

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

TRABAJO FIN DE GRADO DE MATEMÁTICAS

Métodos de aproximación numérica de ecuaciones parabólicas no lineales

Autor:

Asier VÍA

Profesor:

Sergey SHMAREV

8 de junio de 2022



Universidad de Oviedo

Universidá d'Uviéu

University of Oviedo

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Prólogo	2
1.2. Contextualización	4
2. Fórmulación del problema	9
2.1. Motivación inicial	9
2.2. Ecuación de Boussinesq	10
2.3. Propiedades de la EMP	13
3. Formalismo matemático	15
3.1. Búsqueda de soluciones	15
3.2. Soluciones débiles	20
3.3. Existencia y unicidad de soluciones en 1D	22
3.4. Frontera libre	23
4. Aplicación a la práctica	25
4.1. Velocidad finita de propagación	26
4.2. Tiempo de espera y blow-up	27
4.3. Evolución de la frontera	29
5. Resultados numéricos	32
5.1. Ecuación de la trayectoria	33
5.2. Esquemas numéricos	39
6. Conclusiones	48
7. Anexo	51

Capítulo 1

Introducción

1.1. Prólogo

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de la ecuación del medio poroso desde la perspectiva del método de los elementos finitos. Para ello, se tratará este problema de frontera libre a través de una serie de aproximaciones distintas relativas a la evolución de tal frontera. El trabajo será de índole puramente teórica, atendiendo a cuestiones del estudio cualitativo más que cuantitativo. Con tal fin, se realizará una comparativa entre varios métodos de aproximación expuestos en una serie de artículos científicos de la revista *Elsevier*, todos ellos relacionados con el trabajo de Sergey Shmarev, tutor de este trabajo, sobre la existencia, unicidad y propiedades de localización de soluciones a la ecuación del medio poroso [1].

La motivación para el desarrollo de este trabajo surge durante la asignatura de Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales, cursada en la Universidad de Santiago de Compostela bajo el marco del programa de intercambio Sicue-Séneca, donde pude observar de primera mano una aplicación muy directa de los conocimientos del grado en Matemáticas para la resolución de problemas de naturaleza física. Por ello, el estudio cualitativo de la modelización de estos problemas resultó ser un tema muy atrayente por incluir conocimientos tanto de Matemáticas como de Física, otorgándole así un sentido global a los cinco años de doble grado.

Respecto al tema escogido, se trata de un campo de estudio que goza de amplia literatura, ya sea reciente o pasada. De hecho, existen varias generalizaciones de la ecuación del medio poroso con coeficientes de absorción y exponentes variables [2], pero este trabajo

estará restringido al caso más sencillo de exponentes constantes, por servir como modelo didáctico y de carácter introductorio a la materia.

La estructura que sigue el artículo comenzará con una breve contextualización de la ecuación del medio poroso, seguida por una exposición de los conocimientos básicos del método de los elementos finitos (MEF) que serán utilizados a lo largo del trabajo. A continuación, se presentará la motivación para el planteamiento del problema y se introducirá su formalismo matemático. Se presentarán sus principales propiedades y las diferencias en relación con la ecuación de difusión lineal. Se realizará, a su vez, un recopilatorio de los artículos base que sustentan el grosso del trabajo y se continuará con una comparación entre todos los métodos desde una perspectiva más general. Por último, se mostrarán los esquemas numéricos para su resolución y los resultados obtenidos.

1.2. Contextualización

Históricamente, la ecuación de Navier-Stokes ha modelizado de manera muy adecuada la dinámica de fluidos viscosos usuales. Dicha ley, junto con la ley de conservación de la masa, de la energía y del estado (si el fluido es compresible), ha permitido describir al completo su movimiento a partir de unas condiciones de contorno y condiciones iniciales. Sin embargo, para el caso de los fluidos que discurren por medios porosos, la ley de Navier-Stokes resulta insuficiente debido al avance por entre los huecos de la estructura, su compleja geometría y la resistencia que presente el medio.

Por esta razón, surge la ley de Darcy, una alternativa que pretende dar explicación al flujo de un fluido incompresible en un medio poroso y que, precisamente, basará todas las construcciones y análisis matemáticos posteriores. De hecho, también existe una generalización de esta ley a situaciones más globales de la teoría de la filtración, lo que resalta su importancia y utilidad en el campo de la dinámica de fluidos.

A su vez, se introducirá la ecuación del calor, a través de la ley de Fourier, donde asentar las bases de todo posterior desarrollo de la ecuación del medio poroso, pudiéndose entender esta última como una generalización de la primera.

Por último, se explicará el método de los elementos finitos, *MEF*, que propiciará una discretización no uniforme de las coordenadas espacio-temporales y dará pie a la aproximación de la solución final mediante el estudio local de la función en cada elemento construido.

Ley de Navier-Stokes

Como primer acercamiento, la ley de Navier-Stokes aparece como una generalización de la ecuación de Euler para describir el flujo de fluidos incompresibles y sin fricción. La ecuación expresa la conservación del momento y de la masa para fluidos newtonianos¹. Se trata de una ecuación de carácter parabólico y suele ir acompañada de una ecuación de estado, relacionando presión, temperatura y densidad. Como suposición inicial, la tensión del fluido es la suma de un término de difusión viscosa (que es proporcional al gradiente de la velocidad) y un término de presión. En este sentido, el último término que aparece en la ecuación se corresponde con la corrección de viscosidad a diferencia de la ecuación de Euler general.

¹Los fluidos newtonianos son aquellos cuya viscosidad puede ser considerada constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu\nabla^2 u \quad (1.1)$$

Desde la perspectiva matemática, todavía no ha sido probada la existencia de soluciones «suaves» en tres dimensiones. En general, no existe solución analítica salvo casos particulares, por lo que normalmente se recurre al análisis numérico para la determinación de una solución aproximada.

Ley de Fourier

Ampliando la perspectiva física, resulta interesante plantearse la aplicación de los modelos matemáticos en distintos escenarios. Así, la ley del calor entendida como un proceso de difusión puede mantener cierta relación con lo anterior. En este sentido, la conducción del calor es un fenómeno físico en el que existe un intercambio de energía entre dos cuerpos, sin intercambio de materia. La propiedad física de los materiales que determina este proceso se denomina conductividad térmica, k . La ley que rige este tipo de procesos se denomina ley de Fourier y establece que «el flujo de transferencia de calor por conducción en un medio isótropo es proporcional y de sentido contrario al gradiente de temperatura en esa dirección», es decir:

$$q = -k\nabla T \iff \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Delta T \quad (1.2)$$

La ecuación del calor es una EDP parabólica en la que la velocidad de propagación de la solución es infinita y existe un efecto regularizante: condiciones iniciales no regulares llevan a soluciones regulares. Por otra parte, la ecuación cumple el *Principio del máximo* y la ley de conservación de la masa, así como experimenta un decaimiento a lo largo del tiempo.

Ley de Darcy

El rango de acción de la ecuación de Navier-Stokes (1.1) se vio tambalear en medios porosos, donde la irregularidad del medio impedía su correcta aplicación. Así, Darcy determinó de forma experimental una ley para regular el flujo de fluidos viscosos en medios porosos. Posteriormente, la ley pudo ser teorizada a través de métodos de homogenei-

zación² y presenta similitudes con la ecuación del calor de Fourier, la ley de Ohm en electromagnetismo y la ley de Flick para procesos de difusión.

Supongamos un fluido incomprensible, por ejemplo el agua, fluyendo por un medio poroso. La siguiente ley relaciona la velocidad, $u(x, t)$, y la diferencia de presión, $p(x, t)$, como sigue:

$$u = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho g z) \quad (1.3)$$

En dicha ecuación, k es el coeficiente de permeabilidad del medio, μ es la viscosidad dinámica, ρ es la densidad, g es la constante de gravedad y z la coordenada espacial vertical. Cabe destacar que esta ley sustituye de manera adecuada a la mencionada ley de Navier-Stokes en circunstancias adecuadas, particularmente cuando el número de Reynolds³ es muy bajo, es decir, cuando los efectos de inercia son despreciables frente a los viscosos.

La ley de Darcy permite plantear una modelo de ecuaciones en derivadas parciales muy completo. Tal es su alcance, que este modelo ha permitido el desarrollo de otras subdisciplinas de estudio del análisis numérico y funcional, a saber, los problemas de frontera libre.

²La homogeneización es un método de estudio de EDPs con rápidos coeficientes de oscilación

³El número de Reynolds es un número adimensional utilizado en mecánica de fluidos. Representa una especie de inverso de la viscosidad normalizado por la densidad y la velocidad y longitud tpicas del medio. [3]

Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico para aproximar soluciones a ecuaciones en derivadas parciales muy complejas. Su rango de acción es muy vasto pero requiere básicamente del conocimiento previo de las ecuaciones constitutivas⁴ y de las ecuaciones de evolución temporal⁵.

La aproximación del MEF trabaja sobre un cuerpo o un medio continuo sobre el que se definen unas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil⁶ que caracterizan el comportamiento de un sistema físico, realizando una partición del espacio en subdominios con intersección nula entre sí, denominados «elementos finitos». El conjunto de los elementos finitos se denomina «discretización» y dentro de cada elemento se crean una serie de puntos denominados «nodos». Se dice que dos nodos son «adyacentes» si pertenecen al mismo elemento finito y al conjunto de todos los nodos, considerando las nociones de adyacencia, se denominará «malla».

La discretización de los elementos finitos reduce el problema considerado al dividir el continuo en secciones finitas y expresando las variables desconocidas del campo en términos de funciones conocidas que aproximan la solución en dichos puntos. Estas funciones son comúnmente conocidas como funciones de interpolación, ya que están definidas en función de los valores de las variables de campo en los nodos. En relación a cómo se introducen los nodos, estos se encuentran normalmente en las fronteras de los elementos finitos donde los adyacentes están conectados. A su vez, pudiera resultar que un elemento albergase algunos nodos interiores. Los valores nodales del campo y las funciones de interpolación definen por completo el comportamiento del campo dentro de los elementos.

En el caso de los elementos finitos, las incógnitas resultan los valores nodales del campo. Una vez obtenido su valor, las funciones de interpolación consiguen resumir todo el comportamiento del campo. Por esta razón, la naturaleza de la solución y el grado de aproximación dependerán tanto del número de elementos finitos como del tipo de funciones de interpolación utilizadas. En este sentido, no se pueden escoger interpolaciones arbitrarias, pues se debe respetar unas ciertas condiciones de compatibilidad, tales como continuidad en la frontera de los elementos finitos.

⁴Relación entre las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico

⁵Definen la evolución temporal de un sistema físico

⁶Función en la cual las derivadas que aparecen en la ecuación pueden no existir todas, aunque se considera que satisfacen la ecuación en algún sentido definido con precisión

Sin embargo, la principal ventaja que presenta este método es la posibilidad de formular soluciones para elementos individuales antes de trabajar de forma más global y representar el problema completo. En general, este método presenta un esquema de funcionamiento claro[4]:

1. Discretización del continuo: El primer paso es dividir la región en elementos. Para ello, se precisa conocer de antemano la forma que puede presentar la solución o, al menos, tener una intuición de donde se colocarán los puntos conflictivos o de mayor cambio de la solución. En este sentido, resultará más útil emplear un mayor número de nodos en esas zonas.

2. Selección de las funciones de interpolación: Al asignar nodos dentro de los elementos finitos, se pueden construir polinomios de interpolación, frecuentemente utilizados por su facilidad para derivar e integrar. El grado del polinomio escogido dependerá del número de nodos asignado.

3. Aproximación de las propiedades de los elementos: Una vez colocados los nodos y construidas las funciones de interpolación, se estudian los elementos a través de las ecuaciones matriciales. Para ello, normalmente se utilizan principios variacionales o aproximaciones más directas.

4. Compatibilización de tales propiedades para el sistema de ecuaciones: La base de esta parte radica en que el valor del campo es igual para cada elemento que comparta un mismo nodo. La principal ventaja es que el sistema de ecuaciones es generado por correspondencia con las ecuaciones de los elementos individuales.

5. Imposición de condiciones de contorno y resolución del sistema general

6. Correcciones computacionales: En ocasiones, se pueden realizar una serie de cálculos de parámetros a posteriori. Por ejemplo, en conducción del calor, las incógnitas nodales son temperaturas, de donde se pueden concluir los flujos de calor de los elementos.

Capítulo 2

Fórmula del problema

2.1. Motivación inicial

El estudio de la ecuación del medio poroso viene motivado por el análisis de las filtraciones de agua a través de un dique. Se trata de un proceso de filtración de un fluido incompresible a través de un medio poroso, en el que la geometría del dique puede asumirse bidimensional, supuesta una anchura suficientemente grande de forma que no afecte a los cálculos significativamente.

