EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y PEDAGÓGICO DE LOS FUTUROS MAESTROS CUANDO CREAN Y RESUELVEN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Marlén Alonso Castaño

CURSO 2020-2021

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Directores de tesis:

Prof. Dr. Pedro Alonso

Departamento de Matemáticas

Universidad de Oviedo, España

Prof. Dr. Luis J. Rodríguez-Muñiz

Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática

Universidad de Oviedo, España

Título en castellano:

El conocimiento matemático y pedagógico de los futuros maestros cuando crean y resuelven problemas de probabilidad

Título en inglés:

The mathematical and pedagogical knowledge of prospective teachers when creating and solving probability problems

Por favor, refiérase a este trabajo como:

Alonso-Castaño, M. (2021). *El conocimiento matemático y pedagógico de los futuros maestros cuando crean y resuelven problemas de probabilidad* [Tesis de doctorado, Universidad de Oviedo]. Repositorio de la Universidad de Oviedo.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

RESUMEN DEL CONTENIDO DE TESIS DOCTORAL

1.- Título de la Tesis	
Español/Otro Idioma: El conocimiento matemático y pedagógico de los futuros maestros cuando crean y resuelven problemas de probabilidad	Inglés: The mathematical and pedagogical knowledge of prospective teachers when creating and solving probability problems

2.- Autor	
Nombre: Marlén Alonso Castaño	DNI/Pasaporte/NIE:
Programa de Doctorado: Matemáticas y Estadística	
Órgano responsable: Centro Internacional de Postgrado. Universidad de Oviedo	

RESUMEN (en español)

El propósito de esta tesis doctoral es determinar cómo una tarea de creación de problemas de probabilidad permite activar de forma simultánea los conocimientos matemáticos y pedagógicos que poseen los futuros maestros en relación con la probabilidad. A partir de este estudio, pretendemos identificar cómo son sus conocimientos en estos dos dominios y si son capaces de proponer y resolver adecuadamente tareas probabilísticas adaptadas a determinados cursos de Educación Primaria. La investigación en este campo aún resulta escasa y los trabajos referidos al tema indican que los futuros maestros muestran una falta de conocimiento matemático y de conocimiento pedagógico en el ámbito de la probabilidad.
Esta investigación parte de una revisión de los diferentes contenidos probabilísticos que se estudian desde las etapas más tempranas. De este modo, podemos determinar qué conocimientos poseen los futuros maestros cuando acceden a los estudios de grado, los cuales determinan cómo van a enfrentarse a la asignatura referida a estadística, probabilidad y resolución de problemas en la que se contextualiza esta investigación. Por otro lado, y debido a la gran cantidad de información que se recibe en la actualidad a través de los medios de comunicación y las redes sociales, es evidente que una buena alfabetización probabilística previa al acceso al grado es de enorme importancia, permitiendo formar ciudadanos hábiles en la comprensión de información estadística y probabilística y en la toma de decisiones.
Para abordar la investigación planteada se presenta el marco teórico que sentará las bases del estudio. En él, nos centramos en el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*) propuesto para analizar el conocimiento matemático y pedagógico que poseen los futuros maestros sobre probabilidad, e incidimos en la importancia del diseño de tareas como recurso didáctico en la formación de maestros. También se resalta la importancia de las concepciones o creencias sobre la matemática escolar que muestran los futuros maestros, la cual afectará a su forma de impartir docencia en un futuro.
A continuación, se introducen el diseño y metodología de la investigación. Para este trabajo se propuso una tarea formativa, original y de interés, dado que permite movilizar ambos dominios (matemático y pedagógico) de manera simultánea. Esta tarea se fue modificando en sucesivos ciclos de investigación-acción, en función de los resultados obtenidos sobre el conocimiento matemático y pedagógico de los futuros maestros y las explicaciones aportadas, deteniendo las iteraciones tras el tercer ciclo, por alcanzarse la saturación en la tarea.

Debido al interés que suscita el conocer cómo los futuros maestros entienden la enseñanza de las matemáticas, tras el análisis del conocimiento matemático para la enseñanza, se realiza un último análisis en relación con la concepción de la matemática escolar que poseen dichos futuros maestros. Con este estudio se completa la investigación proporcionando una visión general sobre cómo es el conocimiento matemático para la enseñanza de los futuros maestros y determinando cómo conciben la matemática escolar.
Los resultados alcanzados, muestran la utilidad que tiene esta tarea formativa para el trabajo simultáneo de los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los futuros maestros. De este modo, se considera que la tarea es rica y útil para la formación del profesorado en torno a la probabilidad, siendo de interés su replicabilidad en cursos posteriores.

