



Universidad de Oviedo

GRADO EN MATEMÁTICAS

# Inversión de la Transformada de Laplace mediante integración numérica

*Trabajo Fin de Grado*

Autor:

Claudio Proy Márquez

Tutor:

Jesús Suárez Pérez del Río

Oviedo  
8 de julio de 2021

# Agradecimientos

*Gracias a mi familia, especialmente a mis padres y mi hermano, por el apoyo incondicional que me han dado y por la paciencia que han tenido, incluso cuando yo no la tuve.*

*Gracias a mi tutor, por ser un guía excelente.*

*Y por último, gracias a todas las personas que han hecho posible que llegue hasta aquí.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Transformada de Laplace</b>	<b>6</b>
1.1. Introducción . . . . .	6
1.2. Transformadas de funciones elementales . . . . .	8
1.2.1. Propiedades de las transformadas . . . . .	9
1.3. Transformación inversa de Laplace . . . . .	13
1.3.1. Unicidad de la Transformada inversa de Laplace . . . . .	13
1.3.2. Algunos métodos de inversión . . . . .	16
1.4. Aplicaciones de la Transformada de Laplace . . . . .	24
1.4.1. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales . . . . .	24
1.4.2. Aplicaciones a las EDPs . . . . .	28
<b>2. Integración numérica</b>	<b>30</b>
2.1. Introducción y Conceptos Básicos . . . . .	30
2.1.1. Fórmulas de Newton-Cotes . . . . .	31
2.1.2. Fórmulas de cuadratura de Gauss . . . . .	34
<b>3. Métodos de integración numérica para el cálculo de la transformada inversa de Laplace</b>	<b>37</b>
3.1. Cuadraturas de Gauss . . . . .	37
3.2. Evaluación de Integrales Trigonométricas . . . . .	41
3.3. Métodos de Extrapolación . . . . .	43
3.3.1. La P-transformada de Levin . . . . .	43
3.3.2. La mW-Transformada de Sidi . . . . .	44
3.4. Métodos que involucran la Transformada de Fourier . . . . .	47
3.4.1. Método de Dubner y Abate . . . . .	47
3.4.2. Método de Durbin . . . . .	50

3.4.3. Método de De Hoog, Knight y Stokes . . . . .	53
<b>4. Implementación de los algoritmos</b>	<b>56</b>
4.1. Funciones Test . . . . .	56
4.2. Cuadratura de Gauss . . . . .	58
4.3. Evaluación de Integrales Trigonómicas . . . . .	61
4.4. Métodos de Extrapolación . . . . .	64
4.4.1. P-Transformada de Levin . . . . .	64
4.4.2. mW-Transformada de Sidi . . . . .	68
4.5. Métodos que involucran Transformadas de Fourier . . . . .	70
4.6. Resumen de los resultados obtenidos . . . . .	75
<b>Conclusiones</b>	<b>78</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Introducción

La transformada de Laplace es una herramienta de gran utilidad a la hora de simplificar diversos procesos matemáticos, especialmente los que tienen que ver con la resolución de ecuaciones diferenciales. El uso de la transformada permite una notable simplificación de esos procesos, permitiendo convertir una ecuación diferencial ordinaria en una ecuación algebraica o reducir el número de variables independientes en una ecuación en derivadas parciales.

Si se pretende aplicar con éxito esta técnica, una cuestión clave es obtener la transformada inversa de la solución del problema simplificado. Normalmente, para la búsqueda de la transformada inversa se suele recurrir en primer lugar a las conocidas tablas, que recogen las transformadas de una importante cantidad de funciones, esperando que la solución encontrada sea una combinación de las que allí aparecen. Sin embargo, existen muchos casos de interés en que esto no es posible, por lo que es preciso obtener métodos generales que permitan obtener la transformada inversa o, al menos, una aproximación de la misma.

Para abordar ese cálculo, se ha diseñado un gran número de métodos numéricos que permiten obtener los valores aproximados de la función buscada. Dichos métodos numéricos toman como base las fórmulas de inversión conocidas (integral de Bromwich, fórmula de Post-Widder, . . .) o bien se centran en la búsqueda de desarrollos que permitan aproximar la función transformada en términos de funciones con transformada inversa conocida.

En este trabajo nos centraremos en los métodos numéricos que aproximan la integral de Bromwich, poniendo de manifiesto los diversos enfoques con que se puede abordar esta cuestión. El análisis de los algoritmos más importantes para este cálculo se complementa con la implementación de programas

originales realizados por el autor utilizando MATLAB.

A continuación, indicamos cómo se ha organizado esta memoria. El Capítulo 1 se ha dedicado a la formalización de los conceptos básicos y al estudio de las propiedades fundamentales de la transformada de Laplace y de su inversa, con especial hincapié en la fórmula integral de inversión. Posteriormente, en el Capítulo 2, se ha efectuado una breve exposición de los métodos de integración numérica más habituales, de cara a su utilización en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3 se han desarrollado los métodos numéricos más importantes que utilizan reglas de cuadratura para aproximar la integral de Bromwich. Los métodos estudiados utilizan técnicas muy diversas como la cuadratura gaussiana, la evaluación de integrales trigonométricas, los procesos de extrapolación o las técnicas basadas en la transformada de Fourier. Un compendio de dichos métodos se puede ver en el texto de Alan Cohen [2], una de las escasas referencias bibliográficas que proporciona una perspectiva global sobre estas cuestiones y que nos ha servido de base para el desarrollo de este capítulo.

Por otra parte, el Capítulo 4 se dedica a la descripción de los códigos de MATLAB desarrollados por el autor para la programación de los métodos y a la exposición de los resultados más relevantes que se obtuvieron al contrastar su efectividad, para lo que se utilizó una amplia familia de funciones test cuya transformada inversa se conoce a través de las tablas. La memoria finaliza con un apartado de conclusiones y con la enumeración de las referencias bibliográficas utilizadas para el desarrollo del trabajo.

# Capítulo 1

## Transformada de Laplace

En este capítulo veremos ciertos resultados básicos sobre la transformada de Laplace, sobre sus propiedades fundamentales y sobre el cálculo de su inversa.

### 1.1. Introducción

Comenzaremos esta sección definiendo la transformada de Laplace.

**Definición 1.1.** Sea  $f(t)$  una función real definida en  $t \in [0, \infty)$ , entonces para  $s \in \mathbb{C}$  se define

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.1)$$

cuando esta integral sea convergente. La función  $\bar{f}(s)$  se conoce como transformada de Laplace de  $f(t)$ .

**Observación 1.1.** Si bien en la definición (1.1) nos referimos a funciones definidas en  $t \in [0, +\infty)$ , en ocasiones es conveniente trabajar con funciones definidas en todo  $\mathbb{R}$ , considerando que  $f(t) = 0$  cuando  $t < 0$ .

Observemos que la integral impropia definida en (1.1) solo será convergente cuando exista el límite

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt,$$

y en ese caso  $\bar{f}(s)$  será el valor de dicho límite. Por consiguiente el dominio de definición de la transformada de Laplace se corresponde con el conjunto de valores de  $s$  para los que se produce esa convergencia. Puesto que existen funciones para las que ese conjunto es vacío, veremos ahora cuáles han de ser las hipótesis para que la integral (1.1) esté bien definida en un cierto subconjunto de  $\mathbb{C}$ , o de forma equivalente, cuándo existe transformada de Laplace de una función dada. Para ello definiremos unos conceptos que nos servirán de gran ayuda.

**Definición 1.2.** Una función  $f(t)$  se dirá **continua a trozos** en un intervalo  $I \in \mathbb{R}$  cuando  $f(t)$  sea continua en  $I$  salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos de discontinuidad de salto, es decir, en todo punto de discontinuidad, los límites laterales existen y son finitos.

Además, si  $f(t)$  es una función continua a trozos en un intervalo cerrado  $I$ , entonces  $f(t)$  es integrable en  $I$ .

**Definición 1.3.** Una función  $f(t)$  se dice que es de **orden exponencial** si existen  $\gamma, M, t_0 \in \mathbb{R}$  ( $M > 0$ ), ( $t_0 \geq 0$ ) tales que

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.2)$$

En este caso se dirá que  $f(t)$  tiene orden exponencial  $\gamma$ .

De esta definición podemos deducir que toda función acotada es de orden exponencial, sin más que tomar  $\gamma = 0$ ,  $M$  una cota del valor absoluto de la función y  $t_0 = 0$ .

Obviamente, muchas funciones no acotadas tienen también esta propiedad. Por ejemplo  $f(t) = t$  es de orden exponencial ya que basta tomar  $\gamma = 1$  y  $M = 1$  para obtener  $|f(t)| \leq 1 \cdot e^t \forall t \geq 0$ .

Por otro lado, la función  $f(t) = e^{t^2}$  es un ejemplo de función que no es de orden exponencial, ya que independientemente de los valores de  $\gamma$  y  $M$  vamos a obtener que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^2}}{M e^{\gamma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(t-\gamma)} = \infty$$

es decir, a partir de cierto valor de  $t$ , no se va a cumplir que  $|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$ .



**Teorema 1.1.** Si  $f(t)$  es una función continua a trozos en  $t \in [0, +\infty)$  y tiene orden exponencial  $\gamma$ , entonces la transformada de Laplace  $\bar{f}(s)$  está bien definida siempre que  $\Re(s) > \gamma$ , siendo  $\Re(s)$  la parte real de  $s$ .

*Demostración.* Para probar que la integral existe vamos a demostrar su convergencia absoluta. Para ello observemos que, utilizando (1.2)

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^\infty e^{-\Re(st)} |f(t)| dt \leq \int_0^\infty e^{-\Re(st)} M e^{\gamma t} dt = M \int_0^\infty e^{-(\Re(s)-\gamma)t} dt = M - \frac{e^{-(\Re(s)-\gamma)t}}{\Re(s)-\gamma} \Big|_0^{t \rightarrow \infty} = \frac{M}{\Re(s)-\gamma}.$$

Por tanto se deduce que la integral anterior existe cuando  $\Re(s) > \gamma$ . ■

De aquí en adelante vamos a suponer, a menos que se diga lo contrario, que se satisfacen las hipótesis del teorema anterior y por tanto la transformada de Laplace va a estar bien definida en el subconjunto del plano complejo dado por el teorema.

La constante  $\gamma$  tendrá una gran importancia en capítulos posteriores, y es una cota superior de la parte real de las singularidades de  $\bar{f}(s)$ . Una de las consecuencias más importantes de este hecho, y que usaremos más adelante, es que se puede demostrar que la función  $\bar{f}(s)$  es analítica en el semiplano  $\Re(s) > \gamma$ .

## 1.2. Transformadas de funciones elementales

A continuación se muestran algunas transformadas de funciones elementales.

- $\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} = 1/s, \quad \Re(s) > 0.$
- $\mathcal{L}\{t\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \left( \frac{-te^{-st}}{s} \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left( \frac{e^{-st}}{s} \right) dt = 1/s^2, \quad \Re(s) > 0.$

- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = (n!/s^{n+1}), \quad \Re(s) > 0.$

Si llamamos

$$I_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt,$$

entonces integrando por partes se obtiene que

$$I_n(s) = (n/s)I_{n-1}(s)$$

y repitiendo el proceso  $n$  veces obtenemos el resultado buscado.

- $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = 1/(s-\alpha), \quad \Re(s) > \alpha.$

- $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \omega/(s^2 + \omega^2), \quad \Re(s) > 0.$

- $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = s/(s^2 + \omega^2), \quad \Re(s) > 0.$

Estas dos últimas transformadas se pueden obtener integrando por partes.

### 1.2.1. Propiedades de las transformadas

A continuación vamos a estudiar las propiedades más importantes de la transformada de Laplace.

- **Linealidad:**

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha \bar{f}(s) + \beta \bar{g}(s)$$

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la linealidad de las integrales.

- **Teorema de Traslación:**

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}(s) = \bar{f}(s + \alpha)$$

Si  $f(t)$  es una función con transformada conocida, entonces se sigue de la definición que

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\alpha t} f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} f(t) dt,$$

y de acuerdo con la definición de la transformada, este último término se corresponde con el valor de  $\bar{f}(s + \alpha)$ .

■ **Derivada de una Transformada:**

Si  $\bar{f}(s)$  es  $n$  veces derivable, tenemos que

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (s) \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

La prueba se realiza observando que

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial s^n} (f(t) e^{-st}) dt = (-1)^n \int_0^{\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-st} dt \\ &= (-1)^{2n} \int_0^{\infty} t^n f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s). \end{aligned}$$

Observemos que, en el caso particular en que  $n = 1$ , obtenemos que

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} (\bar{f}(s)).$$

■ **Integral de una Transformada:**

$$\mathcal{L}\{f(t)/t\}(s) = \int_s^{\infty} \bar{f}(\omega) d\omega.$$

La demostración se lleva a cabo a través de los siguientes pasos.

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(\omega) d\omega &= \int_s^{\infty} \bar{f}(\omega) d\omega = \int_s^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\omega t} f(t) dt \right) d\omega \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \left[ \int_s^{\infty} e^{-\omega t} d\omega \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}(s). \end{aligned}$$

Gracias a esta propiedad podemos calcular valores de algunas integrales impropias como  $\int_0^\infty \sin t/t$ . Para ello observemos que tomando  $f(t) = \sin t$  y aplicando el resultado anterior, obtenemos que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty \frac{dv}{v^2 + 1} = \tan^{-1} v \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

y tomando  $s = 0$  se tiene

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (1.3)$$

■ **Transformada de la derivada:**

Si  $f(t)$  es una función continua y derivable, se tiene que

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\bar{f}(s) - f(0).$$

O, de forma más general, si  $f(t)$  es continua y  $n$  veces derivable, resulta que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \bar{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (1.4)$$

La demostración se llevará a cabo para el caso con  $n = 1$ . El caso general se demuestra mediante el principio de inducción.

Utilizando integración por partes podemos probar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty s e^{-st} f(t) dt = s\bar{f}(s) - f(0). \end{aligned}$$

■ **Transformada de la Integral:**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{s}.$$

Para demostrar esta propiedad, basta observar que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u) du\right) e^{-st} dt =$$

e invirtiendo el orden de integración se sigue que

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \int_u^\infty f(u)e^{-st} dt du = \int_0^\infty \frac{f(u)e^{-st}}{-s} \Big|_u^\infty du \\ &= \int_0^\infty \frac{f(u)e^{-su}}{s} du = \frac{1}{s} \int_0^\infty f(u)e^{-su} du = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s} = \bar{f}(s)/s. \end{aligned}$$

■ **Cambio de escala:**

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

Para la demostración de este hecho definimos  $g(t) = f(at)$  y tomamos el cambio de variable  $t' = at$ . Entonces obtenemos que

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = \int_0^\infty e^{-\frac{st'}{a}} f(t') \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

■ **Convolución:**

**Teorema 1.2.** Si  $\bar{f}_1(s)$  es la transformada de  $f_1(t)$  y  $\bar{f}_2(s)$  es la transformada de  $f_2(t)$  entonces

$$\bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du\right\}. \quad (1.5)$$

**Demostración.** Vamos a suponer que las integrales que definen  $\bar{f}_1(s)$  y  $\bar{f}_2(s)$  convergen absolutamente en  $s > \gamma$ . Entonces tenemos que

$$\bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s) = \int_0^\infty e^{-su} f_1(u) du \int_0^\infty e^{-sv} f_2(v) dv = \int \int e^{-s(u+v)} f_1(u) f_2(v) du dv,$$

donde la integral doble se lleva a cabo en el primer cuadrante de  $\mathbb{C}$ , correspondiente a  $u > 0$ ,  $v > 0$ . La sustitución  $u = u$  y  $u + v = t$  transforma la integral doble en

$$\int \int e^{-s(t)} f_1(u) f_2(t-u) du dt.$$

Esta nueva integral doble se lleva a cabo entre el eje  $u$  y la recta  $t = u$  en el plano  $tu$ . La integral doble es equivalente a la integral iterada

$$\int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du \right\} dt,$$

y por tanto se obtiene (1.5). ■

## 1.3. Transformación inversa de Laplace

Si  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \bar{f}(s)$ , entonces escribimos  $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}(t)$  para denotar a aquella función  $f(t)$  cuya transformada es  $\bar{f}(s)$ . A la función  $f(t)$  se le llama transformada inversa de Laplace de  $\bar{f}(s)$ .

### 1.3.1. Unicidad de la Transformada inversa de Laplace

A continuación vamos a analizar condiciones para la unicidad de la transformada inversa de Laplace.

Es fácil ver que si una función  $f_1(t)$  es igual a  $f(t)$  salvo en un número finito de puntos, entonces

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s),$$

es decir, la transformada inversa no es, en general, única, si no se exige alguna condición de regularidad sobre  $f(t)$ .

El teorema de Lerch, garantiza la unicidad cuando  $f(t)$  es continua, y para su demostración vamos a necesitar el siguiente resultado previo.

**Lema 1.1.** Sea  $\phi(x)$  una función continua en  $[0,1]$  que verifica

$$\int_0^1 x^{n-1} \phi(x) dx = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Entonces se tiene que

$$\phi(x) \equiv 0, \quad \text{en } 0 \leq x \leq 1. \quad (1.7)$$

**Demostración.** Si  $\phi(x)$  no es idénticamente nula en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , entonces ha de existir cierto intervalo  $[a,b]$ , con  $0 < a < b < 1$ , en el cual  $\phi(x)$  es siempre positiva (o siempre negativa). Sin pérdida de generalidad podemos suponer el caso en el que  $\phi(x)$  es positiva.