Es claro que el proceso de filtración podrá ser modelado como un proceso de difusión a través de una membrana no-homogénea y en movimiento, lo que dará lugar a dos regiones: zona mojada (ocupada por el fluido) y zona seca (presencia de poros bajo presión atmosférica). La variable a considerar en el problema será $\pi = p + \rho g z$, que debe satisfacer la ecuación de Laplace, $\Delta\pi = 0$, donde intervienen la presión, p , densidad, ρ y altura, z , más la constante de gravedad, g .

La región húmeda podrá ser descrita como $\Omega = \{(x, z) \in R : z \leq \phi(x)\}$, siendo la curva $z = \phi(x)$ la frontera libre del problema, es decir, una incógnita más a determinar. Imponiendo ahora condiciones de continuidad de la presión en las paredes del dominio, despreciando la componente vertical del impulso y utilizando la ley de Darcy, es posible establecer unas condiciones de contorno adecuadas para la resolución del problema.

Por otra parte, es necesario asumir una condición extra para la frontera libre $\Gamma = \{(x, \phi(x))\}$. En este caso, se asumirá que la velocidad del fluido tendrá exclusivamente componente tangencial en la frontera libre, es decir, en la curva $z = \phi(x)$. Por tanto, usando la ley de Darcy, se obtiene $\frac{\partial\pi}{\partial\nu} = 0$, siendo ν la componente normal en Γ .

El siguiente modelo muestra el proceso de filtración.

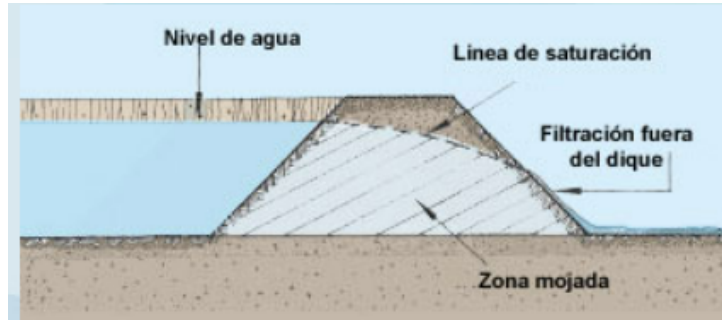


Figura 2.1: Modelización del dique poroso [5]

2.2. Ecuación de Boussinesq

Preguntémosnos por la filtración de un líquido, típicamente agua, a través de un dique poroso. Inicialmente, asumiremos las siguientes suposiciones para facilitar los cálculos: el dique de altura H tiene como base un estrato impermeable horizontal en $z = 0$, no existe impulso transversal al movimiento y la masa de agua ocupa una región de la forma:

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R} : z \leq h(x, t)\}, \quad 0 \leq h(x, t) \leq H \quad (2.1)$$

Las ecuaciones que aplicaremos están basadas en leyes de conservación: conservación de la masa y conservación del impulso (Ley de Euler) en las componentes x y z , junto con las condiciones de contorno e iniciales. Tenemos pues un sistema de tres ecuaciones para tres incógnitas, pero con un dominio variable.

Para el cálculo práctico se incluirá también la «hipótesis de pequeña inclinación», equivalentemente, la frontera h presenta pequeños gradientes, lo que se traduce en un flujo con velocidad casi horizontal. Así la componente vertical del impulso seguirá:

$$\rho \left(\frac{du_z}{dt} + u \cdot \nabla u_z \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho g \longrightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (2.2)$$

Luego integrando en z , se obtiene como primera aproximación:

$$p + \rho g z = cte \quad (2.3)$$

y calculando tal constante en la superficie de la frontera libre $z = h(x, t)$, se obtiene:

$$p = \rho g(h - z) \quad (2.4)$$

En primera instancia, la presión se supondrá determinada por la «aproximación hidrostática». Este resultado no es exacto y podría dar lugar a resultados poco fiables, pero a la hora de computar resultados de cara al cálculo de la altura $h(x, t)$, comete errores mínimos y convierte el sistema en fácilmente integrable.

Retomando la ecuación de conservación de masa y tomando una sección de la forma $S = (x, x + a) \times (0, C)$ se tiene:

$$m \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+a} \int_0^h dy dx = - \int_{\partial S} u \cdot n dl \quad (2.5)$$

donde m es la porosidad del medio y u es la velocidad del fluido dada por la ley de Darcy en (1.3). Para el producto $u \cdot n$, aproximaremos la superficie lateral derecha como $u \cdot n \approx (u, 0) \cdot (1, 0) = u$ mientras que para la superficie lateral izquierda será $-u$. Ahora diferenciando en x sobre (2.2), se obtiene:

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} h dz \quad (2.6)$$

Luego, finalmente, se llega a la ecuación de Boussinesq:

$$h_t = k(h^2)_{xx}, \quad k = \frac{\rho g k}{2m\mu} \quad (2.7)$$

Hemos llegado a una variante no lineal de la ecuación del calor, al simplificar un sistema de ecuaciones sobre un dominio variable en una sola ecuación que determina la frontera libre. Utilizando h , calcularemos la presión p mediante (2.4) y finalmente, la velocidad u con la ley de Darcy.

La ecuación de Boussinesq puede ser generalizada a varias dimensiones en el espacio

$$h_t = k\Delta(h^2) \quad (2.8)$$

que, en dos dimensiones, representa el movimiento de un fluido sobre un estrato impermeable horizontal en la base, pero sin la hipótesis de simetría en el eje z . Podrían

existir también fuentes o sumideros, tales como recargas naturales/artificiales o salidas por bombeo, por lo que podría aparecer un término extra de la forma:

$$h_t = k\Delta(h^2) + f \quad (2.9)$$

siendo la función f la contribución neta de estos efectos.

Respecto a las suposiciones iniciales que habíamos hecho para la ecuación de Boussinesq, la condición de pequeña inclinación implica verticalidad en las líneas equipotenciales, lo que se corresponde con la realidad salvo en situaciones límite. Además, la ecuación de la filtración es un análogo al modelo no lineal de la ecuación del calor que aparece en situaciones de temperaturas muy altas.

Formulación general: gases politrópicos

Preguntémonos ahora por la dinámica de un gas en un medio poroso sin el efecto de la gravedad. Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \nabla \cdot (\rho u) \quad (2.10)$$

$$u = -\frac{k}{\mu}\nabla p \quad (2.11)$$

Utilizando ahora la hipótesis termodinámica para procesos politrópicos

$$p = c\rho^\gamma, \quad \gamma \geq 1 \quad (2.12)$$

Por teoría termodinámica, sabemos que si $\gamma = 1$ estaremos ante un proceso isoterma y para $\gamma > 1$ tendremos uno adiabático. Despreciando el término de gravedad y suponiendo m , fracción de volumen disponible para el paso del fluido, μ , viscosidad dinámica del medio y k , coeficiente de permeabilidad, como coeficientes constantes, se tiene

$$m\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho u) = \frac{kc}{\mu}\nabla \cdot (\rho\nabla\rho^\gamma) \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{ck\gamma}{m\mu(\gamma+1)}\Delta(\rho^{\gamma+1}) \quad (2.13)$$

Ahora reescalando la ecuación para hacer desaparecer las constantes, se llega finalmente

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \Delta(\rho^m), \quad m = \gamma + 1 > 1 \quad (2.14)$$

Si tomamos un proceso isoterma, $\gamma = 1$, se tendrá $m=2$, por lo que retomamos la ecuación de Boussinesq de (2.8). En general, la ecuación (2.14) recibe el nombre de «Ecuación del medio poroso» o EMP y será el punto central del desarrollo de este trabajo.

La ecuación (2.8) puede generalizarse como

$$u_t = \Delta\Phi(u) \quad (2.15)$$

donde la función $\Phi(u)$ es una función real, continua y creciente. Dicha ecuación recibe el nombre de «Ecuación del filtrado» y es de tipo parabólico, ya que $\Phi'(u) > 0$. Sin embargo, también podrían aparecer funciones no estrictamente crecientes o incluso con discontinuidades. Aún así, se sigue cumpliendo $\Phi'(u) \geq 0$ y diremos que la ecuación es «degenerada parabólica». Esta curiosa característica aportará una infinidad de nuevas propiedades, así como un nuevo tipo de soluciones: las soluciones débiles o generalizadas.

2.3. Propiedades de la EMP

Comencemos el análisis de la ecuación del medio poroso

$$u_t = \Delta(u^m), \quad m > 1 \quad (2.16)$$

en el caso unidimensional con exponente $m = 2$, es decir, la ecuación de Boussinesq. El procedimiento a seguir es claro: tratar de hallar la altura de la frontera libre y, a través de ella, las incógnitas de presión y velocidad del fluido. Imponiendo adecuadas condiciones de contorno y condiciones iniciales, se espera unicidad de la solución. En efecto, la ecuación (2.8) podría, en primera instancia, catalogarse como ecuación parabólica por su similitud a la ecuación clásica del calor. Sin embargo, para los puntos tales que $u = 0$, la parabolicidad se pierde, como muestra la reformulación siguiente de (2.8):

$$\frac{1}{2}u_t = u \cdot u_{xx} + (u_x)^2 \quad (2.17)$$

Curiosamente, esta sutil diferencia en $u = 0$ implica una serie de propiedades claves de estudio. La primera de ellas es que, en general, no existirán soluciones clásicas, por lo que habrá que recurrir a otro tipo de soluciones: *las soluciones generalizadas*.

En segundo lugar, la ecuación (2.17) hace referencia a que la ecuación *degenera* en una ecuación de primer orden, fácilmente integrable por características y que, sorprendentemente, explica la propiedad de propagación finita de la solución, frente a la velocidad infinita propia de la ecuación clásica del calor. En efecto, esta propiedad puede ser reformulada como sigue:

«Si el dato inicial posee soporte compacto, la solución también tendrá soporte compacto para todo $t > 0$ fijo». [3]

En último lugar, la EMP presenta, como se analizará a continuación con más detalle, regímenes autosemejantes como límites asintóticos. La cualidad de autosemejanza hace referencia a la posibilidad de escribir las soluciones como constantes en el tiempo tras un reescalado de la forma

$$u' = f'(x), \quad u' = ut^\alpha, \quad y \quad x' = xt^{-\beta} \quad (2.18)$$

En los siguientes apartados, se explicará el formalismo de las soluciones débiles y los regímenes autosemejantes, ya sea desde la perspectiva teórica como desde un punto de vista aplicado a nuestra EMP.

Capítulo 3

Formalismo matemático

En este apartado, se tratará de dar solución a la EMP desde la perspectiva de las ondas viajeras y las soluciones autosemejantes. Como se verá, este tipo de soluciones no serán entendidas desde el marco clásico sino desde el concepto de solución débil. Así, se realizará una fundamentación matemática de este nuevo concepto y, como conclusión, se planteará la problemática que presenta la frontera libre y su posterior tratamiento en términos del MEF.

3.1. Búsqueda de soluciones

Soluciones tipo ondas viajeras

Comencemos nuestro desarrollo planteando soluciones de la forma

$$u = f(\eta), \quad \eta = x_1 - ct \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Tal ecuación representa una onda viajera en la dirección x_1 , con un parámetro c de velocidad, que supondremos no nulo para que exista movimiento. Asimismo, estudiaremos únicamente un sentido de movimiento pues el caso opuesto, digamos $c < 0$ puede ser reducido al primero por la simetría de la solución ($u(x, t) \rightarrow u(-x, t)$). Por último, restringiremos el estudio al caso unidimensional, teniendo en cuenta que tal movimiento puede ser generalizado a cualquier dirección mediante una rotación de \mathbb{R}^n , donde tendríamos $\eta = x \cdot n - ct$.

Por tanto, utilizando (3.1) en EMP, se tiene

$$(f^m)'' + cf' = 0 \longrightarrow (f^m)' + cf = K, \quad K \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Ahora, imponiendo la condición de contorno $f(\eta \gg 0) = f'(\eta \gg 0) = 0$, que viene a decir que la onda avanza hacia una región vacía, se llega a $K = 0$, por lo que

$$mf^{m-2}f' + c = 0 \longrightarrow \frac{m}{m-1}f^{m-1} = -c\eta + K_1 \quad (3.3)$$

Aparentemente, la ecuación ha sido correctamente integrada y se llega a un resultado compacto. Sin embargo, analizando la situación $\eta = \infty$, se observa que el comportamiento de la solución no tiene sentido físico, pues su valor se hace cada vez más negativo cuando $\eta \rightarrow \infty$. En primera instancia, podríamos suponer que los cálculos o suposiciones iniciales eran erróneos, pero analizando detenidamente la solución, quizás pudiera ser tratada desde una perspectiva distinta y dotarla así de sentido físico.

