lo que recordando la definición (2.7) y la ecuación (2.8) se obtiene:

$$I_{x_i,x_j}(S) = \underbrace{\underline{P}_{LV}(X)}_{1} + (1-\delta)\big[-P_0(S \cup \{x_i\}) - P_0(S \cup \{x_j\}) + P_0(S)\big],$$

y utilizando ahora la aditividad de las medidas de probabilidad:

$$\begin{aligned}I_{x_i,x_j}(S) &= 1 + (1-\delta)\big[-P_0(S) - P_0(\{x_i\}) - \cancel{P_0(S)} - P_0(\{x_j\}) + \cancel{P_0(S)}\big] \\ &= 1 - (1-\delta)\big[P_0(\{x_i\}) + P_0(\{x_j\}) + P_0(S)\big] \\ &= 1 - (1-\delta)\big[P_0(S \cup \{x_i, x_j\})\big] \\ &= 1 - (1-\delta)P_0(X) = \delta.\end{aligned}$$

De manera que el índice de interacción de un modelo Linear Vacuous en el que están participando todos los jugadores es igual al valor de distorsión δ, $I_{x_i,x_j}(S) = \delta$, y queda demostrada la proposición. □

Hemos conseguido llegar a una expresión alternativa para el índice de interacción en términos de la probabilidad P_0 y el valor de distorsión δ. Así, se comprueba que en el caso de que la coalición $S \cup \{x_i, x_j\}$ no sea la de todos los jugadores, su índice de interacción es nulo, por lo que será lo mismo para los jugadores x_i y x_j aliarse entre ellos o no a la hora de unirse a S.

Por otro lado, cuando $S \cup \{x_i, x_j\} = X$, el índice de interacción no sólo no se anula sino que coincide con el parámetro de distorsión δ y por tanto es estrictamente positivo (dado que $\delta \in (0, 1)$). Esto nos dice que a todo par de jugadores les interesará lo mismo unirse a la coalición que contiene a todos los demás.

Pari Mutuel Model:

Recordemos la probabilidad inferior de los modelos Pari Mutuel en función de una probabilidad P_0 y un valor $\delta > 0$:

$$\underline{P}_{PMM}(A) = \text{máx}\{(1+\delta)P_0(A) - \delta\,,\ 0\}. \tag{2.9}$$

Será necesario para el siguiente resultado saber que, entonces, su probabilidad superior

$$\overline{P}_{PMM}(A) = \text{mín}\{1, (1+\delta)P_0(A)\}.$$

Para hacer este cálculo tendremos que tomar varios casos dependiendo de qué términos $(1+\delta)P_0(A) - \delta$ del índice de interacción pueden ser negativos y, por tanto, con probabilidad inferior $\underline{P}(A) = 0$.

Proposición 2.4 (Propia)**.** *Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de jugadores y $\underline{P}$ un juego del tipo Pari Mutuel generado por la probabilidad P_0 y el parámetro de distorsión δ. Se tienen cuatro posibles opciones para el índice de interacción:*

- *Ninguno de los sumandos del índice de interacción se anula o todos ellos lo hacen: entonces el índice de interacción es cero.*
- *El término $\underline{P}_{PMM}(S) = 0$, pero el resto son no nulos: el índice de interacción es positivo y puede reescribirse como*

$$I_{x_i,x_j}(S) = (1+\delta)(-P_0(S)) + \delta.$$

- *El término $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_i\}) = 0$ pero $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_j\})$ es no nulo: el índice de interacción es positivo y puede expresarse como*

$$I_{x_i,x_j}(S) = \overline{P}_{PMM}(\{x_j\}).$$

- *El término $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_j\}) = 0$ pero $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_i\})$ es no nulo: el índice de interacción es positivo y puede expresarse como*

$$I_{x_i,x_j}(S) = \overline{P}_{PMM}(\{x_i\}).$$

Demostración. Sean $x_i, x_j \in X$, con $x_i \neq x_j$, y $S \subseteq X \setminus \{x_i, x_j\}$. Dada la propiedad de monotonía de las probabilidades inferiores y que $S \subset S \cup \{x_i\} \subset S \cup \{x_i, x_j\}$, existen cuatro casos diferentes a considerar:

- Ninguno de los términos $(1+\delta)P_0(A) - \delta$ con $A \in \{S, S \cup \{x_i\}, S \cup \{x_j\}, S \cup \{x_i, x_j\}\}$ es negativo. Entonces, se aplica directamente la definición 2.9 del Pari Mutuel Model a la ecuación 2.5:

$$\begin{aligned} I_{x_i,x_j}(S) = &\Big((1+\delta)P_0(S \cup \{x_i, x_j\}) - \delta\Big) - \Big((1+\delta)P_0(S \cup \{x_i\}) + \delta\Big) \\ &- \Big((1+\delta)P_0(S \cup \{x_j\}) + \delta\Big) + \Big((1+\delta)P_0(S) - \delta\Big). \end{aligned}$$

  De manera que utilizando la aditividad de P_0:

$$\begin{aligned} (1+\delta)\big[P_0(S \cup \{x_i, x_j\}) - P_0(S \cup \{x_i\}) - P_0(S \cup \{x_j\}) + P_0(S)\big] \\ (1+\delta)\left[P_0(\{x_i, x_j\}) - P_0(\{x_i\}) - P_0(\{x_j\})\right] = 0, \end{aligned}$$

  lo que implica $I_{x_i,x_j}(S) = 0$.

- Solamente el término $(1+\delta)P_0(S) - \delta \leq 0$ entonces $\underline{P}_{PMM}(S) = 0$, pero el resto de términos del índice de interacción son no nulos. Vemos que el índice de interacción es:

$$\begin{aligned} I_{x_i,x_j}(S) = &\Big((1+\delta)P_0(S \cup \{x_i, x_j\}) - \delta\Big) - \Big((1+\delta)P_0(S \cup \{x_i\}) + \delta\Big) \\ &- \Big((1+\delta)P_0(S \cup \{x_j\}) + \delta\Big) + 0. \end{aligned}$$

  Utilizando de nuevo la aditividad de P_0:

$$\begin{aligned} I_{x_i,x_j}(S) &= (1+\delta)\left[P_0(\{x_i, x_j\}) - P_0(\{x_i\}) - P_0(\{x_j\}) - P_0(S)\right] + \delta \\ &= (1+\delta)(-P_0(S)) + \delta \geq 0. \end{aligned}$$

  Sabemos que será mayor o igual que cero ya que en este apartado estamos tomando como hipótesis que $(1+\delta)P_0(S) - \delta \leq 0$.

- El sumando que contiene solo a uno de los jugadores es menor que cero: $(1+\delta)P_0(S \cup \{x_i\}) - \delta \leq 0$ pero el del otro no: $(1+\delta)P_0(S \cup \{x_j\}) - \delta > 0$. Esto implica que $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_i\}) = 0$ (y por monotonía $\underline{P}_{PMM}(S) = 0$) mientras que $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_j\})$ no es nulo. Tomamos sin pérdida de generalidad el jugador x_i ya que en el caso contrario bastaría intercambiar las x_i con las x_j para obtener el resultado análogo. Así se tiene que:

$$\begin{aligned} I_{x_i,x_j}(S) &= (1+\delta)\left[P_0(\{x_i, x_j\}) - P_0(\{x_j\})\right] \\ &= (1+\delta)P_0(\{x_j\}) = \overline{P}_{PMM}(\{x_j\}) \geq 0. \end{aligned}$$

- Se tiene que $(1+\delta)P_0(S \cup \{x_i, x_j\}) - \delta \leq 0$ y por tanto $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_i, x_j\}) = 0$, lo que implica por monotonía que todos los sumandos de la expresión del índice de interacción también se anularán: $\underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_j\}) = \underline{P}_{PMM}(S \cup \{x_i\}) = \underline{P}_{PMM}(S) = 0$. De esta manera queda demostrado que el índice de interacción en este caso se anula automáticamente
$$I_{x_i,x_j}(S) = 0. \qquad \square$$

Se obtienen diferentes resultados dependiendo del valor de $\underline{P}_{PMM}$ pero quizás, los 3 últimos casos vistos en la demostración sean los menos usuales si nos vamos a un caso real. Que $\underline{P}_{PMM}(A) = 0$ para cualquier $A \subseteq X$ implica que la ganancia mínima asegurada de todos los jugadores de esa coalición es nula, o, desde otra perspectiva, que ninguno de los jugadores de A exige un premio mínimo en el juego.

Sin embargo, en el caso más usual en el que todos los jugadores tienen una exigencia mínima, lo que se obtiene es un índice de interacción que se anula, y por tanto a los jugadores les resultará indiferente unirse o no a cualquier coalición.

2.3.3. Probabilidades inferiores minitivas

Recordemos que, en el caso de las probabilidades minitivas definíamos la probabilidad superior de un conjunto como:

$$\overline{P}(A) = \max_{x \in A} \pi(x)$$

siendo π la restricción de $\overline{P}$ a conjuntos unipuntuales:

$$\pi(x) = \overline{P}(\{x\}).$$

Proposición 2.5 (Propia)**.** *Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de jugadores y $\underline{P}$ una probabilidad inferior minitiva. Se tienen dos posibles opciones para el índice de interacción:*

- *Suponer que x_i y x_j no son los dos jugadores con mayor probabilidad superior fuera de S. Es decir, existe $x \notin S \cup \{x_i, x_j\}$ tal que $\pi(x_i) < \pi(x)$ ó $\pi(x_j) < \pi(x)$. En tal caso, el índice de interacción se anula.*

- *Suponer que x_i y x_j son los dos jugadores con mayor probabilidad superior fuera de S respectivamente. Es decir, todo $x \notin S \cup \{x_i, x_j\}$ cumple $\pi(x_i) \geq \pi(x)$ y $\pi(x_j) \geq \pi(x)$. Entonces, el índice de interacción es positivo e igual a*
$$I_{x_i,x_j}(S) = \min\{\pi(x_i), \pi(x_j)\} - \pi(w),$$
donde $\pi(\omega) = \max_{x \notin S \cup \{x_i,x_j\}} \pi(x)$.

Demostración. Intentemos expresar la ecuación 2.5 en términos de la función π:

$$\begin{aligned}
&1 - \overline{P}\big((S \cup \{x_i, x_j\})^c\big) - 1 + \overline{P}\big((S \cup \{x_i\})^c\big) - 1 + \overline{P}\big((S \cup \{x_j\})^c\big) + 1 \\
&\quad - \overline{P}(S^c) - \overline{P}(S^c \cap \{x_i, x_j\}^c) + \overline{P}(S^c \cap \{x_i\}^c) + \overline{P}(S^c \cap \{x_j\}^c) - \overline{P}(S^c) = \\
&- \max_{x \in S^c \cap \{x_i, x_j\}^c} \pi(x) + \max_{x \in S^c \cap \{x_i\}^c} \pi(x) + \max_{x \in S^c \cap \{x_j\}^c} \pi(x) - \max_{x \in S^c} \pi(x). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Para realizar este cálculo es necesario separar distintos casos y será conveniente tener en mente el siguiente esquema.

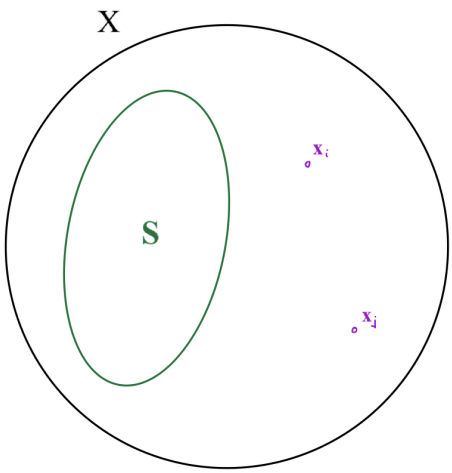


Figura 2.2: Esquema general de los conjuntos y elementos que encontramos al estudiar el índice de interacción.

- Caso 1: si $\overline{P}(S^c) = \pi(z)$ con $z \notin S \cup \{x_i, x_j\}$. Entonces tenemos claramente que:

$$\begin{aligned}
\max_{x \in S^c \cap \{x_i, x_j\}^c} \pi(x) &= \max_{x \in S^c \cap \{x_i\}^c} \pi(x) \\
&= \max_{x \in S^c \cap \{x_j\}^c} \pi(x) = \max_{x \in S^c} \pi(x) = \pi(z).
\end{aligned}$$

  En tal caso, el índice de interacción se anula.

- Caso 2: si $\overline{P}(S^c) = \pi(x_i) > \pi(z)$ para todo $z \notin S \cup \{x_i, x_j\}$. Es decir, si uno de los jugadores que estamos estudiando tiene el mayor peso fuera de la coalición inicial. Supondremos además que no existe ningún elemento $x \in S^c \cup \{x_i, x_j\}^c$ tal que $\pi(x) = \pi(x_i)$ ya que de existir este elemento, estaríamos en la misma situación que en el caso anterior. Con esto se tiene que:

$$\overline{P}(S^c \cap \{x_j\}^c) = \overline{P}(S^c) = \pi(x_i).$$

De manera que, atendiendo a la expresión (2.10), los términos $\overline{P}(S^c \cap \{x_j\}^c)$ y $\overline{P}(S^c)$ se anulan en la expresión del índice de interacción. Pero los dos restantes cumplen:

$$\overline{P}(S^c \cap \{x_i, x_j\}^c) < \pi(x_i), \quad \overline{P}(S^c \cap \{x_i\}^c) < \pi(x_i).$$

Por lo que habrá que volver a distinguir dos casos:

- Si $\overline{P}(S^c \cap \{x_i\}^c) = \pi(y)$ con $y \neq x_j$, entonces tenemos que:

  $$\overline{P}(S^c \cap \{x_i\}^c) = \overline{P}(S^c \cap \{x_i, x_j\}^c) = \pi(y),$$

  y comprobamos que el índice de interacción vuelve a cancelarse.
- Finalmente, si $\overline{P}(S^c \cap \{x_i\}^c) = \pi(x_j)$, es decir, si el otro jugador que estamos estudiando tiene la segunda mayor contribución individual del conjunto, entonces

  $$\overline{P}(S^c \cap \{x_i\}^c) \neq \overline{P}(S^c \cap \{x_i, x_j\}^c) = \pi(w)$$

  con $w \neq x_j$. Supondremos además que $\pi(x_j) \neq \pi(w)$ ya que de lo contrario estaríamos de nuevo en el caso anterior. De esta manera, recuperando la expresión (2.10), el índice de interacción resulta:

  $$I_{x_i,x_j}(S) = \pi(x_j) - \pi(w) \geq 0$$

- En el caso donde $\overline{P}(S^c) = \pi(x_j)$, el procedimiento y los resultados son completamente análogos, obteniendo en el caso de que $\overline{P}(S^c \cap \{x_i\}^c) = \pi(x_i)$ el siguiente índice de interacción:

  $$I_{x_i,x_j}(S) = \pi(x_i) - \pi(w) \geq 0$$

□

Es decir, hemos probado que siempre y cuando los jugadores con mayor posibilidad de ganancia ($\overline{P}$) fuera de S sean los x_i y x_j de los que estamos calculando la interacción; entonces el $I_{x_i,x_j}(S)$ dependerá del valor del segundo jugador con más probabilidad superior (que será uno de los dos que estamos estudiando) y el valor de probabilidad superior del siguiente.