RESUMEN (en Inglés)

The purpose of this doctoral dissertation is to determine how a task, involving the creation of probability problems, simultaneously activates the mathematical and pedagogical knowledge that prospective teachers possess regarding probability. From this study, we intend to identify how their knowledge in these two domains is, and if they are able to pose and adequately solve probabilistic tasks, adapted to a certain Primary Education level. Research in this field is still scarce and the studies on this topic indicate that prospective teachers show a lack of mathematical and pedagogical knowledge in the field of probability.
This research starts from a review of the different probabilistic contents that are studied from the earliest stages. In this way, we can determine the knowledge that prospective teachers possess when they start their undergraduate studies, which determines how they will deal with the subject of statistics, probability and problem solving, in which this research is contextualised. On the other hand, and due to the large amount of information that is currently received through the media and social networks, it is clear that a good probabilistic literacy prior to accessing the degree is of great relevance, allowing to educate citizens skilled in the understanding of statistical and probabilistic information, and in decision-making.
In order to address the proposed research, we present the theoretical framework that will provide the basis for the study. It focuses on the Mathematical Knowledge for Teaching model, proposed to analyse the mathematical and pedagogical knowledge that prospective teachers possess about probability, and stresses the importance of task design as a didactic resource in teacher training. We also highlight the importance of the conceptions or beliefs about school mathematics held by prospective teachers, which will affect the way they teach in the future.
This is followed by an introduction to the research design and methodology. For this work, a formative, original and interesting task was proposed, since it allows both domains (mathematical and pedagogical) to be mobilised simultaneously. This task was modified in successive cycles of the action-research method, depending on the results obtained on the mathematical and pedagogical knowledge of the prospective teachers, and the explanations provided, interrupting the iterations after the third cycle, as the task reached saturation point.
Due to the interest in knowing how prospective teachers understand the teaching of mathematics, after the analysis of the Mathematical Knowledge for Teaching, a final analysis is carried out regarding the conception of school mathematics, held by these prospective teachers. This study completes the research by providing an overview of the prospective teachers' Mathematical Knowledge for Teaching and determining how they conceive school mathematics.

The results achieved, show the usefulness of this training task for the simultaneous work on the mathematical and pedagogical knowledge of prospective teachers. In this way, the task is considered to be rich and useful for teacher training in probability, and its replicability in subsequent courses would be of interest.

SR. PRESIDENTE DE LA COMISIÓN ACADÉMICA DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

A Pablo y Belén

A Pablo, Covi, Marta y Jamín

A Jaime

AGRADECIMIENTOS

Hace cinco años comencé, casi por casualidad, mi andadura en el mundo de la investigación, sin saber realmente la aventura que estaba a punto de emprender. Este camino, en ocasiones tan gratificante y en otras tan difícil, ha supuesto una gran evolución, tanto académica como personal, convirtiéndome en una persona más fuerte y resiliente. Hoy llego al final de este largo recorrido y no quiero dejar pasar la oportunidad de agradecer a todas las personas que me han ayudado, apoyado y acompañado, de una forma u otra, a lo largo de este tiempo.

Quiero comenzar agradeciendo a mis directores de tesis, Luis y Pedro, por su inestimable ayuda y apoyo, sus consejos y sus enseñanzas, que me han ayudado a afrontar este trabajo, y por su comprensión en los momentos más bajos. Sin ellos este proceso no habría sido lo mismo.

A mis compañeras: Laura, muchas gracias por tus innumerables consejos, siempre en el instante adecuado, y por tu apoyo en los momentos difíciles; Esther, las largas jornadas en el despacho se me habrían hecho eternas sin nuestros cafés a media tarde; Noelia, tus historias siempre consiguen hacerme reír cuando más lo necesito. Gracias a todas por estar siempre en el momento preciso, con la mejor actitud, haciendo que el trabajo se haga más llevadero y aconsejándome en cada ocasión que lo necesité.

Gracias a todos los compañeros y compañeras del departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Oviedo que me han ayudado durante mis años de trabajo y estudio. En especial, quiero dar las gracias a Álvaro, por ayudarme a comprender mejor cómo funcionan las creencias de los estudiantes para maestro y, así, poder plasmarlo en este trabajo.

También quisiera agradecer la ayuda prestada por los expertos del Grupo de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la SEIEM, cuyas opiniones han servido como guía para las sucesivas modificaciones de la tarea en este trabajo. Gracias también a Maria Mellone, por su amabilidad al recibirme en Nápoles, y por su ayuda para clarificar algunas de las ideas más importantes de este estudio.

En el plano personal, quiero dar las gracias a Ali, Tania y Casilda, por los buenos momentos que pasamos juntas, las noches de chicas y los veranos que pasan demasiado deprisa. A Iris, María y Laura, por todas las aventuras desde hace tantos años y nuestras tonterías que siempre acaban haciéndonos reír. A Corinna a la que, aunque esté lejos, siempre tengo en mi pensamiento. A Aida, no sólo por ser mi amiga, sino por aguantar todos mis dramas académicos. A Irene, mi más reciente descubrimiento, y cuya amistad espero mantener mucho tiempo. Gracias a todas por estar en mi vida.