Si consideramos la función  $u(x) = (b-x)(x-a)$ , vemos que si

$$c = \text{máx}[ab, (1-a)(1-b)],$$

entonces

$$1 + \frac{1}{c}u(x) > 1 \quad \text{cuando } a < x < b$$

y

$$0 < 1 + \frac{1}{c}u(x) < 1 \quad \text{cuando } 0 < x < a \text{ y } b < x < 1.$$

En estas condiciones la función

$$p(x) = \{1 + (1/c)u(x)\}^r,$$

puede hacerse tan grande como se quiera en  $a < x < b$  y tan pequeña como se quiera en  $0 < x < a$ ,  $b < x < 1$ , con una elección apropiada de  $r$ . Pero obviamente  $p(x)$  es un polinomio en  $x$  y teniendo en cuenta que, por hipótesis,

$$\int_0^1 x^{n-1}\phi(x)dx = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots,$$

se llegaría a que

$$\int_0^1 p(x)\phi(x)dx = 0, \tag{1.8}$$

para cada número natural  $r$ . Pero, sin embargo, los razonamientos anteriores sobre  $p(x)$  nos garantizan que, tomando  $r$  suficientemente grande, se tiene que

$$\int_0^1 p(x)\phi(x)dx > 0, \tag{1.9}$$

lo que nos lleva a una contradicción. La segunda alternativa ( $\phi(x) < 0$  en  $[a,b]$ ) nos conduce al mismo resultado mediante un argumento similar. Por consiguiente,  $\phi(x)$  no puede ser ni positiva ni negativa en ningún intervalo  $[a,b]$ , y, por tanto,  $\phi(x) \equiv 0$  en  $[0,1]$ . ■

El siguiente teorema de unicidad fue demostrado originalmente por Lerch, aunque la demostración que aquí aparece es la de Carslaw y Jaeger [1].

**Teorema 1.3. (Teorema de Lerch)**

Sea  $f(t)$  una función continua en  $[0, +\infty)$  que satisface que

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, \quad \mathcal{R}(s) \geq c, \tag{1.10}$$

entonces no existe ninguna otra función continua que verifique (1.10).

***Demostración.***

Supongamos que tenemos dos funciones continuas  $f(t)$ ,  $g(t)$  que satisfacen la ecuación anterior. Definiendo  $h(t) = f(t) - g(t)$ , que es continua por serlo  $f$  y  $g$ , se tiene que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt = 0, \quad \mathcal{R}(s) \geq c. \quad (1.11)$$

Con el cambio de variable definido por  $s = c + n$  donde  $n \in \mathbb{N}$ , y realizando una integración por partes, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(c+n)t} h(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-nt} (e^{-ct} h(t)) dt \\ &= \left[ e^{-nt} \int_0^t e^{-cu} h(u) du \right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-nt} \left[ \int_0^t e^{-cu} h(u) du \right] dt \\ &= n \int_0^{\infty} e^{-nt} \left[ \int_0^t e^{-cu} h(u) du \right] dt, \end{aligned}$$

y por lo tanto deducimos de la ecuación (1.11) que

$$\int_0^{\infty} e^{-nt} \phi(t) dt = 0,$$

donde

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-ct} h(t) dt. \quad (1.12)$$

Si en la ecuación (1.12) tomamos  $x = e^{-t}$ ,  $\psi(x) = \phi[\ln(1/x)]$ , se puede ver que  $\psi(x)$  es una función continua en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , puesto que

$$\psi(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \bar{h}(c).$$

Es decir, de acuerdo con (1.3), se tiene que

$$\int_0^1 x^{n-1} \psi(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como consecuencia, estamos en las condiciones del Lema anterior y deducimos que  $\psi(x) \equiv 0$  en el intervalo  $[0,1]$  y, por lo tanto,

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-ct} h(t) dt = 0 \quad \text{para } t \geq 0. \quad (1.13)$$



Teniendo en cuenta que  $e^{-ct}h(t)$  es una función continua cuando  $t \geq 0$ , deducimos de (1.13) que  $e^{-ct}h(t) = 0$  cuando  $t \geq 0$ . Por lo tanto,  $h(t) = 0$ , y tenemos como consecuencia que  $f(t) = g(t)$  cuando  $t \geq 0$ , lo que concluye la prueba. ■

En lo que sigue vamos a asumir, salvo que se diga lo contrario, que se cumplen las hipótesis de este teorema, y por tanto la inversa de la transformada de Laplace va a ser única.

### 1.3.2. Algunos métodos de inversión

A continuación vamos a ver ciertos métodos útiles para el cálculo directo de transformadas inversas de Laplace. El más importante, el teorema de Bromwich, será la herramienta fundamental para los capítulos siguientes de este trabajo.

#### *Método de Expansión*

Puesto que ya conocemos la transformación inversa de ciertas funciones elementales, una primera idea intuitiva de cómo resolver el problema de la inversión puede ser el que se describe a continuación.

Si  $\bar{f}(s)$  es una función racional, y es posible expresarla como combinación lineal de cociente de funciones con inversas conocidas, entonces el cálculo de  $f(t)$  es directo y exacto. Es decir, si

$$\bar{f}(s) = P(s)/Q(s), \quad gr(P) < gr(Q),$$

y  $Q(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n)$ , donde los  $\alpha_k$  son distintos, entonces podemos escribir  $\bar{f}(s)$  como

$$\bar{f}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{(s - \alpha_k)Q'(\alpha_k)},$$

y por lo tanto

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}.$$

Si alguna de las raíces  $\alpha_k$  tiene multiplicidad  $m$ , entonces  $\bar{f}(s)$  contiene términos de la forma

$$\frac{A_1}{(s - \alpha_k)} + \frac{A_2}{(s - \alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s - \alpha_k)^m},$$

donde

$$A_{m-r} = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left[ \frac{1}{r!} \frac{d^r}{ds^r} ((s - \alpha_k)^m \bar{f}(s)) \right] \quad (1.14)$$

Una de las ventajas de este procedimiento es que podemos calcular de manera **exacta** la transformada inversa de cualquier función racional. Sin embargo, la gran mayoría de funciones no presentan esta forma y, por este motivo, es necesaria la búsqueda de métodos más generales.

### ***Fórmula de Inversión de Post-Widder***

Uno de los métodos más conocidos para la transformada inversa de Laplace, es el desarrollado por Post [11] y Widder [15] en el siguiente teorema.

#### **Teorema 1.4. (Teorema de Post-Widder)**

Si la integral

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u) du, \quad (1.15)$$

converge para todo  $s > \gamma$ , entonces

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \bar{f}^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right), \quad (1.16)$$

para todo punto  $t > 0$  de continuidad de  $f(t)$ .

La ventaja de esta fórmula con respecto a la de Bromwich, que veremos posteriormente, es que  $f(t)$  se expresa únicamente en función de las evaluaciones de  $\bar{f}(s)$  y sus derivadas en la recta real. Sin embargo, una gran desventaja es que la convergencia de este resultado a  $f(t)$  es muy lenta. Una demostración de este teorema puede encontrarse en [2].

### ***La integral de Bromwich***

A continuación presentamos otro método directo para el cálculo de la transformada inversa de Laplace, que utiliza la integración compleja. Como

ya hemos dicho, será nuestra principal herramienta de trabajo en capítulos posteriores.

**Teorema 1.5. (Teorema de Inversión de Bromwich)**

Sea  $f(t)$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  y con orden exponencial  $\gamma$ . En estas condiciones, si definimos

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \Re(s) > \gamma \quad (1.17)$$

entonces tenemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} \bar{f}(s) ds, \quad \text{donde } c > \gamma$$

o, de forma análoga

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds. \quad (1.18)$$

**Demostración.** Observemos que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} \bar{f}(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} ds \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du. \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} f(u) du \int_{c-iT}^{c+iT} e^{s(t-u)} ds. \end{aligned}$$

A continuación, efectuaremos un cambio en el orden de integración que es posible debido a la convergencia uniforme de la transformada de Laplace en  $s$ . Por lo tanto, se llega a que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(u) du}{t-u} (e^{(\gamma+iT)(t-u)} - e^{(\gamma-iT)(t-u)}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\gamma(t-u)} f(u) \frac{\sin T(t-u)}{t-u} du, \end{aligned}$$

A continuación, utilizando el cambio de variable  $u = t + \theta$ , y denotando  $\mathfrak{F}(\theta) = e^{-\gamma\theta} f(t + \theta)$ , la expresión anterior se reescribe como

$$\frac{1}{\pi} \int_{-t}^{\infty} \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta. \quad (1.19)$$

Ahora, si dividimos esta integral en dos partes  $\int_0^\infty$  y  $\int_{-t}^0$ , y desarrollamos cada una de estas partes, llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta &= \mathfrak{F}(0) \int_0^\delta \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta + \int_0^\delta \frac{\mathfrak{F}(\theta) - \mathfrak{F}(0)}{\theta} \sin T\theta d\theta \\ &+ \int_\delta^X \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta + \int_X^\infty \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.20)$$

En estas condiciones, es posible escoger  $\delta$  suficientemente pequeño y  $X$  suficientemente grande de manera que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta \frac{\mathfrak{F}(\theta) - \mathfrak{F}(0)}{\theta} \sin T\theta d\theta \right| &< \epsilon, \\ \left| \int_X^\infty \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta \right| &< \epsilon, \end{aligned}$$

sea cierto para todo  $T$ . A continuación consideramos la integral

$$\int_\delta^X \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta.$$

Integrando por partes se tiene que

$$\int_\delta^X \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta = \left[ -\frac{\cos T\theta}{T\theta} \mathfrak{F}(\theta) \right]_\delta^X + \frac{1}{T} \int_\delta^X \cos T\theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\mathfrak{F}(\theta)}{\theta} \right) d\theta = O(1/T),$$

donde hemos utilizado que  $T$  es un parámetro que tiende a infinito.

En cuanto a la primera de las integrales del segundo miembro de (1.20), aplicando el cambio de variable  $\phi = T\theta$ , obtenemos que

$$\int_0^\delta \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta = \int_0^{T\delta} \frac{\sin \phi}{\phi} d\phi = \frac{\pi}{2} + O(1/T),$$

donde hemos usado que

$$\int_0^\infty \frac{\sin \phi}{\phi} d\phi = \frac{\pi}{2},$$

como se demostró en (1.3).

Así pues, combinando estos resultados, obtenemos la primera parte de la integral

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta = \frac{1}{2}\pi \mathfrak{F}(0) = \frac{1}{2}\pi f(t).$$

Análogamente, podemos expresar la segunda parte de la integral como

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta &= \int_{-t}^{-\delta} \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta + \mathfrak{F}(0) \int_{-\delta}^0 \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta \\ &\quad + \int_{-\delta}^0 \frac{\mathfrak{F}(\theta) - \mathfrak{F}(0)}{\theta} \sin T\theta d\theta. \end{aligned}$$

Usando los mismos argumentos que antes llegamos a la conclusión de que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-t}^0 \mathfrak{F}(\theta) \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta = \frac{1}{2}\pi f(t),$$

y la fórmula de Bromwich se obtiene sin más que sumar ambas expresiones y dividir por  $\pi$ . ■

Es importante mencionar que el teorema de Bromwich asume que  $f(t)$  es una función continua y diferenciable, pero se puede demostrar que el teorema aún es cierto cuando  $f(t)$  es discontinua en un número finito de puntos. Sea  $t_0$  uno de esos puntos de discontinuidad de  $f(t)$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds = \frac{1}{2} [f(t_0-) + f(t_0+)] \quad (1.21)$$

El teorema de Bromwich se puede extender al caso **bidimensional** y una demostración de este se puede encontrar en los artículos de Ditkin y Prudnikov [5].

Veamos a continuación unas expresiones alternativas para (1.18) cuando  $f(t)$  es una función real. Usando el cambio de variable  $s = c + i\omega$ , y separando el integrando en sus partes real e imaginaria, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{ct}}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} [\Re(\bar{f}(c + i\omega)) \cos \omega t - \Im(\bar{f}(c + i\omega)) \sin \omega t] d\omega \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} [\Im(\bar{f}(c + i\omega)) \cos \omega t + \Re(\bar{f}(c + i\omega)) \sin \omega t] d\omega \right]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Pero como estamos asumiendo que  $f(t)$  es una función real, la segunda parte de la expresión anterior es nula. Si estudiamos ahora la paridad de las expresiones  $\Re(\bar{f}(c + i\omega))$  y  $\Im(\bar{f}(c + i\omega))$ , podemos deducir sin dificultad de la definición que

$$\Re(\bar{f}(c + i\omega)) = \int_0^\infty e^{-ct} \cos \omega t f(t) dt \quad \text{es una función par,}$$

y que

$$\Im(\bar{f}(c + i\omega)) = \int_0^\infty e^{-ct} \sin \omega t f(t) dt \quad \text{es una función impar.}$$

Por lo tanto, la primera parte del integrando en la expresión (1.22) es una función par, y obtenemos que

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{\pi} \int_0^\infty [\Re\{\bar{f}(c + i\omega)\} \cos t\omega - \Im\{\bar{f}(c + i\omega)\} \sin t\omega] d\omega, \quad (1.23)$$

Además, puesto que estamos asumiendo que  $f(t) = 0 \forall t < 0$ , se deduce que si sustituimos  $t$  por  $-t$  en la expresión anterior llegamos a que

$$0 = \frac{e^{ct}}{\pi} \int_0^\infty [\Re\{\bar{f}(c + i\omega)\} \cos t\omega + \Im\{\bar{f}(c + i\omega)\} \sin t\omega] d\omega.$$

A partir de esta igualdad, podemos obtener dos formas equivalentes de (1.23) que nos resultarán de gran utilidad en capítulos posteriores y que son las siguientes:

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{\pi} \int_0^\infty \Re\{\bar{f}(c + i\omega)\} \cos t\omega d\omega, \quad (1.24)$$

$$f(t) = \frac{-2e^{ct}}{\pi} \int_0^\infty \Im\{\bar{f}(c + i\omega)\} \sin t\omega d\omega. \quad (1.25)$$

### ***Cálculo de la integral de Bromwich mediante el cálculo de residuos***

En la práctica, el teorema de Bromwich se reduce al cálculo de residuos, ya que involucra integrales sobre recintos en el plano complejo. Supongamos que una función  $g(s)$  es suficientemente regular en el interior de una región delimitada por una curva cerrada  $\mathcal{C}$  del plano complejo excepto en un número finito de polos situados en los puntos  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Entonces el teorema de Cauchy nos dice que

$$\int_{\mathcal{C}} g(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n R_k, \quad (1.26)$$

donde  $R_k$  es el valor del residuo de  $g$  en  $s = s_k$ , dado por

$$R_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \{(s - s_k)^m g(s)\} \right]_{s=s_k}, \quad (1.27)$$

siendo  $m \geq 1$  la multiplicidad de  $s_k$ .

A continuación vamos a ver un resultado de gran utilidad para la aplicación directa de la integral de Bromwich.

Nuestro objetivo es poder encontrar un contorno cerrado  $\mathcal{C}$  que contenga todos los polos de  $\bar{f}(s)$  de manera que

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds = \int_{\Gamma} e^{st} \bar{f}(s) ds,$$

y como  $\Gamma$  es un contorno cerrado, el problema se reduce al cálculo de residuos. Vamos a ver que un contorno de este tipo se puede construir a través de un arco circular  $\Gamma$  de radio  $R$  cortado por la línea  $\Re(s) = c$ , con  $c > \gamma$ . (Ver Figura 1.1)

**Lema 1.2.** Si  $f(t)$  está en las hipótesis del teorema de Bromwich, y  $|\bar{f}(s)| < KR^{-\nu}$  cuando  $s = Re^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ,  $R > R_0$ , donde  $R_0, K, \nu$  son constantes, entonces para  $t > 0$ , se verifica que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} e^{st} \bar{f}(s) ds = 0$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} e^{st} \bar{f}(s) ds = 0,$$

siendo  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  los arcos BCD y DEA de  $\Gamma$  respectivamente (ver Figura 1.1).

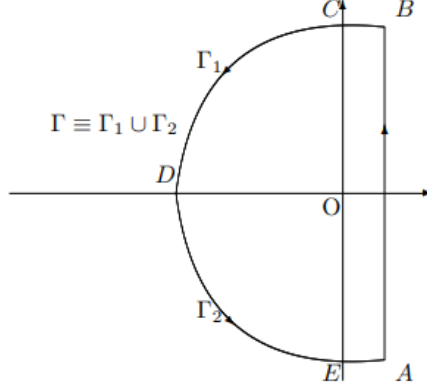


Figura 1.1: Contorno estándar de Bromwich.

**Demostración.** Consideremos en primer lugar la integral a lo largo de  $\Gamma_1$ ,

$$I_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} e^{st} \bar{f}(s) ds.$$

Este arco está formado por las secciones BC y CD. A lo largo de BC,  $\theta$  varía entre  $\alpha = \cos^{-1}(c/R)$  y  $\pi/2$ . Entonces se tiene que

$$|I_{BC}| < e^{ct} \frac{K}{R^\nu} \int_{\alpha}^{\pi/2} d\theta = \frac{K e^{ct}}{R^\nu} R \sin^{-1}(c/R).$$

Puesto que es conocido que cuando  $R \rightarrow \infty$ , se tiene que  $R \sin^{-1}(c/R) \rightarrow c$ , se deduce que  $|I_{BC}| \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, para el arco CD, tenemos que

$$\begin{aligned} |I_{CD}| &< \frac{K}{R^\nu} R \int_{\pi/2}^{\pi} e^{Rt \cos \theta} d\theta, \\ &= \frac{K}{R^\nu} R \int_0^{\pi/2} e^{-Rt \sin \phi} d\phi \\ &< \frac{K}{R^\nu} R \int_0^{\pi/2} e^{-Rt\phi/\pi} d\phi < \frac{\pi K}{2tR^\nu}, \end{aligned}$$



donde se ha utilizado que  $\sin \phi \geq 2/\pi$ ,  $0 < \phi \leq \pi/2$ .

