

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

TRABAJO FIN DE GRADO DE MATEMÁTICAS

Condicionamiento con modelos de probabilidades imprecisas

Autor:
Pablo MENÉNDEZ

Tutor:
Ignacio MONTES

7 de junio de 2022



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Índice general

Resumen	2
1. Previsiones inferiores coherentes	3
1.1. Conceptos básicos de probabilidad	3
1.2. Previsiones inferiores coherentes	8
1.3. Condicionamiento de previsiones inferiores coherentes	19
2. Condicionamiento de previsiones inferiores 2-monótonas	26
2.1. Previsiones inferiores 2-monótonas	26
2.2. Extensión natural y regular	32
2.3. Casos particulares	40
2.3.1. Intervalos de probabilidad	40
2.3.2. Modelo pari mutuel	50
2.3.3. Modelo de la variación total	56
3. Condicionamiento de previsiones inferiores completamente monótonas	61
3.1. Previsiones inferiores completamente monótonas	61
3.2. Extensión natural y regular	68
3.3. Medidas de posibilidad	73
3.3.1. Regla de Zadeh	75
3.3.2. Regla de Hisdal	78
3.3.3. Regla de Nguyen	79
3.4. Otros casos particulares	81
3.4.1. Modelo linear vacuous	82
3.4.2. Conjuntos aleatorios	87
4. Conclusiones	95
Bibliografía	98
A. Cálculos	100

Resumen

La teoría de la probabilidad, desarrollada e implementada desde hace siglos, permite modelizar experimentos en los que hay incertidumbre acerca del resultado. No obstante, son muchas las situaciones no ideales en las que la falta de información hace que la probabilidad que modela el experimento no esté perfectamente determinada. Es en estos casos cuando entra en juego la teoría de las probabilidades imprecisas. Desarrollada en las últimas décadas, esta teoría abarca aquellos modelos que generalizan la teoría de la probabilidad bajo falta de información. El objetivo de este trabajo consiste en adentrarnos en algunos de estos modelos de probabilidades imprecisas, estudiando cómo se construyen, cuál es su interpretación, cuáles son sus propiedades..., y haciendo especial hincapié en cómo se ven modificados bajo la llegada de nueva información, es decir, al ser condicionados.

El trabajo se dividirá en tres capítulos. El Capítulo 1 servirá como introducción a la teoría de las probabilidades imprecisas, presentándose el modelo básico a partir del cual se construyen el resto: las previsiones inferiores coherentes. Cuando ya tengamos las nociones básicas, en el Capítulo 2 nos adentraremos en un caso particular de previsiones inferiores coherentes, las previsiones inferiores 2-monótonas, cuyas útiles propiedades les aportan gran interés. Finalmente, en el Capítulo 3 iremos más allá y estudiaremos un caso particular de las previsiones inferiores 2-monótonas, las previsiones inferiores completamente monótonas. Este modelo está inmerso en otras teorías alternativas, como son la teoría de la evidencia o la teoría de la posibilidad, que hacen que su estudio merezca la pena.

A lo largo del trabajo se incluirán resultados teóricos en forma de proposiciones, lemas, toemas y corolarios, algunos tomados de la literatura y otros desarrollados por el propio autor. Aquellos resultados en los que la demostración se vea omitida son considerados extensamente conocidos en el ámbito de las probabilidades imprecisas. Por otro lado, los resultados propios serán identificados por la etiqueta [*Propio*]. Además, en todo momento se incluirán ejemplos que traten de clarificar los desarrollos teóricos. Para que dichos ejemplos fluyan y no sean tediosos, los cálculos adicionales sin interés en lo que en cada momento se quiera ejemplificar se han añadido en un apéndice al que se hará referencia durante el trabajo

Capítulo 1

Previsiones inferiores coherentes

En este primer capítulo se introducen los conceptos principales de la teoría de previsiones inferiores coherentes y de su condicionamiento. En la Sección 1.1 se hace un breve resumen de la teoría básica de la probabilidad y se presenta la interpretación comportamental de Bruno de Finetti ([1]), muy utilizada a lo largo del trabajo. En la Sección 1.2 se dan las definiciones iniciales y propiedades más importantes de la teoría de previsiones inferiores, incidiéndose en la importancia del concepto de coherencia para conseguir un modelo autoconsistente. Finalmente, en la Sección 1.3 se introduce el condicionamiento de las previsiones inferiores coherentes y se establecen los criterios para que el modelo condicionado y el modelo original sean compatibles, presentándose los dos principales métodos de condicionamiento: la extensión natural y la extensión regular.

1.1. Conceptos básicos de probabilidad

Comenzamos introduciendo el concepto de **espacio de probabilidad**, modelo matemático asociado a un experimento aleatorio. Las tres componentes que determinan un espacio de probabilidad son las siguientes:

1. Espacio muestral (Ω): conjunto de resultados experimentales posibles. Si, por ejemplo, consideramos el experimento basado en lanzar un dado de parchís y observar el número correspondiente a la cara superior del dado, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. σ -álgebra de sucesos asociados al experimento (\mathcal{A}). Un suceso asociado a un experimento aleatorio (o suceso de interés) es cualquier enunciado relativo a la realización del experimento, tal que una vez realizado éste pueda decirse si es cierto o no lo es. Continuando con el ejemplo anterior, los enunciados $A = \textit{ha salido un número impar}$, $B = \textit{ha salido un 3}$, o $C = \textit{ha salido un número superior o igual a 4}$, son posibles sucesos asociados al experimento. Cada suceso ha de poder identificarse

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

con el subconjunto de Ω formado por los resultados para los que su aparición en la realización del experimento llevaría a concluir que el suceso ha ocurrido. En nuestro ejemplo: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$.

Para que los sucesos de interés asociados a un experimento aleatorio sean manejables y para unificar su tratamiento matemático se exige que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tenga estructura de σ -álgebra de conjuntos de Ω , es decir:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$, entonces $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{A}$.

Siguiendo con nuestro espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, un ejemplo de σ -álgebra es:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\},$$

y un ejemplo de familia de sucesos que no tienen estructura de σ -álgebra es (no satisface las propiedades 2 y 3):

$$\mathcal{A}^* = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}.$$

Dado un espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio y una σ -álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, diremos que (Ω, \mathcal{A}) constituye un **espacio probabilizable**.

3. Probabilidad (P). Se introduce con el fin de comparar la verosimilitud de ocurrencia de unos sucesos con respecto a otros en una realización experimental. La definición básica a partir de la cual se construye el desarrollo teórico y de la cual derivan los resultados y conclusiones que establecen las reglas de cálculos de probabilidades es la **definición axiomática de probabilidad (de Kolmogorov)**: una probabilidad asociada a un espacio probabilizable (Ω, \mathcal{A}) es una aplicación $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ cumpliendo los tres axiomas siguientes:

1. Axioma de no-negatividad:

$$\forall A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0.$$

2. Axioma de normalización:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Axioma de σ -aditividad:

$$\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ tal que } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j : P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

En este trabajo, salvo que se diga lo contrario, trabajaremos con espacios muestrales finitos, $|\Omega| < \infty$, para los cuales el axioma de σ -aditividad se convierte en:

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

3. Axioma de aditividad finita:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \text{ tal que } A \cap B = \emptyset : P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Además, existen distintos enfoques o interpretaciones que nos permiten comprender mejor el concepto de probabilidad:

- Interpretación clásica de probabilidad (de Laplace). Basada en el principio de racionalidad, por el cual se asume que todos los posibles resultados son igualmente verosímiles. Se define la probabilidad del suceso $A \in \mathcal{A}$ como el cociente:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables a la ocurrencia de } A}{\text{n}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

- Interpretación frecuentista de probabilidad (de Von Mises). Basada en la admisión de que el experimento considerado puede repetirse indefinidamente en condiciones idénticas. Se define la probabilidad del suceso $A \in \mathcal{A}$ como la frecuencia relativa de A cuando el número de repeticiones tiende a infinito:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(A),$$

donde n es el número de veces que se repite el experimento, y

$$f^{(n)}(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de realizaciones en las que ha ocurrido } A}{n}.$$

- Interpretación subjetiva de probabilidad (de Jeffreys). Basada en la idea de que la probabilidad de un suceso no es algo característico del mismo, sino que es asignada en base a la información y evidencias disponibles. Se define la probabilidad del suceso $A \in \mathcal{A}$ como el grado de creencia del sujeto de que va a ocurrir el suceso A en cierta realización experimental.

A su vez, las probabilidades subjetivas pueden abordarse tomando diferentes enfoques. Uno de ellos cobrará especial importancia en el desarrollo de este trabajo, la **interpretación comportamental de probabilidad (de Bruno de Finetti)** ([1]).

En la teoría comportamental de la probabilidad, una variable aleatoria, o como también nos referiremos, una apuesta, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, representa una recompensa que depende del resultado del experimento, es decir, se obtiene el valor $f(\omega)$ si el resultado del experimento es $\omega \in \Omega$. Denotaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ al conjunto de apuestas en Ω . Definimos el operador esperanza de f como:

$$E_P(f) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)P(\{\omega\}).$$

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

Si consideramos la variable aleatoria indicadora de un evento $A \in \mathcal{A}$, $f = I_A$, dada por:

$$f(\omega) = I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces se cumple $E_P(I_A) = P(A)$. Dado que una probabilidad P es equivalente a su operador esperanza E_P , de aquí en adelante y para cualquier apuesta f denotaremos $P(f) = E_P(f)$. Para el caso concreto de la variable indicadora de eventos tendremos: $P(I_A) = E_P(I_A) = P(A)$.

En la interpretación comportamental, dada una apuesta f se define su probabilidad, o previsión, $P(f) = E_P(f)$, como el precio justo de compra/venta de dicha apuesta f . Si compramos f por un precio $P(f)$ y el resultado experimental resulta ser $\omega \in \Omega$, el beneficio será $f(\omega) - P(f)$, mientras que el beneficio esperado será $P(f - P(f)) = P(f) - P(f) = 0$. Por otro lado, si vendemos f por un precio $P(f)$ y el resultado experimental resulta ser $\omega \in \Omega$, el beneficio será $P(f) - f(\omega)$, y el beneficio esperado $P(P(f) - f) = P(f) - P(f) = 0$.

Si compramos ahora f por un precio $P(f) - \epsilon$ ($\epsilon > 0$), el beneficio será $f - (P(f) - \epsilon)$, y el beneficio esperado $P(f - (P(f) - \epsilon)) = P(f - P(f)) + \epsilon = \epsilon > 0$. Estamos comprando f por un precio inferior al que consideramos justo, y de ahí que se espere que obtengamos un beneficio positivo. Análogamente, si vendemos f por $P(f) + \epsilon$, el beneficio obtenido será $(P(f) + \epsilon) - f$, y el beneficio esperado $P((P(f) + \epsilon) - f) = P(P(f) - f) + \epsilon = \epsilon > 0$. Estamos vendiendo f por un precio superior al que consideramos justo, y de ahí que se espere que obtengamos un beneficio positivo.

De esto se concluye que $P(f)$ delimita los precios de compra y venta aceptables para el sujeto. El beneficio esperado de compra de una apuesta f será positivo si el precio de compra es inferior a $P(f)$, siendo en ese caso una transacción considerada aceptable. Si el precio de compra es superior a $P(f)$ entonces el beneficio esperado será negativo y la transacción dejará de ser considerada aceptable. Análogamente ocurre para los precios de venta.

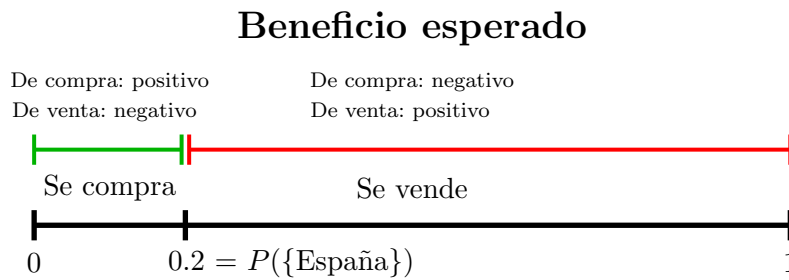
Precio de compra	Beneficio esperado	Resultado
$P(f)$	$P(f - P(f))$	0 (justa)
$P(f) + \epsilon$	$P(f - P(f) - \epsilon)$	$-\epsilon < 0$ (no aceptable)
$P(f) - \epsilon$	$P(f - P(f) + \epsilon)$	$\epsilon > 0$ (aceptable)

Precio de venta	Beneficio esperado	Resultado
$P(f)$	$P(P(f) - f)$	0 (justa)
$P(f) + \epsilon$	$P(P(f) + \epsilon - f)$	$\epsilon > 0$ (aceptable)
$P(f) - \epsilon$	$P(P(f) - \epsilon - f)$	$-\epsilon < 0$ (no aceptable)

Como ejemplo, establezcamos que la probabilidad de que la Selección Española sea campeona de la Copa Mundial de Fútbol de Qatar 2022 es $P(\{\text{España}\}) = 0.2$.

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

Al asignar dicha probabilidad, la interpretación comportamental nos dice que 0.2 es el precio justo de una apuesta en la que se obtiene 1 euro si España sale campeona y 0 euros en caso contrario. Para ser consecuentes con dicha asignación hemos de comprar la apuesta por un precio inferior a 0.2, pero no superior. Análogamente, si queremos vender la apuesta, ha de ser por un precio superior a 0.2, nunca inferior. Esquemáticamente:



Dado un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ y un conjunto de apuestas \mathcal{K} en Ω de manera que \mathcal{K} es un espacio lineal¹, diremos que una función real P definida en \mathcal{K} es una **previsión lineal** si cumple las siguientes condiciones:

- (P1) $P(f + g) = P(f) + P(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{K}$,
- (P2) $P(f) \geq \inf f \quad \forall f \in \mathcal{K}$,
- (P3) $P(\lambda f) = \lambda P(f) \quad \forall f \in \mathcal{K}, \lambda \in \mathbb{R}$.

La teoría comportamental de de Finetti considera necesarias estas tres condiciones para que una previsión sobre un espacio lineal esté definida coherentemente. Las condiciones **(P1)** y **(P3)** nos recuerdan el conocido hecho de que la esperanza es un operador lineal. Cuando el dominio de una previsión lineal P está únicamente constituido por variables aleatorias indicadoras de eventos entonces se recuperan los axiomas de Kolmogorov enunciados anteriormente (con la aditividad finita, no σ -aditividad). Es decir, imponiendo unas condiciones distintas a los axiomas de Kolmogorov, la teoría comportamental de de Finetti acaba llegando a las mismas condiciones.

Dado un espacio probabilizable (Ω, \mathcal{A}) y una probabilidad P asociada a ese espacio, la terna (Ω, \mathcal{A}, P) se denomina **espacio de probabilidad**.

¹es decir, \mathcal{K} es cerrado para la suma y para la multiplicación por escalar: si $f, g \in \mathcal{K}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $f + g \in \mathcal{K}$ y $\lambda f \in \mathcal{K}$.

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

Para terminar, cabe mencionar lo que se entiende por probabilidad condicionada. Cuando digamos ‘probabilidad de un suceso $A \in \mathcal{A}$ condicionada por un suceso $B \in \mathcal{A}$ ’ nos estaremos refiriendo a la probabilidad de que ocurra A supuesto que ha ocurrido B . Dicha probabilidad puede calcularse haciendo uso de la conocida **fórmula de Bayes**:

$$P_B(A) = P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (1.1)$$

siempre y cuando $P(B) > 0$. Se puede comprobar que P_B cumple los tres puntos de la definición axiomática y por tanto se trata, efectivamente, de una probabilidad. Así, podemos considerar un nuevo espacio de probabilidad: $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$, que ‘sustituye’ al original tras la información recibida sobre la ocurrencia del suceso B .

Si estamos tratando con apuestas, en la interpretación comportamental $P_B(f) = P(f | B)$ representa el precio justo de compra/venta de la apuesta f considerado por el sujeto ahora si es que más tarde llega a enterarse de que el resultado muestral está contenido en B . La fórmula de Bayes toma la forma:

$$P_B(f) = P(f | B) = \frac{P(fI_B)}{P(B)}, \quad (1.2)$$

siempre y cuando $P(B) > 0$.

1.2. Previsiones inferiores coherentes

Siguiendo con el ejemplo anterior, recordemos que basándome en los buenos resultados y en el extraordinario juego de la Selección Española en la fase de clasificación para la Copa Mundial de Fútbol de Qatar 2022, he considerado que la probabilidad de que nuestro combinado salga campeón es $P(\{\text{España}\}) = 0.2$. Por otro lado, no comparto la forma de juego de Inglaterra y creo que se han clasificado injustamente, por lo que determino $P(\{\text{Inglaterra}\}) = 0.05$. Además, haber ganado el último mundial y contar con tanta calidad en su plantilla me hace pensar que Francia es la clara favorita, $P(\{\text{Francia}\}) = 0.4$.

Este es un claro ejemplo de probabilidades subjetivas: mis creencias determinan la probabilidad de ganar el Mundial de cada selección en base a la información que dispongo sobre sus resultados previos, sus jugadores y su nivel de juego. Pero, ¿estoy siendo coherente otorgándole cuatro veces más probabilidad a España que a Inglaterra? ¿Estoy siendo demasiado optimista con la Selección Española? ¿Me estoy dejando llevar por mi poca afinidad hacia los ingleses, o por mi amor hacia el medio-centro francés Paul Pogba? O, volviendo a la interpretación comportamental, ¿tiene sentido considerar que 0.1999 sea un precio aceptable para comprar una apuesta a favor de España, pero 0.2001 no solo deje de ser un precio aceptable para comprarla sino que además pase a ser un precio aceptable para venderla, siendo la diferencia tan pequeña entre dichos valores?

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

He aquí la utilidad e importancia de la teoría de previsiones inferiores coherentes: su principal objetivo es aportar criterios basados en la lógica que nos permitan razonar de una forma autoconsistente con probabilidades subjetivas, es decir, resolver problemas, sacar conclusiones y tomar decisiones.

Usamos el término **probabilidades imprecisas** para referirnos a todos los modelos matemáticos que se pueden utilizar como una generalización de la teoría de la probabilidad cuando tenemos información imprecisa sobre el experimento que se está llevando a cabo. Las fuentes de dicha imprecisión son la indeterminación: existen eventos que no son equivalentes para nuestro sujeto pero entre los cuales no tiene preferencia, ya sea por falta de información, pensamientos encontrados..., y la incompletitud: el sujeto no es capaz de determinar la probabilidad subjetiva de un evento de forma exacta. Dentro de las probabilidades imprecisas existen diferentes modelos: funciones de creencia, medidas de posibilidad, conjuntos coherentes de variables aleatorias deseables, previsiones inferiores coherentes... Estos modelos nos ofrecen más flexibilidad que los modelos de probabilidad clásica, siendo muy útiles cuando solo conocemos la probabilidad de algunos sucesos o cuando solo conocemos cotas de probabilidades. Nosotros nos centraremos en el modelo de previsiones inferiores coherentes, por su sencillez y porque acaba recogiendo el resto de modelos como casos particulares, como veremos en capítulos posteriores.

Dado un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ y un conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$, una **previsión inferior** (superior) en \mathcal{K} es una función:

$$\begin{array}{l} \underline{P}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \underline{P}(f) \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \overline{P}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \overline{P}(f) \end{array} \right)$$

que para cada variable aleatoria f devuelve una cota inferior (superior) de su esperanza. Tiene dos posibles interpretaciones:

- Interpretación epistémica: $\underline{P}(f)$ y $\overline{P}(f)$ representan respectivamente una cota inferior y una cota superior para $P_0(f) = E_{P_0}(f)$, donde P_0 es la probabilidad ‘real’ pero solo parcialmente conocida.

Consideremos como ejemplo el experimento aleatorio basado en lanzar un dado de 6 caras y observar el color de la cara superior, sabiendo que 3 de ellas son de color rojo y las 3 restantes pueden ser de color verde o azul. Denotando por $\{r\}$, $\{v\}$ y $\{a\}$ a las variables aleatorias indicadoras de rojo, verde y azul respectivamente, las previsiones inferior y superior definidas sobre dichas variables vienen dadas por

	$\{r\}$	$\{v\}$	$\{a\}$	$\{r, v\}$	$\{r, a\}$	$\{v, a\}$
\underline{P}	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
\overline{P}	0.5	0.5	0.5	1	1	0.5

$\underline{P}(\{r\}) = \overline{P}(\{r\}) = 0.5$ implica que $P_0(\{r\})$ es conocida y su valor es igual a 0.5. $\underline{P}(\{v\}) = 0$ implica que como mínimo se tiene $P_0(\{v\}) = 0$, ocurriendo esto

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

cuando las 3 caras restantes son todas de color azul. Por otro lado, $\bar{P}(\{v\}) = 0.5$ implica que como máximo se tiene $P_0(\{v\}) = 0.5$, ocurriendo esto cuando las 3 caras restantes son todas de color verde. Las conclusiones son análogas para el resto de sucesos de interés asociados al experimento.

- Interpretación comportamental: por un lado, $\underline{P}(f)$ representa el supremo de las cantidades que el sujeto está dispuesto a pagar por comprar la apuesta f . El sujeto gana $f(\omega)$ si el resultado experimental es $\omega \in \Omega$, pero pierde $\underline{P}(f)$, que es el precio que paga por f . Es decir, la transacción $f - (\underline{P}(f) - \epsilon) = f - \underline{P}(f) + \epsilon$ es aceptable para el sujeto para cualquier $\epsilon > 0$, puesto que estaría comprando la apuesta por un precio inferior al que considera justo.

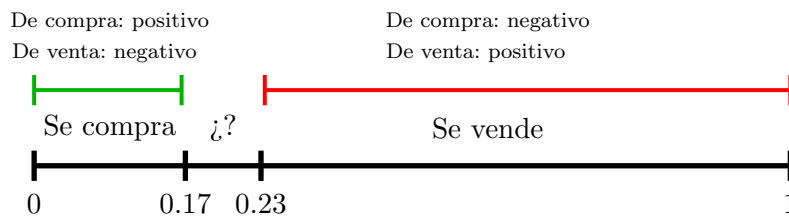
Por otro lado, $\bar{P}(f)$ representa el ínfimo de las cantidades que el sujeto está dispuesto a recibir por vender la apuesta f . El sujeto gana $\bar{P}(f)$, precio de venta de f , pero pierde $f(\omega)$ si el resultado experimental es $\omega \in \Omega$. Es decir, la transacción $(\bar{P}(f) + \epsilon) - f = \bar{P}(f) + \epsilon - f$ es aceptable para el sujeto para cualquier $\epsilon > 0$, puesto que estaría vendiendo la apuesta por un precio superior al que considera justo. Salvo que se diga lo contrario, esta será la interpretación de \underline{P} y \bar{P} que utilizaremos de aquí en adelante.

Siguiendo con el ejemplo del Mundial de Fútbol de Qatar, asignamos:

$$\underline{P}(\{\text{España}\}) = 0.17 \quad \text{y} \quad \bar{P}(\{\text{España}\}) = 0.23.$$

Estas asignaciones determinan que cualquier valor por debajo de 0.17 es un precio aceptable para comprar la apuesta a favor de España, y cualquier valor por encima de 0.23 es un precio aceptable para venderla. Fijémonos que el anterior valor de 0.2, que servía al mismo tiempo como precio máximo de compra y precio mínimo de venta, se desdobra en dos valores. Esto elimina el drástico cambio de decisión de comprar y vender la apuesta, habiendo ahora un intervalo en el que no se cree que merezca la pena realizar ninguna de las dos acciones. En dicho intervalo se encuentra la probabilidad real (subjativa, mi probabilidad) de que España gane el Mundial de Qatar 2022.

Beneficio esperado



Cuando el precio máximo de compra y el precio mínimo de venta de una apuesta f coinciden, es decir, $\underline{P}(f) = \bar{P}(f)$, entonces el valor $P(f) := \underline{P}(f) = \bar{P}(f)$ representa

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

el precio justo de la apuesta f , tal y como se definió la probabilidad comportamental anteriormente. El modelo impreciso se transforma en un modelo clásico de probabilidad según la interpretación de de Finetti.

Ejemplo 1.1. Juan participa en un concurso de televisión llamado ‘Contenedores Misteriosos’. Los participantes de este concurso han de pujar a ciegas por contenedores marítimos que, por diversas razones, no han llegado correctamente a su destino. Juan, apasionado del riesgo, cuando gana la subasta de un contenedor y antes de descubrir su interior lo vende a algún cliente que le paga cierta cantidad en función de su contenido.

En el programa de hoy, el presentador informa a los concursantes de que los contenedores que se sacarán a subasta tienen en su interior o bien antiguas alfombras persas, o bien libros, o bien disfraces. Automáticamente, Juan contacta con uno de sus mejores clientes:

- Álex cree que podría hacer un buen negocio con las alfombras, le ofrece a Juan 4500 euros por dicho contenedor. Además, Álex tiene una juguetería, así que le ofrece 2500 euros por un contenedor lleno de disfraces. Los libros no los quiere, no le ofrece nada por ellos.

Matemáticamente, el espacio muestral del experimento que Juan va a llevar a cabo es $\Omega = \{\text{alfombras, disfraces, libros}\}$, y podemos definir una apuesta f_1 de acuerdo con las cantidades que Álex le ofrece a Juan:

$$f_1 = 4500I_a + 2500I_d + 0I_l, \quad (1.3)$$

donde I_a , I_d e I_l son las variables indicadoras de alfombras, disfraces y libros respectivamente, de manera que $f_1(a) = 4500$, $f_1(d) = 2500$ y $f_1(l) = 0$.

Si Juan puja x euros por uno de los contenedores y resulta ser el ganador de la subasta, el incremento en su riqueza será $4500 - x$ si el contenido son alfombras, $2500 - x$ si el contenido son disfraces y $-x$ euros si el contenido son libros. El supremo de las cantidades que Juan esté dispuesto a pujar por el contenedor será su previsión inferior por la apuesta f_1 . Si, por ejemplo, Juan estuviera seguro de que en el contenedor no hay libros, estaría dispuesto a pujar 2500 euros o más por el depósito, y si él no dispone de más información y no quiere arriesgar, no pujará más de 2500 euros, ya que si así lo hiciera y el contenido fueran disfraces estaría perdiendo dinero.

Otra opción que se le plantea a Juan tras ganar un contenedor es, en lugar de vendérselo a Álex, vendérselo de vuelta al concurso por una cantidad de y euros (independiente del contenido del depósito). Si así lo hace, el incremento en su riqueza será de $y - 4500$ euros si el contenido son alfombras, $y - 2500$ euros si el contenido son disfraces e y euros si el contenido son libros. El ínfimo de las cantidades que Juan esté dispuesto a recibir por el contenedor será su previsión superior por la apuesta f_1 . Si él supiera que en el contenedor no hay libros, estaría dispuesto a recibir más de 4500 euros, pero no menos si no quiere arriesgar, ya que si el contenido resultaran

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

ser alfombras estaría perdiendo dinero. \square

Dado que el beneficio obtenido al vender una apuesta f por un precio μ y al comprar la apuesta $-f$ por el precio $-\mu$ es el mismo: $\mu - f$, ambas transacciones han de ser aceptadas bajo las mismas condiciones. Como consecuencia, cuando \underline{P} y \overline{P} están definidas en el mismo conjunto de apuestas \mathcal{K} , se tiene que existe una relación de dualidad o conjugación entre ellas: $-\overline{P}(-f) = \underline{P}(f)$. Se dice que \overline{P} es la conjugada de \underline{P} , y viceversa. La exigencia de que ambas estén definidas en \mathcal{K} junto con la relación de dualidad implica que \mathcal{K} ha de ser cerrado bajo la multiplicación de -1 . Además, la relación de dualidad hace que los desarrollos para previsiones inferiores sean totalmente válidos para previsiones superiores (y viceversa), lo que nos permite centrarnos en las que dan nombre a este apartado.

Como ya hemos comentado, para poder razonar con probabilidades subjetivas es necesario imponer criterios basados en la lógica que nos permitan desarrollar consistentemente la teoría. Estos criterios vienen dados por la condición de **coherencia**. En términos de transacciones:

1. Una transacción que implica pérdida de riqueza, independientemente del resultado experimental, no puede ser considerada aceptable (evitar pérdida segura).
2. Si una transacción es considerada aceptable, otra transacción que aporta un mayor beneficio también ha de ser considerada aceptable.
3. Una combinación lineal positiva de transacciones aceptables ha de ser una transacción aceptable.

A continuación y antes de introducir la definición matemática de coherencia se muestra un ejemplo que nos permite comprender de forma intuitiva el significado de las tres condiciones anteriores.

Ejemplo 1.2. El presentador informa a los concursantes de que salen a subasta dos contenedores, ambos con el mismo contenido en su interior. Además, se subastan de forma conjunta, es decir, quien ofrezca una mayor cantidad por los dos depósitos se los lleva. Juan, pensando qué hacer con el segundo contenedor si es que gana la subasta, contacta con otra de sus fieles clientes:

- A María las alfombras persas no le interesan en absoluto, por lo que no se compromete a pagarle nada si resultan ser el contenido del depósito. Por otro lado, María hace negocios con tiendas de disfraces, así que le ofrece 2500 euros por un contenedor lleno de ellos. Además, tiene una librería, por lo que le ofrece 5000 euros por un depósito de libros.

Definimos una segunda apuesta f_2 determinada por las cantidades que María le ofrece a Juan por el segundo contenedor:

$$f_2 = 0I_a + 2500I_d + 5000I_l, \quad (1.4)$$

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

de manera que $f_2(a) = 0$, $f_2(d) = 2500$ y $f_2(l) = 5000$. El supremo de las cantidades que Juan esté dispuesto a pujar por el segundo contenedor será su previsión inferior por la apuesta f_2 .

Inicialmente, Juan decide pujar como máximo 3000 euros por el primer contenedor, y 2500 por el segundo, con la intención de vendérselos a Juan y a María respectivamente. Es decir, Juan asigna $\underline{P}(f_1) = 3000$ y $\underline{P}(f_2) = 2500$. El Cuadro 1.1 resume las ganancias de Juan si resulta ser el ganador de la subasta. Vemos como Juan estará perdiendo dinero independientemente del resultado experimental (contenido del depósito). Matemáticamente, esto significa que las asignaciones $\underline{P}(f_1) = 3000$ y $\underline{P}(f_2) = 2500$ generan una pérdida segura, infringiendo el primero de los criterios de coherencia. \underline{P} no satisface la condición de coherencia.

	Alfombras	Disfraces	Libros
Comprar f_1 por 3000	1500	-500	-3000
Comprar f_2 por 2500	-2500	0	2500
Beneficio total	-1000	-500	-500

Cuadro 1.1: Beneficios de Juan en función del contenido de los depósitos de acuerdo a sus asignaciones iniciales.

Pensándolo mejor, Juan decide pujar como máximo 2000 euros por el primer contenedor y 2500 por el segundo. Además, si gana la subasta, decide revenderle el primer contenedor al concurso como mínimo por una cantidad de 3000 euros. Es decir, Juan asigna $\underline{P}(f_1) = 2000$, $\underline{P}(f_2) = 2500$ y $\overline{P}(f_1) = 3000$, o, equivalentemente, $\underline{P}(-f_1) = -3000$. Las ganancias derivadas de estas nuevas asignaciones son las que se muestran en el Cuadro 1.2. Estas asignaciones no generan una pérdida segura ya que si el contenido de los depósitos resulta ser o bien disfraces o bien libros Juan estará obteniendo un beneficio de 1000 y 3500 euros respectivamente. No obstante, \underline{P} sigue sin cumplir los criterios de racionalidad que hemos impuesto, como veremos a continuación.

	Alfombras	Disfraces	Libros
Comprar f_1 por 2000	2500	500	-2000
Comprar f_2 por 2500	-2500	0	2500
Vender f_1 por 3000	-1500	500	3000
Beneficio total	-1500	1000	3500

Cuadro 1.2: Beneficios de Juan en función del contenido de los depósitos de acuerdo a sus nuevas asignaciones.

En el Cuadro 1.3 se resumen las ganancias de Juan si decidiera vender el primer contenedor al concurso por 2500 euros. Observando la segunda y tercera fila vemos como, independientemente del contenido de los depósitos, vender el primer contenedor al concurso por 2500 euros le aporta a Juan un beneficio mayor o igual al que le

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

	Alfombras	Disfraces	Libros
Comprar f_1 por 2000	2500	500	-2000
Comprar f_2 por 2500	-2500	0	2500
Vender f_1 por 2500	-2000	0	2500
Beneficio total	-1000	500	3000

Cuadro 1.3: Beneficios de Juan si vendiera el primer contenedor por 2500 euros.

aporta comprar el segundo contenedor por 2500 euros para vendérselo a María, transacción que Juan ha considerado aceptable. Por otro lado, al asignar $\bar{P}(f_1) = 3000$, Juan está asumiendo que el mínimo valor que el está dispuesto a recibir por el primer contenedor es 3000 euros. Cualquier cantidad inferior a 3000 no es un valor de venta aceptable para él. Es decir, Juan está dejando de aceptar una transacción que, como acabamos de comprobar, le concede un mayor beneficio que una transacción considerada aceptable. Esto infringe el segundo de los criterios de coherencia y, por tanto, \underline{P} no satisface la condición de coherencia. \square

Una vez comprendida de forma intuitiva la condición de coherencia, a continuación presentamos la definición formal. Matemáticamente, una previsión inferior \underline{P} definida sobre un conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ se dice que es coherente en \mathcal{K} si $\forall n, m \in \mathbb{N} \cup 0$ y $\forall f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{K}$:

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n [f_i(\omega) - \underline{P}(f_i)] - m [f_0(\omega) - \underline{P}(f_0)] \geq 0. \quad (1.5)$$

Cuando el espacio de apuestas en el que está definida \underline{P} es claro entonces simplemente se dirá que \underline{P} es coherente.

Cuando el conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ sobre el que se define la previsión inferior es un espacio lineal, la condición de coherencia se simplifica y se hace más intuitiva. En ese caso, \underline{P} es coherente en \mathcal{K} si y solo si $\forall f, g \in \mathcal{K}$ y $\forall \lambda > 0$:

- (C1) $\underline{P}(f) \geq \inf f$ (Aceptar ganancia segura),
- (C2) $\underline{P}(\lambda f) = \lambda \underline{P}(f)$ (Homogeneidad positiva),
- (C3) $\underline{P}(f + g) \geq \underline{P}(f) + \underline{P}(g)$ (Superlinealidad).

Recordando las condiciones que definen una previsión lineal: **(P1)**-**(P3)**, vemos como una previsión inferior coherente es una previsión lineal en la que se pierde la condición de linealidad, siendo sustituida por la de superlinealidad. Si, por otro lado, quisiéramos tratar con previsiones superiores, la superlinealidad se transforma en sublinealidad:

- (C3) $\bar{P}(f + g) \leq \bar{P}(f) + \bar{P}(g)$ (Sublinealidad).

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

Además, de la condición de coherencia se deducen dos consecuencias importantes. $\forall f, g \in \mathcal{K}$ se cumple:

$$\underline{P}(f) \leq \overline{P}(f) \quad \text{y} \quad f \leq g \Rightarrow \underline{P}(f) \leq \underline{P}(g) \quad \text{y} \quad \overline{P}(f) \leq \overline{P}(g) \quad (\text{Monotonía}). \quad (1.6)$$

Dado un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ y una previsión inferior \underline{P} en \mathcal{K} , definimos el **conjunto credal** asociado a \underline{P} como el conjunto cerrado y convexo de previsiones lineales que dominan a \underline{P} , es decir:

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(f) \geq \underline{P}(f) \forall f \in \mathcal{K}\}, \quad (1.7)$$

donde $\mathbb{P}(\Omega)$ denota el conjunto de previsiones lineales en Ω . Análogamente, dada una previsión superior \overline{P} en \mathcal{K} , definimos el conjunto credal asociado a \overline{P} como el conjunto cerrado y convexo de previsiones lineales dominadas por \overline{P} , es decir:

$$\mathcal{M}(\overline{P}) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(f) \leq \overline{P}(f) \forall f \in \mathcal{K}\}. \quad (1.8)$$

La relación de conjugación y el carácter cerrado de \mathcal{K} bajo la multiplicación de -1 asegura que $\mathcal{M}(\underline{P}) = \mathcal{M}(\overline{P})$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\underline{P}) &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(f) \geq \underline{P}(f) \forall f \in \mathcal{K}\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(-f) \geq \underline{P}(-f) \forall f \in \mathcal{K}\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : -P(f) \geq \underline{P}(-f) \forall f \in \mathcal{K}\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(f) \leq -\underline{P}(-f) \forall f \in \mathcal{K}\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(f) \leq \overline{P}(f) \forall f \in \mathcal{K}\} = \mathcal{M}(\overline{P}) \end{aligned}$$

Es posible demostrar que \underline{P} es coherente si y solo si

$$\forall f \in \mathcal{K} \exists P \in \mathcal{M}(\underline{P}) \text{ tal que } P(f) = \underline{P}(f), \quad (1.9)$$

y que además esto es equivalente a que \underline{P} sea el entorno inferior de $\mathcal{M}(\underline{P})$, es decir:

$$\underline{P}(f) = \inf\{P(f) : P \in \mathcal{M}(\underline{P})\} \quad \forall f \in \mathcal{K}. \quad (1.10)$$

El carácter cerrado y convexo del conjunto credal nos garantiza que dicho ínfimo se alcanza, por lo que podemos sustituirlo por el mínimo y concluimos que \underline{P} es coherente si y solo si:

$$\underline{P}(f) = \min\{P(f) : P \in \mathcal{M}(\underline{P})\} \quad \forall f \in \mathcal{K}. \quad (1.11)$$

Utilizando la relación de dualidad, lo anterior es equivalente a:

$$\overline{P}(f) = \max\{P(f) : P \in \mathcal{M}(\underline{P})\} \quad \forall f \in \mathcal{K}. \quad (1.12)$$

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

De este modo, existe una correspondencia unívoca entre una previsión inferior coherente y su conjunto credal asociado: un conjunto cerrado y convexo de previsiones lineales determina una única previsión inferior coherente y viceversa. Resulta totalmente equivalente hablar de \underline{P} , de $\mathcal{M}(\underline{P})$, de $\mathcal{M}(\overline{P})$ o de \overline{P} .

