

TRABAJO FIN DE GRADO

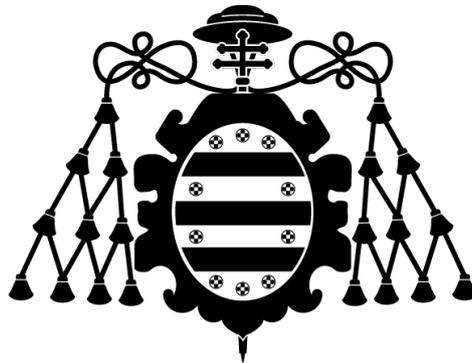
Curso 2021-2022

GRADO EN FÍSICA

Introducción a la Cosmología Inflacionaria

Autora:

CARMEN ÉMBIL VILLAGRÁ



Universidad de Oviedo

Universidá d'Uviéu

University of Oviedo

Tutor: Adolfo Guarino Almeida

Fecha de Presentación: 16/06/2022

Índice general

1. Gravitación y geometría	4
1.1. Los principios de la relatividad general y primeras definiciones	4
1.2. Derivadas covariantes	7
1.3. Curvatura	9
1.4. Ecuaciones de Einstein	12
2. Cosmología y Big Bang	14
2.1. Introducción a la Cosmología	14
2.1.1. El Principio Cosmológico	14
2.1.2. La métrica Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker $g_{\mu\nu}^{FRW}$	15
2.1.3. Ecuaciones de Friedmann	18
2.1.4. Ecuación de estado e interpretaciones	20
2.2. Conceptos y problemas cosmológicos	23
2.2.1. Definiciones	23
2.2.2. Problemas del Big Bang	26
3. Inflación	31
3.1. Introducción al modelo inflacionario: la solución a nuestros problemas	31
3.2. La física del periodo inflacionario	36
3.2.1. Condiciones necesarias en un modelo inflacionario	36
3.2.2. La acción de un campo escalar: el inflatón	37
3.2.3. Los parámetros slow-roll	40
4. Perturbaciones cosmológicas y CMB	44
4.1. Perturbaciones Cosmológicas	44
4.1.1. Perturbando el campo escalar	45
4.1.2. Perturbaciones de la métrica	50
4.2. Conexión con las observaciones	57
4.2.1. Índices espectrales n_S y n_T	57
4.2.2. Conectando con el CMB	60

5. Modelos Inflacionarios	65
5.1. Single-Field Slow-Roll Inflation	65
5.1.1. Modelos Small-field	66
5.1.2. Modelos Large-Field	68
5.1.3. Inflación híbrida	69
5.1.4. Algunos modelos relevantes	70
6. Preguntas abiertas y teorías alternativas	73
6.1. Problemas abiertos	73
6.2. Teorías alternativas	75
6.3. Conclusiones	78
A. Teoría clásica de campos en espacios curvos	80
A.1. Gravedad pura	80
A.2. Gravedad y materia (escalar)	80
A.3. Gravedad y radiación	81
A.4. Gravedad, materia y radiación	81
A.5. Constante cosmológica	82
A.6. Condición fuerte de energía	83

Introducción

En 1915 Einstein revolucionó el estudio de la gravitación con su Teoría General de la Relatividad. Desde entonces, la historia y evolución de la cosmología no ha hecho más que sorprendernos, y los esfuerzos de las cosmólogas y cosmólogos han estado en constante contacto con el desarrollo de nuevos y más precisos dispositivos experimentales (como por ejemplo, en la detección del fondo cósmico de microondas (CMB) con los satélites COBE, WMAP y Planck). Esto ha hecho, que este camino de más de un siglo haya sido sumamente dinámico y, por tanto, que esté compuesto por numerosos errores y correcciones. Revisemos uno de los primeros, cuya rectificación dio lugar ni más ni menos que a la hoy conocida como teoría del Big Bang.

Lo sorprendente, quizás para muchos, es que este error viene del propio Einstein, que pese a haber postulado una de las teorías más exitosas del siglo, estaba convencido de que el universo era finito y estático. Así, introdujo por primera vez la constante cosmológica, a modo de fuerza repulsora que contrarrestara a la gravitatoria provocando que el universo (según su teoría) no fuera dinámico. Fueron otros, como Lemaitre o Friedmann, los que durante los años 20 utilizaron el propio formalismo de la relatividad general para ver que el universo en realidad sí que era dinámico, es decir que ¡el propio espacio-tiempo podía aumentar o reducirse! En aquel momento Einstein lo calificó como 'abominable' desde el punto de vista físico; sin embargo, los descubrimientos experimentales como el de Hubble en 1929 les dieron la razón a Friedmann y Lemaitre, obligando a Einstein a 'apagar' la constante cosmológica de su teoría. Más tarde, él mismo reconoció esta como la mayor torpeza de su carrera científica.

Sin embargo, años más tarde esta constante volvió a ser necesaria para explicar por qué el universo se expande al ritmo que nos dicen las observaciones, relacionándola con el concepto de energía oscura. Se asentó entonces la idea de que el universo es algo en expansión, y que por tanto, si retrocedemos en el tiempo encontraremos que todo estaba más y más cerca y que, consecuentemente, el universo era más y más denso y energético. Esto es precisamente lo que predice la teoría del Big Bang (y no una gran explosión de materia en el instante inicial del universo) la cual describe con bastante acierto lo sucedido en nuestro universo hasta tiempos cercanos a

$t \approx 10^2$ s con el 'Big Bang Nucleosynthesis' (BBN). Sin embargo, esta teoría tiene sus limitaciones y falla para tiempos anteriores al BBN, dando lugar a los llamados *problemas del Big Bang*. Estos son, precisamente, la motivación de la teoría tratada en esta memoria: la inflación.

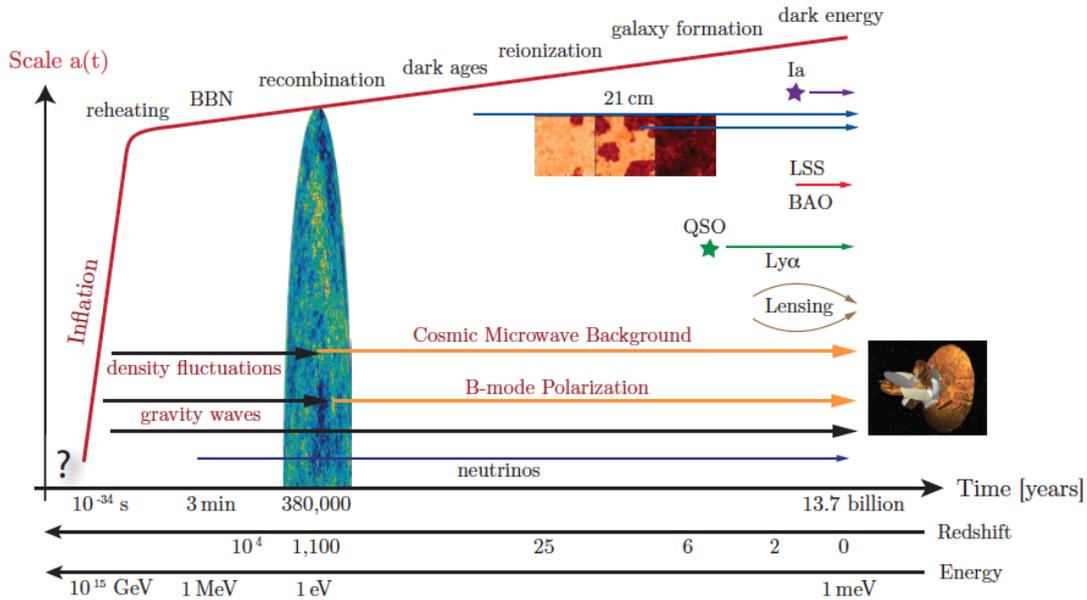


Figura 1: Historia térmica del universo donde se muestran sus eventos más significativos. El significado de los acrónimos: LSS (Large-Scale Structure), BAO (Barionic Acoustic Oscilations), Ia (Supernovas tipo Ia), QSO (quasars), Ly α (Lyman-alpha), 21cm (transición del hidrógeno a 21cm).

El objetivo de este trabajo es mostrar la necesidad de postular una teoría inflacionaria como respuesta a los problemas del Big Bang y estudiar algunas de sus consecuencias y posibles modelos que la describan. Para ello, en el primer capítulo resumimos y presentamos los resultados de la relatividad general necesarios para entender el trabajo. A continuación, introduciremos los primeros conceptos propios de la cosmología del Big Bang hasta conseguir describir dos de los llamados *problemas del Big Bang*. En el capítulo 3 abordamos la solución a estos problemas desde el modelo inflacionario y presentamos los parámetros y conceptos necesarios para su descripción. A partir de ellos, en el cuarto capítulo, se realiza el tratamiento de las perturbaciones cosmológicas que se originan durante el periodo inflacionario y que se relacionan con la estructura a gran escala del universo. En el capítulo 5, presentamos algunos de los modelos más relevantes en el estudio la cosmología. Finalmente, cerraremos esta memoria con el capítulo 6, donde se describirán brevemente varios de los problemas abiertos a día de hoy, así como algunas de las líneas de investigación actuales en el marco de la física teórica a altas energías. A modo de complemento

se incluye un apéndice con los resultados necesarios para describir la dinámica del periodo inflacionario en el marco de la teoría de campos en espacio-curvos.

Capítulo 1

Gravitación y geometría

Nuestro objetivo en esta sección es hacer un pequeño resumen de los resultados derivados de la Relatividad General necesarios para desarrollar el resto del trabajo. Empezaremos presentando los primeros principios y cambios generales de coordenadas; después, introduciremos varios conceptos y desarrollos del cálculo tensorial para poder dar una definición rigurosa del tensor de curvatura de Riemann. Tras estudiar sus propiedades llegaremos a la definición del tensor de Einstein y la propia ecuación de Einstein. Esta ecuación es crucial en el estudio de sistemas gravitatorios ya que conecta el tensor de Einstein con el contenido de materia y energía del universo a través del tensor energía-momento. Finalmente, nos centraremos en el caso del fluido perfecto que será de gran importancia en próximas partes del trabajo.

Este capítulo debe servir a modo de recordatorio y en ningún momento pretende enseñar la relatividad general desde cero a alguien que nunca haya tenido contacto con el tema anteriormente. Se han seguido el razonamiento y los resultados expuestos en [1] [2] y [3].

1.1. Los principios de la relatividad general y primeras definiciones

Comencemos este capítulo introductorio presentando el **Principio de la Relatividad General** o principio de covarianza general, que reza:

Las leyes de la naturaleza son invariantes bajo transformaciones generales de coordenadas (t.g.c.).

Este principio implica entonces que, si conocemos las leyes de la física en un espacio localmente inercial (un espacio plano) entonces las conocemos también en un espacio curvo general. Para describir este espacio tiempo denotamos las coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ con índices griegos cuando hablemos de coordenadas

espacio-temporales e índices latinos para coordenadas espaciales. En concreto, nuestras coordenadas serán $x^0 = ct$ y $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ temporal y espaciales respectivamente. Entonces, sabemos que un cambio general de coordenadas es de la forma

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \quad \text{con} \quad \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right] \neq 0 \quad . \quad (1.1)$$

Por otro lado, se define el elemento de línea como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1.2)$$

siendo $g_{\mu\nu}$ nuestra métrica espacio-temporal. Esta cantidad es una de las claves tanto en relatividad general como en teorías de campos. Más adelante veremos que, al tratarse de una expresión con todos sus índices contraídos, será invariante bajo las t.g.c. descritas en 1.1. Notar que durante el resto del trabajo se utilizará el criterio de Einstein para la suma de índices repetidos.

Una vez introducidos estos primeros conceptos presentamos el Principio de Equivalencia:

Se considera una partícula moviéndose bajo la influencia de fuerzas puramente gravitatorias. Entonces, existe un sistema de referencia local en caída libre con base $\hat{\theta}^a = e_{\mu}^a dx^{\mu}$ tal que:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{ab} \hat{\theta}^a \hat{\theta}^b \quad (1.3)$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski y $g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}^a(x) e_{\nu}^b(x) \eta_{ab}$. O visto de una manera menos matemática, el principio de equivalencia nos dice que, a nivel local, las leyes de la naturaleza no distinguen entre un sistema puramente gravitatorio y un sistema que está acelerando uniformemente. Esta es una de las bases de la relatividad general y fue considerada por Einstein como una de sus ideas más brillantes. Básicamente lo que nos está queriendo decir es que ¡la gravedad no es más que geometría!

Una vez introducidos estas primeras ideas físicas es momento de presentar un poco de cálculo tensorial. Muy posiblemente esta será la parte más árida del trabajo pero puede ser de gran utilidad para los lectores que necesiten refrescar la memoria o que quieran comprobar los conceptos que son necesarios para el resto del trabajo. Empezaremos definiendo lo que es un tensor; la forma adecuada de hacerlo -y que puede llegar a resultar bastante absurda la primera vez que se escucha- es que 'un tensor es aquello que se transforma como un tensor'. Lo mismo sucede con los vectores y escalares. Veámoslo:

En primer lugar, los escalares se caracterizan por **no** sufrir cambios bajo t.g.c. Por otro lado, un vector covariante V_{μ} (resp. contravariante V^{μ}) es aquel que se

transforma bajo t.g.c como:

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad \left(\text{resp.} \quad V^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \right). \quad (1.4)$$

A partir de estas dos expresiones podemos ver que las cantidades con índices contraídos: $U^\rho V_\rho = U'^\mu V'_\mu$ son invariantes bajo t.g.c., comprobando que el elemento de línea 1.2 no cambia bajo t.g.c. Además, para pasar de un índice covariante a uno contravariante y viceversa basta con multiplicar por la métrica de la siguiente manera:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad \text{y} \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu. \quad (1.5)$$

Si aplicamos este razonamiento dos veces a un mismo vector, concluimos que entonces: $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu$.

Por otro lado, los tensores son aquellos objetos que se transforman de forma multilineal bajo t.g.c. Además, siendo R_ν^μ , S_ν^μ , B_ν^ρ , $T_\rho^{\mu\nu}$ y $A_\mu \neq \partial_\mu$ tensores y α , β escalares, cumplen las siguientes propiedades:

- Linealidad: $T_\nu^\mu = \alpha R_\nu^\mu + \beta S_\nu^\mu$ es un tensor.
- Producto directo de tensores: $T_{\mu\nu}^\rho = A_\mu B_\nu^\rho$ es un tensor.
- Contracción de índices de un tensor: $T^{\mu\nu} = T^\mu{}_\rho{}^{\nu\rho}$ es un tensor.

Finalmente, presentamos las densidades tensoriales, que se definen como aquellas que se transforman bajo t.g.c. con potencias de $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$ es decir, de la forma

$$\mathcal{J}'^\mu = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^W \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \mathcal{J}_\sigma^\rho \quad (1.6)$$

donde se asume que $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| > 0$ y al exponente W se le denomina 'peso'. Son especialmente relevantes en este campo, un ejemplo de ello es el caso del determinante de la métrica (con $W = -2$): mientras en relatividad especial teníamos que la métrica de Minkowski η_{ab} era invariante bajo transformaciones de Lorentz, en el caso de la relatividad general se tiene que:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{-1} \neq 0 \quad (1.7)$$

o en términos de densidades

$$|g'| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} |g|. \quad (1.8)$$

Además, si combinamos este resultado con el del elemento de volumen d^4x ($W = 1$):

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x \quad (1.9)$$

conseguimos construir una cantidad invariante bajo t.g.c: $\sqrt{|g|}d^4x$, la cual, no es ni más ni menos que el elemento de volumen invariante bajo t.g.c. en relatividad general. La ecuación (1.9) puede leerse también como el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

1.2. Derivadas covariantes

Dedicaremos esta sección a introducir los elementos necesarios para definir una derivada covariante en relatividad general. Tal y como mencionamos con las propiedades de los tensores, la derivada parcial de un tensor $\partial_\mu V^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu$ no es un tensor, pese a serlo por separado ∂_μ y V^ν . Explícitamente vemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} V'^\nu = \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\sigma}_{\text{Tensor}} + \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} V^\sigma}_{\text{Término extra}} . \quad (1.10)$$

Por ello, necesitamos definir un nuevo operador ∇_μ al que llamaremos **derivada covariante** y que; al aplicarlo sobre un tensor cualquiera $\nabla_\mu V^\nu$ produzca un tensor. Esta elección no es nada trivial y merece que dediquemos unos párrafos a su discusión.

En cualquier espacio geométrico tenemos varios 'artefactos' que nos dan información acerca del mismo. La métrica $g_{\mu\nu}$ nos indica cómo medir distancias y ángulos, mientras que, donde viene codificada la información de la curvatura es en la **conexión afín** $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. En principio, estas dos cantidades no tienen por qué estar relacionadas y pueden ser independientes la una de la otra. Lo que sí podemos hacer, en general, es separar la conexión afín en una parte simétrica y otra antisimétrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + T_{\mu\nu}^\rho . \quad (1.11)$$

Nos hemos adelantado en la notación para hacer notar que la parte simétrica $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(g)$ puede relacionarse con la métrica mediante la llamada conexión de Levi-Civita

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) , \quad (1.12)$$

mientras que $T_{\mu\nu}^\rho$ es la parte antisimétrica a la que denominaremos **torsión**:

$$T_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho . \quad (1.13)$$

Veamos una de las utilidades de esta cantidad. Como ya adelantábamos, en la conexión afín se codifica la curvatura de nuestro espacio-tiempo y por tanto está directamente relacionada con la descripción de curvas en el mismo. Un ejemplo de esto, y de vital importancia, son las trayectorias de partículas libres, llamadas **geodésicas**. Estas se definen como el transporte paralelo del vector tangente de V^μ : $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ a lo largo de una curva $x^\nu(\lambda)$. De hecho, la ecuación de las geodésicas viene dada por

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (1.14)$$

donde λ es el parámetro afín de la curva. Veamos ahora qué sucede si realizamos una t.g.c. sobre la conexión afín que acabamos de describir:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\rho = \underbrace{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\lambda\epsilon}^\sigma}_{\text{Tensor}} + \underbrace{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}}_{\text{Términos extra}}, \quad (1.15)$$

y es que esta no se transforma como un tensor. Sin embargo, en este caso, el término problemático no depende de la propia conexión sino que solo dependerá de los cambios de coordenadas y sus derivadas, de manera que será el mismo para todas las conexiones. Esto nos permite asegurar que, si definimos nuestra derivada covariante como¹:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho, \quad (1.16)$$

al hacer un t.g.c. sobre la misma, los términos extra provenientes de la conexión se cancelarán **siempre** con los que vienen de la derivada parcial ∂_μ ; dando lugar así a una cantidad $\nabla_\mu V^\nu$ que sí se transformará como un tensor

$$\nabla'_\mu V'^\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \nabla_\rho V^\sigma. \quad (1.17)$$

Una vez definida esta cantidad, podemos introducir el **postulado de la métrica**, este se cumplirá en aquellos espacios en los que $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$ para todo observador (también suele decirse que 'la derivada covariante ∇_μ compatible con la métrica'). Esto tiene una implicación directa en nuestra geometría y es que ahora la conexión de nuestro espacio es simétrica y coincide con la conexión de Levi-Civita. De esta manera, tras imponer este postulado, pasaremos a trabajar en espacios sin torsión, o lo que suele denominarse como geometría Riemanniana. En resumen, de aquí en adelante tendremos que:

¹Notar que en el caso covariante se definirá como $\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu V_\rho$.

$$T_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \quad , \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(g) \quad \text{y} \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} . \quad (1.18)$$

Esta puede parecer una elección bastante restrictiva, sin embargo, la mayoría de sistemas físicos 'viven' en una geometría Riemanniana y es una asunción que casi siempre se hace cuando uno trabaja con relatividad general.

Una vez realizada esta matización veamos algunas de las propiedades más destacables que cumplen las derivadas covariantes:

- Linealidad: $\nabla_{\rho}(\alpha R_{\nu}^{\mu} + \beta S_{\nu}^{\mu}) = \alpha \nabla_{\rho} R_{\nu}^{\mu} + \beta \nabla_{\rho} S_{\nu}^{\mu}$.
- Regla de Leibniz: $\nabla_{\rho}(A_{\nu}^{\mu} B^{\lambda}) = (\nabla_{\rho} A_{\nu}^{\mu}) B^{\lambda} + A_{\nu}^{\mu} (\nabla_{\rho} B^{\lambda})$.
- Contracción de índices: $\nabla_{\rho} T_{\nu}^{\mu\nu} = \partial_{\rho} T_{\nu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} T_{\nu}^{\lambda\nu}$.
- Compatibilidad con la subida y bajada de índices: $\nabla_{\mu} V^{\nu} = g^{\nu\rho} \nabla_{\mu} V_{\rho}$ consecuencia directa del postulado métrico.

Finalmente, cerraremos la sección estudiando qué sucede con los gradientes y las divergencias tras haber definido esta nueva derivada covariante (1.16).

- El gradiente de un escalar no es más que su derivada parcial: $\nabla_{\mu} S = \partial_{\mu} S$.
- El rotacional de un vector covariante como puede ser el caso del tensor electromagnético: $F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ ya que en un espacio sin torsión las contribuciones de los símbolos de Christoffel cancelan debido a su simetría. Es decir, se obtiene el mismo resultado que en un espacio plano.
- Finalmente, la divergencia de un vector contravariante: $\nabla_{\mu} V^{\mu} = \partial_{\mu} V^{\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} V^{\lambda}$ puede manipularse hasta llegar a la siguiente expresión $\nabla_{\mu} V^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} \left[\sqrt{|g|} V^{\mu} \right]$. Los detalles de este cálculo pueden encontrarse en cualquier texto como [2].

1.3. Curvatura

Estamos en condiciones de estudiar ahora la dinámica del espacio-tiempo, una de nuestras principales misiones será describir su curvatura. Hasta que Einstein introdujo la relatividad general, toda la física de la gravitación se había hecho en términos locales con una geometría plana (descrita por la métrica de Minkowski). Por ello, conseguir describir la curvatura de un espacio-tiempo será totalmente crucial

y para ello, usaremos varios conceptos definidos en el contexto de la geometría diferencial como es el tensor de curvatura o **tensor de Riemann**:

$$R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (1.19)$$

que no es más que una generalización de la curvatura de Gauss de una superficie a variedades de dimensiones arbitrarias. Vemos que, efectivamente se transforma como un tensor:

$$R'_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\psi}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} R_{\lambda\varepsilon}{}^{\psi}{}_{\tau} . \quad (1.20)$$

Es importante notar que, al estar trabajando en un espacio sin torsión, el tensor de Riemann está determinado únicamente por la métrica y sus primeras y segundas derivadas. Puede demostrarse que es el único tensor de este tipo que además es lineal en sus segundas derivadas.

El sentido físico de este tensor es que nos permite identificar si, dada la métrica de un espacio tiempo $g_{\mu\nu}(x)$ cualquiera, existe o no un campo gravitatorio no trivial. Un ejemplo de esto es comparar la métrica de Minkowski escrita en coordenadas esféricas:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

con la de un agujero negro con $-g_{tt} = g_{rr}^{-1}$, para notar que no basta con la expresión de la métrica y de la conexión para saber si un espacio-tiempo es curvo o no.

La respuesta a esto es que para que un espacio-tiempo sea plano se necesita que $R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma}$ se anule (sabemos que entonces lo hará para cualquier observador); y que debe existir un punto X en el que la métrica en ese punto $g_{\mu\nu}(X)$ tenga un autovalor negativo y tres positivos (al igual que $\eta_{\mu\nu}$).