En cambio, para cualquier otro par de jugadores el índice de interacción se anulará, haciendo que al resto de jugadores les sea indiferente unirse o no a la coalición.

Capítulo 3

Soluciones del juego basadas en el índice de interacción

Tras estudiar las distintas formas de escribir el índice de interacción y algunas de sus propiedades, abordamos el segundo gran objetivo de este trabajo donde conseguiremos definir tres soluciones originales a un juego a partir del propio índice de interacción. Por su parte, las soluciones de Shapley y Banzhaf, se pueden ver como sumas de las distintas contribuciones ponderadas de cada jugador a una coalición, de manera que en estas soluciones el premio se reparte en base a lo que cada jugador aporta a la coalición. Ahora, en esta nueva propuesta, lo que se intenta es premiar en todo momento a los jugadores que mejor cooperan con los demás (que no necesariamente han de ser los que más aportan) buscando también que la solución esté siempre dentro del core; de esta manera conseguiremos un reparto diferente del premio a los propuestos por Shapley y Banzhaf.

Así, se presentan tres soluciones distintas para juegos cooperativos. La manera en la que se aborda este capítulo es a modo de memoria del proceso constructivo que se tuvo hasta obtener la solución final. Por ello, se presenta en el primer caso una primera aproximación 'fallida' en la que la solución sólo dominará a $\underline{P}$ para algunas coaliciones y no para todas, de manera que no pertenece al core. En el segundo caso, se modifica la versión anterior para proponer una solución que se encuentra dentro del core pero que, por su construcción, se corresponde con un punto extremo del conjunto credal (lo cual no la hace muy deseable como solución que tenga en cuenta las exigencias mínimas de cada jugador). Finalmente, se sigue con el proceso deductivo utilizado hasta el momento para encontrar una solución que se corresponde con un punto intermedio de distintos puntos extremos del conjunto credal, asegurando así su pertenencia al core.

Como ya adelantábamos, durante todo este proceso nuestra intención mayoritaria será la de premiar a los jugadores que mejor interactúen con los demás. Es en esa decisión donde entra en juego el índice de interacción y

unas nuevas cantidades derivadas del mismo, que iremos definiendo a medida que las vayamos necesitando.

3.1. Primera aproximación

La primera idea, y más simple de todas, es válida para un juego en el que los jugadores han de agruparse por parejas y cooperar entre ellos. Por ello, solo será aplicable a juegos con un número par de jugadores. Se intentará, en cada uno de los pasos, premiar a los jugadores y coaliciones que más positivamente interactúen, todo ello a partir de la pareja más 'fuerte' del juego.

El algoritmo entonces sería el siguiente: sea $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{2N}\}$ nuestro conjunto de jugadores y un juego $(\underline{P})$ determinado por el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$. Para estudiarlo de la manera más general posible, solo impondremos que $\underline{P}$ sea coherente para así poder calcular nuestras probabilidades inferiores como cota inferior del conjunto credal.

1.- Buscar la pareja más 'fuerte'.

Consideraremos la pareja más fuerte $\sigma_1 = \{x_1, y_1\}$ con $x_1 \neq y_1$ como aquella que tiene la mayor ganancia mínima asegurada. Es decir:

$$x_1, y_1 \in \sigma_1 \text{ con } x_1 \neq y_1 \Leftrightarrow \underline{P}(\{x_1, y_1\}) = \text{máx}\{\underline{P}(\{x, y\}) : x \neq y\} \ .$$

2.- Ordenar el resto de parejas en función de su interacción:

Tomando σ_1 como referencia, ordenaremos el resto de parejas en función de cómo interactúan con la anterior de manera recursiva. Para ello, utilizaremos el índice de interacción de la siguiente manera:

$$x_2, y_2 \in \sigma_2 \text{ con } x_2 \neq y_2 \Leftrightarrow I_{x_2,y_2}(\sigma_1) = \underset{x \neq y \in X \setminus \sigma_1}{\text{máx}} \{I_{x,y}(\sigma_1)\}.$$

Lo haremos de forma recursiva, así se buscará la máxima interacción de los nuevos jugadores con la alianza de todas las parejas anteriores. Es decir, la pareja i-ésima se elegirá:

$$x_i, y_i \in \sigma_i \text{ con } x_i \neq y_i \Leftrightarrow I_{x_i,y_i}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) = \underset{x \neq y \in X \setminus (\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1})}{\text{máx}} \{I_{x,y}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1})\}.$$

Proceso que se repetirá hasta formar la última pareja. Así, lo que hemos logrado hasta el momento es simplemente ordenar nuestro conjunto total de jugadores X en función de la interacción con los grupos creados a partir de la pareja más fuerte, definiendo un nuevo conjunto X':

$$X' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_N\}.$$

3.- Asignar la ganancia de cada pareja:

Ahora que tenemos a los jugadores ordenados por parejas es hora de premiarlos en función de este orden. A la pareja más fuerte le daremos el máximo premio compatible con $\mathcal{M}(\underline{P})$, es decir:

$$P_1(\sigma_1) = \overline{P}(\sigma_1).$$

A partir de esta y en un intento de que nuestra solución sea un elemento del conjunto credal, será conveniente definirla de manera acumulada, o lo que es lo mismo:

$$P_1(\sigma_1 \cup \sigma_2) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \sigma_2) \Rightarrow P_1(\sigma_2) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \sigma_2) - \overline{P}(\sigma_1).$$

Así, la ganancia de la pareja i-ésima queda determinada por:

$$\begin{aligned} P_1(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) \Rightarrow \\ P_1(\sigma_i) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}). \end{aligned}$$

Finalmente, para que nuestra solución esté normalizada y bien definida asignaremos la ganancia de la última pareja como la cantidad restante tras haber asignado el resto a los demás jugadores:

$$P_1(\sigma_N) = 1 - P_1(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{N-1}).$$

Así nos aseguramos de que $P_1(X) = 1$.

Proposición 3.1 (Propia)**.** *Sea X el conjunto de jugadores y σ_N la coalición con menos interacción en los términos descritos durante el algoritmo anterior. Entonces, la ganancia de σ_N descrita en 3.1 se puede expresar como:*

$$P_1(\sigma_N) = \underline{P}(\sigma_N).$$

Demostración. Durante el proceso recursivo definimos: $P_1(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i)$ para la pareja i-ésima, por lo que $P_1(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{N-1}) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{N-1})$ y:

$$P_1(\sigma_N) = 1 - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{N-1}). \tag{3.1}$$

Aplicando la definición de probabilidad superior conjugada tenemos:

$$\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{N-1}) = 1 - \underline{P}\big((\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{N-1})^c\big) = 1 - \underline{P}(\sigma_N). \tag{3.2}$$

Así, introduciendo 3.2 en 3.1 se obtiene el resultado deseado:

$$P_1(\sigma_N) = 1 - (1 - \underline{P}(\sigma_N)) = \underline{P}(\sigma_N). \qquad \square$$

4.- Asignar la ganancia de cada jugador:

Llegados a este punto hemos conseguido agrupar a nuestros jugadores en parejas que favorecen la interacción y le hemos asignado una ganancia final a cada una de ellas. Falta decidir cómo repartir esa ganancia entre los dos jugadores de cada pareja.

En principio habría infinidad de maneras de hacer esta asignación. Quizás la más simple sería asignar toda la ganancia a uno de los jugadores dejando al otro sin nada. Sin embargo, -además de injusto- esto supone que nuestra solución no pertenecería, en general, al conjunto credal: no siempre tenemos juegos en los que $\underline{P}(\{x_i\}) = 0$ para algún x_i.

Otra manera de repartir el premio algo más justa sería haciéndolo proporcionalmente a la ganancia mínima asegurada para cada uno de los jugadores de manera individual. Es decir, dado $P_1(\sigma_i)$ con $\sigma_i = \{x_i, y_i\}$, repartir la ganancia de manera proporcional a $\underline{P}(\{x_i\})$ y $\underline{P}(\{y_i\})$. O lo que es lo mismo:

$$P_1(\{x_i\}) = \frac{\underline{P}(\{x_i\})}{\underline{P}(\{x_i\}) + \underline{P}(\{y_i\})} P_1(\sigma_i). \tag{3.3}$$

De esta manera, queda repartido el premio para cada uno de los jugadores de manera individual, como la ganancia de cualquier coalición se puede calcular sumando las ganancias individuales, hemos conseguido definir una posible solución del juego.

Proposición 3.2 (Propia)**.** *Sea X un conjunto de jugadores y $\underline{P}$ una probabilidad inferior coherente que define un juego entre ellos. Entonces, se cumple que*

$$\begin{aligned}
&\underline{P}(\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_i) \leq P_1(\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_i) \leq \overline{P}(\sigma_1 \cup ... \cup \sigma_i),\\
&\underline{P}(\{x_k\}) \leq P_1(\{x_k\}) \leq \overline{P}(\{x_k\})\\
&\underline{P}(\{y_k\}) \leq P_1(\{y_k\}) \leq \overline{P}(\{y_k\})
\end{aligned}$$

para las $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ definidas en el algoritmo anterior y para todo jugador x_k con $k = \{1, ..., N\}$.

Demostración. Estudiemos en primer lugar si esto se cumple para la ganancia definida para cada una de las parejas. Tenemos 3 casos:

$$\begin{cases}
P_1(\sigma_1) = \overline{P}(\sigma_1).\\
P_1(\sigma_i) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}).\\
P_1(\sigma_N) = \underline{P}(\sigma_N).
\end{cases}$$

Sabemos, por su propia construcción, que la solución definida para la primera y la última de las parejas se encuentra dentro del conjunto credal.

Demostraremos que $P_1(\sigma_i) \geq \underline{P}(\sigma_i)$ para todo $i \neq 1, N$ sólo con la hipótesis de coherencia. Basta recordar la propiedad (6) de las probabilidades coherentes, para ver que dados A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ entonces:

$$\underline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B).$$

Podemos aplicar estas relaciones a cada una de las parejas del juego ya que $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ para todo $x_i \neq j$ y tenemos:

$$\begin{aligned} &\underline{P}(\sigma_i \cup \ldots \cup \sigma_N) \geq \underline{P}(\sigma_i) + \underline{P}(\sigma_{i+1} \cup \ldots \cup \sigma_N) \\ \Rightarrow &\underline{P}(\sigma_i \cup \ldots \cup \sigma_N) - \underline{P}(\sigma_{i+1} \cup \ldots \cup \sigma_N) \geq \underline{P}(\sigma_i)\ . \end{aligned}$$

Aplicando la definición de la probabilidad superior conjugada se obtiene:

$$\begin{aligned} &\cancel{1} - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) - \cancel{1} + \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) \geq \underline{P}(\sigma_i) \\ \Rightarrow &\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) = P_1(\sigma_i) \geq \underline{P}(\sigma_i). \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado que esta asignación por parejas es mayor que su probabilidad inferior. Comprobemos también que $P_1(\sigma_i) < \overline{P}(\sigma_i)$. Para ello, basta aplicar la propiedad (4) de las probabilidades coherentes:

$$\overline{P}(A \cup B) \leq \overline{P}(A) + \overline{P}(B).$$

directamente a nuestro caso:

$$\begin{aligned} &\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) \leq \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) + \overline{P}(\sigma_i) \Rightarrow \\ &\qquad \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) = P_1(\sigma_i) \leq \overline{P}(\sigma_i). \end{aligned}$$

Ahora que ya sabemos que la asignación de probabilidad de las parejas se encuentra en el core, falta comprobar que la individual, definida en 3.3, también lo está.

Debemos considerar de nuevo los tres casos en los que definimos la solución para las parejas de jugadores:

$$\begin{cases} P_1(\sigma_1) = \overline{P}(\sigma_1), \\ P_1(\sigma_i) = \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) \quad \forall i = \{2, ..., N-1\}, \\ P_1(\sigma_N) = \underline{P}(\sigma_N). \end{cases}$$

Estudiemos en primer lugar el reparto de la última de las parejas σ_N. De aquí en adelante se comprobará únicamente para uno de los miembros de la pareja (x_N) ya que el otro sería totalmente análogo:

$$P_1(\{x_N\}) = \frac{\underline{P}(\{x_N\})}{\underline{P}(\{x_N\}) + \underline{P}(\{y_N\})}\underline{P}(\sigma_N) = \frac{\underline{P}(\{x_N, y_N\})}{\underline{P}(\{x_N\}) + \underline{P}(\{y_N\})}\underline{P}(\{x_N\}).$$

Buscamos que $P_1(\{x_N\}) \geq \underline{P}(\{x_N\})$ para comprobar que nuestra solución está en el core. Pero, vemos que será lo mismo que pedir:

$$\frac{\underline{P}(\{x_N, y_N\})}{\underline{P}(\{x_N\}) + \underline{P}(\{y_N\})} \geq 1.$$

Basta con recordar la propiedad 3.1 para que el resultado quede asegurado, ya que tendríamos:

$$\underline{P}(\{x_N, y_N\}) > \underline{P}(\{x_N\}) + \underline{P}(\{y_N\}).$$

Acabamos de demostrar que la solución para la pareja σ_N está dentro del core bajo coherencia. Veamos si esto también se cumple para los otros dos casos.

Siguiendo el mismo razonamiento, es evidente que para $P_1(\{x_1\})$:

$$P_1(\{x_1\}) = \frac{\underline{P}(\{x_1\})}{\underline{P}(\{x_1\}) + \underline{P}(\{y_1\})}\overline{P}(\sigma_1) \geq \frac{\underline{P}(\sigma_1)}{\underline{P}(\{x_1\}) + \underline{P}(\{y_1\})}\underline{P}(\{x_1\}) \ .$$

Obtenemos la misma expresión que en la ecuación 3.1 por lo que esta probabilidad también está dentro del core.

Finalmente estudiemos $P_1(\{x_i\})$:

$$P_1(\{x_i\}) = \frac{\underline{P}(\{x_i\})}{\underline{P}(\{x_i\}) + \underline{P}(\{y_i\})} \left[\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1})\right] \ .$$

Tendremos que comprobar que:

$$\frac{\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1})}{\underline{P}(\{x_i\}) + \underline{P}(\{y_i\})} \geq 1 \ ,$$

una manera de hacerlo será ver si se cumple:

$$\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) \geq \underline{P}(\sigma_i)$$

y así, aplicar el mismo razonamiento que en los dos casos anteriores. Para ello utilizaremos la propiedad (7) de las probabilidades coherentes:

$$\overline{P}(A \cup B) \geq \overline{P}(A) + \underline{P}(B).$$

Identificando $A = \{\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}\}$ y $B = \{\sigma_i\}$, tenemos que $A \cap B = \emptyset$ y se cumple que:

$$\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) \geq \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1}) + \underline{P}(\sigma_i) \ .$$

Por lo que la relación 3.1 es cierta bajo coherencia y podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_i) - \overline{P}(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_{i-1})}{\underline{P}(\{x_i\}) + \underline{P}(\{y_i\})} \geq \frac{\underline{P}(\{x_i, y_i\})}{\underline{P}(\{x_i\}) + \underline{P}(\{y_i\})} \geq 1 \ .$$

De manera que la asignación de probabilidad unipuntual también está dentro del conjunto credal bajo coherencia, haciendo que, en caso de formarse la coalición 'óptima', la solución propuesta esté dentro del conjunto credal. □

Hasta el momento, podría parecer que nuestra solución está dentro del core. Sin embargo, veamos a través de un contraejemplo que, pese a nuestros esfuerzos, esto no sucede en general.