Utilicemos la «estrategia del límite»: realizar un cálculo con sentido físico que sea próximo al nuestro y pasar al límite extrapolando resultados. Tomemos en (3.2) distintas condiciones de contorno: $f(\infty) = \epsilon$ y $f'(\infty) = 0$, de donde se obtiene $K = \epsilon c > 0$. Entonces

$$f' = c \frac{\epsilon - f}{mf^{m-1}} \quad (3.4)$$

que es fácilmente integrable por variables separadas. En particular, para $m = 2$, la integración aporta el siguiente resultado

$$-c\eta + K_1 = 2 \int \frac{f}{f - \epsilon} df = 2f + 2\epsilon \ln(f - \epsilon) \quad (3.5)$$

Suponiendo s.p.d.g. $K_1 = 0$ y pasando al límite $\epsilon \rightarrow \infty$ se tiene

$$2f = (-c\eta)_+ = \max(-c\eta, 0) \quad (3.6)$$

Así, la solución posee, ahora sí, un sentido físico pero presenta inconvenientes matemáticos en el sentido clásico: la derivada no es continua en el punto $\eta = 0$. Detallaremos más adelante el contexto general de este tipo de soluciones y su comportamiento desde una perspectiva global.

En general, la solución de (3.4) para m arbitrario está dada en [3] y requiere de cálculos más precisos utilizando planos de fase adecuados.

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1} = (c(-\eta) + K_1)_+ \quad (3.7)$$

En conclusión, comparando esta ecuación con el modelo de los gases en medios porosos, el primer término de (3.7) recuerda al término de presión y el primer término de (3.3) a la velocidad. Por tanto, el modelo de ondas viajeras hace referencia a un frente de velocidad constante c cuando la solución u es positiva y tienen velocidad cero en la parte con u negativa.

Desde una perspectiva geométrica, existirán dos regiones de propagación separadas por una frontera libre, donde falla la regularidad de la solución. Esta es la principal diferencia frente a la ecuación clásica del calor, donde no existe tal frontera y los frentes de onda se propagan indistintamente por todo el medio.

Soluciones autosemejantes

La autosemejanza, esencialmente, es una propiedad básica en el estudio de la física de fluidos. Como punto de partida, tomaremos la solución fundamental de la ecuación del calor en n dimensiones

$$U(x, t) = ct^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (3.8)$$

A través de las relaciones introducidas en (2.18), podemos observar unos «exponentes de autosemejanza», $\alpha = \frac{n}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Procedamos entonces con la solución de EMP.

Comenzamos tomando u autosemejante y sustituyendo en la ecuación

$$U(x, t) = t^{-\alpha} f(\eta), \quad \eta = xt^{-\beta} \quad y \quad f : \text{funcion radial} \quad (3.9)$$

$$U_t = -\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) - \beta t^{-\alpha-1} \nabla f(\eta) \cdot \eta \quad (3.10)$$

$$\Delta(U^m) = t^{-\alpha m} t^{-2\beta} \Delta_\eta(f^m)(\eta) \quad (3.11)$$

Por lo tanto, planteando la relación

$$U_t = \Delta(U^m) \longrightarrow t^{-\alpha-1} (-\alpha f(\eta) - \beta \eta \cdot \nabla f(\eta)) = t^{-\alpha m - 2\beta} \Delta f^m(\eta) \quad (3.12)$$

Para eliminar la dependencia temporal, igualamos los exponentes que acompañan a los términos con t , luego

$$-\alpha - 1 = -\alpha m - 2\beta \longrightarrow \alpha(m - 1) + 2\beta = 1 \quad (3.13)$$

lo que permite despejar un coeficiente en función del otro. Ahora bien, para la función f , tendremos que resolver una ecuación elíptica no lineal de la forma

$$\Delta f^m + \beta \eta \cdot \nabla f + \alpha f = 0 \quad (3.14)$$

Para la determinación del coeficiente libre, α o β , retomemos el ejemplo clásico del calor lineal.

$$m = 1 \longrightarrow \alpha = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

Además, la solución fundamental para el calor correspondía con $\alpha = \frac{n}{2}$, que se obtiene tras aplicar la ley de conservación de la masa. Utilizando el mismo razonamiento para EMP, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{B_r} u \, dx \rightarrow 0, \text{ si } r \rightarrow \infty^1 \quad (3.16)$$

Luego aplicando a la solución autosemejante anteriormente construida, se llega a

$$\int U(x, t) dx = \int t^{-\alpha} f(xt^{-\beta}) dx = t^{-\alpha} t^{\beta n} \int f(\eta) d\eta = cte(t) \longrightarrow \alpha = \beta n \quad (3.17)$$

Luego finalmente los exponentes están completamente determinados

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \quad \beta = \frac{1}{n(m-1)+2} \quad (3.18)$$

En conclusión, ya estamos en condiciones de calcular la función f en (3.14) imponiendo valores nulos en el infinito como condición de contorno.

$$\frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} (f^m)')' + \beta r f' + n\beta f = 0 \longrightarrow (r^{n-1} (f^m)')' + \beta r^n f' = 0 \quad (3.19)$$

Por tanto,

$$r^{n-1} (f^m)' + \beta r^n f = cte \quad (3.20)$$

¹ B_r , hace referencia a la bola centrada de radio r

y puesto que $f \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$, podemos tomar $cte = 0$, llegando a

$$(f^m)' + \beta r f = 0, \quad m f^{m-2} f' = -\beta r \quad (3.21)$$

Finalmente, obtendremos

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1} = -\frac{\beta}{2} r^2 + cte, \quad f^{m-1} = -\frac{\beta(m-1)}{2m} r^2 + cte' \quad (3.22)$$

Nuevamente, observamos que la curva f^{m-1} es una parábola orientada hacia abajo, lo que puede dar pie a soluciones negativas. Sin embargo, estamos en el mismo contexto previo de las ondas viajeras. A fin de cuentas, tenemos una solución a largo plazo similar a cortar la parábola en $u = 0$ y quedarnos con la parte positiva. En efecto, este procedimiento a priori intuitivo descansa sobre los principios de las soluciones débiles, que serán formalizadas en el siguiente apartado. En conclusión, asumiendo el desarrollo como válido, tenemos la siguiente solución final:

$$f = \left((K - \frac{\beta(m-1)}{2m} |\eta|^2)^{\frac{1}{m-1}} \right)_+, \quad K = cte \quad (3.23)$$

La función f^{m-1} pierde regularidad en el punto $|\eta| = r_0$, luego la solución no podrá ser considerada como clásica. Además, $f \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow \infty$, lo cual se corresponde con el sentido físico esperado. La solución completa de EMP toma la forma

$$U(x, t) = \left(t^{-\beta n} (K - \frac{\beta(m-1)x^2}{2mt^{2\beta}})^{\frac{1}{m-1}} \right)_+ \quad (3.24)$$

Profundizando sobre el sentido físico de las soluciones, podemos aplicar la ley de conservación de masa y extraer cierta información

$$M = \int_0^\infty U \, dx = \int_0^\infty f(\eta) \, d\eta = K^{\frac{1}{m-1} + \frac{n}{2}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\beta(m-1)}{2m} s^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} ds \quad (3.25)$$

De aquí podemos concluir la relación entre la masa M y la constante K como

$$M \propto K^{\frac{1}{m-1} + \frac{n}{2}} \quad (3.26)$$

Teniendo en cuenta que la masa inicial es una delta de Dirac de la forma

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = M\delta(x) \quad (3.27)$$

la solución describe la evolución de una masa puntual en el instante inicial. Todo este desarrollo recibe el nombre de «solución de Barenblatt».

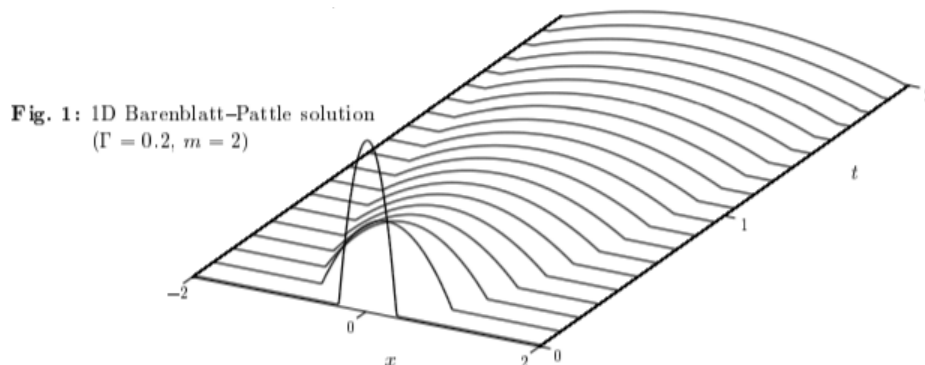


Figura 3.1: Solución de Barenblatt unidimensional [6]

3.2. Soluciones débiles

Hasta el momento, hemos obtenido soluciones inadmisibles desde la perspectiva del sentido físico. Así, estas soluciones no pueden ser entendidas desde el marco clásico y requieren de un tratamiento sutilmente diferente: las soluciones débiles o generalizadas. Para nuestro caso particular, la solución débil es creada, exclusivamente, para garantizar un sentido físico desde el principio de conservación de la masa.

Para la búsqueda de este tipo de soluciones válidas para un amplio rango de condiciones iniciales y condiciones de contorno, se trabajará en espacios de distribuciones. Por esta razón, las derivadas serán consideradas desde el sentido de las distribuciones, una noción mucha menos exigente pero que garantiza, aún así, un cierto sentido físico.

En esta línea, buscaremos soluciones en el espacio

$$Q = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, \infty)\} \quad (3.28)$$

verificando la siguiente relación variacional

$$\int \int u \phi_t \, dx dt + \int \int u^m \Delta \phi \, dx dt = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty, \forall u \in Q \quad (3.29)$$

Las soluciones débiles, esencialmente, son funciones cuyas derivadas pueden no todas existir aunque se considera que satisfacen la ecuación de algún modo preciso. El procedimiento inicial es la formulación débil, que no es más que una reformulación de la ecuación diferencial en la que no aparezcan las derivadas de la solución de forma explícita. En este sentido, aparecerán soluciones a la ecuación que, posiblemente, no sean siquiera diferenciables.

Por regla general, en cualquier ecuación diferencial resulta bastante útil probar inicialmente la existencia de soluciones débiles, para posteriormente analizar su comportamiento y ver cuáles son suficientemente suaves para cumplir los principios de regularidad.

Como ejemplo básico, tomemos la ecuación del transporte unidimensional.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

Asumiendo que u es continuamente diferenciable en \mathbb{R}^2 , multiplicaremos la ecuación por una función suave ϕ con soporte compacto. Ahora integrando,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \phi \, dt dx = 0 \quad (3.31)$$

Finalmente, aplicando integración por partes y regla de Fubini,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} u \, dt dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} u \, dt dx = 0 \quad (3.32)$$

Se tiene, por tanto, que la ecuación (3.30) implica (3.32) siempre que u tenga derivadas continuas. Sin embargo, existen soluciones de (3.32) que no son solución de (3.30) al ser, quizás, u no diferenciable. El ejemplo de solución débil más claro para la ecuación del transporte es $u(x, t) = |x - t|$, función no diferenciable en el origen.

3.3. Existencia y unicidad de soluciones en 1D

Inicialmente, los primeros estudios demostraron la existencia de solución única generalizada bajo ciertos datos iniciales y condiciones de contorno. Para el problema de Cauchy unidimensional con datos iniciales $u_0(x)$ continuos, acotados, no negativos y tales que $(u_0^m)_x$ es acotado, la solución débil es una función continua, no negativa y acotada.

Este resultado ha sido mejorado para casos más generales, como se enuncia en el siguiente resultado tomado de [3]:

Para toda función no negativa $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^\gamma} \int_{|x| \leq R} u_0(x) dx = 0, \quad \gamma = n + \frac{2}{m-1} \quad (3.33)$$

entonces existe una única función no negativa $u \in C([0, \infty))$ tal que $\forall t > 0$, $(1 + |x|^2)^{\frac{-1}{m-1}} u(x, t)$ es acotado y la ecuación se verifica en el sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ satisfaciendo

$$u(\cdot, t) \rightarrow u_0 \quad \text{en } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)^2 \quad (3.34)$$

Como apunte final, la importancia de las soluciones de Barenblatt y el principio de autosemejanza radica en el siguiente resultado:

El modelo asintótico de cualquier solución generalizada con datos integrables resulta una solución autosemejante de Barenblatt. [3]

Enunciado de forma matemática, se tiene

Sea $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ con $u_0 \geq 0$ y $\int u_0(x) dx = M > 0$. Entonces, $\forall p \in [1, \infty)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha_p} \|u(x, t) - U(x, t; M)\|_p \rightarrow 0, \quad \alpha_p = \frac{n(p-1)}{p(n(m-1)+2)} \quad (3.35)$$

donde la norma $\|*\|_p$ está definida como

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.36)$$

² $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones integrables en todo conjunto acotado contenido en su dominio de definición y cuya clausura está contenida también en tal dominio

3.4. Frontera libre

Una de las principales diferencias que presenta EMP frente a la ecuación del calor es la propiedad de propagación finita. Así, resulta crucial determinar la forma y regularidad de la frontera y su comportamiento en el tiempo.