La interpretación comportamental del conjunto credal es la siguiente: existe un precio justo para cada apuesta f en Ω , que resulta en una previsión lineal $P \in \mathbb{P}(\Omega)$, y tal que el desconocimiento del sujeto sobre P solo le permite colocarla entre un conjunto de candidatas $\mathcal{M}(\underline{P})$. Las conclusiones que el sujeto puede sacar a partir de $\mathcal{M}(\underline{P})$ son equivalentes a las que puede sacar a partir del entorno inferior \underline{P} de dicho conjunto.

Yendo más allá, dada una previsión inferior \underline{P} , de nuevo el carácter cerrado y convexo de $\mathcal{M}(\underline{P})$ hace que el conjunto credal esté determinado por sus puntos extremos y, como consecuencia, se tiene que \underline{P} es coherente si y solo si:

$$\underline{P}(f) = \min\{P(f) : P \text{ punto extremo de } \mathcal{M}(\underline{P})\} \quad \forall f \in \mathcal{K}, \quad (1.13)$$

donde recordemos que un punto extremo de $\mathcal{M}(\underline{P})$ es una probabilidad $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que si $P = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ con $P_1, P_2 \in \mathcal{M}(\underline{P})$ y $\lambda \in (0, 1)$ entonces $P_1 = P_2 = P$.

Ejemplo 1.3. Finalmente Juan decide no revenderle al concurso el segundo contenedor y asigna $\underline{P}(f_1) = 2000$ y $\underline{P}(f_2) = 2500$. A partir de la ecuación (1.5) (ya que en este caso el espacio de apuestas $\mathcal{K} = \{f_1, f_2\}$ no es un espacio lineal) es posible demostrar que, bajo estas asignaciones, \underline{P} es coherente. Así, resulta equivalente tratar con \underline{P} o con su conjunto credal asociado $\mathcal{M}(\underline{P})$. Denotando por p_a , p_d y p_l a la probabilidad de que el contenido de los contenedores sacados a subasta sean alfombras, disfraces y libros respectivamente, $\mathcal{M}(\underline{P})$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\underline{P}) &= \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(f) \geq \underline{P}(f) \forall f \in \mathcal{K}\} \\ &= \{(p_a, p_d, p_l) : P(f_1) \geq \underline{P}(f_1), P(f_2) \geq \underline{P}(f_2)\} \\ &= \{(p_a, p_d, p_l) : 45p_a + 25p_d \geq 20, 25p_d + 50p_l \geq 25\}. \end{aligned}$$

Dado que ha de cumplirse la restricción $p_a + p_d + p_l = 1$, estas dos desigualdades se convierten en:

$$45p_a + 25p_d \geq 20(p_a + p_d + p_l) \implies 25p_a + 5p_d \geq 20p_l \implies p_d \geq 4(p_l - p_a) - p_a,$$

$$25p_d + 50p_l \geq 25(p_a + p_d + p_l) \implies p_l \geq p_a,$$

y el conjunto credal resulta ser:

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{(p_a, p_d, p_l) : p_d \geq 4(p_l - p_a) - p_a, p_l \geq p_a\}.$$

Juan no sabe cuál es la proporción de contenedores de cada tipo de entre los 10 depósitos que se sacarán a subasta. Al asignar $\underline{P}(f_1)$ y $\underline{P}(f_2)$, es decir, al decidir

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

cual es el máximo precio que está dispuesto a pagar por las apuestas f_1 y f_2 , lo que está haciendo es suponer que las probabilidades reales se encuentran dentro de un conjunto de posibles proporciones compatibles con dichas asignaciones. En este caso, al imponer $\underline{P}(f_1) = 2000$ y $\underline{P}(f_2) = 2500$ Juan está suponiendo que la proporción de contenedores con libros es mayor o igual que la proporción de contenedores con alfombras, y que la proporción de contenedores con disfraces y alfombras es mayor o igual que cuatro veces la diferencia entre la proporción de contenedores con libros y alfombras. \square

Cuando el dominio de una previsión inferior coherente \underline{P} está constituido por las variables aleatorias indicadoras de los eventos en Ω , $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$, entonces a \underline{P} se le denomina **probabilidad inferior coherente**, denotándose usualmente $\underline{P}(A)$ en lugar de $\underline{P}(I_A)$ para un evento $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. La probabilidad inferior de A puede interpretarse como el máximo valor que el sujeto está dispuesto a apostar a favor de A , donde apostar a favor de A significa que se obtiene 1 si el resultado experimental está en A y 0 si no lo está. Cabe observar que en este caso el espacio imagen de \underline{P} es el intervalo $[0, 1]$, no la recta real:

$$\begin{aligned} \underline{P}: \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \underline{P}(A). \end{aligned}$$

La probabilidad superior \bar{P} de un evento A se define de forma análoga a la probabilidad inferior, y puede calcularse como:

$$\bar{P}(A) = \bar{P}(I_A) = -\underline{P}(-I_A) = -\underline{P}(I_{A^c} - 1) = 1 - \underline{P}(I_{A^c}) = 1 - \underline{P}(A^c), \quad (1.14)$$

donde hemos utilizado:

$$\left. \begin{aligned} -I_A(\omega) &= \begin{cases} -1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \\ I_{A^c}(\omega) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in A, \\ 1 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -I_A = I_{A^c} - 1.$$

$\bar{P}(A)$ se interpreta como el mínimo precio que el sujeto está dispuesto a apostar en contra de A , o el mínimo precio que el sujeto está dispuesto a recibir por vender la apuesta a favor de A . Así, si una casa de apuestas establece $\bar{P}(A)$, solamente permitirá a sus clientes comprar la apuesta A por un precio igual o superior a dicho valor. Cabe destacar que el mecanismo de las casas de apuestas con las que trataremos en este trabajo es diferente al de las casas de apuestas ‘de la vida real’. En las casas de apuestas reales el usuario compra una apuesta por 1 euro y, si gana, consigue una cantidad establecida por la casa que depende de la apuesta que se esté realizando. En nuestras casas de apuestas el usuario compra una apuesta por una cantidad establecida por la casa que depende de la apuesta en cuestión y, si gana, consigue 1 euro. Al fin y al cabo, ambos mecanismos son equivalentes.

1.2. PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

Las ecuaciones (1.9), (1.11), (1.12) y (1.13) siguen siendo perfectamente aplicables en el caso de probabilidades inferiores. Dado que $\forall P \in \mathbb{P}(\Omega)$ se cumple $P(\emptyset) = 0$ y $P(\Omega) = 1$, de las ecuaciones (1.11) y (1.12) se deduce que $\underline{P}(\emptyset) = \overline{P}(\emptyset) = 0$ y $\underline{P}(\Omega) = \overline{P}(\Omega) = 1 \forall \underline{P}, \overline{P}$ probabilidad inferior y superior.

Anteriormente hemos visto que a la hora de trabajar con previsiones lineales no hay diferencia alguna entre representar la información en términos de eventos o de apuestas. Una probabilidad P es equivalente a su operador esperanza E_P y, por tanto, la restricción a eventos (probabilidad) determina el valor en las apuestas (esperanza) y viceversa. Sin embargo, la pérdida del axioma de linealidad hace que esto no ocurra a la hora de trabajar con probabilidades imprecisas: las probabilidades inferiores coherentes son menos generales que las previsiones inferiores coherentes, una misma probabilidad inferior coherente puede dar lugar a diferentes previsiones inferiores coherentes, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4. Consideremos el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$ definido sobre $\Omega = \{a, d, l\}$ a partir de sus puntos extremos:

$$Ext(\mathcal{M}(\underline{P}_1)) = \{(0.1, 0.5, 0.4), (0.3, 0.4, 0.3), (0.2, 0.5, 0.3), (0.2, 0.4, 0.4)\}.$$

La ecuación (1.13) define la probabilidad inferior coherente \underline{P}_1 que se muestra en el Cuadro 1.4. La probabilidad superior se ha calculado haciendo uso de la relación de conjugación: $\overline{P}(A) = 1 - \underline{P}(A^c)$.

	$\{a\}$	$\{d\}$	$\{l\}$	$\{a, d\}$	$\{a, l\}$	$\{d, l\}$
\underline{P}_1	0.1	0.4	0.3	0.6	0.5	0.7
\overline{P}_1	0.3	0.5	0.4	0.7	0.6	0.9

Cuadro 1.4: Probabilidades inferiores y superiores asignadas por Juan de acuerdo a $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$.

En palabras, si el premio fuera 1 euro, Juan estaría dispuesto a apostar como máximo 0.1 euros por que el contenido del depósito fueran alfombras, 0.4 euros por que el contenido del depósito fueran disfraces, etc. Definimos una apuesta f que devuelva 1500 euros si el contenido son alfombras, 2000 euros si son disfraces y 500 si son libros, es decir:

$$f = 1500I_a + 2000I_d + 500I_l.$$

Utilizamos de nuevo (1.13) para calcular la previsión inferior coherente de dicha apuesta de acuerdo al conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$, resultando:

$$\underline{P}_1(f) = \min\{1350, 1400, 1450, 1300\} = 1300.$$

Definimos ahora otro conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$ a partir de sus puntos extremos:

$$Ext(\mathcal{M}(\underline{P}_2)) = \{(0.1, 0.5, 0.4), (0.3, 0.4, 0.3), (0.2, 0.5, 0.3)\}.$$

1.3. CONDICIONAMIENTO DE PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

De la ecuación (1.13) obtenemos la probabilidad inferior coherente asociada a este nuevo conjunto credal:

	$\{a\}$	$\{d\}$	$\{l\}$	$\{a, d\}$	$\{a, l\}$	$\{d, l\}$
\underline{P}_2	0.1	0.4	0.3	0.6	0.5	0.7

Vemos como al hacer actuar la probabilidad inferior \underline{P}_2 sobre las variables indicadoras de eventos se obtienen los mismos valores que para \underline{P}_1 . No obstante, haciendo uso de nuevo de la ecuación (1.13) se obtiene la siguiente previsión inferior coherente asociada a $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$:

$$\underline{P}_2(f) = \min\{1350, 1400, 1450\} = 1350.$$

Vemos como la previsión inferior de la apuesta f deja de ser 1300 para pasar a ser 1350. Es decir, a pesar de que \underline{P}_1 y \underline{P}_2 actúan idénticamente cuando se trata de eventos (variables indicadoras), a la hora de actuar sobre apuestas se obtienen resultados diferentes. En otras palabras, una misma probabilidad inferior coherente da lugar a dos previsiones inferiores coherentes distintas. Esto puede visualizarse de forma clara en la Figura 1.1, donde se representan $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$ y $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$: los conjuntos credales son diferentes, luego inducen previsiones inferiores diferentes. Sin embargo, ambos tienen la misma restricción a eventos, por lo que inducen la misma probabilidad inferior.

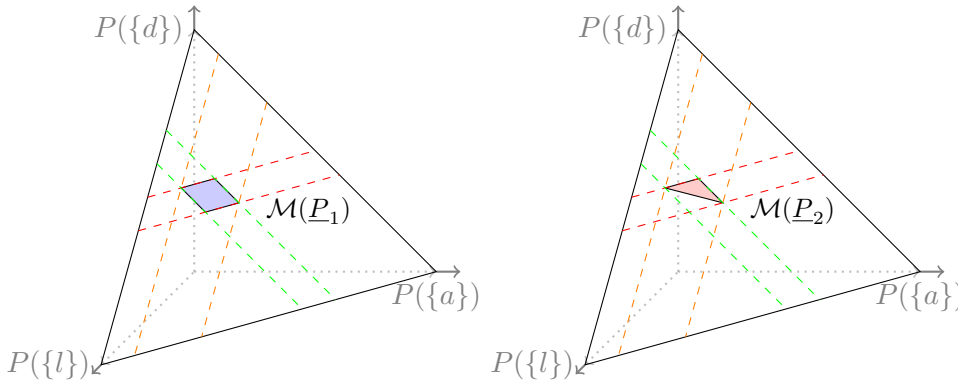


Figura 1.1: Representación gráfica de $\mathcal{M}(\underline{P}_1)$ y $\mathcal{M}(\underline{P}_2)$.

1.3. Condicionamiento de previsiones inferiores coherentes

Nos han llegado rumores de que la Selección Francesa podría ser próximamente descalificada de la Copa Mundial de Fútbol de Qatar por irregularidades en su plantilla en la fase de clasificación. ¿Cómo afectaría este hecho a la asignación de las previsiones inferiores del resto de selecciones? Si actualizamos las asignaciones,

1.3. CONDICIONAMIENTO DE PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

¿las nuevas previsiones son consistentes entre ellas? ¿Son compatibles con las asignadas previo a disponer de dicha información? Estas cuestiones son estudiadas por las llamadas previsiones inferiores coherentes condicionadas.

Dada una partición \mathcal{B} de un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ y un conjunto de apuestas $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$, una **previsión inferior condicionada** en \mathcal{H} es una función $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada apuesta $f \in \mathcal{H}$ y a cada $B \in \mathcal{B}$ le asigna el valor $\underline{P}(f | B)$, donde $\underline{P}(f | B)$ representa el supremo de las cantidades que el sujeto estaría dispuesto a pagar ahora por comprar la apuesta f si después se enterara de que el resultado experimental está contenido en B .

Siguiendo con nuestro ejemplo, denotando por B al conjunto de todas las selecciones que participan en el Mundial de Qatar excepto la francesa, al asignar $\underline{P}(\{\text{España}\} | B) = 0.30$ estamos considerando que, en el caso de que finalmente la Selección Francesa fuera descalificada, cualquier valor por debajo de 0.30 sería un precio aceptable para comprar la apuesta a favor de España.

Dado $B \in \mathcal{B}$, supongamos que el sujeto ha asignado $\underline{P}(f | B)$ para todas las apuestas f en un dominio \mathcal{H}_B . Al igual que en el caso no condicionado, dichas asignaciones han de cumplir ciertas condiciones para ser consistentes entre ellas. Diremos que una previsión inferior condicionada es **coherente por separado** si $\forall n, m \in \mathbb{N} \cup 0$ y $\forall f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}_B$:

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n [f_i(\omega) - \underline{P}(f_i | B)] - m [f_0(\omega) - \underline{P}(f_0 | B)] \geq 0, \text{ y} \quad (1.15)$$

$$I_B \in \mathcal{H}_B \text{ y } \underline{P}(I_B | B) = 1.$$

La primera de las ecuaciones de (1.15) es la misma que la ecuación (1.5) sustituyendo la previsión inferior \underline{P} por la previsión inferior condicionada $\underline{P}(\cdot | B)$. Por otro lado, exigir $\underline{P}(I_B | B)$ implica que el sujeto debe estar dispuesto a apostar todo por B si sabe que el resultado experimental está contenido en B .

De esta forma, podemos obtener previsiones inferiores condicionadas coherentes por separado $\underline{P}(\cdot | B)$ con dominios \mathcal{H}_B para todos los eventos B contenidos en la partición \mathcal{B} . La coherencia por separado implica que la previsión inferior condicionada $\underline{P}(f | B)$ solo depende de los valores que f toma en B , es decir, para dos apuestas f y g tales que $f(\omega) = g(\omega) \forall \omega \in B$ se tiene que $\underline{P}(f | B) = \underline{P}(g | B)$. Como consecuencia, los espacios \mathcal{H}_B se pueden extender al espacio común $\mathcal{H} = \{f = \sum_{B \in \mathcal{B}} f_B | f_B \in \mathcal{H}_B \forall B\}$, y podemos definir en \mathcal{H} la previsión inferior condicionada $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B})$ dada por:

$$\underline{P}(f | \mathcal{B}) = \sum_{B \in \mathcal{B}} I_B \underline{P}(f | B) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.16)$$

Esta nueva previsión inferior condicionada se dice coherente por separado cuando $\underline{P}(\cdot | B)$ es coherente por separado $\forall B \in \mathcal{B}$. Se trata de la apuesta en Ω que para

1.3. CONDICIONAMIENTO DE PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

cada apuesta $f \in \mathcal{H}$ y cada $\omega \in \Omega$ devuelve el supremo precio de compra de f tras conocer que $\omega \in B$.

Cuando el espacio \mathcal{H} sobre el que está definida $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B})$ es un espacio lineal entonces $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B})$ es coherente por separado si y solo si $\forall f, g \in \mathcal{H}, \lambda > 0$ y $B \in \mathcal{B}$:

$$\text{(CS1)} \quad \underline{P}(f | B) \geq \inf_{\omega \in B} f(\omega),$$

$$\text{(CS2)} \quad \underline{P}(\lambda f | \mathcal{B}) = \lambda \underline{P}(f | \mathcal{B}),$$

$$\text{(CS3)} \quad \underline{P}(f + g | \mathcal{B}) \geq \underline{P}(f | \mathcal{B}) + \underline{P}(g | \mathcal{B}).$$

La primera condición nos recuerda el hecho ya comentado de que el valor $\underline{P}(f | B)$ solo ha de depender de los valores que f toma en B . Por lo demás, las condiciones **(CS1)**-**(CS3)** son análogas a las condiciones **(C1)**-**(C3)**, sustituyendo \underline{P} por $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B})$. Es decir, con el concepto de coherencia por separado no estamos introduciendo nada nuevo, simplemente estamos exigiendo que las nuevas asignaciones que el sujeto ha hecho en caso de que en un futuro próximo se entere de que el resultado experimental pertenezca a una partición en concreto del espacio muestral sean consistentes entre ellas, al igual que se lo exigíamos a las asignaciones iniciales.

Ejemplo 1.5. Retomando el Ejemplo 1.3, recordemos que se están subastando dos contenedores y que Juan ha establecido la previsión inferior coherente $\underline{P}(f_1) = 2000$ y $\underline{P}(f_2) = 2500$. Corre un rumor entre los concursantes de que ninguno de los contenedores que han llegado en la última semana contiene libros. Juan decide establecer unos nuevos valores para dichas apuestas por si se da el caso de que en un futuro próximo acaba enterándose de que dicho rumor es cierto y el contenido de los depósitos que se subastan no son libros.

Recordemos que $f_1 = 4500I_a + 2500I_d + 0I_l$ y $f_2 = 0I_a + 2500I_d + 5000I_l$. Si es que finalmente no hubiera libros en el contenedor no tiene sentido que el precio máximo de compra de f_1 fueran 2000 euros, ya que como mínimo estaría ganando 2500 euros. Se estaría incumpliendo la condición **(CS1)**, por lo que Juan debe actualizar dicho valor, debe aumentarlo. Por otro lado, pagar 2500 euros por f_2 sabiendo que el contenido no son libros sería una insensatez, Juan estaría apostándolo todo por los disfraces. Lo normal sería que Juan disminuyera dicho valor.

Tras estas reflexiones, Juan establece la previsión inferior condicionada $\underline{P}(f_1 | \text{no libros}) = 3000$ y $\underline{P}(f_2 | \text{no libros}) = 1500$. Utilizando la ecuación (1.15) es posible demostrar que se trata de una previsión inferior condicionada coherente por separado. Si a la hora de realizar la puja Juan no ha conseguido corroborar el rumor entonces deberá utilizar la previsión $\underline{P}(f_1) = 2000$ y $\underline{P}(f_2) = 2500$. Por el contrario, si descubre que es cierto, entonces deberá utilizar las asignaciones $\underline{P}(f_1 | \text{no libros}) = 3000$ y $\underline{P}(f_2 | \text{no libros}) = 1500$. \square

Una vez asignadas las previsiones condicionadas el sujeto ha de plantearse si son compatibles con las asignaciones previas. Este hecho se estudia a través del

1.3. CONDICIONAMIENTO DE PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

concepto de **coherencia en conjunto**. Dada una previsión inferior coherente \underline{P} y una previsión inferior condicionada coherente por separado $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B})$ definidas sobre los espacios lineales $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ respectivamente, diremos que \underline{P} y $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B})$ son coherentes en conjunto (o simplemente coherentes) si $\forall f \in \mathcal{H}, \forall B \in \mathcal{B}$:

$$\underline{P}(I_B(f - \underline{P}(f | B))) = 0. \quad (1.17)$$

La exigencia de que \mathcal{K} y \mathcal{H} sean espacios lineales es por conveniencia matemática. Aunque no lo haremos, es posible generalizar los resultados a espacios no lineales. Suponiendo $P(B) > 0$, si aplicamos la ecuación (1.17) sobre una previsión lineal P y la apuesta $f = I_A$ para cierto $A \in \mathcal{A}$ entonces recuperamos la regla de Bayes dada por la ecuación (1.1).

$$\begin{aligned} 0 &= P(I_B(I_A - P(I_A | B))) = P(I_A I_B - I_B P(A | B)) \\ &= P(I_A I_B) - P(I_B P(A | B)) = P(I_{A \cap B}) - P(I_B)P(A | B) \\ &= P(A \cap B) - P(B)P(A | B) \implies P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

Es por esta razón que a la ecuación (1.17) se le conoce como **regla de Bayes generalizada**.

Dada una previsión inferior \underline{P} y un conjunto $B \in \mathcal{B}$, pueden existir (o no, más tarde lo veremos) una infinidad de previsiones inferiores condicionadas coherentes con \underline{P} . Las dos más importantes son las llamadas extensión natural y extensión regular.

Dado $B \in \mathcal{B}$, para cada $f \in \mathcal{H}$ se define la **extensión natural** $\underline{E}(\cdot | B)$ inducida por \underline{P} como:

$$\underline{E}(f | B) = \begin{cases} \min\{P(f | B) : P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))\} & \text{si } \underline{P}(B) > 0, \\ \min_{\omega \in B} f(\omega) & \text{si } \underline{P}(B) = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Cuando $\underline{P}(B) > 0$, la extensión natural se corresponde con el entorno inferior de las previsiones lineales condicionadas $P(f | B)$ que podemos definir a partir de la regla de Bayes sobre los elementos de $\mathcal{M}(\underline{P})$. Esta regla puede aplicarse sin problema dado que $\underline{P}(B) > 0$ implica $P(B) > 0$. Cuando $\underline{P}(B) = 0$, el máximo precio de compra aceptable de una apuesta f inducido por la extensión natural se corresponde con la menor de las recompensas dadas por f , por lo que al utilizar la extensión natural para actualizar sus asignaciones el sujeto se está arriesgando lo mínimo posible o, equivalentemente, está siendo lo máximo impreciso posible.

Por otro lado, dado $B \in \mathcal{B}$, para cada $f \in \mathcal{H}$ se define la **extensión regular** $\underline{R}(\cdot | B)$ inducida por \underline{P} como:

$$\underline{R}(f | B) = \begin{cases} \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))\} & \text{si } \bar{P}(B) > 0, \\ \min_{\omega \in B} f(\omega) & \text{si } \bar{P}(B) = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

1.3. CONDICIONAMIENTO DE PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

La definición de extensión regular cuando $\overline{P}(B) > 0$ coincide con la de extensión natural cuando $\underline{P}(B) > 0$. Lo mismo ocurre cuando $\overline{P}(B) = 0$ para la extensión regular y $\underline{P}(B) = 0$ para la extensión natural. Dado que, de acuerdo con la ecuación (1.6), $\underline{P}(B) > 0$ implica $\overline{P}(B) > 0$ y $\overline{P}(B) = 0$ implica $\underline{P}(B) = 0$, tenemos que ambas extensiones coinciden cuando $\overline{P}(B) = 0$ y cuando $\underline{P}(B) > 0$. En el siguiente ejemplo veremos la diferencia entre ellas. Cabe mencionar que de nuevo es el carácter cerrado y convexo del conjunto credal lo que nos permite restringirnos a sus puntos extremos en (1.18) y (1.19), y que al ser coherentes en conjunto con \underline{P} , por definición de coherencia en conjunto, \underline{E} y \underline{R} también son coherentes por separado.

Ejemplo 1.6. Consideremos por un momento el conjunto credal dado por los puntos extremos:

$$Ext(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0.\widehat{3}, 0.\widehat{3}, 0.\widehat{3})\}.$$

Gráficamente:

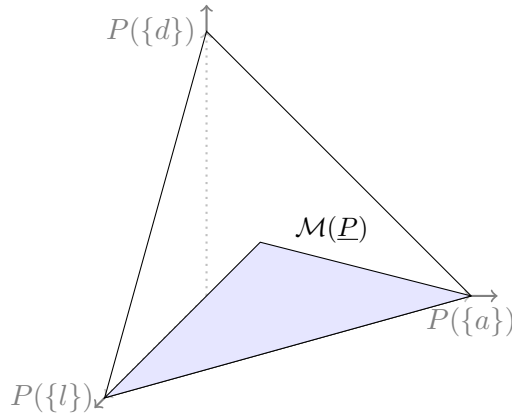


Figura 1.2: Representación gráfica de $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Este conjunto credal induce, a través de la ecuación (1.13), la siguiente probabilidad inferior coherente:

	$\{a\}$	$\{d\}$	$\{l\}$	$\{a, d\}$	$\{a, l\}$	$\{d, l\}$
\underline{P}	0	0	0	0	$0.\widehat{6}$	0
\overline{P}	1	$0.\widehat{3}$	1	1	1	1

Dado que $\underline{P}(\{a, d\}) = 0$, la extensión natural inducida por \underline{P} condicionada por $\{a, d\}$ actuando sobre $f = I_a \equiv \{a\}$ se calcula como:

$$\underline{E}(\{a\} \mid \{a, d\}) = \min_{\omega \in \{a, d\}} I_a(\omega) = \min\{1, 0\} = 0.$$

1.3. CONDICIONAMIENTO DE PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

Por otro lado, puesto que $\overline{P}(\{a, d\}) > 0$, la extensión regular inducida por \underline{P} condicionada por $\{a, d\}$ actuando sobre $f = I_a = \{a\}$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \underline{R}(\{a\} \mid \{a, d\}) &= \min \left\{ \frac{P(\{a\})}{P(\{a, d\})} : P(\{a, d\}) > 0, P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P})) \right\} \\ &= \min\{1, 0.5\} = 0.5. \end{aligned}$$

Aunque ambas son compatibles con la probabilidad inferior \underline{P} , vemos como las asignaciones realizadas por la extensión natural y la extensión regular son diferentes. En breves momentos comprenderemos que cualquier valor entre 0 y 0.5 es compatible con la probabilidad inicial. \square

Los valores asignados sobre $\underline{P}(B)$ y $\overline{P}(B)$ determinan qué previsiones inferiores condicionadas son coherentes con \underline{P} , diferenciándose dos casos:

Caso 1: $\overline{P}(B) = 0$. Para cada apuesta f cualquier número real λ satisface $\underline{P}(I_B(f - \lambda)) = 0$. Cualquier previsión inferior condicionada $\underline{P}(\cdot \mid B)$ es compatible con \underline{P} . Como ya hemos visto, en este caso las extensiones natural y regular coinciden y vienen dadas por:

$$\underline{E}(f \mid B) = \underline{R}(f \mid B) = \min_{\omega \in B} f(\omega) \quad (1.20)$$

Este es el caso menos interesante ya que la definición de coherencia en conjunto dada por la ecuación (1.17) no nos aporta ninguna información sobre cómo actualizar las asignaciones.

Caso 2: $\overline{P}(B) > 0$. Las previsiones inferiores condicionadas $\underline{P}(\cdot \mid B)$ compatibles con \underline{P} vienen determinadas por el siguiente resultado:

Proposición 1.1. (*[3], Proposition 2.*) Sea \underline{P} una previsión inferior coherente definida sobre un conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ y \mathcal{B} una partición de Ω tal que $\overline{P}(B) > 0$ para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Entonces una previsión inferior condicionada coherente por separado $\underline{P}(\cdot \mid \mathcal{B})$ es coherente con \underline{P} si y solo si $\underline{E}(f \mid B) \leq \underline{P}(f \mid B) \leq \underline{R}(f \mid B) \forall f \in \mathcal{K}$ y $\forall B \in \mathcal{B}$.

Del anterior resultado se concluye que, entre las coherentes con \underline{P} , la extensión natural es la previsión inferior condicionada más conservadora: devuelve la cota superior de compra más baja de entre las compatibles con la asignación inicial. Alternativamente, la extensión regular es la previsión inferior condicionada coherente con \underline{P} más informativa: es la que da una mejor acotación del precio justo de cada apuesta. Es por esta razón que a lo largo de este trabajo se utilizará mayoritariamente la extensión regular a la hora de estudiar el condicionamiento de nuestros modelos.

Cuando $\overline{P}(B) > 0$ ya hemos visto que ambas extensiones coinciden y entonces $\underline{P}(\cdot \mid B) = \underline{E}(\cdot \mid B) = \underline{R}(\cdot \mid B)$ es la única probabilidad inferior condicionada coherente con \underline{P} . Así, dentro del Caso 2, diferenciamos un caso concreto de especial interés.

1.3. CONDICIONAMIENTO DE PREVISIONES INFERIORES COHERENTES

Caso 2.1: $\underline{P}(B) > 0$. Para cada apuesta f existe un único número real λ tal que $\underline{P}(I_B(f - \lambda)) = 0$, cumpliéndose entonces $\underline{P}(f | B) = \lambda$. Así, existe una única previsión inferior condicionada $\underline{P}(\cdot | B)$ compatible con \underline{P} , correspondiéndose con el entorno inferior de las previsiones lineales condicionadas $P(f | B)$ que podemos definir a partir de la regla de Bayes sobre los elementos de $\mathcal{M}(\underline{P})$, es decir:

$$\underline{P}(f | B) = \min\{P(f | B) : P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))\} = \underline{E}(f | B) = \underline{R}(f | B). \quad (1.21)$$

Ejemplo 1.7. Retomemos la probabilidad inferior dada en el Cuadro 1.4. Juan quiere actualizar dichas asignaciones de acuerdo al rumor extendido entre sus compañeros: no hay libros en los contenedores. Dado que $\underline{P}(\{a, d\}) > 0$, $\underline{P}(\cdot | \{a, d\})$ viene únicamente determinada por la regla de Bayes generalizada y $\underline{P}(\{a\} | \{a, d\})$ y $\underline{P}(\{d\} | \{a, d\})$ se calculan como:

$$\underline{P}(\{a\} | \{a, d\}) = \min\left\{\frac{P(\{a\})}{P(\{a, d\})} : P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))\right\} = \frac{0.1}{0.6} = 0.1\widehat{6},$$

$$\underline{P}(\{d\} | \{a, d\}) = \min\left\{\frac{P(\{d\})}{P(\{a, d\})} : P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))\right\} = \frac{0.4}{0.7} = 0.57.$$

Análogamente para el resto de conjuntos:

A	$\{a\}$	$\{d\}$	$\{l\}$	$\{a, d\}$	$\{a, l\}$	$\{d, l\}$
$\underline{R}(\cdot \{a, d\})$	$0.1\widehat{6}$	0.57	0	1	$0.1\widehat{6}$	0.57

Tomando las probabilidades $P_1 = (0.1\widehat{6}, 0.8\widehat{3}, 0)$ y $P_2 = (0.43, 0.57, 0)$ tenemos que $P_1, P_2 \in \mathcal{M}(\underline{R}(\cdot | B))$ y $\forall A \subseteq \Omega$ o bien $\underline{R}(A | \{a, d\}) = P_1(A)$ o bien $\underline{R}(A | \{a, d\}) = P_2(A)$, luego de acuerdo con la ecuación (1.9) concluimos que $\underline{R}(\cdot | \{\omega_1, \omega_2\})$ es coherente. Además, estas asignaciones satisfacen la ecuación (1.17) por lo que son compatibles con las asignaciones iniciales. De nuevo cabe recordar que Juan solo ha de utilizar estas nuevas probabilidades si es que acaba enterándose de que el rumor es cierto. En caso contrario, debe seguir utilizando las probabilidades iniciales. \square

En el siguiente colorario se resumen las condiciones bajo las cuales ambas extensiones coinciden sobre un conjunto $B \subseteq \Omega$.

Corolario 1.1. *Sea \underline{P} una previsión inferior coherente y $B \subseteq \Omega$ tal que o bien $\underline{P}(B) > 0$ o bien $\overline{P}(B) = 0$, entonces $\underline{E}(\cdot | B) = \underline{R}(\cdot | B)$.*

A partir del corolario anterior y de la ecuación (1.16) se obtiene directamente un segundo corolario.

Corolario 1.2. *Sea \underline{P} una previsión inferior coherente y \mathcal{B} una partición de Ω tal que o bien $\underline{P}(B) > 0$ o bien $\overline{P}(B) = 0$ para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Entonces $\underline{E}(\cdot | \mathcal{B}) = \underline{R}(\cdot | \mathcal{B})$.*

Capítulo 2

Condicionamiento de previsiones inferiores 2-monótonas

Quedando de manifiesto en el Ejemplo 1.4, en el anterior capítulo hemos visto como las probabilidades inferiores coherentes son menos generales que las previsiones inferiores coherentes: dos previsiones inferiores diferentes pueden tener la misma restricción a eventos \mathcal{Y} , y por tanto, la misma probabilidad inferior asociada. Esto no ocurre cuando a la previsión inferior se le exige la propiedad de 2-monotonía: una previsión inferior 2-monótona y su probabilidad inferior 2-monótona asociada sí son equivalentes, aportan la misma información. He aquí el interés de estudio de las previsiones inferiores 2-monótonas y la razón de dedicarles un capítulo de este trabajo.

En primer lugar, en la Sección 2.1 se dan las definiciones y propiedades más importantes de las previsiones inferiores 2-monótonas, exponiendo las ventajas que presentan frente al caso general de las previsiones inferiores coherentes. En la Sección 2.2 se exponen las consecuencias que tiene la 2-monotonía en el condicionamiento de las previsiones inferiores, focalizándonos en la extensión regular y en las condiciones bajo las que la actualización coherente del modelo es única. Para terminar, en la Sección 2.3 se profundiza en tres modelos particulares de probabilidades inferiores 2-monótonas: intervalos de probabilidad, modelo pari mutuel y modelo de variación total. Se estudian sus propiedades y sus consecuencias en el condicionamiento bajo la extensión regular.

2.1. Previsiones inferiores 2-monótonas

Dado un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ y un conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ cerrado para las operaciones ‘mínimo puntual’: \wedge y ‘máximo puntual’: \vee , una **previsión inferior** \underline{P} en \mathcal{K} es **2-monótona** si:

$$\underline{P}(f \wedge g) + \underline{P}(f \vee g) \geq \underline{P}(f) + \underline{P}(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{K}. \quad (2.1)$$

2.1. PREVISIONES INFERIORES 2-MONÓTONAS

Explícitamente, $f \wedge g$ y $f \vee g$ denotan las variables:

$$(f \wedge g)(\omega) = \min\{f(\omega), g(\omega)\} \quad \text{y} \quad (f \vee g)(\omega) = \max\{f(\omega), g(\omega)\} \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (2.2)$$

Al restringir el conjunto de apuestas a las variables indicadoras de eventos resulta que una **probabilidad inferior** \underline{P} es **2-monótona** si:

$$\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B) \quad \forall A, B \subseteq \Omega. \quad (2.3)$$

A continuación se presentan algunas de las propiedades más importantes de las previsiones y probabilidades inferiores 2-monótonas:

- Tanto para previsiones como para probabilidades inferiores:

2-monotonía \Rightarrow coherencia.

- Dada una probabilidad inferior 2-monótona \underline{P} y un conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$, existe una única previsión inferior 2-monótona \underline{P}' que extiende \underline{P} a \mathcal{K} . Dicha extensión, a la que en un abuso de notación denotaremos por \underline{P} , viene dada por la **integral de Choquet**:

$$\underline{P}(f) = (C) \int f \, d\underline{P} = \min_{\omega \in \Omega} f(\omega) + \int_{\min f}^{\sup f} \underline{P}(\{\omega \mid f(\omega) \geq x\}) \, dx. \quad (2.4)$$

El hecho de que la integral definida sea igual al área debajo de la curva nos permite darle una interpretación geométrica que simplifica los cálculos. Como ejemplo, para un espacio muestral Ω de cardinal 4, en la Figura 2.1 se muestra como la integral de Choquet es igual a la suma del mínimo valor que toma la apuesta sobre Ω y el área sombreado en verde, donde $\omega_{\sigma(1)}$ y $\omega_{\sigma(4)}$ denotan los elementos sobre los que f toma menor y mayor valor respectivamente.