Uno de los enfoques que se toman desde la relatividad general para definir el tensor de Riemann es verlo como el factor resultante de la no conmutación de las derivadas covariantes:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} V^{\sigma} . \quad (1.22)$$

Es interesante notar la analogía con el electromagnetismo descrito desde la teoría de campos. Esta teoría explica la dinámica de los fotones ($A_{\mu\nu}$) y está descrita por su *field strength*, el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. La derivada covariante de un campo cargado (supondremos con carga unidad) en esta teoría se define como:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi \quad (1.23)$$

y cumple la siguiente relación

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = F_{\mu\nu} \psi . \quad (1.24)$$

Si hacemos las siguientes comparaciones: $\Gamma_{\mu\nu}^\rho \leftrightarrow A_\mu$, $\nabla_\mu \leftrightarrow D_\mu$ y $R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma \leftrightarrow F_{\mu\nu}$ tenemos que el *field strength* de la teoría gravitatoria ($R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma$) cumple una relación equivalente. Esto es debido a que ambas son teorías gauge: el electromagnetismo en $U(1)$ y la relatividad en $SO(1,3)$. Aunque no nos meteremos en más detalle, es interesante mencionar esta relación.

Estudiemos ahora algunas de las propiedades del tensor de Riemann que serán cruciales en lo que queda de sección. Para ello, será más cómodo describirlas con los cuatro índices abajo: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\rho\lambda} R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\sigma$:

- Simetría: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$.
- Antisimetría: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\nu\mu\sigma\rho}$.
- Ciclicidad: $R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\nu\rho\mu\sigma} = 0$.

Estas propiedades nos servirán de gran ayuda para definir las siguientes cantidades y sus propiedades. Se define el **tensor de Ricci** a partir del tensor de Riemann como:

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu}{}^\lambda{}_\nu = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (1.25)$$

el cual, por la propiedad de simetría del tensor de Riemann cumple: $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$, es decir, es simétrico.

De la misma forma se define el **escalar de Ricci**

$$R = R_\mu{}^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (1.26)$$

Notar que estos dos últimos objetos son la única posibilidad de definir un tensor y un escalar, respectivamente, a partir del tensor de Riemann; ya que, por la ciclicidad de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ no hay ningún otro vector que pueda formarse como:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 . \quad (1.27)$$

Además de las propiedades algebraicas que acabamos de mencionar, el tensor de Riemann también satisface la identidad de Bianchi:

$$\nabla_{[\mu} R_{\nu\rho]}{}^\lambda{}_\sigma = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\sigma + \nabla_\rho R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\sigma + \nabla_\nu R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\sigma = 0 \quad , \quad (1.28)$$

la cual vuelve a ser una expresión análoga a la ley de Gauss-Faraday del electromagnetismo. Si ahora tomamos trazas sobre (ν, λ) obtenemos

$$\nabla_\mu R_{\rho\sigma} - \nabla_\rho R_{\mu\sigma} + \nabla_\lambda R_{\rho\mu}{}^\lambda{}_\sigma = 0 \quad , \quad (1.29)$$

si volvemos a tomarlas, esta vez sobre (ρ, σ) se llega a que

$$\nabla_\nu \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] = 0 \quad . \quad (1.30)$$

Es a partir de esta relación que se define el **tensor de Einstein**:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad . \quad (1.31)$$

Que, como acabamos de ver, se conserva **siempre** debido a las propias simetrías del tensor de curvatura.

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (1.32)$$

Si recordamos el Teorema de Neother, este nos dice que la existencia de una simetría en una teoría implica que existe una corriente que se conserva. En el caso de la relatividad general las simetrías bajo difeomorfismos (traslaciones en el espacio tiempo) implican la conservación del tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (1.33)$$

1.4. Ecuaciones de Einstein

Cerraremos este capítulo presentando las ecuaciones de Einstein. Estas son las ecuaciones de movimiento que gobiernan la evolución de un sistema gravitatorio; relacionando geometría ($G_{\mu\nu}$) con materia ($T_{\mu\nu}$)

$$G_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu} \quad , \quad (1.34)$$

siendo $k^2 = 8\pi G_N$ y $k^{-1} = m_p = 2,4 \cdot 10^{18} GeV$ la masa de Planck reducida. Recordemos que el tensor energía-momento ($T_{\mu\nu}$) codifica la información del tipo de materia en espacio-tiempo que estamos considerando.

Una manera alternativa de expresar esta ecuación es tomar trazas y sustituir en las ecuaciones (1.34) y (1.31) para dar con una forma alternativa en función del tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = k^2 \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right] . \quad (1.35)$$

Pero para poder utilizar las ecuaciones de Einstein en cualquier sistema, necesitaremos conocer el tensor energía-momento, o lo que es lo mismo, el tipo de materia que tenemos en nuestro espacio-tiempo. En el caso de la cosmología, se suele modelar la materia del universo como un fluido perfecto ² bajo un campo gravitacional. La expresión de su tensor energía-momento es

$$T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \rho) U^\mu U^\nu , \quad (1.36)$$

con P la presión, ρ la densidad de materia y U^μ la 4-velocidad. Esta 4-velocidad no es arbitraria, sino que está normalizada: $|U|^2 = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \eta_{ab} U^a U^b = -1$ donde $U^a = e^a_\mu U^\mu$. Notar que se están utilizando los índices griegos para referirnos a un espacio curvo e índices latinos para espacios planos. Dada esta expresión podemos tomar su traza encontrando que:

$$T = 3P - \rho . \quad (1.37)$$

Tal y como explicaremos en las siguientes secciones, la presión y la densidad de materia suelen relacionarse mediante una ecuación de estado $f(P, \rho) = 0$. Un ejemplo muy conocido y que será clave en el desarrollo del modelo inflacionario es la ecuación de estado $P = -\rho < 0$.

Otra característica importante de cualquier tensor energía-momento es la mencionada al final de la sección anterior aunque no está demás recordarla. Debido a las propias simetrías del espacio-tiempo se tiene que la derivada covariante del tensor de Einstein se anula y, por tanto, por virtud de las ecuación de Einstein se tiene que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.38)$$

es una corriente conservada **siempre**. Llegados a este punto y después de todo este despliegue de resultados, estamos ya en condiciones de hablar de cosmología.

²Se considera perfecto a un fluido isotrópico en su sistema de referencia en reposo.

Capítulo 2

Cosmología y Big Bang

Este capítulo revisa la cosmología del Big Bang previa a la propuesta de una teoría inflacionaria. Se empieza enunciando el principio cosmológico y cómo este se plasma en la definición de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker para acabar llegando a la presentación de los problemas del Big Bang mediante el uso de la relatividad general y la teoría clásica de campos. Es importante prestar especial atención a la sección 2.2, ya que el siguiente capítulo es una continuación directa de la misma y será necesario tener bien afianzados los conceptos que allí se presentan.

2.1. Introducción a la Cosmología

En esta sección introduciremos el estudio de la cosmología desde el formalismo de la relatividad general que acabamos de revisar. Para ello, reflexionaremos sobre el principio cosmológico y entenderemos por qué la métrica de Friedmann-Robertson-Walker es la más general que cumple las condiciones de homogeneidad e isotropía que postula este principio. A partir de esta métrica resolveremos la ecuación de Einstein para obtener las llamadas ecuaciones de Friedmann. Con ellas, entenderemos la dinámica de nuestro universo a grandes escalas -modelando su contenido como un fluido perfecto- y comprobaremos que depende de su composición; es decir, de si está dominado por materia, radiación o por el propio vacío.

2.1.1. El Principio Cosmológico

En este apartado se derivará la métrica utilizada en cosmología: métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW).

Esta elección no es arbitraria, sino que procede de la necesidad de postular el conocido como principio cosmológico, que postula que nuestro universo a grandes

escalas es isótropo y homogéneo. Esta aproximación se hizo en un primer momento por mera simplicidad; pero, con el desarrollo de nuevos y más precisos aparatos de medida, se acabó constatando experimentalmente con las observaciones a gran escala del Cosmic Microwave Background (CMB).

Es obvio que en distancias pequeñas el universo no se caracteriza por su homogeneidad: no es lo mismo el centro del sol que el vacío entre galaxias. Sin embargo, si se estudia a grandes escalas, podemos considerar que las variaciones locales de densidad se compensan entre sí, de manera que se pueden estudiar las propiedades del universo como las propiedades de ese espacio homogéneo e isótropo que tanto nos conviene.

Sin embargo, este ansatz no es válido para todo el espacio-tiempo en su conjunto (lo que sería denominado como el principio de copérnico), sino que solo aplica a las componentes espaciales, dejando que nuestro universo -como todos sabemos- evolucione con el tiempo. Lo que sería restringir el principio de Copérnico a su parte espacial.

Aclaremos el significado de estas dos propiedades que le impondremos a nuestro universo a grandes escalas. La **isotropía** es característica de un punto e implica invarianza bajo rotaciones, mientras que la **homogeneidad** es la invarianza bajo traslaciones. Si bien es cierto que no existe una relación necesaria entre ambos conceptos, la isotropía en todo punto del espacio implica la homogeneidad. Un espacio, o variedad que cumple estas condiciones se dice máximamente simétrico.

2.1.2. La métrica Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker $g_{\mu\nu}^{FRW}$

De esta manera nuestro espacio tiempo es de la forma $\mathbb{R} \times \Sigma$, donde \mathbb{R} representa nuestro espacio temporal y Σ un espacio homogéneo e isótropo. Por ello, podremos tratar el universo como si tuviéramos una capa (o 'slice') 3-dimensional Σ para cada tiempo dado. Esto puede traducirse en un elemento de línea de la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2, \quad (2.1)$$

Siendo la función $a(t)$ la que codifica la evolución temporal de la parte espacial y $d\sigma^2$ el elemento de línea del espacio Σ máximamente simétrico. Si quisiéramos que nuestro espacio completo en 3+1-dimensiones fuera máximamente simétrico, estaríamos en un espacio llamado **de Sitter**, del cual hablaremos más adelante. Primero, estudiemos la métrica del espacio 3-dimensional en términos de unas coordenadas generales (u^1, u^2, u^3)

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}(u)du^i du^j. \quad (2.2)$$

Σ es lo que se dice una 3-variedad máximamente simétrica. Estas coordenadas que hacen que no tengamos términos cruzados entre la parte temporal y espacial, y que todas las componentes de la parte espacial dependan de la misma función de t , se llaman coordenadas comóviles. Solo un observador que se mantiene constante en las coordenadas u^i observará un universo isotrópico. Puede estudiarse que para una n -variedad máximamente simétrica con una métrica γ_{kj} el tensor de Riemann puede escribirse como:

$${}^{(3)}R_{likj} = k(\gamma_{lk}\gamma_{ij} - \gamma_{lj}\gamma_{ik}). \quad (2.3)$$

Utilizamos el superíndice ${}^{(3)}$ para indicar que nos referimos a tensores asociados a la métrica tridimensional y no del espacio-tiempo completo. Por tanto, tenemos que el tensor de Ricci es de la forma:

$${}^{(3)}R_{ij} = 2k\gamma_{ij}. \quad (2.4)$$

Consideramos ahora que, al tratarse de un espacio máximamente simétrico, en concreto será esféricamente simétrico, al igual que en la métrica de Schwarzschild. Por ello podemos heredar el resultado (cuyo desarrollo detallado puede encontrarse en [1]) y escribir nuestro elemento de línea como:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(u)du^\mu du^\nu = e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.5)$$

siendo $d\Omega^2$ la métrica usual en la dos esfera.¹ También conocemos explícitamente los elementos del tensor de Ricci para esta métrica (como se hace en un curso de GR cuando se trabaja con la métrica de Schwarzschild):

$${}^{(3)}R_{rr} = \frac{2}{r}\partial_r\beta \quad {}^{(3)}R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}(r\partial_r\beta - 1) + 1 \quad {}^{(3)}R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta \quad (2.6)$$

Podemos combinar ahora estas expresiones con la derivada de la métrica máximamente simétrica (2.4). Al hacerlas coincidir obtenemos una expresión para la función $\beta(r)$:

$$\beta(r) = -\frac{1}{2}\ln(1 - kr^2) \quad (2.7)$$

y recuperando la expresión (2.5), nuestro elemento de línea para la parte espacial puede entonces expresarse de la siguiente manera:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.8)$$

¹ $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ con $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$

Dada su definición, sabemos que el valor de k está relacionado con la curvatura del espacio, y por ello, el tamaño de estas hiper-superficies espaciales. Es usual normalizar este valor de manera que:

$$k \in \{+1, 0, -1\} \quad (2.9)$$

y el "tamaño" de la variedad se absorbe en el factor de escala. Por ello, es más común trabajar con una métrica en la que el factor de escala es adimensional, la coordenada r tiene dimensiones de distancia y el parámetro de curvatura k de distancia⁻². Para llegar a una métrica con estas características es necesario realizar los cambios

$$a(t) \rightarrow \frac{a(t)}{\sqrt{|k|}} \quad , \quad r \rightarrow \sqrt{|k|}r \quad \text{y} \quad k \rightarrow \frac{k}{|k|} \quad (2.10)$$

que dejan la métrica invariante. De manera que, recuperando la expresión (2.1), obtenemos una métrica que describe la evolución temporal de hiper-superficies espaciales máximamente simétricas. Esta es la denominada métrica de **Friedman Lemaitre Roberson Walker (FLRW)**:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.11)$$

Tal y como hemos deducido esta expresión, podemos afirmar que esta métrica es la única y más general que cumple estas características de homogeneidad e isotropía.

Existen distintos casos que caracterizan el espacio dependiendo del valor de k . El caso $k = -1$ se corresponde con una curvatura negativa de Σ y se le denomina *abierto*; cuando $k = +1$ se dice que el espacio es *cerrado* y se corresponde con una curvatura positiva de Σ ; mientras que $k = 0$ modeliza un espacio Σ sin curvatura. Veámoslo con un poco de detalle analizando la parte espacial de nuestra métrica: $d\sigma^2$.

- $k = 0$: La métrica de Σ es:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (2.12)$$

que no es más que la métrica del espacio Euclídeo en coordenadas esféricas.

- $k = 1$: Podemos definir el siguiente cambio de variable: $r = \sin \chi$ para reescribir $d\sigma$ como:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega, \quad (2.13)$$

la métrica de una 3-esfera.

- $k = -1$: Este último caso es el más difícil de visualizar y basta con tomar $r = \sinh \phi$ para ver:

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sinh^2 \psi d\Omega \quad (2.14)$$

que es lo que se denomina un espacio hiperbólico.

2.1.3. Ecuaciones de Friedmann

Llega el momento de resolver las ecuaciones de Einstein asociadas a esta métrica (seguiremos el desarrollo presentado en [1]); pero antes de adentrarnos en el cálculo ya podemos predecir -observando la métrica FRW- que lo que obtendremos serán ecuaciones para nuestro factor de escala $a(t)$. Para ello nos será útil escribir explícitamente las componentes del tensor de Ricci para la métrica de FRW:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \\ R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Donde \dot{a} y \ddot{a} son la primera y segunda derivada del factor de escala en función del tiempo respectivamente: $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ y $\ddot{a} = \frac{d\dot{a}}{dt}$. Mientras que el escalar de Ricci es:

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \quad (2.15)$$

Ahora habrá que considerar qué clase de sistema queremos estudiar. En primer lugar, sabemos que el universo no está vacío por lo que habrá que escoger un tensor energía-momento que modele la materia y energía del universo. Típicamente, se elige el fluido perfecto descrito en la ecuación (1.36). Recordemos que, por definición, es un fluido isotrópico en su sistema de referencia en reposo. Si recordamos, habíamos definido la métrica FRW para un observador comóvil que era el único que podía observar un universo isotrópico. Es claro que, este mismo observador será también el que verá un fluido isotrópico y por ello el fluido estará en reposo en nuestras coordenadas. Tenemos entonces la cuatrovelocidad normalizada:

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.16)$$

y el tensor energía-momento:

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \rho)U_\mu U_\nu \quad (2.17)$$

que escrito en forma matricial es

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \delta_{ij}P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} . \quad (2.18)$$

por lo que su traza

$$T = T_{\mu}^{\mu} = -\rho + 3P , \quad (2.19)$$

y ya tendríamos todo lo necesario para resolver la Ecuación de Einstein descrita en (1.35) directamente en función de las componentes del tensor de Ricci y el tensor energía-momento. Se obtiene para las componentes $\mu\nu = 00$:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3P). \quad (2.20)$$

Y para $\mu\nu = ij$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - P). \quad (2.21)$$

Si despejamos el término $\frac{\ddot{a}}{a}$ en (2.20) y lo introducimos en (2.21) conseguimos eliminar los términos de segundo orden y obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.22)$$

Conocidas como las **Ecuaciones de Friedmann**, modelan los llamados universos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Será muy interesante de cara al resto del trabajo definir algunos parámetros ampliamente utilizados en cosmología a partir de estas ecuaciones.

En primer lugar se denomina **parámetro de Hubble** al ratio de expansión :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} . \quad (2.23)$$

Por lo que a partir de esta definición podemos reescribir las ecuaciones de Friedmann en función de H:

$$\boxed{\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)} , \quad (2.24)$$

$$\boxed{H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}} . \quad (2.25)$$

Notar que $a(t)$ es una cantidad adimensional por lo que, si queremos hacer mediciones o predicciones asociadas con este factor, tendremos que utilizar combinaciones de a , \dot{a} y \ddot{a} .

Otra cantidad muy interesante será el **parámetro de densidad**:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad , \quad (2.26)$$

Con ρ_{crit} la llamada densidad crítica. Recibe este nombre puesto que, si reescribimos la segunda ecuación de Friedmann (2.25) en función del parámetro de densidad se obtiene:

$$\boxed{\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}} \quad . \quad (2.27)$$

El denominador está elevado al cuadrado, por lo que vemos que el signo de k (que como ya discutimos, determina la geometría del espacio-tiempo en el que estamos) depende única y exclusivamente de si $\Omega < 1$, $\Omega = 1$ o $\Omega > 1$. O lo que es lo mismo:

$$\begin{array}{llllll} \rho < \rho_{crit} & \iff & \Omega < 1 & \iff & k = -1 & \iff & \text{Geometría hiperbólica} \\ \rho = \rho_{crit} & \iff & \Omega = 1 & \iff & k = 0 & \iff & \text{Geometría plana} \\ \rho > \rho_{crit} & \iff & \Omega > 1 & \iff & k = 1 & \iff & \text{Geometría esférica} \end{array}$$

2.1.4. Ecuación de estado e interpretaciones

Aplicaremos lo aprendido en el capítulo 1 de relatividad general y utilizaremos la conservación del tensor energía-momento $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ a nuestro fluido perfecto para dar más información acerca del factor de escala $a(t)$. Obtenemos la llamada **ecuación de continuidad**:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad . \quad (2.28)$$

La cual puede verse también como la primera ley de la termodinámica, donde identificamos $V = a^3$ como el volumen y $U = \rho a^3$ como la energía del sistema:

$$dU = -PdV \quad \Rightarrow \quad d(\rho a^3) = -Pd(a^3) \quad . \quad (2.29)$$

Será crucial llegados a este punto encontrar una ecuación de estado que relacione la densidad ρ con la presión P : $f(\rho, P) = 0$.

Hay varias maneras de obtener esta ecuación de estado, una de ellas es recurrir a la física estadística, en la que estudiamos el comportamiento de gases ideales

clásicos (fluidos perfectos) con un número $N \gg 1$ de partículas. Sabemos que un sistema de estas características está descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \lambda \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|^\alpha . \quad (2.30)$$

De esta manera, utilizamos la colectividad canónica para modelar el problema. Calcularemos la función de partición a partir del Hamiltoniano por lo que tendremos que irnos al espacio de fases y sumar sobre todos los posibles microestados:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N!} \int \frac{1}{h_0^{3N}} e^{-\beta\lambda \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|^\alpha} d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N \underbrace{d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_N}_{=V^N} = \frac{1}{N} \left(\frac{V}{h_0^3} \int e^{-\beta\lambda |\vec{p}_i|^\alpha} d\vec{p}_i \right)^N . \quad (2.31)$$

Donde, $h_0 = \Delta x \Delta p$ es un factor normalizador (tamaño de la celda), β codifica el cambio del número de microestados con la energía y N es el número de partículas. Para igualar $d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_N$ hemos utilizado la suposición de que estamos trabajando con un gas ideal (sin interacciones entre las distintas partículas). Ahora, evaluando la integral:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N} \left(\frac{V}{h_0^3} 4\pi \left(\frac{1}{\alpha} \right) \Gamma \left(\frac{3}{\alpha} \right) (\beta\lambda)^{-3/\alpha} \right)^N \quad (2.32)$$

De esta manera podemos obtener una expresión para la densidad de nuestro sistema teniendo en cuenta que $\rho = \frac{\bar{E}}{V}$ y $\beta = \frac{1}{kT}$:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} = \frac{3N}{\alpha\beta} \Rightarrow \rho = \frac{3NkT}{\alpha V} . \quad (2.33)$$

Por otro lado, sabemos que dado un sistema con parámetro externo V , su fuerza generalizada es

$$\bar{P} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial V} \Rightarrow \bar{P}V = NkT , \quad (2.34)$$

de manera que obtenemos la siguiente ecuación de estado que nos relaciona la presión de nuestro sistema P con su densidad ρ

$$\boxed{P = \frac{\alpha}{3} \rho = \omega \rho} . \quad (2.35)$$

En la que normalmente se define: $\omega = \frac{\alpha}{3}$. Sustituyendo en (2.28) obtenemos:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} ; \quad (2.36)$$

por lo que integrando tenemos la relación:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad . \quad (2.37)$$

Dada esta expresión podemos introducirla en la primera ecuación de Friedmann (2.24) para deducir la forma de este factor de escala:

$$a \propto \begin{cases} t^{2/(3(1+\omega))} & \omega \neq -1 \\ e^{Ht} & \omega = 1 \end{cases} \quad . \quad (2.38)$$

Llegados a este punto veamos qué información física nos dan estas ecuaciones. En el universo existen tres tipos de fluidos conocidos: radiación, materia no-relativista y el vacío. Si la energía que se intercambia entre ellos es despreciable, entonces todos ellos por separado deben de cumplir la ecuación de estado (2.35): $\rho_i = \omega_i P_i$ para $i = \{\text{rad, mat, } \Lambda\}$.

Para estudiar los dos primeros casos será especialmente útil recurrir a la ecuación del Hamiltoniano con el que empezamos este razonamiento (2.30) y recordar que $\omega = \frac{\alpha}{3}$.

- Si $\alpha = 1$ entonces vemos que $H \propto |\vec{p}|$ y por tanto describe un sistema relativista, dominado por fotones; es decir, que en este escenario estamos modelando **radiación**. Y se obtienen las siguientes relaciones $\omega_{rad} = \frac{1}{3}$ y $\rho \propto a^{-4}$
- Si $\alpha = 0$ estamos en el caso no-relativista, en un universo dominado por materia (bariones y materia oscura). En este caso $\omega = 0$ y $\rho \propto a^{-3}$
- El caso del vacío se corresponde con la ecuación de estado $P = -\rho$, lo que implicaría $\omega = -1$. Esto es lo que se denomina un espacio **de Sitter** que, como ya adelantamos en la sección 2.1.2, es máximamente simétrica en 3+1-dimensiones. Se caracteriza precisamente por tener esa ecuación de estado ($P = -\rho$) con ρ es constante y $a \propto e^{Ht}$ de manera que $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es constante.