Ejemplo 3.1. Encontramos un ejemplo en el que la solución no está dentro del conjunto credal, no solo bajo coherencia sino también bajo la hipótesis de 2-monotonía. Consideramos la probabilidad inferior cuyos puntos extremos son:

$$P_A = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), \qquad P_B = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1).$$

Calculamos sus probabilidades inferiores obteniendo

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4\}$
$\underline{P}$	0.1	0.2	0.3	0.1

	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_1, x_4\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_2, x_4\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\underline{P}$	0.3	0.4	0.3	0.5	0.4	0.5

	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$\{x_2, x_3, x_4\}$
$\underline{P}$	0.6	0.6	0.7	0.8

Se ha comprobado que, efectivamente, esta probabilidad inferior no sólo es coherente sino que también es 2-monótona. A partir de esta tabla podemos aplicar nuestro algoritmo donde vemos que las ganancias mínimas aseguradas de todas las parejas posibles son:

$$\begin{array}{lll} \underline{P}(\{x_1, x_2\}) = 0.3 & \underline{P}(\{x_1, x_3\}) = 0.4 & \underline{P}(\{x_1, x_4\}) = 0.3. \\ \underline{P}(\{x_2, x_3\}) = 0.5 & \underline{P}(\{x_2, x_4\}) = 0.4 & \underline{P}(\{x_3, x_4\}) = 0.5. \end{array}$$

Entonces, las parejas con mayor ganancia asegurada son $\{x_2, x_3\}$ y $\{x_3, x_4\}$. Elijamos $\{x_3, x_4\}$ y por tanto asignémosle su máxima probabilidad:

$$P_1(\{x_3, x_4\}) = \overline{P}(\{x_3, x_4\}) = 0.7.$$

Esto nos deja una única pareja por estudiar y por tanto, su probabilidad será:

$$P_1(\{x_1, x_2\}) = \underline{P}(\{x_1, x_2\}) = 0.3.$$

Calculemos ahora cada una de las probabilidades unipuntuales a partir de (3.3), obteniendo:

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4\}$
P_1	0.1	0.2	0.525	0.175

Con esta información, y dado que nuestra solución ya es una probabilidad propiamente dicha, podemos calcular el premio de todas las posibles coaliciones, incluidas aquellas que no conforman las σ_i definidas en el algoritmo. Vemos entonces que, tomando la coalición $\{x_2, x_4\}$:

$$P_1(\{x_2, x_4\}) = 0.2 + 0.175 = 0.375 < 0.4 = \underline{P}(\{x_2, x_4\}).$$

Por lo que hemos encontrado un ejemplo en el que la solución propuesta no se encuentra dentro del core incluso bajo 2-monotonía.

3.2. Segunda aproximación

Visto el error en la primera aproximación podemos sacar varias conclusiones. La primera es que nuestro procedimiento en general consiste de 2 pasos independientes. El primero es buscar una manera de ordenar nuestro conjunto de jugadores en base a su interacción. El segundo, asignar una probabilidad en función de este orden, que premie más a los que mejor interactúan.

Otra conclusión a tener en cuenta es que todo parecía funcionar hasta el momento en el que tuvimos que definir una manera de repartir la ganancia entre cada uno de los jugadores de una pareja. Por tanto, una manera de acercarnos a una solución que esté dentro del core es la de encontrar una forma de ordenar a nuestros jugadores de manera individual y realizar la misma asignación de probabilidad que habíamos hecho para cada una de las parejas en el algoritmo anterior.

Para ello introducimos la siguiente cantidad $CT(x_i)$ que nos dará una idea de cómo interactúa cada jugador x_i en todas las agrupaciones posibles tales que $x_i \notin S$ y $x_j \neq i$. Llamémosla, **colaboración total del jugador** x_i:

$$CT(x_i) = \sum_{x_j \neq x_i} \sum_{S \not\ni x_i, x_j} I_{x_i, x_j}(S). \tag{3.4}$$

1.- Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ el conjunto de jugadores. Los ordenamos en función de la colaboración total de cada uno, de mayor a menor. Es decir, tomamos la permutación σ tal que:

$$CT(x_{\sigma(i)}) \geq CT(x_{\sigma(i+1)})$$

para todo i. Entonces $X = \{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$.

2 Asignar la probabilidad a cada uno de ellos. Para ello, procederemos igual que en la solución anterior. Premiamos al jugador con mayor colaboración total con la probabilidad máxima dentro del conjunto credal:

$$P_2(\{x_1\}) = \overline{P}(\{x_1\}).$$

y asignamos las probabilidades al resto de manera acumulativa:

$$P_2(\{x_1, \ldots, x_i\}) = \overline{P}(\{x_1, \ldots, x_i\}).$$

de manera que su probabilidad individual es:

$$P_2(\{x_i\}) = \overline{P}(\{x_1, \ldots, x_i\}) - \overline{P}(\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}).$$

Continuamos el proceso hasta llegar al último de los jugadores de X' (el que menor colaboración total tiene) y le asignamos la probabilidad restante:

$$P_2(\{x_N\}) = 1 - P_2(\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}).$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la proposición 3.1 se tiene que la probabilidad de $P_2(\{x_N\})$ es:

$$P_2(\{x_N\}) = 1 - P_2(\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}) = 1 - \overline{P}(\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}) \Rightarrow$$
$$P_2(\{x_N\}) = 1 - \overline{P}(\{x_N\}^c) \Rightarrow P_2(\{x_N\}) = \underline{P}(\{x_N\}).$$

Proposición 3.3 (Propia)**.** *Sea X el conjunto de jugadores y $\underline{P}$ la probabilidad inferior que define un juego. Entonces, la solución propuesta en el algoritmo anterior se encuentra dentro del core bajo 2-monotonía.*

Demostración. Como estamos trabajando bajo 2-monotonía veamos que nuestra solución coincide con un punto extremo del conjunto credal tal y como se definen en el método de las permutaciones en la sección 1.2.3. Veámoslo de manera explícita a partir de su definición:

$$\begin{cases} P_2(\{x_1\}) = \overline{P}(\{x_1\}), \\ P_2(\{x_i\}) = \overline{P}(\{x_1 \cup \ldots \cup x_i\}) - \overline{P}(\{x_1 \cup \ldots \cup x_{i-1}\}) \quad \forall i \neq 1, N, \\ P_2(\{x_N\}) = \underline{P}(\{x_N\}), \end{cases}$$

pero, si recordamos, para este tipo de probabilidades inferiores existe un algoritmo con el que calcular los puntos extremos del conjunto credal a partir de $\{P_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$ siendo S_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$ si recordamos la forma de un punto extremo P_σ:

$$\begin{aligned} P_\sigma(\{\omega_{\sigma(1)}\}) &= \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}). \\ P_\sigma(\{\omega_{\sigma(2)}\}) &= \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)} \cup \omega_{\sigma(2)}\}) - \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}). \\ &\ldots \\ P_\sigma(\{\omega_{\sigma(i)}\}) &= \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)} \cup \ \cup \ldots \cup \omega_{\sigma(i)}\}) - \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)} \cup \ \cup \ldots \cup \omega_{\sigma(i-1)}\}). \\ &\ldots \\ P_\sigma(\{\omega_{\sigma(n)}\}) &= 1 - \overline{P}(\{\omega_{\sigma(1)} \cup \ \cup \ldots \cup \omega_{\sigma(n-1)}\}). \end{aligned}$$

Tenemos que coincide exactamente con nuestra asignación de probabilidad y por tanto queda demostrado que nuestra solución pertenece al core (ya que es un punto extremo suyo). □

Analicemos brevemente sus implicaciones. Después de revisar este desarrollo queda claro que resulta una manera "segura" de hacer la asignación de probabilidades para que la solución esté en el core; ya que estamos eligiendo directamente uno de sus puntos extremos.

Sin embargo, si nuestra intención es dar una solución final que sea justa con las exigencias mínimas de cada uno de los jugadores, será más interesante encontrar una nueva solución que no sea un punto extremo, sino que se encuentre en un punto "promedio" de todas las ganancias mínimas aseguradas para cada jugador. Consideremos un ejemplo tridimensional para mostrarlo gráficamente:

Ejemplo 3.2. Sea $\underline{P}$ un juego definido sobre el conjunto de jugadores $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ definido como la envolvente inferior de:

$$P_a = (0.2, 0.6, 0.2), \qquad P_b = (0.3, 0.3, 0.4),$$
$$P_c = (0.4, 0.4, 0.2), \qquad P_d = (0.7, 0, 0.3),$$

que por ser una probabilidad inferior coherente definida sobre un conjunto de cardinal 3 sabemos automáticamente que es 2-monótona.

Las probabilidades inferiores de todos los subconjuntos son:

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}$	0.2	0	0.2	0.6	0.4	0.3

Con estos valores podemos calcular las dos soluciones propuestas hasta el momento. En el caso de la solución de la sección 3.1, al tratarse de un conjunto de sólo 3 jugadores (y por tanto, impar) aplicamos el paso 1 - encontrando la pareja σ con mayor ganancia mínima asegurada- le asignamos su probabilidad superior y automáticamente le asignamos la probabilidad inferior al jugador restante. Así se tiene que la pareja que más interactúa es $\{x_1, x_2\}$ y obtenemos una primera solución:

$$P_1 = (0.8, 0, 0.2)$$

donde, si tomamos por ejemplo el conjunto $\{x_2, x_3\}$ observamos que:

$$P_1(\{x_2, x_3\}) = 0.2 < 0.3 = \underline{P}(\{x_2, x_3\})$$

y por tanto la solución no pertenece al conjunto credal.

Por otra parte, aplicamos el algoritmo de la sección 3.2, donde se tiene que el conjunto ordenado de jugadores según su colaboración total es:

$$X' = \{x_2, x_3, x_1\}.$$

así, aplicando el algoritmo obtenemos una segunda solución para el problema:

$$P_2 = (0.2, 0.6, 0.2).$$

Utilizando el programa '2monot-exremos.py' mostrado en el anexo A.4 vemos que los puntos extremos para esta probabilidad inferior 2-monótona son:

$$Ext(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{(0.2, 0.4, 0.4), (0.2, 0.6, 0.2), (0.6, 0.0, 0.4), \\ (0.7, 0.0, 0.3), (0.7, 0.1, 0.2)\}.$$

y nuestra solución coincide con el segundo de ellos.

Así, si los representamos en un 3-simplex, podemos ver gráficamente en qué puntos de nuestro conjunto se encuentran estas dos soluciones.

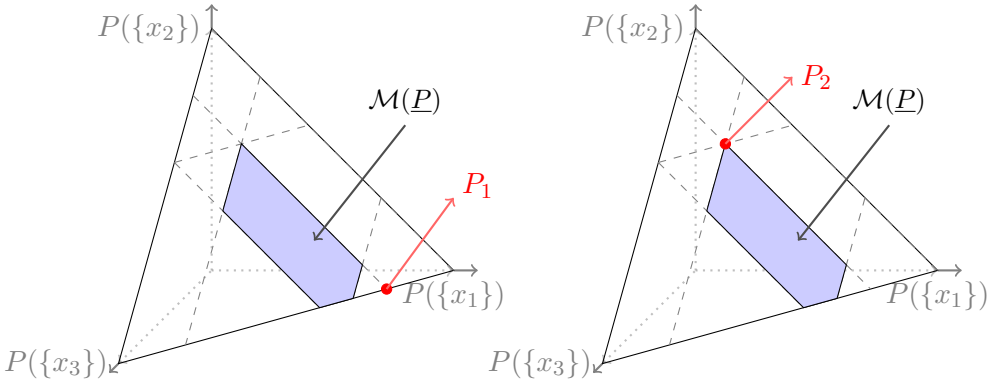


Figura 3.1: Análogo 3-dimensional de las dos soluciones propuestas hasta el momento.

Esta representación nos sirve para hacernos una idea de lo que está sucediendo. En la primera aproximación, encontramos una solución que no estaba en el core ni siquiera bajo 2-monotonía (primer 3-simplex). En el segundo caso, hemos encontrado una solución que sí que está en el core pero es un punto extremo de este (segundo 3-simplex), si lo que estamos buscando es una solución de consenso, proponer un punto extremo no parece lo más adecuado. En la siguiente sección, proponemos una solución final que se encuentra en un punto intermedio del conjunto credal.

3.3. Solución final

Tras haber estudiado los dos casos anteriores, hemos visto que una manera muy efectiva de construir estas soluciones es a partir de los puntos extremos del conjunto credal. En esta propuesta final partimos de la hipótesis de que nuestra probabilidad es 2-monótona para utilizar directamente el método de las permutaciones y poder trabajar con estos puntos extremos de manera directa.

Esta vez procederemos de manera algo distinta: definiendo la cantidad $\mathcal{I}(S)$ que nos indica la suma de las interacciones de la coalición S con todos los pares de jugadores posibles tales que $x_i, x_j \notin S$, es decir:

$$\mathcal{I}(S) = \sum_{x_i \neq x_j \notin S} I_{x_i,x_j}(S) \ . \tag{3.5}$$

De esta manera, la S que maximice esta cantidad será aquella coalición a la los jugadores más les interesará unirse; por lo que será aquella a la que más decidimos premiar durante el algoritmo.

1.- Encontrar la coalición S_0 que maximiza $\mathcal{I}(S)$:

$$S = S_0 \Leftrightarrow \mathcal{I}(S_0) = \operatorname*{máx}_{S \subseteq X}\{\mathcal{I}(S)\}.$$

2.- Queremos premiarla por ser aquella que mejor interactúa y por ello buscamos que nuestra solución final le asigne la máxima probabilidad compatible:

$$P_F(S_0) = \overline{P}(S_0).$$

Para asegurarnos de que esto ocurra y de que nuestra solución esté en el core, consideraremos todas las permutaciones cuyos $|S_0|$ primeros elementos sean los elementos de S_0 y para cada una de ellas obtendremos un punto extremo diferente. Esto significa que si tenemos un conjunto de $n = |X|$ jugadores y una coalición S_0 con $m = |S_0|$ jugadores, entonces el número total de permutaciones será: $= m!(n-m)! = l$. Así, se tiene un conjunto de probabilidades $\{P_1, ..., P_l\}$, de manera que cada una de ellas cumple que sus primeros elementos son aquellos pertenecientes a S.