Por consiguiente hemos visto que si  $t > 0$ ,  $|I_{CD}| \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$ . El mismo razonamiento se puede utilizar para razonar que las integrales sobre los arcos DE y EA se pueden hacer tan pequeñas como se quiera y por tanto el resultado queda probado. ■

Es decir, cuando se verifican las hipótesis del Lema anterior, la transformada inversa de Laplace se calcula a través de

$$\int_{\Gamma} e^{st} \bar{f}(s) ds,$$

es decir, si las singularidades de  $\bar{f}(s)$  son todas polos, el problema se reduce al cálculo de los residuos en dichos polos a través de la fórmula (1.27).

## 1.4. Aplicaciones de la Transformada de Laplace

En esta sección veremos cómo se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales. También resulta de gran utilidad para resolver otro tipo de problemas, como ecuaciones diferenciales con retardo, o ecuaciones en diferencias.

### 1.4.1. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales

La transformada de Laplace resulta ser un gran método para la resolución de ecuaciones diferenciales, puesto que como ya hemos visto, si conocemos el valor de  $f(t)$  y sus derivadas en  $t = 0$ , la transformada de  $f^{(n)}$  se expresa en función de  $\bar{f}(s)$ . Es decir, podemos reducir mucho la complejidad de los problemas.

Este hecho tiene una gran importancia y proporciona un método para la resolución de ecuaciones diferenciales. Vamos a ilustrar el método con algunos ejemplos, sin ánimo de ser exhaustivos.

**Ejemplo 1.1.** Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b, \quad (1.28)$$

donde  $\omega > 0$ ,  $a$  y  $b$  son constantes y  $f(t)$  es una función suficientemente regular.

De acuerdo con las propiedades estudiadas sobre la transformada de  $y''(t)$ , la transformada de la ecuación diferencial es

$$s^2 \bar{y} - sa - b + \omega^2 \bar{y} = \bar{f}.$$

Despejando  $\bar{y}$  tenemos

$$\bar{y} = a \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \left(\frac{b}{\omega}\right) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \left(\frac{1}{\omega}\right) \bar{f} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Podemos observar que el primer término de la derecha es claramente la transformada de la función  $a \cos \omega t$  y el segundo la transformada de  $(b/\omega) \sin \omega t$ . El tercer término, aplicando el teorema de convolución, es en realidad la transformada de

$$\frac{1}{\omega} \int_0^t f(u) \sin \omega(t - u) du,$$

y por tanto la solución a la ecuación diferencial viene dada por

$$y(t) = a \cos \omega t + (b/\omega) \sin \omega t + (1/\omega) \int_0^t f(u) \sin(t - u) du. \quad (1.29)$$

**Ejemplo 1.2.** Vamos a resolver una ecuación diferencial de segundo orden homogénea. Es decir,

$$my'' + cy' + ky = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b, \quad (1.30)$$

donde  $m$ ,  $c$  y  $k$  son constantes positivas. Procediendo de la misma manera que en el caso anterior, la transformada de la ecuación diferencial es

$$m(s^2 \bar{y} - sa - b) + c(s\bar{y} - a) + k\bar{y} = 0,$$

es decir,

$$ms^2 \bar{y} - msa - mb + cs\bar{y} - ca + k\bar{y} = 0.$$

agrupando términos y despejando  $\bar{y}$  en la ecuación algebraica anterior, se llega a que

$$\bar{y} = \frac{a(ms + c) + bm}{ms^2 + cs + k}.$$

Ahora debemos calcular la transformada inversa de  $\bar{y}$ . Si tratamos de resolver el problema mediante la integral de Bromwich solo tenemos que calcular el valor de los residuos en los polos. Podemos observar que la función  $\bar{y}$  tiene dos polos simples o uno doble en los puntos donde se anule el denominador  $ms^2 + cs + k$ .

Las raíces del denominador serán

$$s_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m},$$

$$s_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Entonces, llegados a este punto, podemos distinguir tres casos:

- Caso críticamente amortiguado.  $c^2 - 4km = 0$ .
- Caso sobreamortiguado.  $c^2 - 4km > 0$ .
- Caso subamortiguado.  $c^2 - 4km < 0$

### Caso críticamente amortiguado:

En este caso, puesto que el discriminante  $c^2 - 4km$  es nulo, solo vamos a tener una raíz doble, y su valor es

$$s_1 = s_2 = \frac{-c}{2m}.$$

Así pues, tenemos que calcular la transformada inversa de la función

$$\bar{f}(s) = \frac{a(ms + c) + bm}{ms^2 + cs + k} = \frac{a(ms + c) + bm}{(s + \frac{c}{2m})^2}.$$

Para ello basta con calcular el residuo de  $\bar{f}$  en el polo doble. De este modo se llega, utilizando (1.26), a que

$$y(t) = e^{-\frac{ct}{2m}} \left[ t \left( \frac{ac}{2} + bm \right) + am \right].$$

### Caso sobreamortiguado:

En este caso tendremos dos raíces distintas y reales, puesto que  $c^2 - 4km > 0$ , y, por tanto, debemos calcular dos residuos en los polos simples  $s_1$  y  $s_2$ . Para simplificar la expresión final, vamos a denotar  $\Delta = \sqrt{c^2 - 4km}$ , por lo que

$$s_1 = \frac{-c + \Delta}{2m},$$
$$s_2 = \frac{-c - \Delta}{2m}.$$

De este modo, tenemos que calcular la transformada inversa de la función

$$\bar{f}(s) = \frac{a(ms + c) + bm}{ms^2 + cs + k} = \frac{a(ms + c) + bm}{(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Los residuos vienen dados por las expresiones

$$R_1 = \frac{e^{s_1 t} \cdot m \left[ \frac{a(c + \Delta)}{2} + bm \right]}{\Delta},$$
$$R_2 = (-1) \frac{e^{s_2 t} \cdot m \left[ \frac{a(c - \Delta)}{2} + bm \right]}{\Delta},$$

y, por tanto, la expresión de  $y(t)$  es

$$y(t) = \frac{e^{s_1 t} \cdot m \left[ \frac{a(c + \Delta)}{2} + bm \right]}{\Delta} - \frac{e^{s_2 t} \cdot m \left[ \frac{a(c - \Delta)}{2} + bm \right]}{\Delta}. \quad (1.31)$$

### Caso subamortiguado:

Este caso es similar al anterior sin más que darse cuenta que el discriminante es negativo y, por tanto, las raíces del denominador son números complejos, por lo que ambos polos son conjugados.

Operando de la misma manera que antes llegamos a que

$$y(t) = \frac{e^{s_1 t} \cdot m \left[ \frac{a(c + i\Delta)}{2} + bm \right]}{i\Delta} - \frac{e^{s_2 t} \cdot m \left[ \frac{a(c - i\Delta)}{2} + bm \right]}{i\Delta}. \quad (1.32)$$

Una observación importante es que en los dos casos anteriores la solución tiene un término exponencial real, mientras que en este caso, puesto que los polos son complejos, el término exponencial se reduce a una combinación lineal de senos y cosenos.

### 1.4.2. Aplicaciones a las EDPs

Cuando tratamos de resolver una ecuación en derivadas parciales con  $n$  variables independientes mediante la transformada de Laplace, estamos simplificando el problema, y pasamos a tener una nueva EDP con  $n - 1$  variables. En particular, en el caso de EDPs con 2 variables, podemos reducirla a una ecuación diferencial ordinaria.

A continuación veremos un ejemplo para la resolución de una ecuación de ondas que es uno de los tipos de EDP más conocidos.

**Ejemplo 1.3.** Trataremos de encontrar la función  $y(t, x)$  que satisface la siguiente ecuación de ondas:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + x \sin t, \quad x, t > 0, \quad (1.33)$$

con las condiciones iniciales y de contorno definidas por:

$$\begin{aligned} y(0, x) &= 0. \\ y_t(0, x) &= 0. \\ y(t, 0) &= \sin t. \\ |y(t, x)| &\leq M. \end{aligned}$$

En primer lugar, calcularemos la transformada de la EDP anterior obteniendo que

$$\bar{y}_{xx}(s, x) = \left(\frac{s}{x}\right)^2 \bar{y}(s, x) - \frac{x}{c^2(s^2 + 1)}, \quad x > 0. \quad (1.34)$$

La transformada de la condición en  $x = 0$  se escribe ahora como

$$\bar{y}(s, 0) = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (1.35)$$

Observemos que el problema se ha reducido a la resolución de la ecuación diferencial de segundo orden (1.34), cuya solución general viene dada por

$$\bar{y}(s, x) = a_1(s)e^{xs/c} + a_2(s)e^{-xs/c} + \frac{x}{s^2(s^2 + 1)},$$

donde  $a_1(s)$  y  $a_2(s)$  son funciones que deben verificar la condición (1.35), lo que nos lleva a

$$a_1(s) + a_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Utilizando a continuación la condición de la cota superior de  $y(t, x)$ , llegamos a que

$$|\bar{y}(s, x)| = \left| \int_0^\infty e^{-ts} y(t, x) dt \right| \leq \frac{M}{\Re(z)},$$

y esto implica que

$$\lim_{\Re z \rightarrow \infty} \bar{y}(s, x) = 0$$

y, por consiguiente, debe ser  $a_1(s) = 0$ , y  $a_2(s) = 1/(s^2 + 1)$ . Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial es

$$\bar{y}(s, x) = \frac{e^{-xs/c}}{s^2 + 1} + \frac{x}{s^2(s^2 + 1)}.$$

Por último, solo necesitamos calcular la transformada inversa de la función anterior.

El primer término es claramente una traslación de la transformada de  $\sin t$ , es decir,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-xs/c}}{s^2 + 1} \right\} (t) = \begin{cases} \sin(t - \frac{x}{c}) & \text{si } t > x/c. \\ 0 & \text{si } t \leq x/c. \end{cases}$$

Por otra parte, en cuanto al segundo término, es claro que la función  $\frac{x}{s^2(s^2+1)}$  tiene un polo doble en  $s = 0$ , y polos simples en  $s = \pm i$ . Por tanto, el cálculo de la transformada inversa se reduce al cálculo de residuos en esos polos. Considerando ahora  $x$  como una constante y puesto que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} \right\} (t) &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{st}}{s^2(s^2 + 1)}, 0 \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{e^{st}}{s^2(s^2 + 1)}, i \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{e^{st}}{s^2(s^2 + 1)}, -i \right) \\ &= t + \frac{e^{it}}{-2i} + \frac{e^{-it}}{2i} = t - \sin t. \end{aligned}$$

se deduce que la solución al problema inicial es

$$y(t, x) = \begin{cases} \sin(t - \frac{x}{c}) + x(t - \sin t) & \text{si } t > x/c. \\ x(t - \sin t) & \text{si } t \leq x/c. \end{cases}$$

# Capítulo 2

## Integración numérica

En este capítulo recordaremos los métodos de integración numérica más usuales, alguno de los cuales nos serán de gran utilidad a la hora de calcular transformadas inversas de Laplace.

### 2.1. Introducción y Conceptos Básicos

En análisis numérico, la integración numérica consiste en el estudio de algoritmos que permiten calcular de forma aproximada el valor de una integral definida. En este capítulo nos centraremos en los métodos más importantes, ya sea por su sencillez o por su eficacia a la hora de resolver nuestros problemas.

El problema general que tratamos en esta sección es el cálculo del valor aproximado de  $\int_a^b f(x)dx$ , usando una fórmula del siguiente tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i).$$

La expresión anterior se conoce como **fórmula de cuadratura** de  $N$  puntos. A los puntos  $x_i \in [a, b]$  se les llama *nodos*, y a los coeficientes  $\omega_i$  se les llama *pesos*.

Los métodos de cuadratura más utilizados son los llamados de tipo interpolatorio y tienen su base en el uso de una función (polinomio) que sea una buena aproximación de  $f(x)$  y cuya primitiva se conozca exactamente.

## *Interpolación de Lagrange*

De cara a la construcción de fórmulas de cuadratura, en este capítulo y posteriores se utilizará el polinomio de interpolación de Lagrange.

Dado un conjunto de  $N + 1$  puntos (nodos) y una función  $f(x)$ , de la que se conocen sus valores en todos los nodos, el polinomio de interpolación de Lagrange es un polinomio de grado  $\leq N$  que coincide con  $f(x)$  en los  $N + 1$  nodos.

Si denotamos por  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$  a los pares donde  $x_k$  son los nodos e  $y_k$  la imagen de la función en los nodos, el polinomio de interpolación de Lagrange viene dado por

$$L(x) = \sum_{j=0}^N y_j L_j(x), \quad (2.1)$$

y a los elementos  $L_j(x)$  se les denomina base del polinomio interpolador de Lagrange, cuya expresión es

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \quad (2.2)$$

Se puede demostrar fácilmente que el polinomio definido en (2.1) es el único que interpola a  $f(x)$  en esos puntos. Para ello, observemos que si  $L(x)$  y  $N(x)$  dos polinomios interpoladores de grado  $N$  para  $f(x)$  en esos nodos, entonces  $H(x) = L(x) - N(x)$  se anula en todos esos puntos. Pero entonces  $H(x)$  sería un polinomio de grado  $\leq N$  con  $N + 1$  raíces, de lo cual podemos deducir que  $H(x) = 0$  y por tanto  $L(x) = N(x)$ .

Es importante destacar que existen diversos métodos para el cálculo del polinomio de interpolación, pero en los siguientes capítulos nos referiremos exclusivamente a la construcción por el método de Lagrange.

### **2.1.1. Fórmulas de Newton-Cotes**

Dentro de las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio son muy utilizadas las llamadas fórmulas de Newton-Cotes. Estas fórmulas se basan



en elegir como nodos puntos equidistantes que constituyan una partición de  $[a, b]$ . Se denominan cerradas cuando  $a$  y  $b$  se encuentran entre los nodos, y abiertas cuando no es así.

Las fórmulas de Newton-Cotes más utilizadas son la fórmula del trapecio y la fórmula de Simpson sobre todo porque cuando se consideran en su forma compuesta, de la cual hablaremos más tarde, resultan ser muy eficientes.

### Fórmula del trapecio

Es una de las fórmulas más sencillas, y consiste en sustituir  $f(x)$  por un polinomio de grado uno que coincida con  $f$  en los extremos de integración.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Integrando ambas partes obtenemos la fórmula del trapecio simple:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx = (b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

Si  $f(x)$  es dos veces derivable en  $(a, b)$ , la expresión del error del trapecio simple viene dado por  $E = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi)$  con  $\xi \in [a, b]$ .

### Fórmula de Simpson

En este caso, se busca un polinomio de grado dos, de manera que coincida con  $f$  tanto en los extremos, como en el punto medio de estos. Este polinomio se puede obtener mediante interpolación de Lagrange.

Integrando dicho polinomio se obtiene la fórmula simple de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b - a)}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Si  $f(x)$  es cuatro veces derivable en  $(a, b)$ , el término del error viene dado por  $E = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$ , o  $E = -\frac{(h)^5}{90} f^{(4)}(\xi)$ , con  $\xi \in [a, b]$  y  $h = (b - a)/2$ .

### *Fórmulas compuestas*

Cuando aumenta el número de nodos en el proceso de interpolación, podría pensarse que el polinomio de interpolación aproximaría cada vez mejor a la función  $f(x)$  puesto que incorpora más información sobre la misma. Sin embargo, los polinomios de grado alto presentan en muchas ocasiones grandes oscilaciones que pueden llevar a errores muy grandes de discretización. En estos casos, un procedimiento alternativo para diseñar las fórmulas de integración numérica consiste en dividir el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos de igual longitud, a cada uno de los cuales se aplica una fórmula más simple para después efectuar la suma de todas las aproximaciones.

Esta es la idea que da lugar a las fórmulas compuestas que calcularemos aquí para el caso del trapecio y Simpson.

#### *Fórmula del trapecio compuesta*

Llamaremos ahora  $N$  al número de subintervalos, esto es, consideramos una partición del intervalo  $[a, b]$  que consta de  $N + 1$  puntos,  $x_0 = a, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b$  y de modo que la longitud de cada subintervalo es  $h = (b - a)/N$ .

Podemos aplicar la fórmula del trapecio a cada subintervalo y, tras efectuar la suma, obtenemos la fórmula del **trapecio compuesta**, que es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b) \right].$$

Si  $f(x)$  es suficientemente regular, definiendo  $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(2)}(x)|$ , el error en la fórmula compuesta se puede acotar de la siguiente forma:

$$|E| \leq \left| \frac{h^3}{12} NM \right| = \left| \frac{(b-a)}{12} h^2 M \right| = Ch^2,$$

donde  $C$  es una constante que no depende de  $h$ .

#### *Fórmula de Simpson compuesta*

En este caso, dividimos el intervalo  $[a, b]$  en un número par de subintervalos  $N$  de longitud  $h = (b - a)/N$ . Entonces la fórmula de **Simpson compuesta** es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-2}) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + f(b) \right].$$

Asumiendo que  $f(x)$  es una función continua y cuatro veces derivable, si llamamos  $M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$ , el término del error en la fórmula de Simpson compuesta viene acotado por

$$|E| \leq \left| \frac{h^4}{180} (b-a)M \right| = Ch^4,$$

donde  $C$  es una constante que no depende de  $h$ .

### 2.1.2. Fórmulas de cuadratura de Gauss

Las fórmulas de Newton-Cotes se caracterizan por utilizar particiones equidistantes de  $[a, b]$  por ser en este tipo de puntos donde es más sencilla la evaluación de la función  $f(x)$ . Sin embargo, de cara al grado de exactitud de las fórmulas, se pueden encontrar otros nodos que garantizan una exactitud superior.

En general, las fórmulas de Newton-Cotes de  $N$  puntos garantizan la exactitud para todos los polinomios de grado  $\leq N - 1$ , pero es posible diseñar fórmulas de cuadratura con  $N$  nodos que llegan a ser exactas para todos los polinomios de grado  $\leq 2N - 1$ .