Esta expresión del factor de escala se deriva de la ecuación de movimiento del campo escalar (A) y su tensor energía momento (A.16). Si intentamos explicarlo a través del Hamiltoniano como los dos anteriores supondría: $H \propto |\vec{p}|^{-3}$, lo cual carece de sentido físico.

A modo de resumen veamos el siguiente esquema de las tres posibilidades que podemos tener:

$$\begin{array}{llllll} \omega = \frac{1}{3} & \iff & \rho \propto a^{-4} & \iff & a \propto t^{1/2} & \iff & \text{Materia} \\ \omega = 0 & \iff & \rho \propto a^{-3} & \iff & a \propto t^{2/3} & \iff & \text{Radiación} \\ \omega = -1 & \iff & \rho = \text{cte.} & \iff & a \propto e^{Ht} & \iff & \text{Vacío} \end{array}$$

2.2. Conceptos y problemas cosmológicos

Ahora, introduciremos las ideas principales para entender la cosmología del Big Bang y sus problemas. Definiremos en un primer momento los conceptos claves que serán necesarios durante el resto del trabajo. Más tarde, presentaremos los llamados problemas del Big Bang para finalmente entender la necesidad de postular un periodo inflacionario como solución a estos problemas.

2.2.1. Definiciones

Los conceptos presentados a continuación serán fundamentales a la hora de entender el trabajo, seguiremos el desarrollo detallado en [4] para su presentación. La teoría inflacionaria está descrita en estos términos y serán cruciales en el entendimiento de los problemas del Big Bang así como en su posterior solución.

Distancias

Una vez hemos introducido la métrica FRW es interesante ver cómo se definen las distancias radiales. Dado un tiempo t , la distancia **radial** entre dos puntos del espacio $(t, 0)$ y (t, r) es:

$$d(r, t) = \int ds = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t) \cdot \begin{cases} \sinh^{-1} r & k = -1 \\ r & k = 0 \\ \sin^{-1} r & k = 1 \end{cases} . \quad (2.39)$$

Por supuesto, dependerá del signo de k y, consecuentemente, de la geometría del espacio-tiempo que manejemos.

Con esto podemos observar que las distancias físicas cumplen: $\lambda \propto a$; y que, por tanto, aumentan con el tiempo en un universo en expansión ($\dot{a} > 0$). Lo vemos directamente a través de la llamada **Ley de Hubble**, que es independiente del valor de k :

$$\dot{d} = \frac{\dot{a}}{a} d = H d . \quad (2.40)$$

Es decir, las galaxias se separan entre ellas a una velocidad proporcional a la distancia que las separa.

Directamente de (2.39) y (2.40) vemos que el momento p de cualquier suceso disminuye a medida que avanza el factor de escala $p \propto a^{-1}$. Por lo que las partículas

pierden momento a medida que se expande el universo. Esto puede verse como si la propia expansión del universo ejerciera una fricción sobre todo lo que se mueve en él.

Distancia comóvil y tiempo conforme

También es interesante realizar un cambio de variable en nuestra métrica de manera que podamos estudiar las distancias radiales constantes entre dos puntos. A esta nueva variable χ la llamaremos **distancia comovil**:

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad . \quad (2.41)$$

De esta manera, conseguiremos expresar la métrica de una forma mucho más simple. Además, dado que en lo que nos atañe estamos suponiendo un universo homogéneo e isótropo podremos fijar un θ y ϕ arbitrarios (ya que los resultados serán independientes de esta elección) y estudiar la propagación radial de la luz con una métrica en 2 dimensiones:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\chi^2 \quad . \quad (2.42)$$

Por supuesto, la forma explícita de este cambio de variable dependerá del valor de k :

$$r^2 = \Phi_k(\chi^2) = \begin{cases} \sinh^2 \chi & \text{si } k = -1 \\ \chi^2 & \text{si } k = 0 \\ \sin^2 \chi & \text{si } k = 1 \end{cases} \quad . \quad (2.43)$$

Se comprueba que χ nos muestra la distancia radial sin tener en cuenta la evolución temporal -codificada en el factor de escala $a(t)$. Efectivamente, echando un vistazo a la ecuación (2.39) vemos que basta multiplicar por el factor de forma $a(t)$ para obtener las distancias radiales físicas d entre dos puntos del universo. Es decir:

$$d(t) = a(t)\chi \quad (2.44)$$

Sin embargo, esta forma de la métrica aún nos puede traer muchos problemas a la hora de estudiar las geodésicas de cualquier partícula. Estas dependerán de la forma de la función $a(t)$ y, como veremos más adelante, aún se desconoce con certeza la forma exacta de esta función.

Entonces, nos interesa encontrar una expresión del elemento de línea en la que las geodésicas nulas no dependan del factor de escala. Por eso, resulta extremadamente útil definir el **tiempo conforme**.

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{a(t)^2} \Rightarrow \tau = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (2.45)$$

Este puede verse como un reloj que se va ralentizando a medida que el universo se expande ($\tau \propto a^{-1}$). Es a través de la definición de este concepto que podemos reescribir la métrica de FRW como una conforme a Minkowski.

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-d\tau^2 + d\chi^2] \quad (2.46)$$

Es decir, hemos conseguido reescribir FRW como una métrica plana multiplicada por un factor temporal. ¡Las geodésicas de los fotones en estas coordenadas serán líneas rectas a 45°!

Veámoslo explícitamente, dada esta expresión para el elemento de línea, es fácil deducir que para conseguir las geodésicas nulas propias de los fotones la distancia comóvil ha de coincidir con el tiempo conforme:

$$\chi(\tau) = \pm\tau + const \quad (2.47)$$

Es crucial recordar que las trayectorias de los fotones distinguen también las regiones conectadas y desconectadas causalmente. Por lo que, en lo que concierne a las siguientes secciones donde hablaremos de problemas con la causalidad de ciertos eventos, se utilizarán los términos *tiempo comóvil* y *distancia conforme* indistintamente.

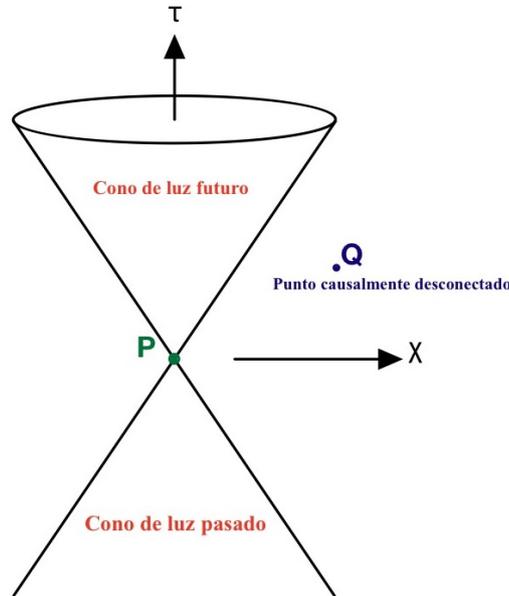


Figura 2.1: Conos de luz para la métrica de FRW en coordenadas comóviles.

Si recuperamos los conceptos de la relatividad especial, tenemos que -en nuestro convenio $(-, +, +, +)$ - los intervalos con $ds^2 < 0$, denominados *timelike geodesics*, se corresponden con las trayectorias de partículas masivas con un tiempo $\tau \in \mathbb{R}$. Mientras que los intervalos con $ds^2 > 0$ se llaman *spacelike intervals* y unen regiones del espacio desconectadas causalmente.

Horizontes

El **horizonte de partícula (comóvil)** es la distancia comóvil (χ) máxima que **la luz** puede recorrer en un cierto tiempo entre t_i y t . (Recordemos de (2.47), que en el caso de los fotones la distancia comóvil se corresponde con el tiempo conforme).

$$\chi_p = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} \quad (2.48)$$

Normalmente se toma $t_i = 0$ como el origen del universo, pero es importante destacar que $t = 0$ no implica $\tau = 0$; ya que esto dependerá del factor de escala $a(t)$ (recordar su definición en (2.45)). Esta distinción será de vital importancia cuando revisemos los problemas del Big Bang desde una perspectiva inflacionaria.

Por lo que, la distancia física radial de este horizonte, al que llamaremos **horizonte de partícula** es:

$$R_p(t) = a(t)\chi_p = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} . \quad (2.49)$$

Finalmente definiremos el **horizonte de eventos** como el conjunto de puntos a partir de los cuales no se recibiría nunca una señal lanzada desde un tiempo τ determinado. Es decir, con las definiciones vistas hasta ahora en términos de la distancia comóvil:

$$\chi_e = \int_{\tau}^{\tau_{max}} d\tau = \tau_{max} - \tau , \quad (2.50)$$

todo punto separado una distancia $\chi > \chi_e$ de un emisor, no recibirá nunca una señal suya. Es decir, nunca han estado ni estarán en contacto causal.

2.2.2. Problemas del Big Bang

En este apartado, veremos que la cosmología derivada del Big Bang tal y como la hemos estudiado hasta ahora, requiere de unas condiciones iniciales muy concretas para poder explicar las propiedades del universo que conocemos hoy en día. Podría decirse que lo que se presenta a continuación no son problemas como tal, ya que con

la elección de unas condiciones iniciales extremadamente precisas puede conseguirse que, sobre el papel, el modelo clásico del Big Bang estuviese en concordancia con las observaciones. Sin embargo, esto nos llevaría a la pregunta de por qué el universo tenía esas propiedades tan particulares en sus primeros momentos. Dando lugar a los llamados problemas de *fine-tuning*; y para los que, en muchas ocasiones, se recurre a la filosofía para su discusión.

Sin embargo, el objetivo de este trabajo es, precisamente, resolver estos problemas mediante la teoría inflacionaria propuesta por primera vez por Alan Guth [5] que dará soluciones a partir de unas condiciones iniciales generales.

Para estudiar estas condiciones iniciales tomamos una capa del espacio 3-dimensional Σ en un tiempo fijo sin preocuparnos de la elección gauge para esta elección. En esa hiper-superficie, fijamos las posiciones y velocidades de todas las partículas y estudiamos el sistema con gravedad y dinámica de fluidos, es decir, hacemos un tratamiento clásico en el que surgen dos problemas:

Problema del horizonte

Recordamos que desde un primer momento hemos supuesto condiciones de homogeneidad e isotropía; no de manera arbitraria, si no en base a resultados de experimentos como el de Planck o el WMAP del CMB. En ellos, se observan muy pequeñas inhomogeneidades (o anisotropías); que, tal y como hemos estudiado en la sección anterior ($\lambda \propto a$), sabemos que han ido creciendo con el tiempo. Por tanto, tenemos que en momentos anteriores, como el propio momento de recombinación, estas anisotropías eran aún menores de lo que vemos ahora, dando lugar a un universo casi completamente homogéneo.

Pero, a continuación veremos que, según la cosmología del Big Bang, todas estas regiones del espacio que presentan unas características de homogeneidad común no estaban conectadas causalmente en el momento de su emisión. ¿Cómo se explica esta homogeneidad del universo entonces? Veremos que para hacerlo sin recurrir a la inflación, serían necesarias unas condiciones iniciales extremadamente precisas.

Bien, recordemos que el horizonte de partícula comóvil (máxima distancia comóvil que recorre la luz entre dos tiempos) nos proporcionaba el horizonte causal de un suceso y podremos manipularlo de la siguiente manera:

$$\chi_p = \tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_{a(0)}^{a(t)} \frac{da}{\dot{a} \cdot a} = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} = \int_0^a d(\ln a) \left(\frac{1}{Ha} \right) . \quad (2.51)$$

Realmente, lo que hemos hecho en este desarrollo es pasar de comparar el tiempo conforme τ con t (el tiempo coordenado), a comparar τ con una función del tiempo $\ln[a(t)]$, tan válida como cualquier otra. De esta manera hemos conseguido relacionar el tiempo conforme τ con el **radio de Hubble**: $(aH)^{-1}$. Si recordamos su definición, veremos que este radio marca el tamaño del universo observable en un punto y momento determinados. Es decir, el radio de Hubble nos dice qué regiones del espacio están conectadas causalmente en un determinado tiempo t .

Reescribamos ahora esta cantidad en función del valor del parámetro de Hubble en el presente [6]:

$$R_H = (aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \quad . \quad (2.52)$$

Entonces, el comportamiento de este radio de Hubble dependerá del signo de $(1+3\omega)$; y, consecuentemente, del valor de ω . Pero esto es algo que conocemos, en particular, para los momentos del universo en los que domina la radiación ($\omega = \frac{1}{3}$) y la materia ($\omega = 0$). Por lo que el factor de escala en cada caso es: a y $a^{\frac{1}{2}}$ respectivamente. Obteniendo una tendencia muy clara del horizonte conforme:

$$\chi_p = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} = \begin{cases} \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a^2} \propto a & (RD) \\ \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a} \sqrt{a} \propto a^{1/2} & (MD) \end{cases} \quad . \quad (2.53)$$

Pero, si recordamos ahora la expresión del horizonte partícula real (distancia máxima que recorre la luz entre un tiempo $t_0 = 0$ y t) tenemos entonces que:

$$R_p = a(t) \int_0^a \frac{da}{Ha^2} \propto \begin{cases} a^2 & (RD) \\ a^{3/2} & (MD) \end{cases} \quad . \quad (2.54)$$

Basta recordar que las distancias crecen linealmente con el factor de escala ($\lambda \propto a$) para ver de manera directa que la proporción R_p/λ también crece monótonamente con el tiempo. Esto significa que, fotones que ahora detectamos con $\lambda(t_0) < R_p(t_0)$ (ya que solo podemos detectar lo que está dentro del nuestro horizonte actual) si vamos hacia atrás en el tiempo, no estaban causalmente conectados en el momento de recombinación ($\lambda(t_{CMB}) > R_p(t_{CMB})$). Un esquema muy clarificador es el de la figura 2.2. Entonces, ¿cómo se explica que todas las regiones que hoy vemos tengan las mismas características de homogeneidad e isotropía si cuando se produjeron estaban desconectadas causalmente?.

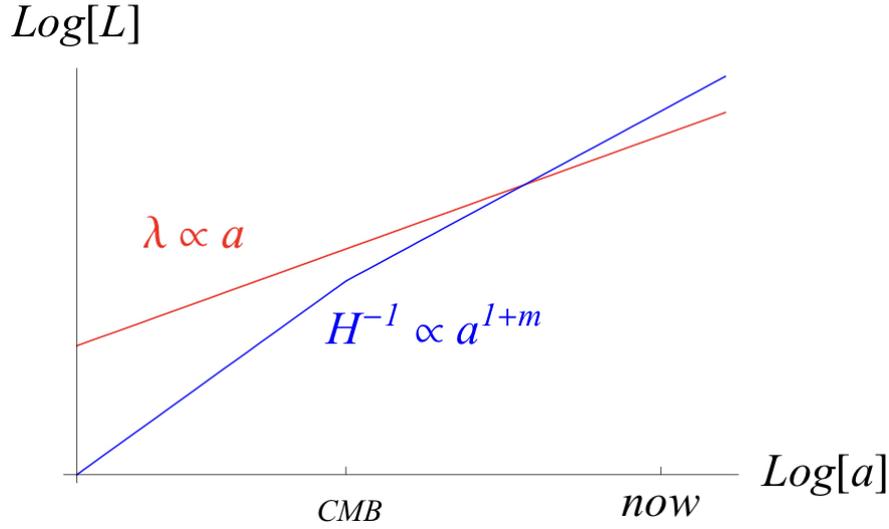


Figura 2.2: Esquema del problema del horizonte. En rojo la evolución de una señal genérica y en azul la del radio de Hubble. Esta última dependerá de si el universo está dominado por materia o por radiación. Se ve cómo en la cosmología del Big Bang, distancias que ahora están en contacto causal no lo estaban en el momento de su producción [4].

Resultará de especial interés a la hora de determinar una cota para la duración del periodo inflacionario, saber cuántas regiones del espacio a día de hoy debían haber estado causalmente desconectadas en el momento del last-scattering según la teoría del Big Bang. Para calcularlas, compararemos las escalas de longitud observadas hoy, en el momento del last-scattering ($\lambda_H(t_{ls})$) con el horizonte de partícula en ese momento ($R_p(t_{ls})$). Utilizaremos también las siguientes relaciones derivadas de las ecuaciones de Friedmann: $\rho_m \propto H^2 \propto a^{-3}$ y de la termodinámica: $a \propto T^{-1}$:

$$R_p(t_{ls}) \propto H_{ls}^{-1} = H_0^{-1} \left(\frac{H_0}{H_{ls}} \right) \propto R_p(t_0) \left(\frac{T_{ls}}{T_0} \right)^{-3/2}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\lambda_H(t_{ls})}{a_{ls}} = \frac{R_p(t_0)}{a_0} \Rightarrow \lambda_H(t_{ls}) = R_p(t_0) \left(\frac{T_0}{T_{ls}} \right). \quad (2.56)$$

Como queremos calcular las regiones del espacio (tridimensionales) comparamos ambas cantidades de la siguiente manera obteniendo el resultado deseado:

$$\frac{\lambda_H^3}{R_H^3} \propto \left(\frac{T_0}{T_{ls}} \right)^{-3/2} \sim 10^6. \quad (2.57)$$

Problema de la planitud (velocidades iniciales)

Para estudiar este problema fijémonos en la segunda ecuación de Friedmann escrita como en (2.27):

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(Ha)^2}. \quad (2.58)$$

Comprobamos en la sección anterior que el radio de Hubble en la teoría del Big Bang crece monótonamente con el tiempo. Por tanto $|\Omega - 1|$, debe crecer conforme este radio evoluciona. Sin embargo, a día de hoy medimos que nuestro universo es prácticamente plano ($k = 0$, $\Omega = 1$); lo que, en estas circunstancias requeriría de un valor inicial de Ω extremadamente cercano a 1.

De hecho, se ha calculado en [6] que, para conseguir la planitud que se mide a día de hoy, se necesita que:

$$\begin{aligned} \Omega(a_{BBN}) - 1 &\leq \mathcal{O}(10^{-16}) \\ \Omega(a_{GUT}) - 1 &\leq \mathcal{O}(10^{-55}) \\ \Omega(a_{Pl}) - 1 &\leq \mathcal{O}(10^{-61}) \end{aligned}$$

Con un acercamiento algo más matemático podemos ver que, siempre que se cumpla la condición fuerte de energía ² ($1 + 3\omega > 0$), entonces $\Omega = 1$ es un punto de equilibrio inestable o repulsor:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d \ln a} = \Omega |\Omega - 1| (1 + 3\omega). \quad (2.59)$$

Entonces, ¿por qué medimos estos valores tan cercanos a un universo plano? Realmente, tal y como mencionamos en la introducción de esta sección, ninguna de estas dos situaciones supone, a priori, un problema sin solución. Bastaría tomar unas condiciones iniciales del universo lo suficientemente precisas (*fine tuned*) para explicar esta composición del universo. Pero, en ese caso, entraríamos en un problema de justificación de estas condiciones iniciales más allá de un simple: porque sí, tan poco propia de los físicos.

²Ver discusión final del anexo A.

Capítulo 3

Inflación

Se explicará -por fin- el modelo inflacionario proponiéndolo como solución a los problemas que acabamos de describir. Tras presentar las características necesarias para que sirva como solución, se estudia cómo estas se traducen en una expansión acelerada del espacio. Finalmente, se presenta el campo escalar (inflatón) como 'causante' de este periodo y se definen los parámetros *slow-roll* que nos darán ciertas cotas y condiciones para el potencial del inflatón.

3.1. Introducción al modelo inflacionario: la solución a nuestros problemas

Llegados a este punto, describiremos la solución propuesta por Alan Guth [5] a los problemas de horizonte, planitud y monopolos. No hicimos mención a este último en la sección anterior ya que introducir los conceptos necesarios de teoría cuántica de campos para entenderlo extendería con mucho los límites de este trabajo.

Analicemos estos dos problemas con una nueva perspectiva y veamos que una causa común entre ellos es la hipótesis de que el radio de Hubble $(aH)^{-1}$ crece monótonamente con el tiempo.

Primero recordemos que, efectivamente, gracias a la ecuación (2.53) con las ω 's que habíamos deducido para radiación y materia, en la cosmología estándar del Big Bang, R_H tiene un comportamiento monótono.

Observando las ecuaciones (2.51) y (2.58) comprobamos que es esta evolución del radio de Hubble la que nos causa los dos problemas. Pero, entonces, ¿qué pasaría si invirtiéramos la tendencia de este radio de Hubble? ¿y si encontramos una teoría en la que esta cantidad hubiera decrecido en un periodo anterior al momento de recombinación del CMB? En esta idea se basa la teoría de inflación.

Solución al problema del horizonte

Para explicarlo será necesario recordar la expresión del tiempo conforme (o horizonte de partícula comóvil):

$$\tau = \int_0^a d \ln a \frac{1}{aH(a)} . \quad (3.1)$$

Es importante en este punto recordar la diferencia entre el horizonte comóvil (τ) y el radio de Hubble $(aH)^{-1}$. Vimos que el horizonte (o distancia) comóvil coincidía con el tiempo conforme, y que nos define un horizonte de eventos de manera que partículas alejadas una distancia mayor que $\chi_p = \tau$ **nunca** han estado, ni estarán en contacto causal.

Sin embargo, partículas separadas una distancia mayor al radio de Hubble $(aH)^{-1}$ significa que no están en contacto causal **ahora** (en un tiempo dado).

Nuestros problemas aparecen entonces porque, si suponemos que el radio de Hubble solo ha crecido durante el tiempo, partículas que han entrado ahora dentro del mismo, no lo estaban en un pasado y; sin embargo, muestran características similares.

El modelo inflacionario solventa este problema de manera directa. Supongamos que existió un momento del universo en el que el radio de Hubble era mucho mayor; si esto fuera así, esas partículas habrían estado en contacto causal mucho tiempo antes de cuando las estamos midiendo. Para explicar esto, entonces necesitaríamos que hubiera existido un periodo en el que el radio de Hubble hubiera disminuido drásticamente con el tiempo, dejando así las regiones del espacio causalmente desconectadas que hoy en día detectamos (ver la figura 3.1 puede ayudar mucho a entender este razonamiento). Dado que H es aproximadamente constante, un periodo de decrecimiento de $R_H = (aH)^{-1}$ sería, inevitablemente, consecuencia de un crecimiento drástico de a , lo que se traducirá (como veremos en la siguiente sección) en una expansión exponencial del universo, tal y como describe el modelo inflacionario.