A mi familia. Mis abuelos, Pablo y Covi, gracias por estar siempre tan orgullosos de mí, y a Marta y Jamín, ojalá pudierais estar aquí para ver hasta dónde he llegado. A mis tíos, tías, primos y primas, porque somos una gran familia.

A mis padres, Pablo y Belén, por todo su apoyo, su cariño y su paciencia a lo largo de toda mi vida. Por ser quienes me han ayudado en cada paso que he dado, anteponiéndome siempre a sí mismos. Gracias a vosotros he llegado a ser la persona que soy hoy.

Por último, a Jaime, mi compañero de vida. Gracias por cada momento que pasamos juntos, por tu apoyo, tu confianza y tu cariño. Por ser mi mayor animador, siempre, en lo bueno y en lo malo. Por continuar creando nuestro camino juntos.

Marlén Alonso Castaño

RESUMEN

El propósito de esta tesis doctoral es determinar cómo una tarea de creación de problemas de probabilidad permite activar de forma simultánea los conocimientos matemáticos y pedagógicos que poseen los futuros maestros en relación con la probabilidad. A partir de este estudio, pretendemos identificar cómo son sus conocimientos en estos dos dominios y si son capaces de proponer y resolver adecuadamente tareas probabilísticas adaptadas a determinados cursos de Educación Primaria. La investigación en este campo aún resulta escasa y los trabajos referidos al tema indican que los futuros maestros muestran una falta de conocimiento matemático y de conocimiento pedagógico en el ámbito de la probabilidad.

Esta investigación parte de una revisión de los diferentes contenidos probabilísticos que se estudian desde las etapas más tempranas. De este modo, podemos determinar qué conocimientos poseen los futuros maestros cuando acceden a los estudios de grado, los cuales determinan cómo van a enfrentarse a la asignatura referida a estadística, probabilidad y resolución de problemas en la que se contextualiza esta investigación. Por otro lado, y debido a la gran cantidad de información que se recibe en la actualidad a través de los medios de comunicación y las redes sociales, es evidente que una buena alfabetización probabilística previa al acceso al grado es de enorme importancia,

permitiendo formar ciudadanos hábiles en la comprensión de información estadística y probabilística y en la toma de decisiones.

Para abordar la investigación planteada se presenta el marco teórico que sentará las bases del estudio. En él, nos centramos en el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*) propuesto para analizar el conocimiento matemático y pedagógico que poseen los futuros maestros sobre probabilidad, e incidimos en la importancia del diseño de tareas como recurso didáctico en la formación de maestros. También se resalta la importancia de las concepciones o creencias sobre la matemática escolar que muestran los futuros maestros, la cual afectará a su forma de impartir docencia en un futuro.

A continuación, se introducen el diseño y metodología de la investigación. Para este trabajo se propuso una tarea formativa, original y de interés, dado que permite movilizar ambos dominios (matemático y pedagógico) de manera simultánea. Esta tarea se fue modificando en sucesivos ciclos de investigación-acción, en función de los resultados obtenidos sobre el conocimiento matemático y pedagógico de los futuros maestros y las explicaciones aportadas, deteniendo las iteraciones tras el tercer ciclo, por alcanzarse la saturación en la tarea.

Debido al interés que suscita el conocer cómo los futuros maestros entienden la enseñanza de las matemáticas, tras el análisis del conocimiento matemático para la enseñanza, se realiza un último análisis en relación con la concepción de la matemática escolar que poseen dichos futuros maestros. Con este estudio se completa la investigación proporcionando una visión general sobre cómo es el conocimiento matemático para la enseñanza de los futuros maestros y determinando cómo conciben la matemática escolar.

Los resultados alcanzados, muestran la utilidad que tiene esta tarea formativa para el trabajo simultáneo de los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los futuros maestros. De este modo, se considera que la tarea es rica y útil para la formación del profesorado en torno a la probabilidad, siendo de interés su replicabilidad en cursos posteriores.

SUMMARY

The purpose of this doctoral dissertation is to determine how a task, involving the creation of probability problems, simultaneously activates the mathematical and pedagogical knowledge that prospective teachers possess regarding probability. From this study, we intend to identify how their knowledge in these two domains is, and if they are able to pose and adequately solve probabilistic tasks, adapted to a certain Primary Education level. Research in this field is still scarce and the studies on this topic indicate that prospective teachers show a lack of mathematical and pedagogical knowledge in the field of probability.