Como primera aproximación, una solución con soporte inicial compacto tiende a ocupar, en el límite asintótico, un recinto de la forma

$$R(t) \approx ct^\sigma \tag{3.37}$$

donde el coeficiente de expansión σ depende de los valores n , m y es siempre menor que $\frac{1}{2}$. La constante c depende de la masa inicial M . Así, el soporte tenderá a simetrizarse y la solución tenderá a la solución fundamental de Barenblatt.

Respecto a la descripción cualitativa de esta frontera, existen dos aproximaciones distintas: el formalismo lagrangiano y el formalismo euleriano.

Por una parte, la perspectiva de Lagrange se basa sobre un enfoque mecánico similar al habitual: el punto central de estudio son las trayectorias de las partículas en el fluido. Esta trayectoria está descrita por un vector de posición $r(t)$. Asumiendo una posición inicial de la partícula en r_0 , la colección de todas las trayectorias del fluido es $r = r(r_0, t)$, que matemáticamente expresa un mapeo del espacio $r_0 \rightarrow r$ en función del tiempo. En este sentido, las partículas poseerán una velocidad y formarán un campo, satisfaciendo

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} \tag{3.38}$$

Por otra parte, el punto de vista euleriano supone un marco de referencia fijo sobre el que varían los campos hidrodinámicos. El estudio de las trayectorias pierde importancia, mientras que el campo de velocidades pasa a ser la pieza fundamental. Esta es, quizás, una perspectiva más natural para el fluido, pues las trayectorias de las partículas son, en general, provenientes y en dirección a la lejanía, mientras que su velocidad puede suponerse más o menos constante. En este sentido, la variación de cualquier magnitud física A del fluido dejará de ser explícitamente dependiente del tiempo y pasará a depender de la posición también.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v \cdot \nabla)A \tag{3.39}$$

donde el término $v \cdot \nabla$ recibe el nombre de derivada de la partícula y se expresa

$$v \cdot \nabla = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.40)$$

Respecto al tratamiento matemático de la frontera en el marco del MEF, siempre se tendrá la ley de Darcy para la descripción de su movimiento. Sin embargo, la implementación del esquema dependerá del tipo de malla escogida: discretización por triangulación o uso de diferentes tensores métricos. En ambos casos, el movimiento de la malla estará presentado como una ecuación diferencial extra al problema. El procedimiento para el cálculo de las integrales que aparezcan dependerá del autor y de la distinta casuística del problema.

Capítulo 4

Aplicación a la práctica

Hasta el momento, hemos estado trabajando con EMP de la forma (2.16). Consideraremos el caso (4.1) como EMP con término de absorción por ser una generalización del primero con las mismas reglas de movimiento de la frontera. En efecto, las variaciones de este movimiento sólo afectan para p muy grande, por lo que esencialmente el comportamiento será el mismo.

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz-continua y consideremos $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ un cilindro de altura T finita. Tomemos las soluciones no negativas del siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(u^m) - u^p \quad (4.1)$$

$$u = 0 \text{ en } \Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T] \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega \quad (4.3)$$

Este tipo de ecuación aparece en la mecánica de medios continuos para modelizar el movimiento de un gas a través de un medio poroso, donde la presión depende explícitamente de la densidad y la temperatura a través de una ecuación de estado. La EMP con exponentes constantes m y p presenta, como principal diferencia respecto de la ecuación del calor, la propiedad de velocidad de propagación finita.

La existencia y unicidad de soluciones débiles para las ecuaciones de este tipo fueron estudiadas por muchos autores. Nosotros referimos a las monografías [[7],[8],[9]] para la revisión exhaustiva de la bibliografía sobre este tema y también sobre los propiedades cualitativas de las soluciones, que son muy diferentes de las propiedades de soluciones de

las EDPs lineales.

Respecto a la regularidad de las soluciones, si la solución inicial posee soporte compacto, entonces existirá una frontera móvil delimitando tal soporte y podremos tratar (4.1) como un problema de frontera libre, tomando $\Omega(t)$ como la región ocupada por el gas en un tiempo t . Estudios posteriores demostraron que $\Omega(t) = \{x : u(x, t) > 0\}$ es un intervalo $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ donde $\xi_i(t)$ es continua en el intervalo $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$ para exponentes $m > 1, p > 1$. En base a estos resultados se probó la existencia de un «tiempo de espera», t^* , extendiendo ξ_i derivable en el intervalo (t^*, ∞) .

Para el caso unidimensional, de cara a la modelización del movimiento de la frontera, cuando $x \rightarrow \xi_i(t)$, para el caso $1 < p \leq m$ se tiene la relación

$$\xi_i'(t) = -\frac{m}{m-1}u_x^{m-1}(\xi_i(t), t), \quad t \in (t^*, T) \quad (4.4)$$

Existe una generalización para varias dimensiones, donde el movimiento de la frontera cumple

$$\Gamma'(t) = \lim_{x \rightarrow \Gamma} \left(-\frac{m}{m-1} \nabla u^{m-1} + \nabla \Pi \right) \quad (4.5)$$

donde el término Π es solución al problema elíptico

$$\operatorname{div}(u \nabla \Pi) = u^p \text{ en } \Omega(t) \quad (4.6)$$

$$\Pi = 0 \text{ en } \Gamma(t) \quad (4.7)$$

y la derivada se entiende en el sentido direccional tras definir la componente normal del movimiento. Destacar que la fórmula anterior es válida únicamente para tiempos pequeños, donde el comportamiento de la frontera se puede describir localmente.

Como conclusión, la solución u y la frontera Γ son funciones reales analíticas en t y preservan la regularidad inicial en las variables espaciales.

4.1. Velocidad finita de propagación

El estudio de las ecuaciones parabólicas lineales y semilineales basan gran parte de su desarrollo realizando una comparación con el comportamiento modelo de la ecuación del calor (EC). Por esto, las principales preguntas relativas a existencia y unicidad, así como el estudio de la regularidad de soluciones son la base sobre la que sustentar todo nuestro

desarrollo.

En el caso de la ecuación del medio poroso (EMP), aparecen una serie de fenómenos que la diferencian de la teoría general de ecuaciones parabólicas. En términos matemáticos, la principal diferencia que presenta EMP resulta su carácter degenerado en la frontera. Como consecuencia, la velocidad de propagación, a diferencia de EC, posee carácter finito.

De forma sucinta, tal comparación puede expresarse como sigue:

- EC: Una solución no-negativa de EC es automáticamente positiva en todo punto de su dominio de definición
- EMP: Perturbaciones respecto al valor nulo de la solución, $u = 0$, se propagan en el tiempo con velocidad finita para las soluciones de EMP

Una de las consecuencias principales de la propiedad de propagación finita aplica sobre la imposibilidad de construir un «principio fuerte del máximo». En este sentido, esto implica que siempre que los datos iniciales sean cero en algún dominio abierto del espacio, la propiedad de propagación finita significa la aparición de una «frontera libre», que separa la región donde la solución es positiva (es decir, allí donde hay gas al tomar u con la variable densidad) y la región vacía (es decir, $u = 0$). Así, la frontera, tomando Q como dominio de definición de la solución en el espacio-tiempo, puede expresarse como

$$\Gamma = \partial P_u \cap Q, \quad P_u = \{(x, t) \in Q : u(x, t) > 0\} \quad (4.8)$$

Puesto que esta frontera evoluciona con el tiempo, en muchos casos recibe el nombre de «frontera móvil». En ciertas ocasiones también recibirá el nombre de «interfaz» cuando nos refiramos a las coordenadas espaciales.

4.2. Tiempo de espera y blow-up

Dos de los fenómenos más importantes de EMP con respecto a EC son la existencia de un tiempo de espera, entendido como un tiempo inicial de no evolución del dato inicial, y el *blow-up*, haciendo referencia a la «explosión» de la solución en tanto que deja de existir globalmente en el tiempo a causa de un crecimiento infinito de las variables que describen la evolución.

Respecto al primer fenómeno del tiempo de espera, existe una dependencia en función del carácter «llano» del soporte compacto inicial en la frontera. En efecto, la solución pudiera no expandirse durante un cierto periodo de tiempo inicial. Este fenómeno es particular de ciertas ecuaciones de difusión degeneradas. En concreto, como se ha comentado anteriormente, EMP es degenerada en los puntos $u = 0$. Dicho fenómeno está controlado por el comportamiento de la solución cerca de los puntos de la frontera, en el sentido de que si la solución decrece rápidamente cerca de estos puntos, el soporte está inmóvil. La solución se reorganiza. Cuando la solución adquiere una forma adecuada entonces comienza el movimiento de la frontera. Esto último es un comportamiento muy típico de las ecuaciones no lineales.

Este fenómeno es captado a través de discretizaciones de Lagrange. La prueba matemática se basa en el estudio de la velocidad del fluido en coordenadas lagrangianas. El punto central resulta la acotación de la propagación de la frontera libre y en la simulación numérica para discretizaciones relativamente gruesas.

Respecto al segundo fenómeno, dentro del marco de los sistemas de evolución no lineales, existen ciertas singularidades móviles que aparecen por mecanismos propios de las EDPs y que deben ser estudiados en función de las coordenadas espacio temporales. Uno de las singularidades espontáneas más claras en procesos de difusión no-lineal aparece cuando las variables tienden al infinito a partir de un cierto tiempo límite $T > 0$. Para mostrarlo, tomemos el siguiente ejemplo como modelo didáctico. Consideremos el problema

$$u_t = u^2, \quad u(0) = a, \quad t > 0 \quad (4.9)$$

Siendo $a > 0$, existe una solución para $t < T = \frac{1}{a}$ de la forma $u(t) = \frac{1}{T-t}$, que es «suave» para $t < T$ y tiende a infinito cuando $t \rightarrow T^-$. Así, diremos que la solución «explota» cuando $t = T$.

Retomando el modelo de EMP, existen varias posibilidades para observar el efecto «blow-up». Podría darse tal fenómeno en el infinito, después de un cierto tiempo o instantáneamente. Nos centraremos en el caso de «blow-up» tras un tiempo finito. Sea EMP con coeficientes de difusión:

$$u_t = \Delta u^m + u^p, \quad p > 1 \quad (4.10)$$

En vista de la intensidad de la fuente de calor, $f(u) = u^p$, para grandes $u > 1$, el problema de Cauchy admite soluciones locales en el tiempo que quizás exploten tras un cierto tiempo finito. El resultado dependerá de los exponentes m y p . En efecto, si se tiene la relación

$$1 < p \leq m + \frac{2}{n}, \quad n : \text{dimensiones} \quad (4.11)$$

entonces cualquier solución $u \neq 0$ explotará tras un tiempo finito, es decir, existirá un tiempo $T = T(u_0) < \infty$ tal que la solución está bien definida, acotada y suave para los tiempos $0 < t < T$ y

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t) \rightarrow \infty \quad \text{si } t \rightarrow T^- \quad (4.12)$$

Por otra parte, si $p > m + \frac{2}{n}$, el «blow-up» ocurre si el dato inicial u_0 es suficientemente grande y depende de un concepto más sutil, denominado exponente de Fujita.¹

4.3. Evolución de la frontera

Consideremos EMP en el caso bidimensional y preguntémosnos por su tratamiento desde los elementos finitos. El punto central de la discusión sobre EMP es la existencia de una frontera libre. En términos matemáticos, dicho movimiento de la frontera ha de plantearse como una ecuación extra al sistema de EDPs inicial utilizando la ley de Darcy. Sin embargo, puesto que trataremos el problema desde la perspectiva de los elementos finitos, el objetivo central es la discretización del espacio. Este apartado estará dedicado al estudio de distintas aproximaciones para tal discretización y una posterior comparación entre ellos.

La primera aproximación fue realizada por Duque, Almeida y Antontsev [2] y se basa en una triangulación del dominio espacial. En cada elemento finito, la solución es aproximada por polinomios de interpolación de Lagrange en coordenadas de área. Los vértices de los triángulos se mueven de acuerdo a una ecuación extra añadida al sistema de ecuaciones diferenciales inicial. Este sistema es posteriormente transformado en EDOs resueltas mediante la integración apropiada.