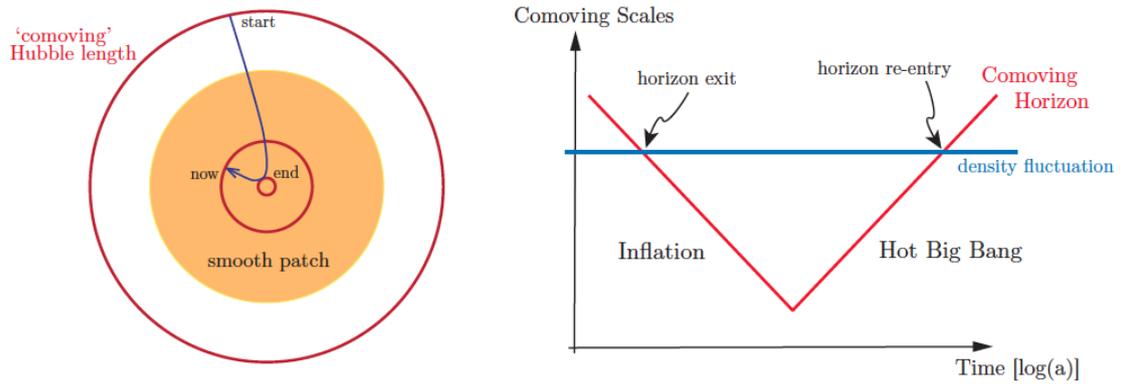


Figura 3.1: Representación de lo que sucede con R_H durante y después del periodo inflacionario. A la izquierda un esquema bidimensional de la evolución del radio de Hubble. A la derecha una gráfica que muestra esquemáticamente cómo, introduciendo una evolución del radio de Hubble mientras que una señal cualquiera (o fluctuación de densidad) evoluciona linealmente, soluciona el problema del horizonte. [6]

Esto significa que zonas del universo que entran ahora en el horizonte ya estuvieron conectadas en un pasado, explicando directamente la homogeneidad del universo tal y como lo conocemos.

Dicho esto, veamos qué sucede con los conos de luz y qué consecuencias tiene este modelo inflacionario en el tiempo conforme y la métrica FRW (2.46) revisando el problema del horizonte en estos términos.

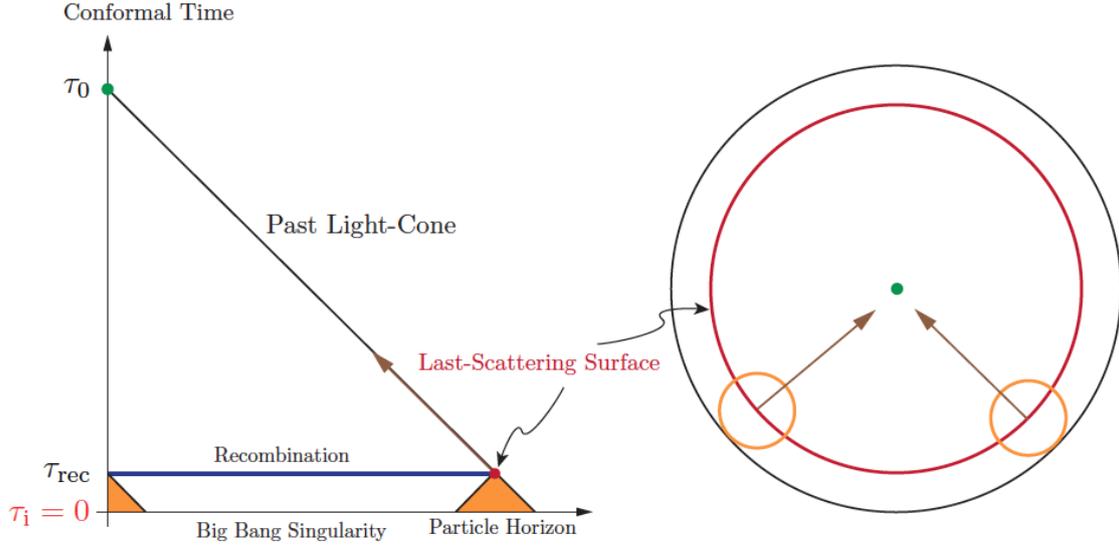


Figura 3.2: Diagrama conforme del problema del horizonte en la cosmología del Big Bang. Distintos puntos en el momento de recombinación están desconectados causalmente (sus conos de luz pasados no coinciden en ningún punto). [6]

Es una manera realmente visual de entender el problema. Tal y como predice la teoría del Big Bang, tenemos la singularidad en $\tau_i = 0$, partículas que estaban separadas una determinada distancia no habían tenido contacto causal y; sin embargo, a día de hoy presentan un equilibrio térmico que solo podía justificarse con unas condiciones iniciales muy concretas.

Sin embargo, cuando postulamos un universo inflacionario conseguimos que esos puntos que hoy medimos con temperatura uniforme en el CMB sí que hubieran estado en contacto en un pasado. Resolviendo el problema sin necesidad de unas condiciones iniciales concretas.

Habíamos visto que el factor de escala evolucionaba en función del tiempo conforme dependiendo de si el universo estaba gobernado por materia o radiación:

$$a(\tau) \propto \begin{cases} \tau & RD \\ \tau^2 & MD \end{cases} . \quad (3.2)$$

Cualquiera de estas dos situaciones significaría la existencia de una singularidad en $\tau_i = 0 \Rightarrow a(0) = 0$ la cual se pensaba, era el Big Bang.

Sin embargo, con inflación y sabiendo que $H \approx cte.$ el factor de escala tiene la forma:

$$a(\tau) = \frac{-1}{H\tau} , \quad (3.3)$$

y la singularidad $a = 0$ se traslada a un momento infinito en el pasado: $\tau_i \rightarrow -\infty$. En otras palabras, debido a la inflación "hay más tiempo conforme anterior al periodo de recombinación del que pensábamos" [6].

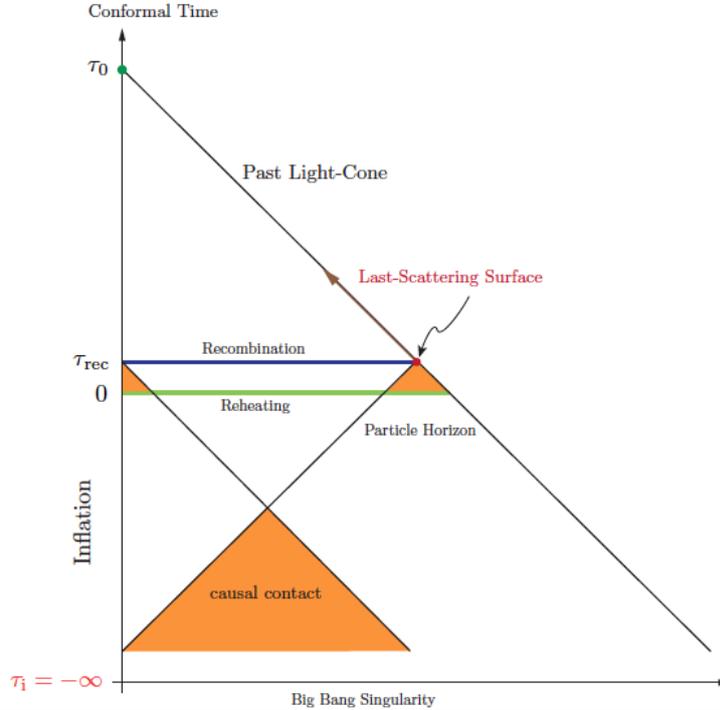


Figura 3.3: Diagrama conforme después de postular la teoría inflacionaria. El tiempo conforme se extiende a valores negativos, que tiene como consecuencia lo que parece un falso Big Bang en el momento final del periodo inflacionario. [6]

Con el modelo de inflación, entonces, extendemos el tiempo conforme a valores negativos. De manera que, lo que pensábamos que era el Big Bang, es en realidad el momento de final de la inflación (o *reheating*) en el que termina el periodo inflacionario y el horizonte empieza a crecer.

Por otro lado, puede verse que el factor de escala diverge para $\tau = 0$ ($t \rightarrow +\infty$) en el caso de que el periodo inflacionario se hubiera mantenido indefinidamente. Sin embargo, hoy sabemos que ese periodo terminó en un tiempo finito, y que por tanto, la aproximación que describimos en (3.3) deja de ser válida en los momentos finales de la inflación.

Solución al problema de la planitud

Finalmente, recordando la ecuación de Friedmann en función del parámetro de densidad:

$$|1 - \Omega(a)| = \frac{1}{(aH)^2} \quad , \quad (3.4)$$

vemos que si el radio de Hubble $(aH)^{-1}$ decrece con el tiempo, se resuelve el problema de la planitud de manera directa. La solución $\Omega = 1$ se vuelve un punto fijo estable directamente con la evolución temporal de R_H , que ya no necesita de ningún *fine-tuning* específico de condiciones iniciales para explicarse.

Es decir, no importa cómo de grande haya sido Ω antes del periodo inflacionario, ya que es este mismo el que hace un efecto de 'aplanamiento' del espacio. Esto explicaría por qué a día de hoy observamos un universo tan plano.

3.2. La física del periodo inflacionario

Una vez hemos mostrado que el modelo inflacionario parece ser la solución más natural a los problemas del Big Bang, veamos qué propiedades y en qué términos suele describirse este modelo siguiendo el resumen de [6]. Lo primero que estudiaremos será qué condiciones surgen de pedirle a nuestro modelo que la esfera de Hubble disminuya con el tiempo. En este estudio encontraremos que para que se cumplan las condiciones necesarias para la inflación necesitamos una ecuación de estado del tipo $P = -\rho$. Explicaremos esta presión negativa postulando un universo dominado por un único campo escalar durante la inflación. Tras resolver las ecuaciones de movimiento que se derivan de la acción de Klein-Gordon en FRW, introduciremos los parámetros de *slow-roll* que jugarán un papel clave en entender el final del periodo inflacionario así como para las siguientes secciones.

3.2.1. Condiciones necesarias en un modelo inflacionario

Al inicio de la sección 3.1 entendimos y describimos la inflación como un periodo en el que la esfera de Hubble disminuye, es decir, que durante el periodo inflacionario se ha de tener:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \quad . \quad (3.5)$$

Pero, si hacemos esta derivada explícitamente obtenemos que es equivalente a postular una expansión acelerada del espacio:

$$\frac{d}{dt} (aH)^{-1} = \frac{-\ddot{a}}{(aH)^2} < 0 \quad . \quad (3.6)$$

Lo que explica que el periodo inflacionario se defina muchas veces de manera directa como un periodo de expansión acelerada:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \quad . \quad (3.7)$$

Puesto que estamos hablando de una expansión exponencial, será interesante verlo en términos de una nueva unidad temporal, conocida como e -folds, que no es más que el tiempo que tarda en evolucionar un factor e . Para ello reescribamos la ecuación de Friedmann (2.24):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = H^2(1 - \varepsilon) \quad \text{con} \quad \varepsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad . \quad (3.8)$$

Entonces, $\ddot{a} > 0$ implica que $\varepsilon < 1$, definiendo el número de e -folds N como:

$$-dN = H dt = d(\ln a) \quad . \quad (3.9)$$

Lo que nos dice el signo '-' de la ecuación anterior es que, en lo sucesivo, contaremos los e -folds hacia atrás en el tiempo. Vemos entonces que la condición de un universo en expansión es también equivalente a decir que el cambio fraccional del parámetro de Hubble en función del número de e -folds es pequeño:

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1 \quad . \quad (3.10)$$

Finalmente, para explicar el origen de esta expansión acelerada es necesario recuperar las ecuaciones que relacionaban el factor de escala con la presión y la densidad:

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-1}{6}(\rho + 3P) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad P < \frac{-\rho}{3} \quad ,$$

pero vemos que esto implica de manera directa un universo en el que la presión ha de ser negativa. Veamos en la siguiente sección cuál es la manera más natural de generar esta dinámica.

3.2.2. La acción de un campo escalar: el inflatón

La primera pregunta que se nos plantea es cómo encontrar una teoría en la que se obtenga una presión negativa. Resulta que el modelo más simple que consigue explicar esto es el de un campo escalar acoplado a la gravitación. Veámoslo.

Por motivos pedagógicos describiremos el modelo sin intentar explicar el origen de este campo escalar, ya que sigue siendo una pregunta abierta a día de hoy. Lo usaremos como una fuente más del tensor energía momento al que llamaremos: *inflatón*. Entonces, la acción de este sistema será la suma de la acción de Einstein-Hilbert más la del propio campo escalar:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] . \quad (3.11)$$

Una de las razones por las que un campo escalar es el mejor candidato para explicar una teoría a estas escalas es que se le puede dar un valor esperado distinto de cero sin romper la invarianza Lorentz, a diferencia de, por ejemplo, un campo vectorial.

Una vez llegados a este punto es momento de desplegar toda la maquinaria que se muestra en el capítulo 1 y el anexo A para obtener las ecuaciones de movimiento y el tensor energía momento. Recordemos la forma de nuestra métrica FRW (2.11) para ver que $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = a^3$. Por lo que, al resolver las ecuaciones de movimiento, se obtiene:

$$\partial^\mu \left(\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta(\partial^\mu \phi)} \right) - \left(\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\phi} \right) = 0 \Rightarrow -\partial^\mu (a^3 \partial_\mu \phi) - V_\phi a^3 = 0 , \quad (3.12)$$

donde V_ϕ es la derivada del potencial en función del campo $V_\phi = \frac{dV}{d\phi}$. Siendo \mathcal{L} el Lagrangiano del campo escalar. Además, como se trata de la descripción de un universo homogéneo, es natural pensar que el inflatón no tendrá dependencia espacial sino únicamente temporal $\phi(t, x) = \phi(t)$, al menos para lo que nos preocupa en esta parte del razonamiento (más adelante, en la sección 4.1, sí que estudiaremos las variaciones infinitesimales de origen cuántico, que tendrán una dependencia en las coordenadas espaciales). Dicho esto, si expandimos el primer término y dividimos entre a^3 obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V_\phi = 0 , \quad (3.13)$$

donde hemos cancelado el tercer término precisamente porque ϕ no tiene dependencia espacial. Vemos además que esta configuración del universo nos da un término de fricción ($3H\dot{\phi}$) proporcional a la constante de Hubble. Calculamos ahora el tensor energía-momento y obtenemos:

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g_{\mu\nu}} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) . \quad (3.14)$$

Por lo que, recordando la expresión del tensor energía momento para un fluido perfecto se obtiene que

$$\begin{cases} \rho = T_0^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ P = T_i^i = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \end{cases} . \quad (3.15)$$

A partir de estas expresiones podemos deducir la forma explícita de la ecuación de estado en función del campo escalar:

$$\omega = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V} . \quad (3.16)$$

De forma que, en los casos en los que el potencial domine sobre la energía cinética, la presión negativa queda automáticamente justificada. Esto significa que necesitaremos que el potencial no tenga un valor mínimo durante el periodo inflacionario. Es decir, que el campo esté desplazado de su mínimo de potencial. Así, obtendremos configuraciones con presión negativa y factor de escala en crecimiento exponencial. Pero, cuando el potencial empieza a disminuir y se aproxima al término cinético, comienza el periodo final de la inflación también conocido como *reheating* (ver figura 3.4)

El periodo de *reheating* es algo complejo de estudiar y aún no se tiene una descripción tan precisa como para el propio periodo inflacionario. Por ello, en este trabajo nos limitaremos a mencionar su existencia; aunque, puede encontrarse más información en [7].

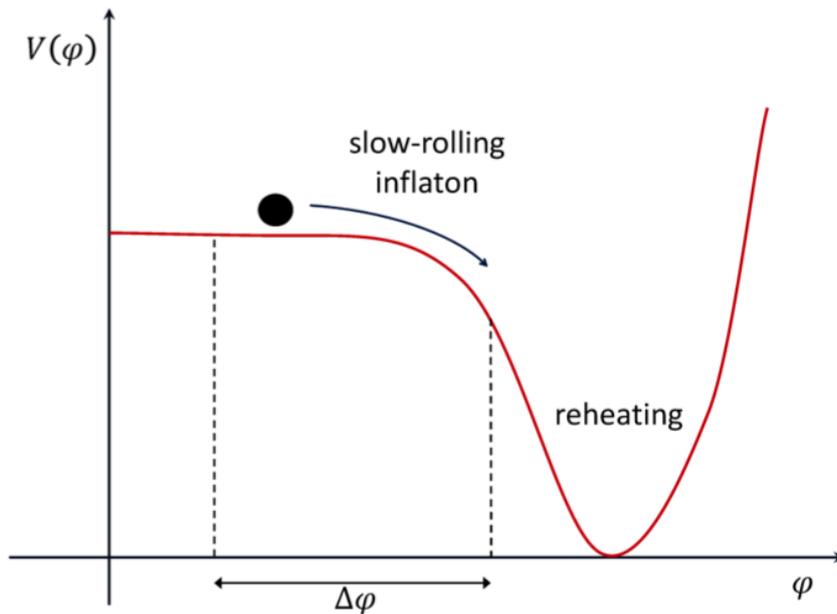


Figura 3.4: Un ejemplo canónico del potencial del inflatón. Inicialmente el inflatón (representado con una bolita) se encuentra separado del mínimo de potencial en lo que se denomina periodo de *slow-roll*. Es en este periodo cuando se produce la inflación, hasta que el campo 'cae' hacia el mínimo de potencial empezando el periodo de *reheating*. [8]

Por otro lado, aplicando la ecuación de Friedmann (2.25), se tiene la siguiente relación para el parámetro de Hubble

$$H^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) , \quad (3.17)$$

que nos será de gran utilidad en la siguiente sección.

3.2.3. Los parámetros slow-roll

Una de las conclusiones del apartado anterior es que la manera más natural de describir un universo inflacionario es a través de un campo escalar cuya energía potencial domina sobre el término cinético. Por ello, es interesante definir lo que se suele denominar como el *primer parámetro slow-roll* ε :

$$\varepsilon \equiv \frac{3}{2}(\omega + 1) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} , \quad (3.18)$$

que no es más que el parámetro que introdujimos en (3.8) tras haberle impuesto las condición (3.17) (es decir, tras haber postulado la existencia de un campo escalar):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P) = H^2(1 - \varepsilon) \quad \text{con} \quad \varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} . \quad (3.19)$$

De esta manera, imponer $|\varepsilon| < 1$ es una manera de codificar que se cumple esta condición. Si tomamos el límite de Sitter $P \rightarrow -\rho$, esto se corresponde (a través de (3.16) y (3.18)) con $\varepsilon \rightarrow 0$, lo cual implica a su vez:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) , \quad (3.20)$$

donde hemos utilizado (3.17) y $H^2 \gg \dot{\phi}^2$ de (3.18). Para que esta expansión acelerada se mantenga lo suficiente en el tiempo necesitamos que $\dot{\phi}$ no cambie mucho durante este periodo inflacionario, o lo que es lo mismo, que $\ddot{\phi}$ sea, también, lo suficientemente pequeña: $|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V_\phi|$ (recuperando la ecuación (3.13)).

Traduciremos esta nueva condición en el tamaño de un *segundo parámetro slow-roll* η :

$$\eta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dN} . \quad (3.21)$$

Que hemos reescrito en términos de $d\varepsilon/dN$ para ver cómo $|\eta| < 1$ asegura que el cambio de ε por e -fold es pequeño.

Pero lo que será realmente interesante es estudiar estas mismas condiciones en términos de parámetros que dependan de la forma de nuestro potencial $V(\phi)$. Al final del día, serán estas formas del potencial las que nos den las distintas teorías inflacionarias que se estudian en la actualidad, tal y como estudiaremos en la sección 5. Por eso, definimos ε_V y η_V de la siguiente manera:

$$\varepsilon_V(\phi) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \quad \text{y} \quad \eta_V(\phi) \equiv \frac{V_{\phi\phi}}{V} . \quad (3.22)$$

Unos nuevos parámetros que puede demostrarse que se conectan con los parámetros slow-roll de Hubble mediante las siguientes relaciones: $\varepsilon \approx \varepsilon_V$ y $\eta \approx \eta_V - \varepsilon_V$. Siempre y cuando nos encontremos en el régimen de slow-roll: $\varepsilon_V, |\eta_V| \ll 1$. De esta manera es equivalente pedir que ε y η sean pequeños a pedir que ε_V y η_V lo sean.

Una vez analizadas las condiciones de slow-roll necesarias para que pueda suceder el periodo inflacionario, es lógico pensar que este termine una vez se alcanza $\varepsilon(\phi_{end}) = 1$ (o $\varepsilon_V(\phi_{end}) \approx 1$).

Pero centrémonos ahora en el régimen de slow-roll. Tomando esta aproximación vemos directamente de (3.17) y de (3.13) respectivamente que:

$$H^2 \approx \frac{1}{3} V(\phi) \approx const. \quad \text{y} \quad \dot{\phi} \approx -\frac{V_\phi}{3H} . \quad (3.23)$$

A esta evolución del campo es a la que llamaremos **evolución de fondo** en el contexto de las perturbaciones cosmológicas. Estas dos expresiones serán cruciales en las siguientes secciones. También supondremos, como ya habíamos visto, que el espacio es aproximadamente de Sitter:

$$a(t) \propto e^{Ht} . \quad (3.24)$$

Una vez hecha una descripción de las condiciones necesarias para que se tenga y se mantenga el periodo inflacionario. Calculemos cuál será la duración mínima explícitamente para explicar los problemas del Big Bang.

Necesitamos que las mayores escalas observadas hoy ($H_0 = \lambda(t_0)$) hayan estado dentro de su horizonte causal al inicio del periodo inflacionario, es decir: $\lambda(t_i) < H_I^{-1}$:

$$\frac{\lambda(t_i)}{a_i} = \frac{H_0^{-1}}{a_0} \Rightarrow \lambda(t_i) \sim H_0^{-1} \left(\frac{a_i}{a_0} \right) = H_0^{-1} \left(\frac{a_f}{a_0} \right) \left(\frac{a_i}{a_f} \right) . \quad (3.25)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la relación entre el factor de escala y la temperatura, y que:

$$\left. \begin{aligned} a(t_i) &\sim e^{H_I t_i} \\ a(t_f) &\sim e^{H_I t_f} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_i}{a_f} = e^{H_I(t_i - t_f)} = e^N \quad (3.26)$$

con $N = \ln(H_I(t_f - t_i))$ el número de e -folds que dura el periodo inflacionario, encontramos que:

$$H_0^{-1} \left(\frac{T_0}{T_f} \right) e^{-N} < H_I^{-1} \quad . \quad (3.27)$$

Aquí vemos la importancia de haber definido estas cantidades con el signo '-' en 3.9 y cómo reflejan que estamos midiendo el tiempo hacia atrás. Por lo que el número mínimo de e -folds que debe durar el periodo inflacionario es:

$$N > \ln \left(\frac{T_0}{H_0} \right) - \ln \left(\frac{T_f}{H_I} \right) \gtrsim 60 \quad , \quad (3.28)$$

con $T_0 = 10^{-4} eV$ y $H_0 = 10^{-42} GeV$ [9].

Veamos ahora una manera de calcular una cota para el valor del campo ϕ_0 durante este periodo. Para hacerlo, partiremos del número de e -folds que acabamos de calcular:

$$N(\phi) \equiv \ln \frac{a_{end}}{a} = \int_t^{t_{end}} H dt = \int_{\phi}^{\phi_{end}} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{V}{V_{\phi}} d\phi \quad . \quad (3.29)$$

Donde hemos utilizado la aproximación slow-roll y las expresiones de (3.23) en el último paso para expresar el número de e -folds en función del potencial. Por otro lado, también podemos expresar esta cantidad en términos de los parámetros slow-roll directamente a través de la definición (3.18):

$$N(\phi) = \int_{\phi}^{\phi_{end}} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\varepsilon}} \approx \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\varepsilon_V}} \quad . \quad (3.30)$$

Una vez deducidas estas expresiones, sabemos que para que se resuelvan los problemas de planitud y horizonte es necesario que la duración del periodo inflacionario sea de al menos 60 e -folds:

$$N_{tot} \equiv \ln \frac{a_{end}}{a_{start}} \gtrsim 60 \quad . \quad (3.31)$$

Pero, en concreto sabemos que precisamente las fluctuaciones que medimos hoy en el CMB debieron ser alrededor de $N_{CMB} \approx 60$ e -folds antes del final del periodo inflacionario. Por tanto, podemos encontrar una expresión del campo en este periodo de tiempo concreto a partir de la siguiente integral:

$$\int_{\phi_{end}}^{\phi_{CMB}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\varepsilon_V}} = N_{CMB} \approx 60 \quad (3.32)$$

Sin embargo, el valor exacto de N depende de la escala de energía de la inflación y de detalles relativos al periodo de *reheating* posterior.