Puesto que la fórmula se debe construir para ser exacta para polinomios de grado  $2N - 1$ , los pesos y nodos se pueden calcular resolviendo el sistema que se obtiene al plantear la exactitud en la base  $\{1, x, x^2, \dots, x^{2N-1}\}$ .

Un método alternativo a este, que fue desarrollado por Carl Gustav Jacobi, consiste en la construcción de polinomios ortogonales cuyos ceros resultan ser los nodos de las fórmulas gaussianas. Además, es importante remarcar el hecho de que todas las raíces de los polinomios ortogonales están precisamente en el intervalo donde se define la fórmula.

Cuando hablamos de polinomios ortogonales, la ortogonalidad se refiere a un producto escalar definido como sigue:

$$(u, v) = \int_a^b \Omega(x) u(x) v(x) dx,$$

es decir, se verifica que

$$\begin{aligned} \int_a^b \Omega(x) p_n(x) p_m(x) dx &= 0, & m \neq n, \\ \int_a^b \Omega(x) p_n(x) p_m(x) dx &= \gamma_n, & m = n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde  $\Omega(x)$  es una función positiva que se denomina función peso.

**Ejemplo 2.1.** Suponiendo que  $f(x)$  es una función continua y suficientemente regular, consideramos la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i)$$

Los polinomios ortogonales  $p_n$  asociados a este problema (correspondientes al producto escalar  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ ) se denominan *Polinomios de Gauss-Legendre*. Estos polinomios son únicos salvo constantes multiplicativas y se escogen de forma que  $p_n(1) = 1$ . El cálculo de pesos y nodos para una fórmula de  $N$  puntos se deriva de dichos polinomios de la forma siguiente: Los  $N$  nodos  $x_i$  son las  $N$  raíces del  $N$ -ésimo polinomio  $p_N$ , y los pesos vienen dados por la expresión

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(p'_N(x_i))^2}.$$

### Otras fórmulas

Las fórmulas de Gauss-Legendre corresponden al caso más sencillo de producto escalar ( $\Omega(x) = 1$ ) y al intervalo  $[-1, 1]$ . Cambiando las elecciones de función peso e intervalo, obtenemos otras fórmulas gaussianas, algunas de ellas bien conocidas como *Gauss-Chebyshev*, *Gauss-Laguerre*, *Gauss-Hermite*.

En el caso más general, el cálculo de los pesos  $\omega_k$  viene dado por la siguiente expresión

$$\omega_k = -\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{\gamma_n}{p'_n(x_k)p_{n+1}(x_k)}, \quad (2.4)$$

donde  $a_n$  es el coeficiente director de  $p_n(x)$ , y  $\gamma_n$  viene definido por el producto escalar en (2.3).

Por último, damos a continuación la expresión del error cometido con la fórmula de cuadratura gaussiana que se puede escribir como

$$R_n = \frac{\gamma_n}{a_n^2} \cdot \frac{f^{(2n)}(\epsilon)}{(2n)!}, \quad a < \epsilon < b. \quad (2.5)$$

## Capítulo 3

# Métodos de integración numérica para el cálculo de la transformada inversa de Laplace

Existen diversos métodos de inversión de la transformada de Laplace y, en particular, analizamos aquí los métodos más importantes que utilizan integración numérica, siguiendo las ideas desarrolladas tanto en [2], el cual realiza un compendio de los mismos, como en los artículos originales correspondientes a cada método.

### 3.1. Cuadraturas de Gauss

Es lógico que un gran número de métodos para encontrar la inversa de la transformada de Laplace utilicen la integral de Bromwich (1.18), ya que esta proporciona una solución explícita para  $f(t)$ . Nos centraremos en un artículo de Salzer [12] en el que propone varios métodos para calcular una aproximación de la integral.

En primer lugar tenemos que asumir que  $\bar{f}(s)$  se puede aproximar de forma **efectiva** por un polinomio de interpolación de Lagrange de grado  $n$  en la variable  $(1/s)$ , es decir

$$\bar{f}(s) \approx \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r}{s^r}, \quad \text{donde } \beta_r \text{ son constantes} \quad (3.1)$$

Esto es así porque vamos a utilizar fórmulas de cuadratura basadas en el polinomio de interpolación. Es importante notar que la función  $\bar{f}(s)$  verifica que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{f}(s) = 0$  y por lo tanto dicho polinomio ha de tener término independiente nulo.

Utilizando el cambio de variable  $st = u$ , se puede reescribir la integral de Bromwich como:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds = \frac{1}{2\pi i t} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} e^u \bar{f}\left(\frac{u}{t}\right) du, \quad (3.2)$$

donde  $\bar{f}(u/t)$  tiene la misma aproximación polinómica en la variable  $1/u$  que  $\bar{f}(s)$  en la variable  $1/s$ , pero ahora involucrando al parámetro  $t$ , y donde  $c' = c/t$ .

De cara a la construcción de una fórmula de cuadratura gaussiana, observemos que podemos considerar la función  $e^u/u$  como una función peso a partir de la cual podemos obtener un conjunto de polinomios ortogonales  $p_n(1/u)$  tales que

$$\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{e^u}{u} p_n\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^m} du = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.3)$$

La fórmula de cuadratura de Gauss obtenida a través de los ceros de esos polinomios ortogonales va a ser exacta para polinomios de grado  $\leq 2n$  en la variable  $1/u$  que se anulan en  $1/s = 0$ . Veamos ahora cómo obtener esta regla de cuadratura.

Sea  $q_{2n}(1/s)$  un polinomio arbitrario de grado  $2n$  en la variable  $1/s$ , el cual se anula en  $1/s = 0$ . Consideremos los  $n+1$  puntos distintos  $1/s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , donde  $1/s_{n+1} = 0$ , y sea  $L^{(n+1)}(1/s)$  el polinomio de interpolación de Lagrange construido con esos  $n+1$  puntos. Este polinomio es una aproximación de  $q_{2n}(1/s)$  y coincide con  $q_{2n}(1/s)$  en dichos  $n+1$  puntos. Entonces

$$L^{(n+1)}\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i^{(n+1)}\left(\frac{1}{s}\right) q_{2n}\left(\frac{1}{s_i}\right), \quad (3.4)$$

donde  $L_i^{(n+1)}$  son los elementos de la base del polinomio de interpolación de Lagrange, la cual, en la variable  $1/s$ , tiene la forma

$$L_i^{(n+1)}\left(\frac{1}{s}\right) = \prod_{k=1, k \neq i}^{n+1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_k}\right) / \prod_{k=1, k \neq i}^{n+1} \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_k}\right) \quad (3.5)$$

Del hecho de que  $q_{2n}(1/s)$  coincida con  $L^{(n+1)}(1/s)$  en los puntos  $1/s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, n+1$ , se deduce que su diferencia se anula en dichos puntos, y por lo tanto tiene como factor común a

$$\frac{1}{s} p_n\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_i}\right).$$

Por tanto podemos escribir

$$q_{2n}\left(\frac{1}{s}\right) = L^{(n+1)}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{s} p_n\left(\frac{1}{s}\right) r_{n-1}\left(\frac{1}{s}\right),$$

donde  $r_{n-1}(1/s)$  es un polinomio de grado  $n-1$  en la variable  $1/s$ .

Se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} e^s q_{2n}\left(\frac{1}{s}\right) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} e^s L^{(n+1)}\left(\frac{1}{s}\right) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} e^s p_n\left(\frac{1}{s}\right) r_{n-1}\left(\frac{1}{s}\right) ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Es importante observar que si elegimos los puntos  $1/s_i$  de manera que  $p_n(1/s)$  verifique la ecuación (3.3), el segundo término de la parte de la derecha de la ecuación anterior se anula. Por lo tanto llegamos a que (3.6) representa una fórmula de cuadratura de Gauss de  $n$  puntos que es exacta para todos los polinomios de grado  $2n$  en la variable  $1/s$  sin término independiente, y cuya fórmula es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} e^s q_{2n}\left(\frac{1}{s}\right) ds = \sum_{i=1}^n A_i q_{2n}\left(\frac{1}{s_i}\right), \quad (3.7)$$

donde los pesos  $A_i$  de la fórmula, son los llamados números de Christoffel, y vienen dados por la expresión

$$A_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} e^s L_i^{(n+1)}\left(\frac{1}{s}\right) ds. \quad (3.8)$$

Sin embargo, para poder computar dichos  $A_i$  es necesario conocer los valores de  $s_i$ . Existen diferentes métodos para ello, pero nos centraremos aquí en la



relación de recurrencia que propone Salzer, que demuestra que si consideramos  $P_n(x) = p_n(1/x)$  entonces se verifica

$$P_1(x) = p_1 = x - 1; \quad P_2(x) = 6x^2 - 4x + 1$$

$$P_{n+1}(x) = \left[ (4n + 2)x + \frac{2}{2n - 1} \right] P_n(x) + \frac{2n + 1}{2n - 1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 2. \quad (3.9)$$

Por consiguiente, si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las raíces de  $P_n(x)$  entonces debemos tomar  $s_i = 1/x_i$ .

Recordemos que solo podemos aplicar lo anterior a aquellas funciones que tengan una expresión de la forma

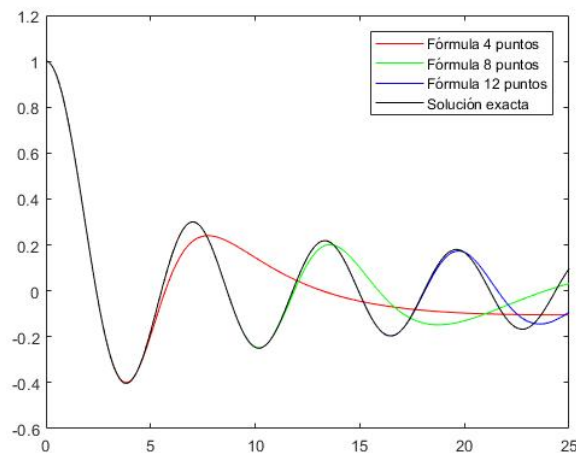
$$\bar{f}(s) \approx \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r}{s^r},$$

aunque también se puede extender su aplicación al caso más general

$$s^\nu \bar{f}(s) \approx \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r}{s^r}, \quad \nu > 0. \quad (3.10)$$

Un ejemplo del comportamiento de este método de cuadratura gaussiana se muestra en la siguiente figura que corresponde a la función

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}}$$



La fórmula es especialmente precisa para valores pequeños de  $t$ , puesto que se puede comprobar que con una fórmula de 12 puntos se consigue una precisión de 10 decimales para  $t \in [0, 8]$ . Sin embargo esta precisión disminuye al aumentar  $t$  y en  $t = 16$  solo obtenemos 3 decimales correctos.

Es importante destacar que dada una fórmula del tipo anterior con  $N$  puntos, solo es precisa para valores de  $t$  menores que un cierto  $t_{max}$ .

Es por esto, que si necesitamos una mayor precisión en valores de  $t$  grandes, debemos recurrir a otros métodos que veremos en secciones posteriores.

También hay que señalar que existen funciones para las que no se verifica (3.10), como es el caso de

$$\bar{f}(s) = \frac{s \ln s}{s^2 + 1}$$

Y, por tanto, este método no sería adecuado.

## 3.2. Evaluación de Integrales Trigonométricas

El siguiente método es una modificación que hemos efectuado del algoritmo descrito por Schmittroth [13], el cual, a su vez, está basado en un procedimiento de Hurwitz y Zweifel [9] para la evaluación de integrales trigonométricas.

Si recordamos las expresiones (1.24) y (1.25) obtenidas en el capítulo 1, y definimos  $\phi(\omega) = \Re \bar{f}(c + i\omega)$ , y  $\psi(\omega) = -\Im \bar{f}(c + i\omega)$ , habíamos probado que

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{\pi} \int_0^\infty \phi(\omega) \cos t\omega \, d\omega, \quad (3.11)$$

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{\pi} \int_0^\infty \psi(\omega) \sin t\omega \, d\omega. \quad (3.12)$$

Para la evaluación de estas integrales vamos a realizar los cambios de variable  $y = \omega t/\pi$  en (3.11) y  $u = (\omega t/\pi) - \frac{1}{2}$  en (3.12). Si nos centramos en esta segunda expresión, obtenemos que

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{t} \int_{-\frac{1}{2}}^\infty \psi\left(\frac{\pi}{t}\left[u + \frac{1}{2}\right]\right) \cos(\pi u) \, du, \quad (3.13)$$

que podemos descomponer en la forma

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{t} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \dots \right] \psi \left( \frac{\pi}{t} \left[ u + \frac{1}{2} \right] \right) \cos(\pi u) du. \quad (3.14)$$

Desarrollaremos a continuación cada una de estas integrales. Para ello, si  $n \in \mathbb{N}$ , utilizando el cambio de variable  $u = v + n$  tenemos que

$$\int_{-\frac{1}{2}+n}^{\frac{1}{2}+n} \psi \left( \frac{\pi}{t} \left[ u + \frac{1}{2} \right] \right) \cos(\pi u) du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi \left( \frac{\pi}{t} \left[ v + n + \frac{1}{2} \right] \right) (-1)^n \cos(\pi v) dv, \quad (3.15)$$

y por tanto podemos expresar  $f(t)$  como

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{t} \sum_{n=0}^{\infty} I_n(t) \quad (3.16)$$

donde

$$I_n(t) = (-1)^n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi \left( \frac{\pi}{t} \left[ u + n + \frac{1}{2} \right] \right) \cos(\pi u) du. \quad (3.17)$$

En la práctica estas cantidades  $I_n$  deben ser computadas de forma precisa utilizando alguna regla de cuadratura. Si bien originalmente se utilizaba una regla basada en los polinomios de Chebyshev, en nuestro caso hemos decidido utilizar una fórmula de Gauss-Legendre con la que hemos obtenido resultados satisfactorios.

Si repetimos el desarrollo con la expresión del coseno el resultado que se obtiene es

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi \left( \frac{\pi}{t} \left[ u + n + \frac{1}{2} \right] \right) \sin(\pi u) du \right], \quad (3.18)$$

lo cual constituye una forma alternativa de realizar el proceso.

En cualquiera de los dos casos, si denotamos  $S_m^{(0)} = \sum_{n=0}^m I_n$ , podemos usar el siguiente esquema para acelerar la convergencia del método:

$$S_m^{(k)} = \frac{(S_m^{(k-1)} + S_{m+1}^{(k-1)})}{2}. \quad (3.19)$$

Por otra parte, es importante destacar que el método anterior, se vuelve más preciso a medida que  $t$  aumenta, esto es, es más efectivo para valores  $t > t_{min}$ , donde  $t_{min}$  depende de la elección de  $N$ , mientras que otros métodos son más efectivos para  $t < t_{max}$ .

### 3.3. Métodos de Extrapolación

En esta sección analizaremos métodos que utilizan el cambio de variable  $s = c + ix$ , que permite escribir la integral de Bromwich en la forma

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \bar{f}(c + ix) dx. \quad (3.20)$$

Aunque existen una gran cantidad de métodos para aproximar esta integral, cada uno con sus ventajas y desventajas, nos vamos a centrar en estudiar los métodos de Levin y Sidi que destacan entre los demás por tener una complejidad computacional menor.

En estos métodos se van a utilizar las transformaciones de Levin y Sidi cuyos fundamentos teóricos se pueden encontrar en [10] y [14] respectivamente

#### 3.3.1. La P-transformada de Levin

En primer lugar vamos a reescribir la ecuación (3.20) como

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right] e^{ixt} \bar{f}(c + ix) dx, \quad (3.21)$$

lo cual nos lleva a considerar una integral de Fourier de la forma  $\int_0^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx$ .

En particular, si

$$x^\nu g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{x^k}, \quad \nu > 0,$$

Levin demuestra que se puede obtener una expansión asintótica para  $\int_0^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx$  de la forma

$$\int_u^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx \sim b(u) e^{i\omega u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{u^k}.$$

Si llamamos  $A = \int_0^\infty g(x)e^{i\omega x}dx$ , y definimos  $A(u) = \int_0^u g(x)e^{i\omega x}dx$  como su parte finita, entonces, truncando la expansión asintótica, obtenemos

$$A - A(u) \equiv \int_u^\infty g(x)e^{i\omega x}dx \approx b(u)e^{i\omega u} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j}{u^j}. \quad (3.22)$$

Entonces, exigiendo que la aproximación  $P$  de  $A$  cumpla la relación exactamente para  $k + 1$  valores equidistantes de  $u$ , es decir

$$P - A(u + n\Delta u) = b(u + n\Delta u)e^{i\omega(u+n\Delta u)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma_j}{(u + n\Delta u)^j}, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad (3.23)$$

que es un sistema de  $k+1$  ecuaciones lineales con  $k+1$  incógnitas:  $P, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ . Si aplicamos este proceso a la integral de Bromwich, Levin obtiene la aproximación  $P_k$  de  $f(t)$  dada por:

$$P_k = \frac{e^{ct}}{\pi} \Re \left( \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^{(k-1)} \left[ \frac{I_{j+1}(t)e^{-i(j+1)t}}{\bar{f}(c+i(j+1))} \right]}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^{(k-1)} \left[ \frac{e^{-i(j+1)t}}{\bar{f}(c+i(j+1))} \right]} \right), \quad (3.24)$$

donde  $I_{j+1}(t) = A(j+1) = \int_0^{j+1} e^{ixt} \bar{f}(c+ix)dx$ .

Es muy importante el hecho de que estas integrales  $I_{j+1}$  han de ser evaluadas mediante una fórmula de cuadratura adecuada para asegurar buenos resultados. Por ejemplo, Levin utiliza la fórmula de Gauss-Legendre con un número suficiente de nodos para asegurar al menos 14 decimales de exactitud.