Vamos un ejemplo: supongamos que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $S_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$, entonces tenemos un total de $3! \cdot (5-3)! = 12$ permutaciones. Esas 12 permutaciones se muestran a continuación:

Puntos extremos
$\sigma_1 = (1,2,3,4,5) \rightarrow P_1$
$\sigma_2 = (1,2,3,5,4) \rightarrow P_2$
$\sigma_3 = (1,3,2,4,5) \rightarrow P_3$
$\sigma_4 = (1,3,2,5,4) \rightarrow P_4$
$\sigma_5 = (2,1,3,4,5) \rightarrow P_5$
$\sigma_6 = (2,1,3,5,4) \rightarrow P_6$
$\sigma_7 = (2,3,1,4,5) \rightarrow P_7$
$\sigma_8 = (2,3,1,5,4) \rightarrow P_8$
$\sigma_9 = (3,1,2,4,5) \rightarrow P_9$
$\sigma_{10} = (3,1,2,5,4) \rightarrow P_{10}$
$\sigma_{11} = (3,2,1,4,5) \rightarrow P_{11}$
$\sigma_{12} = (3,2,1,5,4) \rightarrow P_{12}$

Cada una de ellas induce un punto extremo del conjunto credal (P_1, P_2, ...) con la posibilidad de que alguno de ellos esté repetido. Por ser x_1, x_2 y x_3 sus primeros elementos, tendremos que para todas estas probabilidades se cumple:

$$\begin{aligned}
&P_1(\{x_1\}) = \overline{P}(\{x_1\})\\
&P_1(\{x_1, x_2\}) = \overline{P}(\{x_1, x_2\})\\
&P_1(\{x_1, x_2, x_3\}) = \overline{P}(\{x_1, x_2, x_3\})\\
&\dots\\
&P_3(\{x_1\}) = \overline{P}(\{x_1\})\\
&P_3(\{x_1, x_3\}) = \overline{P}(\{x_1, x_3\})\\
&P_3(\{x_1, x_3, x_2\}) = \overline{P}(\{x_1, x_3, x_2\})\\
&\dots
\end{aligned}$$

Por tanto, en cada uno de los puntos extremos se tiene que $P_i(S_0) = \overline{P}(S_0)$.

3.- Una vez hemos elegido nuestro conjunto de puntos extremos $\{P_1, ..., P_l\}$ siendo l el número de puntos extremos (incluyendo las repeticiones), queda decidir cómo ponderarlos para obtener una probabilidad perteneciente al core. Es decir, necesitamos encontrar una combinación convexa de estas, de forma general podemos escribir:

$$P_F = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_l P_l, \tag{3.6}$$

donde las distintas $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pueden interpretarse como los pesos para cada una de las probabilidades y deben cumplir que $\alpha_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., l$ y $\alpha_1 + ... + \alpha_l = 1$. Veamos dos posibles formas de hacerlo:

3.1.- La manera más directa de elegir esta proporción es darle el mismo peso a cada una de las probabilidades. Es decir, hacer su media:

$$P_{F_1} = \frac{P_1 + ... + P_l}{l}. \tag{3.7}$$

3.2.- Otra manera, algo más compleja, de repartir esta ganancia es premiando de nuevo a los jugadores que mejor interactúan con el resto. O lo que es lo mismo, proporcionalmente a su colaboración total definida en (3.4).

Para ello, sabemos que los primeros jugadores de cada una de las permutaciones serán los mejor premiados (ya que directamente se les asigna la probabilidad superior). Entonces, decidiremos ponderarlas según su primer elemento. Sabemos que en un juego de X jugadores y para una coalición S_0 de m jugadores, de entre todas nuestras permutaciones posibles l existen $(m-1)!(n-m)! = p$

permutaciones que empiezan por un elemento en concreto. Nuestra elección de la probabilidad se simplifica entonces a:

$$P_{F_2} = \beta_{j_1}(P_{1_1} + ... + P_{1_p}) + ... + \beta_{j_m}(P_{m_1} + ... + P_{m_p}) \ . \quad (3.8)$$

Queda decidir cuales serán estas $\beta_{j_k} \in \mathbb{R}$. Lo haremos directamente ponderando la colaboración total del jugador $x_{j_k} \in S_0$ de entre todos los jugadores pertenecientes a $S_0 = \{x_{j_1}, ..., x_{j_m}\}$:

$$\beta_{j_k} = \left(\frac{1}{p}\right) \cdot \frac{CT(x_{j_k})}{CT(x_{j_1}) + ... + CT(x_{j_m})} \ . \quad (3.9)$$

De manera que hemos conseguido definir una solución que no solo premia a la coalición que mejor interactúa, sino que dentro de esta también reparte el premio según cómo lo hace cada jugador.

Proposición 3.4 (Propia)**.** *La solución P_F propuesta en la combinación convexa general* (3.6) *pertenece al core del juego bajo 2-monotonía. En particular, las soluciones concretas P_{F_1} de* (3.7)*; y P_{F_2} de* (3.8) *y* (3.9)*, son combinaciones convexas y por tanto se encuentran dentro del core bajo 2-monotonía.*

Demostración. Tal y como se fue detallando durante la descripción del algoritmo sabemos que, por construcción, la P_F descrita en (3.6) que define nuestra solución es una combinación lineal de puntos extremos del conjunto credal. Entonces, dado que en el propio algoritmo se impone que la combinación de los parámetros $\alpha_1, ..., \alpha_l$ sea convexa, se tiene que la solución P_F es una combinación convexa de puntos extremos del core y por tanto se encuentra contenida en él.

Centrémonos ahora en el primero de los casos P_{F_1} presentado en (3.7). Claramente, $\alpha_1 = ... = \alpha_l = \frac{1}{l}$ las cuales cumplen que:

$$\alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, ..., l \ .$$
$$\alpha_1 + ... + \alpha_l = \frac{l}{l} = 1 \ .$$

Por lo que estamos ante una combinación convexa y la solución está en el core.

Finalmente, comprobemos ahora si esto también ocurre para la solución P_{F_2} propuesta en 3.2. Para confirmar que está dentro del core, solo falta ver que la elección de nuestras β_i hacen que sea una combinación convexa.

Se comprueba primero que: $\beta_i \geq 0$ para todo $x_i = 1, ..., m$. Dada su definición en (3.9) y sabiendo que estamos trabajando con una probabilidad 2-monótona, tenemos asegurado que el índice de interacción es siempre positivo y por tanto, también lo serán las β_i.

Por otro lado, tenemos que ver que la suma de todas las β_{j_i} será igual a uno. Reescribamos nuestra solución explícitamente

$$P_{F_2} = \beta_{j_1} P_{1_1} + ... + \beta_{j_1} P_{1_p} + ... + \beta_{j_m} P_{m_1} + ... + \beta_{j_m} P_{m_p} \ ,$$

para ver que se comprueba la igualdad:

$$\beta_{j_1} \cdot p + ... + \beta_{j_m} \cdot p = \left(\frac{p}{p}\right) \cdot \frac{CT(x_{j_1}) + ... + CT(x_{j_m})}{CT(x_{j_1}) + ... + CT(x_{j_m})} = 1.$$

Así, confirmamos que la relación (3.8) es una combinación convexa de los puntos extremos del core y por tanto, la solución pertenece al mismo. □

Para comprobar que, efectivamente, necesitamos la propiedad de 2-monotonía para asegurar que nuestra solución se encuentra en el core recordamos uno de los ejemplos presentados anteriormente:

Ejemplo 3.3. Sea un juego con 5 jugadores: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, definido por $\underline{P}$ la probabilidad inferior coherente (no 2-monótona) que se define como la envolvente inferior de las siguientes probabilidades:

$$P_1 = (0.32, 0.27, 0.07, 0.16, 0.18).$$
$$P_2 = (0.48, 0.14, 0.33, 0.02, 0.03).$$
$$P_3 = (0.16, 0.08, 0.02, 0.42, 0.32).$$

Aplicando directamente el programa 'Ejemplo_3-3.py' mostrado en el A.7 se obtiene que la solución P_{F_2} según el algoritmo presentado en esta sección es:

$$P_{F_2} = (0.304, 0.27, 0.128, 0.154, 0.144).$$

Automáticamente podemos comprobar que tomando, el conjunto $\{x_1, x_4\}$ se tiene que:

$$P_{F_2}(\{x_1, x_4\}) = 0.458 < 0.48 = \underline{P}(\{x_1, x_4\}),$$

y por tanto $P_{F_2} \notin \mathcal{M}(\underline{P})$. De esta manera, se confirma que exigirle 2-monotonía al juego es necesario para asegurar que la solución pertenece al core.

Ahora que hemos asegurado la necesidad de imponer 2-monotonía a nuestra solución, recuperemos el ejemplo 3-dimensional que habíamos estudiado antes.

Ejemplo 3.4. Aplicaremos las dos soluciones P_{F_1} y P_{F_2} al ejemplo 3.2. En este caso, al estar ponderando distintos puntos extremos, conseguimos obtener esa proporción entre las distintas exigencias de cada jugador que buscábamos. Empezamos encontrando la coalición S_0:

$$S_0 = \{x_3\}$$

De manera que debemos considerar todas las permutaciones que empiecen por x_3:

$$\sigma_1 = (x_3, x_1, x_2)\ , \quad \sigma_2 = (x_3, x_2, x_1)$$

Que se corresponden respectivamente con los siguientes puntos extremos:

$$P_{\sigma_1} = (0.6, 0, 0.4)\ y \quad P_{\sigma_2} = (0.2, 0.4, 0.4)\ .$$

Así, como todas las permutaciones empiezan por el mismo jugador x_3 solo habrá que calcular un único parámetro β y un único parámetro α que, además, coinciden ya que $p = 2$ y $l = 2$ entonces se tiene:

$$\beta = \frac{1}{p}\frac{CT(x_3)}{CT(x_3)} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \frac{1}{l} = \frac{1}{2}.$$

Por lo que, en este ejemplo las dos soluciones coinciden y finalmente se tiene:

$$P_{F_2} \equiv P_{F_1} = (0.4, 0.2, 0.4).$$

Todos estos cálculos se han realizado con el programa "Solucion_3-4.py" mostrado en el anexo A.7; y, de nuevo, podemos representarlas gráficamente:

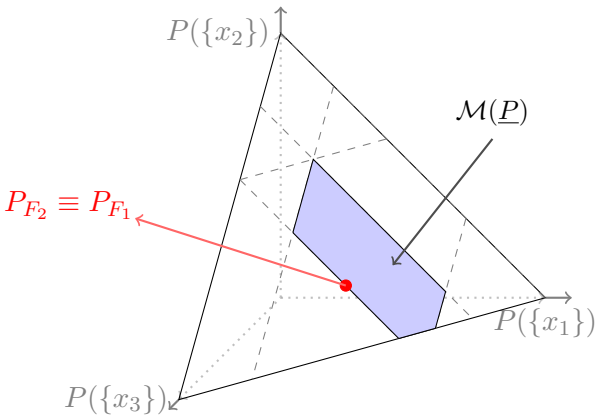


Figura 3.2: Ejemplo 3-dimensional de la solución final.

Comprobamos a través de la representación del 3-simplex, que nuestras soluciones son combinación convexa de dos de los puntos extremos y, por tanto, se encuentran en la línea que los une.

Por todo ello, se concluye que hemos conseguido definir una solución final acorde a todas nuestras exigencias y que premia a los jugadores que mejor colaboran con todos los demás.

Además, en el cálculo de α y β hemos probado que siempre que la coalición S_0 esté formada por un sólo elemento, entonces las soluciones P_{F_1} y P_{F_2} coinciden ya que en este caso se cumple siempre que:

$$\beta = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{1}{l} \quad \text{con} \quad l = p \cdot m \quad \text{y} \quad m = 1 \Rightarrow \beta = \alpha\ .$$

3.3.1. Comparación con Shapley y Banzhaf

Comparemos nuestra solución final con los valores de Shapley y Banzhaf, para ello utilizamos el ejemplo 3-dimensional al que hemos estado recurriendo durante la sección. Recordemos el valor de la probabilidad inferior para este ejemplo:

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}$	0.2	0	0.2	0.6	0.4	0.3

Recordando también las expresiones de los valores de Shapley y Banzhaf respectivamente:

$$\Phi(\underline{P})(i) = \sum_{A \not\ni \{i\}} \frac{t_A!(n - t_A - 1)!}{n!} \big(\underline{P}(A \cup \{i\}) - \underline{P}(A)\big),$$
$$B(\underline{P})(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{A \not\ni \{i\}} \big(\underline{P}(A \cup \{i\}) - \underline{P}(A)\big)$$

con n el número de jugadores y $t_A = |A|$. Calculamos todas las ganancias que necesitaremos para el cálculo

$$\begin{array}{lll} \underline{P}(\{1,2\}) - \underline{P}(\{2\}) = 0.6, & \underline{P}(\{1,3\}) - \underline{P}(\{3\}) = 0.2, & 1 - \underline{P}(\{2,3\}) = 0.7, \\ \underline{P}(\{1,2\}) - \underline{P}(\{1\}) = 0.4, & \underline{P}(\{2,3\}) - \underline{P}(\{3\}) = 0.1, & 1 - \underline{P}(\{1,3\}) = 0.6, \\ \underline{P}(\{1,3\}) - \underline{P}(\{1\}) = 0.2, & \underline{P}(\{2,3\}) - \underline{P}(\{2\}) = 0.3, & 1 - \underline{P}(\{1,2\}) = 0.4. \end{array}$$

Con estos valores podemos calcular los valores unipuntuales para el valor de Shapley:

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{P})(1) = \frac{1}{6}\Big(\underline{P}(\{1,2\}) - \underline{P}(\{2\})\Big) + \frac{1}{6}\Big(\underline{P}(\{1,3\}) - \underline{P}(\{3\})\Big) \\ + \frac{1}{3}\Big(\underline{P}(1 - \underline{P}(\{2,3\})\Big) + \frac{1}{3}\Big(\underline{P}(\{1\})\Big) = 0.4333\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{P})(2) = \frac{1}{6}\Big(\underline{P}(\{1,2\}) - \underline{P}(\{1\})\Big) + \frac{1}{6}\Big(\underline{P}(\{2,3\}) - \underline{P}(\{3\})\Big) \\ + \frac{1}{3}\Big(\underline{P}(1 - \underline{P}(\{1,3\})\Big) + \frac{1}{3}\Big(\underline{P}(\{2\})\Big) = 0.2833\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{P})(3) = \frac{1}{6}\Big(\underline{P}(\{1,3\}) - \underline{P}(\{1\})\Big) + \frac{1}{6}\Big(\underline{P}(\{2,3\}) - \underline{P}(\{2\})\Big) \\ + \frac{1}{3}\Big(\underline{P}(1 - \underline{P}(\{1,2\})\Big) + \frac{1}{3}\Big(\underline{P}(\{3\})\Big) = 0.2833\ . \end{aligned}$$

Obteniendo la siguiente solución:

$$\Phi(\underline{P}) = (0.4333, 0.2833, 0.2833)\ .$$

Por otro lado, calculamos también el valor de Banzhaf,

$$B(\underline{P}) = (0.375, 0.275, 0.225)\ .$$

que podemos normalizar a:

$$\Psi(\underline{P}) = (0.429, 0.314, 0.257)\ .$$

Representemos todo ello en el 3-simplex para ver de manera gráfica que estos tres valores nos dan tres soluciones distintas.