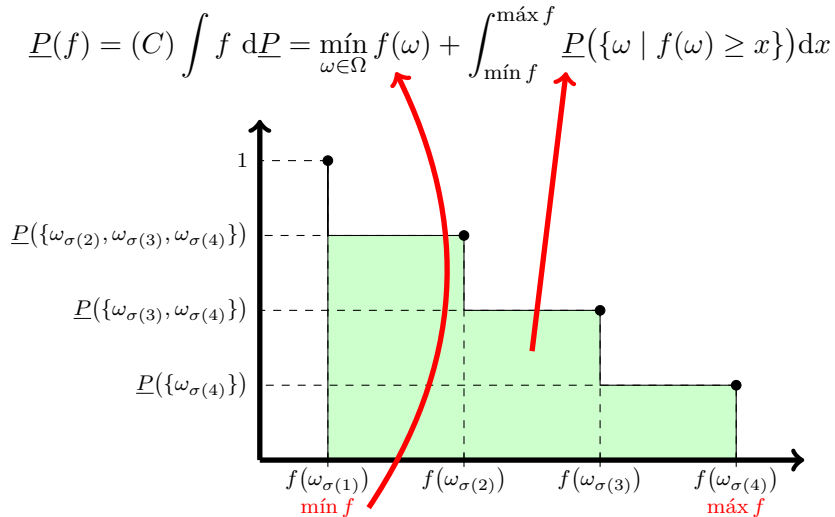
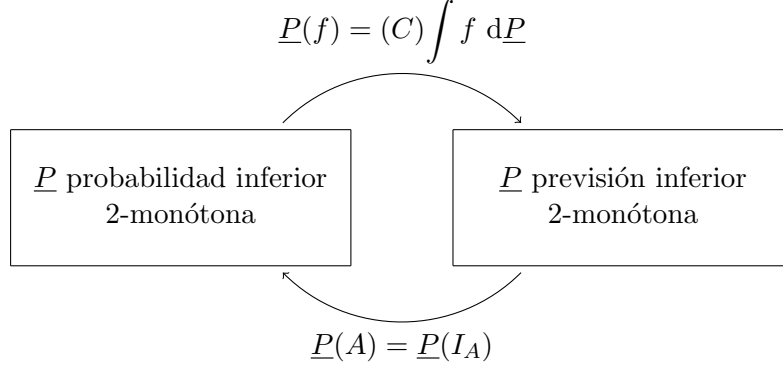


Figura 2.1: Interpretación geométrica de la integral de Choquet para el caso $|\Omega| = 4$.

2.1. PREVISIONES INFERIORES 2-MONÓTONAS

La unicidad de dicha extensión nos garantiza la equivalencia entre previsiones y probabilidades inferiores 2-monótonas:



La restricción a eventos de una previsión inferior 2-monótona resulta ser una probabilidad inferior 2-monótona, unívocamente determinada al igual que ocurría en el capítulo anterior: $\underline{P}(A) = \underline{P}(I_A)$. Sin embargo, dada una probabilidad inferior 2-monótona, pueden existir en general muchas extensiones a apuestas que sean previsiones inferiores coherentes. De todas ellas, solamente una cumple la propiedad de 2-monotonía, y es la que viene dada por la ecuación (2.4).

- Dada una probabilidad inferior 2-monótona \underline{P} definida sobre un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, los puntos extremos del conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$ (asociado a la extensión 2-monótona de \underline{P}) vienen dados por $\{P_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$, donde S_n denota el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ y:

$$\begin{aligned}
 P_\sigma(\{\omega_{\sigma(1)}\}) &= \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}) . \\
 P_\sigma(\{\omega_{\sigma(2)}\}) &= \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \omega_{\sigma(2)}\}) - \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}\}) . \\
 &\dots \\
 P_\sigma(\{\omega_{\sigma(i)}\}) &= \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \dots, \omega_{\sigma(i)}\}) - \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \dots, \omega_{\sigma(i-1)}\}) . \\
 &\dots \\
 P_\sigma(\{\omega_{\sigma(n)}\}) &= 1 - \underline{P}(\{\omega_{\sigma(1)}, \dots, \omega_{\sigma(n-1)}\}) .
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como consecuencia y dado que dos permutaciones diferentes pueden dar lugar al mismo punto extremo, concluimos que $\mathcal{M}(\underline{P})$ tiene a lo sumo $|S_n| = n!$ puntos extremos diferentes.

Ejemplo 2.1. Consideremos la probabilidad inferior \underline{P} definida sobre $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ según:

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0.1	0.4	0.3	0.6	0.5	0.7

Cuadro 2.1: Probabilidad inferior \underline{P} definida sobre Ω .

2.1. PREVISIONES INFERIORES 2-MONÓTONAS

Si echamos la vista atrás, ya hemos trabajado con esta probabilidad inferior en el Ejemplo 1.4, donde hemos comentado que se trata de una probabilidad inferior coherente. Estudiemos ahora si satisface la propiedad de 2-monotonía. Dados $A, B \subseteq \Omega$, existen dos casos en los que la ecuación (2.3) se satisface trivialmente:

$$A \subseteq B \text{ ó } B \subseteq A \Rightarrow \underline{P}(A \cap B) + \underline{P}(A \cup B) = \underline{P}(A) + \underline{P}(B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B),$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \underline{P}(A \cap B) + \underline{P}(A \cup B) = \underline{P}(A \cup B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B),$$

donde en la segunda ecuación hemos utilizado la superlinealidad **(C3)** de las probabilidades inferiores coherentes. Así, únicamente debemos tratar los siguientes casos:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{\omega_1, \omega_2\} \\ B = \{\omega_1, \omega_3\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{P}(A \cap B) + \underline{P}(A \cup B) = \underline{P}(\{\omega_1\}) + \underline{P}(\Omega) = 0.1 + 1 = 1.1 \geq \\ 1.1 = 0.6 + 0.5 = \underline{P}(A) + \underline{P}(B). \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = \{\omega_1, \omega_2\} \\ B = \{\omega_2, \omega_3\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{P}(A \cap B) + \underline{P}(A \cup B) = \underline{P}(\{\omega_2\}) + \underline{P}(\Omega) = 0.4 + 1 = 1.4 \geq \\ 1.3 = 0.6 + 0.7 = \underline{P}(A) + \underline{P}(B). \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = \{\omega_1, \omega_3\} \\ B = \{\omega_2, \omega_3\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{P}(A \cap B) + \underline{P}(A \cup B) = \underline{P}(\{\omega_3\}) + \underline{P}(\Omega) = 0.3 + 1 = 1.3 \geq \\ 1.2 = 0.5 + 0.7 = \underline{P}(A) + \underline{P}(B). \end{array}$$

Efectivamente, \underline{P} es una probabilidad inferior 2-monótona. De hecho, en la siguiente proposición demostramos como, para $|\Omega| = 3$, probabilidades inferiores coherentes y 2-monótonas resultan ser equivalentes. Podemos utilizar entonces la ecuación (2.5) para calcular los puntos extremos de su conjunto credal asociado, obteniendo:

		ω_1	ω_2	ω_3
$\sigma_1 = (1, 2, 3)$	P_{σ_1}	0.1	0.5	0.4
$\sigma_2 = (1, 3, 2)$	P_{σ_2}	0.1	0.5	0.4
$\sigma_3 = (2, 1, 3)$	P_{σ_3}	0.2	0.4	0.4
$\sigma_4 = (2, 3, 1)$	P_{σ_4}	0.3	0.4	0.3
$\sigma_5 = (3, 1, 2)$	P_{σ_5}	0.2	0.5	0.3
$\sigma_6 = (3, 2, 1)$	P_{σ_6}	0.3	0.4	0.3

Dado que dos de los puntos se repiten, resulta un conjunto credal con cuatro puntos extremos diferentes:

$$Ext(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{(0.1, 0.5, 0.4), (0.3, 0.4, 0.3), (0.2, 0.5, 0.3), (0.2, 0.4, 0.4)\}.$$

Gráficamente se muestra en la Figura 2.2.

2.1. PREVISIONES INFERIORES 2-MONÓTONAS

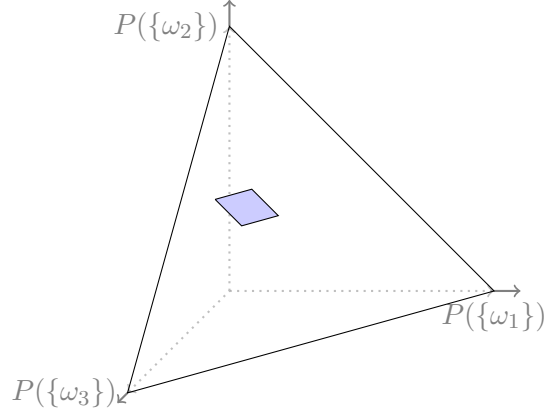


Figura 2.2: Representación gráfica de $\mathcal{M}(\underline{P})$.

Vemos como la 2-monotonía y, por tanto, la capacidad de aplicar la ecuación (2.5), nos permite calcular de una forma sencilla y directa los puntos extremos del conjunto credal. Finalmente, podemos utilizar la integral de Choquet para calcular la extensión de \underline{P} a un conjunto general de apuestas. Consideremos, por ejemplo, la apuesta dada por:

$$f = 1500I_1 + 2000I_2 + 500I_3,$$

donde I_1 , I_2 e I_3 denotan las variables indicadoras de los eventos $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$ y $\{\omega_3\}$ respectivamente. La interpretación geométrica de la integral de Choquet dada por la Figura 2.3 nos dice que $\underline{P}(f)$ será igual a la suma de $\min_{\omega \in \Omega} f(\omega) = f(\omega_3)$ y el área de la zona sombreada. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{P}(f) = & f(\omega_3) + (f(\omega_2) - f(\omega_3))\underline{P}(\{\omega_2\}) + \\ & (f(\omega_1) - f(\omega_3))(\underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) - \underline{P}(\{\omega_2\})) = 1300. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para esta probabilidad inferior, en el Ejemplo 1.4 habíamos obtenido dos extensiones diferentes para la apuesta f . Sin embargo, ahora vemos como solamente uno de esos valores se corresponde con la extensión 2-monótona de \underline{P} . La expresión (2.6) para $\underline{P}(f)$ es válida para cualquier apuesta satisfaciendo $f(\omega_3) < f(\omega_1) < f(\omega_2)$. \square

En el anterior ejemplo hemos visto las dos principales ventajas de las probabilidades inferiores 2-monótonas: no es necesario calcular los puntos extremos del conjunto credal para obtener la extensión a apuestas y, en el caso en el que sí se quisieran calcular dichos puntos extremos, la ecuación (2.5) nos facilita bastante el trabajo. No obstante, el coste computacional de dicho cálculo aumenta rápidamente con el tamaño del espacio muestral. Más tarde veremos que, para algunos casos particulares de probabilidades inferiores 2-monótonas, los cálculos se simplifican y el número máximo de puntos extremos diferentes disminuye. En el siguiente resultado se demuestra una propiedad de los espacios muestrales de cardinal 3 que ya

2.1. PREVISIONES INFERIORES 2-MONÓTONAS

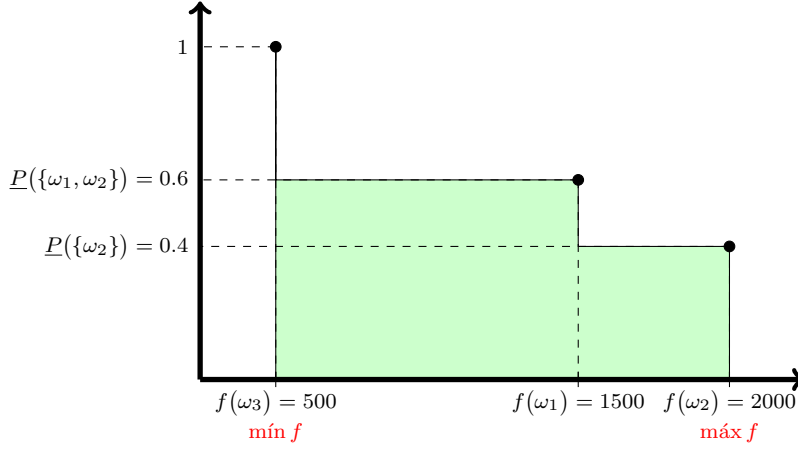


Figura 2.3: Interpretación geométrica de la integral de Choquet para el cálculo de $\underline{P}(f)$.

hemos anticipado: coherencia y 2-monotonía resultan equivalentes en probabilidades inferiores.

Proposición 2.1. (*[Propio]*) Sea \underline{P} una probabilidad inferior coherente definida sobre un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Entonces \underline{P} es 2-monótona.

Demostración. Tal y como hemos visto en el ejemplo anterior, tan solo hemos de demostrar la ecuación (2.3) para los subconjuntos de cardinal 2 diferentes y con intersección no vacía, ya que para el resto de casos se cumple trivialmente.

Así, sean $A, B \subseteq \Omega$ tal que $|A| = |B| = 2$, $A \neq B$ y $A \cap B \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ y $B = \{\omega_1, \omega_3\}$. Por reducción al absurdo, supongamos que \underline{P} es coherente y no es 2-monótona. Entonces se cumple:

$$\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) < \underline{P}(A) + \underline{P}(B),$$

es decir:

$$\underline{P}(\Omega) + \underline{P}(\{\omega_1\}) = 1 + \underline{P}(\{\omega_1\}) < \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) + \underline{P}(\{\omega_1, \omega_3\}).$$

Utilizando la relación de dualidad (1.14):

$$1 + \underline{P}(\{\omega_1\}) < 1 - \overline{P}(\{\omega_3\}) + 1 - \overline{P}(\{\omega_2\}) \Rightarrow 1 > \underline{P}(\{\omega_1\}) + \overline{P}(\{\omega_2\}) + \overline{P}(\{\omega_3\}).$$

Por ser \underline{P} coherente, de acuerdo con la ecuación (1.11), $\exists P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $\underline{P}(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_1\})$. De la ecuación (1.12) se concluye que $P(\{\omega_2\}) \leq \overline{P}(\{\omega_2\})$ y $P(\{\omega_3\}) \leq \overline{P}(\{\omega_3\})$, por lo que:

$$\begin{aligned} P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) &= \underline{P}(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) \\ &\leq \underline{P}(\{\omega_1\}) + \overline{P}(\{\omega_2\}) + \overline{P}(\{\omega_3\}) < 1, \end{aligned}$$

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

contradiciendo $P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = 1 \forall P \in \mathcal{M}(\underline{P})$. Habiendo llegado a contradicción, concluimos que \underline{P} es 2-monótona. \square

2.2. Extensión natural y regular

El objetivo de esta sección es determinar bajo qué condiciones una previsión inferior 2-monótona \underline{P} puede ser actualizada de forma única y coherente a una previsión inferior condicionada $\underline{P}(\cdot | \mathcal{B})$. A continuación se presentan algunos resultados que nos ayudarán a cumplir nuestro objetivo. Comenzamos con un conocido resultado que simplifica el cálculo de la extensión regular restringida a eventos cuando la previsión inferior inicial es 2-monótona.

Proposición 2.2. (*[3], Proposition 3.*) Sean \underline{P} una previsión inferior 2-monótona en $\mathcal{L}(\Omega)$ y $B \subseteq \Omega$ tal que $\overline{P}(B) > 0$, entonces dado un evento A se cumple:

$$\underline{R}(A | B) = \begin{cases} \frac{\underline{P}(A \cap B)}{\underline{P}(A \cap B) + \overline{P}(A^c \cap B)} & \text{si } \overline{P}(A^c \cap B) > 0, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Equivalentemente:

$$\overline{R}(A | B) = \begin{cases} \frac{\overline{P}(A \cap B)}{\overline{P}(A \cap B) + \underline{P}(A^c \cap B)} & \text{si } \underline{P}(A^c \cap B) > 0, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Además, $\underline{R}(\cdot | B)$ es 2-monótona en su restricción a eventos.

Ejemplo 2.2. Consideremos de nuevo la probabilidad inferior dada por el Cuadro 2.1. Tomando $B = \{\omega_1, \omega_2\}$, la ecuación (2.7) nos permite calcular:

$$\underline{R}(\{\omega_1\} | \{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{\underline{P}(\{\omega_1\})}{\underline{P}(\{\omega_1\}) + \overline{P}(\{\omega_2\})} = \frac{\underline{P}(\{\omega_1\})}{\underline{P}(\{\omega_1\}) + 1 - \underline{P}(\{\omega_1, \omega_3\})} = 0.1\widehat{6}.$$

$$\underline{R}(\{\omega_2\} | \{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{\underline{P}(\{\omega_2\})}{\underline{P}(\{\omega_2\}) + \overline{P}(\{\omega_1\})} = \frac{\underline{P}(\{\omega_2\})}{\underline{P}(\{\omega_2\}) + 1 - \underline{P}(\{\omega_2, \omega_3\})} = 0.57.$$

$$\underline{R}(\{\omega_3\} | \{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{\underline{P}(\emptyset)}{\underline{P}(\emptyset) + \overline{P}(\{\omega_1, \omega_2\})} = 0.$$

Idénticamente para el resto de conjuntos obtenemos que la extensión regular de \underline{P} condicionada por el evento $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ viene dada por:

A	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
$\underline{R}(\cdot \{\omega_1, \omega_2\})$	$0.1\widehat{6}$	0.57	0	1	$0.1\widehat{6}$	0.57

Vemos como son los mismos resultados que los obtenidos en el Ejemplo 1.7 aplicando la ecuación (1.21).

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

Al tratarse de la extensión regular sabemos que es coherente (lo hemos comprobado en el Ejemplo 1.7) y por tanto 2-monótona ($|\Omega| = 3$), tal y como predice la *Proposición 2.2*. \square

En el siguiente ejemplo se muestra como la ecuación (2.7) solamente es válida cuando la probabilidad inferior \underline{P} es 2-monótona.

Ejemplo 2.3. Sea el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, consideramos el conjunto credal dado por los puntos extremos:

$$Ext(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{P_1, P_2\} = \{(0.5, 0.5, 0, 0), (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)\}.$$

Este conjunto credal define, de acuerdo con la ecuación (1.13), la siguiente probabilidad inferior coherente:

A	\underline{P}	A	\underline{P}
$\{\omega_1\}$	0.25	$\{\omega_2, \omega_3\}$	0.5
$\{\omega_2\}$	0.25	$\{\omega_2, \omega_4\}$	0.5
$\{\omega_3\}$	0	$\{\omega_3, \omega_4\}$	0
$\{\omega_4\}$	0	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$	0.75
$\{\omega_1, \omega_2\}$	0.5	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$	0.75
$\{\omega_1, \omega_3\}$	0.5	$\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$	0.5
$\{\omega_1, \omega_4\}$	0.5	$\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$	0.5

Se trata de una probabilidad inferior coherente que no es 2-monótona, ya que tomando $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ y $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ se tiene:

$$\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) = \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) + \underline{P}(\omega_3) = 0.75 <$$

$$1 = \underline{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) + \underline{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) = \underline{P}(A) + \underline{P}(B),$$

lo que incumple la condición de monotonía (2.3).

Tomemos ahora $A = \{\omega_1\}$ y $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ y calculemos $\underline{R}(A | B)$. Dado que $\underline{P}(B) = \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.5 > 0$, estamos en el Caso 2.1 de la sección 1.3 y la extensión regular viene dada por la ecuación (1.21):

$$\underline{R}(A | B) = \min \{P(A | B) : P \in \mathcal{M}(\underline{P})\} = \min \left\{ \frac{P(\{\omega_1\})}{P(\{\omega_1, \omega_2\})} : P \in \mathcal{M}(\underline{P}) \right\}.$$

El carácter cerrado y convexo del conjunto credal implica que $\forall P \in \mathcal{M}(\underline{P})$, $P = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2$ para algún $\alpha \in [0, 1]$. Dado que $P_1(\{\omega_1\}) = P_1(\{\omega_2\})$ y $P_2(\{\omega_1\}) = P_2(\{\omega_2\})$, también ha de cumplirse $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) \forall P \in \mathcal{M}(\underline{P})$, de lo que se concluye que

$$\underline{R}(A | B) = \min \left\{ \frac{P(\{\omega_1\})}{2P(\{\omega_1\})} : P \in \mathcal{M}(\underline{P}) \right\} = 0.5.$$

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

Calculemos ahora el resultado de la ecuación (2.7). Dado que $\overline{P}(A^c \cap B) = \overline{P}(\{\omega_2\}) = 1 - \underline{P}(\{\omega_2\}^c) = 1 - \underline{P}(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}) = 0.5 > 0$, obtenemos:

$$\frac{\underline{P}(A \cap B)}{\underline{P}(A \cap B) + \overline{P}(A^c \cap B)} = \frac{\underline{P}(\{\omega_1\})}{\underline{P}(\{\omega_1\}) + \overline{P}(\{\omega_2\})} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3} \neq 0.5 = \underline{R}(A | B),$$

quedando así de manifiesto que la ecuación (2.7) no es válida cuando la probabilidad inferior no es 2-monótona. \square

Por otro lado, aunque la *Proposición 2.2* nos asegura la 2-monotonía de la extensión regular vista como una probabilidad inferior, nada se dice de ella al actuar sobre apuestas. Esto se aprecia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Sea el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, consideramos la probabilidad inferior dada por las siguientes tablas:

A	\underline{P}	A	\underline{P}
$\{\omega_1\}$	1/8	$\{\omega_2, \omega_3\}$	1/8
$\{\omega_2\}$	1/8	$\{\omega_2, \omega_4\}$	3/8
$\{\omega_3\}$	0	$\{\omega_3, \omega_4\}$	1/4
$\{\omega_4\}$	0	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$	1/4
$\{\omega_1, \omega_2\}$	1/4	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$	3/4
$\{\omega_1, \omega_3\}$	1/8	$\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$	5/8
$\{\omega_1, \omega_4\}$	3/8	$\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$	5/8

Tal y como se demuestra en (A2.4), P se trata de una probabilidad inferior 2-monótona. Consideramos el conjunto $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ satisfaciendo $\overline{P}(B) = 1 - \underline{P}(B^c) = 1 - \underline{P}(\{\omega_4\}) = 1 > 0$. Utilizando la ecuación (2.7) podemos calcular la extensión regular restringida a eventos, que de acuerdo con la *Proposición 2.2* sabemos que es 2-monótona. En (A2.4) se calcula para los subconjuntos que nos interesarán posteriormente, resumidos en la siguiente tabla:

A	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
$\underline{R}(\cdot B)$	1/6	1/2	1

Definimos la apuesta $f = 3I_1 + 2I_2 + I_3$. Utilizando la interpretación geométrica de la integral de Choquet que se muestra en la Figura 2.4, obtenemos la extensión:

$$\begin{aligned} \underline{P}(f) &= f(\omega_1)\underline{P}(\{\omega_1\}) + f(\omega_2)(\underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) - \underline{P}(\{\omega_1\})) + \\ & f(\omega_3)(\underline{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) - \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\})) = 5/8. \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación (1.19), la extensión regular de f inducida por \underline{P} se calcula como:

$$\underline{R}(f | B) = \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))\}.$$

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

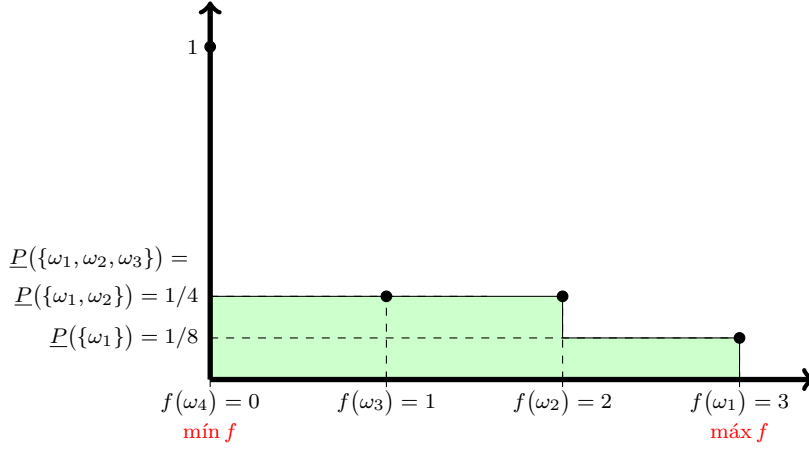


Figura 2.4: Interpretación geométrica de la integral de Choquet para el cálculo de $\underline{P}(f)$.

En (A2.4) se demuestra que este mínimo resulta ser $\underline{R}(f | B) = 7/4$. Por otro lado, con ayuda de la Figura 2.5, calculamos la integral de Choquet de la restricción a sucesos de $\underline{R}(\cdot | B)$, obteniendo:

$$(C) \int f d\underline{R}(\cdot | B) =$$

$$f(\omega_1)\underline{R}(\{\omega_1\} | B) + f(\omega_2)(\underline{R}(\{\omega_1, \omega_2\} | B) - \underline{R}(\{\omega_1\} | B)) +$$

$$f(\omega_3)(\underline{R}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} | B) - \underline{R}(\{\omega_1, \omega_2\} | B)) = 5/3.$$

Es decir, $\underline{R}(f | B) = 7/4$ no coincide con la integral de Choquet de su restricción a sucesos. Como ya hemos comentado, esta es la única extensión de $\underline{R}(\cdot | B)$ a apuestas que cumple la propiedad de 2-monotonía, luego la previsión inferior $\underline{R}(\cdot | B)$ no es 2-monótona. Es decir, acabamos de encontrar una previsión inferior 2-monótona \underline{P} cuya extensión regular no es 2-monótona. \square

De nuevo, los espacios muestrales de cardinal 3 son especiales en este sentido, y es que en ese caso la 2-monotonía se preserva siempre bajo la extensión regular, incluso para el caso de previsiones inferiores. Esto se demuestra en la *Proposición 2.4*, cuya demostración requiere de un par de resultados previos.

Lema 2.1. ([3], Lemma 1.) *Sea \underline{P} una previsión inferior coherente en $\mathcal{L}(\Omega)$ cuya restricción a eventos es 0-1-evaluada. Entonces \underline{P} es la única extensión coherente a apuestas de su restricción a eventos, y viene dada por:*

$$\underline{P}(f) = \max_{D: \underline{P}(D)=1} \min_{\omega \in D} f(\omega) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega). \quad (2.9)$$

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

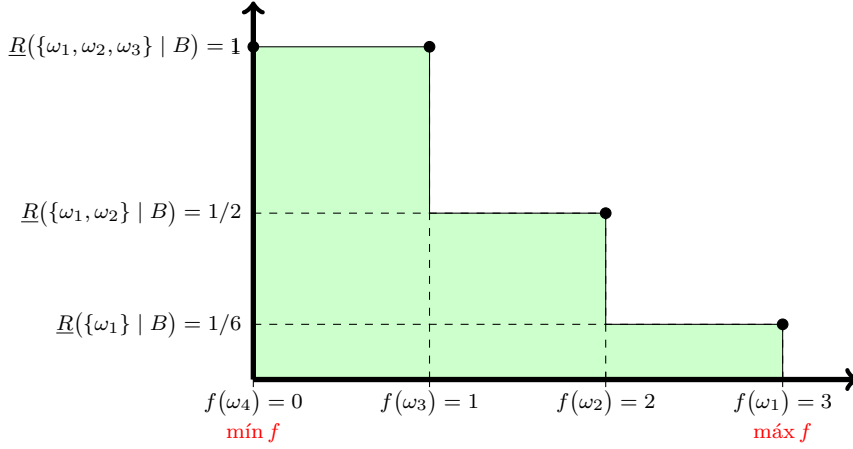


Figura 2.5: Interpretación geométrica de la integral de Choquet para el cálculo de $(C) \int dd\underline{R}(\cdot | B)$.

Proposición 2.3. ([3], Proposition 4.) Sean \underline{P} una previsión inferior 2-monótona y $B \subseteq \Omega$ tal que $\underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B)$, entonces se cumple:

$$\underline{R}(f | B) = \min_{\omega \in C} f(\omega) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega), \quad (2.10)$$

donde C es el menor subconjunto de B satisfaciendo $\underline{R}(C | B) = 1$.

Demostración. En primer lugar, dado que \underline{P} es una previsión inferior 2-monótona y $\overline{P}(B) > 0$, podemos aplicar la *Proposición 2.2* para concluir que la extensión regular viene dada por la ecuación (2.7). Así, sea $A \subseteq \Omega$ un evento cualquiera, dado que $\underline{P}(B) = 0$ implica, por monotonía (1.6) $\underline{P}(A \cap B) = 0$, tenemos que $\underline{R}(A | B) = 0$ si $\overline{P}(A^c \cap B) > 0$ y $\underline{R}(A | B) = 1$ en otro caso. Es decir, la restricción a eventos de $\underline{R}(\cdot | B)$ es una función 0-1-evaluada. Esto nos permite aplicar el *Lema 2.1* para concluir que $\underline{R}(\cdot | B)$ es la única extensión coherente a $\mathcal{L}(\Omega)$ de su restricción a eventos y, para una apuesta cualquiera $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, viene dada por:

$$\underline{R}(f | B) = \max_{D: \underline{R}(D|B)=1} \min_{\omega \in D} f(\omega). \quad (2.11)$$

La *Proposición 2.2*, en la que se garantiza que $\underline{R}(\cdot | B)$ es 2-monótona en su restricción a eventos, y la monotonía (1.6) de las probabilidades inferiores coherentes, nos permiten concluir que dados $C_1, C_2 \in \{D \subseteq \Omega : \underline{R}(D | B) = 1\}$ se cumple $(C_1 \cap C_2) \in \{D \subseteq \Omega : \underline{R}(D | B) = 1\}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Proposición 2.2} \Rightarrow \underline{R}(C_1 | B) + \underline{R}(C_2 | B) \leq \underline{R}(C_1 \cap C_2 | B) + \underline{R}(C_1 \cup C_2 | B) \\ \text{Ecuación (1.6)} \Rightarrow \left(\underline{R}(C_1 | B) = \underline{R}(C_2 | B) = 1 \Rightarrow \underline{R}(C_1 \cup C_2 | B) = 1 \right) \end{array} \right\}$$

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

$$\Rightarrow \underline{R}(C_1 \cap C_2 \mid B) = 1 \Rightarrow (C_1 \cap C_2) \in \{D \subseteq \Omega : \underline{R}(D \mid B) = 1\}.$$

De aquí resulta que $\{D \subseteq \Omega : \underline{R}(D \mid B) = 1\}$ posee un elemento minimal, al que denotaremos C . Dado que cuanto menor sea el conjunto en el que se está tomando el mínimo, mayor será dicho mínimo, el máximo en cuestión de la ecuación (2.11) se alcanza en C , obteniendo así la ecuación (2.10) y concluyendo la demostración. \square

Proposición 2.4. (*[Propio]*) Sea \underline{P} una previsión inferior 2-monótona definida sobre un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ y $B \subseteq \Omega$ tal que $\underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B)$, entonces $\underline{R}(\cdot \mid B)$ es 2-monótona.

Demostración. Aplicando la *Proposición 2.3* tenemos que

$$\underline{R}(f \mid B) = \min_{\omega \in C} f(\omega) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega),$$

con C el menor subconjunto de B tal que $\underline{R}(C \mid B) = 1$. Consideramos dos apuestas $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ definidas de forma general como:

$$f = aI_1 + bI_2 + \alpha I_3, \quad g = cI_1 + dI_2 + \beta I_3,$$

asumiendo sin pérdida de generalidad que $a \leq b$. De esta forma, las apuestas ‘máximo puntual’ y ‘mínimo puntual’ son, respectivamente:

$$f \vee g = \max\{a, c\}I_1 + \max\{b, d\}I_2 + \max\{\alpha, \beta\}I_3,$$

$$f \wedge g = \min\{a, c\}I_1 + \min\{b, d\}I_2 + \min\{\alpha, \beta\}I_3.$$

Diferenciamos dos casos:

1. $|B| = 2$. Sin pérdida de generalidad asumimos $B = \{\omega_1, \omega_2\}$. Existen a su vez dos posibilidades:

1.1. $C = B$. Esto implica: $\underline{R}(f \mid B) = \min_{\omega \in B} f(\omega) = \min\{f(\omega_1), f(\omega_2)\} \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)$, por lo que

$$\underline{R}(f \mid B) = \min\{a, b\} = a, \quad \underline{R}(g \mid B) = \min\{c, d\},$$

$$\underline{R}(f \vee g \mid B) = \min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\},$$

$$\underline{R}(f \wedge g \mid B) = \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\}.$$

Así, $\underline{R}(\cdot \mid B)$ es 2-monótona si y solo si:

$$\underline{R}(f \vee g \mid B) + \underline{R}(f \wedge g \mid B) \geq \underline{R}(f \mid B) + \underline{R}(g \mid B) \Leftrightarrow$$

$$\min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} + \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} \geq a + \min\{c, d\}$$

para cualesquiera valores no negativos $a \leq b$, c y d . Por casos:

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

- $c \leq d \Rightarrow \underline{R}(g | B) = c = \min\{c, d\}$:

$$\left. \begin{aligned} \min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} &= \max\{a, c\} \\ \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} &= \min\{a, c\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} + \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} = a + c.$$

- $c > d \Rightarrow \underline{R}(g | B) = d = \min\{c, d\}$:

Si $a \geq c$ entonces:

$$\left. \begin{aligned} \min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} &= \min\{a, b\} = a \\ \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} &= \min\{c, d\} = d \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} + \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} = a + d.$$

Si $a < c$ entonces diferenciamos de nuevo dos casos. Si $b \geq d$:

$$\left. \begin{aligned} \min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} &= \min\{c, b\} \geq a, d \\ \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} &= \min\{a, d\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} + \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} \geq a + d.$$

Por otro lado, si $b < d$:

$$\left. \begin{aligned} \min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} &= \min\{c, d\} = d \\ \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} &= \min\{a, b\} = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\min\{\max\{a, c\}, \max\{b, d\}\} + \min\{\min\{a, c\}, \min\{b, d\}\} = a + d.$$

1.2. $C \subset B$. Si $C = \{\omega_1\}$, entonces $\underline{R}(f | B) = f(\omega_1) \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)$. Así:

$$\underline{R}(f | B) = a, \quad \underline{R}(g | B) = c,$$

$$\underline{R}(f \vee g | B) = \max\{a, c\},$$

$$\underline{R}(f \wedge g | B) = \min\{a, c\},$$

y por tanto:

$$\underline{R}(f \vee g | B) + \underline{R}(f \wedge g | B) = a + c = \underline{R}(f | B) + \underline{R}(g | B).$$

Si $C = \{\omega_2\}$ entonces la demostración es análoga.

2. $|B| = 1$. El conjunto C es unipuntual y la demostración es análoga a la realizada en el caso 1.2. \square

Finalmente, el siguiente teorema establece la condición necesaria y suficiente bajo la cual el condicionamiento coherente de una previsión inferior 2-monótona es único.

2.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

Teorema 2.1. ([3], Theorem 1.) Sea \underline{P} una previsión inferior 2-monótona en $\mathcal{L}(\Omega)$ y \mathcal{B} una partición de Ω , entonces:

$$\underline{E}(\cdot | \mathcal{B}) = \underline{R}(\cdot | \mathcal{B}) \Leftrightarrow \overline{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } \underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B). \quad (2.12)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la ecuación (1.16) y el Corolario 1.1 tenemos que:

$$\underline{E}(\cdot | \mathcal{B}) = \underline{R}(\cdot | \mathcal{B}) \Leftrightarrow \underline{E}(\cdot | B) = \underline{R}(\cdot | B) \forall B \in \mathcal{B} \text{ tal que } \underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B).$$

Así, dado un subconjunto cualquiera $B \in \mathcal{B}$ tal que $\underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B)$, debemos demostrar que:

$$\underline{E}(\cdot | B) = \underline{R}(\cdot | B) \Leftrightarrow \overline{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in B.$$

Dado que $\underline{P}(B) = 0$, de la ecuación (1.18) y de la Proposición 2.3 se concluye que:

$$\underline{E}(\cdot | B) = \underline{R}(\cdot | B) \Leftrightarrow \nexists C \subset B \text{ tal que } \underline{R}(C | B) = 1.$$

Aplicando ahora la Proposición 2.2 resulta:

$$\nexists C \subset B \text{ tal que } \underline{R}(C | B) = 1 \Leftrightarrow \overline{P}(C^c \cap B) > 0 \forall C \subset B.$$

Si demostramos que esto último es equivalente a $\overline{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in B$ habremos terminado la demostración.

Por un lado, supongamos que $\overline{P}(C^c \cap B) > 0 \forall C \subset B$ y tomemos $\omega \in B$ cualquiera pero fijo. Definimos $C = B \setminus \{\omega\}$. Se cumple $C \subset B$, $C^c \cap B = \{\omega\}$ y, utilizando la hipótesis, $\overline{P}(C^c \cap B) = \overline{P}(\{\omega\}) > 0$.