### 3.3.2. La mW-Transformada de Sidi

Sidi [14] propone el siguiente método, que empieza por reescribir la integral de Bromwich en la forma

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \left[ \int_0^\infty e^{i\omega t} \bar{f}(c+i\omega) d\omega + \int_0^\infty e^{-i\omega t} \bar{f}(c-i\omega) d\omega \right], \quad (3.25)$$

lo cual sabemos que es correcto gracias a la paridad de las funciones del integrando.

Observemos que es posible expresar (3.25) de la forma

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} [u_+(t) + u_-(t)] \quad (3.26)$$

Más aún, puesto que en nuestro caso  $f(t)$  es una función real, sabemos que  $u_-(t) = \overline{u_+(t)}$  y por lo tanto solo es necesario calcular una de las dos funciones  $u_{\pm}(t)$ . A partir de aquí vamos a detallar el cálculo de  $u_+(t)$ , a la que nos referiremos a partir de ahora como  $u(t)$ , y que Sidi aproxima mediante la mW-transformada. Por lo tanto

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{\pi} \Re(u(t)). \quad (3.27)$$

Para ello debemos suponer que  $\bar{f}(s)$  es

$$\bar{f}(s) = e^{-st_0} g(s),$$

donde  $g(s)$  una función que se puede expandir asintóticamente en la forma

$$g(s) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i s^{\delta-i}, \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty.$$

El algoritmo de la mW-transformada, detallado en [14], se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se definen

$$\omega_l = (l+1)\pi/(t-t_0), \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.28)$$

2. Se computan las integrales

$$\psi(\omega_l) = \int_{\omega_l}^{\omega_{l+1}} e^{i\omega t} \bar{f}(c+i\omega) d\omega, \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.29)$$

$$V(\omega_l) = \int_0^{\omega_l} e^{i\omega t} \bar{f}(c+i\omega) d\omega = \sum_{k=0}^{l-1} \psi(\omega_k), \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.30)$$

3. Se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales

$$V(\omega_l) = W_n^{(j)} + \psi(\omega_l) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_i}{\omega_l}, \quad l = j, j+1, \dots, j+n, \quad (3.31)$$

En este último paso lo que nos interesa obtener son los valores  $W_n^{(j)}$ , ya que estos serán la aproximación a  $u(t)$ . Las constantes  $\beta_i$  no son de interés en este caso.

Sidi realiza el cálculo de  $W_n^{(j)}$  mediante el denominado algoritmo-W, el cual supone una gran ventaja computacional frente a la resolución de un sistema de ecuaciones. De este modo, el tercer paso del algoritmo anterior se desarrollaría de la forma siguiente:

1. Para  $j = 0, 1, \dots$ , definimos

$$M_0^{(j)} = \frac{V(\omega_j)}{\psi(\omega_j)}, \quad N_0^{(j)} = \frac{1}{\psi(\omega_j)}. \quad (3.32)$$

2. Para cada  $j = 0, 1, \dots$ , y cada  $n = 0, 1, \dots$ , computamos

$$M_n^{(j)} = \frac{M_{n-1}^{(j+1)} - M_{n-1}^{(j)}}{\omega_{j+n}^{-1} - \omega_j^{-1}}, \quad N_n^{(j)} = \frac{N_{n-1}^{(j+1)} - N_{n-1}^{(j)}}{\omega_{j+n}^{-1} - \omega_j^{-1}}. \quad (3.33)$$

3. Por último, para cada  $j$  y cada  $n$  calculamos

$$W_n^{(j)} = \frac{M_n^{(j)}}{N_n^{(j)}}. \quad (3.34)$$

Estas cantidades  $W_n^{(j)}$  convergen rápidamente a  $u(t)$  a medida que  $n \rightarrow \infty$  cuando fijamos  $j$  ( $j = 0$  por ejemplo). Y por tanto es suficiente tomar  $W_n^{(0)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  como aproximación a  $u(t)$ .

La clave de este método reside en la correcta elección de los  $\omega_l$ . Estos se eligen de forma que el signo se alterne con el valor  $l$ . Es decir, se escogen de manera que  $\text{signo}[\phi(\omega_l)\phi(\omega_{l+1})] = -1$  para todos los valores grandes de  $l$ . De hecho se han conseguido buenos resultados incluso con funciones que no satisfacen las hipótesis siempre que  $\text{signo}[\phi(\omega_l)\phi(\omega_{l+1})] = -1$  para todo  $l$ .

También es importante que las integrales (3.29) y (3.30) se computen de manera adecuada, en nuestro caso utilizaremos una regla de cuadratura de Gauss-Legendre.

## 3.4. Métodos que involucran la Transformada de Fourier

Vamos a ver cómo la evaluación de ciertas integrales de Fourier puede ayudar a la resolución del problema al que nos enfrentamos. En este capítulo veremos métodos muy eficientes para la resolución de la transformada inversa de Laplace, no solo por su coste computacional sino también en términos de error.

### 3.4.1. Método de Dubner y Abate

Dubner y Abate [6] desarrollaron el método que exponemos a continuación que relaciona la integral de Fourier con una transformada de Fourier finita en términos del coseno.

Dada una función real  $h(t)$  tal que  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ , construimos un conjunto de funciones periódicas de simetría par  $g_n(t)$  de periodo  $2T$ , de tal manera que para  $n = 0, 1, 2, \dots$  tenemos

$$g_n(t) = \begin{cases} h(t), & nT \leq t \leq (n+1)T, \\ h(2nT - t) & (n-1)T \leq t \leq nT, \end{cases} \quad (3.35)$$

(ver Figura 3.1) lo cual es equivalente a definir  $g_n(t)$  en el dominio  $(-T, T)$  en la forma

$$g_n(t) = \begin{cases} h(nT + t), & 0 \leq t \leq T, \\ h(nT - t) & -T \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

para  $n = 0, 2, 4, \dots$

y

$$g_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T + t), & 0 \leq t \leq T, \\ h((n+1)T - t) & -T \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

para  $n = 1, 3, 5, \dots$

La transformación de Fourier en términos del coseno para cada  $g_n$  viene dada para todo  $n$  por

$$g_n = \frac{1}{2}A_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right), \quad (3.38)$$



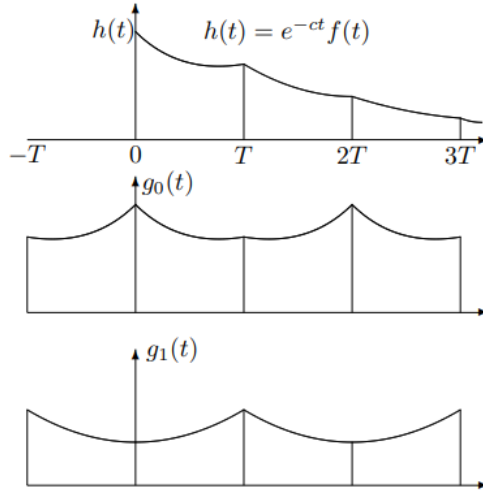


Figura 3.1: Representación de las funciones  $g_i$ .

donde los coeficientes verifican

$$A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt. \quad (3.39)$$

Si sumamos ahora sobre todos los números naturales la expresión de (3.38), obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{2} A(\omega_0) + \sum_{k=1}^{\infty} A(\omega_k) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right], \quad (3.40)$$

donde

$$A(\omega_k) = \int_0^{\infty} h(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt. \quad (3.41)$$

Es decir,  $A(\omega_k)$  es una transformada de Fourier en términos del coseno, y si llamamos

$$h(t) = e^{-ct} f(t), \quad (3.42)$$

se puede interpretar como la transformada de Laplace de una función real  $f(t)$  expresada en términos de la variable  $s = c + i(k\pi/T)$  o, dicho de otro modo,  $A(\omega_k) = \Re \bar{f}(s)$ .

Vamos a desarrollar con más detalle el paso anterior. Usando  $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ , y el cambio  $s = c + i(k\pi/T)$  escribimos la definición de la transformada

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ e^{-ct} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right] - i \left[ e^{-ct} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Por tanto, si nos restringimos únicamente a la parte real, obtenemos  $A(\omega_k)$ , y la expresión (3.40) se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} g_n(t) = \frac{2e^{ct}}{T} \left[ \frac{1}{2} \Re \bar{f}(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ \bar{f}\left(c + \frac{k\pi i}{T}\right) \right\} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right] \quad (3.44)$$

Ahora  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} g_n(t)$  contiene a la transformada inversa de  $\bar{f}(s)$  en el intervalo  $(0, T)$ , más otros términos adicionales, que llamaremos el error. De las expresiones (3.36) y (3.37) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} g_n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} h(2nT + t) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} h(2nT - t) \\ &= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{ct} [h(2nT + t) - h(2nT - t)]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Así pues, el término del sumatorio correspondiente a  $n = 0$  es  $f(t)$  y el resto es la expresión del error, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} g_n(t) = f(t) + E_1, \quad (3.46)$$

donde  $E_1$  es el error dado por la expresión

$$E_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{ct} [h(2nT + t) - h(2nT - t)] = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cTn} [f(2nT + t) + e^{2cT} f(2nT - t)]. \quad (3.47)$$

Dubner y Abate demostraron que  $E_1$  podía hacerse tan pequeño como se deseara solo para valores  $t \leq T/2$ . Es decir, la transformada inversa de Laplace

puede calcularse de forma tan precisa como se desee con el valor de (3.44), por tanto,

$$f(t) \approx \frac{2e^{ct}}{T} \left[ \frac{1}{2} \Re \bar{f}(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ \bar{f} \left( c + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \cos \left( \frac{k\pi t}{T} \right) \right]. \quad (3.48)$$

Con esta aproximación, el cálculo de  $f(t)$  solo involucra evaluaciones de su transformada en los puntos que aparecen en la fórmula. Obviamente para su cálculo práctico se deberá truncar este sumatorio, considerando solo un número finito de sumandos.

### 3.4.2. Método de Durbin

Veamos ahora un procedimiento alternativo al de Dubner y Abate que fue desarrollado por Durbin [7]. Este método es análogo al anterior, pero usando un conjunto de funciones con simetría impar.

Si  $h(t)$  es una función real en las mismas condiciones del apartado anterior, construimos un conjunto de funciones periódicas impares  $k_n(t)$ , para cada  $n > 0$ , en la forma

$$k_n(t) = \begin{cases} h(t), & nT \leq t \leq (n+1)T, \\ -h(2nT - t) & (n-1)T \leq t \leq nT, \end{cases} \quad (3.49)$$

(ver Figura 3.2).

Procediendo de la misma manera, la representación de cada una de las funciones anteriores en la forma de Fourier viene dada por

$$k_n = \sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k} \sin \left( \frac{k\pi t}{T} \right). \quad (3.50)$$

La principal diferencia con el caso anterior es que ahora el desarrollo se efectúa en términos del seno en lugar del coseno. Por ello, el coeficiente  $B_{n,0}$  es nulo y podemos empezar el sumatorio con  $k = 1$ . Además, los coeficientes vienen dados por la fórmula

$$B_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-ct} f(t) \sin \left( \frac{k\pi t}{T} \right) dt. \quad (3.51)$$

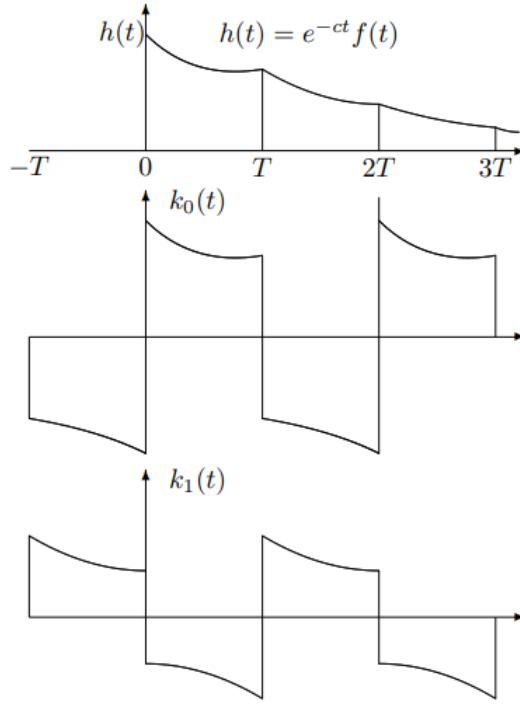


Figura 3.2: Representación de las funciones  $k_i$ .

Sumando ahora en (3.50) sobre los naturales se llega a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n(t) = \frac{2}{T} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} B(\omega_k) \sin \left( \frac{k\pi t}{T} \right) \right], \quad (3.52)$$

donde

$$B(\omega_k) = \int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) \sin \left( \frac{k\pi t}{T} \right) dt. \quad (3.53)$$

Aquí es necesario darse cuenta de que estos coeficientes pueden ser vistos como  $-\mathfrak{J}\bar{f}(s)$  a través del cambio de variable  $s = c + i(k\pi/T)$ , y de modo análogo al caso anterior, se llega a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} k_n(t) = -\frac{2e^{ct}}{T} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{J} \left\{ \bar{f} \left( c + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \sin \left( \frac{k\pi t}{T} \right) \right], \quad (3.54)$$

que se puede escribir también en la forma equivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{ct} k_n(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cTn} [f(2nT + t) - e^{2cT} f(2nT - t)], \quad (3.55)$$

donde la segunda parte de la expresión anterior es  $E_2$ , y de nuevo puede hacerse tan pequeño como se quiera en el intervalo  $(0, T/2)$

Un aspecto importante a tener en cuenta es que ambos desarrollos proporcionan esencialmente el mismo resultado, con la diferencia de que el término del error tiene signo opuesto. Y es por ello por lo que ese error puede reducirse de forma considerable si realizamos un promedio de ambos métodos. Es decir, procediendo de esa forma ahora tenemos que

$$f(t) + E_3 = \frac{e^{ct}}{T} \left[ \frac{1}{2} \Re \bar{f}(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ \bar{f} \left( c + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \cos \left( \frac{k\pi t}{T} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \Im \left\{ \bar{f} \left( c + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \sin \left( \frac{k\pi t}{T} \right) \right], \quad (3.56)$$

donde  $E_3$  es

$$E_3 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2ckT} f(2kT + t). \quad (3.57)$$

De forma general, se puede comprobar que el error puede ser acotado por

$$|E_3| < K(2T)^m e^{-2cT} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\alpha_i}{(2cT)^i},$$

donde  $K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$  son constantes. Durbin demuestra que la fórmula (3.56) equivale a aplicar la regla del trapecio con un paso  $\pi/T$ , pero este método resulta que tiene una cota del error proporcional a  $e^{(-2cT)}$ , mientras que con una regla del trapecio el error sería del orden  $O(1/T^2)$ .

En la práctica, como la serie de Fourier está multiplicada por el término  $e^{ct}$  puede ocurrir que si cometemos un cierto error a la hora de computar la serie de Fourier, el error teórico podría estar dominado por el error de truncación cometido, puesto que se amplifica para valores de  $T$  grandes. De hecho este es el caso cuando  $t$  es un valor grande y cercano a  $2T$ .

En este punto uno de los problemas cruciales es la elección de los parámetros adecuados, que en este caso son  $N, c$ , y  $T$ . Una estrategia útil para dicha elección es la propuesta por Crump [3]. Asumiendo que  $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ , se puede ver que

$$E_3 \leq Me^{\gamma t} / (e^{2T(c-\gamma)} - 1), \quad 0 < t < 2T, \quad (3.58)$$

y, por lo tanto, si escogemos  $c$  suficientemente mayor que  $\gamma$  podemos hacer  $E_3$  tan pequeño como se quiera. Por consiguiente, si queremos calcular el valor de  $f(t)$  para diferentes valores de  $t$  donde  $t_{max}$  es el máximo, y se requiere un error relativo acotado por el valor  $E'$ , podemos tomar  $T$  tal que  $2T > t_{max}$ , y posteriormente computaremos  $c$  como

$$c = \gamma - (\ln E')/2T, \quad (3.59)$$

donde  $\gamma$  es la mayor de las partes reales de todas las singularidades de  $\bar{f}(s)$ . Posteriormente, sumamos la serie dada en (3.56) hasta alcanzar el número deseado de cifras significativas. Sin embargo, la convergencia puede ser muy lenta y es conveniente el uso de procedimientos que aceleren esta convergencia.

### 3.4.3. Método de De Hoog, Knight y Stokes

Estos autores [4] ponen de manifiesto que los coeficientes de la serie de Fourier se derivan de la manipulación de una serie infinita y esto es válido siempre y cuando la convergencia de dicha serie sea uniforme. Pero en el caso de una función tan simple como es  $f(t) = 1$ , cuya transformada es  $\bar{f}(s) = 1/s$ , la convergencia de la serie no es uniforme y podemos esperar un mal comportamiento en este caso.

Para solucionar estos problemas, proponen que se mantenga la forma compleja original de la serie con el fin de hallar una aproximación racional. Es decir, se intenta computar

$$g(t) = \frac{1}{2}\bar{f}(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}\left(c + \frac{ik\pi}{T}\right) \exp \frac{ik\pi t}{T} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (3.60)$$

donde  $a_0 = \frac{1}{2}\bar{f}(c)$ ,  $a_k = \bar{f}(c + ik\pi/T)$  para  $k = 1, 2, \dots$ , y  $z = \exp(i\pi t/T)$ .

Observemos que, de acuerdo con la ecuación anterior y (3.56), se tiene que

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{T} g(t).$$

El objetivo es obtener dicha aproximación racional mediante el método de fracciones continuas, lo cual supone una gran mejora en el coste computacional, puesto que la serie puede ser evaluada mediante recursión.