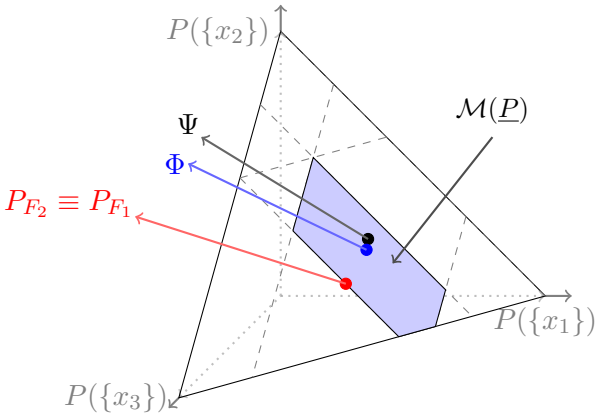


Figura 3.3: Ejemplo 3-dimensional de la solución final.

Para este ejemplo, todas las soluciones están dentro del core, pero es interesante recordar que en el caso del valor de Banzhaf esto no siempre está asegurado, incluso bajo 2-monotonía. Vemos además, que las tres soluciones son distintas, comprobando que la solución propuesta no coincide con ninguna de las anteriores. Nuestra solución difiere más de la de Shapley y Banzhaf porque, tal y como vimos en su algoritmo, estamos asignando el premio máximo a la coalición S_0 que en este caso coincide con el jugador x_3. Así, al darle como premio su probabilidad superior conjugada, la solución es una media de los dos extremos que tienen al jugador x_3 como primer elemento de su correspondiente permutación.

Capítulo 4

Ejemplo real

Llega el momento de aplicar nuestro algoritmo a un problema real. Para ello recurrimos al artículo [4] donde se presenta un problema de cooperación entre varias empresas y se calcula el valor de Shapley. Aplicaremos entonces nuestra solución, así como el valor de Banzhaf, para comparar si las tres soluciones coinciden y si satisfacen los requerimientos de cada coalición; es decir, si están en el core.

Este ejemplo contempla una situación muy real en la economía de libre mercado actual. Las pequeñas y medianas empresas son cada vez menos competitivas en comparación con las grandes multinacionales; por ello en muchos casos, a estas empresas les interesa cooperar y formar alianzas para poder competir en igualdad de condiciones.

La creación de estas alianzas suscitan el problema de cómo distribuir las ganancias una vez se ha obtenido el beneficio final. Así, tal y como ya comentamos, el valor de Shapley reparte este premio en función de lo que cada empresa aporta a la coalición, mientras que nuestra solución lo hará conforme a la interacción positiva que tengan entre ellas.

El ejemplo tomado en [4] es un caso hipotético desarrollado a partir de una encuesta que se distribuyó por seis empresas dedicadas a la venta de muebles en la región de Barranquilla (Colombia). En ella se les preguntaba lo siguiente:

> "Con la intención de acceder a nuevos y más altos volúmenes de mercado, la asociación de empresas de muebles te pide colaborar con la coalición reduciendo los precios de tus productos. ¿En cuánto estaría la empresa dispuesta a reducir el precio de sus productos con el fin de aumentar sus beneficios?"

A partir de las respuestas de las seis empresas y los datos de sus beneficios, se presentan en la tabla 4.1 los datos relevantes para el cálculo de los valores del juego.

Empresas	Beneficio neto en U$	% Reducción de precio tolerable	Beneficio esperado en U$
$PC1$	25000	0.03	10000
$PC2$	15000	0.1	5000
$PC3$	20000	0.2	8000
$PC4$	14000	0.05	5000
$PC5$	22000	0.1	7000
$PC6$	24000	0.1	9000

Tabla 4.1: Datos de cada una de las empresas del ejemplo presentados en la tabla 2 de [4].

Nos referiremos al conjunto de las distintas empresas con los acrónimos $X = \{PC1, PC2, ..., PC6\}$ y dado que en todo el artículo se trabaja desde el contexto de la teoría de juegos con cantidades sin normalizar, utilizaremos por el momento la letra v para hacer referencia al valor del juego de cada conjunto.

Interpretemos ahora la información de la tabla. En caso de no unirse a la coalición, las ganancias de cada empresa son las detalladas en la segunda columna. La tercera columna nos dice qué proporción de sus precios están las distintas empresas dispuestas a reducir. Mientras que la última columna nos indica las ganancias esperadas en caso de trabajar juntas.

A partir de estos datos se consigue el valor del juego para cada coalición, que como ya sabemos, se corresponde con el beneficio mínimo garantizado para cada coalición. Esto se hace de la siguiente manera: primero se calcula la reducción de precio de la coalición, considerando la menor de las posibles reducciones de precio de las dos. Después, el valor resultante de esta operación se añade a la suma de las ganancias esperadas de todas las compañías. Veámoslo mejor con un ejemplo. En el caso de los jugadores $PC1$ y $PC2$ el valor del juego $v(\{PC1, PC2\})$ se calcula entonces calculando en primer lugar la reducción del precio con el porcentaje más pequeño: 3 % a la suma de las ganancias, es decir:

$$(25000\$ + 15000\$) \cdot 0.03 = 38800\$.$$

Después, a este valor la añadimos la suma de las ganancias de ambos jugadores:

$$10000\$ + 5000\$ = 15000\$,$$

de manera que finalmente se tiene que el valor del juego para $\{PC1, PC2\}$ y, por tanto, su beneficio mínimo asegurado es:

$$38800\$ + 15000\$ = 53800\$.$$

Así, se calculan todos los valores siguiendo el mismo procedimiento para todas las combinaciones posibles, obteniendo los valores de la tabla 4.2.

Valor del juego para cada coalición					
Coalición	Valor	Coalición	Valor	Coalición	Valor
$v(\{PC1\})$	25000	$v(\{PC1, PC2, PC3\})$	81200	$v(\{PC1, PC2, PC3, PC5\})$	109540
$v(\{PC2\})$	15000	$v(\{PC1, PC2, PC4\})$	72380	$v(\{PC1, PC2, PC3, PC6\})$	113480
$v(\{PC3\})$	20000	$v(\{PC1, PC2, PC5\})$	82140	$v(\{PC1, PC2, PC4, PC5\})$	100720
$v(\{PC4\})$	14000	$v(\{PC1, PC2, PC6\})$	86080	$v(\{PC1, PC2, PC4, PC6\})$	104660
$v(\{PC5\})$	22000	$v(\{PC1, PC3, PC4\})$	80230	$v(\{PC1, PC2, PC5, PC6\})$	114420
$v(\{PC6\})$	24000	$v(\{PC1, PC3, PC5\})$	89990	$v(\{PC1, PC3, PC4, PC5\})$	108570
$v(\{PC1, PC2\})$	53800	$v(\{PC1, PC3, PC6\})$	93930	$v(\{PC1, PC3, PC4, PC6\})$	112510
$v(\{PC1, PC3\})$	61650	$v(\{PC1, PC4, PC5\})$	81170	$v(\{PC1, PC3, PC5, PC6\})$	122270
$v(\{PC1, PC4\})$	52830	$v(\{PC1, PC4, PC6\})$	85110	$v(\{PC1, PC4, PC5, PC6\})$	113450
$v(\{PC1, PC5\})$	62590	$v(\{PC1, PC5, PC6\})$	94870	$v(\{PC2, PC3, PC4, PC5\})$	92450
$v(\{PC1, PC6\})$	66530	$v(\{PC2, PC3, PC4\})$	64550	$v(\{PC2, PC3, PC4, PC6\})$	96350
$v(\{PC2, PC3\})$	44500	$v(\{PC2, PC3, PC5\})$	71300	$v(\{PC2, PC3, PC5, PC6\})$	101900
$v(\{PC2, PC4\})$	37550	$v(\{PC2, PC3, PC6\})$	75100	$v(\{PC2, PC4, PC5, PC6\})$	97250
$v(\{PC2, PC5\})$	45300	$v(\{PC2, PC4, PC5\})$	65450	$v(\{PC3, PC4, PC5, PC6\})$	105000
$v(\{PC2, PC6\})$	49100	$v(\{PC2, PC4, PC6\})$	69350	$v(\{PC1, PC2, PC3, PC4, PC5\})$	128120
$v(\{PC3, PC4\})$	45300	$v(\{PC2, PC5, PC6\})$	75900	$v(\{PC1, PC2, PC3, PC4, PC6\})$	132060
$v(\{PC3, PC5\})$	52800	$v(\{PC3, PC4, PC5\})$	73200	$v(\{PC1, PC2, PC3, PC5, PC6\})$	141820
$v(\{PC3, PC6\})$	56600	$v(\{PC3, PC4, PC6\})$	77100	$v(\{PC1, PC2, PC4, PC5, PC6\})$	133000
$v(\{PC4, PC5\})$	46200	$v(\{PC3, PC5, PC6\})$	83400	$v(\{PC1, PC3, PC4, PC5, PC6\})$	140850
$v(\{PC4, PC6\})$	50100	$v(\{PC4, PC5, PC6\})$	78000	$v(\{PC2, PC3, PC4, PC5, PC6\})$	124250
$v(\{PC5, PC6\})$	57400	$v(\{PC1, PC2, PC3, PC4\})$	99780	$v(\{PC1, PC2, PC3, PC4, PC5, PC6\})$	160400

Tabla 4.2: Esquema del cálculo del valor de Shapley presentado en la tabla 4 de [4].

Una vez disponemos de todos los valores del juego, podemos estudiar alguna de sus propiedades. Lo que más nos interesará es saber si se trata de una probabilidad 2-monótona o no; ya que, como se habló en la sección 1.1.4 y en el desarrollo de nuestra solución, tanto el valor de Shapley como las soluciones P_{F_1} y P_{F_2} necesitan que el juego sea 2-monótono para pertenecer al core.

Sin embargo, si por ejemplo tomamos las coaliciones $A = \{PC1, PC6\}$ y $B = \{PC3, PC6\}$ obtenemos

$$v(A) + v(B) = 66530 + 56600 = 123130,$$

mientras que

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = 93930 + 24000 = 117930,$$

de manera que el juego no es 2-monótono:

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) < v(A) + v(B) \tag{4.1}$$

y no está asegurado que ninguna de las soluciones pertenezca al core.

Con esta información ya podemos proceder a calcular las distintas soluciones. Empezaremos explicando el algoritmo para el valor de Shapley, y veremos que a partir de ese desarrollo será casi automático calcular el valor de Banzhaf. Finalmente, aplicaremos el resultado de la solución final propuesta en la sección 3.3 para este ejemplo.

4.1. Solución de Shapley y solución de Banzhaf

En primer lugar, calcularemos la solución de Shapley tal y como se hace en el artículo [4]. Para ello, fijémonos en la tabla 4.3.

Jugador i en cada colación	Contribución a las coaliciones formadas por j jugadores						
	1	2	3	4	5	6	$j_i(v)$
1	25000.00	202400.00	362250.00	366050.00	182900.00	36150.00	35173.33
2	15000.00	125250.00	191450.00	193550.00	97450.00	19550.00	19598.33
3	20000.00	160850.00	268600.00	271400.00	136600.00	27400.00	26815.00
4	14000.00	125980.00	196270.00	196830.00	96670.00	18580.00	19403.33
5	22000.00	166290.00	277460.00	280540.00	141260.00	28340.00	27941.67
6	24000.00	183730.00	316320.00	319680.00	160920.00	32280.00	31468.33
$P(\{j\})$	$0.1\overline{6}$	$0.0\overline{3}$	$0.01\overline{6}$	$0.01\overline{6}$	$0.0\overline{3}$	$0.1\overline{6}$	160400.00
$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$	$\Phi'(v)(\{i\}) = \sum_{S,j\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\big(v(S) - v(S \setminus \{i\})\big)$						

Tabla 4.3: Valores del juego para cada coalición del ejemplo, presentados en la tabla 3 de [4].

Cada una de las filas representa un jugador, mientras que las columnas se corresponden con el tamaño de las distintas coaliciones. Así, los valores de cada una de las celdas de 1 a 6 en columnas y de 1 a 6 en filas se calculan sumando la aportación de cada jugador i a cada coalición de j jugadores. Por ejemplo, en el caso de fila 1, columna 2 se suman las contribuciones del jugador 1 a todas las posibles coaliciones de 2 jugadores que contienen al jugador 1:

$$\Big(v(\{PC1, PC2\}) - v(\{PC2\})\Big) + \Big(v(\{PC1, PC3\}) - v(\{PC3\})\Big) + ...$$

obteniendo el valor: 202400\$. La fila $P(j)$ se corresponde con el peso para cada tipo de coalición, es decir, con

$$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

siendo s el número de jugadores de la coalición y n el número total de jugadores. Así, solo queda hacer la suma ponderada de cada fila multiplicando cada valor por el peso de su columna. De esta manera se obtiene el valor de Shapley para cada jugador presentado en la columna $j_i(v)$.

$$\Phi'(v) = (35173.33, 19598.33, 26815.00, 19403.33, 27941.67, 31468.33). \quad (4.2)$$

Finalmente, el valor de color rojo al final de esta tabla es la ganancia total de la gran coalición: $\{PC1,\ PC2,\ PC3,\ PC4,\ PC5,\ PC6\}$. Para calcular el valor de Shapley final basta con normalizar las cantidades de la última columna en función de este valor en rojo obteniendo la siguiente solución:

$$\Phi(v) = (0.219, 0.122, 0.167, 0.121, 0.175, 0.197). \quad (4.3)$$

Calculemos ahora el valor de Banzhaf a partir de los datos del artículo. Dada su definición en (1.2), vemos que basta con calcular el valor del parámetro:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = 0.03125 \tag{4.4}$$

y aplicar el mismo procedimiento tomando en todas las columnas la cantidad de (4.4) como peso. Se obtiene un valor de Banzhaf no normalizado:

$$B(v) = (36710.94, 20070.31, 27651.56, 20260.31, 28621.56, 32404.06). \tag{4.5}$$

Si sumamos todos los valores se obtiene una cantidad total de 165718.74$ que no coincide con el valor de la gran coalición: 160400$ por no estar normalizado el valor $B(v)$. Esto es debido a la misma razón por la que si hubiéramos aplicado este procedimiento a probabilidades inferiores normalizadas no hubiésemos obtenido un total de 1. Así, utilizamos esa suma de todos los valores para dar la solución normalizada del valor de Banzhaf

$$\Psi(v) = (0.222, 0.121, 0.167, 0.122, 0.173, 0.196). \tag{4.6}$$

Obtenemos entonces de las ecuaciones (4.3) y (4.6) que ambas representan distintas soluciones al juego; o lo que es lo mismo, distintas maneras de repartir el premio final. Estudiemos ahora cómo implementar nuestra solución al problema.