Por otro lado, por reducción al absurdo, supongamos que $\underline{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in B$ pero $\exists C \subset B$ tal que $\overline{P}(C^c \cap B) = 0$. Sea $\omega \in B$ tal que $\omega \notin C$. Se tiene que $\{\omega\} \subseteq (C^c \cap B)$. Por hipótesis $\overline{P}(\{\omega\}) > 0$ y, por monotonía (1.6), $\overline{P}(C^c \cap B) > 0$, llegando así a contradicción. \square

A continuación verificamos con un ejemplo el anterior resultado.

Ejemplo 2.5. Consideramos la probabilidad inferior \underline{P} definida sobre el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ como sigue:

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0	0	0.3	0	0.3	1
\overline{P}	0	0.7	1	0.7	1	1

Consideramos la partición de Ω dada por $\mathcal{B} = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$, y tomamos $B = \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{B}$. Se cumple $\underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B) = 0.7$, y además $\overline{P}(\{\omega_1\}) = 0$ con $\omega_1 \in B$. Así, del Teorema 2.1 concluimos que $\underline{E}(\cdot | \mathcal{B}) \neq \underline{R}(\cdot | \mathcal{B})$. Vamos a comprobarlo

2.3. CASOS PARTICULARES

explícitamente. Consideramos el conjunto $A = \{\omega_2\}$. Dado que $\underline{P}(B) = 0$, de la ecuación (1.18) se deduce que:

$$\underline{E}(A | B) = \min_{\omega \in B} I_2(\omega) = I_2(\omega_1) = 0.$$

Por otro lado, dado que $\overline{P}(A^c \cap B) = \overline{P}(\{\omega_1\}) = 0$, de la ecuación (2.7) se obtiene: $\underline{R}(A | B) = 1$. Es decir, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $\underline{E}(\cdot | B) \neq \underline{R}(\cdot | B)$ y, por tanto, $\underline{E}(\cdot | \mathcal{B}) \neq \underline{R}(\cdot | \mathcal{B})$. \square

2.3. Casos particulares

Los tres modelos principales que particularizan a las probabilidades inferiores 2-monótonas son los intervalos de probabilidad, el modelo pari mutuel y el modelo de variación total. A continuación profundizamos en cada uno de ellos: damos sus definiciones y propiedades básicas, demostramos que son casos particulares de probabilidades inferiores 2-monótonas y estudiamos su condicionamiento a través de la extensión regular, obteniendo diferentes expresiones en cada caso.

2.3.1. Intervalos de probabilidad

Sea $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un espacio muestral, un **intervalo de probabilidad** \mathcal{I} en Ω es una colección de intervalos

$$\mathcal{I} = \{[l_i, u_i] : i = 1, \dots, n\} \quad (2.13)$$

verificando $0 \leq l_i \leq u_i \leq 1 \ \forall i = 1, \dots, n$. De forma similar a como hicimos con las previsiones inferiores, dado un intervalo de probabilidad \mathcal{I} podemos definir su **conjunto credal** asociado como:

$$\mathcal{M}(\mathcal{I}) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : l_i \leq p_i \leq u_i \ \forall i = 1, \dots, n\}, \quad (2.14)$$

donde hemos denotado $p_i = P(\{\omega_i\})$. De esta manera, los intervalos que componen \mathcal{I} se interpretan como un conjunto de extremos de probabilidad: l_i y u_i asignan una cota inferior y una cota superior para la probabilidad de ω_i . Esto nos lleva a la interpretación epistémica de las previsiones inferiores mencionada en la Sección 1.2.

Para que el conjunto credal sea no vacío ha de existir al menos una probabilidad $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$ que satisfaga la condición $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Esto se traduce en la condición:

$$\sum_{i=1}^n l_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^n u_i, \quad (2.15)$$

y a los intervalos de probabilidad verificándola nos referiremos como **propios**. De aquí en adelante únicamente trabajaremos con este tipo de intervalos.

2.3. CASOS PARTICULARES

Dado un intervalo de probabilidad \mathcal{I} , definimos su **probabilidad inferior** asociada como:

$$\underline{P}(A) = \min\{P(A) : P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})\} \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (2.16)$$

Por definición, al tratarse de la envolvente inferior de un conjunto credal, \underline{P} es coherente. Supongamos que para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $l_i < \underline{P}(\{\omega_i\})$ (o $u_i > \underline{P}(\{x_i\})$), entonces l_i (o u_i) está dando una cota demasiado baja (o demasiado alta) de la probabilidad de ω_i , una cota que no puede ser alcanzada por ninguna probabilidad. Así, para que el intervalo de probabilidad sea lo más informativo posible exigimos la condición:

$$\underline{P}(\{\omega_i\}) = l_i, \quad \overline{P}(\{\omega_i\}) = u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.17)$$

lo que es equivalente a $\mathcal{M}(\mathcal{I}) = \mathcal{M}(\underline{P})$, donde $\mathcal{M}(\underline{P})$ es el conjunto credal de \underline{P} :

$$\mathcal{M}(\underline{P}) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) : P(A) \geq \underline{P}(A) \quad \forall A \subseteq \Omega\}. \quad (2.18)$$

A los intervalos de probabilidad satisfaciendo (2.17) se les dirá **coherentes**. En ([4], Proposition 1) se demuestra que (2.17) resulta ser equivalente a:

$$u_i + \sum_{j \neq i} l_j \leq 1 \quad \text{y} \quad l_i + \sum_{j \neq i} u_j \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.19)$$

condición más sencilla de comprobar.

Cabe observar que el conjunto credal $\mathcal{M}(\mathcal{I})$ del que se está tomando el entorno inferior en (2.16) solamente está formado por restricciones de la forma $p_i \geq l_i$ y $p_i \leq u_i$, mientras que el conjunto credal $\mathcal{M}(\underline{P})$ de una probabilidad inferior general (no necesariamente intervalo de probabilidad) puede estar formado por restricciones más generales. Esto se observa en el Ejemplo 1.3, en el cual obtuvimos $\mathcal{M}(\underline{P}) = \{(p_a, p_d, p_l) : p_d \geq 4(p_l - p_a) - p_a, p_l \geq p_a\}$. Así, los intervalos de probabilidad puedan verse como casos particulares de probabilidades inferiores coherentes en los que el conjunto credal solamente está formado por dicho tipo de restricciones.

Una ventaja de los intervalos de probabilidad es que a partir de un intervalo cualquiera $\mathcal{I} = \{[l_i, u_i] : i = 1, \dots, n\}$ es posible obtener un intervalo coherente $\mathcal{I}' = \{[l'_i, u'_i] : i = 1, \dots, n\}$ con el mismo conjunto credal asociado, es decir, que recoge la misma información pero de forma más precisa. Esto se consigue modificando los extremos de los intervalos tal y como se indica a continuación:

$$l'_i = \max \left\{ l_i, 1 - \sum_{j \neq i} u_j \right\}, \quad u'_i = \min \left\{ u_i, 1 - \sum_{j \neq i} l_j \right\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.20)$$

Además, en ([4], Proposition 4) se demuestra que si $\mathcal{I} = \{[l_i, u_i] : i = 1, \dots, n\}$ es un intervalo de probabilidad coherente entonces su probabilidad inferior asociada \underline{P} puede calcularse como:

$$\underline{P}(A) = \max \left\{ \sum_{\omega_i \in A} l_i, 1 - \sum_{\omega_i \notin A} u_i \right\} \quad \forall A \subseteq \Omega, \quad (2.21)$$

2.3. CASOS PARTICULARES

y su probabilidad superior conjugada como:

$$\bar{P}(A) = \min \left\{ \sum_{\omega_i \in A} u_i, 1 - \sum_{\omega_i \notin A} l_i \right\} \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (2.22)$$

Ejemplo 2.6. Una hamburguesería que se ha establecido recientemente en España quiere hacer un estudio de ventas. Se ofrecen hamburguesas veganas, de carne y de pollo, pero un fallo en su base de datos no les permite saber de forma exacta cual es el ratio de ventas de cada tipo. Con la información que disponen, creen saber que el ratio de hamburguesas veganas es inferior al 30 %, la de hamburguesas de carne está entre el 70 y el 80 % y la de hamburguesas de pollo entre el 10 y el 50 %. Esto se resume en el intervalo de probabilidad:

$$\mathcal{I} = \{[0, 0.3], [0.7, 0.8], [0.1, 0.5]\},$$

definido sobre el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{v, c, p\}$. En primer lugar, podemos comprobar que se trata de un intervalo de probabilidad propio, y es que se cumple:

$$0.8 = \sum_{i=1}^3 l_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^3 u_i = 1.6.$$

Por otro lado, este intervalo de probabilidad no es coherente, ya que se incumple la ecuación (2.19):

$$1.1 = u_1 + \sum_{j \neq 1} l_j > 1,$$

$$1.2 = u_3 + \sum_{j \neq 3} l_j > 1.$$

Es incompatible que un 30 % de las ventas sean hamburguesas veganas cuando como mínimo el 80 % son de carne o de pollo. Análogamente, es imposible que un 50 % de las ventas sean hamburguesas de pollo cuando como mínimo el 70 % son veganas o de carne. Podemos emplear la ecuación (2.20) para calcular el intervalo de probabilidad coherente que tiene el mismo conjunto credal que \mathcal{I} , resultando:

$$\mathcal{I}' = \{[0, 0.2], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3]\}.$$

En (A2.6) se demuestra que, como era de esperar, \mathcal{I}' es coherente. Es decir, el concepto de coherencia ha permitido a la hamburguesería ser más precisos en la determinación de sus ratios de ventas: en las hamburguesas veganas no puede ser superior al 20 % y en las hamburguesas de pollo al 30 %.

Podemos utilizar la ecuación (2.21) para calcular la probabilidad inferior coherente asociada, y su probabilidad superior conjugada:

	$\{v\}$	$\{c\}$	$\{p\}$	$\{v, c\}$	$\{v, p\}$	$\{c, p\}$
\underline{P}	0	0.7	0.1	0.7	0.2	0.8
\bar{P}	0.2	0.8	0.3	0.9	0.3	1

2.3. CASOS PARTICULARES

Al calcular la probabilidad inferior y superior podemos no solo dar cotas para los elementos unipuntuales sino también para el resto de conjuntos. De acuerdo con la interpretación epistémica, por ejemplo, concluimos que el ratio de ventas de hamburguesas veganas y de carne está entre el 70 y el 90 %. \square

Al estar tratando con un espacio muestral Ω de cardinal 3, la probabilidad inferior coherente del ejemplo anterior es 2-monótona. No obstante, para el caso de los intervalos de probabilidad coherentes, esto no es una propiedad que se satisfaga únicamente para $|\Omega| = 3$, y es que, independientemente de $|\Omega|$, los intervalos de probabilidad no solo son casos particulares de probabilidades inferiores coherentes, sino que también lo son de probabilidades inferiores 2-monótonas. Esto se demuestra en los siguientes dos resultados.

Proposición 2.5. ([4], Proposition 5.) Sea $\mathcal{I} = \{[l_i, u_i] : i = 1, \dots, n\}$ un intervalo de probabilidad coherente definido sobre un espacio muestral Ω y \underline{P} su probabilidad inferior asociada. Entonces se cumple que $\forall C, D \subseteq \Omega$ tal que $C \cap D = \emptyset$, $\exists P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$ tal que:

$$P(C) = \underline{P}(C) \text{ y } P(C \cup D) = \underline{P}(C \cup D). \quad (2.23)$$

Demostración. Sean $C, D \subseteq \Omega$ tales que $C \cap D = \emptyset$. La ecuación (2.21) nos dice que:

$$\begin{aligned} \underline{P}(C) &= \max \left\{ \sum_{\omega_i \in C} l_i, 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i \right\}, & \text{y} \\ \underline{P}(C \cup D) &= \max \left\{ \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i, 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

En la demostración diferenciamos cuatro casos en función de los valores de $\underline{P}(C)$ y $\underline{P}(C \cup D)$.

Caso 1. $\underline{P}(C) = \sum_{\omega_i \in C} l_i$ y $\underline{P}(C \cup D) = 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i$.

Definimos $\lambda = 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i - \sum_{\omega_i \in C} l_i$. Teniendo en cuenta la ecuación (2.24), se cumple:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i - \sum_{\omega_i \in C} l_i \geq \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i - \sum_{\omega_i \in C} l_i = \sum_{\omega_i \in D} l_i, \\ \lambda &= 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i - \sum_{\omega_i \in C} l_i \leq 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i - 1 + \sum_{\omega_i \notin C} u_i = \sum_{\omega_i \in D} u_i. \end{aligned}$$

Resumiendo: $\sum_{\omega_i \in D} l_i \leq \lambda \leq \sum_{\omega_i \in D} u_i$. Así, tenemos que:

$$\forall \omega_i \in D, \exists d_i \in [l_i, u_i] \text{ tal que } \sum_{\omega_i \in D} d_i = \lambda.$$

2.3. CASOS PARTICULARES

Definimos la probabilidad P según:

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \begin{cases} l_i & \text{si } \omega_i \in C. \\ d_i & \text{si } \omega_i \in D. \\ u_i & \text{si } \omega_i \notin (C \cup D). \end{cases}$$

Por un lado, se cumple $p_i \in [l_i, u_i] \forall \omega_i \in \Omega$. Por otro lado, utilizando la definición de λ , se tiene que $P \in \mathbb{P}(\Omega)$:

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{\omega_i \in D} d_i + \sum_{\omega_i \in C} l_i + \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Así, de la ecuación (2.14) concluimos que $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$. Por último, se tiene que:

$$P(C) = \sum_{\omega_i \in C} l_i = \underline{P}(C),$$

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) = \sum_{\omega_i \in C} l_i + \sum_{\omega_i \in D} d_i = \sum_{\omega_i \in C} l_i + \lambda = \underline{P}(C \cup D).$$

Caso 2. $\underline{P}(C) = \sum_{\omega_i \in C} l_i$ y $\underline{P}(C \cup D) = \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i$.

Definimos $\lambda = 1 - \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i$. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.15) y (2.24), se cumple:

$$\lambda = 1 - \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i = 1 - \sum_{\omega_i \in C} l_i - \sum_{\omega_i \in D} l_i \geq \sum_{\omega_i \notin C} l_i - \sum_{\omega_i \in D} l_i = \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} l_i,$$

$$\lambda = 1 - \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i \leq 1 - 1 + \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i = \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i.$$

Resumiendo: $\sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} l_i \leq \lambda \leq \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i$. Así, tenemos que:

$$\forall \omega_i \notin (C \cup D), \exists a_i \in [l_i, u_i] \text{ tal que } \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} a_i = \lambda.$$

Definimos la probabilidad P según:

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \begin{cases} l_i & \text{si } \omega_i \in (C \cup D), \\ a_i & \text{si } \omega_i \notin (C \cup D), \end{cases}$$

De forma análoga a como hicimos en el Caso 1 se tiene que $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$, ya que $p_i \in [l_i, u_i] \forall \omega_i \in \Omega$ y

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i + \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} a_i = 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

2.3. CASOS PARTICULARES

Además, se tiene que:

$$P(C) = \sum_{\omega_i \in C} l_i = \underline{P}(C),$$

$$P(C \cup D) = \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i = \underline{P}(C \cup D).$$

Caso 3. $\underline{P}(C) = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i$ y $\underline{P}(C \cup D) = \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i$.

En primer lugar, de la ecuación (2.24) tenemos que $\sum_{\omega_i \in C} l_i \leq 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i$. Además, se cumple:

$$\sum_{\omega_i \in C} l_i \geq 1 - \sum_{\omega_i \in D} l_i - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i \geq 1 - \sum_{\omega_i \in D} u_i - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i,$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado de nuevo (2.24): $\sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i = \sum_{\omega_i \in C} l_i + \sum_{\omega_i \in D} l_i \geq 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i$, y en la segunda desigualdad hemos utilizado $l_i \geq u_i \quad \forall \omega_i \in \Omega$. Así, tenemos ambas desigualdades y concluimos que:

$$\sum_{\omega_i \in C} l_i = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i. \quad (2.25)$$

Por otro lado, de forma similar, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_i \in D} l_i &\geq 1 - \sum_{\omega_i \in C} l_i - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i \geq \\ &1 - 1 + \sum_{\omega_i \notin C} u_i - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i = \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} u_i \geq \sum_{\omega_i \in D} u_i, \end{aligned}$$

que junto a $l_i \geq u_i \quad \forall \omega_i \in \Omega$ nos permite concluir:

$$\sum_{\omega_i \in D} l_i = \sum_{\omega_i \in D} u_i. \quad (2.26)$$

Definimos la probabilidad:

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \begin{cases} l_i & \text{si } \omega_i \in (C \cup D), \\ u_i & \text{si } \omega_i \notin (C \cup D). \end{cases}$$

De nuevo, $p_i \in [l_i, u_i] \quad \forall \omega_i \in \Omega$ y además, utilizando (2.25) y (2.26):

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i + \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i = \sum_{\omega_i \in C} l_i + \sum_{\omega_i \in D} l_i + \sum_{\omega_i \notin C} u_i - \sum_{\omega_i \in D} u_i = 1,$$

2.3. CASOS PARTICULARES

luego $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$. Por último, aplicando de nuevo (2.25):

$$P(C) = \sum_{\omega_i \in C} l_i = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i = \underline{P}(C)$$

$$P(C \cup D) = \sum_{\omega_i \in (C \cup D)} l_i = \underline{P}(C \cup D).$$

Caso 4. $\underline{P}(C) = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} l_i$ y $\underline{P}(C \cup D) = 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} l_i$.

Definimos $\lambda = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i$. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.15) y (2.24), se cumple:

$$\lambda = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i \geq \sum_{\omega_i \in C} l_i,$$

$$\lambda = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i \leq \sum_{\omega_i \in C} u_i.$$

Resumiendo: $\sum_{\omega_i \in C} l_i \leq \lambda \leq \sum_{\omega_i \in C} u_i$. Así, tenemos que:

$$\forall \omega_i \in C, \exists c_i \in [l_i, u_i] \text{ tal que } \sum_{\omega_i \in C} c_i = \lambda.$$

Definiendo la probabilidad P dada por:

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \begin{cases} c_i & \text{si } \omega_i \in C, \\ u_i & \text{si } \omega_i \notin C, \end{cases}$$

Se cumple $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$, ya que $p_i \in [l_i, u_i] \forall \omega_i \in \Omega$ y

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{\omega_i \in C} c_i + \sum_{\omega_i \notin C} u_i = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Finalmente, se tiene que:

$$P(C) = \sum_{\omega_i \in C} c_i = \lambda = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i = \underline{P}(C),$$

$$\begin{aligned} P(C \cup D) &= \sum_{\omega_i \in C} c_i + \sum_{\omega_i \in D} u_i = 1 - \sum_{\omega_i \notin C} u_i + \sum_{\omega_i \in D} u_i \\ &= 1 - \sum_{\omega_i \notin (C \cup D)} u_i = \underline{P}(C \cup D). \end{aligned}$$

Habiendo probado que existe $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$ satisfaciendo (2.23) en los cuatro casos, aquí finaliza la demostración. \square

2.3. CASOS PARTICULARES

Proposición 2.6. ([4], Proposition 5.) *La probabilidad inferior \underline{P} asociada a un intervalo de probabilidad coherente \mathcal{I} es una probabilidad inferior 2-monótona.*

Demostración. Sean $A, B \subseteq \Omega$ cualesquiera pero fijos. Definimos $C = A \cap B$ y $D = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. C y D están en las condiciones de la *Proposición 2.5*, luego $\exists P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$ tal que $P(C) = P(A \cap B) = \underline{P}(A \cap B)$ y $P(C \cup D) = P(A \cup B) = \underline{P}(A \cup B)$. Así, tenemos que $\underline{P}(A \cup B) + \underline{P}(A \cap B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \geq \underline{P}(A) + \underline{P}(B)$, concluyendo, de acuerdo a la ecuación (2.3), que \underline{P} es una probabilidad inferior 2-monótona. \square

Por último, antes de estudiar el condicionamiento de los intervalos, cabe mencionar un resultado demostrado en [5] acerca de los puntos extremos del conjunto credal, y es que, al tratarse de un caso concreto de probabilidad inferior 2-monótona, el número máximo de puntos extremos del conjunto credal se reduce. En un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ el número máximo de puntos extremos diferentes deja de ser $n!$ y pasa a ser:

$$e_{\mathcal{I}}(n) = \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)! \cdot (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}, \quad (2.27)$$

donde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ denota el mayor número natural menor o igual que $\frac{n}{2}$. Por ejemplo, para $n = 5$ el número máximo de puntos extremos deja de ser $5! = 120$ y pasa a ser $e_{\mathcal{I}}(5) = 30$, y para $n = 10$ deja de ser $10! = 3\,628\,800$ y pasa a ser $e_{\mathcal{I}}(10) = 1260$. Vemos como la disminución es considerable, lo que facilita mucho los cálculos en los que se ve involucrado el conjunto credal.

Pasamos ahora al estudio del condicionamiento de los intervalos de probabilidad. Nos centraremos en intervalos de probabilidad coherentes bidimensionales, de la forma $\mathcal{I} = \{[l_{ij}, u_{ij}] : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$, definidos sobre el producto cartesiano $\Omega_x \times \Omega_y$, donde $\Omega_x = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\Omega_y = \{y_1, \dots, y_m\}$ son los espacios muestrales sobre los que están definidos dos variables X e Y . Basándonos en la extensión regular, nuestro objetivo es determinar cómo cambian los intervalos de probabilidad asociados a la variable X sabiendo el valor que toma la otra variable, $Y = y_j$.

Previamente, en ([4], Proposition 11) se introducen dos ecuaciones que nos permiten calcular los intervalos de probabilidad marginales de cada variable. Dado \mathcal{I} un intervalo coherente bidimensional, los extremos del intervalo coherente marginal de X , $\mathcal{I}_X = \{[l_i, u_i], i = 1, \dots, n\}$, se calculan como:

$$l_i = \max \left\{ \sum_{j=1}^m l_{ij}, 1 - \sum_{k \neq i} \sum_{j=1}^m u_{kj} \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.28)$$

$$u_i = \min \left\{ \sum_{j=1}^m u_{ij}, 1 - \sum_{k \neq i} \sum_{j=1}^m l_{kj} \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.29)$$

2.3. CASOS PARTICULARES

Dado que los intervalos de probabilidad coherentes son casos particulares de probabilidades 2-monótonas, todos los resultados descritos en la Sección 2.2 siguen siendo válidos. Así, dado un intervalo de probabilidad coherente bidimensional $\mathcal{I} = \{[l_{ij}, u_{ij}] : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ y \underline{P} su probabilidad inferior 2-monótona asociada, podemos emplear la ecuación (2.7) sobre $A = \{x_i, y_j\}$, $B = \Omega_x \times \{y_j\}$ para obtener:

$$l_{i|j} = \begin{cases} \frac{\underline{P}(\{(x_i, y_j)\})}{\underline{P}(\{(x_i, y_j)\}) + \overline{P}((\Omega_x \setminus \{x_i\}) \times \{y_j\})} & \text{si } \overline{P}((\Omega_x \setminus \{x_i\}) \times \{y_j\}) > 0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Aunque en ([4]), artículo en el que está basada esta sección del trabajo, no se menciona de forma explícita, siempre que hablemos de condicionamiento en intervalos de probabilidad estaremos asumiendo que $\overline{P}((\Omega_x \setminus \{x_i\}) \times \{y_j\}) > 0 \forall j = 1, \dots, m$ (lo que además implica $\overline{P}(\Omega_x \times \{y_j\}) = \overline{P}(B) > 0 \forall j = 1, \dots, m$). Así, la anterior ecuación se convierte en:

$$l_{i|j} = \frac{\underline{P}(\{(x_i, y_j)\})}{\underline{P}(\{(x_i, y_j)\}) + \overline{P}((\Omega_x \setminus \{x_i\}) \times \{y_j\})} \quad (2.31)$$

y, utilizando las ecuaciones (2.17) y (2.22) resulta:

$$l_{i|j} = \frac{l_{ij}}{l_{ij} + \min\{\sum_{k \neq i} u_{kj}, 1 - \sum_k \sum_{h \neq j} l_{kh} - l_{ij}\}}. \quad (2.32)$$

Además, a partir de la relación de dualidad dada por la ecuación (1.14) podemos obtener la cota superior $u_{i|j}$ para cada $i = 1, \dots, n$:

$$u_{i|j} = \frac{u_{ij}}{u_{ij} + \max\{\sum_{k \neq i} l_{kj}, 1 - \sum_k \sum_{h \neq j} u_{kh} - u_{ij}\}}. \quad (2.33)$$

Así, el intervalo de probabilidad de X condicionado a $Y = y_j$ es:

$$\mathcal{I}(X | Y = y_j) = \{[l_{i|j}, u_{i|j}], i = 1, \dots, n\}. \quad (2.34)$$

donde $l_{i|j}$ y $u_{i|j}$ vienen dados por las ecuaciones (2.32) y (2.33) respectivamente.

Ejemplo 2.7. La hamburguesería del Ejemplo 2.6 posee 2 establecimientos en España, uno en Madrid y otro en Barcelona. Consideramos las variables $X \equiv$ ‘tipo de hamburguesa’ e $Y \equiv$ ‘ciudad’, con espacios muestrales $\Omega_x = \{x_1, x_2, x_3\} = \{v, c, p\}$ y $\Omega_y = \{y_1, y_2\} = \{M, B\}$ respectivamente. La información registrada en su base de datos les permite deducir que el porcentaje de ventas de hamburguesas veganas y de pollo en Madrid es inferior al 10 y al 20 % respectivamente con respecto al total de la empresa. La venta de hamburguesas de carne en Madrid supone exactamente un 30 % de las ventas totales. Por otro lado, en Barcelona, el porcentaje de ventas de

2.3. CASOS PARTICULARES

hamburguesas veganas es inferior al 10 % con respecto al total, mientras que las de carne y pollo se encuentran entre un 40 y 50 % y entre un 10 y 30 % respectivamente.

Esta información se resumen en el intervalo de probabilidad bidimensional \mathcal{I} que se muestra en la siguiente tabla:

$[l_{ij}, u_{ij}]$	Vegana	Carne	Pollo
Madrid	[0, 0.1]	[0.3, 0.3]	[0, 0.2]
Barcelona	[0, 0.1]	[0.4, 0.5]	[0.1, 0.3]

A partir de la ecuación (2.19) podemos comprobar que se trata de un intervalo de probabilidad coherente. Utilizando las ecuaciones (2.28) y (2.29) podemos calcular el intervalo marginal asociado a $X \equiv$ ‘tipo de hamburguesa’, obteniendo:

$$\mathcal{I}_X = \{[0, 0.2], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3]\}.$$

Es decir, del total de la empresa el ratio de ventas de las hamburguesas veganas es inferior al 20 %, y el de hamburguesas de carne y de pollo se encuentra entre un 70 % y 80 % y entre un 10 % y 30 % respectivamente. Este es el mismo intervalo de probabilidad coherente que el obtenido en el Ejemplo 2.6, un alivio para la hamburguesería ya que la base de datos no funciona tan mal como pensaban.

Si queremos saber cual es el porcentaje de ventas de cada tipo de hamburguesa en función de la ciudad, podemos aplicar las ecuaciones (2.32) y (2.33) para obtener (A2.7):

$$\mathcal{I}(X | Y = M) = \{[l_{1|1}, u_{1|1}], [l_{2|1}, u_{2|1}], [l_{3|1}, u_{3|1}]\} = \{[0, 0.25], [0.6, 1], [0, 0.4]\},$$

$$\mathcal{I}(X | Y = B) = \dots = \{[0, 0.16], [0.57, 0.83], [0.14, 0.43]\}.$$

Es decir, en Madrid el ratio de ventas de hamburguesas veganas y de pollo es inferior al 25 y al 40 % respectivamente, mientras que las de carne suponen como mínimo un 60 % de las ventas. En Barcelona, las veganas suponen un porcentaje inferior al 16 %, mientras que las de carne y de pollo se encuentran entre 57 y 83 % y entre 14 y 43 % respectivamente. \square

Es sencillo ver que los intervalos de probabilidad condicionados obtenidos en el ejemplo anterior son coherentes. De nuevo esto no es casualidad, y es que la coherencia en los intervalos de probabilidad es una propiedad que se preserva bajo la extensión regular, tal y como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.7. (*[4], Proposition 12*) Sea $\mathcal{I} = \{[l_{ij}, u_{ij}] : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ un intervalo de probabilidad coherente bidimensional y \underline{P} su probabilidad inferior 2-monótona asociada, para cada $j = 1, \dots, m$ el intervalo de probabilidad condicionado $\mathcal{I}(X | Y = y_j)$ es coherente.

2.3. CASOS PARTICULARES

Demostración. Denotemos por $\mathcal{M}(X | y_j)$ al conjunto credal asociado al intervalo $\mathcal{I}(X | Y = y_j)$, es decir:

$$\mathcal{M}(X | y_j) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega_x) : l_{i|j} \leq p_i \leq u_{i|j} \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Utilizando la condición dada por la ecuación (2.17), para probar la coherencia basta con demostrar que para cada $i = 1, \dots, n$ existen probabilidades $P^i, Q^i \in \mathcal{M}(X | y_j)$ tales que:

$$\begin{aligned} p_i^i &= l_{i|j} \text{ y } l_{k|j} \leq p_k^i \leq u_{k|j} \ \forall k \neq i, \\ q_i^i &= u_{i|j} \text{ y } l_{k|j} \leq q_k^i \leq u_{k|j} \ \forall k \neq i. \end{aligned}$$

Demostraremos solamente la primera de las condiciones, la demostración de la segunda es análoga. Así, dado que estamos asumiendo que $\bar{P}(\Omega_x \times y_j) > 0$, la expresión general de la extensión regular (1.19) nos dice que, $\forall P \in \mathcal{M}(\underline{P}), \forall k, j$:

$$l_{k|j} = \min_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} \{P(x_k | y_j)\} \leq P(x_k | y_j) \leq \max_{P \in \mathcal{M}(\underline{P})} \{P(x_k | y_j)\} = u_{k|j},$$

donde hemos denotado $P(x_k | y_j) = P(\{x_k, y_j\} | \Omega_x \times \{y_j\})$. Así, para cada $i = 1, \dots, n$ existe una probabilidad $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $l_{i|j} = P(x_i | y_j)$ y $l_{k|j} \leq P(x_k | y_j) \leq u_{k|j} \ \forall k \neq i$. La probabilidad condicionada $P(\cdot | y_j) \in \mathcal{M}(X | y_j)$ es la probabilidad P^i buscada. \square

2.3.2. Modelo pari mutuel

Volviendo a la interpretación comportamental del Capítulo 1, consideremos una casa de apuestas que, como cualquier otra, quiere maximizar sus ganancias. Sea $P_0(A)$ el precio que la casa considera justo por una apuesta en la que se obtiene 1 euro si el resultado está contenido en A y 0 euros en caso contrario. En el Capítulo 1 ya hemos visto que si un sujeto apuesta por A al precio $P_0(A)$, tanto su ganancia esperada como la de la casa de apuestas es nula:

$$\text{Ganancia esperada por el sujeto: } P_0(I_A - P_0(A)) = P_0(A) - P_0(A) = 0,$$

$$\text{Ganancia esperada por la casa: } P_0(P_0(A) - I_A) = P_0(A) - P_0(A) = 0.$$

Dado que al negocio le conviene obtener ganancias positivas, la casa de apuestas decide ‘inflar’ el precio justo de dicha apuesta a través de un parámetro $\delta > 0$, conocido como parámetro de distorsión:

$$P_0(A) \rightarrow (1 + \delta)P_0(A).$$

Es decir, aunque realmente el precio justo considerado por la casa sigue siendo $P_0(A)$, a los clientes se les hace pensar que es $(1 + \delta)P_0(A)$ con el objetivo de obtener ganancias positivas. Cuanto mayor sea $P_0(A)$ mayor será la inflación causada por δ , es decir, cuanto menos arriesgada sea la apuesta mayor será la inflación causada por

2.3. CASOS PARTICULARES

δ . Así, si un sujeto apuesta por A al precio $(1 + \delta)P_0(A)$, los beneficios esperados serán:

$$\text{Sujeto: } P_0(I_A - (1 + \delta)P_0(A)) = P_0(A) - (1 + \delta)P_0(A) = -\delta P_0(A) \leq 0,$$

$$\text{Casa: } P_0((1 + \delta)P_0(A) - I_A) = (1 + \delta)P_0(A) - P_0(A) = \delta P_0(A) \geq 0.$$

Efectivamente, ahora la casa espera ganancias positivas, mientras que los clientes, de media, estarán perdiendo dinero. El valor $(1 + \delta)P_0(A)$ puede interpretarse como el mínimo precio aceptable de venta de la apuesta A , es decir, de acuerdo con la interpretación comportamental dada en el Capítulo 1: $\bar{P}(A) = (1 + \delta)P_0(A)$. El parámetro de distorsión, que representa la inflación realizada por la casa de apuestas sobre el precio de A , ha de ser manejado con cautela para así poder obtener los máximos beneficios, y es que un parámetro demasiado grande puede implicar pérdida de la clientela.

La relación de dualidad (1.14) nos permite calcular:

$$\underline{P}(A) = 1 - \bar{P}(A^c) = 1 - (1 + \delta)P_0(A^c) = 1 - (1 + \delta)(1 - P_0(A)) = (1 + \delta)P_0(A) - \delta.$$

A raíz de todo esto, dados $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$ y $\delta > 0$ un parámetro de distorsión, se define el **modelo pari-mutuel (PMM)** inducido por P_0 y δ , denotado por $(P_0, \delta)_{PMM}$, como la probabilidad inferior (y superior) satisfaciendo $\forall A \subseteq \Omega$:

$$\underline{P}(A) = \max\{0, (1 + \delta)P_0(A) - \delta\}, \quad \bar{P}(A) = \min\{1, (1 + \delta)P_0(A)\}, \quad (2.35)$$

donde las correcciones frente a las anteriores expresiones garantizan la coherencia del modelo. Diremos que \underline{P} (\bar{P}) es la probabilidad inferior (superior) asociada a $(P_0, \delta)_{PMM}$ o inducida por $(P_0, \delta)_{PMM}$. Cuando se cumple $0 < \underline{P}(A) < \bar{P}(A) < 1$, entonces se tiene que $\bar{P}(A) - \underline{P}(A) = \delta$. Así, δ está directamente relacionado con la imprecisión en la determinación del precio justo de A : cuanto mayor sea δ mayor es la imprecisión y viceversa. Cabe destacar que, de forma general, \underline{P} y \bar{P} no son simétricas con respecto a P_0 : sus valores dependen tanto de δ como de la propia P_0 .

A continuación se presenta una propiedad de los PMM que nos será útil en la siguiente demostración:

Lema 2.2. ([6], Lemma 1.) Sea \bar{P} la probabilidad superior inducida por un PMM $(P_0, \delta)_{PMM}$. Entonces, $\forall A \subseteq \Omega$ tal que $\bar{P}(A) < 1$ se cumple:

$$\bar{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \bar{P}(\{\omega\}), \quad (2.36)$$

es decir, \bar{P} no solo es subaditiva (condición (C3) de coherencia), sino que también es aditiva.

2.3. CASOS PARTICULARES

Demostración. Por la ecuación (2.35), $\bar{P}(A) < 1$ implica que $\bar{P}(A) = (1 + \delta)P_0(A)$. Por otro lado, la monotonía de \bar{P} implica que $\bar{P}(\{\omega\}) \leq \bar{P}(A) < 1 \ \forall \omega \in A$, luego $\bar{P}(\{\omega\}) = (1 + \delta)P_0(\{\omega\}) \ \forall \omega \in A$. Así:

$$\bar{P}(A) = (1 + \delta)P_0(A) = (1 + \delta) \sum_{\omega \in A} P_0(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \bar{P}(\{\omega\}). \quad \square$$

En la siguiente proposición se demuestra que un PMM es un caso particular de un intervalo de probabilidad coherente. Esto implica que todos los resultados desarrollados para los intervalos coherentes siguen siendo válidos para los PMM y, en concreto, se deduce que la probabilidad inferior inducida por un PMM es una probabilidad inferior 2-monótona. Al ser 2-monótona, tiene una única extensión 2-monótona a apuestas, que viene dada por la integral de Choquet. En ([9], Sec. 3.2.5) se demuestra que en el caso concreto de un PMM $(P_0, \delta)_{PMM}$ la integral de Choquet (2.4) se particulariza a:

$$\underline{P}(f) = \omega_{1/(1+\delta)} - (1 + \delta)P_0((\omega_{1/(1+\delta)} - f)^+) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega), \quad (2.37)$$

donde $\omega_h = \max_{\omega \in \Omega} \{P_0(f \leq \omega) \leq h\}$ y $f^+ = \max\{f, 0\} \ \forall f \in \mathcal{L}(\Omega)$.