Capítulo 4

Perturbaciones cosmológicas y CMB

Se realiza el tratamiento de las perturbaciones cosmológicas durante el periodo inflacionario que dan lugar a la formación de estructuras a gran escala y anisotropías en el CMB. Se realiza dicho desarrollo hasta definir los llamados espectros de potencias e índices espectrales. A continuación, se describe cómo se conectan estos conceptos con las mediciones del CMB de satélites como Planck.

4.1. Perturbaciones Cosmológicas

En esta sección realizaremos el famoso cálculo de las fluctuaciones primordiales producidas durante el periodo inflacionario siguiendo [10] y [4]. Estas fluctuaciones tienen un origen cuántico que, combinadas con la propia inflación nos dan las semillas necesarias para la creación de toda la estructura en el universo. Es decir, estudiaremos el desarrollo que nos lleva de las fluctuaciones cuánticas hasta calcular los objetivos principales de esta sección que son los espectros de potencias primordiales escalar y tensorial \mathcal{P}_s y \mathcal{P}_t . [6] (que más tarde conectaremos con las observaciones).

Algo importante a tener en cuenta es que tanto las fluctuaciones del campo escalar como las de la métrica están conectadas a través de la ecuación de Klein-Gordon y las ecuaciones de Einstein de manera que es imposible desacoplarlas. Es decir, la existencia de perturbaciones cosmológicas se traduce en un sistema acoplado de perturbaciones del campo escalar, el tensor energía-momento y la métrica, por virtud de las ecuaciones de Einstein y la ecuación perturbada de Klein Gordon, ver figura 4.1.

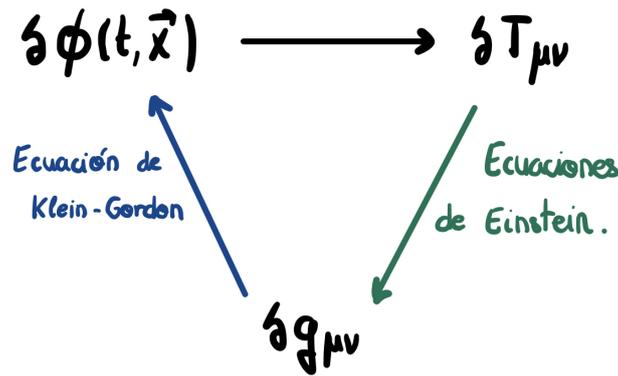


Figura 4.1: Esquema del acoplamiento entre las perturbaciones del inflatón ϕ , el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ y la métrica $g_{\mu\nu}$.

Los pasos que seguiremos serán los siguientes. En la siguiente sección 4.1.1 realizaremos un ejercicio 'académico' en el que estudiaremos qué sucede cuando perturbamos un campo en un espacio-tiempo sin perturbar. Así, conseguiremos predecir cómo se comporta este campo a escalas de subhorizonte y superhorizonte; y derivaremos resultados cruciales para la siguiente sección 4.1.2. Sin embargo, sabemos que el propio espacio-tiempo se ve afectado por la materia que hay en él, por lo que no se trata de una situación real en la naturaleza. Eso es lo que abordaremos en la segunda sección 4.1.2, donde estudiaremos una perturbación general de la métrica, que ya sí será fiel a la realidad y donde usaremos resultados de ese ejercicio 'académico' realizado en la sección 4.1.1.

4.1.1. Perturbando el campo escalar

Estudiemos primeramente qué sucede cuando perturbamos el campo escalar. Hasta ahora, hemos estado considerando un universo homogéneo e isótropo y estudiando el campo como función del tiempo. Ahora, es necesario introducir una perturbación al campo inicial dependiente del espacio que pueda generar la estructura a gran escala del universo. La manera más intuitiva de hacerlo es tomar el campo 'de fondo' (o background) con el que trabajábamos en la sección anterior $\phi(t)$ y añadirle una perturbación que sí depende del espacio:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (4.1)$$

Sin embargo, es crucial mencionar que esta separación que acabamos de definir no es única y depende de la elección de coordenadas (o elección gauge). Hasta ahora hemos estado trabajando en un escenario muy concreto, el de observadores comóvi-

les que veían un universo homogéneo e isótropo; esta situación era tan concreta que nunca tuvimos que preocuparnos por ninguna elección gauge. Sin embargo, es importante tener presente que no existe una elección de coordenadas 'preferida' cuando estudiamos el espacio perturbado y que incluso hay coordenadas pueden dar lugar a perturbaciones 'ficticias'. De momento no haremos ninguna elección gauge y trabajaremos de forma general ya que por ahora solo nos interesa tenerlo en mente mientras vayamos avanzando, aunque sí que será crucial más adelante

Para realizar este análisis será clave trabajar en el espacio de momentos. Utilizaremos el siguiente convenio para las transformadas de Fourier:

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\phi_{\mathbf{k}}(t) \quad . \quad (4.2)$$

Con \mathbf{k} y \mathbf{x} el momento y la distancia comovil respectivamente (notar que hemos realizado un pequeño cambio en la notación con respecto a la sección anterior $\chi \rightarrow \mathbf{x}$). Dado que trabajamos ahora con ϕ_k y gracias a su isotropía tenemos que $\phi_{\vec{k}} = \phi_k$ con $k = |\vec{k}|$.

Vimos cuando estudiamos la ecuación del campo escalar sin perturbar que obtuvimos: $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + V'(\phi) = 0$. Pero, ahora al trabajar en el espacio de momentos, el gradiente no es más que el módulo del momento: $k^2 \leftrightarrow \nabla^2$ y la ecuación de Klein-Gordon para los modos del campo perturbado es

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k + V_{\phi\phi}\delta\phi_k = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Donde hemos tomado la aproximación slow-roll $V_{\phi\phi} \ll H^2$ para cancelar el último término. Recordar que estamos computando las perturbaciones producidas durante el periodo inflacionario y por tanto tiene sentido aplicar esta hipótesis. El desarrollo que haremos a continuación no es exclusivo del inflatón; de hecho, en caso de que estuviéramos trabajando con otro campo escalar, el último término también se cancela si este no tiene masa. Ya que el potencial $V = m\dot{\phi}^2 \Rightarrow V_{\phi\phi} \propto m$ también se anula.

Pasamos ahora a trabajar en términos del tiempo conforme τ y recordamos que durante el periodo inflacionario habíamos deducido que el espacio es (aproximadamente) de Sitter: $a = e^{Ht}$, $H = \text{cte} \dots$ Por tanto:

$$\tau = -\frac{1}{Ha} \quad (\tau < 0) \quad . \quad (4.4)$$

Para resolver ahora la ecuación (4.3) será extremadamente útil definir el siguiente cambio de variable:

$$v_k = a\delta\phi_k \quad , \quad (4.5)$$

de manera que la ecuación (4.3) ¡se reduce a la de un oscilador armónico con frecuencia variable!¹

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_k = 0 \quad . \quad (4.6)$$

Donde el súper-índice prima (') hace referencia a las derivadas respecto al tiempo conforme τ : $v_k' = \frac{dv_k}{d\tau}$

Parece que hemos llegado a esta ecuación con un poco de 'idea feliz' en el cambio de variable (4.5). Realmente, la manera rigurosa de obtenerla es a partir de la acción cuadrática (4.7) para los modos v_k . Además, será importante recordar esta acción en las siguientes subsecciones

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d\vec{x}^3 \left[(v')^2 - (\nabla v)^2 + \frac{a''}{a}v^2 \right] \quad . \quad (4.7)$$

Resolvamos (4.6). Para ello, tomaremos dos límites, el de subhorizonte: $\lambda_{física} = a\lambda \ll H^{-1}$ y el de superhorizonte: $a\lambda \gg H^{-1}$ y luego impondremos una condición de unión (o 'matching condition') entre ambas en $a\lambda = H^{-1}$.

- Subhorizonte: $\lambda_{física} = a\lambda \ll H^{-1}$

Recordando la relación entre k y λ : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y entre la k física y el factor de escala a : $k_{física} = \frac{k}{a}$; se tiene que el límite de subhorizonte es equivalente a:

$$k\tau \gg -1 \quad \Rightarrow \quad k^2 \gg \frac{2}{\tau^2} = \frac{a''}{a} \quad (4.8)$$

Donde, en el último paso se ha utilizado la aproximación de Sitter $aH = \frac{-1}{\tau}$.

De esta manera manera, la expresión (4.6) se reduce a la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia constante

$$v_k'' + k^2v_k = 0 \quad , \quad (4.9)$$

el cual sabemos resolver y normalizar rigurosamente

$$v_k(\tau) = \frac{A_1}{\sqrt{2k}}e^{-ik\tau} + \frac{A_2}{\sqrt{2k}}e^{ik\tau} \quad . \quad (4.10)$$

¹Recordamos que la ecuación de un oscilador armónico es $\ddot{x} + k^2x = 0$.

¿Cómo escogemos ahora las constantes A_1 y A_2 ? Resulta que esta elección no es más que la elección del vacío. Si escogemos este como el estado que minimiza la energía de nuestro sistema obtenemos: $A_1 = 1$ y $A_2 = 0$. Este es el denominado vacío de Bunch-Davis.

Puede comprobarse en [10], que los cambios que pueden resultar de elegir otro vacío son casi despreciables con respecto al de Bunch-Davis, así que no perdemos mucha generalidad haciendo esta elección.

Por lo que la solución en este régimen es la siguiente

$$\lim_{k\tau \gg -1} v_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau} . \quad (4.11)$$

Es decir, los modos v_k **oscilan cuando se encuentran dentro del horizonte** H^{-1} .

- Superhorizon: $\lambda_{física} = a\lambda \gg H^{-1}$

Realizando los mismos cálculos que para el caso anterior se obtiene:

$$k\tau \ll -1 \quad \Rightarrow \quad k^2 \gg \frac{2}{\tau} = \frac{a''}{a} . \quad (4.12)$$

De manera que en este caso la ecuación (4.6) se reduce a

$$v_k'' - \frac{a''}{a} v_k = 0 \Rightarrow \frac{v_k''}{v_k} = \frac{a''}{a} , \quad (4.13)$$

donde vemos que v_k y a son proporcionales:

$$\lim_{k\tau \ll -1} v_k(\tau) = B_k a(\tau) , \quad (4.14)$$

con B_k una constante. Pero si recordamos cómo habíamos definido nuestras v_k : $\delta\phi = v/a$ esto significa que:

$$\lim_{k\tau \ll -1} \delta\phi_k = B_k = cte(!!) . \quad (4.15)$$

Es decir, los modos v_k **no evolucionan cuando se encuentran fuera del horizonte** H^{-1} .

Ahora, para encontrar el valor de B_k impondremos la 'matching condition': $a\lambda = H^{-1}$ en lo que se llama el 'Horizon crossing'.

- Horizon crossing: $k = aH$

Tal y como vimos es equivalente a pedir que $k\tau = -1$ y sustituyendo en cada uno de los límites (4.11) y (4.15):

$$|B_k|a = \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad \Rightarrow \quad |B_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \quad . \quad (4.16)$$

Lo que nos dice que, distintos modos de las perturbaciones se 'congelaran', al cruzar el horizonte, con distintas amplitudes.

En el caso de haber resuelto esta ecuación de manera exacta se hubiera obtenido:

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) \quad , \quad (4.17)$$

después de fijar las constantes de integración para que la solución coincida con Minkowski en el límite de subhorizonte.

Espectro de potencias del campo escalar

El espectro de potencias (\mathcal{P}_χ) de una cantidad genérica χ se define desde el cálculo de su varianza formalmente como:

$$\langle \chi_{k_1}^* \chi_{k_2} \rangle = \delta^{(3)}(k_1 - k_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\chi(k) \quad . \quad (4.18)$$

En el caso del campo escalar en escalas de súper-horizonte tenemos:

$$\lim_{k\eta \ll -1} \langle |\delta\phi_k|^2 \rangle = \frac{H^2}{2k^3} = \frac{k^3}{(2\pi)^2} \mathcal{P}_{\delta\phi}(k) \quad , \quad (4.19)$$

ya que $\delta\phi_k$ se congela en superhorizonte a $|\delta\phi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$. De esta manera, sabemos que el espectro de potencias en estas condiciones es

$$\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \lim_{k\tau \ll -1} \langle |\delta\phi_k|^2 \rangle = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad . \quad (4.20)$$

Otra manera de trabajar con el espectro de potencias es asumiendo que sigue una ley de potencias a través del llamado **índice espectral** n_s :

$$\mathcal{P}(k) = A(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s(k_*) - 1 + \dots} \quad , \quad (4.21)$$

siendo k_* una referencia arbitraria o **pivote de escala**. Por tanto, de manera general aproximando el exponente, puede calcularse el índice espectral

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_\chi}{d \ln k} . \quad (4.22)$$

Es interesante mencionar en este punto el caso en el que $n_s = 1$. Dado 4.22 vemos que el espectro de potencias es independiente de k (y consecuentemente de λ), a este se le denomina un espectro de potencias *plano*; y es precisamente lo que se obtiene en un espacio de Sitter exacto.

Sin embargo, sabemos que nuestro espacio no puede ser idéntico a de Sitter ya que si no el periodo inflacionario se prologaría indefinidamente. Por ello, existen varias maneras de estudiar perturbaciones y espectros de potencias en espacios quasi-de Sitter. Además de lo que veremos a continuación, otra manera es aproximar H como una cantidad *casi* constante: $\dot{H} = \varepsilon H^2$.

4.1.2. Perturbaciones de la métrica

Durante todo este proceso hemos estudiado y estudiaremos las perturbaciones a orden lineal. Esto es así debido a que las inhomogeneidades del CMB que se detectan son del orden de 10^{-5} por lo que un tratamiento de orden lineal es adecuado para dar una descripción general de estas perturbaciones. Sin embargo, habrá ciertos aspectos que perdamos por el camino con esta elección, como las perturbaciones no gaussianas, que son de vital importancia y actualidad en cosmología pero aparecen al realizar un estudio a orden más alto de perturbaciones [4].

Llega el momento de trabajar en el caso verdaderamente físico. Tal y como adelantamos en el inicio de esta sección, lo que hemos hecho hasta ahora no es más que un 'ejercicio académico' que nos será de inmensa utilidad para utilizar en pasos posteriores y que también nos ha dado una buena visión general del problema.

Entonces, trabajaremos con una perturbación general a orden lineal de la métrica FRW:

$$g_{\mu\nu}(t, x) = g_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, x) . \quad (4.23)$$

Haremos un tratamiento clásico de estas perturbaciones, escribiendo el elemento de línea perturbado de la manera más general posible:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + 2\bar{B}_i dx^i + (\delta_{ij} + \bar{h}_{ij})dx^i dx^j] . \quad (4.24)$$

Veamos una idea de por qué es esta: como adelantábamos al inicio de la sección, cuando estudiábamos FRW sin perturbar teníamos elegido un gauge muy concreto para cumplir las condiciones de isotropía y homogeneidad, lo que hacía que nuestra métrica tuviera un único grado de libertad codificado en $a(t)$. Ahora, queremos

trabajar con la métrica perturbada más general posible, por lo que, por simetría $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ tendremos, a priori, un total de $\frac{4 \times 5}{2} = 10^2$ grados de libertad.

En (4.24) hemos elegido estos grados de libertad de una manera bastante intuitiva. Donde Φ es un campo escalar, \bar{B}_i un campo vectorial y \bar{h}_{ij} un campo tensorial. Fijémonos que, si anulamos estos campos recuperamos la métrica FRW, y que cada uno de ellos parametriza cuánto estamos perturbando a la parte temporal, al acoplamiento entre la temporal y la espacial, y a la espacial por sí sola, respectivamente. Después de esta introducción cualitativa, realizaremos las siguientes manipulaciones (puramente matemáticas) que serán cruciales para continuar con el desarrollo.

Primero, como cualquier otro campo vectorial, \bar{B}_i puede descomponerse en una parte longitudinal y otra transversal con divergencia nula:

$$\bar{B}_i = \frac{\partial B}{\partial x^i} + B_i \quad y \quad \partial_i B^i = 0 \quad . \quad (4.25)$$

Es como si toda la información de la divergencia quedara codificada en el primer término. Por otro lado, también podemos descomponer \bar{h}_{ij} de la siguiente manera:

$$\bar{h}_{ij} = -2\psi\delta_{ij} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x^j} + 2\partial_{(i} E_{j)} + h_{ij} \quad . \quad (4.26)$$

Siendo ψ y E escalares, E_i un vector de divergencia nula ($\partial_i E^i = 0$) y h_{ij} con traza y divergencia nula ($\partial_i h^{ij} = 0$ y $h^i_i = 0$).

Una vez hecha esta descomposición, comprobemos que seguimos teniendo el mismo número de grados de libertad y veamos de qué tipo es cada uno.

Escalares: Φ , B , ψ y E . Tenemos 4 grados de libertad a los que hay que sumarle el del propio campo ϕ . El estudio de estos será el centro de la siguiente subsección.

Vectoriales: B_i que aporta $3 - 1 = 2$ por tener divergencia nula y E_i que aporta también $3 - 1 = 2$ por ser la parte transversa de un vector y tener también divergencia nula. Lo que hace un total de 4.

Tensoriales: h_{ij} que tiene $\frac{3 \cdot 4}{2} - 3 - 1 = 2$ por ser simétrico y, como ya vimos, con divergencia y traza nulas respectivamente. Esto hace que nos quedemos con 2 grados de libertad tensoriales en total.

Por lo que, efectivamente, recuperamos los 10 grados de libertad:

²Ya que el número de componentes independientes de una matriz simétrica de dimensión D son $\frac{D \times (D+1)}{2}$.

$$g.d.l = \underbrace{(1 + 1 + 1 + 1)}_{\text{escalares}} + \underbrace{(2 + 2)}_{\text{vectoriales}} + \underbrace{2}_{\text{tensoriales}} = 10 \quad .$$

Esta nueva separación es clave ya que podremos centrar nuestro estudio en función de la naturaleza de estos modos: escalar, vectorial o tensorial. Es lo que se llama una separación SVT, y con ella podemos estudiar su evolución por separado, lo que nos facilita enormemente las cosas.

Una vez hecha esta descomposición, podemos, en primer lugar, descartar los modos vectoriales ya que sabemos que no se originan durante la inflación. Además, las perturbaciones vectoriales están asociadas a un gradiente y por tanto decaen como $\frac{1}{a^2}$ durante este periodo. De esta manera, despreciando los modos vectoriales e introduciendo las descomposiciones (4.26) y (4.25), llegamos a la siguiente expresión para el elemento de línea:

$$ds^2 = a^2 \left\{ -(1 + 2\Phi)d\tau^2 + 2\frac{\partial B}{\partial x^i}d\tau dx^i + \left[(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x^j} + h_{ij} \right] dx^i dx^j \right\} \quad . \quad (4.27)$$

Gracias a la cual, podremos estudiar ahora los modos escalares y tensoriales por separado.

Parte escalar

Tal y como se mencionó antes, sabemos que las transformaciones gauge en relatividad general son los cambios de coordenadas de un marco local de referencia a otro. Por ello, hacer un cambio de coordenadas puede dar lugar a la aparición de perturbaciones 'ficticias'. Por ello, hay que tener especial cuidado a la hora de elegir este gauge, y de hecho, hay varias opciones igual de válidas que nos llevarían a distintas conclusiones.

Llegados a este punto tenemos dos opciones [10]: 1) fijar un gauge y hacer todas las cuentas 'a lo bruto', o 2) buscar cantidades que sean invariantes gauge y hacer nuestro estudio a partir de ahí. En este caso optaremos por la segunda, ya que sabemos que los observables físicos (que, al final del día es lo que buscamos encontrar) deben ser invariantes gauge. Sin embargo, tendremos que tener cuidado ya que el recíproco no es cierto; en principio hay infinitas cantidades que son invariantes gauge y no se relacionan con observables. Cuáles se correspondan con observables y cuales no solo nos lo pueden decir las propias observaciones.

Para buscar estos invariantes gauge escalares vamos a hacer una transformación de gauge general a nuestras coordenadas:

$$\begin{cases} \hat{\tau} = \tau + \xi^0 \\ \hat{x}^i = x^i + \frac{\partial \xi}{\partial x^i} + \zeta^i \end{cases} \quad (4.28)$$

Con ξ^0 y ξ escalares y ζ^i un 3-vector tal que $\partial_j \zeta^i = 0$, que, como solo afectará a las perturbaciones vectoriales que ya hemos descartado, podemos olvidarnos de él. Perturbamos ahora el elemento de línea a orden lineal usando que $\xi^0(\tau, x) = \xi^0(\hat{\tau}, \hat{x})$, $\xi(\tau, x) = \xi(\hat{\tau}, \hat{x})$ y expandiendo también $a(\tau) = a(\hat{\tau}) - \xi^0 a'(\hat{\tau})$.

Después de realizar los cálculos obtenemos una expresión del elemento de línea que debe coincidir en forma con (4.27), pero escrito en términos de $\hat{\Phi}$, \hat{B} , $\hat{\psi}$ y \hat{E} (funciones de \hat{x}^μ). Así, conseguimos deducir cómo cambian nuestros modos escalares bajo una transformación gauge general:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \Phi - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0 \\ \hat{B} &= B - \xi' + \xi^0 \\ \hat{\psi} &= \psi + \mathcal{H}\xi^0 \\ \hat{E} &= E - \xi \end{aligned}$$

Donde se ha definido \mathcal{H} como la constante de Hubble en función del tiempo comóvil:

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} \quad (4.29)$$

Hasta este punto todo ha sido fruto de un razonamiento matemático, es hora entonces de utilizar las herramientas y restricciones que nos da la física. Primero de todo, sabemos que fijar un gauge nos puede quitar 2 de los 4 grados de libertad escalares. Pero además, en ausencia de términos cruzados en la variación del tensor energía-momento, sabemos que se cumple $\delta T_j^i = 0$ para $i \neq j$; lo cual, a través de las ecuaciones de Einstein fija otro de los grados de libertad. Entonces, puede comprobarse que, un gauge compatible es fijar $B = E = 0$, y que esto implica automáticamente $\Phi = \psi$ (consultar [6] o [10] para los detalles). Por lo que nos quedaríamos con un grado de libertad escalar procedente de la métrica más el del propio $\delta\phi$.

Pero, aún no hemos hecho uso de todo el poder que nos dan las ecuaciones de Einstein y es que aún podemos obtener una restricción más, relacionando el grado de libertad de la métrica ψ con $\delta\phi$ (puede entenderse esto como el acoplamiento entre la perturbación de la métrica y la del campo y viceversa), lo que hace que en total tengamos **un único grado de libertad escalar**, que estará directamente relacionado con las anisotropías en la temperatura del CMB. Veremos a continuación que en lugar de expresar uno en función del otro, encontraremos una cantidad gauge

invariante que sea combinación lineal de ambos.