4.2. Solución propia

Nuestro objetivo es aplicar las soluciones finales P_{F_1} y P_{F_2} a este ejemplo. Pero, tal y como vimos en (4.1) el juego no es 2-monótono y entonces no tendría sentido aplicar este algoritmo. Esto es debido a que el procedimiento se basa en ponderar puntos extremos del core a partir del método de las permutaciones. Así, al no ser un juego 2-monótono, estos puntos no tendrían por qué ser extremos del core y por tanto nuestra solución no pertenecería al core en general.

Sin embargo, lo que haremos será calcular una aproximación interior 2-monótona, cuya definición y propiedades están detalladas en [8]. Veamos un breve resumen de lo que necesitamos saber en nuestro caso.

Definición 4.1. *Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ el conjunto de jugadores. Una* ***aproximación interior 2-monótona*** *de $\underline{P}$ es una probabilidad inferior 2-monótona $\underline{Q}$ que cumple*

$$\underline{Q}(A) \geq \underline{P}(A)$$

para todo $A \subseteq X$.

En términos de conjuntos credales, significa que el conjunto credal de la aproximación interior $\underline{Q}$ está contenido en el conjunto credal de la probabilidad inferior inicial $\underline{P}$:

$$\mathcal{M}(\underline{Q}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{P}).$$

Es decir, estas aproximaciones dan cotas mayores que las de las probabilidades iniciales y por tanto son modelos más precisos contenidos en los modelos iniciales.

Definición 4.2. *Se dice que una aproximación interior $\underline{Q}$ es* ***no-dominante*** *si no existe otra aproximación interior $\underline{Q}'$ que cumpla*

$$\underline{Q}(A) \gneq \underline{Q}'(A) \geq \underline{P}(A)$$

para todo $A \subseteq X$.

Una aproximación interior no-dominante $\underline{Q}$ es entonces la "menor" de todas las aproximaciones interiores.

Tomamos una aproximación interior no-dominante de nuestro juego normalizado $\underline{P}$ obteniendo una nueva probabilidad inferior $\underline{Q}$. Para realizar este cálculo utilizamos directamente el programa "InnerApprox.py" presentado en el anexo A.8.

Así, hemos conseguido una probabilidad inferior 2-monótona que es una aproximación de la probabilidad inferior de nuestro problema. Entonces, ahora podemos aplicarle nuestro algoritmo a la probabilidad inferior $\underline{Q}$, con la certeza de que la solución que obtengamos estará en el core por ser esta 2-monótona. Para ello, una vez hemos obtenido esta nueva probabilidad inferior $\underline{Q}$, la introducimos directamente el programa "EjemploCapitulo4.py" presentado en el anexo A.9, obteniendo que la coalición S_0 que maximiza $\mathcal{I}(S)$ es:

$$S_0 = \{PC3\}$$

entonces, tal y como se comentó al final del capítulo 3, se tiene que las soluciones P_{F_1} y P_{F_2} coinciden y son:

$$P_{F_1} = P_{F_2} = (0.22, 0.121, 0.169, 0.116, 0.175, 0.199)\ .$$

De aquí en adelante entonces nos referiremos a esta solución como P_F. Comparemos ahora las tres soluciones que hemos calculado para este ejemplo:

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= (0.219, 0.122, 0.167, 0.121, 0.175, 0.197)\\ \Psi(v) &= (0.222, 0.121, 0.167, 0.122, 0.173, 0.196)\\ P_F &= (0.22, 0.121, 0.169, 0.116, 0.175, 0.199).\end{aligned}$$

Lo primero en lo que podemos reparar es que, en el caso de las soluciones de Shapley y Banzhaf, al estar calculadas sobre la probabilidad original que no es coherente (y por tanto, tampoco 2-monótona) no está asegurado que estas

pertenezcan al core. De hecho, si consideramos la versión no normalizada del valor de Shapley (4.2) y estudiamos la empresa $\{PC4\}$, vemos que

$$\Phi'(v)(\{PC4\}) = 19403.33.$$

Mientras que si tomamos

$$\overline{v}(\{PC4\}) = 160400 - v(\{PC1, PC2, PC3, PC5, PC6\}) = \\ 160400 - 141820 = 18580,$$

tenemos que

$$\Phi'(v)(\{PC4\}) > \overline{v}(\{PC4\})$$

y por tanto esta solución está fuera del core. Esto significa que, como la empresa $PC4$ está recibiendo más beneficio del máximo que pide, esto hará que la coalición $\{PC1, PC2, PC3, PC5, PC6\}$ obtenga menos de su exigencia mínima, de hecho:

$$\Phi'(v)(\{PC1, PC2, PC3, PC5, PC6\}) = 140996,66 < \\ 141820 = v(\{PC1, PC2, PC3, PC5, PC6\}).$$

De la misma manera, podemos estudiarlo en el caso del valor de Banzhaf sin normalizar (4.5) para este mismo jugador. Aquí se tiene que:

$$B(v)(\{PC4\}) = 20260.31 > 18580 = \overline{v}(\{PC4\})$$

por lo que tampoco está dentro del core, lo cual vuelve a implicar que la coalición $\{PC1, PC2, PC3, PC5, PC6\}$ obtendría menos beneficio que su mínimo exigido.

Sin embargo en nuestro caso, al haber aplicado la aproximación interior al ejemplo, estamos trabajando con una probabilidad 2-monótona por lo que podemos asegurar, tal y como probamos en la proposición 3.4, que nuestra solución sí pertenece al core.

Otro de los aspectos que podemos comparar es qué empresas se llevan más beneficio y cuales menos para cada una de las soluciones. En el caso de Shapley:

$$\Phi(v)(\{PC1\}) > \Phi(v)(\{PC6\}) > \Phi(v)(\{PC5\}) > \\ \Phi(v)(\{PC3\}) > \Phi(v)(\{PC2\}) > \Phi(v)(\{PC4\}).$$

Para Banzhaf se tiene exactamente el mismo orden, lo cual tiene sentido ya que no dejan de ser distintas ponderaciones de las mismas cantidades:

$$\Psi(v)(\{PC1\}) > \Psi(v)(\{PC6\}) > \Psi(v)(\{PC5\}) > \\ \Psi(v)(\{PC3\}) > \Psi(v)(\{PC2\}) > \Psi(v)(\{PC4\}).$$

De nuevo, para nuestra solución original se obtiene la misma ordenación:

$$P_F(\{PC1\}) > P_F(\{PC6\}) > P_F(\{PC5\}) > \\ P_F(\{PC3\}) > P_F(\{PC2\}) > P_F(\{PC4\}).$$

Esto nos indica que, aunque en la sección 3.3 comprobamos que nuestra solución era distinta a la de Shapley y Banzhaf, estas tres mantienen el "orden" en el que repartir los beneficios para este ejemplo. Sin embargo, no debemos olvidar que la forma en la que este premio se reparte sí que difiere entre Shapley y Banzhaf y nuestra solución. Tanto Shapley como Banzhaf premian a los jugadores que más aportan, ponderando la ganancia de cada PCi con:

$$v(A \cup \{PCi\}) - v(A),$$

siendo $A \subseteq X$ tal que la empresa PCi no pertenece a A. Sin embargo, en nuestro caso premiamos la colaboración entre jugadores, buscando la coalición que mejor colabora y ponderando el beneficio de cada jugador en función de la colaboración total CT definida en 3.4.

Capítulo 5

Conclusiones

Durante esta memoria hemos logrado conectar la teoría de juegos cooperativos con las probabilidades imprecisas desde su definición en el capítulo 1, pasando por el estudio concreto del índice de interacción en el capítulo 2, hasta conseguir proponer una solución a un juego cooperativo en el capítulo 3, que finalmente hemos implementado en un problema real durante el capítulo 4. Hagamos un repaso detallado de lo que hemos visto y conseguido probar en cada uno de ellos.

Empezamos el trabajo haciendo una revisión bibliográfica en la que se introdujeron los conceptos básicos de la teoría de juegos y las probabilidades inferiores en las secciones 1.1 y 1.2 respectivamente. Esto nos permitió apreciar sus similitudes para llegar a concluir, en la sección 1.3, que ambas teorías son matemáticamente similares aunque difieran en notación, como ya se había apreciado en [7]. Por tanto, nos encontramos en situación de empezar con el segundo punto del trabajo: abordar problemas de teoría de juegos desde la perspectiva de las probabilidades inferiores.

Así, se empieza el capítulo 2, donde, en la sección 2.1, presentamos el concepto del índice de interacción desde su definición original en la teoría de juegos para más adelante tratar sus características y propiedades con herramientas de las probabilidades imprecisas. En primer lugar, estudiamos e interpretamos el signo de este índice de interacción para los tipos más generales de probabilidades inferiores. Se llega entonces a los primeros resultados originales del trabajo, resumidos en la tabla 5.1. Si atendemos al esquema de la figura 1.5 vemos que estos tres resultados engloban a todos los posibles modelos de probabilidades inferiores presentados en el trabajo (sección 1.2.4).

Probabilidad inferior	**Signo del índice de interacción**
Coherente	No asegurado
Comparativa	No asegurado
2-monótona	Asegurado: No-negativo

Tabla 5.1: Resumen de los resultados propios desarrollados en la sección 2.2.

Continuamos el estudio del índice de interacción utilizando las descripciones de cada tipo de probabilidad inferior presentadas en la sección 1.2.4. Entonces, lo que buscamos en 2.3 es conseguir dar distintas expresiones del índice de interacción en los términos concretos de cada uno de estos modelos de probabilidades inferiores. Se llega así a una serie de nuevos resultados propios, resumidos en la tabla 5.2.

Tipo $\underline{P}$:	**Expresión del índice de interacción**
Coherente	$I_{x_i,x_j}(S) = \sum_{A \subseteq S} m(A \cup \{x_i, x_j\})$
LV	- $S \cup \{x_i, x_j\} \neq X$: $I_{x_i,x_j}(S) = 0$ - $S \cup \{x_i, x_j\} = X$: $I_{x_i,x_j}(S) = \delta$
PMM	- Caso general: $I_{x_i,x_j}(S) = 0$ - $\underline{P}(S) = 0$: $I_{x_i,x_j}(S) = (1+\delta)(-P_0(S)) + \delta$ - $\underline{P}(S \cup \{x_i\}) = 0$ pero $\underline{P}(S \cup \{x_j\}) \neq 0$: $I_{x_i,x_j}(S) = \overline{P}(\{x_j\})$ - $\underline{P}(S \cup \{x_j\}) = 0$ pero $\underline{P}(S \cup \{x_i\}) \neq$: $I_{x_i,x_j}(S) = \overline{P}(\{x_i\})$
Minitiva	- Existe $x \notin S \cup \{x_i, x_j\} \mid \pi(x_i) < \pi(x)$ ó $\pi(x_j) < \pi(x)$: $I_{x_i,x_j}(S) = 0$ - Todo $x \notin S \cup \{x_i, x_j\}$ cumple $\pi(x_i) \geq \pi(x)$ y $\pi(x_j) \geq \pi(x)$: $I_{x_i,x_j}(S) = \text{mín}\{\pi(x_i), \pi(x_j)\} - \pi(w)$

Tabla 5.2: Resumen de los resultados desarrollados en la sección 2.3, donde $X = \{x_1, ..., x_n\}$ es el conjunto de jugadores, $S, A \subseteq X$ con $x_i, x_j \notin S$ y $x_i \neq x_j$. Los acrónimos LV y PMM hacen referencia a los modelos Linear Vacuous y Pari Mutuel respectivamente; siendo δ el parámetro de distorsión y P_0 la probabilidad inicial de estos modelos. Finalmente, π es la función definida en (1.9) y $\pi(\omega) = \text{máx}_{x \notin S \cup \{x_i,x_j\}} \pi(x)$.

Así, recordamos que se consiguió expresar el índice de interacción en el contexto de las probabilidades inferiores en términos de la Inversa de Möbius y para los tipos de probabilidades inferiores 2-monótonas: Linear Vacuous, Pari Mutuel y Minitivas.

Tras esto, en un procedimiento de ensayo y error, se presentan en el

capítulo 3 cuatro soluciones distintas para juegos cooperativos. Probamos que la primera P_1 presentada en la sección 3.1 no se encontraba en el core ni siquiera bajo 2-monotonía. Después, en 3.2 proponemos una nuevo solución P_2 que se encuentra dentro del core bajo 2-monotonía pero que siempre coincide con un punto extremo del mismo. Finalmente, presentamos una solución general final P_F en la sección 3.3, que siempre se encuentra dentro del core bajo 2-monotonía por ser combinación convexa de varios puntos extremos del conjunto credal. A partir de ella damos dos soluciones concretas P_{F_1} y P_{F_2}, para más tarde comprobar que coinciden siempre que la coalición que maximiza $\mathcal{I}(S)$ definida en (3.5) esté formada por un único jugador. Así, a lo largo del capítulo vamos comparando todas estas soluciones a través del ejemplo 3-dimensional 3.2 que podemos representar a través de un 3-simplex. Todos estos resultados pueden verse resumidos en la figura 5.1.

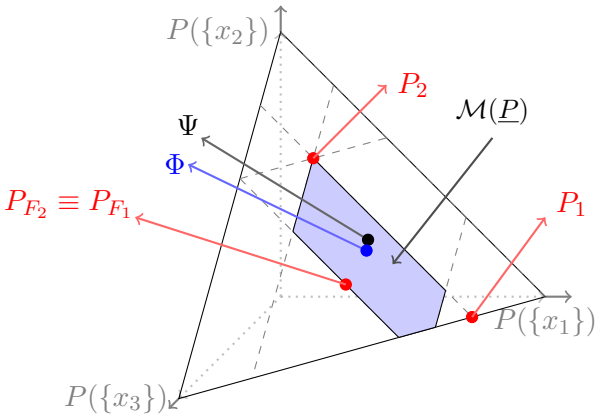


Figura 5.1: Ejemplo 3-dimensional de la solución final.

Finalmente, aplicamos nuestra solución a un ejemplo real cuyo juego no era 2-monótono. Para ello tuvimos que adaptar el procedimiento que habíamos presentado introduciendo las aproximaciones 2-monótonas. Estas nos permitieron construir un nuevo juego, cuyo conjunto credal está contenido en el inicial, pero que sí cumple la hipótesis de 2-monotonía. Así, calculamos nuestra solución y la comparamos con las de Shapley y Banzhaf para el ejemplo inicial, donde encontramos que el orden en el que se reparte el premio para las tres soluciones es el mismo pero; sin embargo, ni el valor de Shapley ni el de Banzhaf pertenecen al core.