Con respecto al número máximo de puntos extremos del conjunto credal, en ([6], Proposition 2) se demuestra que coincide con el de los intervalos de probabilidad, es decir:

$$e_{PMM}(n) = \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)! \cdot (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}. \quad (2.38)$$

Proposición 2.8. ([6], Theorem 1.) Sea $(P_0, \delta)_{PMM}$ un PMM y sea \underline{P}_1 su probabilidad inferior asociada. Se considera el intervalo de probabilidad $\mathcal{I} = \{[l_i, u_i] : i = 1, \dots, n\}$ dado por:

$$l_i = \underline{P}_1(\{\omega_i\}) \quad y \quad u_i = \bar{P}_1(\{\omega_i\}) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Entonces se cumple que \mathcal{I} es coherente y además $\underline{P}_1 = \underline{P}_2$, donde \underline{P}_2 denota la probabilidad inferior asociada a \mathcal{I} .

Demostración. Comencemos demostrando que \mathcal{I} es coherente. Utilizando la condición **(C3)** de coherencia, es decir, superlinealidad para previsiones inferiores y sublinealidad para previsiones superiores, y la relación de dualidad (1.14), es inmediato que se cumplen las ecuaciones (2.19) y por tanto \mathcal{I} es coherente:

$$u_i + \sum_{j \neq i} l_j = \bar{P}_1(\{\omega_i\}) + \sum_{j \neq i} \underline{P}_1(\{\omega_j\}) \leq \bar{P}_1(\{\omega_i\}) + \underline{P}_1(\{\omega_i\}^c) = 1,$$

$$l_i + \sum_{j \neq i} u_j = \underline{P}_1(\{\omega_i\}) + \sum_{j \neq i} \bar{P}_1(\{\omega_j\}) \geq \underline{P}_1(\{\omega_i\}) + \bar{P}_1(\{\omega_i\}^c) = 1.$$

Demostremos ahora que $\underline{P}_1(A) = \underline{P}_2(A) \ \forall A \subseteq \Omega$. Habiendo demostrado que \mathcal{I} es coherente, sabemos que \underline{P}_2 viene dada por la ecuación (2.21). Sea $A \subseteq \Omega$, diferenciamos dos casos:

2.3. CASOS PARTICULARES

Caso 1. $\underline{P}_1(A) = 0$. Por un lado, utilizando la monotonía de \underline{P}_1 se tiene:

$$\begin{aligned}\underline{P}_1(A) = 0 &\Rightarrow \underline{P}_1(\{\omega_i\}) = 0 \quad \forall \omega_i \in A \\ &\Rightarrow l_i = 0 \quad \forall \omega_i \in A \Rightarrow \sum_{\omega_i \in A} l_i = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, de la sublinealidad de \bar{P}_1 se deduce:

$$\begin{aligned}\underline{P}_1(A) = 0 &\Rightarrow \bar{P}_1(A^c) = 1 \\ &\Rightarrow 1 - \sum_{\omega_i \notin A} u_i = 1 - \sum_{\omega_i \notin A} \bar{P}_1(\{\omega_i\}) \leq 1 - \bar{P}_1(A^c) = 0.\end{aligned}$$

Se concluye así que:

$$\underline{P}_2(A) = \max \left\{ \sum_{\omega_i \in A} l_i, 1 - \sum_{\omega_i \notin A} u_i \right\} = 0 = \underline{P}_1(A).$$

Caso 2. $\underline{P}_1(A) = (1 + \delta)P_0(A) - \delta > 0 \Rightarrow \bar{P}_1(A^c) < 1$. Aplicando el *Lema 2.2*, la relación de dualidad (1.14) y la superlinealidad de \bar{P}_1 , resulta:

$$\begin{aligned}\underline{P}_2(A) &= \max \left\{ \sum_{\omega_i \in A} l_i, 1 - \sum_{\omega_i \notin A} u_i \right\} \\ &= \max \left\{ \sum_{\omega_i \in A} \underline{P}_1(\{\omega_i\}), 1 - \sum_{\omega_i \notin A} \bar{P}_1(\{\omega_i\}) \right\} \\ &= \max \left\{ \sum_{\omega_i \in A} \underline{P}_1(\{\omega_i\}), 1 - \bar{P}_1(A^c) \right\} \\ &= \max \left\{ \sum_{\omega_i \in A} \underline{P}_1(\{\omega_i\}), \underline{P}_1(A) \right\} = \underline{P}_1(A). \quad \square\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra la proposición anterior y, además, se muestra como no todos los intervalos de probabilidad pueden tratarse como un modelo PMM.

Ejemplo 2.8. Una casa de apuestas desea establecer sus cuotas para los partidos de la fase de grupos del Mundial de Qatar 2022. El encargado del partido España vs Alemania considera que ambas selecciones están muy igualadas y establece los precios justos que se muestran en el Cuadro 2.2, donde $\{S\}$, $\{E\}$ y $\{A\}$ denotan España, empate y Alemania respectivamente.

	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
P_0	0.3	0.4	0.3	0.7	0.6	0.7

Cuadro 2.2: Precios justos de las apuestas posibles en el partido España vs Alemania.

El método de ganancias de esta casa de apuestas consiste en aplicar el modelo pari mutuel sobre el precio justo. Normalmente, esta casa aplica una inflación de $\delta = 0.1$. Así, consideramos el PMM $(P_0, \delta = 0.1)_{PMM}$. La ecuación (2.35) define la siguiente probabilidad inferior (y superior):

2.3. CASOS PARTICULARES

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
$\underline{P}_{(P_0, \delta)}$	0.23	0.34	0.23	0.67	0.56	0.67
$\overline{P}_{(P_0, \delta)}$	0.33	0.44	0.33	0.77	0.66	0.77

Es decir, si un cliente quiere apostar por España, la casa de apuestas solamente le permitirá hacerlo por un valor de 0.33 euros o superior. Dado que, a juicio de la casa de apuestas, el precio justo es en realidad 0.3, el cliente estará perdiendo como mínimo 0.03 euros de media. Por otro lado, si un cliente quiere apostar por España o empate, entonces tendrá una pérdida media mínima de 0.06 euros. Es decir, aquí se ve explícitamente como la casa de apuestas perjudica más a aquellos clientes que toman menos riesgo frente a los más aventurados.

De acuerdo con la *Proposición 2.8*, $\underline{P}_{(P_0, \delta)}$ define el intervalo de probabilidad:

$$\mathcal{I} = \{[0.23, 0.33], [0.34, 0.44], [0.23, 0.33]\},$$

que, a partir de la ecuación (2.19), puede verse que es coherente. Para ilustrar el hecho de que ambos modelos definen la misma probabilidad inferior, utilizamos las ecuaciones (2.21) y (2.22) para calcular:

$$\underline{P}_{\mathcal{I}}(\{S, E\}) = \max\{l_S + l_E, 1 - u_A\} = \max\{0.57, 0.67\} = 0.67 = \underline{P}_{(P_0, \delta)}(\{S, E\}).$$

Análogamente para el resto de conjuntos se comprueba que $\underline{P}_{(P_0, \delta)} = \underline{P}_{\mathcal{I}}$.

Consideremos ahora el intervalo:

$$\mathcal{I}' = \{[0.13, 0.33], [0.34, 0.44], [0.23, 0.43]\}.$$

De nuevo se trata de un intervalo de probabilidad coherente. Sin embargo, este intervalo no puede ser representado por un PMM. Supongamos que sí pudiera y denotemos por \underline{P}' la probabilidad inducida por el PMM. Entonces tendríamos:

$$0 < \underline{P}'(\{S\}) = 0.13 < 0.33 = \overline{P}'(\{S\}) < 1 \quad \text{y} \quad \overline{P}'(\{S\}) - \underline{P}'(\{S\}) = 0.2,$$

$$0 < \underline{P}'(\{E\}) = 0.34 < 0.44 = \overline{P}'(\{E\}) < 1 \quad \text{y} \quad \overline{P}'(\{E\}) - \underline{P}'(\{E\}) = 0.1,$$

incumpliendo el hecho de que $\forall A \subseteq \Omega$ tal que $0 < \underline{P}'(A) < \overline{P}'(A) < 1$ la diferencia $\overline{P}'(A) - \underline{P}'(A)$ ha de ser constante. \square

A continuación se demuestra que el PMM también es un modelo que se preserva al ser condicionado bajo la extensión regular.

Proposición 2.9. ([7], Proposition 4.3) Sea $(P_0, \delta)_{PMM}$ un PMM y sea \underline{P} su probabilidad inferior asociada. Entonces, dado $B \subseteq \Omega$ tal que $P_0(B) > 0$, $\underline{R}(\cdot | B)$ está asociada al PMM $(P_{0|B}, \delta_B)_{PMM}$, con

$$P_{0|B} = P_0(\cdot | B) \quad \text{y} \quad \delta_B = \frac{\delta}{\underline{P}(B)},$$

donde δ_B solamente está definido cuando $\underline{P}(B) = (1 + \delta)P_0(B) - \delta > 0$.

2.3. CASOS PARTICULARES

Demostración. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.1) y (2.35), dado $A \subseteq B$ debemos demostrar que

$$\underline{R}(A | B) = \max \left\{ 0, (1 + \delta_B) \frac{P_0(A \cap B)}{P_0(B)} - \delta_B \right\}.$$

Dado que \underline{P} es una probabilidad inferior 2-monótona, podemos utilizar la ecuación (2.7) para obtener:

$$\begin{aligned} \underline{R}(A | B) &= \frac{\underline{P}(A \cap B)}{\underline{P}(A \cap B) + \overline{P}(A^c \cap B)} \\ &= \frac{\max\{0, (1 + \delta)P_0(A \cap B) - \delta\}}{\max\{0, (1 + \delta)P_0(A \cap B) - \delta\} + \min\{1, (1 + \delta)P_0(A^c \cap B)\}}. \end{aligned}$$

Esto es igual a 0 cuando $(1 + \delta)P_0(A \cap B) \leq \delta$. Centrémonos en el caso contrario, $(1 + \delta)P_0(A \cap B) > \delta$, para el cual:

$$\underline{R}(A | B) = \frac{(1 + \delta)P_0(A \cap B) - \delta}{(1 + \delta)P_0(A \cap B) - \delta + \min\{1, (1 + \delta)P_0(A^c \cap B)\}} > 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $P_0(B) < 1$ (en otro caso el condicionamiento sería trivial). Esto es equivalente a $P_0(A \cap B) + P_0(A^c \cap B) < 1$, lo que implica que $(1 + \delta)P_0(A \cap B) + (1 + \delta)P_0(A^c \cap B) < (1 + \delta)$. Utilizando además que $(1 + \delta)P_0(A \cap B) > \delta$, tenemos:

$$\delta + (1 + \delta)P_0(A^c \cap B) < (1 + \delta) \Rightarrow (1 + \delta)P_0(A^c \cap B) < 1.$$

Además:

$$(1 + \delta)P_0(A \cap B) > \delta \Rightarrow (1 + \delta)P_0(B) > \delta \Rightarrow \underline{P}(B) = (1 + \delta)P_0(B) - \delta.$$

Así, la anterior igualdad se convierte en:

$$\begin{aligned} \underline{R}(A | B) &= \frac{(1 + \delta)P_0(A \cap B) - \delta}{(1 + \delta)P_0(A \cap B) - \delta + (1 + \delta)P_0(A^c \cap B)} \\ &= \frac{(1 + \delta)P_0(A \cap B) - \delta}{(1 + \delta)P_0(B) - \delta} = \frac{(1 + \delta)P_0(B)}{\underline{P}(B)} \frac{P_0(A \cap B)}{P_0(B)} - \frac{\delta}{\underline{P}(B)}. \end{aligned}$$

Al satisfacerse $\frac{(1 + \delta)P_0(B)}{\underline{P}(B)} = 1 + \delta_B$, aquí finaliza la demostración. \square

La proposición anterior nos dice que si B es el suceso condicionante, la probabilidad del modelo condicionado es la probabilidad condicionada por B , y el parámetro de distorsión aumenta con respecto al parámetro original. El incremento es inversamente proporcional a $\underline{P}(B)$. Es decir, cuanto menor sea $\underline{P}(B)$ mayor será el incremento en la imprecisión del nuevo modelo con respecto a la imprecisión original, y

2.3. CASOS PARTICULARES

viceversa. Este hecho, conocido como **dilatación**, resulta poco intuitivo: aunque al condicionar se espera un modelo más informativo, se obtiene un modelo cuya imprecisión siempre aumenta con respecto al modelo inicial.

Ejemplo 2.9. Continuando con el Ejemplo 2.8, recordemos que una casa de apuestas asignó los precios justos P_0 para el partido España vs Alemania dados por el Cuadro 2.2, y que consideró el PMM $(P_0, \delta = 0.1)_{PMM}$ para asignar las respectivas cuotas de apuesta. Un fiel colaborador de la casa les informa de que es posible que se produzca un amaño en dicho partido en contra de Alemania, de manera que los únicos posibles resultados sean victoria a favor de España o empate. La casa decide actualizar sus cuotas por si llegado el momento se confirma que el partido va a ser amañado. Tomando $B = \{S, E\}$, de acuerdo con la proposición anterior la extensión regular $\underline{R}(\cdot | \{S, E\})$ está asociada al PMM $(P_{0|B}, \delta_B)_{PMM}$, con $\delta_B = \frac{\delta}{\underline{P}_{(P_0, \delta)}(B)} = 0.149$ y $P_{0|B}$ dada por la fórmula de Bayes (1.1):

A	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
$P_0(\cdot \{S, E\})$	0.43	0.57	0	1	0.43	0.57

Así, utilizando la ecuación (2.35) podemos calcular la extensión regular y su probabilidad superior correspondiente:

A	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
$\underline{R}(\cdot \{S, E\})$	0.34	0.47	0	1	0.34	0.47
$\bar{R}(\cdot \{S, E\})$	0.49	0.62	0	1	0.49	0.62

Por sentido común, la casa de apuestas no puede sacar la apuesta a favor de Alemania a cuota 0, ya que el amaño se haría evidente. Deberá modificar dicho valor para que los clientes no se percaten. Por otro lado, en este caso la casa solamente aceptará apuestas a favor de España por un valor de 0.49 o mayor, esperando un beneficio medio mínimo de 0.06 euros. \square

2.3.3. Modelo de la variación total

Consideremos ahora una casa de apuestas que, en lugar de inflar el precio justo de las apuestas, impone una tasa fija $\delta > 0$ que el cliente ha de pagar por apostar, independientemente de la apuesta que esté realizando. Así, si $P_0(A)$ es el precio justo de una apuesta y un sujeto quiere participar por dicho valor, pagará $P_0(A) + \delta$ y las ganancias esperadas serán:

$$\text{Sujeto: } P_0(I_A - (P_0(A) + \delta)) = P_0(A) - P_0(A) - \delta = -\delta < 0,$$

$$\text{Casa: } P_0((P_0(A) + \delta) - I_A) = P_0(A) + \delta - P_0(A) = \delta > 0.$$

De nuevo, el valor $P_0(A) + \delta$ puede interpretarse como el mínimo precio aceptable de venta de la apuesta A , es decir, de acuerdo con la interpretación comportamental

2.3. CASOS PARTICULARES

dada en el Capítulo 1: $\bar{P}(A) = P_0(A) + \delta$. Utilizando la relación de dualidad (1.14) se obtiene:

$$\underline{P}(A) = 1 - \bar{P}(A^c) = 1 - P_0(A^c) - \delta = 1 - (1 - P_0(A)) - \delta = P_0(A) - \delta.$$

Así, dados $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$ y $\delta \in (0, 1)$ un parámetro de distorsión, se define el modelo de **variación total (TV)** inducido por P_0 y δ , denotado por $(P_0, \delta)_{TV}$, como la probabilidad inferior (y superior) satisfaciendo $\underline{P}(\Omega) = 1$, $\bar{P}(\emptyset) = 0$ y, $\forall A \subset \Omega, A \neq \emptyset$:

$$\underline{P}(A) = \max\{0, P_0(A) - \delta\}, \quad \bar{P}(A) = \min\{1, P_0(A) + \delta\} \quad (2.39)$$

donde de nuevo se han hecho correcciones para asegurar la coherencia del modelo. Diremos que \underline{P} (\bar{P}) es la probabilidad inferior (superior) asociada a $(P_0, \delta)_{TV}$ o inducida por $(P_0, \delta)_{TV}$. Cuando se cumple $0 < \underline{P}(A) < \bar{P}(A) < 1$, entonces se tiene que $\bar{P}(A) - \underline{P}(A) = 2\delta$. Así, de nuevo, δ está directamente relacionado con la imprecisión en la determinación del precio justo de A : cuanto mayor sea δ mayor es la imprecisión y viceversa. Al contrario que en el PMM, en este modelo \underline{P} y \bar{P} sí son simétricas con respecto a P_0 .

A continuación se demuestra que la probabilidad inferior asociada a un modelo TV satisface la propiedad de 2-monotonía.

Proposición 2.10. ([8], Proposition 2.4) *La probabilidad inferior \underline{P} asociada a un modelo TV $(P_0, \delta)_{TV}$ es una probabilidad inferior 2-monótona.*

Demostración. Dado que $\underline{P}(A) = f(P_0(A))$, donde $f(t) = \max\{0, t - \delta\}$ es una función convexa $\forall t \in [0, 1]$, el teorema queda demostrado directamente a partir del resultado de ([10], Example 2.1): ‘Toda transformación convexa de una medida de probabilidad es 2-monótona’. \square .

En el siguiente ejemplo se muestra como, al contrario de lo que ocurría con el PMM y a pesar de satisfacer la propiedad de 2-monotonía, el modelo TV no es un caso concreto del modelo de intervalos de probabilidad.

Ejemplo 2.10. Consideremos el modelo TV $(P_0, \delta = 0.1)_{TV}$ definido sobre el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, donde P_0 es la distribución uniforme discreta:

$ A $	1	2	3	4
$P_0(A)$	0.25	0.50	0.75	1

La ecuación (2.39) define la probabilidad inferior (y superior) que se muestra en el Cuadro 2.3. Supongamos que esta probabilidad inferior puede ser respresentada en términos de un intervalo de probabilidad coherente. De acuerdo con la ecuación (2.17), para que el intervalo sea coherente sus extremos han de corresponderse con la probabilidad inferior y superior de los unipuntuales, es decir:

$$\mathcal{M}(\mathcal{I}) = \{P \in \mathbb{P}(\Omega) \mid 0.15 \leq p_i \leq 0.35 \quad \forall i = 1, \dots, 4\}.$$

2.3. CASOS PARTICULARES

$ A $	1	2	3	4
$\underline{P}(A)$	0.15	0.40	0.65	1
$\overline{P}(A)$	0.35	0.60	0.85	1

Cuadro 2.3: Probabilidad inferior y superior definida por el modelo TV $(P_0, \delta = 0.1)_{TV}$.

Definiendo $P = (0.15, 0.15, 0.35, 0.35)$, tenemos que $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$. Pero además:

$$P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.3 < 0.4 = \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}),$$

contradiciendo así la ecuación (2.16). Concluimos por tanto que \underline{P} no está asociada a un intervalo de probabilidad. \square

Por otro lado, en ([8], Appendix A.1) se demuestra que, dado un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, el número máximo de puntos extremos del conjunto credal asociado a un modelo TV $(P_0, \delta)_{TV}$ es:

$$e_{TV1}(n) = \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}. \quad (2.40)$$

Comparándolo con la ecuación (2.38) vemos como el modelo TV $(P_0, \delta)_{TV}$ tiene un número máximo de puntos extremos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ veces mayor que el modelo $(P_0, \delta)_{PMM}$. No obstante, generalmente se trata con modelos TV $(P_0, \delta)_{TV}$ con δ lo suficientemente pequeño de manera que se satisfaga:

$$\delta < \min_{\omega \in \Omega} P_0(\{\omega\}). \quad (2.41)$$

Bajo esa condición el número máximo de puntos extremos disminuye y, tal y como se demuestra en ([8], Proposition 2.5), su expresión se simplifica a:

$$e_{TV2}(n) = n(n - 1). \quad (2.42)$$

Por ejemplo, bajo (2.41) se tiene $e_{TV2}(5) = 20$ y $e_{TV2}(10) = 90$, frente a $e_{TV1}(5) = 60$ y $e_{TV1}(10) = 6300$.

Finalmente, de forma similar a como se hizo para el PMM, se demuestra que el modelo TV se preserva al ser condicionado bajo la extensión regular.

Proposición 2.11. ([8], Proposition 2.6.) Sea $(P_0, \delta)_{TV}$ un modelo TV y sea \underline{P} su probabilidad inferior asociada. Entonces, dado $B \subseteq \Omega$ tal que $P_0(B) > 0$, $\underline{R}(\cdot | B)$ está asociada al modelo TV $(P_{0|B}, \delta_B)_{TV}$, con

$$P_{0|B} = P_0(\cdot | B) \quad y \quad \delta_B = \frac{\delta}{P_0(B)}.$$

2.3. CASOS PARTICULARES

Demostración. La demostración es análoga a la de la *Proposición 2.9*. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.1) y (2.39), dado $A \subseteq B$ debemos demostrar que

$$\underline{R}(A | B) = \max \left\{ 0, \frac{P_0(A \cap B)}{P_0(B)} - \delta_B \right\}.$$

Dado que \underline{P} es una probabilidad inferior 2-monótona, podemos utilizar la ecuación (2.7) para obtener:

$$\begin{aligned} \underline{R}(A | B) &= \frac{\underline{P}(A \cap B)}{\underline{P}(A \cap B) + \overline{P}(A^c \cap B)} \\ &= \frac{\max\{0, P_0(A \cap B) - \delta\}}{\max\{0, P_0(A \cap B) - \delta\} + \min\{1, P_0(A^c \cap B) + \delta\}}. \end{aligned}$$

Esto es igual a 0 cuando $P_0(A \cap B) \leq \delta$. Centrémonos en el caso contrario, $P_0(A \cap B) > \delta$, para el cual:

$$\underline{R}(A | B) = \frac{P_0(A \cap B) - \delta}{P_0(A \cap B) - \delta + \min\{1, P_0(A^c \cap B) + \delta\}} > 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $P_0(B) < 1$ (en otro caso el condicionamiento sería trivial). Esto es equivalente a $P_0(A \cap B) + P_0(A^c \cap B) < 1$. Utilizando además que $P_0(A \cap B) > \delta$, tenemos que $\delta + P_0(A^c \cap B) < 1$. Así:

$$\underline{R}(A | B) = \frac{P_0(A \cap B) - \delta}{P_0(A \cap B) - \delta + P_0(A^c \cap B) + \delta} = \frac{P_0(A \cap B)}{P_0(B)} - \frac{\delta}{P_0(B)},$$

concluyendo la demostración. □

Al igual que para el PMM, si B es el suceso condicionante, la probabilidad del modelo TV condicionado es la probabilidad condicionada por B . Además, el parámetro de distorsión también aumenta, aunque en este caso lo hace inversamente proporcional a $P(B)$ y no a $\underline{P}(B)$. Dado que $\underline{P}(B) \leq P(B)$, el incremento en la imprecisión es siempre mayor o igual para un modelo $(P_0, \delta)_{PMM}$ que para uno $(P_0, \delta)_{TV}$.

Ejemplo 2.11. Retomamos el Ejemplo 2.8, en el cual una casa de apuestas quiere establecer las cuotas para el partido España vs Alemania. Recordemos que la casa ha asignado los siguientes precios justos, donde $\{S\}$, $\{E\}$ y $\{A\}$ denotan España, empate y Alemania respectivamente.

	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
P_0	0.3	0.4	0.3	0.7	0.6	0.7

Dado que en eventos recientes el modelo pari mutuel no les ha dado muy buenos resultados, deciden modificar su método de beneficios al modelo de variación total.

2.3. CASOS PARTICULARES

A	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{S, A\}$
\underline{P}	0.2	0.3	0.2	0.6	0.5	0.6
\overline{P}	0.4	0.5	0.4	0.8	0.7	0.8

Un poco desesperados por obtener ganancias, deciden aplicar una tasa de 0.1 euros en cada apuesta. Así, consideramos el modelo TV $(P_0, \delta = 0.1)_{TV}$. La ecuación (2.39) define la siguiente probabilidad inferior (y superior):

La casa solamente aceptará apuestas a favor de España por un valor de 0.4 euros o más, esperando un beneficio medio mínimo de 0.1 euros. Equivalentemente, el cliente estará perdiendo de media 0.1 euros. En este caso, la pérdida media es independiente de la apuesta que se esté llevando a cabo.

De nuevo, pendientes del posible amaño en contra de Alemania, la casa actualiza sus cuotas por si acaba llevándose a cabo. Tomando $B = \{S, E\}$, de acuerdo con la proposición anterior la extensión regular $\underline{R}(\cdot | \{S, E\})$ está asociada al modelo TV $(P_{0|B}, \delta_B)_{TV}$, con $\delta_B = \frac{\delta}{P_0(B)} = 0.143$ y $P_{0|B}$ dada por la fórmula de Bayes (1.1):

A	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
$P_{0 B}(\cdot \{S, E\})$	0.43	0.57	0	1	0.43	0.57

En el Ejemplo 2.9, análogo a este pero para el modelo PMM, obtuvimos un parámetro de distorsión condicionado $\delta_B^{PMM} = 0.149$, efectivamente mayor que el obtenido en este caso. Utilizando la ecuación (2.39) podemos calcular la extensión regular y su probabilidad superior correspondiente:

A	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
$\underline{R}(\cdot \{S, E\})$	0.29	0.43	0	1	0.29	0.43
$\overline{R}(\cdot \{S, E\})$	0.57	0.71	0	1	0.57	0.71

En el caso de que finalmente el engaño se haga realidad, la casa no aceptará apuestas a favor de España por un valor inferior a 0.57 euros. De nuevo, la cuota a favor de Alemania ha de ser modificada manualmente para que el amaño no se haga una evidencia.

Capítulo 3

Condicionamiento de previsiones inferiores completamente monótonas

Dentro de las previsiones inferiores 2-monótonas existe un modelo con propiedades interesantes que merece ser estudiado con detenimiento: las previsiones inferiores completamente monótonas. En la Sección 3.1 se define el modelo y se razona que es equivalente a otro modelo, las funciones de creencia, cuyo estudio resulta más sencillo. Así, en dicha sección se dan las definiciones básicas de las funciones de creencia y se estudian sus propiedades. En la Sección 3.2 se analizan las consecuencias de la monotonía completa sobre el condicionamiento bajo la extensión regular y, de nuevo, se deducen las condiciones bajo las cuales la actualización coherente del modelo es única. Además, se presenta una nueva interpretación del condicionamiento, ‘revision’, con su correspondiente método de condicionamiento, la regla de Dempster. En la Sección 3.3 se estudia el condicionamiento de las funciones de creencia desde el punto de vista de la teoría de la posibilidad. Consideraremos tres normas de condicionamiento: la regla de Zadeh, la regla de Hisdal y la regla de Nguyen. Por último, en la Sección 3.4 se consideran dos casos concretos de probabilidades inferiores completamente monótonas: el modelo linear vacuous y los conjuntos aleatorios. Se estudian sus propiedades y sus consecuencias en el condicionamiento bajo la extensión regular.

3.1. Previsiones inferiores completamente monótonas

Dado un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ y un conjunto de apuestas $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}(\Omega)$ cerrado para las operaciones ‘mínimo puntual’: \wedge y ‘máximo puntual’: \vee , una **previsión inferior** \underline{P} en \mathcal{K} es n -monótona si:

$$\underline{P} \left(\bigvee_{i=1}^p f_i \right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{|I|+1} \underline{P} \left(\bigwedge_{i \in I} f_i \right) \quad (3.1)$$

3.1. PREVISIONES INFERIORES COMPLETAMENTE MONÓTONAS

para todo $2 \leq p \leq n$ y para todas $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{L}(\Omega)$, donde \vee y \wedge representan el ‘máximo puntual’ y ‘mínimo puntual’ respectivamente, definidas en la ecuación (2.2). Para $n = 2$ la ecuación (3.1) se reduce a la ecuación (2.1).

Al restringir el conjunto de apuestas a las variables indicadoras de eventos resulta que una **probabilidad inferior** \underline{P} es **n -monótona** si:

$$\underline{P} \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{|I|+1} \underline{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \quad (3.2)$$

para todo $2 \leq p \leq n$ y para todos $A_1, \dots, A_p \subseteq \Omega$. Análogamente, para $n = 2$ la ecuación (3.2) se reduce a la ecuación (2.3).

Una previsión inferior que es n -monótona para todo $n \in \mathbb{N}$ es llamada **previsión inferior completamente monótona**. Análogamente se define una **probabilidad inferior completamente monótona**. Dado que las previsiones completamente monótonas son un caso concreto de las previsiones 2-monótonas, las propiedades mencionadas en la Sección 2.1 siguen siendo válidas, es decir, monotonía completa implica coherencia y los puntos extremos del conjunto credal pueden calcularse según la ecuación (2.5). Además, la ecuación (2.4) se generaliza para el caso de n -monotonía, previsiones y probabilidades n -monótonas resultan ser equivalentes y por tanto lo mismo ocurre para las completamente monótonas: dada una probabilidad inferior completamente monótona se puede calcular su extensión a apuestas a partir de la integral de Choquet (2.4), resultando ser una previsión inferior completamente monótona.

El estudio de las probabilidades inferiores completamente monótonas se encuentra inmerso en la teoría de la evidencia que introducimos a continuación, desarrollada por Arthur P. Dempster y Glenn Safer en los años 60. Dado un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$, una función $m : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ es una **asignación básica de probabilidad** si:

1. $m(\emptyset) = 0$.
2. $\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$.

Dado $A \subseteq \Omega$, $m(A)$ se interpreta como la cantidad de evidencia respaldando la ocurrencia de A . A continuación planteamos un ejemplo sencillo que nos ayuda a comprender el concepto de ‘cantidad de evidencia’ respaldando la ocurrencia de un suceso.

Ejemplo 3.1. Consideramos una urna con 10 bolas. Sabemos que entre 3 y 7 son verdes, entre 1 y 4 son azules y entre 2 y 5 son rojas. Denotando $\Omega = \{v, a, r\}$, la composición de la urna determina:

3.1. PREVISIONES INFERIORES COMPLETAMENTE MONÓTONAS

	$\{v\}$	$\{a\}$	$\{r\}$	$\{v, a\}$	$\{v, r\}$	$\{a, r\}$	$\{v, a, r\}$
\underline{P}	0.3	0.1	0.2	0.5	0.6	0.3	1
\overline{P}	0.7	0.4	0.5	0.8	0.9	0.7	1
m	0.3	0.1	0.2	0.1	0.1	0	0.2

Sabemos que de las 10 bolas como mínimo 3 son verdes, 1 es azul y 2 son rojas, luego la evidencia respaldando cada color es $m(\{v\}) = 0.3$, $m(\{a\}) = 0.1$ y $m(\{r\}) = 0.2$. También sabemos que como mínimo hay 5 bolas verdes o azules. De esas 5 bolas, seguro 3 son verdes y 1 es azul, y la restante puede ser de cualquiera de los dos colores, luego la evidencia respaldando que al extraer una bola esta sea verde o azul es $m(\{v, a\}) = 0.1$. El razonamiento es análogo para obtener $m(\{v, r\}) = 0.1$. Con respecto a $\{a, r\}$, sabemos que como mínimo hay 3 bolas azules o rojas, pero eso ya lo sabíamos del hecho de que como mínimo hay 1 azul y 2 rojas, luego la evidencia respaldando que sea azul o roja es nula. Finalmente, $m(\Omega) = 0.2$ se razona de la siguiente forma: sabemos que de las 10 bolas totales como mínimo 3 son verdes, 1 es azul, 2 son rojas, 1 es verde o azul y 1 es verde o roja. Así, el número de bolas que pueden ser de cualquiera de los tres colores es 2, y por tanto la evidencia de $\{v, a, r\}$ es 0.2. \square

Del anterior ejemplo se deduce que si la probabilidad está determinada, es decir, si $\underline{P} = \overline{P} = P$, entonces la asignación básica de probabilidad es nula para todos los conjuntos excepto para los unipuntuales. Al ser P aditiva, la probabilidad de un conjunto siempre va a venir determinada por la probabilidad de los unipuntuales que lo constituyen, luego la evidencia respaldando la ocurrencia de dicho conjunto siempre va a ser nula. Esto es lo que acaba de ocurrir con el conjunto $\{a, r\}$.

A partir de una asignación básica de probabilidad m se definen una **función de creencia** y una **función de plausibilidad**:

$$\text{Función de creencia: } \quad Bel(B) = \sum_{A \subseteq B} m(A) \quad \forall B \subseteq \Omega. \quad (3.3)$$

$$\text{Función de plausibilidad: } \quad Pl(B) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(A) \quad \forall B \subseteq \Omega.$$

Se cumple que Bel es una probabilidad inferior completamente monótona y Pl es su probabilidad superior conjugada, es decir, Bel y Pl satisfacen la condición de dualidad (1.14). Tomando $Bel = \underline{P}$ y $Pl = \overline{P}$ es sencillo comprobar (A3.1) que en el ejemplo anterior se satisface la ecuación (3.3).

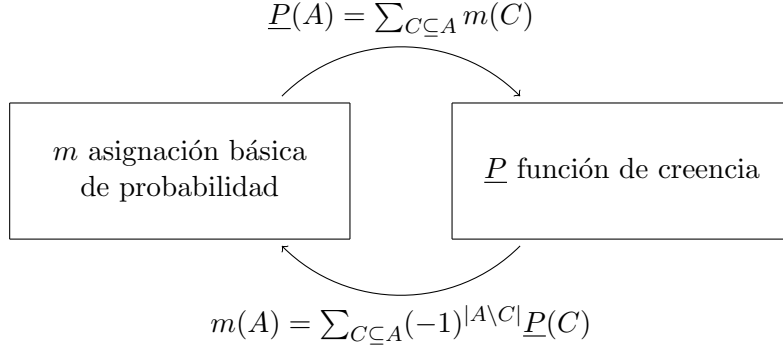
Inversamente, dada una probabilidad inferior completamente monótona \underline{P} se define una asignación básica de probabilidad m a partir de la siguiente expresión, conocida como **inversa de Möbius**:

$$m(A) = \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A \setminus C|} \underline{P}(C) \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3.4)$$

Se cumple que $\underline{P}(B) = \sum_{A \subseteq B} m(A)$ y $\overline{P}(B) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(A)$ por lo que, de acuerdo

3.1. PREVISIONES INFERIORES COMPLETAMENTE MONÓTONAS

con la definición (3.3), \underline{P} es una función de creencia. De nuevo es sencillo comprobar (véase A3.1) que en el ejemplo anterior se satisface la ecuación (3.4).



Formalizando el comentario que hemos hecho justo a continuación del Ejemplo 3.1, cuando $\underline{P} = \overline{P} = P$ entonces es conocido que la inversa de Möbius cumple:

$$m(\{\omega\}) = \sum_{C \subseteq \{\omega\}} (-1)^{|\{\omega\} \setminus C|} P(C) = P(\{\omega\}) \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3.5)$$

$$m(A) = \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A \setminus C|} P(C) = 0 \quad \forall A \subseteq \Omega \text{ tal que } |A| > 1. \quad (3.6)$$

Dado que los conceptos de probabilidad inferior completamente monótona y función de creencia resultan ser equivalentes, de aquí en adelante utilizaremos indistintamente ambas denominaciones para referirnos a una probabilidad inferior satisfaciendo la ecuación (3.2) para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, es posible demostrar que \underline{P} es una función de creencia si y solo si:

$$m(A) \in [0, 1] \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3.7)$$

Es decir, la ecuación anterior es equivalente a que se satisfaga la ecuación (3.2) para todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación se presentan algunos conceptos que resultarán útiles en el resto del capítulo. En primer lugar, dada una función de creencia \underline{P} con inversa de Möbius m , un subconjunto $B \subseteq \Omega$ se dice **elemento focal** cuando $m(B) > 0$. A la unión F de todos los elementos focales de \underline{P} se le denomina **soporte** de la función de creencia \underline{P} .

Si F satisface $F = \Omega$ entonces se dice que \underline{P} es **no-exclusiva**, diciéndose **exclusiva** en caso contrario.

Por último, si $\forall B \subseteq \Omega$ elemento focal y $\forall \omega \in B$ se cumple $m(\{\omega\}) > 0$ entonces se dice que \underline{P} es **dispersa**.

Lema 3.1. ([3], Sec. 4) Sean \underline{P} una función de creencia, F su soporte y $B \subseteq \Omega$:

3.1. PREVISIONES INFERIORES COMPLETAMENTE MONÓTONAS

1. $\underline{P}(B) > 0 \Rightarrow B \cap F \neq \emptyset$.
2. Si \underline{P} es exclusiva entonces $\overline{P}(B) = 0 \Leftrightarrow B \subseteq F^c$.

Demostración.

1. Si $\underline{P}(B) > 0$, de la ecuación (3.3) se obtiene que $\exists A \subseteq B$ tal que $m(A) > 0$, luego $A \subseteq B \cap F$ y $B \cap F \neq \emptyset$.
2. Por un lado, si $\overline{P}(B) = 0$, de la ecuación (3.3) resulta que $m(A) = 0 \forall A \subseteq \Omega$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y, en concreto, $m(B) = 0$. Así, $B \subseteq F^c$.