Definición de cantidades invariantes gauge

Estamos ahora en condiciones de definir nuestros invariantes gauge. Para ello partiremos de la curvatura intrínseca del espacio en hipersuperficies constantes:

$${}^{(3)}R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi \quad , \quad (4.30)$$

donde ψ es normalmente definida como la perturbación de curvatura. Y a partir de esta cantidad construimos el siguiente invariante gauge al que llamaremos **perturbación de curvatura comóvil**:

$$\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'} = \psi + H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad . \quad (4.31)$$

Esta cantidad representa la perturbación de la curvatura en secciones de tiempo comóviles: $\mathcal{R}|_{\delta\phi=0} = \psi$. Será donde codifiquemos toda la información de nuestro grado de libertad escalar.

Otra cantidad que puede definirse de manera completamente análoga es la **curvatura en secciones de densidad constante** $\zeta|_{\delta\rho=0} = \psi$:

$$\zeta = \psi + H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} \quad . \quad (4.32)$$

Dadas estas definiciones podemos ver que, en condiciones de slow-roll $\rho' \approx V'$ y usando la ecuación de continuidad, estas dos cantidades coinciden: $\mathcal{R} \approx \zeta$. [10]

Hay dos razones por las que es interesante elegir estas cantidades. La primera, es que las hemos construido para que sean invariantes gauge; por ello, a partir de este punto podemos computar su valor en cualquier gauge que nos sea conveniente y además son buenas candidatas para relacionarse con observables. La segunda, es que ambas se 'congelan' al cruzar el horizonte de Hubble, lo que quiere decir que bastará con computar su valor en el momento en el que cruzan el horizonte y este no cambiará hasta su re-entrada mucho tiempo después una vez terminado el periodo inflacionario. Será de vital importancia a la hora de relacionar estas cantidades con las observaciones ya que podremos ignorar lo que pasa durante todo el periodo de reheating (del que no sabemos tanto como de la inflación).

Veamos que, efectivamente, estas cantidades no evolucionan al cruzar el horizonte. El procedimiento riguroso para probar que $\dot{\xi} = 0$ pasa por usar la conservación del tensor energía-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ del fluido perfecto (ver [4] apéndice A), y

manipularla hasta llegar a la siguiente expresión de $\delta\rho$ con v la 3-velocidad perturbada:

$$\delta\dot{\rho} = -3H(\delta\rho + \delta P) + (\rho + P) \left[3\dot{\Psi} - \nabla^2(\dot{E} + v) \right] . \quad (4.33)$$

Sabemos que el término del Laplaciano es despreciable en las escalas de superhorizonte (que es donde queremos probar nuestra hipótesis $\dot{\xi} = 0$). Llegados a este punto fijamos el gauge de densidad uniforme $\delta\rho = 0$, donde sabemos que $\xi|_{\delta\rho=0} = \psi$. Finalmente, separamos la perturbación de la presión en adiabática y no adiabática:

$$\delta P = c_s^2 \delta\rho + \delta P_{no-ad} \quad \text{con} \quad c_s^2 = \frac{\delta P_{ad}}{\delta\rho} \quad \text{la velocidad del sonido.}$$

De manera que en el gauge de densidad uniforme $\delta\rho = 0$ se obtiene:

$$\dot{\xi} = -\frac{H}{(\rho + P)} \delta P_{no-ad} \quad (4.34)$$

Así, hemos probado que, por cualquier perturbación adiabática (que resultan ser todas las producidas en modelos con un único campo escalar) la perturbación de curvatura ξ ($= \mathcal{R}$) es constante a escalas de superhorizonte.

La acción perturbada

Sabemos que la acción perturbada a primer orden $S^{(1)}$ será cero siempre y cuando $\phi(t)$ y $g_{\mu\nu}$ la extremicen, por lo que para estudiar las perturbaciones tomamos los términos cuadráticos de las perturbaciones lineales $S^{(2)}$.

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = S^{(0)}[g_{\mu\nu}^{(0)}, \phi^{(0)}] + S^{(2)}[\delta g_{\mu\nu}, \delta\phi; g_{\mu\nu}^{(0)}, \phi^{(0)}] . \quad (4.35)$$

Este sumando $S^{(2)}$ nos dará las ecuaciones a orden lineal de las perturbaciones. Probamos antes, que realmente hay un único grado de libertad escalar en el sistema. Esto significa que podemos expresar este término en función de una única variable. Obteniendo -después de un cálculo bastante engorroso- la siguiente expresión:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[(v')^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right] . \quad (4.36)$$

Si recordamos, esta acción tiene exactamente la misma forma que la que obteníamos al perturbar el campo escalar (4.7) con la diferencia de que, ahora, nuestra variable v se define como

$$v = a \left(\delta\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}} \Psi \right) . \quad (4.37)$$

Que claramente está relacionada con \mathcal{R} a través de z :

$$v = a \left(\frac{\phi'}{\mathcal{H}} \right) \mathcal{R} = z\mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad z = a \frac{\phi'}{\mathcal{H}} . \quad (4.38)$$

Por ello, si en este punto tomamos la aproximación de slow roll -en la que la evolución de ϕ y H es despreciable respecto a la evolución exponencial de a - vemos que $\frac{z''}{z} \approx \frac{a''}{a}$, recuperando la expresión para el campo escalar.

Eso significa que podemos usar los resultados obtenidos para $\delta\phi$ a la hora de calcular el espectro de potencias (lo cual nos ahorra bastante cálculo) simplemente escribiendo z en función de v , veámoslo:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{z^2} = \underbrace{\frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{a^2}}_{P_{\delta\phi} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2} \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 = \left(\frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \right) \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2 . \quad (4.39)$$

Por lo que, después de tantos esfuerzos hemos conseguido encontrar una expresión del espectro de potencias $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ en función de parámetros de nuestra teoría inflacionaria y que; además, bastará con evaluar en el momento de cruce de horizonte $k = aH$.

Parte tensorial

Volvemos atrás en nuestro razonamiento, justo después de haber contado el total de grados de libertad efectivos de nuestra teoría. Si recordamos, habíamos obtenido que finalmente se tenía 1 grado de libertad escalar y 2 tensoriales. Si recordamos, estos venían del tensor h_{ij} que codificaba las perturbaciones de la parte escalar de nuestra métrica, por lo que las perturbaciones tensoriales se descomponen de la siguiente manera:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Siendo h_{ij} un tensor con traza y divergencia nula ($h_i^i = 0$ y $\partial_i h^{ij} = 0$). Estos dos grados de libertad son ya invariantes gauge y, como perturbaciones de la parte espacial de la métrica, representan las llamadas **ondas gravitacionales primordiales**. De hecho, estos dos grados de libertad se corresponden con las 2 polarizaciones de dichas ondas.

Como el tensor energía momento es diagonal, estas perturbaciones tensoriales no intervienen en las ecuaciones de movimiento y entonces su acción no es más que la de dos campos sin masa:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_\sigma h_{ij} \partial^\sigma h_{ij} . \quad (4.41)$$

Como sabemos que esos dos grados de libertad corresponden con las polarizaciones, introducimos una nueva variable $v_{ij} = ah_{ij}$ y hacemos una expansión en función de un tensor de polarización:

$$v_{ij} = ah_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda=+,-} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} v_{k,\lambda} \epsilon_{ij}(\mathbf{k}; \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} . \quad (4.42)$$

Así, resulta que $v_{k,\lambda}$ cumple las mismas ecuaciones que las de un campo sin masa perturbado (la del casi-oscilador armónico (4.6)). Y, entonces, podemos calcular su espectro de potencias directamente:

$$\mathcal{P}_T = 2 \times 4 \times \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 . \quad (4.43)$$

Donde el factor 2 viene de las dos polarizaciones y el 4 tiene su origen en el factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la expansión de v_{ij} . Se le llama **espectro de potencias tensorial** y de nuevo será de vital importancia en la conexión con las observaciones.

4.2. Conexión con las observaciones

Durante esta sección descubriremos las cantidades que relacionan nuestros modelos teóricos con lo experimental: n_s , n_r a través de los espectros de potencias $\mathcal{P}_{\mathcal{R}^*}(k)$ y $\mathcal{P}_T(k)$ en condiciones slow-roll, siguiendo [10] y [11]. Una vez obtenidas las expresiones de los índices espectrales aprenderemos a 'leer' el CMB para así relacionar los resultados del satélite Planck con nuestro formalismo teórico.

4.2.1. Índices espectrales n_S y n_T

En la sección 3.2 estudiamos la cota inferior para la duración del periodo inflacionario. Habíamos calculado que, para poder solucionar los problemas de horizonte y planitud, necesitamos que las escalas que están entrando ahora en el horizonte, hubieran salido de él $N_* \sim 60$ e -folds antes de que terminara el periodo inflacionario. Todas las cantidades que refieran a ese momento llevarán el subíndice $*$.

Pero además, hemos dicho que las perturbaciones se congelan al salir del horizonte, por lo que lo que tendremos que calcular será $\mathcal{P}_{\mathcal{R}^*}(k)$. Partimos de (4.39) para llegar a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}^*}(k) = \frac{H^2}{4\pi^2} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \Big|_{k=aH} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^4}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2} \Big|_{k=aH} . \quad (4.44)$$

Usemos ahora las condiciones de slow-roll $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{\varepsilon V}{3}$ y $H^2 = \frac{V}{3}$ (podremos hacerlo ya que estamos calculando esto en plena inflación) y obtenemos

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}^*}(k) = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{\varepsilon} \Big|_{k=aH} = A_S . \quad (4.45)$$

Por otro lado, tal y como introdujimos cuando se dedujo el espectro de potencias del campo escalar, si intentamos escribir $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ como potencias de k lo tendremos parametrizado en función de $n_s - 1$. Esta n_s entonces, cuantifica la dependencia de escala (o dependencia con k) y se denomina **índice espectral**. Recordamos también el caso en el que el espectro de potencias es independiente de la escala, donde $n_s = 1$. Y dado que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ es una cantidad adimensional necesitaremos una amplitud fija k_* o pivote

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_S \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1 + \dots} \Rightarrow \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \propto (n_s - 1) \ln k . \quad (4.46)$$

De manera que el índice espectral se define como

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{-dN} . \quad (4.47)$$

Muchas veces esta definición se utiliza de manera directa, sin justificarse con la expresión anterior. Usando que $-dN = H dt = H \frac{d\phi}{\dot{\phi}}$ y que por condiciones de slow roll $\dot{\phi} = -\frac{V_\phi}{3H}$ y $H^2 = \frac{V}{3}$ se tiene que:

$$n_s - 1 = \frac{\dot{\phi}}{H} \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} = -\frac{V_\phi}{V} \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} = 2\eta - 6\varepsilon . \quad (4.48)$$

Computemos ahora el índice espectral para el caso del espectro de potencias tensorial a partir de (4.43):

$$\mathcal{P}_T(k) = 2 \times 4 \times \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \Big|_{k=aH} = \frac{2V}{3\pi^2} \Big|_{k=aH} = A_t . \quad (4.49)$$

Volvemos a expresarla como serie de potencias, obteniendo

$$\mathcal{P}_t(k) = A_t \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_t + \dots} \Rightarrow \ln \mathcal{P}_T(k) \propto n_t \ln k . \quad (4.50)$$

Por lo que se obtiene directamente que:

$$n_t = \frac{d \ln \mathcal{P}_T(k)}{d \ln k} = -2\varepsilon . \quad (4.51)$$

Será también muy interesante calcular el ratio entre perturbaciones tensoriales y escalares r . Dado que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ puede conectarse con las observaciones y \mathcal{P}_T es proporcional a V , si conseguimos calcular este ratio podremos fijar una escala de energía para el periodo inflacionario ($V^{1/4}$). Sin embargo, aún no se han conseguido medir perturbaciones tensoriales (es decir, ondas gravitacionales) primordiales, por lo que por el momento solo somos capaces de darle una cota superior. Vemos que puede computarse directamente

$$r = \frac{\mathcal{P}_T(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}(k)}} = \frac{\frac{2V}{3\pi^2}}{\frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{\epsilon}} = 16\epsilon = -8n_t \quad . \quad (4.52)$$

Esta expresión también suele llamarse **relación de consistencia** entre el ratio escalar-tensor y n_t . Vemos que todas estas cantidades derivadas de las aproximaciones slow-roll están conectadas con el potencial del campo $V(\phi)$. De manera que las mediciones de las dependencias de escala y las amplitudes de estas perturbaciones cosmológicas nos permitirán dar información acerca de este potencial para el inflatón.

Además, también podemos conectar este ratio con la evolución del campo escalar desde el final del periodo inflacionario (N_{end}) hasta el momento en el que las fluctuaciones del CMB salieron del horizonte (N_*)

$$r = \frac{\mathcal{P}_T(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}(k)}} = \frac{2 \times 4 \times \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}{\frac{1}{8\pi^2} \frac{H^4}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}} = 8 \left(\frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2 = 8 \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 \Rightarrow \Delta\phi = \int_{N_{end}}^{N_{cmb}} dN \left(\frac{r}{8}\right)^{1/2} \quad . \quad (4.53)$$

Esta última expresión es lo que se denomina el *Lyth bound*, a través del cual hemos conseguido darle una cota a r y consecuentemente a ϕ en función de los datos experimentales. Tenemos entonces una relación directa entre r y $\Delta\phi$, lo que nos dice que si tenemos valores 'grandes' del ratio tensor-escalar ($r > 0.01$) estaríamos en modelos del tipo *large-field*, los cuales describiremos en detalle en la siguiente sección.

Finalmente, también podemos computar la dependencia de escala de el propio índice espectral n_s o lo que se suele denominar el *running* del índice espectral:

$$\alpha_s = \frac{d \ln n_s(k)}{d \ln k} = -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 + 2\xi^2 \quad , \quad (4.54)$$

donde hemos definido el parámetro slow-roll a segundo orden ξ como

$$\xi^2 = \frac{V_\phi V_{\phi\phi\phi}}{V^2} \quad . \quad (4.55)$$

4.2.2. Conectando con el CMB

Lo que vamos a hacer en esta sección es relacionar los espectros de potencias escalar y tensorial con las últimas observaciones del CMB obtenidas por el satélite Planck [12].

Anteriormente vimos que las perturbaciones de estas dos cantidades se congelaban al cruzar el horizonte, por lo que necesitaremos tener en cuenta su evolución desde que re-entran hasta el momento de last-scattering. Nuestra misión es encontrar una cantidad que podamos medir Q y relacionarla con los espectros de potencias a través de una función de transferencia entre \mathcal{R} en el momento de salida del horizonte τ_* y Q en el momento de su medida τ . Un esquema muy ilustrativo de todo lo que hemos hecho y vamos a hacer es el siguiente:

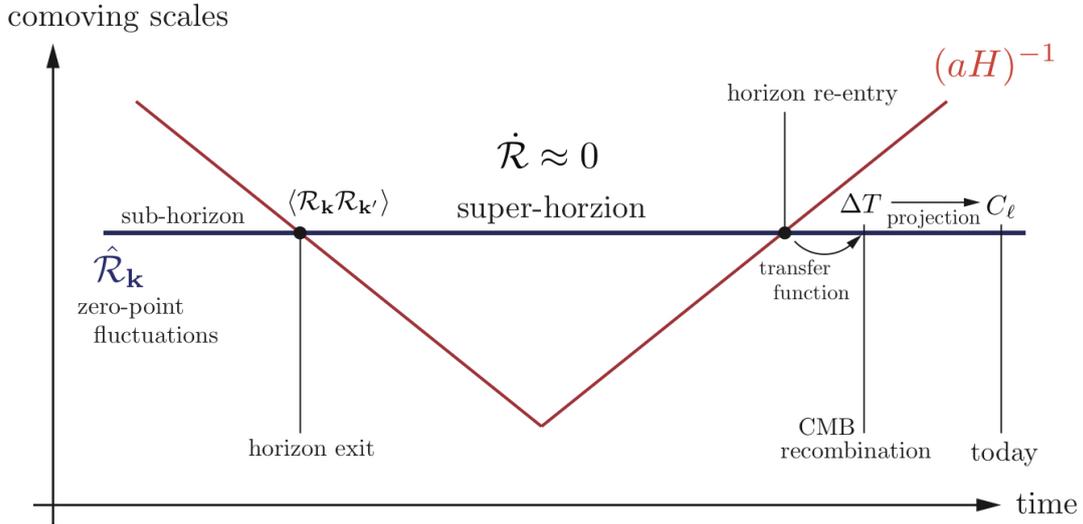


Figura 4.2: Representación del radio de Hubble y las distancias físicas desde el periodo inflacionario hasta hoy. Esta vez se ha añadido la evolución del escalar de fluctuaciones (\mathcal{R}) y las funciones de transferencia (ΔT) necesarias para estudiar la evolución desde la re-entrada en el horizonte hasta el momento de recombinación.

Al estudiar la conexión con los datos del CMB encontraremos restricciones experimentales a los espectros de potencias que ya hemos derivado $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ y \mathcal{P}_h .

Aprenderemos ahora a 'leer' el CMB sin adentrarnos en demasiado detalle. Más información de este procedimiento puede encontrarse en [3].

Queremos medir las fluctuaciones de temperatura $\Delta T(\hat{n})$ en todas las direcciones del espacio, siendo $\hat{n} = (\theta, \phi) \in S^2$ nuestro vector director normalizado perteneciente a la 2-esfera. Entonces, como toda función en S^2 podemos expandirla en sus armónicos esféricos $Y_{l,m}(\hat{n})$ de la siguiente manera

$$\Theta(\hat{n}) = \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} Y_{l,m}(\hat{n}) \quad (4.56)$$

con $l = 0$, $l = 1$ y $l = 2$ correspondientes a monopolos, dipolos y cuadripolos respectivamente. Se llaman momentos multipolares a $a_{l,m}$ y se pueden expresar:

$$a_{l,m} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{n}) \Theta(\hat{n}) \quad . \quad (4.57)$$

Estos también pueden combinarse en el llamado espectro angular de potencias C_l^{TT} invariante bajo rotaciones y que jugará un importante papel en el análisis del CMB:

$$C_l^{TT} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm}^*, a_{lm} \rangle \quad \text{o} \quad \langle a_{lm}^*, a_{l'm'} \rangle = C_l^{TT} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad . \quad (4.58)$$

Este espectro angular de potencias es el que nos describe la información contenida en el CMB y nos permite transformar los millones de píxeles del mapa del CMB (el que normalmente se nos enseña cuando lo estudiamos por primera vez 4.3) en una representación mucho más compacta y manejable (figura 4.4). Los puntos en los que se detecta una menor temperatura corresponden con direcciones con mayor densidad de materia, en las que los fotones perdieron más energía para escapar de su potencial. De manera análoga los puntos con más temperatura se corresponden con regiones menos densas. Esto es lo que se denomina el efecto Sachs-Wolfe.

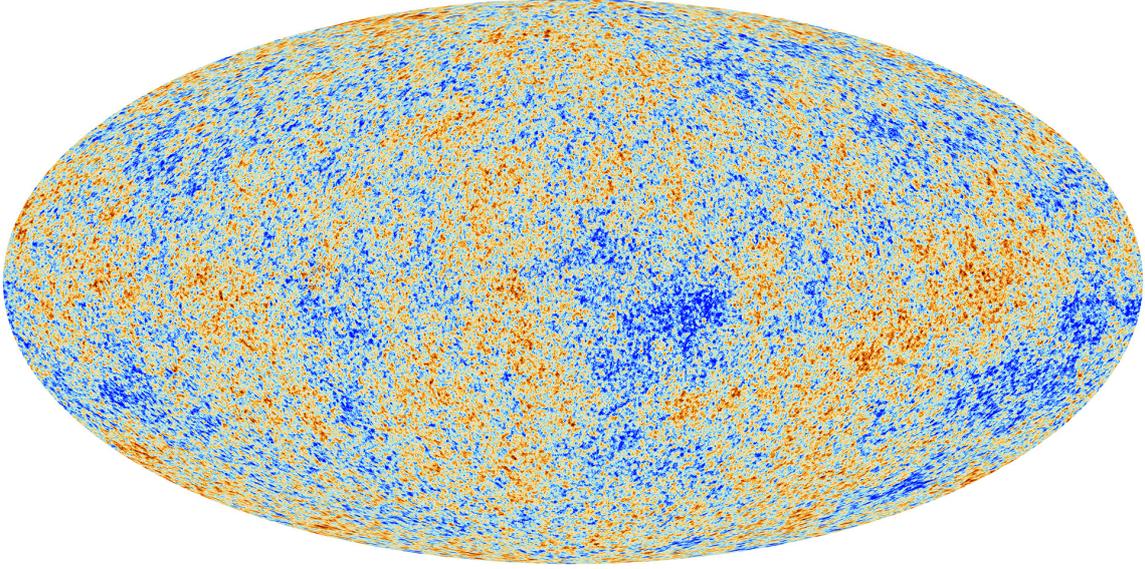


Figura 4.3: Anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas medidas por el experimento Planck en cooperación con ESA. Los puntos más azules corresponden con direcciones en las que se detecta una temperatura inferior a la media $T_0 = 2,7K$ mientras que los puntos rojos provienen de regiones con temperatura por encima de la media. [13]

Para conectar el espectro angular con los espectros de potencias derivados de la teoría en la sección anterior, tendremos en cuenta que el ratio tensor-escalar resultaba ser muy pequeño. Lo que significa que las fluctuaciones de ΔT estarán dominadas por perturbaciones escalares $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$. En estos términos podemos conectar entonces los momentos multipolares a_{lm} con nuestro espectro escalar de potencias a través de una función de transferencia $\Delta_{Tl}(k)$: [3]

$$a_{lm} = 4\pi(-i)^l \int \frac{d^3}{(2\pi)^3} \Delta_{Tl}(k) \mathcal{R}_k Y_{lm}(\hat{k}) \quad , \quad (4.59)$$

y usando la identidad

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{k}') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{k}, \hat{k}') \quad (4.60)$$

encontramos la relación definitiva entre nuestro espectro de potencias $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ y el espectro angular relacionado con las observaciones y las anisotropías de temperatura C_l^{TT}

$$C_l^{TT} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk \underbrace{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}_{\text{Inflacion}} \underbrace{\Delta_{Tl}(k) \Delta_{Tl}(k)}_{\text{Anisotropias}} \quad . \quad (4.61)$$

Por desgracia, las funciones de transferencia $\Delta_{Tl}(k)$ hay que computarlas numéricamente. Lo bueno es que estas funciones dependen de los parámetros de la cosmología de fondo y de las condiciones iniciales de las fluctuaciones escalares descritas por nuestro espectro de potencias $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$. Entonces, esto significa que mediante la expresión (4.61) hemos llegado a conectar lo teórico con lo experimental a través de las funciones de transferencia.