Apéndice A

Códigos

A.1. 'ModuloTFG.py'

Este módulo de funciones es utilizado en el resto de programas del anexo. No sólo puede utilizarse para calcular la solución desarrollada durante el trabajo, sino que también cuenta con diferentes funciones que pueden usarse para calcular desde probabilidades inferiores y superiores conjugadas a índices de interacción, colaboración total de un jugador o permutaciones con un determinado conjunto de jugadores en las primeras posiciones. Todo ello se explica en el propio código.

```
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
import math


#DEF FUNCION DE PROBABILIDAD PARA EL LINEAR VACUOUS
def PinfLV(P,epsilon,A):
    '''
    P el array de probabilidades P0
    epsilon el valor de tu modelo Linear Vacuous
    A el conjunto de jugadores de 1,...,N  Empiezan  en 1!
    A un array
    '''
    if len(A)==len(P):
        return 1

    elif len(A)<len(P):
        Pinf=(1-epsilon)*np.sum(P[A-1])
        return Pinf


#DEF FUNCION DE PROBABILIDAD PARA EL PARI MUTUEL
def PinfPM(P,epsilon,A):
    '''
    P el array de probabilidades P0
    epsilon el valor de tu modelo Pari Mutuel
    A el conjunto de jugadores de 1,...,N  Empiezan  en 1!
    A un array
    '''
    C=(1+epsilon)*np.sum(P[A-1])-epsilon
    if C<=0:
        return 0
    else:
        return C


#DEF FUNCION PROBABILIDAD INFERIOR A PARTIR DE PUNTOS EXTREMOS
def Pinf(P,A):
```

```
    '''
    P el array de probabilidades
    A el conjunto de jugadores de 1,...,N   Empiezan   en 1!
    A un array
    '''
    if len(A)==1:
        Pinf=np.min(P[:,A-1])
    else:
        Ps=np.sum(P[:,A-1],axis=1)
        Pinf=np.min(Ps)
    return Pinf


#DEF FUNCION PROBABILIDAD SUPERIOR
def Pmax(P,Sigma,A):
    '''
    P el array de probabilidades
    A array con los jugadores
    Devuelve: Probabilidad superior
    '''
    Ac=np.delete(Sigma,A-1)
    Pmax=1-Pinf(P,Ac)
    return Pmax


#DEF FUNCION INDICE DE INTERACCION
def I(P,S,i,j):
    '''
    P el array de probabilidades
    S un array con la coalicion
    i y j numeros con la etiqueta de los jugadores
    '''
    SUij=np.append(S,[i,j])
    SUi=np.append(S,i)
    SUj=np.append(S,j)

    I=Pinf(P,SUij)+Pinf(P,S)-Pinf(P,SUi)-Pinf(P,SUj)

    return I


#DEF FUNCION COMBINATORIA AUXILIAR
def combs(a, r):
    """
    Return successive r-length combinations of elements in the array a.
    Should produce the same output as array(list(combinations(a, r))), but
    faster.
    Obtenido de [   ?]
    """
    a = np.asarray(a)
    dt = np.dtype([('', a.dtype)]*r)
    b = np.fromiter(itertools.combinations(a, r), dt)
    return b.view(a.dtype).reshape(-1, r)


#DEF ME DEVUELVE TODAS LAS S POSIBLES EN SIGMA SIN i NI j'
def subS(Sigma,i,j):
    '''
    Me devuelve todos los posibles subconjuntos S \in Sigma sin i ni j
    Si metes i=0 y j=0 te devuelve todas las combinaciones de Sigma
    Sigma el array de los jugadores
    i y j numeros con las etiquetas de los jugadores
    Tomando subS(Sigma,i,j)[k] te devuelve todas las combinaciones
    de k+1 jugadores
    '''
    SuperS=[]

    if i==0 and j==0:
        Sigmap=Sigma

    else:
        i=i-1
        j=j-1
        Sigmap=np.delete(Sigma,[i,j])

    for k in range(len(Sigmap)):
        SS=combs(Sigmap,k+1)
        SuperS.append([SS])

    return(SuperS)


#DEF COLABORACION TOTAL DEL ELEMENTO i
def Igen(P,Sigma,i):
```

```
    '''
    Calculo del indice de interaccion de un elemento i
    P el array de probabilidades
    Sigma el conjunto de jugadores
    i el numero de la etiqueta del jugador que se quiere calcular
    '''
    Ii=0
    i=i-1

    for j in range(len(Sigma)):
        if j==i:
            continue
        else:

            for k in range(len(subS(Sigma,i,j))):
                array=np.array(subS(Sigma,i,j)[k][0])

                for l in range(len(array[:,0])):
                                S=array[l,:]
                                Ii=Ii+I(P,S,i+1,j+1)
    return Ii


#DEF COALICION DE K JUGADORES CON MAYOR PROBABILIDAD INFERIOR
def PinfMax(P,Sigma,k):
    '''
    Te devuelve una lista con dos elementos
    El primero: la m xima probabilidad inferior para una coalicion
    [i_1,...,i_k] de k jugadores en sigma
    En el segundo: el array de la coalicion en cuestion [i_1,...,i_k]
    '''
    Ncoalicionesk = len(subS(Sigma, 0, 0)[k-1][0])
    Pinfs=np.zeros(Ncoalicionesk)

    for i in range(Ncoalicionesk):
        Pinfs[i]=Pinf(P,subS(Sigma, 0, 0)[k-1][0][i])
        ind=Pinfs.argsort()[-1]
        #argsort me devuelve los indices ordenados segun el valor
        #del elemento de menor a mayor

    return [Pinfs[ind],subS(Sigma, 0, 0)[k-1][0][ind]]


#DEF INDICE MAXIMO DADO UN S CON UN PAR DE JUGADORES Y LOS JUGADORES
def ISMax(P,Sigma,S):
    '''
    Te devuelve una lista con dos elementos
    El primero: el valor maximo del indice de interaccion entre S dado y [i,j]
    En el segundo: el array de la coalicion que lo cumple [i,j]
    Sigma y S tienen que ser arrays
    '''
    Ifinal=0 #REVISAR
    Sprima=S-1 #de jugadores a indices
    Indices=np.array([0,0])
    Sigmap = np.delete(Sigma,Sprima)
    for i in range(len(Sigmap)):
        for j in range(len(Sigmap)):

            if j==i:
                continue

            else:
                Interaccion=I(P,S,Sigmap[i],Sigmap[j])

                if Interaccion>Ifinal:
                    Ifinal=Interaccion
                    Indices=np.array([Sigmap[i],Sigmap[j]])

                else:
                    continue

    return [Ifinal,Indices]


#DEF LA \mathcal(I)(S) DEFINIDA DURANTE LA MEMORIA PARA UNA S DADA
def Ilatina(P,Sigma,S):
    '''
    S un array con la coalicion
    Te devuelve un numero
    '''
    Interaccion=0
    Sprima=S-1 #de jugadores a indices
    Sigmap = np.delete(Sigma,Sprima) #La Sigma sin los jugadores de S
```

```
    for i in range(len(Sigmap)):
        for j in range(len(Sigmap)):

            if j==i:
                continue
            else:
                Inter = I(P,S,Sigmap[i],Sigmap[j])
                Interaccion=Interaccion+Inter

    Irara=Interaccion/2 #porque me suma las interacciones con xi,xj dos veces
    return Irara


#DEF QUE DEVUELVE LA S0 QUE MAXIMIZA LA CANTIDAD ANTERIOR Y SU VALOR
def SPRO(P,Sigma):
    '''
    Funcion que me devuelve un array de con dos salidas
    la primera: el valor del indice maximo I(S_0)
    la segunda: la S_0 que lo cumple
    '''
    Njugadores=len(subS(Sigma,0,0)) #tama o del array gigante de arrays
    #donde voy a meter el maximo de cada grupo de coaliciones segun su tama o
    Idetodos=np.zeros(Njugadores)
    #el indice que me da el maximo en cada caso
    inddetodos=[]

    for i in range(Njugadores-2):
        #combinaciones de i+1 jugadores como un array de 2 dimensiones
        Nsubjugadores=len(subS(Sigma,0,0)[i][0])
        #un subarray donde metemos las I de las combinaciones de i+1 jugadores
        Ideijugadores=np.zeros(Nsubjugadores)

        for j in range(Nsubjugadores):
            Iaux = np.round(Ilatina(P,Sigma,subS(Sigma,0,0)[i][0][j]),decimals=5)
            Ideijugadores[j]=Iaux
        #el indice de la coalicion con mas I de las subcoaliciones
        indaux=Ideijugadores.argsort()[-1]
        suI=Ideijugadores[indaux] #su I correspondiente
        Idetodos[i] = suI #la metemos en el array de todos del principio
        inddetodos.append(indaux)
        #si esto es [2,3,4,1] se refiere a que es el 2 de la 1, el 3 de la 2...

    indfinal = Idetodos.argsort()[-1] #en que grupo de coaliciones esta el maximo
    subindfinal = inddetodos[indfinal] #que coalicion dentro de este lo alcanza
    Ifinal = Idetodos[indfinal]

    return [Ifinal,subS(Sigma,0,0)[indfinal][0][subindfinal]]


#DEF ARRAY CON LAS M BETAS
def beta(P,Sigma,S0,N):
    '''
    funcion que te devuelve un array de tama o m (len(S0))
    con la beta correspondiente a cada jugador de S0
    '''
    m=len(S0)
    p=float(math.factorial(m-1)*math.factorial(N-m))
    ColTot=np.zeros(m)
    betas=np.zeros(m)

    for i in range(len(ColTot)):
        #array con las I de los jugadores en S0
        ColTot[i]=Igen(P, Sigma, S0[i])

    for i in range(len(betas)):
        betas[i]=1/p*ColTot[i]/np.sum(ColTot)

    return betas


#DEF LA SOLUCION PONDERADA FINAL
def solucion(P,Sigma,pext,sigmaext,betas,S0,N):
    N=len(Sigma)
    sol=np.zeros(N)
    nper=len(sigmaext[:,0])

    for i in range(len(S0)):
        for j in range(nper):

            if S0[i]==sigmaext[:,0][j]:
                sol=sol+betas[i]*pext[j]
    return sol
```

A.2. 'Ejemplo_2-1.py'

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import ModuloTFG as tfg

#INTRODUCIR LOS PUNTOS EXTREMOS PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD INFERIOR
P1=np.array([0.32, 0.27, 0.07, 0.16,0.18])
P2=np.array([0.48, 0.14, 0.33, 0.02,0.03])
P3=np.array([0.16, 0.08, 0.02, 0.42,0.32])
P=np.array([P1,P2,P3])


#NUMERO Y ARRAY DE JUGADORES: \Omega={1,2,3,...,N}
N=len(P[0])
Sigma = np.arange(1,N+1,1)


S=np.array([1,2])
i=3
j=4

I=tfg.I(P, S, i, j)

print(I)
```

A.3. 'Ejemplo_2-2.py'

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Jun 30 11:10:32 2022

@author: carmenembil
"""
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import ModuloTFG as tfg

#INTRODUCIR LOS PUNTOS EXTREMOS PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD INFERIOR
P1=np.array([1./5, 1./5, 1./5, 1./5,1./5])
P2=np.array([1./3, 1./3, 1./3, 0,0])
P3=np.array([1./2, 1./2, 0, 0,0])
P4=np.array([1./2, 0, 1./2, 0, 0])
P5=np.array([1, 0, 0, 0, 0])
P6=np.array([0, 0, 0, 1./2, 1./2])
P7=np.array([0, 0, 0, 1, 0])
P=np.array([P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7])


#NUMERO Y ARRAY DE JUGADORES: \Omega={1,2,3,...,N}
N=len(P[0])
Sigma = np.arange(1,N+1,1)


S=np.array([4,5])
i=1
j=2

I=tfg.I(P, S, i, j)

print(I)
```

A.4. '2mon-extremos.py'

Programa desarrollado en [8].

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
from scipy.optimize import linprog
import sys

n = int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
#n=4
x= np.arange(1,n+1)
tol=10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b|<tol consideramos a=b



def powerset(L):   # construimos el conjunto potencia
  P = set()
  for n in range(len(L) + 1):
    for sset in itertools.combinations(L, n):
      P.add(sset)
  return P

# se ordenan los subconjuntos
p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))

probs=[]

for i in p:    # se pide por pantalla la medida de cada subconjunto
    probs.append(float(eval(input('Introduzca la medida del conjunto '
                                  + str(i)+': ' ))))


#---comprobacion normalizacion
if probs[0]!=0:
    sys.exit('La probabilidad inferior del suceso imposible debe ser 0')
if probs[-1]!=1:
    sys.exit('La probabilidad del suceso seguro debe ser 1')

probs.remove(probs[p.index(())])  #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

print('LAS PROBABILIDADES')
print(p)
print(type(p))

#---comprobacion coherencia
# para cada subconjunto A resolvemos el programa de PL
# min sum_{x \in A} P({x})
# s.a. sum_{x\in B} P({x}) >= \underline(P) para todo B
# si la solucion optima coincide con \underline(A) para todo A
# concluimos que \underline(P) es coherente
for i in range(len(p)):
    obj_C=np.zeros(n)
    lhs_ineq_C=np.zeros((len(p),n))
    rhs_ineq_C=np.array(probs)
    lhs_eq_C=[np.ones(n)]        #restricciones de igualdad
    rhs_eq_C=np.array([[1]])     # las probabilidades deben sumar 1
    # restricciones de >=
    for j in range(n):
        if set(p[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            obj_C[j]=1
        for k in range(len(p)):
            if set(p[j]).issubset(set(p[k]))==True:
                lhs_ineq_C[k,j]=1
    # solucion optima
    opt_C = linprog(c=obj_C, A_ub=-lhs_ineq_C, b_ub=-rhs_ineq_C,
                    A_eq=lhs_eq_C,b_eq=rhs_eq_C,method="revised simplex")
#     if abs(opt_C.fun-probs[i])>tol:
#         sys.exit('La probabilidad inferior introducida no es coherente')
#-----------------------

probs.append(0)
p.append(())
probs=np.array(probs)

def prob(x):   # funcion que relaciona cada subconjunto con su medida
    return probs[p.index(x)]



#---comprobacion 2-monotonia
#comprobamos la condicion de 2-monotonia empleando su definicion
contador=True
```

```
for i in range(len(p)):
    for j in range(i,len(p)):
        suma1=round(prob(p[i])+prob(p[j]),4)
        suma2=round(prob(tuple(set(p[i]).union(set(p[j]))))
        +prob(tuple(set(p[i]).intersection(set(p[j]))))),4)
        if suma2 < suma1:
            contador=False
# se pasa por pantalla para que subconjuntos falla la condicion
            print('La condicion de 2-monotonia  falla para los subconjuntos '
                +str(p[i])+' y '+str(p[j]))
if contador==True:
    print('La probabilidad inferior coherente introducida es 2-monotona')
else:
    print('La probabilidad inferior coherente introducida no es 2-monotona')


#--calculo de los puntos extremos del conjunto credal
#si \underline(P) es 2-monotona, calculamos los puntos extremos
#de M(\underline(P)) mediante el metodo de las permutaciones
per=itertools.permutations(list(range(1,n+1))) #permutaciones de {1,...,n}
per=list(per)        # permutaciones en forma de lista
T=len(list(per))     # numero maximo de puntos extremos
ext=[]     # para almacenar los puntos extremos