Por otro lado, por reducción al absurdo, supongamos que $B \subseteq F^c$ y $\overline{P}(B) > 0$. De la ecuación (3.3) tenemos que $\exists A \subseteq \Omega$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $m(A) > 0$. Esto último implica $A \subseteq F$, por lo que $A \cap B \neq \emptyset$ contradice $B \subseteq F^c$. \square

La no-exclusividad y dispersión de una función de creencia se caracterizan en la siguiente proposición:

Proposición 3.1. ([3], Proposition 6.) Sea \underline{P} una función de creencia en $\mathcal{P}(\Omega)$. Entonces:

1. \underline{P} es dispersa si y solo si o bien $\overline{P}(B) = 0$ o bien $\underline{P}(B) > 0 \forall B \subseteq \Omega$.
2. \underline{P} es no-exclusiva si y solo si $\overline{P}(B) > 0 \forall B \subseteq \Omega$.
3. \underline{P} es no-exclusiva y dispersa si y solo si $\underline{P}(B) > 0 \forall B \subseteq \Omega$.

Demostración. Dada \underline{P} una función de creencia, denotemos por F a su soporte.

1. Supongamos que \underline{P} es dispersa. Sea $B \subseteq \Omega$ cualquiera pero fijo, existen dos casos excluyentes: o bien $B \subseteq F^c$, cumpliéndose entonces $\overline{P}(B) = 0$ por el Lema 3.1, o bien $B \cap F \neq \emptyset$. Este segundo caso implica que $\exists x \in B \cap F$, lo que implica que $x \in F$ y por tanto que $\exists A \subseteq \Omega$ elemento focal tal que $x \in A$. Por ser \underline{P} dispersa, A elemento focal y $x \in A$, se cumple $m(x) > 0$. Como $x \in B$, de (3.3) concluimos que $\underline{P}(B) > 0$.

La otra implicación, por reducción al absurdo, supongamos que $\forall B \subseteq \Omega$ o bien $\overline{P}(B) = 0$ o bien $\underline{P}(B) > 0$ y \underline{P} no es dispersa. Entonces, para algún elemento focal B existe $\omega \in B$ tal que $m(\{\omega\}) = 0$. De la ecuación (3.3) se deduce, por un lado, que $\underline{P}(\{\omega\}) = 0$ y, por otro lado, dado que $\{\omega\} \cap B \neq \emptyset$ y $m(B) > 0$: $\overline{P}(\{\omega\}) > 0$. Esto contradice nuestra hipótesis, demostrando así que \underline{P} es dispersa.

2. \underline{P} no exclusiva $\Leftrightarrow F = \Omega \Leftrightarrow \forall B \subseteq \Omega \exists A \subseteq \Omega$ con $m(A) > 0$ tal que $B \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall B \subseteq \Omega \overline{P}(B) > 0$.
3. Se deduce directamente de los dos resultados anteriores. \square

3.1. PREVISIONES INFERIORES COMPLETAMENTE MONÓTONAS

Ejemplo 3.2. Consideramos la probabilidad inferior \underline{P} definida sobre el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ como sigue:

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0.3	0.1	0.2	0.5	0.6	0.3

Cuadro 3.1: Probabilidad inferior \underline{P} definida sobre Ω .

Para estudiar si se trata de una probabilidad inferior completamente monótona utilizamos la ecuación (3.7). Se trata de la misma probabilidad inferior del Ejemplo 3.1, cuya inversa de Möbius venía dada por:

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
m	0.3	0.1	0.2	0.1	0.1	0	0.2

La inversa de Möbius pertenece al intervalo $[0, 1]$ para todos los subconjuntos luego, utilizando (3.7), concluimos que \underline{P} es una función de creencia. El conjunto de elementos focales es:

$$\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\},$$

por lo que el soporte es $F = \Omega$ y así concluimos que \underline{P} es no-exclusiva. Además, $m(\{\omega_i\}) > 0 \forall i = 1, 2, 3$, luego \underline{P} es dispersa. Estas dos propiedades las podríamos haber deducido directamente utilizando la *Proposición 3.1*, y es que se cumple $\underline{P}(B) > 0 \forall B \subseteq \Omega$. \square

En el Ejemplo 2.7 hemos visto como, a pesar de ser una probabilidad inferior 2-monótona, un modelo TV no es un caso concreto de un intervalo de probabilidad. En el siguiente ejemplo vemos como tampoco se trata de una función de creencia.

Ejemplo 3.3. Retomemos el modelo TV del Ejemplo 2.7, que recordemos que define sobre $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ la siguiente probabilidad inferior:

$ A $	1	2	3	4
$\underline{P}(A)$	0.15	0.40	0.65	1

Calculamos la inversa de Möbius del conjunto $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, obteniendo:

$$m(A) = \underline{P}(A) - \sum_{C \subseteq A, |C|=2} \underline{P}(C) + \sum_{C \subseteq A, |C|=1} \underline{P}(C)$$

$$= 0.65 - 0.40 \times 3 + 0.15 \times 3 = -0.1 \notin [0, 1].$$

Aplicando (3.7) concluimos que \underline{P} no es una función de creencia y, en conclusión, un modelo TV no es un caso concreto de función de creencia. \square

3.1. PREVISIONES INFERIORES COMPLETAMENTE MONÓTONAS

Yendo más allá, el siguiente resultado nos dice cuándo un modelo TV es un caso concreto de función de creencia y cuándo no en función del tamaño del espacio muestral.

Proposición 3.2. (*[Propio]*) Sea $(P_0, \delta)_{TV}$ un modelo TV tal que $P_0(\{\omega\}) > \delta \forall \omega \in \Omega$, y sea \underline{P} su probabilidad inferior 2-monótona asociada. Entonces:

$$\underline{P} \text{ función de creencia} \Leftrightarrow |\Omega| \leq 3.$$

Demostración. Antes de comenzar la demostración, cabe destacar que la hipótesis $P_0(\{\omega\}) > \delta \forall \omega \in \Omega$ implica $P_0(A) > \delta \forall A \subseteq \Omega$, por lo que de acuerdo con la ecuación (2.39): $\underline{P}(A) = P_0(A) - \delta \forall A \subseteq \Omega, A \neq \emptyset$.

Por un lado, probemos que si $|\Omega| \leq 3$ entonces \underline{P} es una función de creencia. Por casos:

1. $|\Omega| = 1$. Denotamos $\Omega = \{\omega\}$. Se cumple $m(\{\omega\}) = \underline{P}(\{\omega\}) = \underline{P}(\Omega) = 1 > 0$, luego \underline{P} es una función de creencia.
2. $|\Omega| = 2$. Denotamos $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. La inversa de Möbius de los elementos de cardinal 1 coincide con su probabilidad inferior, que sabemos que es no-negativa. Por otro lado, usando las ecuaciones (3.4) y (2.39):

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \underline{P}(\Omega) - \underline{P}(\{\omega_1\}) - \underline{P}(\{\omega_2\}) \\ &= 1 - P_0(\{\omega_1\}) + \delta - P_0(\{\omega_2\}) + \delta = 2\delta > 0, \end{aligned}$$

luego \underline{P} es una función de creencia.

3. $|\Omega| = 3$. Denotamos $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Mismo razonamiento para los subconjuntos unipuntuales que en el caso 2. Sea $A \subseteq \Omega$ tal que $|A| = 2$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $A = \{\omega_1, \omega_2\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} m(A) &= \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) - \underline{P}(\{\omega_1\}) - \underline{P}(\{\omega_2\}) \\ &= P_0(\{\omega_1, \omega_2\}) - \delta - P_0(\{\omega_1\}) + \delta - P_0(\{\omega_2\}) + \delta = \delta > 0. \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \underline{P}(\Omega) - \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) - \underline{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) - \underline{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) + \underline{P}(\{\omega_1\}) + \\ &\quad \underline{P}(\{\omega_2\}) + \underline{P}(\{\omega_3\}) = 1 - P_0(\{\omega_1, \omega_2\}) + \delta - P_0(\{\omega_1, \omega_3\}) + \delta - \\ &\quad P_0(\{\omega_2, \omega_3\}) + \delta + P_0(\{\omega_1\}) - \delta + P_0(\{\omega_2\}) - \delta + P_0(\{\omega_3\}) - \delta = 0, \end{aligned}$$

luego \underline{P} es una función de creencia.

3.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

Por otro lado, supongamos que $|\Omega| > 3$ y probemos que \underline{P} no es una función de creencia. Sea $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} m(A) &= \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) - \underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) - \underline{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) - \underline{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) + \\ &\quad \underline{P}(\{\omega_1\}) + \underline{P}(\{\omega_2\}) + \underline{P}(\{\omega_3\}) = P_0(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) - \delta - P_0(\{\omega_1, \omega_2\}) + \\ &\quad \delta - P_0(\{\omega_1, \omega_3\}) + \delta - P_0(\{\omega_2, \omega_3\}) + \delta + P_0(\{\omega_1\}) - \delta + P_0(\{\omega_2\}) - \\ &\quad \delta + P_0(\{\omega_3\}) - \delta = -\delta < 0. \end{aligned}$$

Es decir, hemos encontrado un subconjunto $A \subseteq \Omega$ tal que $m(A) < 0$, luego de acuerdo con la ecuación (3.7) concluimos que \underline{P} no es una función de creencia. \square

3.2. Extensión natural y regular

Al tratarse de un caso concreto de previsiones inferiores 2-monótonas, todos los resultados descritos en la Sección 2.2 siguen siendo aplicables. En concreto, seguiremos utilizando la ecuación (2.7) para calcular la restricción a eventos de la extensión regular de una previsión inferior completamente monótona \underline{P} satisfaciendo $\overline{P}(B) > 0$, donde B denota el evento condicionante. En [12, 13] se demuestra que dicha restricción sigue siendo una función de creencia siempre y cuando $\underline{P}(B) > 0$. Sin embargo, al igual que ocurría en el caso de 2-monotonía, la condición de monotonía completa no se preserva de forma general bajo la extensión regular a la hora de actuar sobre apuestas. Esto puede apreciarse en el Ejemplo 2.4, y es que como ya hemos visto en (A2.4) la probabilidad inferior \underline{P} de dicho ejemplo se trata de una función de creencia.

Ejemplo 3.4. Consideramos el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ y la probabilidad inferior \underline{P} definida sobre él de acuerdo con en el Cuadro 3.1. En el Ejemplo 3.2 ya hemos visto que se trata de una función de creencia. Consideramos el conjunto $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ satisfaciendo $\overline{P}(B) = 1 - \underline{P}(B^c) = 1 - \underline{P}(\{\omega_3\}) = 0.8 > 0$. La ecuación (2.7) nos permite obtener (A3.4):

A	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
$\underline{R}(\cdot \mid \{\omega_1, \omega_2\})$	0.43	0.13	0	1	0.43	0.13

Análogamente a como hicimos en el Ejemplo 3.2, para comprobar que $\underline{R}(\cdot \mid B)$ es una función de creencia calculamos (A3.4) la inversa de Möbius y vemos que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$. Efectivamente, de la ecuación (3.4) resulta:

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
m	0.43	0.13	0	0.44	0	0	0

3.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

□

A continuación se presenta una particularización de la *Proposición 2.3* cuando la previsión inferior no solo es 2-monótona sino que también es completamente monótona.

Proposición 3.3. (*[3], Proposition 8.*) Sean \underline{P} una previsión inferior completamente monótona, F el soporte de su función de creencia asociada y $B \subseteq \Omega$ tal que $\underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B)$, entonces se cumple:

$$\underline{R}(f | B) = \min_{\omega \in B \cup F} f(\omega) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega), \quad (3.8)$$

Demostración. Dado que \underline{P} es una previsión inferior 2-monótona, aplicando la *Proposición 2.3* basta ver que $B \cap F$ es el menor subconjunto de B tal que $\underline{R}(B \cap F | B) = 1$.

En primer lugar, veamos que $\underline{R}(B \cap F | B) = 1$. Dado que $F^c \cap B \subseteq F^c$, utilizando el *Lema 3.1* tenemos que $\overline{P}(F^c \cap B) = 0$. Dado que $(B \cap F)^c \cap B = F^c \cap B$, se cumple $\overline{P}((B \cap F)^c \cap B) = 0$ y, utilizando la *Proposición 2.2*, $\underline{R}(B \cap F | B) = 1$.

Veamos ahora que $B \cap F$ es el menor subconjunto de B satisfaciendo lo anterior. Sea $C \subseteq B$ tal que $\underline{R}(C | B) = 1$, probemos que $F \cap B \subseteq C$. Se cumple que $\overline{P}(C^c \cap B) = 0$, ya que de no ser así, teniendo en cuenta que $\underline{P}(B) = 0$ y por monotonía $\underline{P}(C \cap B) = 0$, la *Proposición 2.2* implicaría:

$$\underline{R}(C | B) = \frac{\underline{P}(C \cap B)}{\underline{P}(C \cap B) + \overline{P}(C^c \cap B)} = 0,$$

llevando a contradicción. Así, $\overline{P}(C^c \cap B) = 0$, y por el *Lema 3.1* $C^c \cap B \subseteq F^c$. Esto es equivalente a $F \subseteq C \cup B^c$, lo que implica $F \cap B \subseteq C \cap B = C$. □

En el siguiente resultado establecemos la condición necesaria y suficiente bajo la cual el condicionamiento de una previsión inferior completamente monótona por cualquier suceso $B \subseteq \Omega$ es único.

Proposición 3.4. (*[3], Proposition 7.*) Sea \underline{P} una previsión inferior completamente monótona en $\mathcal{L}(\Omega)$ y sea μ la función de creencia restricción de \underline{P} a eventos, entonces:

$$\underline{E}(\cdot | B) = \underline{R}(\cdot | B) \quad \forall B \subseteq \Omega \Leftrightarrow \mu \text{ es no-exclusiva o dispersa.} \quad (3.9)$$

Demostración. Por un lado, por reducción al absurdo, supongamos que $\underline{E}(\cdot | B) = \underline{R}(\cdot | B) \quad \forall B \subseteq \Omega$ pero μ es exclusiva y no es dispersa. Por ser dispersa, de la *Proposición 3.1* se deduce que $\exists B \subseteq \Omega$ tal que $\underline{P}(B) = 0 < \overline{P}(B)$. Entonces, de la ecuación (3.3) se tiene que $m(A) = 0 \quad \forall A \subseteq B$ y $\exists C \subseteq \Omega$ con $m(C) > 0$ tal que $C \cap B \neq \emptyset$. Combinando ambos hechos resulta que $\exists C \subseteq \Omega$ elemento focal tal que

3.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

$C \cap B \neq \emptyset \neq C \cap B^c$. Por ser exclusiva, $F^c \neq \emptyset$ y por tanto $\exists \omega \in F^c$, donde F denota el soporte de μ . Definiendo $D = B \cup \{\omega\}$, se tiene:

$$\underline{P}(D) = \sum_{A \subseteq D} m(A) = \sum_{A \text{ focal: } A \subseteq D} m(A) = \sum_{A \text{ focal: } A \subseteq B} m(A) = \underline{P}(B) = 0,$$

y, de la monotonía de \bar{P} : $\bar{P}(D) \geq \bar{P}(B) > 0$. En consecuencia:

$$\underline{P}(D) = 0 \xrightarrow{(1.18)} \underline{E}(\{\omega\}^c \mid D) = \min_{x \in D} I_{\{\omega\}^c}(x) = I_{\{\omega\}^c}(\omega) = 0,$$

$$\omega \in F^c \xrightarrow{\text{Lema 3.1}} \bar{P}(\{\omega\}) = \bar{P}(\{\omega\} \cap D) = 0 \xrightarrow{(2.5)} \underline{R}(\{\omega\}^c \mid D) = 1,$$

lo que contradice la hipótesis $\underline{E}(\cdot \mid B) = \underline{R}(\cdot \mid B) \forall B \subseteq \Omega$.

Por otro lado, supongamos en primer lugar que μ es no-exclusiva. La Proposición 3.1 implica que $\bar{P}(B) > 0 \forall B \subseteq \Omega$, lo que implica $\bar{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in B \forall B \subseteq \Omega$ y lo que a su vez implica $\bar{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in B \forall B \subseteq \Omega$ tal que $\underline{P}(B) = 0 < \bar{P}(B)$. Así, aplicando el Teorema 2.1 se concluye que $\underline{E}(\cdot \mid B) = \underline{R}(\cdot \mid B) \forall B \subseteq \Omega$.

Supongamos ahora que μ es dispersa. La Proposición 3.1 implica que $\forall B \subseteq \Omega$ o bien $\bar{P}(B) = 0$ o bien $\underline{P}(B) > 0$. Aplicando el Corolario 1.2 se concluye que $\underline{E}(\cdot \mid B) = \underline{R}(\cdot \mid B) \forall B \subseteq \Omega$. \square

De forma similar al Teorema 2.1, el siguiente teorema establece la condición suficiente bajo la cual el condicionamiento coherente de una previsión inferior completamente monótona es único.

Teorema 3.1. ([3], Theorem 2.) Sea \underline{P} una previsión inferior completamente monótona en $\mathcal{L}(\Omega)$, entonces:

$$\underline{E}(\cdot \mid \mathcal{B}) = \underline{R}(\cdot \mid \mathcal{B}) \forall \mathcal{B} \text{ partición de } \Omega \Leftrightarrow \mu \text{ es no-exclusiva o dispersa,} \quad (3.10)$$

donde μ denota la restricción a eventos de \underline{P} .

Demostración. La demostración es directa utilizando la Proposición 3.4 y la ecuación (1.16). \square

Para satisfacerse la implicación a derecha es necesario que la parte izquierda se cumpla para cualquier partición de Ω . En el siguiente ejemplo se muestra un caso en el que, a pesar de cumplirse $\underline{E}(\cdot \mid \mathcal{B}) = \underline{R}(\cdot \mid \mathcal{B})$ para una partición \mathcal{B} determinada, μ es exclusiva y no es dispersa.

Ejemplo 3.5. Consideramos la probabilidad inferior \underline{P} definida sobre el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, junto a su inversa de Möbius correspondiente (ya calculada):

3.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0	0	0.3	0	0.3	1	1
\overline{P}	0	0.7	1	0.7	1	1	1
m	0	0	0.3	0	0	0.7	0

De la ecuación (3.7) concluimos que \underline{P} es una función de creencia. Los elementos focales son $\{\omega_3\}$ y $\{\omega_2, \omega_3\}$, luego $F = \{\omega_2, \omega_3\} \neq \Omega$ y \underline{P} es exclusiva. Por otro lado, $\omega_2 \in \{\omega_2, \omega_3\}$ con $\{\omega_2, \omega_3\}$ elemento focal y $m(\{\omega_2\}) = 0$, luego \underline{P} es dispersa. Considerando la partición $\mathcal{B} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$, se cumple que $\overline{P}(\{\omega_1\}) = 0$ y $\underline{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) = 1 > 0$, luego aplicando el *Corolario 1.2* tenemos que $\underline{E}(\cdot | \mathcal{B}) = \underline{R}(\cdot | \mathcal{B})$. \square

Hasta ahora, dada una apuesta f , una previsión inferior \underline{P} y un suceso $B \subseteq \Omega$, la interpretación que le hemos dado a $\underline{P}(f | B)$ es el máximo precio que el sujeto está dispuesto a pagar por f ahora si es que después se entera de que el resultado experimental está contenido en B . Esta interpretación es conocida como ‘focusing’, y la extensión regular está incluida en ella. Bajo esta filosofía, nuestras creencias acerca del espacio muestral determinan \underline{P} , y el hecho de observar un evento B o no hacerlo no las modifica: $\underline{P}(\cdot | B)$ es la restricción de dichas creencias al evento B . Al permanecer fijas las creencias, las asignaciones \underline{P} y $\underline{P}(\cdot | B)$ han de ser consistentes entre ellas, a lo que nos hemos referido como coherencia en conjunto. Además, al considerar un ‘espacio muestral’ más pequeño, estamos utilizando menos información de la que teníamos originalmente, derivando en un aumento de la imprecisión. Esto lo hemos visto explícitamente en los modelos pari-mutuel y de variación total a través del fenómeno de dilatación.

Existe otra interpretación del condicionamiento de modelos imprecisos conocida como ‘revision’. Bajo esta interpretación, el hecho de observar un evento concreto sí modifica nuestras creencias, las actualiza y las hace generalmente más precisas. Al verse modificadas, el nuevo modelo no tiene por qué ser consistente con el original: se pierde la coherencia en conjunto. Una de las reglas de condicionamiento más importantes de aplicación de esta nueva filosofía es conocida como la **regla de Dempster del condicionamiento** ([3], Sec. 4). Dada una función plausibilidad \overline{P} y un evento $B \subseteq \Omega$ tal que $\overline{P}(B) > 0$, se define la plausibilidad condicionada como:

$$\overline{D}(A | B) = \frac{\overline{P}(A \cap B)}{\overline{P}(B)} \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3.11)$$

Estando solamente definida para sucesos, esta regla de condicionamiento preserva el modelo, es decir, $\overline{D}(A | B)$ también es una función de plausibilidad

Ejemplo 3.6. Consideramos una urna en la que hay bolas azules, rojas y verdes. Sabemos que entre un 30 % y 70 % son azules, entre un 10 % y 40 % son rojas y entre

3.2. EXTENSIÓN NATURAL Y REGULAR

un 20% y 50% son verdes. Denotando $\Omega = \{a, r, v\}$, esta información nos permite asignar:

	$\{a\}$	$\{r\}$	$\{v\}$	$\{a, r\}$	$\{a, v\}$	$\{r, v\}$
\underline{P}	0.3	0.1	0.2	0.5	0.6	0.3
\overline{P}	0.7	0.4	0.5	0.8	0.9	0.7

Cuadro 3.2: Probabilidad inferior y superior definida sobre $\Omega = \{a, r, v\}$.

Un compañero nos informa de que el resultado experimental no ha sido verde, pero no nos dice si ha sido azul o rojo. Si queremos utilizar la filosofía ‘focusing’, debemos utilizar la extensión regular. Nuestras creencias, reflejadas en la tabla anterior, restringidas al espacio muestral $B = \{a, r\}$, asignan la siguiente probabilidad inferior, ya calculada en el Ejemplo 3.4:

A	$\{a\}$	$\{r\}$	$\{v\}$	$\{a, r\}$	$\{a, v\}$	$\{r, v\}$
$\underline{R}(\cdot \{a, r\})$	0.43	0.13	0	1	0.43	0.13
$\overline{R}(\cdot \{a, r\})$	0.87	0.57	0	1	0.87	0.57

Para hacer estos cálculos han sido necesarios los valores representados en azul en el Cuadro 3.2, es decir, solamente hemos utilizado información sobre los elementos del evento condicionante $B = \{a, r\}$. Se concluye que en la sección de la urna compuesta por bolas azules y rojas, entre un 43% y 87% son azules y entre un 13% y 57% son rojas. Al tratarse de la extensión regular estas asignaciones son coherentes con las originales y, como ya hemos visto en el Ejemplo 3.4, $\underline{R}(\cdot | B)$ es una función de creencia.

Utilizamos ahora la regla de Dempster para estudiar el condicionamiento bajo la filosofía ‘revising’. Utilizando la ecuación (3.11) obtenemos:

	$\{a\}$	$\{r\}$	$\{v\}$	$\{a, r\}$	$\{a, v\}$	$\{r, v\}$
$\underline{D}(\cdot \{a, r\})$	0.5	0.13	0	1	0.5	0.13
$\overline{D}(\cdot \{a, r\})$	0.87	0.5	0	1	0.87	0.5

Para hacer estos cálculos han sido necesarios los valores rodeados en el Cuadro 3.2, es decir, no solo hemos utilizado información sobre los elementos del evento condicionante $B = \{a, r\}$, sino también sobre el elemento extra $\{v\}$. Esto hace que no estemos restringiendo nuestras creencias a B , sino que las estemos actualizando. En este caso concluimos que en la sección de la urna compuesta por bolas azules y rojas, entre un 50% y 87% son azules y entre un 13% y 50% son rojas. La precisión aumenta con respecto a la extensión regular. Calculando la inversa de Möbius obtenemos:

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

	$\{a\}$	$\{r\}$	$\{v\}$	$\{a, r\}$	$\{a, v\}$	$\{r, v\}$	$\{a, r, v\}$
m	0.5	0.13	0	0.37	0	0	0

luego $\underline{D}(\cdot | B)$ es una función de creencia, como ya hemos comentado. Por otro lado, al cumplirse $\underline{P}(B) > 0$, estamos en el Caso 2.1 visto en la Sección 1.3, por lo que la extensión regular es la única probabilidad inferior condicionada coherente con \underline{P} . Dado que hemos obtenido $\underline{D}(\cdot | B) \neq \underline{R}(\cdot | B)$, concluimos que $\underline{R}(\cdot | B)$ no es coherente con el modelo inicial. \square

En conclusión, existen dos reglas diferentes de condicionamiento de las funciones de creencia: la extensión regular y la regla de Dempster. Ambas preservan el modelo, con la diferencia de que la primera es coherente con el modelo original mientras que la segunda no lo es. Si queremos continuar con nuestra interpretación comportamental de las probabilidades inferiores, entonces debemos utilizar la extensión regular. Si, por otro lado, queremos un nuevo modelo en el que la restricción del espacio muestral nos proporcione más precisión, entonces podemos utilizar la regla de Dempster.

3.3. Medidas de posibilidad

En esta sección se estudia un caso particular de las funciones de creencia, las medidas de posibilidad, y se presentan algunas métodos de condicionamiento alternativos presentes en la literatura ([11]). El objetivo es comparar estos nuevos métodos con la extensión regular. Las medidas de posibilidad se encuentran dentro de la teoría de la posibilidad, una alternativa a la teoría de la probabilidad que estudia cómo de posibles o imposibles y cómo de necesarios e innecesarios son los sucesos.

Dado un espacio muestral Ω , una **medida de posibilidad** en Ω es una función $\Pi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ satisfaciendo:

$$\Pi(\emptyset) = 0, \Pi(\Omega) = 1 \text{ y } \Pi(A \cup B) = \text{máx}\{\Pi(A), \Pi(B)\} \quad \forall A, B \subseteq \Omega. \quad (3.12)$$

La función $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ es llamada **medida de necesidad**, y cumple:

$$N(A \cap B) = \text{mín}\{N(A), N(B)\} \quad \forall A, B \subseteq \Omega. \quad (3.13)$$

Estas funciones tienen las siguientes interpretaciones:

$\Pi(A) = 0$: es imposible que ocurra A .

$\Pi(A) = 1$: es posible que ocurra A .

$N(A) = 0$: es innecesario que ocurra A .

$N(A) = 1$: es necesario que ocurra A .

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

La condición $\Pi(\Omega) = 1$ y la relación de dualidad hacen que: $\Pi(A) = 0 \Rightarrow N(A) = 0$ y $N(A) = 1 \Rightarrow \Pi(A) = 1$. Esto tiene sentido, ya que si algo es imposible entonces es innecesario, y si algo es necesario entonces debe ser posible. Además, las medidas de posibilidad y de necesidad satisfacen las siguientes propiedades:

- Π está determinada por su restricción a los elementos unipuntuales:

$$\Pi(A) = \max_{\omega \in A} \pi(\omega) \quad \forall A \subseteq \Omega, \quad (3.14)$$

donde hemos denotado $\pi(\omega) = \Pi(\{\omega\})$. De esto y de la condición $\Pi(\Omega) = 1$ se concluye que Π es una medida de posibilidad si y solo si existe al menos un elemento $\omega \in \Omega$ tal que $\pi(\omega) = 1$.

- Π es una función plausibilidad.
- N es una función de creencia cuyos elementos focales están anidados, es decir, si denotamos por A_1, \dots, A_k a los elementos focales, se cumple $A_k \subset \dots \subset A_1$.

Ejemplo 3.7. Consideramos la medida de posibilidad definida sobre el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ como sigue:

$$\pi(\omega_1) = 0.6, \quad \pi(\omega_2) = 0.5, \quad \pi(\omega_3) = 1.$$

De acuerdo a la ecuación (3.14), esta medida de posibilidad define la probabilidad inferior y superior que se muestra a continuación, junto a su inversa de Möbius.

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0	0	0.4	0	0.5	0.4	1
\overline{P}	0.6	0.5	1	0.6	1	1	1
m	0	0	0.4	0	0.1	0	0.5

Efectivamente, la inversa de Möbius es no-negativa, luego \underline{P} es una función de creencia, y sus elementos focales, $\{\omega_3\}$ y $\{\omega_1, \omega_3\}$, están anidados. \square

A continuación se presentan algunas de las reglas de condicionamiento desarrolladas en la teoría de la posibilidad. El tipo de condicionamiento es el mismo que hemos visto en los intervalos de probabilidad: tomamos dos variables X e Y definidas sobre los espacios muestrales Ω_x y Ω_y respectivamente y consideramos una medida de posibilidad $\Pi_{(X,Y)}$ definida sobre el producto cartesiano $\Omega_x \times \Omega_y$. Se definen las medidas de posibilidad marginales de X e Y respectivamente como:

$$\begin{aligned} \pi_X(x) &= \max_{y \in Y} \pi_{(X,Y)}(x, y) \quad \forall x \in X. \\ \pi_Y(y) &= \max_{x \in X} \pi_{(X,Y)}(x, y) \quad \forall y \in Y. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

Nuestro objetivo es estudiar cómo cambia la medida de posibilidad de X una vez sabido el valor tomado por la otra variable, $Y = y_j$. Es decir, para cada $x \in X$ queremos calcular $\pi_{X|Y}(x | y_j)$. Existen diferentes formas de calcular el anterior valor, dando lugar a diferentes reglas de condicionamiento.

3.3.1. Regla de Zadeh

Se define la ‘medida de posibilidad’ de X condicionada por $Y = y_j$ según la regla de Zadeh como:

$$\pi_{X|Y}(x | y_j) = \pi_{(X,Y)}(x, y) \quad \forall x \in X, \quad (3.16)$$

donde hemos escrito el término entre comillas porque, de forma general, esta regla de condicionamiento no preserva el modelo de medidas de posibilidad. Además, desde el punto de vista de las probabilidades inferiores, el modelo condicionado no es coherente con el modelo original. Esto lo vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. Consideramos las variables X e Y definidas sobre los espacios muestrales $\Omega_x = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $\Omega_y = \{y_1, y_2\}$ respectivamente. Tomamos el producto cartesiano:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_x \times \Omega_y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\} \\ &= \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{31}, \omega_{32}\}, \end{aligned}$$

y sobre él definimos la medida de posibilidad:

	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{31}	ω_{32}
$\pi_{(X,Y)}$	0.6	0.7	0.6	0.5	1	0.7

Esta medida de posibilidad define a su vez la siguiente medida de posibilidad marginal de X de acuerdo con la ecuación (3.15):

	x_1	x_2	x_3
π_X	0.7	0.6	1

La probabilidad inferior y superior asociada a π_X es:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
\underline{P}	0	0	0.4	0	0.4	0.3
\overline{P}	0.7	0.6	1	0.6	1	1

Vamos a utilizar la regla de Zadeh para ver como se modifica la anterior medida de posibilidad en función del valor que toma la variable Y . Mediante la ecuación (3.16) calculamos las ‘medidas de posibilidad’ de X condicionadas por $Y = y_1$ y por $Y = y_2$:

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

x_i	x_1	x_2	x_3
$\pi_{X Y}(\cdot y_1)$	0.6	0.6	1
$\pi_{X Y}(\cdot y_2)$	0.7	0.5	0.7

Aunque $\pi_{X|Y}(\cdot | y_1)$ sí se trata una nueva medida de posibilidad, no ocurre lo mismo con $\pi_{X|Y}(\cdot | y_2)$, y es que $\Pi_{X|Y}(X) = \max_{x \in X} \pi_{X|Y}(x) = 0.7 \neq 1$, incumpliendo el segundo de los axiomas (3.12) en la definición de medida de posibilidad.

Veamos ahora si los modelos condicionados son coherentes con el modelo original. Por un lado, tomando $B = \Omega_x \times \{y_1\}$ como suceso condicionante, tenemos que $\underline{P}(B) = 1 - \overline{P}(B^c) = 1 - \overline{P}(\Omega_x \times \{y_2\}) = 1 - \max_{x \in X} \pi_{(X,Y)}(x, y_2) = 0.3 > 0$, luego aplicando el *Corolario 1.1* concluimos que la extensión regular es la única probabilidad inferior condicionada coherente con la probabilidad inferior original. Calculamos entonces la probabilidad inferior asociada a $\pi_{X|Y}(\cdot | y_1)$ y la comparamos con la extensión regular. Por un lado, denotando $\underline{P}(A \times \{y_1\} | B) = \underline{P}(A | \{y_1\})$, de la ecuación (3.14) tenemos:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}(\cdot \{y_1\})$	0	0	0.4	0	0.4	0.4
$\overline{P}(\cdot \{y_1\})$	0.6	0.6	1	0.6	1	1

Cuadro 3.3: Probabilidad inferior condicionada de \underline{P} por $B = \Omega_x \times \{y_1\}$ según la regla de Zadeh.

La extensión regular la calculamos de forma similar a como hemos hecho en el desarrollo de los intervalos de probabilidad. Por ejemplo, usando la misma notación:

$$\begin{aligned}
 \overline{R}(\{x_1, x_2\} | \{y_1\}) &= \frac{\overline{P}(\{(x_1, y_1), (x_2, y_1)\})}{\overline{P}(\{(x_1, y_1), (x_2, y_1)\}) + \underline{P}(\{(x_3, y_1)\})} \\
 &= \frac{\overline{P}(\{\omega_{11}, \omega_{21}\})}{\overline{P}(\{\omega_{11}, \omega_{21}\}) + \underline{P}(\{\omega_{31}\})} \\
 &= \frac{\max\{\pi_{(X,Y)}(\omega_{11}), \pi_{(X,Y)}(\omega_{21})\}}{\max\{\pi_{(X,Y)}(\omega_{11}), \pi_{(X,Y)}(\omega_{21})\} + (1 - \max_{\omega \in \{\omega_{31}\}^c} \pi_{(X,Y)}(\omega))} \\
 &= \frac{0.6}{0.6 + 0.3} = 0.\widehat{6},
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la ecuación (2.8) y la relación de dualidad (1.14). Procediendo análogamente para el resto de conjuntos se obtiene:

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{R}(\cdot \{y_1\})$	0	0	0.4	0	0.4	0.4
$\widehat{R}(\cdot \{y_1\})$	0.6	0.6	1	0.6	1	1

Cuadro 3.4: Extensión regular de \underline{P} condicionada por $B = \Omega_x \times \{y_1\}$.

Vemos como la extensión regular $\underline{R}(\cdot | \{y_1\})$ no coincide con la probabilidad inferior condicionada $\underline{P}(\cdot | \{y_1\})$ resultante de aplicar la regla de Zadeh, concluyendo así que el modelo condicionado obtenido con dicha regla no es coherente con el modelo original.

Por otro lado, tomando $B = \Omega_x \times \{y_2\}$ tenemos que $\omega_{31} \notin B$ y por tanto $\omega_{31} \in (A \cap B)^c \forall A \subseteq \Omega$, luego $\overline{P}((A \cap B)^c) = \pi_{(X,Y)}(\omega_{31}) = 1$ y $\underline{P}(A \cap B) = 1 - \overline{P}((A \cap B)^c) = 0 \forall A \subseteq \Omega$. Esto, de acuerdo con la ecuación (2.8), implica que $\overline{R}(A^c | B) = 1 \forall A \subseteq \Omega$ y, equivalentemente, $\underline{R}(A | B) = 0 \forall A \subseteq \Omega$. La probabilidad inferior asociada a $\pi_{X|Y}(\cdot | y_2)$ es:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}(\cdot \{y_2\})$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.5	0.3
$\overline{P}(\cdot \{y_2\})$	0.7	0.5	0.7	0.7	0.7	0.7

Cuadro 3.5: Probabilidad inferior condicionada de \underline{P} por $B = \Omega_x \times \{y_2\}$ según la regla de Zadeh.

Dado que $\overline{P}(B) = \pi_{(X,Y)}(\omega_{12}) = 0.7 > 0$ y $\underline{P}(B) = 1 - \overline{P}(B^c) = 1 - \pi_{(X,Y)}(\omega_{31}) = 0$, no podemos aplicar el *Corolario 1.1* para razonar sobre la coherencia en conjunto. No obstante, como $\underline{P}(\{x_1\} | \{y_2\}) = 0.3 > \underline{R}(\{x_1\} | \{y_2\}) = 0$, podemos aplicar la *Proposición 1.1* para deducir $\underline{P}(\cdot | \{y_2\})$ tampoco es coherente con \underline{P} . \square

En el anterior ejemplo hemos visto que, de forma general, desde el punto de vista de la teoría de las medidas de posibilidad, la regla de Zadeh no preserva el modelo. Esto hace que desde este punto de vista dicha regla solo tenga interés en los casos concretos en los que sí se preserve, como por ejemplo al condicionar por $Y = y_1$ en el ejemplo anterior. Estos casos concretos vienen descritos por la siguiente proposición.

Proposición 3.5. (*[Propio]*) Sean X e Y dos variables definidas sobre los espacios muestrales Ω_x y Ω_y respectivamente y sea $\Pi_{(X,Y)}$ una medida de posibilidad definida sobre el producto cartesiano $\Omega_x \times \Omega_y$. Entonces, dado $y_j \in \Omega_y$, la condicionada según la regla de Zadeh $\pi_{X|Y}(x | y_j)$ es una medida de posibilidad si y solo si $\exists x_i \in \Omega_x$ tal que $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 1$.