This research starts from a review of the different probabilistic contents that are studied from the earliest stages. In this way, we can determine the knowledge that prospective teachers possess when they start their undergraduate studies, which determines how they will deal with the subject of statistics, probability and problem solving, in which this research is contextualised. On the other hand, and due to the large amount of information that is currently received through the media and social networks, it is clear that a good probabilistic literacy prior to accessing the degree is of great relevance, allowing to educate citizens skilled in the understanding of statistical and probabilistic information, and in decision-making.

In order to address the proposed research, we present the theoretical framework that will provide the basis for the study. It focuses on the Mathematical Knowledge for Teaching model, proposed to analyse the mathematical and pedagogical knowledge that prospective teachers possess about probability, and stresses the importance of task design as a didactic resource in teacher training. We also highlight the importance of the conceptions or beliefs about school mathematics held by prospective teachers, which will affect the way they teach in the future.

This is followed by an introduction to the research design and methodology. For this work, a formative, original and interesting task was proposed, since it allows both domains (mathematical and pedagogical) to be mobilised simultaneously. This task was modified in successive cycles of the action-research method, depending on the results obtained on the mathematical and pedagogical knowledge of the prospective teachers, and the explanations provided, interrupting the iterations after the third cycle, as the task reached saturation point.

Due to the interest in knowing how prospective teachers understand the teaching of mathematics, after the analysis of the Mathematical Knowledge for Teaching, a final analysis is carried out regarding the conception of school mathematics, held by these prospective teachers. This study completes the research by providing an overview of the prospective teachers' Mathematical Knowledge for Teaching and determining how they conceive school mathematics.

The results achieved, show the usefulness of this training task for the simultaneous work on the mathematical and pedagogical knowledge of prospective teachers. In this way, the task is considered to be rich and useful for teacher training in probability, and its replicability in subsequent courses would be of interest.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS .... **I**
RESUMEN .... **III**
SUMMARY .... **V**
ÍNDICE .... **VII**
1. Contextualización y problema de investigación **1**
1.1. Introducción **2**
1.2. Contextualización **6**
1.3. Objetivos de la investigación **10**
1.4. Hipótesis de investigación **11**
1.5. Estructura de la tesis doctoral **12**
2. Marco teórico **15**
2.1. La formación en probabilidad en las etapas educativas previas a la enseñanza universitaria **16**
2.1.1. La formación en probabilidad en Educación Primaria **16**
2.1.2. La formación en probabilidad en Educación Secundaria **32**
2.2. La formación matemática de los futuros maestros **41**
2.3. La alfabetización probabilística en los programas de formación inicial de maestros de Educación Primaria **45**
2.3.1. Alfabetización probabilística: elementos cognitivos **46**
2.3.2. Alfabetización probabilística: elementos disposicionales **51**
2.4. Estado del arte **53**
2.5. Conocimiento matemático para la enseñanza: el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) **63**
2.6. El diseño de tareas como recurso didáctico en la formación de maestros **69**

2.6.1. El Enfoque Ontosemiótico: la idoneidad didáctica **72**

2.7. Las concepciones y creencias de los maestros de Educación Primaria sobre la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad **77**

2.7.1. Instrumento de análisis de las manifestaciones de las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la matemática **82**

3. Metodología de investigación 87

3.1. Instrumento **87**

3.2. Marco metodológico: la investigación-acción **91**

3.3. Marco metodológico: análisis del contenido y análisis bajo el prisma del MKT **93**

4. Primer ciclo de investigación-acción 97

4.1. Categorías del análisis del contenido **102**

4.2. Resultados bajo el prisma del MKT **108**

4.2.1. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria y adaptados al modelo de enunciado **108**

4.2.2. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria, pero que no se ajustan al modelo de enunciado propuesto **110**

4.2.3. Problemas parcialmente correctos o incorrectos en los que se muestran evidencias de un CCK pobre, pero en las que el enunciado podría ser adecuado para 6º curso de Educación Primaria. **111**

4.2.4. Problemas parcialmente correctos en los cuales se muestran evidencias de un SCK deficiente debido a la falta de adaptación del problema a nivel educativo. **112**

4.2.5. Problemas parcialmente correctos o incorrectos en los que se muestran evidencias de falta de CCK y SCK. **113**

4.3. Discusión de resultados del primer ciclo de I-A **115**

5. Segundo ciclo de investigación-acción 121

5.1. Categorías del análisis del contenido **124**

5.2. Resultados bajo el prisma del MKT **131**

5.2.1. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria (TIPO 1) **132**

5.2.2. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria cuya resolución se restringe a un único caso convirtiendo el problema en trivial (TIPO 2) **135**

5.2.3. Problemas parcialmente correctos en los cuales se muestran evidencias de un SCK deficiente debido a la falta de adaptación del problema al nivel educativo (TIPO 3) **136**