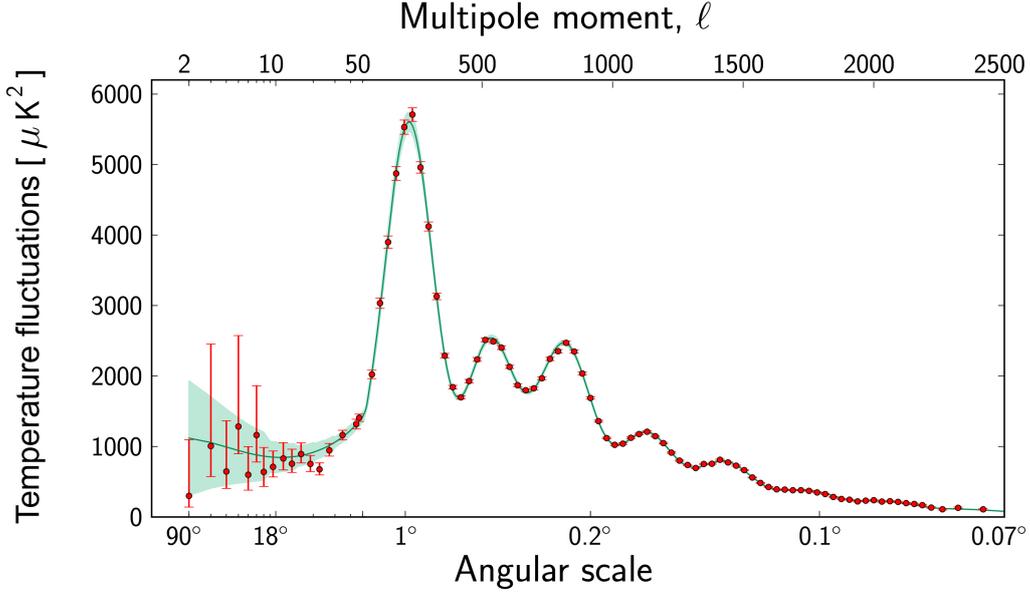


Figura 4.4: Espectro de potencias del CMB medido por la colaboración Planck y ESA [14]. Estando la temperatura en el eje Y medida en función de $C_l = \frac{l(l+1)C_l^{TT}}{2\pi} [\mu K^2]$.

Es necesario hacer un comentario acerca de lo que pasa a grandes escalas. Con 'grandes escalas' nos referimos a los puntos que están separados distancias aproximadamente mayores a los 10 grados. Estos puntos se caracterizan porque sus modos estaban aún fuera del horizonte en el momento del last-scattering por lo que no evolucionaron hasta entonces. Por tanto, estos valores serán simplemente la proyección de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ hasta ahora.

Estamos entonces en condiciones de presentar los datos medidos por el último experimento Planck 2018. La mayoría de cantidades primordiales se han evaluado tomando el siguiente valor de pivote de escala: $k_* = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ exceptuando el ratio tensor-escalar que se calcula a $k_* = 0.002 \text{Mpc}^{-1}$ [12]:

- $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$ con un nivel de confianza del 68 %.

- $r_{0.002} < 0.10$ con nivel de confianza del 95 % , pero han conseguido restringirlo aún más utilizando los datos del BICEP2/Keck Array BK15, obteniendo una cota superior de: $r_{0.002} < 0.056$.
- A consecuencia de este resultado y dada la relación 4.52 entre r y ε también podemos dar una cota a este valor: $\varepsilon \lesssim 0.0035$.
- Además, como $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx 21 \cdot 10^{-10} \Rightarrow \frac{V}{\varepsilon} \approx 5 \cdot 10^{-7}$. También podemos darle una cota a la energía del periodo inflacionario: $V^{1/4} \lesssim 0.065$. Multiplicando por la masa de Plank se obtiene: $V^{1/4} \lesssim 1.4 \cdot 10^{17}$ GeV, muy alejado de las energías máximas que se pueden conseguir en los aceleradores de partículas actuales.
- $\frac{dn_s}{d \ln k} = -0.0045 \pm 0.0067$ con un nivel de confianza del 67 %.

Observamos que estos resultados concuerdan con las reflexiones que hemos estado haciendo durante estas últimas secciones. Se obtiene un índice espectral muy cercano a 1 lo que implica que hay muy poca dependencia de escala en las fluctuaciones escalares. Siguen sin medirse ondas gravitacionales primordiales por lo que, en efecto, las perturbaciones escalares dominan sobre las tensoriales haciendo válida la expresión (4.59). El *running*, del índice espectral es también muy cercano a cero lo que está en concordancia con la relación directa entre estas cantidades y los parámetros de slow-roll. Además, en este mismo análisis [12] se ha estudiado que los modelos de single-field slow-roll con un potencial cóncavo $V''(\phi) < 0$ se ven especialmente favorecidos por estos datos.

Capítulo 5

Modelos Inflacionarios

Hasta ahora hemos estado trabajando en términos de una teoría inflacionaria genérica con un solo campo escalar, a la que le hemos impuesto unas condiciones de slow-roll muy concretas para que resuelva los problemas del Big Bang. Ahora, es el momento de presentar modelos reales que sean compatibles con la teoría que hemos desarrollado hasta el momento, además de con las observaciones.

En este capítulo nos centraremos en modelos con un único campo escalar, igual que la teoría que llevamos desarrollando durante todo el trabajo, de manera que podremos hacer uso de todos los resultados y relaciones presentadas hasta el momento. Así, explicaremos la clasificación que suele hacerse dentro de los modelos de un sólo campo para después presentar alguno de los más utilizados y conocidos. Durante el desarrollo del capítulo se ha seguido mayoritariamente [11].

5.1. Single-Field Slow-Roll Inflation

Estos son los modelos con los que hemos desarrollado toda la teoría de inflación durante el trabajo. Así que ya nos hemos dado cuenta de la importancia que tiene la forma de nuestro potencial a la hora de justificar y probar nuestra teoría. Sabemos que son las características concretas de este potencial lo que determina la evolución del inflatón desde el **momento que se crearon** las fluctuaciones del CMB (ϕ_{CMB}) hasta el final de periodo inflacionario (ϕ_{final}). Existe de hecho, una clasificación en función de si este potencial permite al inflatón evolucionar 'mucho' o 'poco' en este periodo de tiempo: $\Delta\phi = \phi_{CMB} - \phi_{end}$, en términos de unidades de Planck. Se suelen denominar, respectivamente: modelos *small-field* ($\Delta\phi \ll M_{Pl}$) y modelos *large-field* ($\Delta\phi \gg M_{Pl}$), aunque también existen los modelos híbridos sobre los que haremos una breve mención.

A continuación, presentaremos en detalle las características generales de los

tipos de modelos *small field*, *large-field* e híbridos, además de un ejemplo representativo de cada uno de ellos.

5.1.1. Modelos Small-field

El periodo inflacionario en estos modelos ocurriría mientras que el campo se encuentra en un punto de equilibrio inestable, y evoluciona hacia un mínimo. Una de sus características es que predice una amplitud de las ondas gravitacionales demasiado pequeña para ser medida. Estos potenciales surgen de mecanismos llamados: rupturas de simetría espontánea. En la figura 5.1 vemos un ejemplo esquemático tanto de este tipo de potenciales como de la idea del slow-roll:

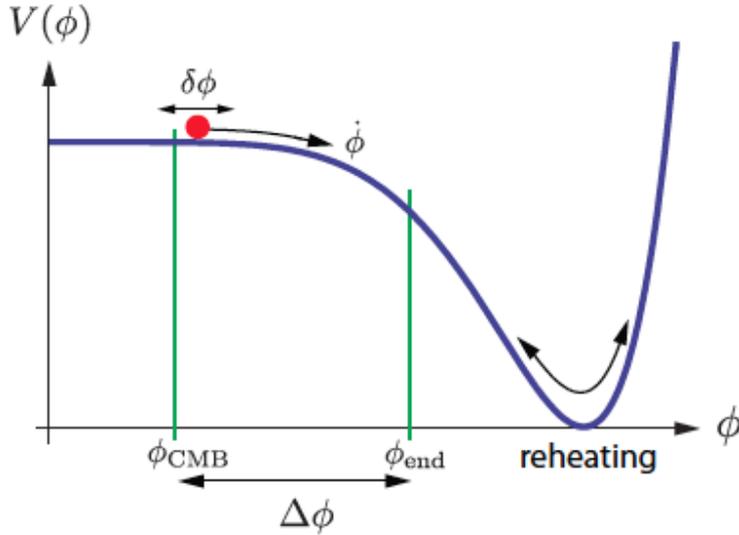


Figura 5.1: Ejemplo de un potencial inflacionario en el que la evolución del campo desde la creación de las fluctuaciones del CMB hasta el final de la inflación $\Delta\phi = \phi_{CMB} - \phi_{final}$ es pequeña con respecto a la masa de Planck.[6]

La versión más general de este tipo de potenciales recibe el nombre de **Hilltop potentials**

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right]^2, \quad (5.1)$$

donde Λ y μ son constantes con unidades de masa. Estas constantes son restricciones del CMB procedentes de un mecanismo de normalización desarrollado tras el experimento COBE llamado *normalización COBE* que permite normalizar fluctuaciones a orden lineal de las mayores escalas observables (para más información consultar [15]). Esta normalización fija el valor de Λ , mientras que μ sirve de cota para el

campo durante el periodo inflacionario; es necesario que $0 < \phi < \mu$ para que pueda haber inflación. En este caso nos centraremos en modelos que cumplan: $\phi/\mu \ll 1$ por lo que podemos aproximar el potencial

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 - 2 \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right] + \dots \quad (5.2)$$

Donde los términos a mayor orden codificarían lo que sucede al final de la inflación y durante el periodo de reheating. Los resultados para $p = 2$ son algo diferentes así que procedamos primero al estudio de los modelos $p \neq 2$. Calculamos el número de e -folds

$$N \approx \frac{\mu^2}{2p(p-2)} \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^{2-p} \quad (5.3)$$

A partir del cual pueden calcularse expresiones para los parámetros observacionales deducidos en la sección anterior (ignorando términos a orden más alto en $1/N$)

$$n_s \approx 1 - \frac{2(p-1)}{(p-2)N}, \quad r \approx \frac{32p^2}{\mu^2} \left[\frac{2p(p-2)}{\mu^2} N \right]^{\frac{2p-2}{2-p}}, \quad \alpha_s \approx -\frac{2(p-1)}{(p-2)N^2} \quad (5.4)$$

Por otro lado, en el caso particular en el que $p = 2$ se tiene que el número de e -folds es:

$$N \approx -\frac{\mu^2}{4} \ln \left(\frac{\phi}{\phi_{final}} \right) \quad (5.5)$$

En este caso, las expresiones a menor orden para n_s , r y α_s son:

$$n_s \approx 1 - \frac{8}{\mu^2}, \quad r \approx \frac{256}{\mu^2} \left(\frac{\phi_{final}}{\mu} \right)^2 e^{\left(-\frac{8N}{\mu^2}\right)}, \quad \alpha_s \approx -\frac{1024}{\mu^4} \left(\frac{\phi_{final}}{\mu} \right)^2 e^{\left(-\frac{8N}{\mu^2}\right)} \quad (5.6)$$

Notar que n_s no depende del número de e -folds N .

Anecdóticamente comentaremos que un modelos con relevancia históricamente: el modelo de *Coleman-Weinberg* cuyo potencial viene dado por

$$V(\phi) = V_0 \left[\left(\frac{\phi}{\mu} \right)^4 \left(\ln \left(\frac{\phi}{\mu} \right) - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right] \quad (5.7)$$

Aunque este resulta ser incompatible con la pequeña amplitud de las fluctuaciones durante el periodo de inflación, sigue siendo popular a nivel fenomenológico.

5.1.2. Modelos Large-Field

En esta segunda categoría se engloban los modelos en los que $\Delta\phi \gg M_{PL}$, en los cuales el campo suele avanzar hacia un mínimo en el origen $\phi = 0$. En este caso, las ondas gravitacionales sí que son lo suficientemente grandes como para ser detectadas y deberíamos poder observarlas en un futuro cercano.

El modelo canónico de este tipo de inflación es denominado **inflación caótica** (o chaotic inflation) y se caracteriza por tener un potencial dominado por un único monomio:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \phi^p \quad . \quad (5.8)$$

Donde, de nuevo Λ se fija a través de la normalización COBE, de manera que este tipo de modelos quedan completamente especificados por un único parámetro sin dimensión $p \in \mathbb{R}^+$.

Constituye un tipo muy importante de modelos inflacionarios, en los que los parámetros slow-roll son lo suficientemente pequeños cuando el campo toma valores superiores a la masa de Planck. De nuevo, un ejemplo esquemático de este tipo de modelos es:

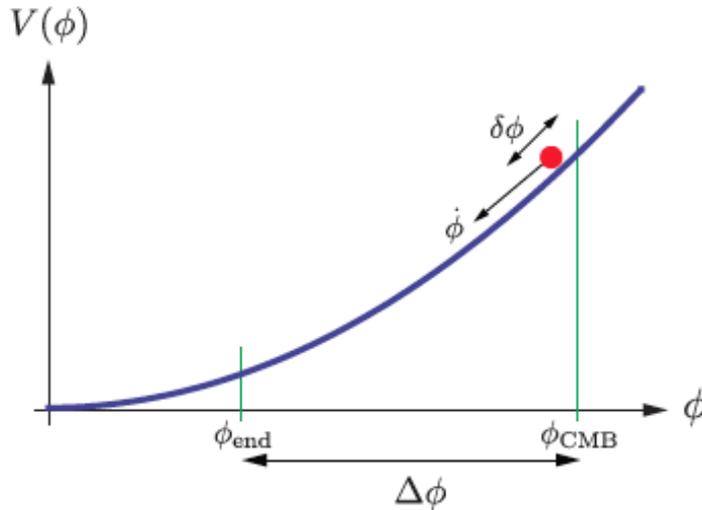


Figura 5.2: Ejemplo de un modelo inflacionario en el que el campo evoluciona $\Delta\phi \gg M_{Pl}$ denominado chaotic inflation: $V(\phi) \propto \phi^p$. [6]

Estudiemos ahora las predicciones de este tipo de modelos, introducidos por primera vez por Linde en [16]. El número de e -folds en función de p es:

$$N(\phi) \approx \frac{\phi^2}{2p} \quad (5.9)$$

Mientras que las predicciones de los parámetros observacionales:

$$n_s = 1 - \frac{p+2}{2N}, \quad r = \frac{4p}{N} \quad \text{y} \quad \alpha_s = -\frac{p+2}{2N^2}. \quad (5.10)$$

5.1.3. Inflación híbrida

Además, también existe la llamada inflación híbrida desarrollada también por Andrei Linde [16]. Estos modelos surgen normalmente de teorías con varios campos escalares en los que todos ellos están 'congelados' excepto uno. Un ejemplo típico es el modelo con dos campos ϕ y χ cuyo potencial tiene la forma de una silla de montar (ver figura 5.3). Así, mientras un campo (ϕ) avanza durante el periodo inflacionario el otro (χ) permanece casi constante. Es cuando este último se desplaza y 'cae por la silla' cuando termina el periodo inflacionario.

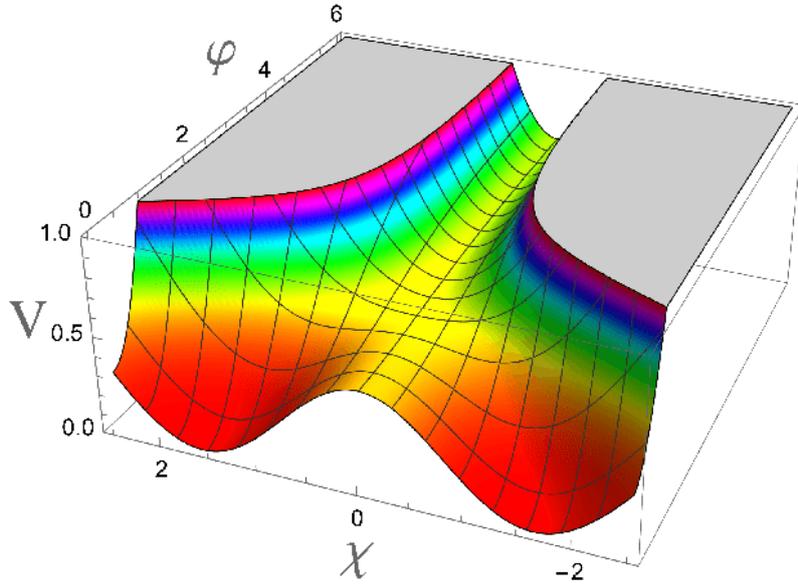


Figura 5.3: Representación del potencial híbrido con forma de silla de montar. Inflación tiene lugar cuando los campos se encuentran en la región tubular. Mientras que esta termina cuando, según avanza ϕ terminan precipitándose por alguna de las dos zonas rojas a lo largo de la dirección X . [17]

De hecho, este tipo de modelos también explican las no-gaussianidades que mencionábamos antes. Mientras ϕ avanza durante el periodo inflacionario, χ fluctúa entorno al mínimo creando estas pequeñas inhomogeneidades.

5.1.4. Algunos modelos relevantes

Además de los mencionados como ejemplo en los casos anteriores, existen varios modelos especialmente relevantes.

Natural Inflation.

Uno de los considerados como más elegantes es el denominado **natural inflation**:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[\cos \left(\frac{\phi}{f} + 1 \right) \right] . \quad (5.11)$$

Surge de tratar al inflatón como un axión y, dependiendo del parámetro f , el modelo puede ser del tipo *large-field* o *small-field*. De nuevo, el parámetro Λ se fija por normalización COBE.

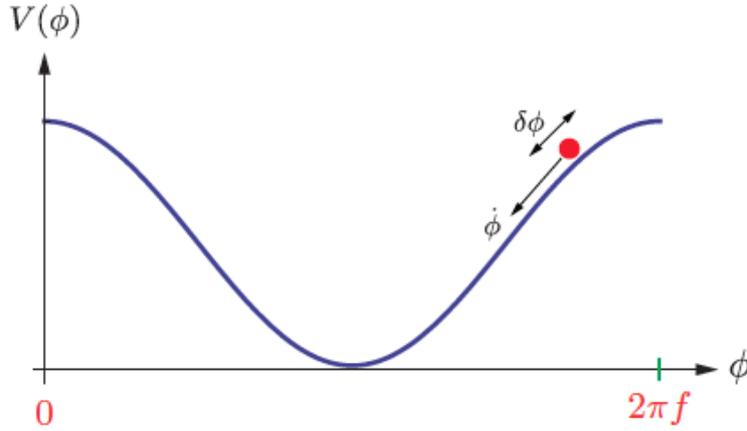


Figura 5.4: Forma del potencial del tipo *natural inflation*.

El número de e -folds puede expresarse como:

$$N \approx -2f^2 \ln \left[\sin \left(\frac{\phi}{2f} \right) \right] . \quad (5.12)$$

Para este modelo concreto también podemos encontrar expresiones para el primer y segundo parámetro slow-roll:

$$\varepsilon_V \approx \frac{1}{2f^2} \left[e^{\frac{N}{f^2}} - 1 \right]^{-1} \quad \text{v} \quad \eta_V \approx -\frac{1}{2f^2} \frac{e^{\frac{N}{f^2}} - 2}{e^{\frac{N}{f^2}} - 1} . \quad (5.13)$$

Entonces encontramos las siguientes expresiones para n_s y r :

$$n_s \approx 1 - \frac{1}{f^2} \frac{e^{\frac{N}{f^2}} + 1}{e^{\frac{N}{f^2}} - 1} , \quad r \approx \frac{8}{f^2} \left[e^{\frac{N}{f^2}} - 1 \right]^{-1} \quad (2.4.26) \quad (5.14)$$

Llegados a este punto es especialmente interesante diferenciar las expresiones en dos límites:

- $N/f^2 \gg 1$:

$$n_s = 1 - \frac{1}{f^2} \quad r = \frac{8}{f^2} e^{-\frac{N}{f^2}} \quad (5.15)$$

De manera que, con una redefinición del parámetro f podemos hacer coincidir estas expresiones con las de los modelos Hilltop con $p = 2$, es decir, obtenemos un modelo del tipo *small-field*.

- $N/f^2 \ll 1$:

$$n_s \approx 1 - \frac{2}{N} \quad r \approx \frac{8}{N} \quad (5.16)$$

Que coinciden con las expresiones del chaotic model para $p = 2$ (del tipo *large-field*).

Ahora vemos por qué este modelo se considera tan elegante, ya que, dependiendo del valor del parámetro f en comparación con el número de e -folds N podemos recuperar resultados tanto de modelos del tipo *large-field* como *small-field*.

Plateau-like Potentials.

Este tipo de potenciales surgen después de haber definido modelos inflacionarios en el contexto de la teoría de cuerdas en altas energías, cuyo potencial es

$$V(\phi) = \Lambda^4 [1 - e^{-\gamma\phi}]^2 \quad . \quad (5.17)$$

El número de e -folds será

$$N \approx \frac{e^{\gamma\phi}}{2\gamma^2} \quad , \quad (5.18)$$

y por tanto las expresiones para nuestros parámetros observacionales

$$n_s = 1 - \frac{2}{N} \quad , \quad r = \frac{8}{\gamma^2 N^2} \quad \text{y} \quad \alpha_s = -\frac{2}{N^2} \quad (5.19)$$

Estos modelos son de especial importancia ya que en la siguiente sección estudiaremos teorías alternativas a los modelos de un solo campo y veremos que algunos de los que más concuerdan con las observaciones son: el modelo $f(R)$ de Starobinsky y la inflación de Higgs. Sin embargo, ambos pueden manipularse hasta reducirlos a modelos de un solo campo con potenciales de la forma Plateau-like que acabamos

de describir.

Power Law Inflation

Terminemos esta sección con un tipo de modelos muy diferentes. Fueron introducidos por primera vez por Lucchin y Matarrese [18] y su potencial es:

$$V(\phi) = \Lambda^4 e^{-\lambda\phi} \quad . \quad (5.20)$$

Donde, una vez más, el valor de Λ se fija a través de la normalización COBE y λ es un parámetro sin dimensiones. La diferencia con respecto al resto de modelos es que en este caso la evolución del factor de escala $a(t)$ no es exponencial, sino que predice una expansión acelerada con la siguiente dependencia: $a(t) \propto t^{2/\lambda^2}$.

Otra particularidad es que los parámetros observacionales no dependen de N , sino únicamente del parámetro λ :

$$n_s = 1 - \lambda^2 \quad , \quad r = 8\lambda^2 \quad , \quad \alpha_s = 0 \quad . \quad (5.21)$$

Este modelo es especialmente interesante ya que con este potencial podemos encontrar soluciones a las ecuaciones de Friedmann sin necesidad de imponer condiciones slow-roll. Aunque esto tiene también su contrapartida, ya que implicaría que no habría un final natural de la expansión, por lo que se necesitaría un mecanismo de salida.

Capítulo 6

Preguntas abiertas y teorías alternativas

Tras presentar los modelos más interesantes y acordes con las observaciones de un sólo campo, es momento de hablar de alguno de los problemas abiertos a día de hoy, que son precisamente donde esos modelos (presentados sobre los años 80) se quedan sin respuestas o justificaciones.

Entonces, cerraremos esta memoria introduciendo, muy brevemente, tres de estos problemas aún sin solución para después presentar algunas de las líneas de investigación más recientes que intentan resolverlos. Estas nuevas teorías están, en su mayoría, formuladas desde la física teórica de altas energías como las teorías de cuerdas o súper gravedad, por lo que nuestro acercamiento a las mismas no será muy detallado. En su lugar, nos limitaremos a dar algunas pinceladas acerca de estos modelos para entender su motivación explicándolos de forma cualitativa.

6.1. Problemas abiertos

Uno de los temas que aún no hemos tratado es el origen y naturaleza del campo escalar que produce la inflación. Hay quien podría pensar (al igual que hizo Alan Guth) que un candidato perfecto para asumir este papel es el único campo escalar que hemos detectado hasta el momento: el campo de Higgs. Sin embargo, si introducimos este campo en la teoría, resulta tener una masa demasiado pequeña para que pueda ocurrir el periodo inflacionario. Una de las interpretaciones que se le puede dar al inflatón es a través de modelos con más dimensiones, cuya información puede codificarse, precisamente, en un campo escalar como veremos en la siguiente sección.