Demostración. Por definición de la regla de Zadeh:

$$\pi_{X|Y}(x | y_j) = \pi_{(X,Y)}(x_i, y_j).$$

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

Así, $\pi_{X|Y}(x | y_j)$ es una medida de posibilidad $\Leftrightarrow \exists x_i \in \Omega_x$ tal que $\pi_{X|Y}(x_i | y_j) = 1$
 $\Leftrightarrow \exists x_i \in \Omega_x$ tal que $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 1$. \square

Desde el punto de vista de las probabilidades inferiores, hemos visto como tampoco mantiene la coherencia con el modelo original. Así, al igual que como ocurría con la regla de Dempster, la regla de Zadeh no tiene interés bajo la interpretación comportamental de las probabilidades imprecisas.

3.3.2. Regla de Hisdal

Se define la ‘medida de posibilidad’ de X condicionada por $Y = y_j$ según la regla de Hisdal como la función $\pi_{X|Y}(\cdot | y_j)$ satisfaciendo:

$$\pi_{(X,Y)}(x, y_j) = \min \{ \pi_{X|Y}(x | y_j), \pi_Y(y_j) \} \quad \forall x \in X, \quad (3.17)$$

donde de nuevo lo hemos escrito entre comillas porque el modelo no se preserva de forma general. La anterior ecuación tiene como soluciones:

$$\pi_{X|Y}(x | y_j) \in \begin{cases} \{ \pi_{(X,Y)}(x, y_j) \} & \text{si } \pi_Y(y_j) > \pi_{(X,Y)}(x, y_j). \\ [\pi_{(X,Y)}(x, y_j), 1] & \text{si } \pi_Y(y_j) = \pi_{(X,Y)}(x, y_j). \end{cases} \quad (3.18)$$

Es decir, cualquier función cumpliendo (3.18) se trata de una ‘medida de posibilidad’ de X condicionada por $Y = y_j$ de acuerdo con la definición de Hisdal. Si $\forall x \in X$ tal que $\pi_Y(y_j) = \pi_{(X,Y)}(x, y_j)$ tomamos el límite inferior del intervalo entonces se recupera la regla de Zadeh. Por otro lado, si para algún $x \in X$ tal que $\pi_Y(y_j) = \pi_{(X,Y)}(x, y_j)$ tomamos el límite superior, es decir, $\pi_{X|Y}(x | y_j) = 1$, entonces el modelo se preserva y $\pi_{X|Y}(\cdot | y_j)$ se trata de una medida de posibilidad. Esto se entenderá mejor en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. Consideramos la medida de posibilidad del Ejemplo 3.8:

	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{31}	ω_{32}
$\pi_{(X,Y)}$	0.6	0.7	0.6	0.5	1	0.7

definida sobre el espacio muestral $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ con $\Omega_x = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $\Omega_y = \{y_1, y_2\}$. La medida de posibilidad marginal de Y se obtiene a partir de la ecuación (3.15):

	y_1	y_2
π_Y	1	0.7

De la ecuación (3.18) obtenemos:

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

x_i	x_1	x_2	x_3
$\pi_{X Y}(\cdot y_1)$	0.6	0.6	1
$\pi_{X Y}(\cdot y_2)$	[0.7,1]	0.5	[0.7,1]

El condicionamiento por y_1 es idéntico al dado por la regla de Zadeh. Con respecto a y_2 , existen tres posibilidades. Si tomamos $\pi_{X|Y}(x_1 | y_2) = \pi_{X|Y}(x_3 | y_2) = 0.7$ entonces recuperamos los valores dados por Zadeh. Si tomamos $\pi_{X|Y}(x_1 | y_2), \pi_{X|Y}(x_3 | y_2) \in (0.7, 1)$ entonces el condicionamiento es diferente al dado por Zadeh, pero cuenta con los mismos inconvenientes: el modelo no se preserva y no es coherente con el modelo original. Por último, si tomamos $\pi_{X|Y}(x_1 | y_2) = 1$ y/o $\pi_{X|Y}(x_3 | y_2) = 1$ entonces el modelo sí se preserva, $\pi_{X|Y}(\cdot | y_2)$ es una medida de posibilidad. Tomemos, por ejemplo, $\pi_{X|Y}(x_1 | y_2) = 0.8$ y $\pi_{X|Y}(x_3 | y_2) = 1$. La probabilidad inferior asociada a $\pi_{X|Y}(\cdot | y_2)$ es:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}(\cdot \{y_2\})$	0	0	0.2	0	0.5	0.2
$\overline{P}(\cdot \{y_2\})$	0.8	0.5	1	0.8	1	1

Cuadro 3.6: Probabilidad inferior condicionada de \underline{P} por $B = \Omega_x \times \{y_2\}$ según la regla de Hisdal.

El razonamiento del Ejemplo 3.9 para deducir que $\underline{R}(A | B) = 0 \forall A \subseteq \Omega$ sigue siendo válido en este caso. Así, aplicando la *Proposición 1.1*, $\underline{P}(\{x_3\} | \{y_2\}) = 0.3 > \underline{R}(\{x_3\} | \{y_2\}) = 0$ implica que el nuevo modelo no es coherente con el modelo original. \square

En conclusión, la regla de Hisdal contiene a la regla de Zadeh como un caso concreto. La libertad que nos proporciona la regla de Hisdal de poder elegir el 1 como medida de posibilidad condicionada arregla el problema de Zadeh de no-preservación del modelo. No obstante, precisamente el hecho de que dicha función no esté determinada de forma exacta hace que la regla de Hisdal pierda parcial interés. Con respecto a la coherencia, de nuevo esta regla no es válida dentro de la interpretación comportamental de las probabilidades imprecisas.

3.3.3. Regla de Nguyen

Dado un elemento $y_j \in \Omega_y$ tal que $\pi_Y(y_j) > 0$, se define la ‘medida de posibilidad’ de X condicionada por $Y = y_j$ según la regla de Nguyen como:

$$\pi_{X|Y}(x | y_j) = \begin{cases} \pi_{(X,Y)}(x, y_j) & \text{si } \pi_X(x) \leq \pi_Y(y_j), \\ \pi_{(X,Y)}(x, y_j) \frac{\pi_X(x)}{\pi_Y(y_j)} & \text{si } \pi_X(x) > \pi_Y(y_j), \end{cases} \quad \forall x \in X. \quad (3.19)$$

3.3. MEDIDAS DE POSIBILIDAD

Como veremos a continuación, la regla de Nguyen es una alternativa que favorece la preservación del modelo frente a la regla de Zadeh, pero que sigue sin ser ideal en este aspecto.

Ejemplo 3.10. Consideramos de nuevo la medida de posibilidad de los Ejemplos 3.8 y 3.9:

	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{31}	ω_{32}
$\pi_{(X,Y)}$	0.6	0.7	0.6	0.5	1	0.7

definida sobre el espacio muestral $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ con $\Omega_x = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $\Omega_y = \{y_1, y_2\}$, con medidas de posibilidad marginales:

	x_1	x_2	x_3		y_1	y_2
π_X	0.7	0.6	1	π_Y	1	0.7

Dado que $\pi_Y(y_1) = 1$, de la ecuación (3.19) deducimos que $\pi_{X|Y}(x | y_1) = \pi_{(X,Y)}(x, y_1) \forall x \in X$. Así, el condicionamiento por y_1 es el mismo que el de Zadeh y el de Hisdal. Con respecto a y_2 , se obtiene:

	x_i	x_1	x_2	x_3
$\pi_{X Y}(\cdot y_2)$		0.7	0.5	1

es decir, el modelo de medidas de posibilidad sí se preserva en este caso. La probabilidad inferior asociada a $\pi_{X|Y}(\cdot | y_2)$ es:

A	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\underline{P}(\cdot \{y_2\})$	0	0	0.3	0	0.5	0.3
$\overline{P}(\cdot \{y_2\})$	0.7	0.5	1	0.7	1	1

Cuadro 3.7: Probabilidad inferior condicionada de \underline{P} por $B = \Omega_x \times \{y_2\}$ según la regla de Nguyen.

Razonando idénticamente a los Ejemplos 3.9 y 3.10, el modelo no es coherente con el modelo original. Para ver que la preservación del modelo no se mantiene de forma general, modificamos ligeramente la medida de posibilidad inicial y consideramos:

	ω_{11}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{31}	ω_{32}
$\pi_{(X,Y)}$	0.6	0.8	0.6	0.5	1	0.7

En este caso, las medidas de posibilidad marginales vienen dadas por:

	x_1	x_2	x_3		y_1	y_2
π_X	0.8	0.6	1	π_Y	1	0.8

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

y, de acuerdo con la ecuación (3.19):

x_i	x_1	x_2	x_3
$\pi_{X Y}(\cdot y_2)$	0.7	0.5	0.875

no preservándose el modelo de medidas de posibilidad. \square

Del anterior ejemplo se deduce que la regla de Nguyen es más potente que la Zadeh a la hora de preservar el modelo. Siempre que el modelo se preserve bajo la regla de Zadeh, lo hará bajo la regla de Nguyen, pero habrá veces que sí lo haga bajo Nguyen pero no bajo Zadeh. Esto se resume en la siguiente proposición:

Proposición 3.6. (*[Propio]*) Sean X e Y dos variables definidas sobre los espacios muestrales Ω_x y Ω_y respectivamente y sea $\Pi_{(X,Y)}$ una medida de posibilidad definida sobre el producto cartesiano $\Omega_x \times \Omega_y$. Entonces, dado $y_j \in \Omega_y$, la condicionada según la regla de Nguyen $\pi_{X|Y}(x | y_j)$ es una medida de posibilidad si y solo si $\exists x_i \in \Omega_x$ tal que $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 1$ o $\exists x_i \in \Omega_x$ tal que $\pi_X(x_i) = 1$ y $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \pi_Y(y_j)$.

Demostración. Sabemos que $\pi_{X|Y}(x | y_j)$ es una medida de posibilidad $\Leftrightarrow \exists x_i \in \Omega_x$ tal que $\pi_{X|Y}(x_i | y_j) = 1$. Por la definición de la regla de Nguyen, diferenciamos dos casos: si $\pi_X(x_i) \leq \pi_Y(y_j)$ entonces lo anterior es equivalente a que $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 1$. Si $\pi_X(x_i) > \pi_Y(y_j)$ entonces lo anterior es equivalente a $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) \frac{\pi_X(x_i)}{\pi_Y(y_j)} = 1$, lo cual se satisface si y solo si $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \pi_X(x_i) = \pi_Y(y_j) = 1$ o si $\pi_X(x_i) = 1$ y $\pi_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \pi_Y(y_j)$. \square

Como resumen de estas tres reglas de condicionamiento: la regla de Zadeh puede considerarse la regla básica de condicionamiento de medidas de posibilidad. Es muy sencilla, pero tiene el inconveniente de que solamente preserva el modelo, y por tanto es útil, cuando existe un elemento de la variable condicionada tal que la posibilidad conjunta de dicho elemento con el elemento condicionante es igual a 1. La regla de Hisdal puede considerarse una ampliación de la regla de Zadeh. Aporta flexibilidad y da pie a la conservación del modelo, pero pierde fuerza en el sentido de que no está perfectamente determinada. Por último, la regla de Nguyen tiene a su favor que está determinada, no como la de Hisdal, y que preserva el modelo mejor que la de Zadeh. En cualquier caso, ninguna de las tres reglas es aplicable en la teoría comportamental de las probabilidades imprecisas, y es que no mantienen la coherencia con el modelo original.

3.4. Otros casos particulares

Dejando a un lado la teoría de la posibilidad, como ya anticipamos en la entrada del capítulo, a continuación profundizamos en dos casos particulares de funciones de creencia: el modelo linear vacuum y los conjuntos aleatorios. Por un lado, el

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

modelo linear vacuous sigue una filosofía similar a los modelos pari mutuel y de variación total. Su probabilidad inferior asociada tiene una forma muy similar a la de PMM, y su interpretación es análoga a la de TV, salvo por que ahora el parámetro de distorsión depende del suceso en cuestión. Por otro lado, los conjuntos aleatorios son quizás menos intuitivos, aunque muy potentes a la hora de definir funciones de creencia. En ambos casos se estudian sus propiedades, se demuestra que son casos concretos de funciones de creencia y se estudia sus consecuencias en el condicionamiento bajo la extensión regular.

3.4.1. Modelo linear vacuous

Consideremos de nuevo una casa de apuestas cuyo método para obtener ganancias consiste en imponer una tasa $\delta_A \geq 0$ que el cliente ha de pagar por apostar por cada evento $A \subseteq \Omega$. A diferencia del modelo TV, en este caso la tasa a pagar depende del evento en cuestión de acuerdo con: $\delta_A = (1 - P_0(A))\delta$, donde $P_0(A)$ es el precio de una apuesta por A considerado justo por la casa de apuestas y $\delta > 0$ es un parámetro fijo de distorsión. Cuanto menor sea $P_0(A)$, mayor será δ_A . Es decir, al contrario de lo que ocurría en el PMM, la casa de apuestas penaliza menos a los sujetos que participan por apuestas de más probables, e impone una tasa mayor a los sujetos que corren un mayor riesgo.

Si un sujeto quiere participar en una apuesta por A por el valor $P_0(A)$, pagará $P_0(A) + \delta_A$ y las ganancias esperadas serán:

$$\text{Sujeto: } P_0(I_A - (P_0(A) + \delta_A)) = P_0(A) - P_0(A) - \delta_A = -\delta_A \leq 0,$$

$$\text{Casa: } P_0((P_0(A) + \delta_A) - I_A) = P_0(A) + \delta_A - P_0(A) = \delta_A \geq 0.$$

El valor $P_0(A) + \delta_A$ puede interpretarse como el mínimo precio aceptable de venta de la apuesta A , es decir, de acuerdo con la interpretación comportamental dada en el Capítulo 1: $\bar{P}(A) = P_0(A) + \delta_A$. Utilizando la relación de dualidad (1.14) se obtiene:

$$\underline{P}(A) = 1 - \bar{P}(A^c) = 1 - P_0(A^c) - \delta_{A^c} = 1 - (1 - P_0(A)) - \delta_{A^c} = P_0(A) - \delta_{A^c}.$$

Teniendo en cuenta que $\delta(A^c) = (1 - P_0(A^c))\delta = P_0(A)\delta$, escribiéndolo en términos del parámetro de distorsión δ :

$$\underline{P}(A) = P_0(A) - P_0(A)\delta = (1 - \delta)P_0(A),$$

$$\bar{P}(A) = P_0(A) + (1 - P_0(A))\delta = (1 - \delta)P_0(A) + \delta.$$

Así, dados $P_0 \in \mathbb{P}(\Omega)$ tal que $P_0(A) = 1$ si y solo si $A = \Omega$ y $\delta \in (0, 1)$ un parámetro de distorsión, se define el modelo **linear vacuous (LV)** inducido por P_0 y δ , denotado por $(P_0, \delta)_{LV}$, como la probabilidad inferior (y superior) satisfaciendo $\underline{P}(\Omega) = \bar{P}(\Omega) = 1$, $\underline{P}(\emptyset) = \bar{P}(\emptyset) = 0$ y, $\forall A \subset \Omega, A \neq \emptyset$:

$$\underline{P}(A) = (1 - \delta)P_0(A), \quad \bar{P}(A) = (1 - \delta)P_0(A) + \delta, \quad (3.20)$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

donde se han hecho correcciones en el espacio vacío y en el espacio total para asegurar la coherencia del modelo. El motivo de exigir que $P_0(A) = 1$ si y solo si $A = \Omega$ es para evitar que haya sucesos seguros ($P_0(A) = 1$) con probabilidad inferior menor que 1. Diremos que \underline{P} (\overline{P}) es la probabilidad inferior (superior) asociada a $(P_0, \delta)_{LV}$ o inducida por $(P_0, \delta)_{LV}$. En este modelo se cumple $\overline{P}(A) - \underline{P}(A) = \delta \forall A \subseteq \Omega$. Así, al igual que para los modelos PMM y TV, δ mide la imprecisión en la determinación del precio justo de A : cuanto mayor sea δ mayor es la imprecisión y viceversa. Además, \underline{P} y \overline{P} vuelven a ser asimétricas con respecto a P_0 .

La razón de incluir el modelo linear vacuous en esta sección es que la probabilidad inferior inducida por este modelo es una función de creencia, tal y como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.7. (*[9, Sec. 2.9.2]*) *Sea $(P_0, \delta)_{LV}$ un modelo LV y sea \underline{P} su probabilidad inferior asociada. Entonces \underline{P} es una función de creencia.*

Demostración. Demostraremos que la inversa de Möbius m asociada a \underline{P} está en el intervalo $[0, 1]$ y así quedará probado que \underline{P} es una función de de creencia. Sea $n = |\Omega|$, dado $A \subseteq \Omega$ diferenciamos tres casos:

1. $|A| = 1 \Rightarrow A = \{\omega\} \Rightarrow m(\{\omega\}) = \underline{P}(\{\omega\}) = (1 - \delta)P_0(\{\omega\}) \in [0, 1]$.

2. $|A| \in \{2, \dots, n - 1\}$. Aplicamos (3.4) y la segunda igualdad de la ecuación (3.6):

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A \setminus C|} \underline{P}(A) \\ &= \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A \setminus C|} (1 - \delta)P_0(A) = (1 - \delta) \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A \setminus C|} P_0(A) = 0. \end{aligned}$$

3. $|A| = n \Rightarrow A = \{\Omega\}$. Teniendo en cuenta que $\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$ y los casos 1 y 2 que acabamos de estudiar:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = \sum_{\omega \in \Omega} m(\{\omega\}) + m(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} (1 - \delta)P_0(\{\omega\}) + m(\{\Omega\}) \\ &= (1 - \delta) + m(\{\Omega\}) \Rightarrow m(\Omega) = \delta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Habiendo probado que $m(A) \in [0, 1] \forall A \subseteq \Omega$ queda probado que \underline{P} es una función de creencia. \square

Por ser \underline{P} una función de creencia, su extensión a apuestas completamente monótona viene determinada por la integral de Choquet. En [9, Sec 3.2.4] se demuestra que para un modelo LV $(P_0, \delta)_{LV}$ la integral de Choquet (2.4) se particulariza a:

$$\underline{P}(f) = \delta \min_{\omega \in \Omega} f(\omega) + (1 - \delta)P_0(f) \quad \forall f \in \mathcal{L}(\Omega). \quad (3.21)$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

En el siguiente resultado se muestra una propiedad de los modelos LV que será necesaria para, a continuación, probar que, al igual que como ocurría para el modelo PMM, el modelo LV es un caso particular del modelo de intervalos de probabilidad.

Lema 3.2. (*[Propio]*) Sea \underline{P} la probabilidad inferior inducida por un modelo LV $(P_0, \delta)_{LV}$, entonces:

$$\underline{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \underline{P}(\{\omega\}) \quad \forall A \subset \Omega, \quad (3.22)$$

es decir, \underline{P} no solo es superaditiva (condición **(C3)** de coherencia), sino que también es aditiva.

Demostración. Por la ecuación (3.20), $A \subset \Omega$ implica que $\underline{P}(A) = (1 - \delta)P_0(A)$. Además, $\forall \omega \in \Omega$ se cumple $\underline{P}(\{\omega\}) = (1 - \delta)P_0(\{\omega\})$. Así:

$$\underline{P}(A) = (1 - \delta)P_0(A) = (1 - \delta) \sum_{\omega \in A} P_0(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \underline{P}(\{\omega\}).$$

□

Como ya anticipamos, en la siguiente proposición se demuestra que la probabilidad inferior inducida por un modelo LV es un intervalo de probabilidad. La demostración es análoga a la de la *Proposición 2.8*, en la cual se demostraba el mismo resultado para el PMM.

Proposición 3.8. (*[Propio]*) Sea $(P_0, \delta)_{LV}$ un modelo LV y sea \underline{P}_1 su probabilidad inferior asociada. Se considera el intervalo de probabilidad $\mathcal{I} = \{[l_i, u_i] : i = 1, \dots, n\}$ dado por:

$$l_i = \underline{P}_1(\{\omega_i\}) \quad \text{y} \quad u_i = \bar{P}_1(\{\omega_i\}) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Entonces se cumple que \mathcal{I} es coherente y además $\underline{P}_1 = \underline{P}_2$, donde \underline{P}_2 denota la probabilidad inferior asociada a \mathcal{I} .

Demostración. La demostración de que \mathcal{I} es coherente es independiente del modelo con el que se esté trabajando y por tanto es la misma que la de la *Proposición 2.8* para el modelo PMM. Decidimos así omitirla en esta ocasión.

Demostremos ahora que $\underline{P}_1(A) = \underline{P}_2(A) \quad \forall A \subset \Omega$ (el caso $A = \Omega$ es trivial). Habiendo demostrado que \mathcal{I} es coherente, sabemos que \underline{P}_2 viene dada por la ecuación (2.21). Se cumple:

$$\begin{aligned} \underline{P}_2(A) &= \text{máx} \left\{ \sum_{\omega_i \in A} l_i, 1 - \sum_{\omega_i \notin A} u_i \right\} \\ &= \text{máx} \left\{ \sum_{\omega_i \in A} \underline{P}_1(\{\omega_i\}), 1 - \sum_{\omega_i \notin A} \bar{P}_1(\{\omega_i\}) \right\} \\ &= \text{máx} \left\{ \underline{P}_1(A), 1 - \sum_{\omega_i \notin A} \bar{P}_1(\{\omega_i\}) \right\} = \underline{P}_1(A), \end{aligned}$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

donde hemos utilizado el *Lema 3.2* y la sublinealidad de \bar{P}_1 : $1 - \sum_{\omega_i \notin A} \bar{P}_1(\{\omega_i\}) \leq 1 - \bar{P}(A^c) = \underline{P}(A)$. \square

De forma similar a como hicimos en el Ejemplo 2.8, a continuación se ilustra la proposición anterior y se muestra como los modelos de intervalos de probabilidad y LV no son equivalentes.

Ejemplo 3.12. Volvamos de nuevo al Ejemplo 2.8, en el cual una casa de apuestas busca asignar las cuotas para el partido del Mundial de Qatar entre España y Alemania. Recordemos que, denotando por $\{S\}$, $\{E\}$ y $\{A\}$ a España, empate y Alemania respectivamente, los precios justos considerados por la casa son los siguientes:

	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
P_0	0.3	0.4	0.3	0.7	0.6	0.7

Cuadro 3.8: Precios justos de las apuestas posibles en el partido España vs Alemania.

La casa decide finalmente utilizar el modelo linear vacuous con parámetro de distorsión $\delta = 0.1$ para maximizar sus ganancias. Así, consideramos el modelo LV $(P_0, \delta = 0.1)_{LV}$. La ecuación (3.20) define la probabilidad inferior (y superior) que se muestra a continuación, junto a su inversa de Möbius correspondiente. Tal y como anticipamos en la demostración de la *Proposición 3.7*, los elementos focales son los unipuntuales o el total.

	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$	$\{S, E, A\}$
$\underline{P}_{(P_0, \delta)}$	0.27	0.36	0.27	0.63	0.54	0.63	1
$\bar{P}_{(P_0, \delta)}$	0.37	0.46	0.37	0.73	0.64	0.73	1
m	0.27	0.36	0.27	0	0	0	0.1

La casa no aceptará una apuesta a favor de España si no es por un valor de 0.37 euros o superior, causando al cliente una pérdida mínimo medio de 0.07 euros. Al contrario de lo que ocurría en el Ejemplo 2.5, vemos como en este caso la pérdida media por una apuesta a favor de España o empate es menor que por una apuesta a favor de España: salen más perjudicados los clientes más arriesgados.

La inversa de Möbius es positiva, luego $\underline{P}_{(P_0, \delta)}$ se trata de una función de creencia. A su vez, $\underline{P}_{(P_0, \delta)}$ define el intervalo de probabilidad:

$$\mathcal{I} = \{[0.27, 0.37], [0.36, 0.46], [0.27, 0.37]\},$$

que, a partir de la ecuación (2.19), puede verse que es coherente. Para ilustrar el hecho de que ambos modelos definen la misma probabilidad inferior, utilizamos las ecuaciones (2.21) y (2.22) para calcular:

$$\underline{P}_{\mathcal{I}}(\{S, E\}) = \max\{l_S + l_E, 1 - u_A\} = \max\{0.63, 0.63\} = 0.63 = \underline{P}_{(P_0, \delta)}(\{S, E\}).$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

Análogamente para el resto de conjuntos se comprueba que $\underline{P}_{(P_0, \delta)} = \underline{P}_{\mathcal{I}}$.

Consideremos ahora el intervalo:

$$\mathcal{I}' = \{[0.17, 0.37], [0.36, 0.46], [0.27, 0.47]\}.$$

De nuevo se trata de un intervalo de probabilidad coherente. Sin embargo, este intervalo no puede ser representado por un LV. Supongamos que sí pudiera y denotemos por \underline{P}' la probabilidad inducida por el LV. Entonces tendríamos:

$$\overline{P}'(\{S\}) - \underline{P}'(\{S\}) = 0.2,$$

$$\overline{P}'(\{E\}) - \underline{P}'(\{E\}) = 0.1,$$

incumpliendo el hecho de que $\forall A \subseteq \Omega$ la diferencia $\overline{P}'(A) - \underline{P}'(A)$ ha de ser constante. \square

Para terminar, a continuación se demuestra que el modelo LV se preserva bajo la extensión regular y se dan expresiones tanto para la probabilidad como para el parámetro de distorsión del modelo condicionado.

Proposición 3.9. (*[8], Section 5.2.*) Sea $(P_0, \delta)_{LV}$ un modelo LV y sea \underline{P} su probabilidad inferior asociada. Entonces, dado $B \subseteq \Omega$ tal que $P_0(B) > 0$, $\underline{R}(\cdot | B)$ está asociada al modelo LV $(P_{0|B}, \delta_B)_{LV}$, con

$$P_{0|B} = P_0(\cdot | B) \quad y \quad \delta_B = \frac{\delta}{\overline{P}(B)},$$

donde δ_B solamente está definido cuando $\overline{P}(B) = (1 - \delta)P_0(B) + \delta > 0$.

Demostración. La demostración es similar a las demostraciones de la *Proposición 2.9* y de la *Proposición 2.11*. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.1) y (3.20), debemos demostrar que $\underline{R}(\Omega | B) = 1$ y que

$$\underline{R}(A | B) = (1 - \delta_B) \frac{P_0(A \cap B)}{P_0(B)} \quad \forall A \subset \Omega.$$

Dado que \underline{P} es una probabilidad inferior 2-monótona, podemos hacer uso de la ecuación (2.7). Por un lado:

$$\underline{R}(\Omega | B) = \frac{\underline{P}(\Omega \cap B)}{\underline{P}(\Omega \cap B) + \overline{P}(\Omega^c \cap B)} = \frac{\underline{P}(B)}{\underline{P}(B)} = 1.$$

Por otro lado, dado $A \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} \underline{R}(A | B) &= \frac{\underline{P}(A \cap B)}{\underline{P}(A \cap B) + \overline{P}(A^c \cap B)} \\ &= \frac{(1 - \delta)P_0(A \cap B)}{(1 - \delta)P_0(A \cap B) + (1 - \delta)P_0(A^c \cap B) + \delta}. \end{aligned}$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $B \neq \Omega$ (en otro caso el condicionamiento sería trivial). Así, $\bar{P}(B) = (1 - \delta)P_0(B) + \delta$, y la anterior igualdad se convierte en:

$$\underline{R}(A | B) = \frac{(1 - \delta)P_0(A \cap B)}{(1 - \delta)P_0(B) + \delta} = \frac{(1 - \delta)P_0(B)}{\bar{P}(B)} \frac{P_0(A \cap B)}{P_0(B)}.$$

Al satisfacerse $\frac{(1 - \delta)P_0(B)}{\bar{P}(B)} = 1 - \delta_B$, aquí finaliza la demostración. \square

De nuevo, igual que como ocurría para el PMM y para el TV, si B es el suceso condicionante, la probabilidad del modelo LV condicionado es la probabilidad condicionada por B . El parámetro de distorsión también aumenta, en este caso inversamente proporcional a $\bar{P}(B)$. Recordando que en PMM lo hacía inversamente proporcional a $\underline{P}(B)$ y en TV inversamente proporcional a $P(B)$, los incrementos en la imprecisión de los tres modelos para un mismo suceso condicionante B satisfacen:

$$\delta_B^{LV} \leq \delta_B^{TV} \leq \delta_B^{PMM}. \quad (3.23)$$

Ejemplo 3.12. Continuamos con nuestro ejemplo sobre el partido entre España vs Alemania, donde los precios justos vienen dados en el Cuadro 3.8, y consideramos de nuevo el posible amaño en contra de Alemania. Tomando $B = \{S, E\}$, de acuerdo con la proposición anterior la extensión regular $\underline{R}(\cdot | \{S, E\})$ está asociada al modelo $(P_{0|B}, \delta_B)_{LV}$, con $\delta_B = \frac{\delta}{\bar{P}_{(P_0, \delta)}(B)} = 0.137$ y $P_{0|B}$ dada por la fórmula de Bayes (1.1):

A	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
$P_0(\cdot \{S, E\})$	0.43	0.57	0	1	0.43	0.57

Este ejemplo es el análogo para LV de los Ejemplos 2.6 y 2.8 para PMM y TV. En dichos ejemplos obtuvimos $\delta_B^{PMM} = 0.149$ y $\delta_B^{TV} = 0.142$, satisfaciéndose así la ecuación (3.23), como era de esperar. Utilizando la ecuación (2.35) podemos calcular la extensión regular y su probabilidad superior correspondiente:

A	$\{S\}$	$\{E\}$	$\{A\}$	$\{S, E\}$	$\{S, A\}$	$\{E, A\}$
$\underline{R}(\cdot \{S, E\})$	0.37	0.49	0	1	0.37	0.49
$\bar{R}(\cdot \{S, E\})$	0.51	0.63	0	1	0.51	0.63

\square

3.4.2. Conjuntos aleatorios

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espacio medible, una función multievaluada no vacía $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{P}(\Omega) \setminus \emptyset)$ es llamada **conjunto aleatorio** cuando satisface la siguiente condición de medibilidad:

$$\Gamma_*(A) = \{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \subseteq A\} \in \mathcal{A} \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3.24)$$

Los conjuntos aleatorios son una generalización de las variables aleatorias. Dado un espacio muestral \mathcal{X} , una variable aleatoria X definida sobre \mathcal{X} es una función que a

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

cada resultado posible del experimento $x \in \mathcal{X}$ le asocia un valor $X(x)$. A su vez, un conjunto aleatorio Γ definido sobre \mathcal{X} es una función que a cada resultado posible del experimento $x \in \mathcal{X}$ le asocia un conjunto de posibles valores $\Gamma(x)$. Es decir, un conjunto aleatorio puede interpretarse como una variable aleatoria cuya imagen no está perfectamente determinada, sabemos que se encuentra entre unos posibles valores, pero no sabemos de cuál de ellos se trata.

Se define la probabilidad inferior asociada al conjunto aleatorio Γ como:

$$\underline{P}(A) = P(\Gamma_*(A)) \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3.25)$$

La probabilidad superior correspondiente puede calcularse como:

$$\begin{aligned} \overline{P}(A) &= 1 - \underline{P}(A^c) = 1 - P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \subseteq A^c\}) \\ &= 1 - P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \cap A = \emptyset\}) = P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \cap A = \emptyset\}^c) \\ &= P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \cap A \neq \emptyset\}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

A continuación se demuestra que la probabilidad inferior asociada a un conjunto aleatorio es una función de creencia y se da una expresión para su inversa de Möbius.

Proposición 3.10. (*[Propio]*) Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, Ω un espacio muestral y $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ un conjunto aleatorio con probabilidad inferior asociada \underline{P} . Entonces \underline{P} es una función de creencia y su inversa de Möbius viene dada por:

$$m(A) = P(\Gamma^{-1}(A)) \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3.27)$$

Es decir, los elementos focales de \underline{P} son los subconjuntos de Ω imagen de los elementos de \mathcal{X} con probabilidad positiva.

Demostración. En primer lugar, probemos que la función m dada por la ecuación (3.27) es una asignación básica de probabilidad. Dado que la imagen de Γ es $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \emptyset$, la función m definida en (3.27) satisface $m(\emptyset) = P(\Gamma^{-1}(\emptyset)) = P(\emptyset) = 0$. Por otro lado, se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) &= \sum_{A \subseteq \Omega} P(\Gamma^{-1}(A)) = \sum_{A \subseteq \Omega} P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) = A\}) \\ &= P(\cup_{A \subseteq \Omega} \{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) = A\}) = P(\mathcal{X}) = 1. \end{aligned}$$

Así, por definición, concluimos que m es una asignación básica de probabilidad. De acuerdo con la ecuación (3.3), m define la siguiente función de creencia:

$$\underline{P}'(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) = \sum_{B \subseteq A} P(\Gamma^{-1}(B)) \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

Así, para cada subconjunto $A \subseteq \Omega$ se cumple:

$$\begin{aligned} \underline{P}'(A) &= \sum_{B \subseteq A} P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) = B\}) = P(\cup_{B \subseteq A} \{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) = B\}) \\ &= P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \subseteq A\}) = \underline{P}(A), \end{aligned}$$

donde \underline{P} denota la probabilidad inferior (3.25) definida por el conjunto aleatorio. En resumen, hemos probado que m es una asignación básica de probabilidad que define la probabilidad inferior asociada al conjunto aleatorio Γ . En consecuencia, \underline{P} es una función de creencia y m es su inversa de Möbius. \square

En el siguiente resultado se caracterizan las propiedades de la probabilidad inferior asociada a un conjunto aleatorio en función de la probabilidad que la define.

Proposición 3.11. (*[3], Proposition 9.*) Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, Ω un espacio muestral y $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ un conjunto aleatorio con probabilidad inferior asociada \underline{P} . Sea F el soporte de \underline{P} . Entonces:

1. \underline{P} es dispersa si y solo si $P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) = \{\omega\}\}) > 0 \forall \omega \in F$.
2. \underline{P} es no-exclusiva si y solo si $P(\{x \in \mathcal{X} : \omega \in \Gamma(x)\}) > 0 \forall \omega \in \Omega$.

Demostración.

1. Por definición, \underline{P} es dispersa si y solo si $\forall B \subseteq \Omega$ elemento focal y $\forall \omega \in B$ se cumple $m(\{\omega\}) > 0$. Dado que F es la unión de todos los elementos focales de \underline{P} , lo anterior es equivalente a que $m(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in F$. De acuerdo con la *Proposición 3.8* $m(\{\omega\}) = P(\Gamma^{-1}(\{\omega\})) = P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) = \{\omega\}\}) > 0 \forall \omega \in \Omega$ y, concretamente, $\forall \omega \in F$, llegando así al resultado.
2. En la *Proposición 3.1* se ha probado que \underline{P} es no-exclusiva si y solo si $\bar{P}(B) > 0 \forall B \subseteq \Omega$. Por monotonía, esto es equivalente a que $\bar{P}(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in \Omega$. Utilizando (3.26), esto es lo mismo que $P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \cap \{\omega\} \neq \emptyset\}) = P(\{x \in \mathcal{X} : \omega \in \Gamma(x)\}) \forall \omega \in \Omega$, concluyendo la demostración.

A continuación se muestra un ejemplo de conjunto aleatorio y se comprueban numéricamente las dos proposiciones anteriores.

Ejemplo 3.13. Consideramos el espacio de probabilidad $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}), P)$, donde $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ y P está definida como:

$$P(\{x_1\}) = 0.25, \quad P(\{x_2\}) = 0.25, \quad P(\{x_3\}) = 0.5.$$

Consideramos también el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, donde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Definimos la función $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ como:

$$\Gamma(x_1) = \{\omega_1\}, \quad \Gamma(x_2) = \{\omega_1, \omega_3\}, \quad \Gamma(x_3) = \{\omega_2, \omega_3\}.$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

Dado que la σ -álgebra que estamos considerando es $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ y

$$\Gamma_*(A) = \{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) \subseteq A\} \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \quad \forall A \subseteq \Omega,$$

concluimos que Γ se trata de un conjunto aleatorio. Antes de calcular explícitamente la probabilidad inferior \underline{P} asociada a Γ , hagamos uso de la *Proposición 3.8* y de la *Proposición 3.9* para estudiar sus propiedades. En primer lugar, se cumple:

$$P(\{x : \omega_1 \in \Gamma(x)\}) = P(\{x_1, x_2\}) = 0.5 > 0,$$

$$P(\{x : \omega_2 \in \Gamma(x)\}) = P(\{x_3\}) = 0.5 > 0,$$

$$P(\{x : \omega_3 \in \Gamma(x)\}) = P(\{x_2, x_3\}) = 0.75 > 0,$$

luego de la *Proposición 3.9* se concluye que \underline{P} es no-exclusiva, es decir, $F = \Omega$. Dado que $\omega_3 \in F$ pero $P(\{x \in \mathcal{X} : \Gamma(x) = \{\omega_3\}\}) = P(\emptyset) = 0$, de la *Proposición 3.9* concluimos que \underline{P} no es dispersa. Esto lo podemos comprobar calculando de forma explícita, mediante la ecuación (3.27), su inversa de Möbius:

$$m(\{\omega_1\}) = P(\Gamma^{-1}(\{\omega_1\})) = P(\{x_1\}) = 0.25, \quad m(\{\omega_2\}) = P(\emptyset) = 0,$$

$$m(\{\omega_3\}) = P(\emptyset) = 0, \quad m(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\emptyset) = 0,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_3\}) = P(\{x_2\}) = 0.25, \quad m(\{\omega_2, \omega_3\}) = P(\{x_3\}) = 0.5,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = P(\emptyset) = 0.$$

Obtenemos como elementos focales $\{\omega_1\}$, $\{\omega_1, \omega_3\}$ y $\{\omega_2, \omega_3\}$, es decir, los subconjuntos de Ω imagen de los elementos de \mathcal{X} con probabilidad positiva, que en este caso son todos. Así, efectivamente, el soporte de \underline{P} es $F = \Omega$. Además, dado que $\omega_2 \in F$ pero $m(\{\omega_2\}) = 0$, por definición \underline{P} no es dispersa.