Para la creación de la malla, se utilizó el método MMPDE (*Moving Mesh for Partial Differential Equations*) donde la adaptación de la malla se entiende como una transformación coordenada entre conjuntos. En particular, se considera Ω_f como el dominio de

¹El exponente de Fujita es el punto crítico $p_c = m + \frac{2}{n}$

definición y Ω_c un dominio artificial utilizado para calcular la malla usando mapeos. Sean $x = (x, y)$ y $\chi = (\chi, \eta)$ las coordenadas locales de los dominios Ω_f y Ω_c , respectivamente. Para determinar la malla móvil en Ω_f es la imagen, por los mapeos, de una malla fija en Ω_c . La transformación de las coordenadas, $x = (x, y)$, se calcula mediante el siguiente esquema para la variable x , asumiendo que para la variable y son análogas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} \operatorname{div}(m \nabla x) \\ x(\chi, \eta, 0) &= x_0(\chi, \eta) \\ x(\chi, \eta, t) &= f_1(\chi, \eta, t)\end{aligned}$$

El factor τ es un parámetro controlado por el usuario que permite controlar la velocidad de adaptación de la malla y las funciones f_1 y f_2 están relacionadas con su movimiento. En el caso de frontera fija, $f_1 = x_0$ y $f_2 = y_0$. El método mueve los nodos donde la función «monitor», m , tiene sus máximos. Si la función monitor es constante, entonces la malla está equidistribuida por todo el dominio. En este caso, resultará interesante escoger una función monitor que concentre puntos donde el gradiente de u sea elevado, es decir, cerca de la frontera, que es la zona de mayor irregularidad.

Por otra parte, el segundo método considerado fue reproducido por Ngo y Huang [10] y resulta nuevamente MMPDE con una serie de novedades en su implementación. La primera es la utilización de una forma compacta y explícita de las velocidades de la malla, mucho más fácil de programar. Se utilizan también tres tipos de tensores métricos correspondientes a diferentes mallas adaptativas: uniforme, basadas en la longitud de arco y basadas en el Hessiano.

Se plantearon dos alternativas distintas para la resolución de EMP. Por un lado, se trata de resolver EMP sobre un dominio suficientemente grande tal que contenga la frontera durante todo el tiempo de simulación. Con esta aproximación, no se requiere tratar explícitamente la frontera libre lo que facilita la resolución en caso de soportes muy complejos de la solución. La desventaja que presenta este método atañe a la forma esquinada que adquiere la solución alrededor de la frontera, por lo que su regularidad no es demasiado buena. Por otra parte, la segunda aproximación trata de resolver EMP exclusivamente en la zona de soporte compacto. La ventaja principal es que, al ser un dominio más pequeño, se utilizarán menos puntos para la creación de la malla para alcanzar la misma

precisión. Además, la regularidad de la solución es mejor que en el caso anterior ya que no presenta la forma esquinada. Sin embargo, la frontera ha de ser tratada explícitamente utilizando la ley de Darcy, lo que complica significativamente los cálculos.

Según Ngo y Huang, la primera aproximación es más efectiva al no tratar explícitamente con la ley de Darcy y obtener soluciones precisas para soportes de la solución más complejos. Para resolver el problema de la poca regularidad, se utiliza MMPDE para adaptar y concentrar puntos alrededor de la frontera libre.

En este caso, la discretización se realizó como sigue

$$x_j(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} x_j^{n+1} + \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} x_j^n$$

$$\dot{x}_j(t) = \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{t_{n+1} - t_n}$$

Ahora bien, la velocidad de la malla se expresa como

$$\dot{X}(x, t) = \sum_{j=1}^{N_v} \dot{x}_j(t) \phi_j(x, t) \quad (4.13)$$

donde $\phi_j(x, t)$ es función en la base lineal asociada al vértice $x_j(t)$, y por tanto se obtiene:

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N_v} \frac{\partial u_j}{\partial t} \phi_j(x, t) - \nabla u_h \cdot \dot{X} \quad (4.14)$$

y tomando ahora $v = \phi_i$, ($i = 1, \dots, N_{vi}$) en la aproximación de elementos finitos se llega

$$\sum_{j=1}^{N_{vi}} \left(\int_{\Omega} \phi_j \phi_i \, dx \right) \frac{\partial u_j}{\partial t} = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot (\dot{X} \phi_i - |u_h|^m \nabla \phi_i) \, dx, \quad i = 1, \dots, N_{vi}, \quad t_0 < t \leq T \quad (4.15)$$

que se puede expresar en forma matricial como

$$B(X) \dot{U} = F(U, X, \dot{X}) \quad (4.16)$$

donde B es la matriz de masa, X y U son los vectores representantes de la malla y de la solución, respectivamente. El sistema es integrado por el método de Radau², intercalando integración y generación de la malla móvil.

²Los métodos de Radau IIA son algoritmos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales «no-suaves».

Capítulo 5

Resultados numéricos

En este último capítulo, trataremos EMP desde el punto de vista de los métodos numéricos. Existen dos principales inconvenientes: la propiedad de propagación finita de la frontera libre y el *tiempo de espera* inicial. A través de una aproximación basada en las leyes de conservación y disipación de la energía, se estudiarán dos modelos relativos al principio variacional. La elección del procedimiento variacional se debe a la imposibilidad de los esquemas numéricos para la visualización de la interfaz, salvo que se pueda predecir a priori con exactitud. La perspectiva numérica no predice tal posicionamiento con precisión, por lo que se opta por los métodos de integración variacionales (frente a la derivación, que es menos precisa).

Por una parte, comenzaremos con $f \log(f)$ como la energía disipativa total para obtener la ecuación de la trayectoria y, posteriormente, construir un esquema discreto. Se puede probar que dicho esquema es resoluble únicamente sobre un cierto conjunto convexo al aprovechar la singularidad de la energía total. Por otra parte, tomando $\frac{1}{2f}$ como energía total de la ley de disipación, se construirá un esquema lineal numérico para la correspondiente ecuación de la trayectoria.

La principal ventaja que presentan estos métodos es que, bajo ciertas hipótesis de regularidad, los esquemas son convergentes de segundo orden en espacio y de primer orden en tiempo. Además, no se observan oscilaciones numéricas alrededor de la frontera libre y el fenómeno del *tiempo de espera* es tratado de forma más natural.

Comencemos pues por la ley de disipación de energía

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega(f) dx = - \int_{\Omega} \eta(f) |u|^2 dx \quad (5.1)$$

donde $\omega(f)$ es la densidad de energía libre, $\eta(f)$ es un funcional de f determinado por ω y u es la velocidad. En este apartado, se estudiarán las siguientes posibilidades:

$$\omega(f) = \frac{1}{m-1} f^m \longrightarrow \eta(f) = f \quad (5.2)$$

$$\omega(f) = f \ln(f) \longrightarrow \eta(f) = \frac{f}{m f^{m-1}} \quad (5.3)$$

$$\omega(f) = \frac{1}{2f} \longrightarrow \eta(f) = \frac{1}{m f^m} \quad (5.4)$$

A través de estas relaciones de disipación de la energía se derivarán esquemas numericos pertinentes. En particular, el esquema desarrollado a partir de la ecuación (5.2) recibe el nombre de Esquema Variacional de la Partícula. Notar que, a diferencia del primer caso, la segunda y tercera relaciones presentan una singularidad cuando f tiende a cero, lo cual puede resultar de utilidad para probar ciertas propiedades como la conservación de la positividad o la resolubilidad única en cierto conjunto convexo.

Existe una clara relación entre la elección de la energía libre $\omega(f)$ y la solución final explicitada en (5.1) a través del funcional $\eta(f)$. En el siguiente desarrollo se observará directamente la relación mediante un ejemplo para EMP con condición inicial de Barenblatt.

5.1. Ecuación de la trayectoria

Consideremos la siguiente formulación de EMP

$$\partial_t f = \Delta_x (f^m), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad m > 1, \quad t > 0$$

$$f(x, 0) = f_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega$$

$$\nabla_x f \cdot n = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

donde f es una función no-negativa, Ω es un dominio acotado y n es la dirección de la normal exterior.

Utilizaremos la «Aproximación por Energía Variacional» para calcular la ecuación de la trayectoria (también llamada «relación constitutiva») en base al Principio de Mínima Acción y el Principio de Máxima Disipación¹. Comencemos pues enunciando los principios físicos involucrados.

1. Conservación de la masa

En coordenadas eulerianas, la relación puede expresarse como

$$\partial_t f + \nabla \cdot (fu) = 0 \quad (5.5)$$

donde f es la densidad y u la velocidad.

En coordenadas lagrangianas, la solución resulta

$$f(x(X, t), t) = \frac{f_0(X)}{\det \frac{\partial x(X, t)}{\partial X}} \quad (5.6)$$

donde $f_0(X)$ es el dato inicial y $\det \frac{\partial x(X, t)}{\partial X}$ es el determinante del gradiente de deformación.

2. Ley de disipación de la energía

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega(f) dx = - \int_{\Omega} \eta(f) |u|^2 dx \quad (5.7)$$

donde la energía total es $E = \int_{\Omega} \omega(f) dx$ y el término de disipación relativo a la velocidad es $\Delta = \int_{\Omega} \eta(f) |u|^2$.

3. Principio de mínima acción

Las trayectorias de las partículas desde un tiempo $t = 0$ hasta un cierto $t = T^*$ serán aquellas que minimicen el funcional de acción definido como sigue

$$A(x) = - \int_0^{T^*} F dt = - \int_0^{T^*} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{f_0(X)}{\det \frac{\partial x}{\partial X}}\right) \det \frac{\partial x}{\partial X} dX dt \quad (5.8)$$

donde F es la energía libre de Helmholtz. Tomando el variacional de $A(x)$, obtenemos la

¹Principio de Mínima Acción: la evolución temporal de todo sistema físico se dará de tal manera que una cantidad denominada «acción» tenderá a ser la mínima posible

fuerza de conservación en coordenadas de Euler

$$F_{con} = \frac{\delta A}{\delta x} = -\nabla(f\omega'(f) - \omega) = -f\nabla\omega'(f) \quad (5.9)$$

4. Principio de máxima disipación

El principio de Onsanger puede obtenerse tomando el variacional de $\frac{1}{2}\Delta$ con respecto a la velocidad como sigue

$$F_{dis} = \frac{\delta \frac{1}{2}\Delta}{\delta u} = \eta(f)u \quad (5.10)$$

5. Equilibrio de fuerzas

$$F_{dis} = F_{con} \longrightarrow f\nabla\omega'(f) = -\eta(f)u \longrightarrow \frac{f^2\omega''(f)\nabla f}{\eta(f)} = -fu \quad (5.11)$$

Observando la ley de conservación de masa en (5.5) y la formulación inicial del problema, tomaremos la relación $-fu = \nabla(f^m)$, entonces

$$\frac{f^2\omega''(f)}{\eta(f)} = mf^{m-1} \quad (5.12)$$

Esto significa que si la energía libre $\omega(f)$ es dada, el funcional $\eta(f)$ estará determinado. Existen infinitas relaciones para la ley de disipación de energía para EMP. En nuestro caso, tomaremos las tres siguientes:

Caso 1

Si $\omega(f) = \frac{1}{m-1}f^m$, entonces $\eta(f) = f$ y la *relación constitutiva* resulta

$$\nabla_x f^m = -fu \quad (5.13)$$

Además, si la presión es $P = \frac{m}{m-1}f^{m-1}$, la ley de Darcy expresa $u = \nabla P$

Caso 2

Si $\omega(f) = f \log(f)$, entonces $\eta(f) = \frac{f}{mf^{m-1}}$ y la *relación constitutiva* será

$$\nabla_x f = -\frac{f}{mf^{m-1}}u \quad (5.14)$$

Caso 3

Por último, si $\omega(f) = \frac{1}{2f}$ entonces $\eta(f) = \frac{1}{mf^m}$ y la *relación constitutiva*

$$\nabla_x \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{u}{mf^m} \quad (5.15)$$

Esta perspectiva nos llevará a una esquema numérico lineal para el estudio de la trayectoria.

Respecto a la interpretación física de los resultados, cabe destacar los siguientes resultados:

- La densidad de energía libre $\omega(f) = \frac{1}{m-1}f^m$ se deriva directamente de la ley de Darcy.
- EMP describe el flujo de un gas ideal en un medio poroso homogéneo. Así, considerando $\omega(f) = f \log(f)$ como la entropía asociada, $\eta(f) = \frac{1}{mf^{m-1}}f$ contiene la información sobre viscosidad del fluido y permeabilidad del medio.
- Se puede considerar $\frac{1}{2f}$ como la densidad de energía libre asociada a una elasticidad lineal no-homogénea en un medio no-homogéneo. La información sobre la entropía viene dada por $\eta(f) = \frac{1}{mf^m}$.

En resumen, todas las trayectorias obtenidas por los distintos procedimientos serán equivalentes. Sin embargo, las discretizaciones numéricas llevarán a esquemas distintos con sus correspondientes leyes de conservación.