'n el cardinal del espacio'

for i in range(T):
    e=np.zeros(n)
    e[per[i][0]-1]=prob(tuple(sorted(per[i][:1])))
    for j in range(n-1):
        e[per[i][j+1]-1]=round(prob(tuple(sorted(per[i][:j+2])))
        -prob(tuple(sorted(per[i][:j+1]))),6)
    e=list(e)
    if e not in ext:
        ext.append(e.copy()) #eliminamos las repeticiones
if contador==True:
    print('Los puntos extremos del conjunto credal son:')
    print(ext)
```

A.5. 'ExtremosConS0.py'

Este programa es una modificación del algoritmo "2monot-extremos.py" desarrollado en [8] y que se muestra en el anexo A.4.

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools

######## PROGRAMA QUE CALCULA LOS PUNTOS EXTREMOS DESEADOS A PARTIR DEL
######## PROGRAMA DE ANDRES PRESA


#DEF PROBABILIDAD INFERIOR IGUAL QUE EN MI PROGRAMA PARA PODER USARLO IGUAL
def Pinf(P,A):
    '''
    P el array de probabilidades
    A el conjunto de jugadores de 1,...,N   Empiezan   en 1!
    A un array
    '''
    if len(A)==1:
        Pinf=np.min(P[:,A-1])
    else:
        Ps=np.sum(P[:,A-1],axis=1)
        Pinf=np.min(Ps)

    return Pinf

#DEF FUNCION PROBABILIDAD SUPERIOR
def Pmax(P,Sigma,A):
    '''
    P el array de probabilidades
    A array con los jugadores
    Devuelve: Probabilidad superior
    '''
    Ac=np.delete(Sigma,A-1)
```

```
    Pmax=1-Pinf(P,Ac)
    return Pmax


#DEF A PARTIR DEL PROGRAMA DE ANDRES DE UNA FUNCION QUE ME DEVUELVE LOS
#PUNTOS EXTREMOS QUE TIENEN LOS ELEMENTOS DE S0 DELANTE
def extremosselectos(P,x,S0):
    '''
    P: el array de probabilidades de siempre
    x: el conjunto de jugadores (Sigma)
    S0: la coalicion que sacamos de SPRO

    Te devuelve una tupla de dos arrays.
    el primero: array de 2 dimensiones con los puntos extremos CON REPETICIONES
    el segundo: array de 2 dimensiones con las permutaciones que me dan los
    puntos extremos (en el mismo orden)
    '''
    n=len(x)

    def powerset(L):   # construimos el conjunto potencia
        P = set()
        for n in range(len(L) + 1):
            for sset in itertools.combinations(L, n):
                P.add(sset)
        return P

    # se ordenan los subconjuntos
    p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))
    probs=[]

    for i in p[1:]:
        probs.append(float(Pmax(P,x,np.array(i))))

    probs = [round(num, 3) for num in probs] #redondeamos
    p.remove(p[p.index(())])
    probs.append(0)
    p.append(())
    probs=np.array(probs)

    def prob(x):   # funcion que relaciona cada subconjunto con su medida
        return probs[p.index(x)]

    contador=True
    #--calculo de los puntos extremos del conjunto credal
    #mediante el metodo de las permutaciones
    per=itertools.permutations(list(range(1,n+1))) #permutaciones de {1,...,n}
    per=list(per)        # permutaciones en forma de lista
    T=len(list(per))     # numero maximo de puntos extremos
    ext=[]     # para almacenar los puntos extremos
    punt=[]
    modS0=len(S0)
    S0=np.sort(S0)

    for i in range(T):
        primsigma = np.array(per[i][:modS0])
        ordprimsigma = np.sort(primsigma)

        if np.array_equal(S0,ordprimsigma):
            e=np.zeros(n)
            e[per[i][0]-1]=prob(tuple(sorted(per[i][:1])))

            for j in range(n-1):
                e[per[i][j+1]-1]=round(prob(tuple(sorted(per[i][:j+2])))
                                       -prob(tuple(sorted(per[i][:j+1]))),6)
                e=list(e)
            ext.append(e.copy()) #NO eliminamos las repeticiones
            arper=np.array(per[i])
            punt.append(arper.copy())

        else:
            continue

    if contador==True:
        return np.array(ext),np.array(punt)
```

A.6. 'Ejemplo_3-3.py'

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
```

```
import numpy as np
import ExtremosConS0 as extremos
import ModuloTFG as tfg

#INTRODUCIR LOS PUNTOS EXTREMOS PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD INFERIOR
P1=np.array([0.32,0.27,0.07,0.16,0.18])
P2=np.array([0.48,0.14,0.33,0.02,0.03])
P3=np.array([0.16,0.08,0.02,0.42,0.32])

P=np.array([P1,P2,P3])


#NUMERO Y ARRAY DE JUGADORES: \Omega={1,2,3,...,N}
N=len(P[0])
Sigma = np.arange(1,N+1,1)

#\mathcal(I) definida en la memoria y la S0 que la maximiza
IlatinaS0=tfg.SPRO(P, Sigma)[0]
S0=tfg.SPRO(P, Sigma)[1]

print('S0:')
print(S0)
print('\n')

#Coeficientes beta
betas=tfg.beta(P, Sigma, S0,N)

#Permutaciones con los elementos de S0 delante
permutacionesextremas=extremos.extremosselectos(P, Sigma, S0)[1]
#Sus correspondientes puntos extremos (con repeticiones)
puntosextremos=extremos.extremosselectos(P, Sigma, S0)[0]

#Solucion
sol=tfg.solucion(P, Sigma, puntosextremos, permutacionesextremas, betas,S0,N)

print('Solucion:')
print(np.round(sol,decimals=3))

print('\n')

print('Pinf({1,4})')
print(tfg.Pinf(P, np.array([1,4])))
print('P3({1,4})')
print(np.round(sol[0]+sol[3],decimals=3))
```

A.7. 'Solucion_3-4.py'

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import salvacion as extremos
import copiaModuloTFG as tfg

#INTRODUCIR LOS PUNTOS EXTREMOS PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD INFERIOR
P1=np.array([0.2,0.6,0.2])
P2=np.array([0.3, 0.3, 0.4])
P3=np.array([0.4,0.4,0.2])
P4=np.array([0.7,0,0.3])

P=np.array([P1,P2,P3,P4])


#NUMERO Y ARRAY DE JUGADORES: \Omega={1,2,3,...,N}
N=len(P[0])
Sigma = np.arange(1,N+1,1)

#\mathcal(I) definida en la memoria y la S0 que la maximiza
IlatinaS0=tfg.SPRO(P, Sigma)[0]
S0=tfg.SPRO(P, Sigma)[1]

print('S0')
print(S0)

#Coeficientes beta
betas=tfg.beta(P, Sigma, S0,N)
```

```
print('Beta')
print(betas)
print('\n')

#Permutaciones con los elementos de S0 delante
permutacionesextremas=extremos.extremosselectos(P, Sigma, S0)[1]
#Sus correspondientes puntos extremos (con repeticiones)
puntosextremos=extremos.extremosselectos(P, Sigma, S0)[0]

print('Permutaciones')
print(permutacionesextremas)
print('Sus extremos:')
print(puntosextremos)
print('\n')

#Solucion
sol=tfg.solucion(P, Sigma, puntosextremos, permutacionesextremas, betas,S0,N)
print('Solucion')
print(sol)
```

A.8. 'InnerApprox.py'

Programa desarrollado en [8].

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
import itertools
import math
from scipy.optimize import linprog
import sys
#from qpsolvers import solve_qp

n = 6 #int(input("Introduzca el cardinal de su espacio: "))
x= np.arange(1,n+1)
tol=10E-6 # tolerancia numerica. Si |a-b|< tol consideramos a=b

def powerset(L):   # construimos el conjunto potencia
  P = set()
  for n in range(len(L) + 1):
    for sset in itertools.combinations(L, n):
      P.add(sset)
  return P

p=sorted(list(powerset(x)),key=lambda x: (len(x),x))

probsaux1=[0,25000,15000,20000,14000,22000,24000,53800,61650,52830,62590,66530,
           44500,37550,45300,49100,45300,52800,56600,46200,50100,57400,
           81200,72380,82140,86080,80230,89990,93930,81170,85110,94870,64550,
           71300,75100,65450,69350,75900,73200,77100,83400,78000,99780,
           109540,113480,100720,104660,114420,108570,112510,122270,113450,92450,
           96350,101900,97250,105000,128120,132060,141820,133000,140850,124250,
           160400]

probsaux2=[0,0.15586034912718]

probsaux=np.array(probsaux1)
probs1=probsaux/probsaux[-1]
probs=probs1.tolist()

probs.remove(probs[p.index(())])  #eliminamos el conjunto vacio
p.remove(p[p.index(())])

#-----------------------------
#Resolvemos el problema de PL (LP-inner.2monot) con las restricciones
#(2monot1):(2monot4*) en terminos de la inversa de Mobius m
obj=np.zeros(len(p)) # definimos la funcion objetivo

#--- matriz de la restriccion (LP-2monot1)----------
rhs_eq=np.array([[1]])
lhs_eq=[np.ones(len(p))]
#-----------------------------
#--- matriz de la restriccion (LP-2monot2)----------
sset2=[]

for i in p:
    if len(i)==2:
        sset2.append(i)
```

```
r=2**(n-2)*math.factorial(n)/math.factorial(2)/math.factorial(n-2)
lhs_ineq3=np.zeros((int(r),len(p)))
contador=-1

for i in range(n,len(p)):
    for j in range(len(sset2)):
        if set(sset2[j]).issubset(set(p[i]))==True:
            contador+=1
            for k in range(len(p)):
                if set(sset2[j]).issubset(set(p[k]))==True and set(
                        p[k]).issubset(set(p[i]))==True:
                    lhs_ineq3[contador,k]=1

rhs_ineq3=np.zeros(int(r))
#-----------------------------
#--- matriz de la restriccion (LP-2monot3)----------
lhs_ineq2=np.zeros((n,len(p)))

for i in range(n):
    lhs_ineq2[i,i]=1

rhs_ineq2=np.zeros(n)
#-----------------------------
#--- matriz de la restriccion (LP-2monot4*)----------
lhs_ineq1=np.zeros((len(p),len(p)))

for i in range(len(p)):
    for j in range(len(p)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            obj[i]+=1 #calculamos los coefs. de la funcion objetivo
            lhs_ineq1[j,i]=1

rhs_ineq1=np.array(probs)
#-----------------------------
#juntamos todas las matrices de restricciones
lhs_ineq=np.vstack((lhs_ineq1,lhs_ineq2,lhs_ineq3))
rhs_ineq=np.concatenate((rhs_ineq1,rhs_ineq2,rhs_ineq3))

# solucion optima del problema de programacion lineal
opt = linprog(c=obj, A_ub=-lhs_ineq, b_ub=-rhs_ineq, A_eq=lhs_eq,
              b_eq=rhs_eq,method="revised simplex",bounds=(None,None))

m=[] #valores optimos redondeados a 14 decimales
for i in range(len(opt.x)):
    m.append(round(opt.x[i],14))

#calculamos \underline(P) a partir de las inversas de Mobius
#obtenidas resolviendo el problema de PL
Bel=np.zeros(len(m))

for i in range(len(m)):
    for j in range(len(m)):
        if set(p[i]).issubset(set(p[j]))==True:
            Bel[j]+=m[i]

for i in range(len(Bel)):
    Bel[i]=round(Bel[i],14)
    probs[i]=round(probs[i],14)

#calculamos la distancia d_{BV} entre la aproximacion y
#el modelo original. Si es 0 concluimos que la prob. inferior
#inicial ya es 2-monotona
dVB=str(round(sum(np.subtract(Bel,probs)),14))
if float(dVB)==0:
    sys.exit('La probabilidad inferior introducida ya es 2-monotona')
#pasamos por pantalla los resultados
print(' \n Aproximacion interior mediante programacion lineal:\n')

titulos=['A','P(A)','m','Q']
datos = [titulos] + list(zip(p,probs,m,Bel))

for i, d in enumerate(datos):
    line = '|'.join(str(x).ljust(len(str(p[-1]))) for x in d)
    print(line)
    if i == 0:
        print('-' * len(line))

print('\n La distancia de B-V es '+dVB)
print('\n')

print(Bel)
```

A.9. 'EjemploCapitulo4.py'

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
#import ExtremosS0 as extremos
import ExtremosConS0 as salv
import ModuloTFG as tfg
from ejemploandres import extremosAndres

#Extremos obtenidos del programa de Andres
P=extremosAndres

#NUMERO Y ARRAY DE JUGADORES: \Omega={1,2,3,...,N}
N=len(P[0])
Sigma = np.arange(1,N+1,1)


#\mathcal(I) definida en la memoria y la S0 que la maximiza
IlatinaS0=tfg.SPRO(P, Sigma)[0]
S0=tfg.SPRO(P, Sigma)[1]

#Coeficientes beta
betas=tfg.beta(P, Sigma, S0,N)

#Permutaciones con los elementos de S0 delante
permutacionesextremas=salv.extremosselectos(P, Sigma, S0)[1]
#Sus correspondientes puntos extremos (con repeticiones)
puntosextremos=salv.extremosselectos(P, Sigma, S0)[0]

#Solucion original
sol=tfg.solucion(P, Sigma, puntosextremos, permutacionesextremas, betas,S0,N)
print('Solucion original:')
print(np.round(sol,decimals=3))

print('\n')

print('Solucion de Shapley:')
solsinnorm=np.array([35173.33, 19598.33, 26815, 19403.33, 27941.67, 31468.33])
total=np.sum(solsinnorm)
solnorm=solsinnorm/160400
print(np.round(solnorm,decimals=3))

print('\n')

print('Solucion de Banzhaf:')
Banzhafsinnorm= np.array([36710.94, 20070.31, 27651.56, 20260.31,
                          28621.56, 32404.06])
Btotal= np.sum(Banzhafsinnorm)
Banzhaf=Banzhafsinnorm/Btotal
print(np.round(Banzhaf,decimals=3))
```

Bibliografía

[1] T. Augustin, F.P. Coolen, G. de Cooman, M.C.M. Troffaes (editores). Introduction to Imprecise Probabilities. Wiley, 2014, 28-55.

[2] B. de Finetti. Theory of Probability: A critical introductory treatment. Wiley, 1970.

[3] M. Grabisch. Set Functions, Games and Capacities in Decision Making. Springer, 2016.

[4] D.C. Landinez-Lamadrid. D.G. Ramirez-Ríos. D. Neira Rodado. K. Parra Negrete, J.P. Combita Niño. Shapley Value: its algorithms and application to supply chains. INGE CUC, vol. 13, no. 1, 2017.

[5] E. Miranda. A survey of the theory of coherent lower previsions. International Journal of Approximate Reasoning, 48:628–658, 2008.

[6] E. Miranda, S. Destercke. Extreme points of the credal sets generated by comparative probabilities. Journal of Mathematical Psychology, 64–65, 44–57, 2015.

[7] E. Miranda, I. Montes. Shapley and Banzhaf values as probability transformations. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 26(6), 914-974, 2018.

[8] A. Presa. *Análisis de aproximaciones interiores de modelos de probabilidades imprecisas.* Trabajo fin de grado de la Universidad de Oviedo, 2022.

[9] G. Shafer. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976.

[10] L.S. Shapley. A value for n-person games. Annals of Mathematical Studies 28, 307–317, 1953.

[11] P. Walley. Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. Chapman & Hall, 1991.