Dada la serie de potencias (3.60) se busca calcular la fracción continua

$$v(z) = \frac{d_0}{1+} \frac{d_1 z}{1+} \frac{d_2 z}{1+} \cdots \quad (3.61)$$

que tenga la misma forma en serie de potencias que la función  $g(t)$ . En la práctica estamos buscando  $v_{2M}(z)$ , de manera que

$$u_{2M}(z) = \sum_{k=0}^{2M} a_k z^k, \quad v_{2M}(z) = \frac{d_0}{1+} \frac{d_1 z}{1+} \cdots \frac{d_{2M} z}{1}, \quad (3.62)$$

y

$$u_{2M}(z) - v_{2M}(z) = O(z^{2M+1}). \quad (3.63)$$

A partir de lo anterior los coeficientes  $d_k$  se pueden calcular siguiendo el *quotient-difference algorithm* o simplemente *qd-algorithm*. Llamamos  $e_0^{(i)} = 0$  para  $i = 0, \dots, 2M$  y  $q_1^{(i)} = a_{i+1}/a_i$  para  $i = 0, \dots, 2M - 1$ . A partir de estos dos vectores se determinan de forma iterativa los siguientes, a través de las expresiones

$$\begin{aligned} e_r^{(i)} &= q_r^{(i+1)} - q_r^{(i)} + e_{r-1}^{(i+1)}, \quad r = 1, \dots, M \quad i = 0, \dots, 2M - 2r. \\ q_r^{(i)} &= q_{r-1}^{(i+1)} \cdot e_{r-1}^{(i+1)} / e_{r-1}^{(i)}, \quad r = 2, \dots, M \quad i = 0, \dots, 2M - 2r - 1. \end{aligned} \quad (3.64)$$

De este modo, los coeficientes de la fracción continua  $d_k$  vienen dados por  $d_0 = a_0$  y

$$d_{2k-1} = -q_k^{(0)}, \quad d_{2k} = -e_k^{(0)}, \quad k = 1, \dots, M.$$

Si denotamos por  $x_n = p_n/q_n$  el valor de la fracción al truncar por el  $n$ -ésimo término, los valores de  $x_n$  pueden ser calculados tomando  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = d_0$  y  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = 1$ , y usando la fórmula recursiva  $p_k = d_{k+1}z$  y  $q_k = 1$ ,  $k \geq 2$ . Sin embargo, estos autores proporcionan la expresión equivalente:

$$A_{-1} = 0, \quad B_{-1} = 1, \quad A_0 = d_0, \quad B_0 = 1,$$

lo que nos lleva a

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + d_n z \cdot z \cdot A_{n-2} \\ B_n &= B_{n-1} + d_n z \cdot z \cdot B_{n-2} \end{aligned} \right\} n = 1, \dots, 2M,$$

por lo que obtenemos finalmente

$$v_{2M}(z) = A_{2M}/B_{2M}.$$

Por consiguiente, la estimación de  $f(t)$  viene dada por

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{T} \Re \left\{ \frac{A_{2M}}{B_{2M}} \right\}. \quad (3.65)$$

De la misma manera que se puede acelerar la convergencia de una serie de potencias mediante ciertos métodos, De Hoog utiliza un método para acelerar la convergencia de la fracción continua suponiendo un resto no nulo en el último término.

Sin embargo, estos procedimientos anteriores tienen ciertas deficiencias debidas al truncamiento del sumatorio o a errores de redondeo, como muestran Honig y Hirdes [8]. Es por esto que dichos autores desarrollan ciertos métodos empleados para la aceleración de convergencia, así como programas para el cálculo de parámetros óptimos. Esto último es de gran importancia, ya que una elección pobre de los parámetros provoca que este método no suponga ninguna mejora con respecto a métodos anteriores.



# Capítulo 4

## Implementación de los algoritmos

En este capítulo vamos a mostrar todos los programas realizados en MATLAB para desarrollar los algoritmos del capítulo 3 y expondremos aquí las conclusiones obtenidas. Para ello utilizaremos un conjunto de funciones test y sus correspondientes transformadas inversas de Laplace.

Presentaremos, además, gráficas y tablas que analizan la exactitud de las aproximaciones efectuadas por los diferentes métodos y comentaremos las ventajas y desventajas de cada uno.

### 4.1. Funciones Test

En esta sección proporcionamos la lista de las funciones que nos servirán de prueba para los distintos algoritmos que implementamos.

En la tabla siguiente se han recogido un buen número de funciones que permiten representar los comportamientos más significativos que se pueden producir cuando aplicamos los métodos que hemos programado.

Al final de este capítulo (sección 4.6) se recogerán los resultados más significativos obtenidos al aplicar los programas desarrollados a una serie de funciones seleccionadas para las pruebas. Dichos resultados se recogerán en tablas conteniendo el error absoluto cometido.

$i$	$\bar{f}_i(s)$	$f_i(t)$
1	$(s^2 + 1)^{-1/2}$	$J_0(t)$
2	$s^{-1/2}e^{-1/s}$	$(\pi t)^{-1/2} \cos(2\sqrt{t})$
3	$(s + \frac{1}{2})^{-1}$	$e^{-t/2}$
4	$1/((s + 0,2)^2 + 1)$	$e^{-0,2t} \sin t$
5	$s^{-1}$	1
6	$s^{-2}$	$t$
7	$(s + 1)^{-2}$	$te^{-t}$
8	$(s^2 + 1)^{-1}$	$\sin t$
9	$s^{-1/2}$	$(\pi t)^{-1/2}$
10	$s^{-1}e^{-5s}$	$H(t - 5)$
11	$s^{-1} \ln s$	$-C - \ln t$
12	$(s(1 + e^{-s}))^{-1}$	$g(t) = g(2 + t), g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$
13	$(s^2 - 1)(s^2 + 1)^{-2}$	$t \cos t$
14	$(s + \frac{1}{2})^{1/2} - (s + \frac{1}{4})^{1/2}$	$(e^{-t/4} - e^{-t/2})(4\pi t^3)^{-1/2}$
15	$e^{-4\sqrt{s}}$	$2e^{-4/t}(\pi t^3)^{-1/2}$
16	$\arctan 1/s$	$t^{-1} \sin t$
17	$1/s^3$	$\frac{1}{2}t^2$
18	$1/(s^2 + s + 1)$	$(2/\sqrt{3})e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$
19	$3/(s^2 - 9)$	$\sinh 3t$
20	$120/s^6$	$t^5$
21	$s/(s^2 + 1)$	$\frac{1}{2}t \sin t$
22	$(s + 1)^{-1} - (s + 1000)^{-1}$	$e^{-t} - e^{-1000t}$
23	$s/(s^2 + 1)$	$\cos t$
24	$1/(s - \frac{1}{4})$	$te^{t/4}$
25	$1/s\sqrt{s}$	$2\sqrt{(t/\pi)}$
26	$1/(s + 1)^{-1/2}$	$e^{-t}/(\sqrt{\pi t})$
27	$(s + 1)/s\sqrt{s}$	$(1 + 4t)/\sqrt{(\pi t)}$
28	$1/(s^2 + 1)^2$	$\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$
29	$1/s(s^2 + 1)^2$	$1 - e^{-t}(1 + t)$
30	$1/(s^3 - 8)$	$\frac{1}{12}e^{-t}[e^{3t} - \cos \sqrt{3}t - \sqrt{3} \cos \sqrt{3}t]$
31	$\ln[(s^2 + 1)/(s^2 + 4)]$	$2[\cos 2t - \cos t]/t$
32	$\ln(s + 1)/s$	$(1 - e^{-t})/t$
33	$(1 - e^{-s})/s^2$	$\begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$
34	$1/s(1 + e^s)$	$\begin{cases} 0 & \text{si } 2k < t < 2k + 1 \\ 1 & \text{si } 2k + 1 < t < 2k + 2 \end{cases} \forall k.$

## 4.2. Cuadratura de Gauss

A continuación comentaremos los pasos que se han seguido para la implementación del método de la cuadratura de Gauss.

Para desarrollar este método debemos determinar, fijado un valor de  $n$ , los nodos y pesos de la correspondiente fórmula de integración numérica. Puesto que los nodos son las raíces del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal, se pueden calcular mediante la relación de recurrencia dada en (3.9).

Por otra parte, para el cálculo de los pesos es necesario obtener el polinomio de interpolación de Lagrange de la función  $\bar{f}(s)$  que se quiera invertir. Los pesos son los llamados números de Christoffel y para obtenerlos se necesita el cálculo del residuo correspondiente al producto de cada elemento de la base de interpolación de Lagrange por la función exponencial.

El proceso, aunque simple, es muy costoso computacionalmente, por lo que es recomendable calcular los nodos y los pesos una única vez y utilizarlos cada vez que se ejecute nuevamente el programa.

Es muy importante comentar el hecho de que solo se puede aplicar este método a funciones que tengan un posible desarrollo como polinomio en la variable  $(1/s)$  o, de manera más general, en la forma

$$s^\mu \bar{f}(s) \approx \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r}{s^r}, \quad \mu \geq 0.$$

En otro caso el método proporcionará resultados incorrectos.

También es importante recordar que este método pierde precisión a medida que aumenta el valor de  $t$  y, normalmente, solo es válido para valores pequeños de  $t$ , aunque depende de cada función. Este efecto se agrava en el caso de funciones con comportamiento exponencial, como por ejemplo las funciones  $f_{19}(t)$  o  $f_{30}(t)$ .

Profundizando en estas dos restricciones, vemos que el método no es adecuado para las funciones  $\bar{f}_{10}(s)$ ,  $\bar{f}_{12}(s)$ ,  $\bar{f}_{33}(s)$ ,  $\bar{f}_{34}(s)$ .

Por ejemplo,  $\bar{f}_{34}(s)$  se expande como

$$\bar{f}_{34}(s) = +\frac{1}{2s} - \frac{1}{4} + \frac{s^2}{48} - \frac{s^4}{480} + \dots$$

que no se ajusta a la forma descrita anteriormente y, por tanto, podemos esperar un mal comportamiento, como se pone de manifiesto en la figura 4.1.

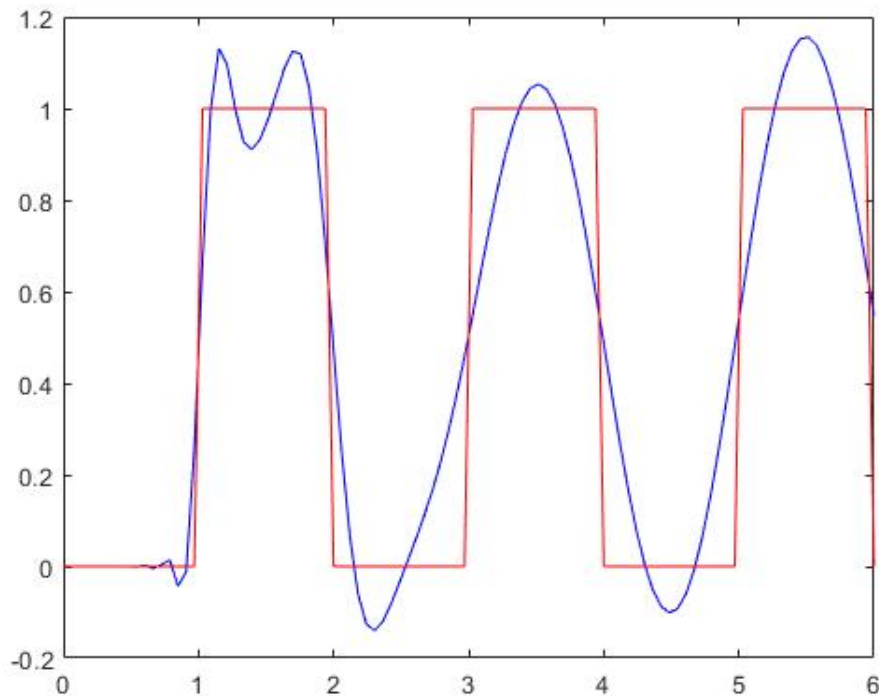


Figura 4.1: Comparación entre el resultado obtenido por el método de Gauss aplicado a  $\bar{f}_{34}(s)$  y el valor exacto de  $f_{34}(t)$ .

### Código MATLAB

El siguiente script ha sido programado por el autor en un intento de desarrollar los algoritmos obtenidos de forma teórica. Sin embargo, se ha de tener en cuenta que su implementación se ha llevado a cabo en un ordenador doméstico con una capacidad computacional reducida.

Por las pruebas realizadas, se ha observado que a partir de  $N = 12$  la ejecución de este programa requiere una gran cantidad de tiempo.

```

1 function Error=Gauss(g,N,uE)
2 % g es la transformada que se quiere invertir.
3 % uE es la transformada inversa exacta.
4 % N numero de nodos de la formula (N<=12).
5 t = [0.5,1,2,4,8,16,32,64]; % valores de t
6 f = @(u,t) g(u./t)./t; % Transformacion por teoria.
7 syms x u
8 p = Pol_ort_Gauss(N); % N-esimo polinomio ortogonal.
9 N_xi = double(vpasolve(p==0)); % Nodos en la variable (x).
10 N_si = 1./N_xi; % Nodos en la variable (1/s).
11
12 Yi = f(N_si,t); % Valores en los nodos y en cada t (Matriz).
13 Li = lagrange_Li([N_xi;0]); % Base de Lagrange
14 % Hay que agregar el cero por teoria
15 w = int_residuo(Li,N); % Calculo del valor del residuo
16 F = double(w(1:Nn))*Yi; % Regla de Gauss en forma matricial
17
18 plot(t,F,'b');
19 hold on
20 plot(t,uE(t),'r');
21 Error=abs(F-uE(t));

```

El programa utiliza otros tres scripts auxiliares para calcular los correspondientes polinomios ortogonales, los elementos de la base de Lagrange y los números de Christoffel mediante residuos de Cauchy. Dichos scripts se reproducen a continuación.

```

1 function Sol = Pol_ort_Gauss(n)
2 % Computa de forma recurrente los polinomios ortogonales
3 % Devuelve unicamente el n-esimo polinomo.
4 syms x
5 P = sym(zeros(1,n)); % vector con los Pn (todos 1:n)
6 P(1) = x-1; P(2) = 6*x^2-4*x+1;
7 for j = 2:n-1
8     P(j+1) = ((4*j+2)*x+(2/(2*j-1)))*P(j) + ...
9             ((2*j+1)/(2*j-1))*P(j-1);
9 end
10 Sol=simplify(P(n));

```

```

1 function sol=lagrange_Li(xi)
2 % Este programa devuelve las bases de interpolacion de ...
   Lagrange.
3 % para usarlas en formula gaussiana para inversa de Laplace.
4 % La variable es (1/s).
5 n = length(xi);
6 L = sym(zeros(1,n));
7 syms s
8 for i = 1:n
9     Pr = 1;
10    for j = 1:n
11        if j ≠ i
12            Pr = Pr .*(((1/s)-xi(j))./(xi(i)-xi(j)));
13        end
14    end
15    L(i) = Pr;
16 end
17 sol = simplify(L);

```

```

1 function R = int_residuo(f1,n)
2 % el programa calcula el residuo en el unico polo que ...
   tiene el polinomio
3 %     f(x) = exp(x) * f1(x);
4 % Por estar en la variable (1/s) tiene un polo de orden n ...
   en (1/s) = 0.
5 % El calculo del residuo se realiza conforme al Teorema de ...
   Cauchy.
6 syms s
7 f=simplify( exp(s)*f1*s^n );
8 df=diff(f,n-1,s);
9 R=double(subs(df,0)/factorial(n-1));

```

Los resultados obtenidos al ejecutar estos scripts para algunas de las funciones test se reflejan en las tablas de la sección 4.6, donde se podrán comparar con los resultados obtenidos con los otros métodos.

### 4.3. Evaluación de Integrales Trigonométricas

El siguiente método también está relacionado con la cuadratura de Gauss y se basa en la manipulación y evaluación de integrales trigonométricas. A continuación vamos a ver los pasos que hemos seguido para su implementa-

ción, omitiendo los aspectos teóricos que ya desarrollamos en el capítulo 3.

El objetivo es computar, de acuerdo con (3.16)

$$f(t) = \frac{2e^{ct}}{t} \sum_{n=0}^{\infty} I_n(t),$$

donde  $\psi(\omega) = -\mathfrak{J}\bar{f}(i\omega)$  y

$$I_n(t) = (-1)^n \int_{-1/2}^{1/2} \psi\left(\frac{\pi}{t}\left[u + n + \frac{1}{2}\right]\right) \cos \pi u \, du.$$

Obviamente no podremos computar los infinitos términos de la suma, por lo tanto habremos de introducir un parámetro de truncamiento de dicha suma, el cual denotaremos por  $M$ .

Además, las integrales  $I_n(t)$  deberán ser computadas mediante un buen método numérico. El método original, desarrollado por *Hurwitz y Zweifel*, utiliza una fórmula de cuadratura que lleva sus nombres. Esta fórmula de cuadratura está basada en los polinomios de Chebyshev y un desarrollo suyo puede encontrarse en [2]. Sin embargo, para este caso (y posteriores) se usará una fórmula de Gauss-Legendre con  $N = 300$ , la cual nos proporcionará resultados con una precisión aceptable.

El cálculo de 300 nodos y pesos, puede resultar muy costoso, por tanto, una mejor opción es calcularlos una única vez y utilizar los resultados cada vez que sea necesario.

La primera diferencia con el método anterior es la existencia de parámetros como  $c$ ,  $M$ ,  $N$ , de los cuales la solución va a ser muy dependiente. El parámetro  $c$  es una cota superior para la parte real de las singularidades de  $\bar{f}(s)$ . La principal ventaja de este método es que, fijados  $N$  y  $M$ , el método gana precisión a medida que aumenta  $t$ , al contrario que otros métodos que veremos, aunque dicha ganancia no sea siempre apreciable y pueda estar dominada por errores de discretización.