Coordenadas lagrangianas en 1D

Nuevamente, las coordenadas lagrangianas ofrecen la descripción de las partículas desde la perspectiva de un observador móvil. Así, las posiciones serán descritas a través de las condiciones iniciales, a diferencia de la perspectiva euleriana de un observador fijo. En este sentido, la aproximación lagrangiana ofrece una descripción local en base a saltos de tiempo pequeños para modelos bidimensionales o de dimensiones superiores. Sin embargo, para el caso unidimensional, la descripción es válida para cualquier tiempo.

Utilizaremos la relación (5.6) y las *relaciones constitutivas* anteriormente introducidas para obtener finalmente la ecuación de trayectoria. Reemplazando u por $x_t(X, t)$ se tiene

Caso 1

$$f_0(X)\partial_t x = -\partial_X \left[\left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^m \right], \quad X \in \Omega \quad (5.16)$$

Puesto que, por la ley de Darcy, $\omega(f) = \frac{1}{m-1}f^m$, entonces $\eta(f) = f$ y teniendo en cuenta la conservación de la masa dada en (5.6), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega(f) \, dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{m-1} f^m \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{m-1} \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^m \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{m-1} \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^m \frac{\partial x}{\partial X} \, dX \end{aligned}$$

Utilizando ahora la ley de disipación de (5.7), se llega a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{m-1} \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^m \frac{\partial x}{\partial X} \, dX \\ &= - \int_{\Omega} f |x_t|^2 \, dx = - \int_{\Omega} \frac{f_0(X)}{\partial_X x} |x_t|^2 \partial_X x \, dX = - \int_{\Omega} f_0(X) |x_t|^2 \, dX \end{aligned}$$

Luego la ley de conservación asociada será

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{m-1} \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^m \frac{\partial x}{\partial X} \, dX = - \int_{\Omega} f_0(X) |x_t|^2 \, dX \quad (5.17)$$

Caso 2

$$\frac{f_0(X)}{m \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^{m-1}} \partial_t x = -\partial_X \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right), \quad X \in \Omega \quad (5.18)$$

y la ley de conservación correspondiente

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f_0(X) \ln \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right) dX = - \int_{\Omega} \frac{f_0(X)}{m \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^{m-1}} |\partial_t x|^2 dX \quad (5.19)$$

Caso 3

$$\frac{(\partial_X x)^{m+1}}{m f_0(X)^m} \partial_t x = \partial_X \left(\frac{\partial_X x}{f_0(X)} \right), \quad X \in \Omega \quad (5.20)$$

y, finalmente, su ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{f_0(X)} |\partial_X x|^2 dX = - \int_{\Omega} \frac{\partial_X x}{m \left(\frac{f_0(X)}{\partial_X x} \right)^m} |x_t|^2 dX \quad (5.21)$$

Todas las ecuaciones son equivalentes, simplemente están escritas bajo diferentes leyes de energía. Para su resolución, se utilizarán condiciones iniciales y de contorno adecuadas para obtener la trayectoria $x(X, t)$. En particular, las condiciones que se impondrán son

$$x \upharpoonright_{\partial\Omega} = X \upharpoonright_{\partial\Omega}, \quad t > 0 \quad (5.22)$$

$$x(X, 0) = X, \quad X \in \Omega \quad (5.23)$$

5.2. Esquemas numéricos

Este último apartado está dedicado al cálculo explícito del esquema numérico para el caso 3, anteriormente introducido en (5.20). Comencemos por un modelo semi-discreto en el tiempo, donde $\tau = \frac{T}{N}$ siendo $N \in \mathbb{N}^+$ y T es el tiempo final.

$$\frac{(\partial_X x^n)^{m+1} x^{n+1} - x^n}{mf_0(X)^m \tau} = \partial_X \left(\frac{\partial_X x^{n+1}}{f_0(X)} \right), \quad n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (5.24)$$

Como forma general, se tiene la siguiente relación

$$\gamma(x)x_t = -\frac{\delta W}{\delta x} \quad (5.25)$$

siendo $\gamma(x)$ una función positiva dependiente del espacio x y W un funcional de x .

Así pues, el esquema discreto en tiempo será

$$\gamma(x^n) \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = -\frac{\delta W(x^{n+1})}{\delta x^{n+1}}, \quad n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (5.26)$$

Asumiendo ahora que x^n es suave para un tiempo t^n para definir correctamente la derivada $\frac{\partial x}{\partial X}$, $n = 0, \dots, N$, el paso x^{n+1} será el *minimizador* del siguiente funcional

$$\min_{x^{n+1} \in \Omega} \left\{ \int_{\Omega} \gamma(x^n) \frac{|x^{n+1} - x^n|^2}{2\tau} + W(x^{n+1}) dX \right\} \quad (5.27)$$

donde las funciones $\gamma(x)$ y $W(x)$ están definidas como

$$\gamma(x^n) = \frac{(\partial_X x^n)^{m+1}}{mf_0(X)^m}, \quad W(x^{n+1}) = \frac{1}{2} \frac{1}{f_0(X)} |\partial_X x^{n+1}|^2 \quad (5.28)$$

Sea X_0 el punto inicial izquierdo de Ω y $h = \frac{|\Omega|}{M}$ el paso espacial, $M \in \mathbb{N}^+$. Denotamos $X_r = X_0 + rh$, donde r toma valores enteros y semienteros y definamos los espacios de funciones siguientes

$$\epsilon_M = \{X_i | i = 0, \dots, M\} \quad (5.29)$$

$$C_M = \{X_{i-\frac{1}{2}} | i = 1, \dots, M\} \quad (5.30)$$

En forma de componentes, las funciones estarán representadas por $l_i = l(X_i)$, $l \in$

ϵ_M , $i = 0, \dots, M$ y $\phi_{i-\frac{1}{2}} = \phi(X_{i-\frac{1}{2}})$, $\phi \in C_M$, $i = 1, \dots, M$

Para el cálculo del modelo totalmente discreto, introduciremos los siguientes operadores diferenciales. Estos operadores $D_h : \epsilon_M \longrightarrow C_M$, $d_h : C_M \longrightarrow \epsilon_M$ y $\tilde{D}_h : \epsilon_m \longrightarrow \epsilon_M$ están definidos como

$$(D_h l)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{l_i - l_{i-\frac{1}{2}}}{h}, \quad i = 1, \dots, M \quad (5.31)$$

$$(d_h \phi)_i = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{h}, \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (5.32)$$

$$(\tilde{D}_h l)_i = \frac{l_{i+\frac{1}{2}} - l_{i-\frac{1}{2}}}{2h}, \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (5.33)$$

$$(\tilde{D}_h l)_i = \frac{4l_{i+1} - l_{i+2} - 3l_i}{2h}, \quad i = 0 \quad (5.34)$$

$$(\tilde{D}_h l)_i = \frac{l_{i-2} - 4l_{i-1} + 3l_i}{2h}, \quad i = M \quad (5.35)$$

A partir del dato inicial $f_0(X) \in \epsilon_M$ y la posición x^n se resuelve el sistema para encontrar $x^{n+1} = (x_0^{n+1}, \dots, x_M^{n+1})$ mediante

$$\frac{(\tilde{D}_h x^n)_i^{m+1} x_i^{n+1} - x_i^n}{m f_0(X_i)^m \tau} = d_h \left(\frac{D_h x^{n+1}}{f_0(X)} \right)_i, \quad 1 \leq i \leq M-1 \quad (5.36)$$

$$x_0^{n+1} = X_0 \text{ y } x_M^{n+1} = X_M, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5.37)$$

Resolviendo (5.36), obtenemos la solución numérica final $f_i^n := f(x^n, t^n)$ discretizando (5.6) como

$$f_i^n = \frac{f_0(X_i)}{\tilde{D}_h x_i^n}, \quad 0 \leq i \leq M \quad (5.38)$$

Estudiemos por último el caso de la frontera libre. Consideremos un dato inicial con soporte compacto en Ω . Por la degeneración de EMP, aparecerán interfaces izquierda y derecha, definidas como

$$\chi_1^t = \inf\{x \in \Omega \mid f(x, t) > 0, t \geq 0\} \quad (5.39)$$

$$\chi_2^t = \sup\{x \in \Omega \mid f(x, t) > 0, t \geq 0\} \quad (5.40)$$

Sea pues $\Gamma^t = [\chi_1^t, \chi_2^t] \subset \Omega$ y consideremos $\Gamma^0 \subsetneq \Omega$ para resolver el problema de valor inicial siguiente

$$\frac{(\partial_X x)^{m+1}}{m f_0(X)^m} \partial_t x = \partial_X \left(\frac{\partial_X x}{f_0(X)} \right), \quad X \in \Gamma^0, \quad t > 0 \quad (5.41)$$

$$(\partial_X x)^{m-1} \partial_t x = -\frac{m}{m-1} \frac{\partial_X [f_0(X)^{m-1}]}{\partial_X x}, \quad X \in \partial\Gamma^0, \quad t > 0 \quad (5.42)$$

$$x(X, 0) = X, \quad X \in \Gamma^0 \quad (5.43)$$

Finalmente, para el esquema totalmente discretizado, sea $h = \frac{\chi_2^0 - \chi_1^0}{M}$ y particionando Γ^0 como $X_i = \chi_1^0 + ih$, $0 \leq i \leq M$, se tiene

$$\frac{(\tilde{D}_h x^n)_i^{m+1} x_i^{n+1} - x_i^n}{m f_0(X_i)^m \tau} = d_h \left(\frac{D_h x^{n+1}}{f_0(X_i)} \right)_i, \quad 1 \leq i \leq M-1 \quad (5.44)$$

$$(\hat{D}_h x_i^n)^{m-1} \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = -\frac{m}{m-1} \frac{\hat{D}_h [f_0(X_i)^{m-1}]}{\hat{D}_h x_i^{n+1}}, \quad i = 0, M \quad (5.45)$$

donde el operador diferencial \hat{D}_h está definido como

$$\hat{D}_h l_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{h}, \quad i = 0 \quad (5.46)$$

$$\hat{D}_h l_i = \frac{l_i - l_{i-1}}{h}, \quad i = M \quad (5.47)$$

Como conclusión, el resultado es un sistema de ecuaciones en el que la primera ecuación es lineal y la segunda no-lineal. La resolución del sistema se realiza utilizando el método de Newton.

Una aproximación alternativa

Tras haber analizado los métodos tan sofisticados anteriores, se propone una alternativa quizás más intuitiva y manejable para su comprensión. Consideremos pues las soluciones no-negativas de EMP:

$$u_t = (u^m)_{xx} \text{ en } S_T = \mathbb{R} \times (0, T), \quad m > 1 \quad (5.48)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}, \quad \text{sup}(u_0) = I(0) = (\alpha, \beta) \quad (5.49)$$

Físicamente, la formulación del problema se entiende desde la perspectiva de propagación de un gas en un medio poroso, por lo que la incógnita, u , hace referencia a la densidad de tal gas. Utilizando ahora la ley de conservación de la masa y tomando un conjunto arbitrario, ω_0 , en el dominio inicial $I(0)$, se tiene la masa de tal conjunto ω_0

$$M = \int_{\omega_0} u_0 \, dX \quad (5.50)$$

donde la variable de integración, X , representa las posiciones iniciales en formulación lagrangiana. Sea ahora $\omega(t)$ las posiciones de las partículas inicialmente situadas en ω_0 , por conservación de la masa

$$M = \int_{\omega(t)} u(x, t) \, dx \quad (5.51)$$

donde la densidad, u , es una función de la posición en un sistema de coordenadas independiente del medio. Reformulando el problema en coordenadas lagrangianas, es decir, a través de posiciones iniciales $X \in \omega_0$ y del tiempo $t \in (0, T)$. Como la masa era una constante por la ley de conservación

$$0 = \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} u(x, t) \, dx \right) \quad (5.52)$$

Realizando ahora el cambio de variable $x \rightarrow X$, se tiene

$$u(x, t) = u[x(X, t), t] = U(x, t) \text{ y } v(x, t) = v[x(X, t), t] = V(x, t) \quad (5.53)$$

donde las variables en minúscula hacen referencia a la formulación euleriana y las mayúscu-

las a la lagrangiana. Utilizando este cambio en la ley de conservación se obtiene

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} u(x, t) dx \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_0} U(X, t) x_X dX \right) = \int_{\omega_0} (U(X, t) x_X)_t dX \quad (5.54)$$

Puesto que el dominio de integración es arbitrario, el integrando ha de ser nulo. Luego

$$(U(X, t) x_X)_t = 0 \longrightarrow U(X, t) x_X = U(X, 0) = u_0(X) \quad (5.55)$$