5.2.4. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de CCK pobre, pero en los que el enunciado podría ser adecuado para 6º curso de Educación Primaria (TIPO 4) **138**

5.2.5. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de SCK al presentarse un problema adaptado al nivel e indicios de CCK, pero no evidencias, al estar el problema bien enunciado, pero no presentarse resolución (TIPO 5) **141**

5.2.6. Problemas parcialmente correctos e incorrectos en los que se muestran evidencias de falta de CCK y SCK (TIPO 6) **142**

5.3. Análisis de los indicadores de evaluación **145**

5.4. Discusión de resultados del segundo ciclo de I-A **154**

6. Tercer ciclo de investigación-acción 161

6.1. Categorías del análisis del contenido **164**

6.2. Resultados bajo el prisma del MKT **168**

6.2.1. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria (TIPO 1) **168**

6.2.2. Problemas matemáticamente correctos, adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria cuya resolución se restringe a un único caso convirtiendo el problema en trivial (TIPO 2) **171**

6.2.3. Problemas parcialmente correctos, que muestran evidencias de un SCK deficiente debido a la falta de adaptación del problema el nivel educativo (TIPO 3) **173**

6.2.4. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de CCK pobre, pero en los que el enunciado podría ser adecuado para el nivel (TIPO 4) **176**

6.2.5. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de SCK al presentarse un problema adaptado al nivel e indicios de CCK, pero no evidencias, al estar el problema bien enunciado, pero no presentarse resolución (TIPO 5) **178**

6.2.6. Problemas parcialmente correctos e incorrectos en los que se muestran evidencias de falta de CCK y SCK (TIPO 6) **179**

6.3. Análisis de los indicadores de evaluación **182**

6.4. Discusión de resultados del tercer ciclo de I-A **191**

7. Análisis de las concepciones sobre la matemática escolar presentadas por los futuros maestros 195

8. Conclusiones y líneas futuras..205
REFERENCIAS..219

CAPÍTULO 1

Contextualización y problema de investigación

Este capítulo preliminar, muestra una visión general de los contenidos de esta memoria. En la primera sección, se introduce al lector en el ámbito de la probabilidad en los currículos de la Enseñanza Obligatoria y en la importancia de trabajar estos contenidos para conseguir formar ciudadanos probabilísticamente alfabetizados, preparados para enfrentarse a un mundo en el que constantemente se recibe información que requiere poseer conocimientos en probabilidad, y en el que es necesario ser efectivo en la toma de decisiones. A continuación, en la segunda sección, se muestra una contextualización sobre cómo aparece la probabilidad en los programas de formación de maestros, indicando qué conocimientos previos poseen y qué necesidades se presentan para mejorar su formación. En la tercera sección de este capítulo se indican los objetivos de la investigación formulados a partir de la problemática encontrada. Las hipótesis de investigación se formulan en la cuarta sección. Finalmente, en la quinta sección se concluye con un breve esquema en el que se muestra la estructura de esta memoria.

1.1. Introducción

La probabilidad ha formado parte de los programas educativos en la Enseñanza Secundaria y Universitaria durante mucho tiempo en gran parte de países alrededor de todo el mundo. Sin embargo, muchos países ya han introducido contenidos probabilísticos en niveles educativos inferiores dentro de la Enseñanza Obligatoria. Países como Irlanda o Australia introducen la probabilidad desde la Educación Primaria (Kazak y Leavy, 2018).

Esto se debe a la gran importancia que supone comprender el lenguaje del azar en nuestra vida cotidiana, ya que los fenómenos aleatorios impregnan nuestras vidas en muchos sentidos (Beltrami, 1999; Bennett, 1998; Everitt, 1999; Gal, 2000, 2005; Kazak y Leavy, 2018). Coincidimos con estos autores en que las nociones de probabilidad o de incertidumbre aparecen con asiduidad durante nuestra vida adulta como, por ejemplo, cuando calculamos previsiones de riesgos médicos, financieros o medioambientales, cuando estudiamos la fiabilidad de un producto o cuando hacemos predicciones meteorológicas, entre otras.

En el caso de Australia, los contenidos probabilísticos recogidos por el *Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority* [ACARA] (ACARA, 2014) se introducen a partir del primer curso de Educación Primaria (de 6 a 7 años). En este nivel, los contenidos probabilísticos se centran en aprender a identificar las situaciones de la vida cotidiana en las que interviene el azar, pudiendo describir los sucesos, utilizando un lenguaje cotidiano, mediante el empleo de términos cómo "podría ocurrir", "ocurrirá" o "no ocurrirá".