## Código MATLAB

```
1 function Error= Trig_integral(f,M,c,uE)
2 % f es la transformada que se quiere invertir.
3 % uE es la transformada inversa exacta.
4 % El numero de valores para t es por defecto 50.
5 % M valor del truncamiento del sumatorio.
6 % c cota superior de las singularidades de f.
7 t = [0.5,1,2,4,8,16,32,64]';
8 phi = @(w) -imag(f(c+1i.*w)); % Funcion impar del metodo.
9 In = 0;
10 % 300 Nodos y Pesos por Gauss-Legendre [-1,1]
11 [xi,wi] = Gauss_leg(300);
12 u = (xi./2)'; % Traslacion de los Nodos a [-1/2, 1/2].
13 for j = 0:M
14     A = phi((pi./t)*(u+j+.5)).*cos(pi.*u);
15     B = 0.5.*(A*wi); % suma matricial de la regla de Gauss.
16     In = In + B.*(-1)^j; % Suma de los In(t).
17 end
18 F = (2.*exp(c.*t)./t).*In; % Vector con los valores de f(t)
19 plot(t,F)
20 hold on
21 plot(t,uE(t),'r')
22 Error = abs(F-uE(t));
```

Además, se proporciona el script auxiliar para calcular los nodos y pesos para una regla de cuadratura de Gauss-Legendre. Este script también será utilizado en algunos de los siguientes programas.

```
1 function [xi,wi] = Gauss_leg(N)
2 % Proporciona N nodos (xi) y pesos (wi)
3 % en la forma de Gauss-Legendre [-1,1]
4 syms x
5 P=legendreP(N,x);
6 dp=diff(P,x);
7 xi=double(vpasolve(P==0));
8 wi=double(2./((1-xi.^2).*(subs(dp,xi)).^2));
```



## 4.4. Métodos de Extrapolación

### 4.4.1. P-Transformada de Levin

El siguiente método trata de aproximar la integral de Bromwich utilizando métodos de extrapolación. De igual manera que antes, ignoraremos los aspectos teóricos que ya fueron desarrollados en el capítulo anterior.

De acuerdo con (3.24), el objetivo es computar

$$P_k = \frac{e^{ct}}{\pi} \Re \left( \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^{(k-1)} \left[ \frac{I_{j+1}(t) e^{-i(j+1)t}}{\bar{f}(c+i(j+1))} \right]}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^{(k-1)} \left[ \frac{e^{-i(j+1)t}}{\bar{f}(c+i(j+1))} \right]} \right),$$

donde

$$I_{j+1}(t) = \int_0^{j+1} e^{ixt} \bar{f}(c+ix) dx,$$

puesto que  $P_k$  es la aproximación al valor de  $f(t)$ . Los parámetros en este caso son  $c$  y  $k$ , y los resultados van a depender en gran medida de las elecciones de los mismos.

Además, las integrales anteriores las calcularemos de nuevo mediante una cuadratura de Gauss-Legendre con  $N = 300$  para asegurar suficiente precisión.

Es necesario tener en cuenta que para que el programa funcione correctamente, se debe verificar la siguiente hipótesis:

$$x^\nu g(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{x^k}, \quad \nu > 0,$$

donde  $g(x) = \bar{f}(c+ix)$ , como ocurría en el caso del método de Gauss.

Por lo tanto, podemos esperar un mal comportamiento para aquellas funciones donde el primer método no era aplicable, es decir,  $\bar{f}_{10}(s)$ ,  $\bar{f}_{12}(s)$ ,  $\bar{f}_{33}(s)$ ,  $\bar{f}_{34}(s)$ . La representación del caso correspondiente a  $\bar{f}_{12}(s)$  se puede ver en la Figura 4.2.

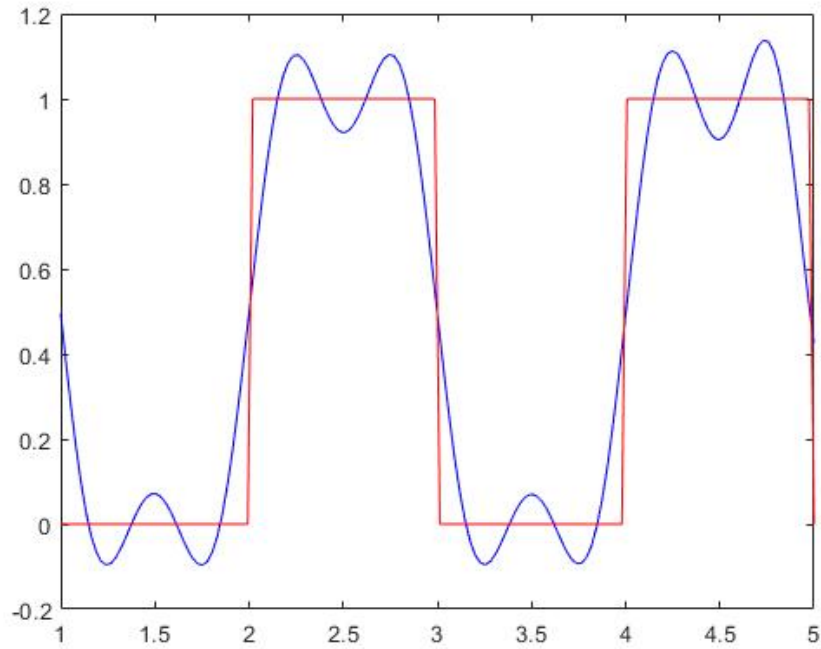


Figura 4.2: Comparación entre el resultado obtenido mediante la P-transformada aplicada a  $\bar{f}_{12}(s)$  y el valor exacto de  $f_{12}(t)$ .

Tras un primer estudio, puede parecer que este método proporciona resultados correctos para la función  $\bar{f}_{10}(s)$ , cuya transformada inversa  $f_{10}(t)$  es la función 'escalón de Heavyside', discontinua en  $t = 5$ . Sin embargo, si nos centramos en este punto, observamos un comportamiento erróneo de la solución, independientemente de los parámetros, en un entorno pequeño de  $t = 5$  (ver Figura 4.3).

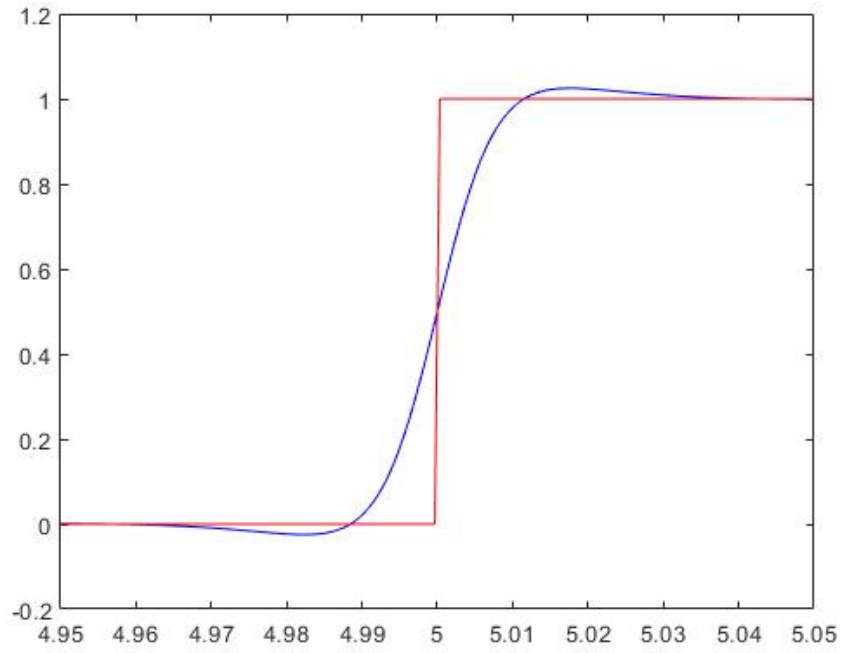


Figura 4.3: Comparación entre el resultado obtenido mediante la P-transformada aplicada a  $\bar{f}_{10}(s)$  y el valor exacto de  $f_{10}(t)$  en torno a  $t = 5$ .

## Código MATLAB

```
1 function Error = P_Levin(f,k,c,uE)
2 % f es la transformada que se quiere invertir.
3 % uE es la transformada inversa exacta.
4 % k valor de k del metodo (generalmente < 25)
5 % c cota superior de las singularidades de f
6 t=[0.5,1,2,4,8,16,32,64]';
7 % Nodos y Pesos por Gauss-Legendre [-1,1]
8 [xi,wi] = Gauss_leg(300);
9 B = 0; C = 0;
10 for j = 0:k % Aplicacion del metodo
11     % Traslacion de los Nodos al dominio [0,j+1]
12     x = (j+1)*0.5.*(xi+1);
13     M = (exp(1i*t*x') .* f(c+1i*x'))';
14     V = (j+1)*.5.*(wi'*M);
15     B = B + ((-1)^j)*nchoosek(k,j)*((j+1)^(k-1)).*...
16         (V' .* exp(-1i.*(j+1).*t) ./ f(c+1i*(j+1)));
17     C = C + ((-1)^j).*nchoosek(k,j).*((j+1)^(k-1)).*...
18         (exp(-1i.*(j+1).*t) ./ f(c+1i*(j+1)));
19 end
20 Pk=exp(c.*t') .* real(B./C)'./pi;
21
22 plot(t,Pk,'b')
23 hold on
24 plot(t,uE(t),'r')
25
26 Error=double(abs(Pk-uE(t')));
```

#### 4.4.2. mW-Transformada de Sidi

Este método resulta muy efectivo para la evaluación de la transformada inversa de Laplace. Además, puesto que todas nuestras funciones test  $f_i(t)$  son reales, solo va a ser necesario calcular una de las funciones  $u_{\pm}(t)$  definidas en la sección 3.3.2.

Siguiendo las indicaciones descritas en ese apartado, la única dificultad se encuentra a la hora de calcular

$$\psi(\omega_l) = \int_{\omega_l}^{\omega_{l+1}} e^{i\omega t} \bar{f}(c + i\omega) d\omega, \quad l = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

$$V(\omega_l) = \int_0^{\omega_l} e^{i\omega t} \bar{f}(c + i\omega) d\omega = \sum_{k=0}^{l-1} \psi(\omega_k), \quad l = 0, 1, \dots \quad (4.2)$$

Para el cómputo de estas integrales utilizaremos una fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre con  $N = 300$  nodos.

A partir de ese punto, el proceso para el cálculo de  $u(t)$  es iterativo. De esta forma

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{\pi} \Re(u(t)).$$

Cuando el valor de  $t$  es pequeño, las integrales anteriores pierden precisión y se recomienda aumentar el valor de  $c$  de forma progresiva. Esto proporcionará mejores resultados para valores de  $t$  cercanos a  $t = 0$ , pero a costa de empeorar la situación en aquellos más alejados.

```

1 function Error=mW_Sidi(f,c,L,uE)
2 % f es la transformada que se quiere invertir.
3 % uE es la transformada inversa exacta.
4 % L parametro que tiende a infinito
5 % c cota superior de las singularidades de f
6 l = 0:L;
7 Phi = zeros(1,L); V=Phi;
8 T = [0.5,1,2,4,8,16,32,64]; % Valores de t
9 Sol = zeros(1,length(T));
10 T0 = 0; % valor de t0 del metodo (normalmente = 0)
11 % Nodos y Pesos por Gauss-Legendre [-1,1]
12 [xi,wi] = Gauss_leg(300);
13 for it= 1:length(T)
14     t = T(it);
15     w = (l+1).*pi./(t-T0);
16     %w = ((sqrt(2)+sqrt(2+(l+1).*pi*t))./t).^2;
17     iw = w.^-1;
18     M = zeros(L,L); N=M;
19     for j = 1:L
20         x = ((w(j+1)-w(j))/2).*xi+(w(j+1)+w(j))/2;
21         Y = exp(li*t*x).*f(c+li*x);
22         Phi(j) = ((w(j+1)-w(j))/2).*sum(wi.*Y);
23
24         x2 = (w(j)/2).*xi+(w(j))/2;
25         Y2 = exp(li*t*x2).*f(c+li*x2);
26         V(j) = (w(j)/2).*sum(wi.*Y2);
27     end
28     M(:,1) = V./Phi;
29     N(:,1) = 1./Phi;
30     for n = 2:L
31         for j = 1:(L-n+1)
32             M(j,n) = (M(j+1,n-1)-M(j,n-1))/(iw(j+n-1)-iw(j));
33             N(j,n) = (N(j+1,n-1)-N(j,n-1))/(iw(j+n-1)-iw(j));
34         end
35     end
36     Sol(it) = real((M(1,end)./N(1,end))')*exp(c*t)./(pi);
37 end
38
39 plot(T,Sol,'b')
40 hold on
41 plot(T,uE(T),'r')
42
43 Error = (abs(Sol-uE(T)));

```

## 4.5. Métodos que involucran Transformadas de Fourier

En esta sección vamos a programar dos algoritmos diferentes, aunque basados en la misma idea, para la transformada inversa de Laplace de acuerdo con la sección 3.4.

En dicha sección se obtuvo la expresión (3.56), es decir

$$f(t) + E_3 = \frac{e^{ct}}{T} \left[ \frac{1}{2} \Re \bar{f}(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ \bar{f} \left( c + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \cos \left( \frac{k\pi t}{T} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \Im \left\{ \bar{f} \left( c + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \sin \left( \frac{k\pi t}{T} \right) \right],$$

donde  $c$ ,  $T$  son parámetros y además, para realizar el sumatorio necesitaremos un parámetro de truncamiento  $N$ .

Para implementar el primer método que vamos a ver, desarrollado por Crump, fijaremos en primer lugar una cota para el error relativo máximo que se desea cometer,  $E'$ . A continuación, determinaremos el valor de  $t$  más grande que se desea calcular ( $t_{max}$ ), y también habremos de calcular  $\gamma$ , que viene dado por la mayor de las partes reales de los polos de  $\bar{f}(s)$ .

Entonces, la elección que propone Crump consiste en tomar  $T$  tal que  $2T > t_{max}$  y

$$c = \gamma - \ln E'/2T.$$

Posteriormente, se procede a realizar el sumatorio hasta que se alcance la precisión requerida.

Este método presenta dos grandes inconvenientes. El primero es que la convergencia es, en general, muy lenta, por lo tanto, si se buscan soluciones con gran precisión, lo mejor sería usar otro método.

A priori, en todo el desarrollo teórico que se hizo no se especificó ninguna restricción o hipótesis previa, por lo que uno podría pensar que no las tiene, sin embargo, los coeficientes de las serie de Fourier se obtuvieron de un sumatorio infinito y De Hoog se dió cuenta de que el procedimiento formal para obtenerlos solo es válido cuando tenemos convergencia uniforme. Por lo

tanto, podemos esperar un mal comportamiento para ciertas funciones. Este es el caso de  $\bar{f}_2(s)$ ,  $\bar{f}_5(s)$ ,  $\bar{f}_9(s)$ ,  $\bar{f}_{10}(s)$ ,  $\bar{f}_{14}(s)$ ,  $\bar{f}_{26}(s)$ ,  $\bar{f}_{27}(s)$ .

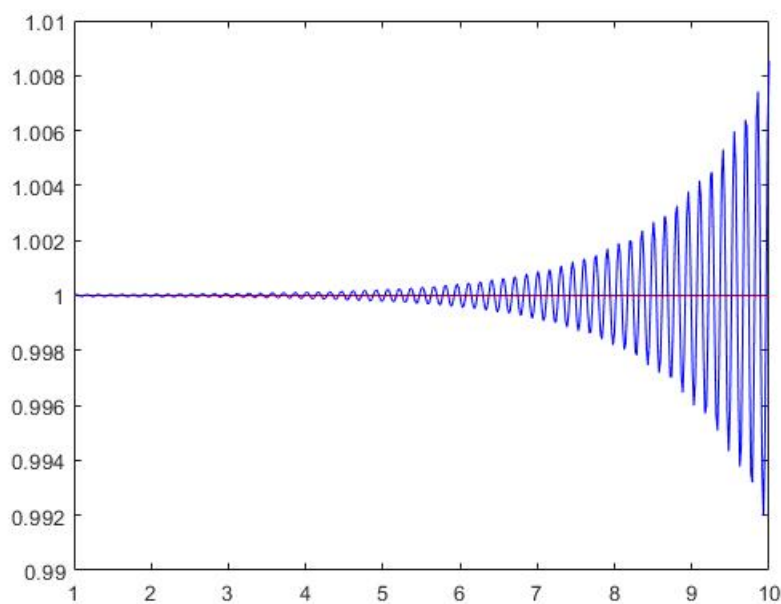


Figura 4.4: Comparación para  $\bar{f}_5(s)$  .

Este comportamiento erróneo no siempre se aprecia fácilmente. Por ejemplo, con  $\bar{f}_{26}(s)$ , obtenemos a priori resultados satisfactorios, pero si estudiamos el comportamiento a una escala más pequeña observamos un comportamiento oscilatorio (ver Figura 4.5).



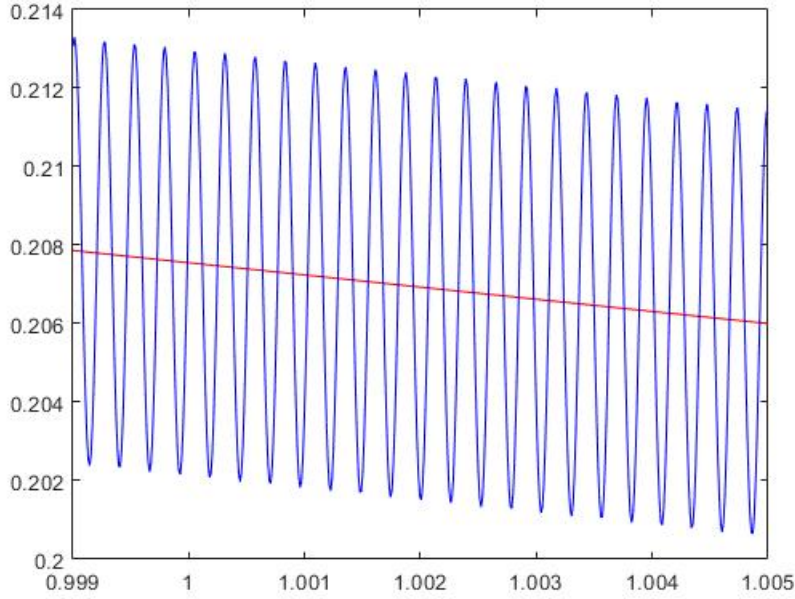


Figura 4.5: Comparación para  $\bar{f}_{26}(s)$ .