Por otra parte, calculando la derivada temporal a lo largo de la trayectoria

$$\frac{dU}{dt}_{x(X,t)} = U_t + U_X x_t \quad (5.56)$$

y utilizando la relación de la trayectoria

$$x_t = V(X, t), \quad x(X, 0) = X \longrightarrow (x_X)_t = (x_t)_X = V_X \quad (5.57)$$

se consigue reescribir la relación de conservación de forma más compacta

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega(t)} u(x, t) dx \right) = \int_{\omega_0} (u_t + (uv)_x) x_X dX = \int_{\omega(t)} (u_t + (uv)_x) dx \quad (5.58)$$

Así, como el dominio de integración era arbitrario, el integrando ha de anularse

$$u_t + (uv)_x = 0 \quad (5.59)$$

Retomando el problema original, hemos de definir la velocidad $v(x, t)$ para que coincida con (5.59) como

$$v = -\frac{m}{m-1} (u^{m-1})_x \quad (5.60)$$

Ahora bien, en coordenadas de Lagrange, el problema se formula como

$$U x_X = u_0 \text{ en } I_0 \times (0, T) \quad (5.61)$$

$$x_t = -\frac{m}{m-1} (U^{m-1})_x = -\frac{1}{u_0} (U^m)_X \quad (5.62)$$

Para la resolución del sistema anterior, es posible excluir cualquiera de las dos incógnitas. Así, los problemas resultantes ya sea para la densidad, $U(X, t)$, o para la trayectoria,

$x(X, t)$, se plantean sobre un dominio conocido (un rectángulo). La posición de las fronteras libres se desprende de la ecuación de trayectoria. Sin embargo, el dato inicial, u_0 , aparece en la resolución del sistema. Para evitar este inconveniente se crea una nueva variable, la "variable de masa.^a a través de la relación

$$\eta = \int_{-\infty}^X u_0(s) ds \quad (5.63)$$

cuyo sentido físico hace referencia a la masa del gas en la semirrecta $(-\infty, X)$ y está relacionado mediante $\eta_X = u_0(X) > 0$. Reescribiendo el sistema de ecuaciones anterior en base a la nueva variable se tiene

$$Ux_\eta = 1 \text{ en } I_0 \times (0, T) \quad (5.64)$$

$$x_t = -(U^m)_\eta \quad (5.65)$$

Así pues, existirán dos formulaciones distintas:

1. El problema para la densidad

Utilizando la relación $x_\eta = \frac{1}{U}$, derivando en t y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene

$$\left(\frac{1}{U}\right)_t + (U^m)_{\eta\eta} = 0 \text{ en } (0, M) \times (0, T) \quad (5.66)$$

$$U(0, t) = U(M, t) = 0 \quad (5.67)$$

$$U(\eta, 0) = v_0(\eta) \text{ en } (0, M) \times (0, T), \text{ donde } M = \int_{\mathbb{R}} u_0 ds \quad (5.68)$$

2. El problema para las trayectorias

Utilizando la relación $U = \frac{1}{x_\eta}$ y sustituyendo en la segunda ecuación

$$x_t = -\left(\frac{1}{x_\eta^m}\right)_\eta \text{ en } (0, M) \times (0, T) \quad (5.69)$$

$$x(\eta, 0)X \in (\alpha, \beta), \quad \eta = \int_\alpha^X u_0(s) ds \quad (5.70)$$

Finalmente, la relación puede ser expresada como

$$x_\eta^{m+1} x_t = m x_{\eta\eta} \quad (5.71)$$

El objetivo de esta última parte es ilustrar que la frontera libre puede ser aproximada de manera matemática rigurosa sin pérdida de sentido físico. Para ello, se realizarán una serie de representaciones en base a la «reformulación» del problema inicial, sin centrarse en cuestiones más teóricas tales como estabilidad y convergencia del método. En este sentido, la eliminación de la frontera libre como una variable extra al problema genera otra serie de problemática, pero numéricamente más manejable que la cuestión inicial.

Con todo esto, para la resolución de (5.61), podemos reformular el problema como:

$$x_X = \frac{u_0}{U} \Rightarrow x_{X,t} = -u_0 \frac{U_t}{U^2} \quad (5.72)$$

$$x_t = -\frac{1}{u_0}(U^m)_X \Rightarrow x_{t,X} = -\left(\frac{1}{u_0}(U^m)_X\right)_X \quad (5.73)$$

$$u_0 \frac{U_t}{U^2} = \left(\frac{1}{u_0}(U^m)_X\right)_X \Rightarrow \frac{U_t}{U^2} = \frac{1}{u_0} \left(\frac{1}{u_0}(U^m)_X\right)_X \quad (5.74)$$

Esta última ecuación está escrita en coordenadas de Lagrange «naturales», con condiciones de contorno e iniciales:

$$U(X, 0) = u_0(x), \quad x \in (\alpha, \beta); \quad U(\alpha, t) = U(\beta, t) = 0$$

Retomando la coordenada de masa η :

$$\eta = \int_{\alpha}^X u_0(s) ds \quad (5.75)$$

la ecuación se simplifica, por la relación

$$\frac{1}{u_0} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5.76)$$

donde la función $\eta(X)$ siempre tiene inversa por $\eta'(X) = u_0(X) > 0$

Ahora bien, para la resolución mediante Matlab, el problema ha de expresarse como:

$$U_t = (mU^{m+1}U_\eta)_\eta - 2mU^mU_\eta^2 \quad (5.77)$$

$$U(0, t) = U(M, t) = 0 \quad (5.78)$$

$$U(\eta, 0) = U_0 \quad (5.79)$$

Así pues, considerando $m = 2$ (ecuación de Boussinesq), $u_0(x) = \sin(\pi x)$ y una malla espacio-temporal de (20×10) puntos, se obtiene la siguiente representación:

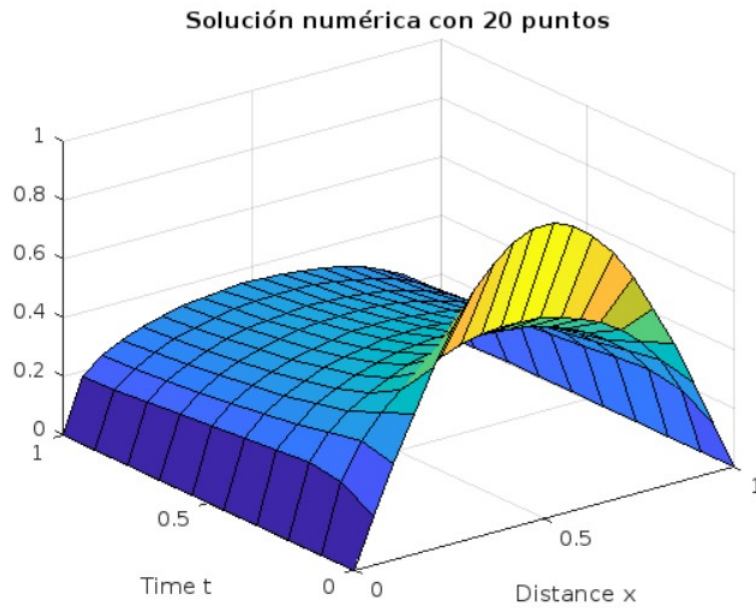


Figura 5.1: Solución numérica para $m=2$

La representación obtenida se asemeja con una onda que decae con el tiempo y que concentra su masa simétricamente en el momento inicial, de forma similar a la expresión analítica de la solución de Barenblatt, como muestra la siguiente figura:

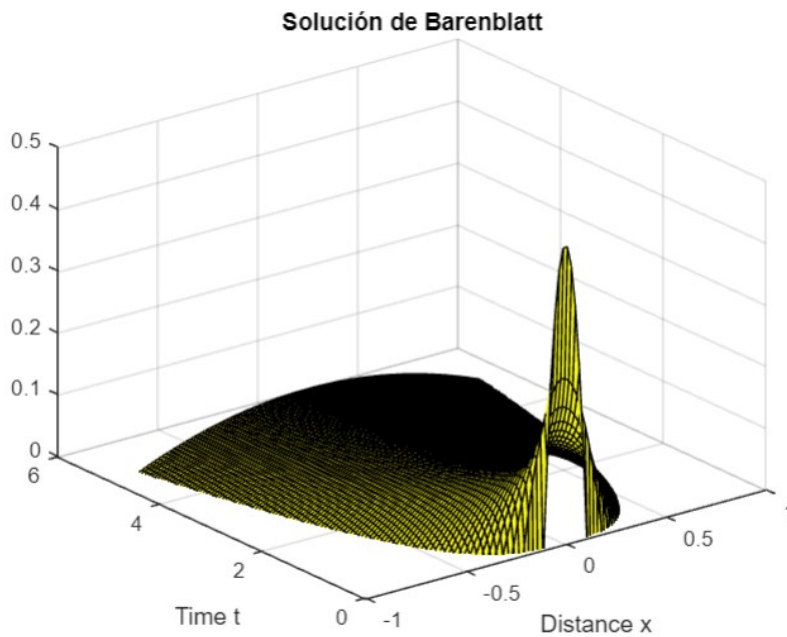


Figura 5.2: Solución analítica de Barenblatt

Por último, retomando el cálculo de la posición de la frontera, si volvemos a la ecuación (5.61) e integramos en la variable espacial:

$$x_X = \frac{u_0}{U} \Rightarrow x(1, t) = x(1/2, t) + \int_{1/2}^1 \frac{u_0(s)}{U(s, t)} ds = \int_{1/2}^1 \frac{u_0(s)}{U(s, t)} ds \quad (5.80)$$

teniendo en cuenta que el dato inicial es simétrico y que la partícula que sale del centro de simetría ($X = \frac{1}{2}$) no cambiará su posición el tiempo.

Por tanto, se obtiene la siguiente representación de la frontera en función del tiempo:

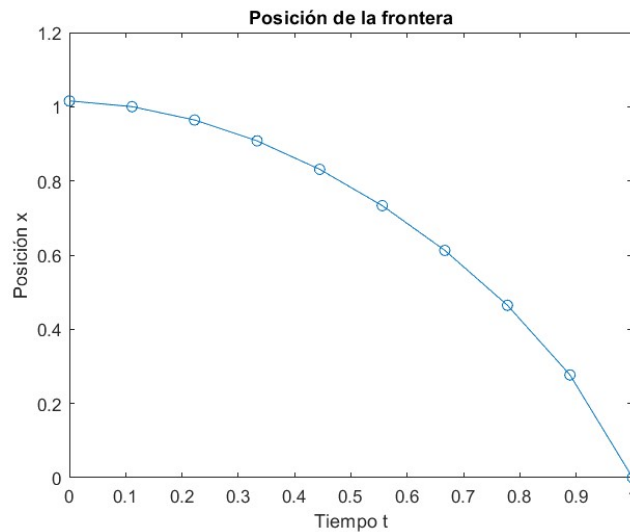


Figura 5.3: Posición de la frontera $x(t)$

En efecto, la posición de la frontera decae con el tiempo haciendo referencia a la atenuación del frente de onda, como se puede observar en 5.2.

Alternativamente, se obtiene el mismo resultado al utilizar la ecuación (5.62):

$$x_t = -\frac{1}{u_0} m U^{m-1} U_X \Rightarrow x_t = -\frac{2}{u_0} U \cdot U_X \quad (5.81)$$

Para la derivada espacial U_X utilizamos la expresión de la derivada por diferencias finitas:

$$\frac{\partial U}{\partial X}(x_{19}, t_j) \approx \frac{U(x_{20}, t_j) - U(x_{18}, t_j)}{2\delta_x} \quad (5.82)$$

Así, calculando el miembro derecho de la expresión (5.81) e integrando en la variable temporal, se obtiene nuevamente el resultado.

Capítulo 6

Conclusiones

Como punto final al trabajo, resulta muy interesante abordar el tema desde una perspectiva más amplia, una visión que aporte sentido en su totalidad. Las siguientes conclusiones comprenden los puntos centrales del estudio así como una opinión personal sobre el trabajo realizado.

La temática tratada, la ecuación del medio poroso (EMP), es inicialmente introducida desde una perspectiva formal. Partiendo de la motivación por su estudio, se comienza con la ecuación de Boussinesq como modelo didáctico introductorio. Posteriormente, se generaliza la ecuación y se formula desde una perspectiva más global: el estudio de los gases polítropos. En este apartado, se observan las principales diferencias y similitudes con la ecuación del calor, así como se presentan las propiedades características de EMP: velocidad de propagación finita, frontera móvil y fenómenos de *tiempo de espera* y *blow-up*.