En lo referente a Irlanda, la incorporación de los contenidos probabilísticos en su currículo resulta más tardía, incorporándose en los grados 3-4 (de 9 a 10 años). El *National Council for Curriculum and Assessment* [NCCA] (NCCA, 1999) incide en promover el uso del lenguaje del azar y vocabulario relacionado con la incertidumbre. Esto es, utilizar con soltura términos como "posible", "imposible", "seguro", "probable", "improbable", "muy posible", "poco probable", etc., que permitan ordenar los sucesos según su probabilidad de ocurrencia. También se trabaja la identificación y registro de resultados de experimentos aleatorios simples (NCCA, 1999).

Como podemos observar, en estos países es común ver reflejados los conceptos probabilísticos haciendo hincapié en la descripción de eventos y en la discusión de probabilidades utilizando el lenguaje del azar. Sin embargo, resulta sorprendente observar cómo otros países desarrollados, como son Reino Unido y EE. UU., incluyen la probabilidad más adelante en sus currículos, prácticamente en la etapa secundaria. Además, se centran mayoritariamente en el cálculo de probabilidades numéricas, trabajando el lenguaje probabilístico en menor medida.

En el caso de Reino Unido, la incorporación de la probabilidad en el currículo se retrasa hasta el *Key Stage* 3 (de 11 a 14 años). El *Department of Education* [DoE] (DoE, 2013) indica que el alumnado debe centrarse, utilizando un lenguaje probabilístico adecuado, en el registro, la descripción y el análisis de las frecuencias de los resultados obtenidos en experimentos simples que involucren conceptos como la aleatoriedad o la equidad.

Por su parte, en EE. UU., no es hasta el 7º grado (de 12 a 13 años) que se introduce la probabilidad en los contenidos de matemáticas (*Common Core State Standards Initiative*, 2010). En este caso, se focalizan en el cálculo de probabilidades, pero sin hacer referencia al lenguaje del azar.

Cuando nos centramos en España, cabe notar que la incorporación de la probabilidad a la Educación Primaria es bastante reciente (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), no apareciendo en el currículo hasta el año 2006 tras la incorporación, a principios de los años 90 del siglo XX, de un bloque solamente de estadística (Alsina, 2016a; Alsina *et al*., 2020). El currículo de Educación Primaria actual (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014) incorpora la probabilidad desde las primeras etapas, en el bloque 5 de contenidos dedicado a la “Estadística y Probabilidad”.

Los contenidos en probabilidad se introducen de manera gradual en Educación Primaria. Esta incorporación se realiza mediante actividades sencillas en las que el estudiante debe saber identificar y distinguir los experimentos aleatorios de los deterministas, saber precisar si la ocurrencia de un suceso es más o menos probable o hacer predicciones sobre las posibilidades de obtener un resultado en experimentos aleatorios sencillos, como lo juegos de azar.

Gal (2005) subraya la importancia de alfabetizar probabilísticamente a los niños, dada la numerosa cantidad de situaciones cotidianas de naturaleza compleja relacionadas con la probabilidad que se encontrarán cuando sean adultos y que, por tanto, deben aprender a manejar y resolver. Además, la alfabetización probabilística está estrechamente relacionada con la alfabetización en otros ámbitos de la matemática, como son la aritmética y la estadística.

Las bases de conocimiento probabilístico propuestas en Gal (2005) se relacionan con las propuestas para la alfabetización estadística en Gal (2002), siendo estas las grandes ideas (como la aleatoriedad, la independencia o la incertidumbre), el cálculo de probabilidades, el lenguaje (del azar), el contexto (la comprensión del papel e implicaciones de la probabilidad en diversos contextos) y las preguntas críticas (cuestiones que generan reflexión en torno a la probabilidad). Además de ello, intervienen los elementos disposicionales, como son el tener una postura crítica, las creencias y actitudes, y el dominio afectivo respecto a la incertidumbre y el riesgo.

Estas bases de conocimiento, junto con los elementos disposicionales, conforman una base para la alfabetización probabilística, pero desde una perspectiva más amplia de competencias clave que se encuentran interrelacionadas con otros ámbitos de la matemática, así como con la alfabetización científica e, incluso, sanitaria. Por ello, también es imprescindible la inclusión de situaciones contextualizadas que atiendan a las demandas del mundo real. De esta manera, se insta a diseñar planes de estudio que desarrollen la alfabetización probabilística, ya que no solo se contribuye a la alfabetización probabilística en sí, sino también a una alfabetización numérica y cuantitativa más amplia (Gal, 2005; Steen, 2001).

Los motivos anteriormente expuestos evidencian que cada vez es más necesario que los futuros maestros reciban una formación adecuada en probabilidad, tanto matemática como didáctica, que les facilite su actividad docente sobre este contenido. La enseñanza sobre probabilidad no puede reducirse a una variedad limitada de situaciones diseñadas específicamente para la escuela o de juegos, sino que debe desarrollarse como una herramienta matemática que ayudará a resolver problemas del entorno cotidiano del alumnado.