El segundo método (ver 3.4.3) utiliza la misma fórmula que el anterior pero en su versión compleja, es decir

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{T} g(t),$$

donde  $g(t)$  puede ser vista como una serie de potencias de la forma

$$g(t) = \frac{1}{2} \bar{f}(\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}\left(\gamma + \frac{ik\pi}{T}\right) \exp \frac{ik\pi t}{T} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (4.3)$$

e intenta aproximar la serie de potencias mediante una fracción continua. El proceso completo ya fue descrito en el capítulo anterior con todo detalle, por lo que no profundizaremos en él. Al final, la solución vendrá aproximada por

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{T} \Re \left\{ \frac{A_{2M}}{B_{2M}} \right\}, \quad (4.4)$$

donde  $A_{2M}$  y  $B_{2M}$  se obtienen directamente del método.

Observamos, por tanto, que tenemos dos parámetros  $c$  y  $T$ , además de un

tercer parámetro de truncamiento  $M$ .

Esta implementación del método conlleva ciertas ventajas con respecto a la anterior. La primera es una reducción considerable de la carga computacional, lo cual ya es un logro importante, pero además, puesto que la aproximación de funciones por fracciones continuas no requiere de la manipulación de una suma infinita, este método va a funcionar correctamente para las funciones anteriormente mencionadas  $\bar{f}_2(s)$ ,  $\bar{f}_5(s)$ ,  $\bar{f}_9(s)$ ,  $\bar{f}_{10}(s)$ ,  $\bar{f}_{14}(s)$ ,  $\bar{f}_{26}(s)$ ,  $\bar{f}_{27}(s)$ .

Por otro lado, también encontramos desventajas, principalmente la dependencia del método de los parámetros elegidos.

## Código MATLAB

```
1 function Error = Crump(f,tmax,n,tol,landa,uE)
2 % f es la transformada que se quiere invertir.
3 % uE es la transformada inversa exacta.
4 % n truncamiento de la suma
5 % landa es exactamente la parte real mas grande delas ...
   singularidades de f
6 % tol error relativo que se desea cometer
7 % Si n no es lo suficientemente grande, tol no se alcanza
8 % tmax se recomienda el doble del maximo valor de t (tmax ...
   = 128)
9 T=ceil(tmax/2)+5;
10 c=landa-log(tol)/(2*T);
11 t=[0.5,1,2,4,8,16,32,64];
12
13 SUMA=real(f(c))/2;
14 for j=1:n
15     SUMA=SUMA+real(f(c+(j*pi*1i/T))).*cos(j*pi.*t./T)...
16         -imag(f(c+(j*pi*1i/T))).*sin(j*pi.*t./T);
17 end
18 F=exp(c.*t).*SUMA./T;
19 plot(t,F,'b')
20 hold on
21 plot(t,uE(t),'r')
22 Error=abs(F-uE(t));
```

```

1 function Error=De_Hoog(f,c,M,Tmax,uE)
2 % f es la transformada que se quiere invertir.
3 % uE es la transformada inversa exacta.
4 % M truncamiento de la fraccion continua.
5 % c cota superior de las singularidades de f.
6 % Tmax se recomienda 128 o superior (2*tmax)
7 T=ceil(Tmax/2)+5;
8 t = [0.5,1,2,4,8,16,32,64];
9 a = zeros(1,2*M); d = zeros(1,2*M);
10 E = zeros(2*M+1,2*M+1);
11
12 a(1) = (1/2).*f(c);
13 for j = 1:2*M
14     a(j+1) = f(c+ 1i*pi*j/T);
15 end
16 E(1:end-1,2) = a(2:end)./a(1:end-1);
17 for r = 3:2*M+1 % indice columna
18     if mod(r,2) == 1 % columnas impares ( son las e )
19         for j = 1:2*M+1-(r-1) % indice fila
20             E(j,r) = E(j+1,r-1)-E(j,r-1)+E(j+1,r-2);
21         end
22     else
23         for j = 1:2*M+1-(r-1) % indice fila
24             E(j,r) = E(j+1,r-2)*E(j+1,r-1)/E(j,r-1);
25         end
26     end
27 end
28 d(1) = a(1);
29 for k = 1:2*M
30     d(k+1) = -E(1,k+1);
31 end
32 z = exp(1i.*pi.*t./T);
33 A = zeros(2*(M+1),length(t)); B=A;
34 A(1,:) = 0; B(1,:) = 1; A(2,:) = d(1); B(2,:) = 1;
35 for n = 1:2*M
36     A(n+2,:) = A(n+1,:) + d(n+1).*z.*A(n,:);
37     B(n+2,:) = B(n+1,:) + d(n+1).*z.*B(n,:);
38 end
39 FF = exp(c.*t).*real(A(end,)./B(end,))./T;
40 plot(t,FF)
41 hold on
42 plot(t,uE(t),'r')
43
44 Error = abs(FF-uE(t));

```

## 4.6. Resumen de los resultados obtenidos

En esta sección recogemos en una serie de tablas los resultados obtenidos para las funciones test  $\bar{f}_1(s)$ ,  $\bar{f}_3(s)$ ,  $\bar{f}_{11}(s)$ ,  $\bar{f}_{15}(s)$ ,  $\bar{f}_{25}(s)$ ,  $\bar{f}_{30}(s)$ ,  $\bar{f}_{34}(s)$ , que hemos seleccionado de entre las 34 de la tabla, con ánimo de no ser excesivamente exhaustivos.

En estas tablas se recoge el orden del error absoluto cometido en la aproximación de las funciones inversas en los puntos de la forma  $2^{k-1}$ , con  $k = 0, 1, \dots, 7$ .

La conclusión más importante es que los métodos anteriores funcionan muy bien para la gran mayoría de las funciones, aunque en algunos casos existen restricciones, vistas ya en el capítulo anterior, que restringen su buen comportamiento en determinados programas.

Es recomendable utilizar más de un método para cada una de las funciones con el fin de intentar asegurar la fiabilidad de los resultados. También es conveniente ejecutar los programas modificando ligeramente los valores de los parámetros, pues esos pequeños cambios pueden mejorar substancialmente el resultado.

t	Gauss	T I	Crump	De Hoog	P-Levin	Sidi
0.5	$10^{-11}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-15}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$
1	$10^{-11}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-14}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$
2	$10^{-11}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-13}$	$10^{-10}$	$10^{-9}$
4	$10^{-11}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-13}$	$10^{-10}$	$10^{-12}$
8	$10^{-10}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-12}$	$10^{-10}$	$10^{-17}$
16	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-10}$	$10^{-10}$	$10^{-14}$
32	$10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-14}$
64	$10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$

Tabla 4.1: Comparación de métodos para  $f_1(t)$

t	Gauss	T I	Crump	De Hoog	P-Levin	Sidi
0.5	$10^{-11}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-14}$	$10^{-10}$	$10^{-14}$
1	$10^{-11}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
2	$10^{-11}$	$10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-15}$	$10^{-15}$
4	$10^{-11}$	$10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$	$10^{-16}$
8	$10^{-11}$	$10^{-8}$	$10^{-6}$	$10^{-15}$	$10^{-16}$	$10^{-16}$
16	$10^{-11}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-15}$	$10^{-18}$	$10^{-18}$
32	$10^{-8}$	$10^{-13}$	$10^{-11}$	$10^{-18}$	$10^{-19}$	$10^{-22}$
64	$10^{-5}$	$10^{-19}$	$10^{-19}$	$10^{-21}$	$10^{-26}$	$10^{-29}$

Tabla 4.2: Comparación de métodos para  $f_3(t)$

t	Gauss*	T I	Crump	De Hoog	P-Levin	Sidi
0.5	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-11}$	$10^{-9}$	$10^{-11}$
1	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-12}$	$10^{-14}$
2	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
4	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
8	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
16	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
32	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-13}$
64	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-10}$	$10^{-10}$	$10^{-12}$

Tabla 4.3: Comparación de métodos para  $f_{11}(t)$

t	Gauss	T I	Crump	De Hoog	P-Levin	Sidi
0.5	$10^{-10}$	$10^{-16}$	$10^{-10}$	$10^{-13}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$
1	$10^{-8}$	$10^{-16}$	$10^{-10}$	$10^{-16}$	$10^{-13}$	$10^{-16}$
2	$10^{-7}$	$10^{-17}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$	$10^{-15}$	$10^{-16}$
4	$10^{-5}$	$10^{-16}$	$10^{-10}$	$10^{-14}$	$10^{-16}$	$10^{-15}$
8	$10^{-4}$	$10^{-16}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$	$10^{-15}$	$10^{-15}$
16	$10^{-4}$	$10^{-17}$	$10^{-10}$	$10^{-14}$	$10^{-16}$	$10^{-16}$
32	$10^{-4}$	$10^{-17}$	$10^{-10}$	$10^{-13}$	$10^{-12}$	$10^{-14}$
64	$10^{-3}$	$10^{-18}$	$10^{-10}$	$10^{-13}$	$10^{-11}$	$10^{-12}$

Tabla 4.4: Comparación de métodos para  $f_{15}(t)$

t	Gauss	T I	Crump	De Hoog	P-Levin	Sidi
0.5	$10^{-4}$	$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-12}$	$10^{-11}$	$10^{-13}$
1	$10^{-4}$	$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
2	$10^{-4}$	$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-15}$	$10^{-14}$
4	$10^{-3}$	$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
8	$10^{-3}$	$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
16	$10^{-3}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$
32	$10^{-3}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-13}$
64	$10^{-3}$	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$	$10^{-12}$

Tabla 4.5: Comparación de métodos para  $f_{25}(t)$

t	Gauss	T I	Crump	De Hoog	P-Levin	Sidi
0.5	$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{-7}$	$10^{-13}$	$10^{-10}$	$10^{-14}$
1	$10^{-13}$	$10^{-13}$	$10^{-7}$	$10^{-14}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$
2	$10^{-12}$	$10^{-12}$	$10^{-6}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
4	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-4}$	$10^{-11}$	$10^{-12}$	$10^{-14}$
8	$10^{+5}$	$10^{-5}$	$10^{-1}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$
16	$10^{+12}$	$10^{+2}$	$10^{+6}$	$10^{+1}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$
32	$10^{+26}$	$10^{+17}$	$10^{+20}$	$10^{+15}$	$10^{+15}$	$10^{+9}$
64	$10^{+54}$	$10^{+45}$	$10^{+48}$	$10^{+44}$	$10^{+44}$	$10^{+39}$

Tabla 4.6: Comparación de métodos para  $f_{30}(t)$

Para el caso anterior, la función  $f_{30}(t)$  es de tipo exponencial, y es por eso que para valores grandes el error absoluto se dispara. En este caso repetiremos los resultados utilizando en su lugar el valor del error relativo.

t	Gauss	T I	Crump	De Hoog	P-Levin	Sidi
0.5	$10^{-13}$	$10^{-13}$	$10^{-8}$	$10^{-13}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$
1	$10^{-13}$	$10^{-13}$	$10^{-8}$	$10^{-13}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$
2	$10^{-13}$	$10^{-12}$	$10^{-9}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$	$10^{-14}$
4	$10^{-8}$	$10^{-12}$	$10^{-8}$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
8	$10^{-1}$	$10^{-11}$	$10^{-9}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
16	1	$10^{-10}$	$10^{-8}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$	$10^{-14}$
32	1	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-12}$	$10^{-12}$	$10^{-14}$
64	1	$10^{-7}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$	$10^{-10}$	$10^{-14}$

Tabla 4.7: Comparación de métodos para  $f_{30}(t)$  con error relativo.

Podemos observar que Gauss proporciona malos resultados para valores grandes de  $t$ , agravados por el carácter exponencial de  $f(t)$ .

t	Gauss	T I	Crump	De Hoog?	P-Levin	Sidi
0.5	*	$10^{-1}$	$10^{-5}$	$10^{-14}$	*	$10^{-12}$
1	*	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-14}$	*	$10^{-12}$
2	*	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	*	$10^{-12}$
4	*	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	*	$10^{-12}$
8	*	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	*	$10^{-12}$
16	*	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	*	$10^{-12}$
32	*	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	*	$10^{-12}$
64	*	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-2}$	*	$10^{-12}$

Tabla 4.8: Comparación de métodos para  $f_{34}(t)$

# Conclusiones

Los objetivos fundamentales que se planteaban con este trabajo eran, por una parte, analizar los algoritmos básicos existentes para determinar la transformada inversa de Laplace a través de fórmulas de integración numérica y, por otro lado, programar de forma autónoma dichos métodos, interpretando los resultados obtenidos. Para desarrollar esos objetivos se han realizado tres fases que dieron lugar, además, a la consecución de otros objetivos parciales.

La primera fase del trabajo tenía como propósito adquirir los fundamentos teóricos necesarios que permitieran abordar el objetivo fundamental que se pretendía. Para ello, se profundizó en las nociones básicas y las propiedades fundamentales asociadas con la transformada de Laplace y su inversa. Eso incluyó el conocimiento detallado de fórmulas de inversión, con especial énfasis en la fórmula integral de Bromwich. Por otra parte, estos conocimientos básicos incluyeron también el repaso de las nociones de integración numérica, ya conocidas por el autor a través de las materias de la titulación. El desarrollo de esta primera fase se plasma en los Capítulos 1 y 2 de la memoria y permitió adquirir al autor la formación necesaria para abordar las cuestiones posteriores.

La segunda fase del trabajo consistió en el análisis de los métodos principales que se proponen en la literatura científica para invertir la transformada de Laplace a través de fórmulas de cuadratura. Durante esta fase, se pudo comprobar que la bibliografía sobre esta cuestión es escasa y, además, se constató que en ciertas ocasiones hay notaciones confusas o errores que se transmiten de nuevo cuando se citan otra vez los trabajos originales. Pese a las dificultades que provocan estas situaciones, finalmente fue posible la comprensión correcta de los fundamentos de 6 métodos diferentes de aproximación, con la suficiente profundidad como para que el autor realizase de



forma autónoma los programas correspondientes. Las características básicas de los métodos analizados se reflejan en el Capítulo 3 y en él se pueden observar la variedad de las técnicas matemáticas que se incluyen y que el autor ha tenido que asimilar.

La última fase del trabajo, que se reflejó en el desarrollo del Capítulo 4, es la más práctica, pues se desarrollaron los programas en MATLAB que permitieron la implementación de todos los algoritmos analizados previamente. No se trató solo de implementar directamente esos algoritmos, sino que se incorporaron mejoras que permitieron una mayor eficiencia en alguno de los cálculos. Una vez diseñados los programas correspondientes, se pasaron a realizar los ensayos de prueba, en los que se trabajó con un número amplio (34) de funciones test extraídas de las tablas de las transformadas. Los resultados de estos ensayos nos llevan a concluir que, en general, todos los métodos analizados funcionan con una precisión muy adecuada, pero permiten también observar las dificultades que se presentan con alguno de los métodos para ciertos tipos de funciones que no se ajustan a las características específicas de cada método.

En la fase de prueba de los algoritmos se observó también cómo la eficiencia depende en gran medida de la elección de parámetros óptimos o la aceleración de la convergencia. Estos procesos pueden llevar a consideraciones teóricas tan extensas como las de los propios métodos, por lo que no se pudieron abordar en su totalidad, pero es una cuestión de gran interés que sería muy adecuada para una ampliación posterior de este trabajo.

# Bibliografía

- [1] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. *Operational Methods in Applied Mathematics*, Oxford University Press, London, 2nd ed. (1953).
- [2] Cohen, Alan M. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Numerical Methods and Algorithms 5, Springer, New York (2007).
- [3] Crump, K.S. *Numerical Inversion of Laplace Transforms using a Fourier Series Approximation*, J. Assoc. Comput., (1995) 1193-1198.
- [4] De Hoog, F.R., Knight, J.H. and Stokes, A.N. *An improved method for Numerical Inversion of Laplace Transforms*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., (1982) 357-366.
- [5] Ditkin, V.A. and Prudnikov, A.P. *Operational Calculus in Two Variables and its Applications*, 2nd ed. Academic Press, N.Y., (1962).
- [6] Dubner, R. and Abate, J. *Numerical Inversion of Laplace Transforms by relating them to the Fourier Cosine Transform*, JACM, (1968) 115-123.
- [7] Durbin, F. *Numerical Inversion of Laplace Transforms: efficient improvement to Dubner and Abate's method*, Comp. J., (1974) 371-376.
- [8] Honig, G. and Hirdes, U. *A method for the Numerical Inversion of Laplace Transforms*, J. Comput. Appl. Math., (1984) 113-132.
- [9] Hurwitz, H., Jr. and Zweifel, P.F. *Numerical Quadrature of Fourier Transform Integrals*, s, MTAC, (1956) 140-149.
- [10] Levin, D. . *Numerical inversion of the Laplace Transform by accelerating the convergence of Bromwich's integral*, J. Comp. Appl. Math., (1975) 247-250.

- [11] Post, E.L. *Generalized differentiation*, Trans. Am. Math. Soc., (1930) 723-781.
- [12] Salzer, H.E. *Orthogonal Polynomials arising in the numerical Inversion of Laplace Transforms*, M. T. A. C., (1955) 164-177.
- [13] Schmittroth, L.A. *Numerical inversion of Laplace Transforms*, Comm. ACM, (1960) 171-173.
- [14] Sidi, A. *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, (2003).
- [15] Widder, D.V. *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton, (1941).