En el siguiente capítulo se expusieron las principales soluciones explícitas. Los primeros desarrollos versaron sobre soluciones tipo onda viajera, con el fin de llegar a explicar las soluciones autosemejantes, en particular la *solución de Barenblatt*. Se introduce, a su vez, el concepto de solución débil o generalizada y se repasa sobre las cuestiones de existencia y unicidad de las soluciones particularizando para 1D. La conclusión central de este apartado estableció que la solución fundamental de Barenblatt es límite asintótico de cualquier solución bajo ciertas condiciones de integrabilidad inicial. Se cerró la discusión formal bajo el marco de los sistemas de coordenadas eulerianos y lagrangianos, escogiendo el segundo para la aplicación a la práctica posterior.

En cuanto al capítulo intermedio, se dedicaron una serie de páginas al estudio desde la perspectiva práctica de EMP. Se establece el movimiento de la frontera en términos diferenciales y se indaga sobre los conceptos centrales de velocidad finita, *tiempo de espera* y *blow-up* bajo ciertas hipótesis iniciales. Finalmente, se discuten dos aproximaciones para el estudio del movimiento de la frontera bajo el marco de la técnica Moving Mesh for PDEs (MMPDE).

El último capítulo fue dedicado a la programación y obtención de resultados numéricos a través del principio variacional de la energía. Utilizando las leyes de conservación y disipación de energía, se presentaron tres modelos para la ecuación de la trayectoria en coordenadas lagrangianas. A continuación, se procedió a la discretización del esquema y resolución en base al método de los elementos finitos. Se compararon los órdenes de convergencia y estabilidad del sistema, en particular alrededor de la región próxima a la frontera libre.

En última instancia, se pudo garantizar la aproximación matemática de la frontera libre sin pérdida de sentido físico. De esta manera, se consiguió «eliminar» la ecuación de la frontera del sistema de EDPs inicial mediante su reformulación y posterior resolución por métodos numéricos.

Retomando ahora mi impresión personal, la sensación es más que satisfactoria. Por una parte, el trabajo reúne conceptos tanto físicos como matemáticos en su desarrollo, otorgando así un sentido completo y transversal a los conocimientos obtenidos a lo largo de estos cinco años de carrera. Además, su interpretación y aplicación física tan directa suscitó en mí motivación e inquietud para seguir indagando en la cuestión.

Las principales dificultades surgieron al comienzo del trabajo, con la primera revisión bibliográfica y la comprensión de conceptos novedosos y sofisticados. En este sentido, el sentimiento de autorrealización y validación personal fue mayor al lograr interiorizar tales conceptos y comprender el trabajo en su plenitud. Si bien el método de elementos finitos lleva presente relativamente poco tiempo en el mundo de las matemáticas, su proyección

de cara a futuro es muy interesante, gracias a su alta precisión computacional. Los estudios más recientes apuntan a proyectos de ingeniería civil y de automoción, siendo clave en procesos de análisis de tensiones.

La revisión bibliográfica y la búsqueda de información fue fluida gracias a la colaboración entre tutor y autor, donde la comunicación y el compromiso de ambas partes mantuvieron los tiempos en regla, dando pie a revisiones y correcciones mensuales. En resumen, la visión es muy positiva y agradecida, en particular con el profesor Sergey Shmarev, quien estuvo al mando del trabajo durante todo el curso.

Capítulo 7

Anexo

Este apartado está dedicado al estudio de una ecuación parabólica no lineal desde la perspectiva de los elementos finitos utilizando códigos de *MatLab*. En particular, se estudiará la transferencia de calor no lineal (como reformulación de la ecuación del medio poroso) sobre una fina placa tridimensional, con anchura despreciable.

Como suposiciones iniciales, la placa es cuadrada, la temperatura es fija para la pared inferior y no existe transferencia de calor a través del resto de paredes pues están aisladas. La transferencia de calor se produce por convección y radiación, por lo que el problema es no-lineal. Se realiza un estudio del estado estacionario y transitorio del modelo a través del *PDE Toolbox* que presenta *Matlab*.

En cuanto a la formulación del problema, se tiene la siguiente relación:

$$\rho C_p t_z \frac{\partial T}{\partial t} - k t_z \nabla^2 T + 2Q_c + 2Q_r = 0 \quad (7.1)$$

donde ρ es la densidad del material, C_p es el calor específico, t_z es la anchura de la placa y las transferencias de calor, Q_c y Q_r se expresan:

$$Q_c = h_c(T - T_a) \quad (7.2)$$

$$Q_r = \epsilon\sigma(T^4 - T_a^4) \quad (7.3)$$

donde h_c es el coeficiente de convección, ϵ es la emisividad de la superficie, σ es la constante de Stefan-Boltzmann y T_a es la temperatura ambiente.

Reescribiendo la ecuación (7.1) en la forma exigida por el módulo *PDE Toolbox*:

$$\rho C_p t_z \frac{\partial T}{\partial t} - k t_z \nabla^2 T + 2h_c T + 2\epsilon\sigma T^4 = 2h_c T_a + 2\epsilon\sigma T_a^4 \quad (7.4)$$

Respecto al procedimiento en la programación, se comienza estableciendo las constantes del problema (en este caso, se estudió la transferencia de calor para una placa de cobre, asumiendo una temperatura ambiente $T_a = 300K$) y diseñando el dominio. A continuación, se «crea» el modelo de PDEs parabólicas no-lineal y se introducen los términos en el orden que exige el módulo, especificando los coeficientes y las variables. Se aplican condiciones de contorno (en este caso, tipo Dirichlet por paredes aisladas) y la condición inicial.

Respecto a la aplicación del Método de los Elementos Finitos, se triangula el dominio inicial, obteniéndose una representación de la forma

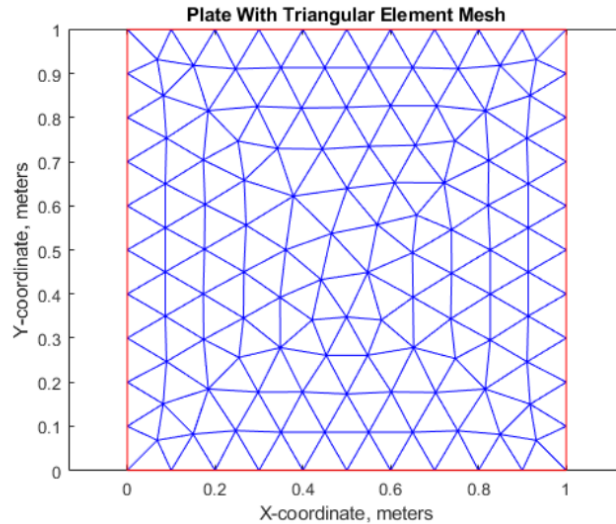


Figura 7.1: Triangulación del dominio [15]

Una vez asentado el planteamiento, se recurre al comando *solvepde* para el modelo que habíamos introducido en las primeras líneas y se recoge toda la información en un vector u que almacena los valores nodales de la solución. Para el caso estacionario, el término que acompaña a $\frac{\partial T}{\partial t}$ se anula, luego la resolución de la ecuación arroja la siguiente representación:

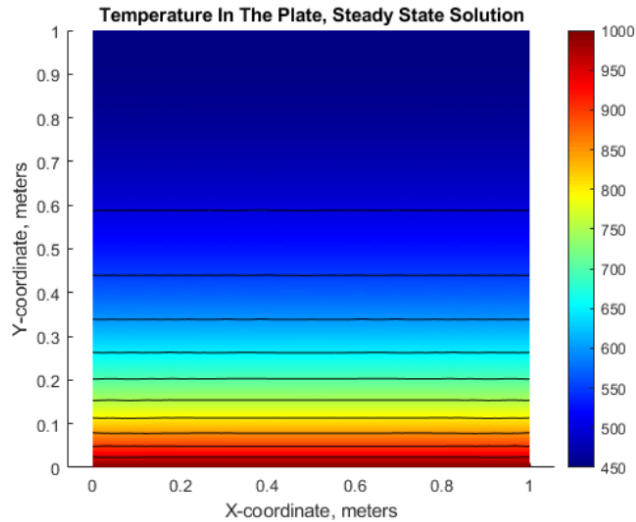


Figura 7.2: Estado estacionario [15]

Se obtiene una temperatura en el extremo superior de 449.8 K, un resultado que será contrastado para el caso del estado transitorio.

Por otra parte, para el estudio del estado transitorio, el coeficiente que acompaña a $\frac{\partial T}{\partial t}$ ya no se anula, por lo que habrá que especificar una temperatura inicial ambiente para todos los nodos de 300 K y una condición de contorno en el extremo inferior de 1000 K. En cuanto a la resolución del programa, hemos de especificar las tolerancias máxima y relativa que buscamos, obteniéndose finalmente la siguiente representación:

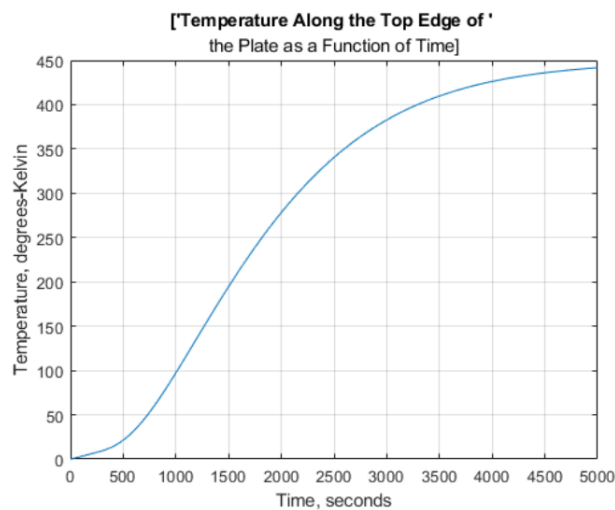


Figura 7.3: Temperatura del borde superior en función del tiempo [15]

Como se puede observar, el tiempo de espera hasta el estado estacionario es de unos 5000 segundos, obteniéndose una temperatura final en el borde superior de 441.8 K, un resultado muy similar al del caso estacionario.

Bibliografía

- [1] S.N. ANTONTSEVA, S.I. SHMAREVB (2005): "A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, vol. 60
- [2] JOSÉ C.M. DUQUE, RUI M.P. ALMEIDA, STANISLAV N. ANTONTSEV (2014): "Numerical study of the porous medium equation with absorption, variable exponents of nonlinearity and free boundary", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 235, pages 137-147
- [3] JUAN LUIS VAZQUEZ "Las ecuaciones de la filtración de fluidos en medios porosos", *Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049, Madrid, Spain*
- [4] JAGOTA, VISHAL & SETHI, AMANPREET & KUMAR, DR-KHUSHMEET. (2013) "Finite Element Method: An Overview.", *Walailak Journal of Science and Technology*. 10. 1-8. 10.2004/wjst.v10i1.499.
- [5] <https://www.fao.org/fishery/docs/CDrom/FAO-Training/FAO-Training/General/x6708s/x6708s06.html>, visitado el 20/01/2022
- [6] A. WATHEN & L.QIAN (2001) "Non linear diffusion with sharp interferences: 35. Porous Medium Equation", At: *People.maths.ox.ac.uk*
- [7] VÁZQUEZ, JUAN LUIS, *The porous medium equation*, Oxford Mathematical Monographs, Mathematical theory, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, xxii+624

- [8] ANTONTSEV, STANISLAV AND SHMAREV, SERGEY, Evolution PDEs with nonstandard growth conditions, Atlantis Studies in Differential Equations, 4, Existence, uniqueness, localization, blow-up, Atlantis Press, Paris, 2015, xviii+409,
- [9] ANTONTSEV, S. N. AND DÍAZ, J. I. AND SHMAREV, S., Energy methods for free boundary problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 48, Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002, xii+329,
- [10] CUONG NGO, WEIZHANG HUANG (2016): "A study on moving mesh finite element solution of the porous medium equation", *Journal of Computational Physics*, vol. 331, pages 357-380
- [11] CHENGHUA DUAN, CHUN LIU , CHENG WANG , XINGYE YUE (2019): "Numerical methods for porous medium equation by an energetic variational approach", *Journal of Computational Physics*, vol. 385, pages 13-32
- [12] VICTOR A. GALAKTIONOV AND JUAN L. VAZQUEZ, "The problem of blowup in nonlinear parabolic equations", <https://verso.mat.uam.es/~juan-luis.vazquez/chilbu99.pdf>, visitado el 04/03/2022
- [13] JULIAN FISCHER AND DANIEL MATTHES, "The waiting time phenomenon in spatially discretized porous medium and thin film equations", <https://arxiv.org/pdf/1911.04185.pdf>, visitado el 04/03/2022
- [14] Tesis doctoral de JOSÉ CARLOS MATOS DUQUE (2013), "Método dos Elementos Finitos para Problemas com Fronteiras Livres", Universidade da Beira Interior Ciências
- [15] <https://es.mathworks.com/help/pde/ug/nonlinear-heat-transfer-in-a-thin-plate.html>, visitado el 03/05/2022