Otro de los grandes problemas tiene que ver con cómo se explica que el inflatón

se sitúe exactamente en la zona de *slow-roll* del potencial. En general, muchos de los potenciales que estamos postulando pueden tener valores más elevados antes del periodo inflacionario como se muestra en la figura 6.1. Eso implicaría que, en condiciones generales, el campo puede llegar a la sección de *slow-roll* con una derivada $\dot{\phi}$ demasiado alta, que haría que no se mantuviera en este periodo el tiempo suficiente. Se trata por tanto, de un problema de condiciones iniciales al que se suele denominar *overshooting*.

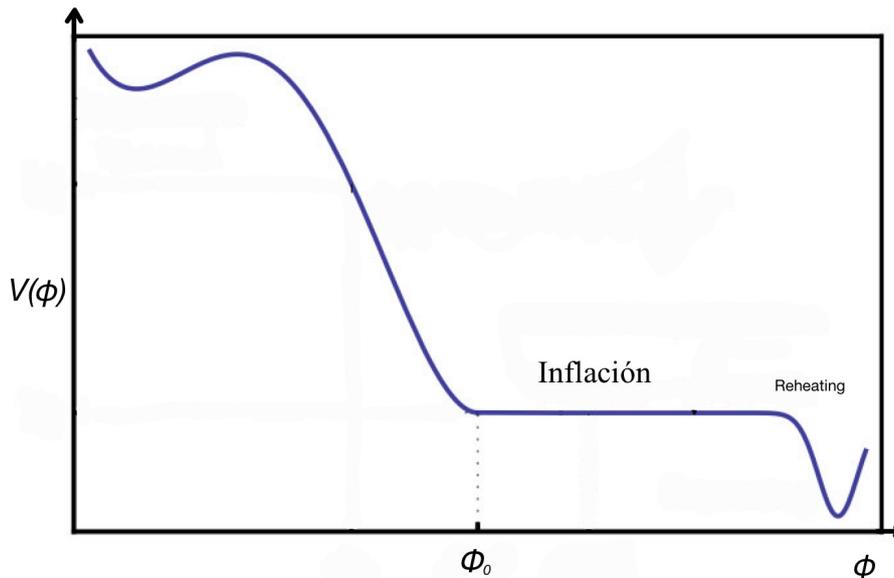


Figura 6.1: Esquema de un potencial que muestra el problema de overshooting. A priori, el campo antes de inflación podía haber tenido valores menores que ϕ_0 haciendo que llegara a la zona de *slow-roll* con demasiada 'inercia' y que el periodo de inflación no hubiese durado lo suficiente.

Finalmente, presentamos el η -problem. Este aparece al considerar que el periodo inflacionario tiene lugar a altas energías, lo cual no parece nada descabellado teniendo en cuenta que sucedió 10^{-33} s después del Big Bang. Recordamos además, que en la sección 4.2 presentamos una cota superior para el periodo inflacionario lo suficientemente elevada como para que se pueda trabajar en estos regímenes. Uno de los efectos derivados de esta suposición es el que sufre el potencial mediante las correcciones radiativas:

$$V = V_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \phi^n \right). \quad (6.1)$$

El problema de estas correcciones es que las constantes que acompañan al campo son del orden $c_n \propto \frac{1}{M_{Pl}^n}$. Esto supone que, a bajas energías son contribuciones

despreciables, mientras que a altas energías llegan a provocar que el parámetro $\eta > 1$ rompiendo las condiciones de slow-roll y por ende, imposibilitando un periodo inflacionario.

Dos posibles soluciones para este problema son: (1) imponer una serie de simetrías de invariancia bajo traslaciones del campo $\phi \rightarrow \phi + 2\pi f$ (que pueden venir de simetrías en teorías de cuerdas); de esta manera las correcciones radiativas serían incompatibles con las simetrías. (2) Considerar teorías del tipo small-field en las que el valor del campo es tan sumamente pequeño que esas contribuciones se hacen despreciables.

6.2. Teorías alternativas

En esta sección comentaremos algunas de las líneas más recientes de investigación, que vienen de reconsiderar algunas de las asunciones hechas hasta el momento y dar más libertad en cuanto a la posible forma de la acción. Entre ellas se encuentran: el estudio de teorías con más de un campo, términos cinéticos no canónicos, acoplo entre la gravedad y el campo no triviales y gravedad modificada.

- **Más de un campo:**

Hasta ahora habíamos estado asumiendo que el inflatón dominaba sobre el resto de posibles campos que pudieran existir en la teoría y que la interacción entre ellos era despreciable. Sin embargo, no hay razón aparente para realizar esta suposición. Algunos de los (numerosos) posibles modelos pueden revisarse en [19].

Uno de los ejemplos más conocidos es el mencionado anteriormente en la sección de inflación híbrida. Extendámonos un poco más en las características del modelo de dos campos ϕ y χ con un potencial

$$V(\phi, \chi) = \frac{(M^2 - \lambda\chi^2)^2}{4\lambda} + \frac{m^2\phi^2}{2} + \frac{g^2}{2}\phi^2\chi^2 \quad (6.2)$$

con forma de silla de montar. Aquí, λ es una constante de acoplo, M el término de masa para χ , m el término de masa para ϕ y g la constante de acoplo que parametriza la importancia de las interacciones entre ϕ y χ .

Una de sus principales características es que en el régimen $\phi > M/g$ -que se correspondería en la figura 5.3 con la región con forma de 'canalón' en la que se produce inflación- el único mínimo de potencial se encuentra en $\chi = 0$ donde el valor de este campo se estabiliza. Mientras que, si $\phi < M/g$, entonces el

punto $\chi = 0$ se convierte en un punto de equilibrio inestable y este campo comienza a evolucionar hacia un mínimo real, haciendo que $\dot{\chi}$ crezca mucho y se rompan las condiciones de slow-roll, terminando la inflación. Este proceso es el que habíamos descrito de manera cualitativa en la sección 5.1.3.

Este modelo es especialmente interesante por su interpretación en el contexto de la física de partículas y por su conexión natural con teorías de supergravedad.

■ **Términos cinéticos no canónicos:**

Este tipo de modelos surgen al trabajar en el contexto de teorías más allá del modelo estándar, como la teoría de cuerdas y supergravedad. En general, se trata de modificar la acción y expresar el término cinético de la siguiente manera:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} R + p(\phi, X) \right) . \quad (6.3)$$

Donde X es el término cinético usual $X = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ y $p(\phi, X)$ es una función del campo y sus derivadas. Hasta ahora el periodo inflacionario solo podía tener lugar en presencia de potenciales extremadamente planos; sin embargo, con este nuevo modelo sería posible obtener teorías inflacionarias en presencia de un potencial sin esa condición de planitud.

Dos de los ejemplos más conocidos de este tipo son el modelo de Dirac-Born-Infeld (DBI) propuesto por Eva Silverstein y David Tong [20] y el modelo denominado Tachyonic inflation [21] propuesto por Gibbons.

■ **Acoplo a la gravedad no-minimal:**

Uno de los procedimientos más comunes en este tipo de modelos es embeberlos en *scalar-tensor theories*. En este contexto destaca el caso del Higgs inflation en el que el papel del inflatón es llevado a cabo por el campo de Higgs del modelo estándar y tiene un acoplo entre el término cinético y la gravedad no-minimal. En general, este tipo de teorías surgen por correcciones en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos.

Además, en este tipo de modelos suelen surgir potenciales extremadamente planos; de manera que ofrecen un mecanismo muy natural de obtener este tipo de potenciales y predecir valores de n_s y r que estén en concordancia con las observaciones del CMB.

En particular, el modelo de Higgs se corresponde, además, con un *chaotic model* del tipo $V(\phi) = \lambda\phi^4$ con un acoplo no-mínimo: $\xi\phi^2 R/2$ entre el inflatón y la gravedad. Resulta además que las predicciones para n_s y r están en absoluta consonancia con las restricciones del CMB medidas por Planck.

■ **Gravedad Modificada:**

Se basa en la asunción de que la Relatividad General no es una teoría completa para estudiar gravedad y que debería tener ciertas modificaciones a altas energías. El ejemplo más conocido de este tipo de teorías son los llamados modelos $f(R)$ en los que la gravedad viene descrita por la siguiente acción:

$$\mathcal{S}_G = \int dt d^3x \sqrt{|g|} \frac{f(R)}{2} , \quad (6.4)$$

donde $f(R)$ es una función general del escalar de Ricci. Estas teorías también son conocidas por su aplicación en el estudio de alternativas para la constante cosmológica con el objetivo de explicar la energía oscura.

Uno de los modelos más conocidos es el modelo de Starobinsky [22] en el que se postula:

$$f(R) = R + \alpha R^2 \quad (\alpha > 0) . \quad (6.5)$$

En realidad este modelo fue propuesto inicialmente para discutir las condiciones que dan lugar a la existencia de una singularidad primordial aunque ha resultado tener muchas implicaciones en otras teorías, en concreto, como modelo inflacionario. Se sabe que, debido al término a segundo orden, estos modelos pueden dar lugar a una expansión acelerada compatible con la descrita por la teoría inflacionaria. De hecho, se puede demostrar con unas cuantas manipulaciones, que el modelo de Starobinsky puede reformularse y escribirse como un modelo compatible con la relatividad general de Einstein y un solo campo escalar y potencial del tipo *plateau* (5.17). Pero es que, además, una vez contrastadas sus predicciones con las observaciones, resulta ser el modelo que más concuerda con los datos procedentes del CMB, tal y como podemos comprobar en 6.2.

Una vez hemos descrito los modelos más relevantes hasta el momento, veamos cómo concuerdan con los resultados del satélite Planck de 2018 a través del siguiente gráfico.

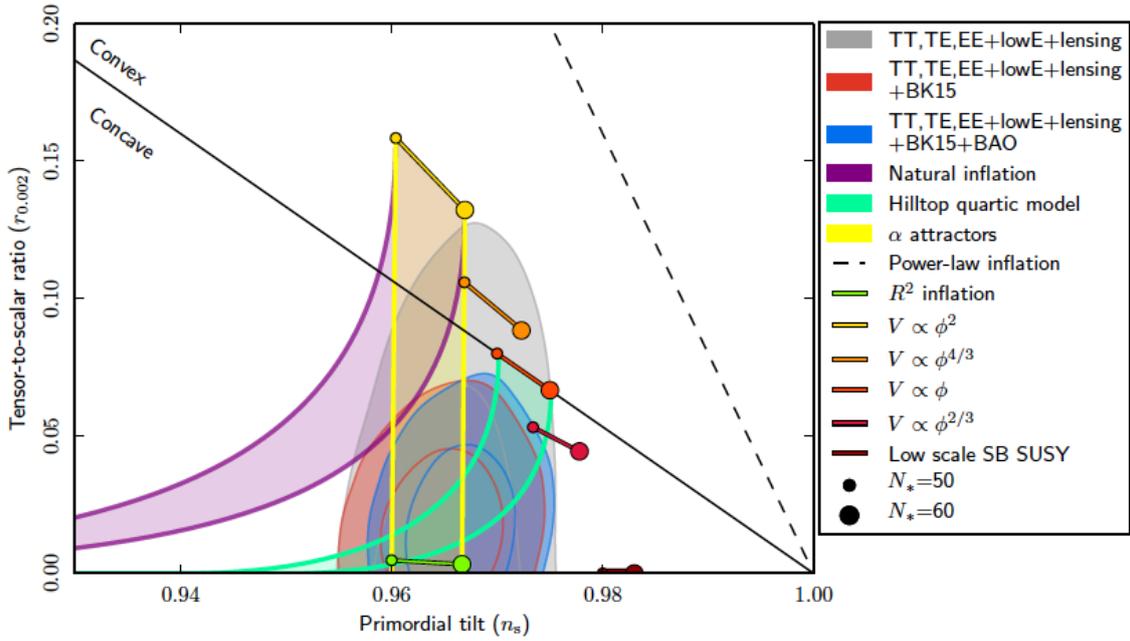


Figura 6.2: Resumen de las concordancias entre los distintos modelos y los datos del CMB [12]. Para cada uno de los modelos se muestran dos predicciones: para una duración del periodo inflacionario de 50 o 60 e -folds.

Se comprueba que el modelo que más se acerca a las predicciones experimentales es el $f(R)$ de Starobinsky (línea verde fosforito en la figura 6.2). A día de hoy, continúa habiendo infinidad de líneas de investigación abiertas que buscan (entre otras cosas) explicar el origen de estos posibles campos escalares.

6.3. Conclusiones

Hemos estudiado los aspectos generales de la cosmología inflacionaria, su conexión con las observaciones y algunos de los modelos propuestos desde distintas ramas de la física como origen del inflatón. Haber entendido este periodo del universo no solo es clave desde el punto de vista de la cosmología, sino que forma parte de las líneas de investigación de distintas áreas de la física teórica, especialmente dentro de la física de altas energías, como acabamos de ver en este capítulo.

El futuro de la cosmología es muy prometedor. Gracias a las nuevas técnicas y aparatos de alta precisión como el satélite Planck, somos capaces de dar cotas experimentales cada vez más precisas para nuestras predicciones teóricas. Y es que la precisión de estos experimentos ha avanzado de manera vertiginosa durante los últimos años, lo que hace que este sea el momento perfecto para trabajar en cosmología de alta precisión y nuevas teorías cosmológicas. Uno de los principales objetivos en

esta dirección es medir ondas gravitacionales primordiales. Esto nos permitiría -tal y como se explicó en el capítulo 4- estimar la escala de energía a la que tuvo lugar el periodo inflacionario; y, con ello, descartar o favorecer algunos de los modelos propuestos hasta la fecha.

Son estos mismos datos los que, por el momento, presentan el modelo $f(R)$ de Starobinsky como el más acorde con las observaciones. Lo que no sólo ha hecho que se abra -aún más- la puerta a teorías gravitatorias modificadas a altas energías; sino que, por su conexión con los potenciales de tipo *plateau*, supone un punto más a favor de la teoría de cuerdas como una posible 'teoría del todo'.

Apéndice A

Teoría clásica de campos en espacios curvos

A.1. Gravedad pura

La **acción de Hilbert-Einstein** describe un sistema de gravitación pura:

$$\mathcal{S}_g[g] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-|g|} R \quad (\text{A.1})$$

con $\kappa^2 = 8\pi G_n$, R el escalar de Ricci y $c = 1$. Considerando una transformación de la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ y extremizando la acción encontramos la ecuación de Einstein para el caso en el que solo tenemos gravedad:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_g}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow G^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

A.2. Gravedad y materia (escalar)

Los sistemas en los que solo hay gravedad y materia escalar están modelizados por una acción con **un solo campo escalar**, que es la siguiente:

$$\mathcal{S}_\phi = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad . \quad (\text{A.3})$$

Pero, teniendo en cuenta que para campos escalares la derivada covariante no es más que la derivada parcial $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$, tenemos que la acción se reduce a

$$\mathcal{S}_\phi = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad . \quad (\text{A.4})$$

Y el tensor energía-momento en este caso es:

$$T_{\phi}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi + g^{\mu\nu}(\partial^{\rho}\phi\partial_{\rho}\phi + V(\phi)) \quad (\text{A.5})$$

A.3. Gravedad y radiación

La radiación electromagnética está descrita en teoría de campos por el campo vectorial A_{μ} con field strength $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (\text{A.6})$$

donde en el segundo paso se ha utilizado la propiedad del rotacional de la derivada covariante estudiada en la sección 1.

En este trabajo no haremos uso de campos vectoriales pero no está de más presentar la acción para **un solo campo vectorial**

$$\mathcal{S}_A = \int d^4x \sqrt{-|g|} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.7})$$

y su tensor energía momento

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2. \quad (\text{A.8})$$

Si resolvemos las ecuaciones de movimiento obtenemos las ecuaciones de Maxwell codificadas en

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.9})$$

A.4. Gravedad, materia y radiación

Si consideramos un sistema en el que tenemos tanto un campo escalar neutro como uno vectorial, entonces nuestra acción total será de la forma:

$$\mathcal{S}(g, \phi, A_{\mu}) = \mathcal{S}_g(g) + \mathcal{S}_{\phi}(g, \phi) + \mathcal{S}_A(g, A) \quad (\text{A.10})$$

por lo que, dadas estas dependencias, para minimizarla habrá que hacer el siguiente cálculo:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\mu\nu} + \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta A_{\mu}} \delta A_{\mu} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Para ello, cada uno de los términos ha de anularse por separado. De esta manera se obtiene la ecuación de Einstein en el primer sumando; y las ecuaciones de movimiento

del campo escalar y vectorial para el segundo y tercer término respectivamente. Es decir:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \implies G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{\phi} - T_{\mu\nu}^A = 0 \quad , \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi} = \frac{\delta \mathcal{S}_{\phi}}{\delta \phi} = 0 \implies g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \implies \square \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta A_{\mu}} = \frac{\delta \mathcal{S}_A}{\delta A_{\mu}} = 0 \implies \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (\text{A.14})$$

A.5. Constante cosmológica

Centrémonos ahora en el estudio de un solo campo escalar y supongamos que se trata de un campo constante: $\phi = \phi_i$, de esta manera obtenemos:

$$\square \phi = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi = \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_i} = 0$$

Esto significa que los posibles valores de la constante ϕ_i deben ser las que extremicen el potencial. Siguiendo con esta suposición encontramos también una expresión mucho más compacta para el tensor energía-momento asociado:

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \cancel{\partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi} + g_{\mu\nu} \left[\cancel{-\frac{1}{2} \partial^{\rho} \phi \partial^{\rho} \phi} - V(\phi) \right] \implies T_{\mu\nu}^{\phi} = -V(\phi_i) g_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{A.15})$$

A ese valor del potencial se le suele denominar por la constante $V(\phi_i) = \Lambda$. De manera que:

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{A.16})$$

Así, si recuperamos la expresión del tensor energía-momento para un fluido perfecto (1.36) obtenemos la siguiente ecuación de estado:

$$P = -\rho. \quad (\text{A.17})$$

Finalmente, veamos que la ecuación de movimiento para la métrica se traduce en:

$$G_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu}^\phi = -\Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Así, se identifica la llamada constante cosmológica (Λ) con la energía del vacío, que es a su vez el valor del potencial en uno de sus mínimos. De esta manera se tiene que estas soluciones maximalmente simétricas serán del tipo de Sitter ($\Lambda > 0$), anti de Sitter ($\Lambda < 0$) o Minkowski ($\Lambda = 0$) dependiendo del valor de esta constante cosmológica.

A.6. Condición fuerte de energía

Comentemos brevemente las implicaciones de la ecuación de estado A.17 y las llamadas *condiciones de energía*. Una condición de energía en el contexto de la Relatividad General es básicamente una relación que debe cumplir el tensor energía-momento con la idea de que la energía sea positiva. En los años 60 y 70 la mayoría de los físicos pensaba que todo observador debía medir una energía y densidad de masa positiva. De esta idea surgen varias condiciones de energía más o menos similares: débil, fuerte, nula y dominante.

En nuestro caso, sólo nos interesa la condición fuerte de la energía, que establece que para cualquier vector temporal V^μ , se tiene que:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) V^\mu V^\nu \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

Aplicándolo al caso del tensor energía-momento del fluido perfecto se tienen las condiciones

$$\rho + \sum_j P_j \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho + P_j \geq 0 \quad \forall j \quad (\text{A.20})$$

o lo que es lo mismo, considerando que $-\rho \leq 0 \Rightarrow \rho \geq 0$; entonces, recordando que $P = \omega\rho$:

$$\rho + 3P \geq 0 \Rightarrow 1 + 3\omega \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

Bibliografía

- [1] Sean M Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. 1997. URL: [http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/..](http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/)
- [2] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology*. New York: John Wiley y Sons, 1972.
- [3] Dodelson Scott y Schmidt Fabian. *Front Matter*. Elsevier, 2003. DOI: 10.1016/b978-0-12-815948-4.00002-4.
- [4] Marieke Postma. *Inflation*. URL: <https://www.nikhef.nl/~mpostma/inflation.pdf>.
- [5] Alan H. Guth. «Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems». *Phys. Rev. D* 23 (2 ene. de 1981), págs. 347-356. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>.
- [6] Daniel Baumann. «TASI Lectures on Inflation» (jul. de 2009). URL: <http://arxiv.org/abs/0907.5424>.
- [7] Bruce A. Bassett, Shinji Tsujikawa y David Wands. «Inflation dynamics and reheating». *Reviews of Modern Physics* 78.2 (mayo de 2006), págs. 537-589. DOI: 10.1103/revmodphys.78.537. URL: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.537>.
- [8] *La Rivista del Nuovo Cimento* 39.9 (ago. de 2016), págs. 399-495. ISSN: 0393697X, 0393697X. DOI: 10.1393/ncr/i2016-10127-1. URL: <https://doi.org/10.1393/ncr/i2016-10127-1>.
- [9] Heui-Seol Roh. *Fundamental Constants and Conservation Laws*. 2001.
- [10] A. Riotto. *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*. Jun. de 2002.
- [11] Mauro Pieroni. «Classification of inflationary models and constraints on fundamental physics» (nov. de 2016). URL: <http://arxiv.org/abs/1611.03732>.

- [12] Planck Collaboration y col. «Planck 2018 results. X. Constraints on inflation arXiv:1807.06211v2 [astro-ph.CO]» (jun. de 2019). DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833887>.
- [13] ESA y Plank Collaboration. *Plank CMB*. URL: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_CMB.
- [14] ESA y Plank Collaboration. *Plank Power Spectrum*. URL: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_Power_Spectrum.
- [15] Martin White y Emory F. Bunn. «The COBE Normalization of CMB Anisotropies». *The Astrophysical Journal* 450 (sep. de 1995), pág. 477. DOI: 10.1086/176158. URL: <https://doi.org/10.1086%2F176158>.
- [16] A.D. Linde. «Chaotic inflation». *Physics Letters B* 129.3 (1983), págs. 177-181. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90837-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90837-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383908377>.
- [17] Renata Kallosh y Andrei Linde. *Hybrid cosmological attractors*. 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2204.02425. URL: <https://arxiv.org/abs/2204.02425>.
- [18] F. Lucchin y S. Matarrese. «Power-law inflation». *Phys. Rev. D* 32 (6 sep. de 1985), págs. 1316-1322. DOI: 10.1103/PhysRevD.32.1316. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.1316>.
- [19] David Wands. «Multiple Field Inflation». En: *Inflationary Cosmology*. Springer Berlin Heidelberg, págs. 275-304. DOI: 10.1007/978-3-540-74353-8_8. URL: https://doi.org/10.1007%2F978-3-540-74353-8_8.
- [20] Eva Silverstein y David Tong. «Scalar speed limits and cosmology: Acceleration from D-cceleration». *Physical Review D* 70.10 (nov. de 2004). DOI: 10.1103/physrevd.70.103505. URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.70.103505>.
- [21] G.W Gibbons. «Cosmological evolution of the rolling tachyon». *Physics Letters B* 537.1-2 (jun. de 2002), págs. 1-4. DOI: 10.1016/s0370-2693(02)01881-6. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fs0370-2693%2802%2901881-6>.
- [22] Alexei Starobinsky. «A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity». *Physics Letters B* 91 (mar. de 1980), págs. 99-102. DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.