De acuerdo con la ecuación (3.25), la probabilidad inferior y superior asociada a Γ es la que se muestra a continuación, junto con su inversa de Möbius, que vemos que coincide con los valores anteriores.

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0.25	0	0	0.25	0.5	0.5	1
\overline{P}	0.5	0.5	0.75	1	1	0.75	1
m	0.25	0	0	0	0.25	0.5	0

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

Finalmente, corroboramos la ecuación (3.26):

$$\overline{P}(\{\omega_1\}) = P(\{x : \Gamma(x) \cap \{\omega_1\} \neq \emptyset\}) = P(\{x : \omega_1 \in \Gamma(x)\}) = P(\{x_1, x_2\}) = 0.5,$$

$$\overline{P}(\{\omega_2\}) = P(\{x : \omega_2 \in \Gamma(x)\}) = P(\{x_3\}) = 0.5,$$

$$\overline{P}(\{\omega_1\}) = P(\{x : \omega_3 \in \Gamma(x)\}) = P(\{x_2, x_3\}) = 0.75,$$

$$\overline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\{x : \Gamma(x) \cap \{\omega_1, \omega_2\} \neq \emptyset\}) = P(\Omega) = 1,$$

$$\overline{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) = P(\{x : \Gamma(x) \cap \{\omega_1, \omega_3\} \neq \emptyset\}) = P(\Omega) = 1,$$

$$\overline{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) = P(\{x : \Gamma(x) \cap \{\omega_2, \omega_3\} \neq \emptyset\}) = P(\{x_2, x_3\}) = 0.75. \quad \square$$

Pasamos ahora al estudio del condicionamiento de los conjuntos aleatorios. Para ello, debemos introducir el concepto de selecciones medibles de un conjunto aleatorio. Dado un conjunto aleatorio Γ definido sobre los espacios $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ y $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, una función $U : \mathcal{X} \rightarrow \Omega$ se dice **selección medible** de Γ si $U(x) \in \Gamma(x) \forall x \in \mathcal{X}$. Es decir, una selección medible U de un conjunto aleatorio Γ es una variable aleatoria compatible con el conjunto aleatorio, en el sentido de que para cada resultado muestral $x \in \mathcal{X}$ toma uno de los posibles valores dados por el conjunto aleatorio: $U(x) \in \Gamma(x)$. Denotaremos por $S(\Gamma)$ al conjunto de selecciones medibles de Γ y por $P(\Gamma)$ al conjunto de probabilidades que inducen.

Sea \underline{P} la probabilidad inferior asociada a Γ , en ([14], *Theorem 1*) se prueba que $P(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$ y $Ext(\mathcal{M}(\underline{P})) \subseteq P(\Gamma)$. De esto se concluye que la probabilidad inferior inducida por un conjunto aleatorio puede ser determinada por sus selecciones medibles. En la siguiente proposición se proporciona una forma alternativa de calcular la extensión regular para conjuntos aleatorios en función de sus selecciones medibles.

Proposición 3.12. ([3], *Proposition 11.*) *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, Ω un espacio muestral y $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ un conjunto aleatorio con probabilidad inferior asociada \underline{P} . Sea $B \subseteq \Omega$ tal que $\overline{P}(B) > 0$. Entonces:*

$$\underline{R}(f | B) = \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in P(\Gamma)\} \forall f \in \mathcal{L}(\Omega). \quad (3.28)$$

Demostración. De acuerdo con (1.19), si $\overline{P}(B) > 0$ entonces:

$$\underline{R}(f | B) = \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in \mathcal{M}(\underline{P})\} \forall f \in \mathcal{L}(\Omega).$$

Dado que $P(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$, se cumple:

$$\underline{R}(f | B) \leq \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in P(\Gamma)\} \forall f \in \mathcal{L}(\Omega).$$

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

Probemos ahora la otra desigualdad. Por reducción al absurdo, supongamos que $\exists f \in \mathcal{L}(\Omega)$ tal que:

$$\min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in \mathcal{M}(\underline{P})\} < \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in \Gamma(P)\}. \quad (3.29)$$

Sea $P \in \mathcal{M}(\underline{P})$ tal que $P(B) > 0$ y $P(f | B) = \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in \mathcal{M}(\underline{P})\}$. Esto implica que $P(f | B) < \min\{P(f | B) : P(B) > 0, P \in \Gamma(P)\}$. Si denotamos por $\{P_1, \dots, P_m\}$ a los puntos extremos de $\mathcal{M}(\underline{P})$, dado que cualquier elemento del conjunto credal puede escribirse como una combinación convexa de sus puntos extremos, tenemos que $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tal que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$ y $P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m$. Además sabemos que $\text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P})) \subset P(\Gamma)$, luego $P_i \in P(\Gamma) \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Entonces, de lo anterior deducimos que $P(f | B) < P_i(f | B)$. De la fórmula de Bayes (1.2) se sigue que $P(f | B)P_i(B) < P_i(f I_B)$ si $P_i(B) > 0$, y $P(f | B)P_i(B) = P_i(f I_B)$ si $P_i(B) = 0$. Al estar suponiendo $P(B) > 0$ tenemos que $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $P_i(B) > 0$ y $\alpha_i > 0$. Entonces, aplicando de nuevo (1.2):

$$\begin{aligned} P(f | B) &= \frac{P(f I_B)}{P(B)} = \frac{\alpha_1 P_1(f I_B) + \dots + \alpha_m P_m(f I_B)}{\alpha_1 P_1(B) + \dots + \alpha_m P_m(B)} \\ &> \frac{\alpha_1 P(f | B) P_1(B) + \dots + \alpha_m P(f | B) P_m(B)}{\alpha_1 P_1(B) + \dots + \alpha_m P_m(B)} = P(f | B) \end{aligned}$$

Hemos llegado a una contradicción que proviene de suponer (3.29), concluyendo así la demostración. \square

Finalmente, en el siguiente ejemplo se ilustra el resultado anterior.

Ejemplo 3.14. Consideramos el conjunto aleatorio del Ejemplo 3.13, es decir: $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$,

$$P(\{x_1\}) = 0.25, \quad P(\{x_2\}) = 0.25, \quad P(\{x_3\}) = 0.5,$$

y

$$\Gamma(x_1) = \{\omega_1\}, \quad \Gamma(x_2) = \{\omega_1, \omega_3\}, \quad \Gamma(x_3) = \{\omega_2, \omega_3\},$$

con probabilidad inferior asociada:

A	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0.25	0	0	0.25	0.5	0.5	1

Calculemos la extensión regular condicionada por $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ mediante la ecuación (2.7) y veamos que coincide con la dada por la ecuación (3.28). Por un lado, de (2.7) resulta:

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

A	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
$\underline{R}(\cdot \mid \{\omega_1, \omega_2\})$	$0.\widehat{3}$	0	0	1	$0.\widehat{3}$	0

Cuadro 3.9: Probabilidad inferior \underline{P} asociada al conjunto aleatorio Γ .

Por otro lado, las selecciones medibles de Γ son:

$$U_1 : U_1(x_1) = \omega_1, \quad U_1(x_2) = \omega_1, \quad U_1(x_3) = \omega_2.$$

$$U_2 : U_2(x_1) = \omega_1, \quad U_2(x_2) = \omega_1, \quad U_2(x_3) = \omega_3.$$

$$U_3 : U_3(x_1) = \omega_1, \quad U_3(x_2) = \omega_3, \quad U_3(x_3) = \omega_2.$$

$$U_4 : U_4(x_1) = \omega_1, \quad U_4(x_2) = \omega_3, \quad U_4(x_3) = \omega_3.$$

Cada una de ellas induce la siguiente probabilidad:

$$U_1 \rightarrow P_1 : \left\{ \begin{array}{l} P_1(\{\omega_1\}) = P(\{x_1, x_2\}) = 0.5, \\ P_1(\{\omega_2\}) = P(\{x_3\}) = 0.5, \\ P_1(\{\omega_3\}) = P(\emptyset) = 0, \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 = (0.5, 0.5, 0).$$

$$U_2 \rightarrow P_2 = (0.5, 0, 0.5).$$

$$U_3 \rightarrow P_3 = (0.25, 0.5, 0.25).$$

$$U_4 \rightarrow P_4 = (0.25, 0, 0.75).$$

Así, tenemos $P(\Gamma) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ con $P_i(B) > 0 \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} = I$. Sabemos que $P(\Gamma)$ satisface $P(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\underline{P})$ y $Ext(\mathcal{M}(\underline{P})) \subseteq P(\Gamma)$, y dado que ninguna de las cuatro probabilidades puede obtenerse como combinación lineal del resto, concluimos que $P(\Gamma) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \mathcal{M}(\underline{P})$. Este conjunto credal se representa en la Figura 3.1. Utilizando la fórmula de Bayes (1.1) y la ecuación (3.28) obtenemos:

$$\underline{R}(\{\omega_1\} \mid B) = \min_{i \in I} \{P_i(\{\omega_1\} \mid B)\} = \min\{0.5, 1, 0.\widehat{3}, 1\} = 0.\widehat{3},$$

$$\underline{R}(\{\omega_1\} \mid B) = \min\{0.5, 0, 0.\widehat{6}, 0\} = 0,$$

$$\underline{R}(\{\omega_3\} \mid B) = \min\{0, 0, 0, 0\} = 0,$$

siendo los cálculos análogos para el resto de conjuntos. Efectivamente, se obtienen los mismos valores que los del Cuadro 3.9.

3.4. OTROS CASOS PARTICULARES

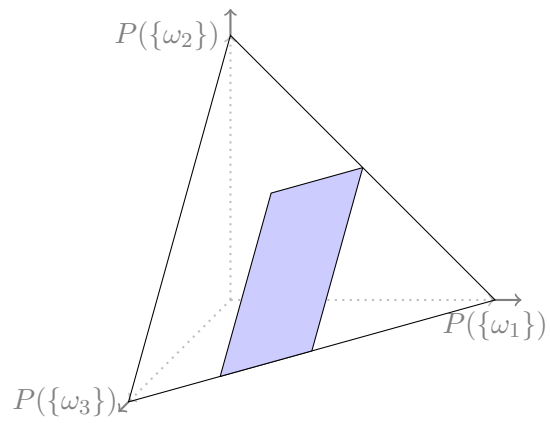


Figura 3.1: Representación gráfica de $\mathcal{M}(\underline{P})$.

□

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos profundizado en los principales modelos de probabilidades imprecisas presentes en la literatura, resumidos en la Figura 4.1, haciendo especial hincapié en su comportamiento al ser condicionados. Partiendo de la definición básica de previsión inferior, en la Sección 1.2 hemos visto la importancia del concepto de coherencia para tener un modelo autoconsistente, obteniendo así el modelo más general de las probabilidades imprecisas: las previsiones inferiores coherentes. En la Sección 1.3 explicamos las condiciones necesarias para que, tras la llegada de nueva información, el modelo actualizado y el modelo original sean compatibles. Se introdujeron las dos principales reglas de condicionamiento, la extensión natural y la extensión regular, que sirven como límite inferior (más conservador) y límite superior (más informativo) respectivamente de los modelos condicionados coherentes con el modelo inicial. En el *Corolario 1.1* se dan las condiciones bajo las cuales ambas extensiones coinciden y por tanto el condicionamiento coherente es único.

En el Capítulo 2 hemos estudiado un caso particular de las previsiones inferiores coherentes: las previsiones inferiores 2-monótonas. Este modelo se caracteriza por ser equivalente a su restricción a eventos, siempre más sencilla de manejar. Con respecto al condicionamiento, la *Proposición 2.2* nos aporta una expresión muy útil para calcular la extensión regular restringida a sucesos, y en el *Teorema 2.1* se dan, para este caso particular, las condiciones bajo las cuales el modelo actualizado coherente con el original está totalmente especificado. En la Sección 2.3 se introdujeron tres casos particulares de probabilidades inferiores 2-monótonas: los intervalos de probabilidad, inmersos en la interpretación epistémica de la probabilidad, y los modelos pari mutuel y de variación total, que siguen la interpretación comportamental de compra-venta de apuestas. De la *Proposición 2.8* se deduce que el modelo pari mutuel es a su vez un caso particular del modelo de intervalos de probabilidad, y en las *Proposiciones 2.7, 2.9 y 2.11* se demuestra que los tres modelos se preservan bajo la extensión regular.

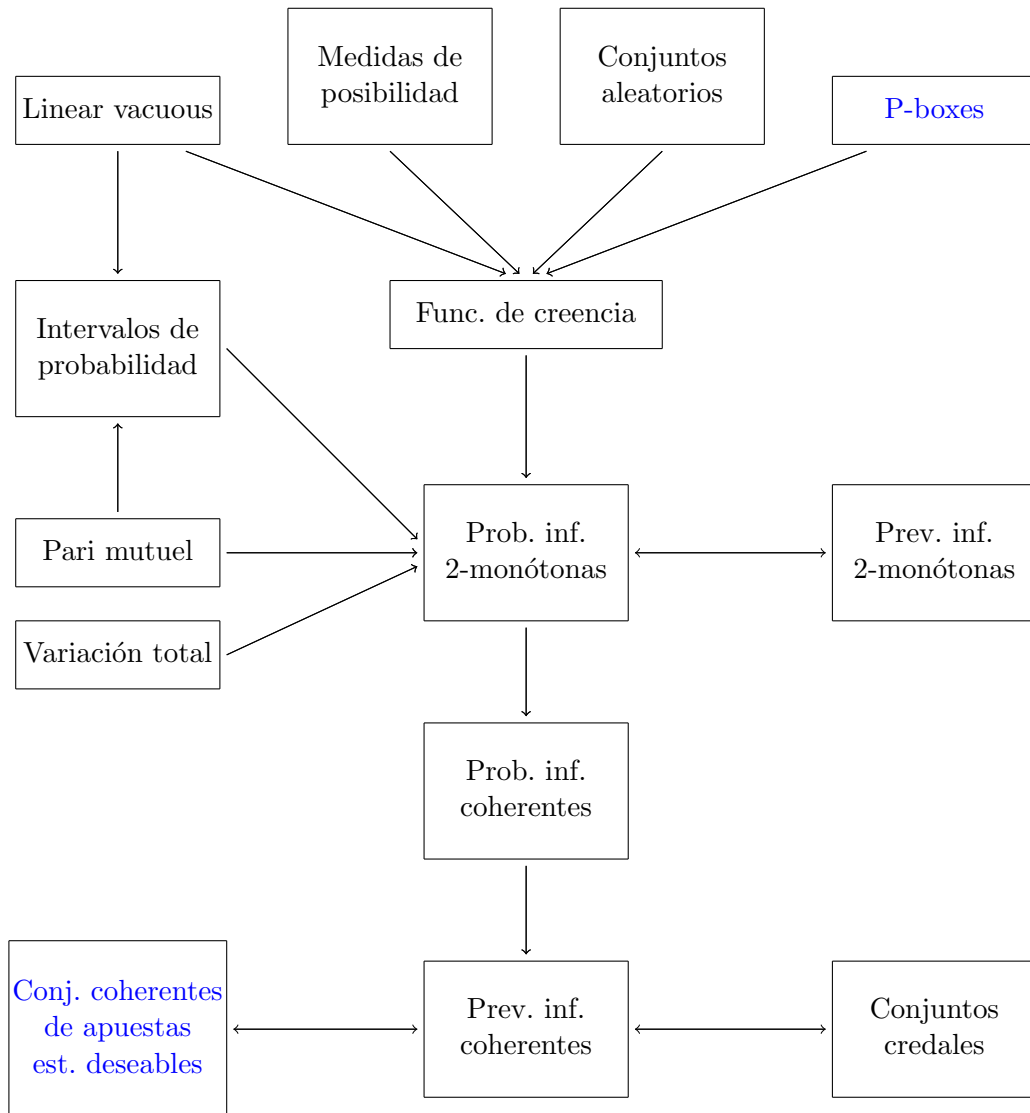


Figura 4.1: Resumen de los principales modelos de probabilidades imprecisas.

En el Capítulo 3 presentamos un caso particular de las previsiones inferiores 2-monótonas: las previsiones inferiores completamente monótonas. Estas previsiones inferiores siguen siendo equivalentes a su restricción a sucesos, denominadas funciones de creencia, cuyo tratamiento se simplifica gracias a la inversa de Möbius. En la Sección 3.2 hemos estudiado su condicionamiento bajo la extensión regular y, de nuevo, en el *Teorema 3.1* se dan las condiciones bajo las cuales el condicionamiento coherente es único. También hemos introducido reglas de condicionamiento alternativas a la extensión regular, como son las reglas de Dempster, de Zadeh, de Hisdal o de Nguyen, estas tres últimas inmersas en la interpretación de las funciones de creencia

como medidas de posibilidad. Por lo general, los modelos actualizados a partir de estas reglas no son coherentes con el modelo original, al menos desde el punto de vista de la interpretación comportamental. Finalmente, en la Sección 3.4 hemos estudiado dos casos particulares de las funciones de creencia: el modelo linear vacuous, con una filosofía muy similar a los modelos pari mutuel y de variación total, y los conjuntos aleatorios, una generalización de las variables aleatorias.

Como resumen, en el Cuadro 4.1 se especifica qué modelos presentan un buen o mal comportamiento al ser condicionados bajo la extensión regular, en el sentido de la preservación del modelo. También se incluyen las referencias de los ejemplos o resultados en los que se ha comprobado o demostrado dicha preservación.

Modelo	Se preserva bajo \underline{R}	Referencia
Prev. inf. coherentes	Sí	Definición (1.17)
Prob. inf. coherentes	Sí	Ejemplo 1.7
Prev. inf. 2-monótonas	No para $ \Omega > 3$	<i>Prop. 2.4</i> , Ej. 2.4
Prob. inf. 2-monótonas	Sí	<i>Proposición 2.2</i>
Int. de probab. coherentes	Sí	<i>Proposición 2.7</i>
Pari Mutuel	Sí	<i>Proposición 2.9</i>
de Variación Total	Sí	<i>Proposición 2.11</i>
Prev. inf. comp. monótonas	No	Ejemplo 2.4
Funciones de creencia	Sí, si $\underline{P}(B) > 0$	[12, 13]
Linear Vacuous	Sí	<i>Proposición 3.9</i>

Cuadro 4.1: Resumen de la preservación de los modelos bajo la extensión regular.

Más allá de lo estudiado en este trabajo, existen otros modelos de probabilidades imprecisas en los que no nos hemos detenido. Por ejemplo, los conjuntos coherentes de apuestas estrictamente deseables es un modelo equivalente a las previsiones inferiores coherentes en el que el sujeto, aplicando unas condiciones de coherencia similares a **(C1)**-**(C3)**, determina qué apuestas son deseables para él basándose en las recompensas que le ofrecen. Otro ejemplo son las P-boxes, un caso particular de funciones de creencia utilizado para mostrar la imprecisión en la determinación de la función de distribución de una variable aleatoria. Actualmente el condicionamiento de este modelo es un problema abierto, suponiendo así un reto para la investigación de las probabilidades imprecisas.

Bibliografía

- [1] B. De Finetti. *Probability Theory*. Wiley, 1972.
- [2] E. Miranda. A survey of the theory of coherent lower previsions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48:628–658, 2008.
- [3] E. Miranda e I. Montes. Coherent updating of non-additive measures. *International Journal of Approximate Reasoning*, 56:159–177, 2015.
- [4] L. M. De Campos, J. F. Huete y S. Moral. Probability Intervals: a tool for uncertain reasoning. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2:167-196, 1993.
- [5] B. Tessem. *Interval representation on uncertainty in Artificial Intelligence*. Tesis Doctoral, Universidad de Bergen, 1989.
- [6] I. Montes, E. Miranda y S. Destercke. Pari-mutuel probabilities as an uncertainty model, 481:550-573, 2019.
- [7] I. Montes, E. Miranda y S. Destercke. Unifying neighbourhood and distortion models: part I - new results and old models. *International Journal of General Systems*, 2020.
- [8] I. Montes, E. Miranda y S. Destercke. Unifying neighbourhood and distortion models: part II - new models and synthesis. *International Journal of General Systems*, 2020.
- [9] P. Walley. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, 1991.
- [10] D. Denneberg. *Non-Additive Measure and Integral*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994.
- [11] G. De Cooman. Possibility Theory II: conditional possibility. *International Journal of General Systems*, 25:325-351, 2020.
- [12] R. Fagin, Joseph Y. Halpern. A new approach to updating beliefs. *Uncertainty in Artificial Intelligence*, vol. 6, 347-374, 1991.

BIBLIOGRAFÍA

- [13] J. Jaffray. Bayesian updating and belief functions. *IEEE Transactions on Systems, Man Cybern.* 22:1144-1152, 1992.
- [14] E. Miranda, I. Couso, P. Gil. Upper probabilities and selectors of random sets. *Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis*, Physica-Verlag, Heidelberg, 126-133, 2002.

Apéndice A

Cálculos

Ejemplo 2.4. Demostración de que \underline{P} es 2-monótona:

En lugar de demostrar que \underline{P} es 2-monótona a mano como hemos hecho en el Ejemplo 2.1, probaremos que \underline{P} es una probabilidad inferior completamente monótona. Las probabilidades inferiores completamente monótonas, que estudiaremos en detalle en el Capítulo 3, son un caso particular de las 2-monótonas. Como veremos más adelante, una probabilidad inferior \underline{P} es completamente monótona si y solo si la cantidad:

$$m(A) = \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A \setminus C|} \underline{P}(C)$$

cumple $m(A) \in [0, 1] \forall A \subseteq \Omega$. En nuestro ejemplo:

$$m(\{\omega_1\}) = 1/8, \quad m(\{\omega_2\}) = 1/8, \quad m(\{\omega_3\}) = 0, \quad m(\{\omega_4\}) = 0,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_2\}) = 1/4 - 1/8 - 1/8 = 0, \quad m(\{\omega_1, \omega_3\}) = 1/8 - 1/8 - 0 = 0,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_4\}) = 3/8 - 1/8 - 0 = 1/4, \quad m(\{\omega_2, \omega_3\}) = 1/8 - 1/8 - 0 = 0,$$

$$m(\{\omega_2, \omega_4\}) = 3/8 - 1/8 - 0 = 1/5, \quad m(\{\omega_3, \omega_4\}) = 1/4 - 0 - 0 = 1/4,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1/4 - 1/4 - 1/8 - 1/8 + 1/8 + 1/8 + 0 = 0,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = 3/4 - 1/4 - 3/8 - 3/8 + 1/8 + 1/8 + 0 = 0,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}) = 5/8 - 1/8 - 3/8 - 1/4 + 1/8 + 0 + 0 = 0,$$

$$m(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = 5/8 - 1/8 - 3/8 - 1/4 + 1/8 + 0 + 0 = 0,$$

$$m(\Omega) = 1 - 5/8 - 5/8 - 3/4 - 1/4 - 1/4 - 3/8 - 1/8 - 3/8 - 1/8 - 1/4 + 1/8 + 1/8 = 0.$$

Efectivamente, se cumple $m(A) \in [0, 1] \forall A \subseteq \Omega$, luego \underline{P} es una probabilidad inferior completamente monótona y por tanto una probabilidad inferior 2-monótona.

Cálculo de la extensión regular para los subconjuntos de posterior interés:

$$\underline{R}(\{\omega_1\} \mid \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \frac{\underline{P}(\{\omega_1\})}{\underline{P}(\{\omega_1\}) + \overline{P}(\{\omega_2, \omega_3\})} = \frac{1/8}{1/8 + 1 - 3/8} = 1/6,$$

$$\underline{R}(\{\omega_1, \omega_2\} \mid \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \frac{\underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\})}{\underline{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) + \overline{P}(\{\omega_3\})} = \frac{1/4}{1/4 + 1 - 3/4} = 1/2,$$

$$\underline{R}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \mid \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \frac{\underline{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\})}{\underline{P}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) + \overline{P}(\emptyset)} = 1.$$

Cálculo de $\underline{R}(f \mid B)$:

La extensión regular se calcula como:

$$\underline{R}(f \mid B) = \min\{P(f \mid B) : P(B) > 0, P \in \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P}))\}.$$

A partir de la ecuación (2.5) es sencillo comprobar que los puntos extremos del conjunto credal vienen dados por:

$$\begin{aligned} \text{Ext}(\mathcal{M}(\underline{P})) = \{ & (1/8, 1/8, 0, 3/4), (1/8, 1/8, 1/4, 1/2), (1/8, 3/8, 0, 1/2), (1/8, 3/8, 1/4, 1/4), \\ & (3/8, 1/8, 0, 1/2), (3/8, 1/8, 1/4, 1/4), (3/8, 3/8, 0, 1/4), (3/8, 3/8, 1/4, 0) \}. \end{aligned}$$

Utilizando (1.2) y teniendo en cuenta que $f = 3I_1 + 2I_2 + I_3$, resulta:

$$\underline{R}(f \mid B) = \min\{5/2, 7/4, 9/4, 11/6, 11/4, 13/6, 15/6, 17/8\} = 7/4.$$

Ejemplo 2.6. Comprobación de que el intervalo de probabilidad

$$\mathcal{I}' = \{[0, 0.2], [0.7, 0.8], [0.1, 0.3]\}$$

es coherente mediante la ecuación (2.19):

$$u_1 + \sum_{j \neq i} l_j = u_1 + l_1 + l_3 = 1 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$u_2 + \sum_{j \neq i} l_j = u_2 + l_2 + l_3 = 0.9 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$u_1 + \sum_{j \neq i} l_j = u_3 + l_1 + l_2 = 1 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$l_1 + \sum_{j \neq i} l_j = l_1 + u_2 + u_3 = 1.1 \geq 1 \quad \checkmark$$

$$l_2 + \sum_{j \neq i} l_j = l_2 + u_1 + u_3 = 1.2 \geq 1 \quad \checkmark$$

$$l_3 + \sum_{j \neq i} l_j = l_3 + u_1 + u_2 = 1.1 \geq 1 \quad \checkmark$$

Ejemplo 2.7. Cálculo de los límites de los intervalos de probabilidad condicionados por $Y = y_1, y_2$ asociados al intervalo:

$[l_{ij}, u_{ij}]$	x_1	x_2	x_3
y_1	[0, 0.1]	[0.3, 0.3]	[0, 0.2]
y_2	[0, 0.1]	[0.4, 0.5]	[0.1, 0.3]

A partir de las ecuaciones (2.32) y (2.33) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 l_{1|1} &= \frac{l_{11}}{l_{11} + \min\{u_{21} + u_{31}, 1 - l_{12} - l_{22} - l_{32} - l_{11}\}} = 0, \\
 l_{2|1} &= \frac{l_{21}}{l_{21} + \min\{u_{11} + u_{31}, 1 - l_{12} - l_{22} - l_{32} - l_{21}\}} = \frac{0.3}{0.3 + 0.2} = 0.6, \\
 l_{3|1} &= \frac{l_{31}}{l_{31} + \min\{u_{11} + u_{21}, 1 - l_{12} - l_{22} - l_{32} - l_{31}\}} = 0, \\
 u_{1|1} &= \frac{u_{11}}{u_{11} + \max\{l_{21} + l_{31}, 1 - u_{12} - u_{22} - u_{32} - u_{11}\}} = \frac{0.1}{0.1 + 0.3} = 0.25, \\
 u_{2|1} &= \frac{u_{21}}{u_{21} + \max\{l_{11} + l_{31}, 1 - u_{12} - u_{22} - u_{32} - u_{21}\}} = \frac{0.3}{0.3 + 0} = 1, \\
 u_{3|1} &= \frac{u_{31}}{u_{31} + \max\{l_{11} + l_{21}, 1 - u_{12} - u_{22} - u_{32} - u_{31}\}} = \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4, \\
 l_{1|2} &= \frac{l_{12}}{l_{12} + \min\{u_{22} + u_{32}, 1 - l_{11} - l_{21} - l_{31} - l_{12}\}} = 0, \\
 l_{2|2} &= \frac{l_{22}}{l_{22} + \min\{u_{12} + u_{32}, 1 - l_{11} - l_{21} - l_{31} - l_{22}\}} = \frac{0.4}{0.4 + 0.3} = 0.57, \\
 l_{3|2} &= \frac{l_{32}}{l_{32} + \min\{u_{12} + u_{22}, 1 - l_{11} - l_{21} - l_{31} - l_{32}\}} = \frac{0.1}{0.1 + 0.6} = 0.14, \\
 u_{1|2} &= \frac{u_{12}}{u_{12} + \max\{l_{22} + l_{32}, 1 - u_{11} - u_{21} - u_{31} - u_{12}\}} = \frac{0.1}{0.1 + 0.5} = 0.1\widehat{6}, \\
 u_{2|2} &= \frac{u_{22}}{u_{22} + \max\{l_{12} + l_{32}, 1 - u_{11} - u_{21} - u_{31} - u_{22}\}} = \frac{0.5}{0.5 + 0.1} = 0.8\widehat{3}, \\
 u_{3|2} &= \frac{u_{32}}{u_{32} + \max\{l_{12} + l_{22}, 1 - u_{11} - u_{21} - u_{31} - u_{32}\}} = \frac{0.3}{0.3 + 0.4} = 0.43.
 \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\{[l_{1|1}, u_{1|1}], [l_{2|1}, u_{2|1}], [l_{3|1}, u_{3|1}]\} = \{[0, 0.25], [0.6, 1], [0, 0.4]\},$$

$$\{[l_{1|2}, u_{1|2}], [l_{2|2}, u_{2|2}], [l_{3|2}, u_{3|2}]\} = \{[0, 0.1\widehat{6}], [0.57, 0.8\widehat{3}], [0.14, 0.43]\}.$$

Ejemplo 3.1. Veamos que la probabilidad inferior \underline{P} y la asignación básica de probabilidad m de la siguiente tabla verifican las ecuaciones (3.3) y (3.4).

APÉNDICE A. CÁLCULOS

	$\{v\}$	$\{a\}$	$\{r\}$	$\{v, a\}$	$\{v, r\}$	$\{a, r\}$	$\{v, a, r\}$
\underline{P}	0.3	0.1	0.2	0.5	0.6	0.3	1
\overline{P}	0.7	0.4	0.5	0.8	0.9	0.7	1
m	0.3	0.1	0.2	0.1	0.1	0	0.2

Ecuación (3.3):

$$\underline{P}(B) = \sum_{A \subseteq B} m(A), \quad \overline{P}(B) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(A) \quad \forall B \subseteq \Omega.$$

Ecuación (3.4):

$$m(A) = \sum_{C \subseteq A} (-1)^{|A \setminus C|} \underline{P}(C) \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

La probabilidad inferior:

$$\underline{P}(\{v\}) = 0.3 = m(\{v\}) \quad \checkmark$$

$$\underline{P}(\{a\}) = 0.1 = m(\{a\}) \quad \checkmark$$

$$\underline{P}(\{r\}) = 0.2 = m(\{r\}) \quad \checkmark$$

$$\underline{P}(\{v, a\}) = 0.5 = 0.3 + 0.1 + 0.1 = m(\{v\}) + m(\{a\}) + m(\{v, a\}) \quad \checkmark$$

$$\underline{P}(\{v, r\}) = 0.6 = 0.3 + 0.2 + 0.1 = m(\{v\}) + m(\{r\}) + m(\{v, r\}) \quad \checkmark$$

$$\underline{P}(\{a, r\}) = 0.3 = 0.1 + 0.2 + 0 = m(\{a\}) + m(\{r\}) + m(\{a, r\}) \quad \checkmark$$

$$\underline{P}(\{v, a, r\}) = 1 = \sum_{\omega_i \in \Omega} m(\{\omega_i\}) \quad \checkmark$$

La probabilidad superior:

$$\overline{P}(\{v\}) = 0.7 = m(\{v\}) + m(\{v, a\}) + m(\{v, r\}) + m(\{v, a, r\}) \quad \checkmark$$

$$\overline{P}(\{a\}) = 0.4 = m(\{a\}) + m(\{v, a\}) + m(\{a, r\}) + m(\{v, a, r\}) \quad \checkmark$$

$$\overline{P}(\{r\}) = 0.5 = m(\{r\}) + m(\{v, r\}) + m(\{a, r\}) + m(\{v, a, r\}) \quad \checkmark$$

$$\overline{P}(\{v, a\}) = 0.8 = m(\{v\}) + m(\{a\}) + m(\{v, a\}) + m(\{v, r\}) \\ + m(\{a, r\}) + m(\{v, a, r\}) \quad \checkmark$$

$$\overline{P}(\{v, r\}) = 0.9 = m(\{v\}) + m(\{r\}) + m(\{v, a\}) + m(\{v, r\}) \\ + m(\{a, r\}) + m(\{v, a, r\}) \quad \checkmark$$

$$\bar{P}(\{a, r\}) = 0.7 = m(\{a\}) + m(\{r\}) + m(\{v, a\}) + m(\{v, r\}) \\ + m(\{a, r\}) + m(\{v, a, r\}) \checkmark$$

$$\bar{P}(\{v, a, r\}) = 1 = \sum_{\omega_i \in \Omega} m(\{\omega_i\}) \checkmark$$

La inversa de Möbius:

$$m(\{v, a\}) = 0.1 = 0.5 - 0.3 - 0.1 = \underline{P}(\{v, a\}) - \underline{P}(\{v\}) - \underline{P}(\{a\}) \checkmark$$

$$m(\{v, r\}) = 0.1 = 0.6 - 0.3 - 0.2 = \underline{P}(\{v, r\}) - \underline{P}(\{v\}) - \underline{P}(\{r\}) \checkmark$$

$$m(\{a, r\}) = 0 = 0.3 - 0.1 - 0.2 = \underline{P}(\{a, r\}) - \underline{P}(\{a\}) - \underline{P}(\{r\}) \checkmark$$

$$m(\{v, a, r\}) = 0.2 = \underline{P}(\{v, a, r\}) - \underline{P}(\{v, a\}) - \underline{P}(\{v, r\}) - \underline{P}(\{a, r\}) \\ + \underline{P}(\{v\}) + \underline{P}(\{a\}) + \underline{P}(\{r\}) \checkmark$$

Ejemplo 3.4. Cálculo de la extensión regular asociada a \underline{P} y a $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ a partir de la ecuación (2.7):

	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_1, \omega_2\}$	$\{\omega_1, \omega_3\}$	$\{\omega_2, \omega_3\}$
\underline{P}	0.3	0.1	0.2	0.5	0.6	0.3

$$\underline{R}(\{\omega_1\} | B) = \underline{R}(\{\omega_1, \omega_3\} | B) = \frac{\underline{P}(\{\omega_1\})}{\underline{P}(\{\omega_1\}) + \bar{P}(\{\omega_2\})} = \frac{0.3}{0.3 + 1 - 0.6} = 0.43,$$

$$\underline{R}(\{\omega_2\} | B) = \underline{R}(\{\omega_2, \omega_3\} | B) = \frac{\underline{P}(\{\omega_2\})}{\underline{P}(\{\omega_2\}) + \bar{P}(\{\omega_1\})} = \frac{0.1}{0.1 + 1 - 0.3} = 0.13,$$

Cálculo de la inversa de Möbius:

$$m(\{\omega_1, \omega_2\}) = \underline{R}(\{\omega_1, \omega_2\} | B) - \underline{R}(\{\omega_1\} | B) - \underline{R}(\{\omega_2\} | B) = 0.44,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_3\}) = \underline{R}(\{\omega_1, \omega_3\} | B) - \underline{R}(\{\omega_1\} | B) - \underline{R}(\{\omega_3\} | B) = 0,$$

$$m(\{\omega_2, \omega_3\}) = \underline{R}(\{\omega_2, \omega_3\} | B) - \underline{R}(\{\omega_2\} | B) - \underline{R}(\{\omega_3\} | B) = 0,$$

$$m(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1 - \underline{R}(\{\omega_1, \omega_2\} | B) - \underline{R}(\{\omega_2, \omega_3\} | B) - \underline{R}(\{\omega_1, \omega_3\} | B) \\ + \underline{R}(\{\omega_1\} | B) + \underline{R}(\{\omega_2\} | B) + \underline{R}(\{\omega_3\} | B) = 0.$$