Sin embargo, en el momento de redactar estas líneas los contenidos podrían estar sujetos a cambios, debido a la nueva Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación [LOMLOE] (Jefatura del Estado, 2020), cuyo desarrollo curricular está previsto durante el año 2021. No parece previsible que los contenidos de estadística y probabilidad de Educación Primaria se vean modificados sustancialmente, aunque organizaciones como la Real Sociedad Matemática Española abogan por una mayor presencia de la estadística y la probabilidad en el currículo y por un planteamiento más holístico que permita relacionarlos con el resto de los bloques de contenido (Alsina, 2020; López-Beltrán *et al.*, 2020). Asimismo, también desde el Comité Español de Matemáticas (CEMat) se ha consensuado un documento sobre las bases matemáticas del currículo que impulsa la enseñanza de la estadística y la probabilidad desde Educación Infantil, enfatizando los significados por encima de los procedimientos (CEMat, 2021).

La formación de los futuros maestros de Educación Primaria en relación con la probabilidad será la que permita que, cuando lleguen a impartir docencia, estén en condiciones de lograr que su alumnado adquiera las destrezas necesarias para finalizar la etapa educativa alcanzando los objetivos de aprendizaje de probabilidad: la adquisición de un lenguaje probabilístico básico adecuado que permita identificar los fenómenos y las situaciones de carácter aleatorio, realizar conjeturas y estimaciones y calcular probabilidades sencillas, todo ello en un contexto de resolución de problemas que actúa como eje vertebrador de la materia.

1.2. Contextualización

La formación en el campo de la probabilidad ha ido ganando interés en los programas de formación de maestros en los últimos años, desde su introducción en el currículo de Educación Primaria. Sin embargo, no existe un consenso en cuanto a cómo integrar las matemáticas y su didáctica en los programas de formación de maestros en nuestro país, tanto en lo relativo al número de créditos de matemáticas que se imparten, como a la forma en que se distribuyen los contenidos, a saber, asignaturas de matemáticas, asignaturas de didáctica de la matemática y/o asignaturas de matemáticas y su didáctica que combinan los contenidos matemáticos con los contenidos didácticos. En Nolla *et al*. (2021), se muestra un resumen de los tipos de asignaturas relacionadas con las matemáticas y su didáctica que podemos encontrar en las universidades españolas, tanto públicas como privadas, así como el número de créditos asignado en cada caso, como puede verse en la Tabla 1.

En este trabajo se constata que más de la mitad de las universidades españolas presenta un programa mixto, en el que las asignaturas tratadas son del tipo matemáticas y su didáctica, con un porcentaje del 52 % de los grados presentando este tipo de asignatura. Este porcentaje, aumenta hasta el 68 % de los grados, cuando esas asignaturas aparecen, además, combinadas con asignaturas de los otros dos tipos (matemáticas y su didáctica + matemáticas; y matemáticas y su didáctica + didáctica de la matemática). Sólo un 29 % de las universidades propone un modelo separado (matemáticas + didáctica de la matemática).

Tabla 1

Datos de Asignaturas y Créditos de Matemáticas/Didáctica de las Matemáticas de las Universidades Españolas en los Grados de Educación Primaria.

					GRADO PRIMARIA				
CCAA	**Universidad**	**Tipo**	**ECTS**		**Tipo Asignatura (OB)**			**Curso**	
			OB[a]	**OP[b]**	**DM[c]**	**M[d]**	**MyD[e]**	**Inicio**	**Fin**
Andalucía	U ALMERÍA	Pública	24	6	-	-	24	2º	3º
	U CÁDIZ	Pública	27	6	15	12	-	1º	3º
	U CÓRDOBA	Pública	18	-	12	6	-	1º	3º
	U GRANADA	Pública	22	6	13	9	-	1º	3º
	U HUELVA	Pública	21	-	3	-	18	1º	4º
	U JAÉN	Pública	18	-	-	-	18	2º	4º

CCAA	Universidad	Tipo	ECTS		GRADO PRIMARIA Tipo Asignatura (OB)			Curso	
			OB[a]	OP[b]	DM[c]	M[d]	MyD[e]	Inicio	Fin
Andalucía	U LOYOLA	Privada	18	-	6	6	6	2º	4º
	U MÁLAGA	Pública	21	-	-	-	21	2º	4º
	U SEVILLA	Pública	18	-	9	9	-	1º	2º
Aragón	U SAN JORGE	Privada	12	-	12	-	-	2º	3º
	U ZARAGOZA	Pública	18	6	-	-	18	2º	3º
Asturias	U OVIEDO	Pública	18	-	-	-	18	1º	3º
Baleares	U ISLAS BALEARES	Pública	18	-	12	6	-	1º	4º
Canarias	U LA LAGUNA	Pública	20	9	14	6	-	2º	3º
	U LAS PALMAS	Pública	19	6	-	-	19	1º	3º
Cantabria	U CANTABRIA	Pública	18	6	-	6	12	1º	2º
	U EUR. DEL ATL.	Privada	18	-	-	6	12	2º	3º
Cataluña	U ABAT OLIBA CEU	Privada	15	-	3	12	-	2º	2º
	UAB	Pública	17	30	6	6	5	1º	3º
	UB	Pública	18	12	6	-	12	2º	4º
	U GIRONA	Pública	16	21	6	-	10	2º	4º
	U INT. CATALUÑA	Privada	15	-	15	-	-	2º	3º
	U LLEIDA	Pública	18	-	-	-	18	1º	3º
	U RAMON LLULL	Privada	12	12	-	-	12	2º	3º
	U ROVIRA Y VIRGILI	Pública	18	-	-	-	18	2º	4º
	U VIC	Privada	12	-	6	-	6	1º	2º
C. la Mancha	UCLM	Pública	18	-	-	-	18	1º	2º
C. y León	U BURGOS	Pública	18	-	6	6	6	2º	4º
	U CAT. DE ÁVILA	Privada	18	6	-	-	18	1º	3º
	U ISABEL I	Privada	12	-	6	-	6	3º	4º
	U LEÓN	Pública	12	8	-	-	12	1º	2º
	U PONT. SALAM.	Privada	12	-	-	-	12	3º	4º
	U SALAMANCA	Pública	18	12	-	-	18	2º	4º
	U VALLADOLID	Pública	18	6	-	-	18	1º	4º
Extremadura	U EXTREMADURA	Pública	18	-	-	-	18	2º	3º
Galicia	U A CORUÑA	Pública	18	4.5	-	-	18	1º	3º
	U SANTIAGO	Pública	18	-	-	-	18	1º	3º
	U VIGO	Pública	12	6	-	-	12	2º	2º
La Rioja	U DE LA RIOJA	Pública	18	4.5	12	6	-	1º	3º
	UNIR	Privada	12	-	6	6	-	2º	2º
Madrid	U ALCALÁ	Pública	18	-	6	12	-	2º	3º
	U ALFONSO X	Privada	-	-	-	-	-	-	-
	UAM	Pública	18	18	-	-	18	1º	3º
	U C. JOSÉ CELA	Privada	15	-	8.5	6	-	2º	3º
	U COMILLAS	Privada	12	-	6	6	-	2º	3º
	UCM	Pública	18	24	-	-	18	2º	4º
	UDIMA	Privada	12	6	6	6	-	1º	3º
	U EUROPEA	Privada	12	-	-	-	12	3º	3º
	U FCO. VITORIA	Privada	12	-	-	-	12	2º	3º
	U NEBRIJA	Privada	12	-	6	6	-	2º	2º
	URJC	Pública	18	-	-	-	18	2º	3º
Murcia	UCAM MURCIA	Privada	12	-	6	-	6	2º	2º
	U MURCIA	Pública	21	3	-	-	21	2º	3º

CCAA	Universidad	Tipo	ECTS		GRADO PRIMARIA Tipo Asignatura (OB)			Curso	
			OB[a]	OP[b]	DM[c]	M[d]	MyD[e]	Inicio	Fin
Navarra	U NAVARRA	Privada	18	-	6	6	6	3º	4º
	U PÚB. NAVARRA	Pública	18	-	-	-	18	2º	3º
País Vasco	U DEUSTO	Privada	22	-	4	-	18	1º	4º
	U MONDRAGÓN	Privada	4	-	-	-	4	2º	2º
	U PAIS VASCO	Pública	15	18	-	-	15	1º	3º
Valencia	U ALICANTE	Pública	18	6	6	-	12	1º	3º
	U CAT. VALENCIA	Privada	15	-	6	9	-	1º	3º
	CEU C. HERRERA	Privada	18	-	6	12	-	2º	3º
	U INT. VALENCIA	Privada	18	-	9	9	-	2º	2º
	U JAUME I	Privada	18	6	-	-	18	1º	3º
	U VALENCIA	Pública	21	24	12	9	-	2º	4º

Nota. Adaptada de Nolla *et al.* (2021, pp. 191-192)

[a]Obligatoria; [b]Optativa; [c]Didáctica de la matemática; [d]Matemáticas; [e]Matemáticas y su didáctica

El número de créditos varía entre los 12 y los 24 en aquellos programas que presentan asignaturas únicamente de tipo matemáticas y su didáctica. El número de créditos puede descender en las asignaturas de matemáticas y su didáctica hasta los 5 o 6, cuando la asignatura se presenta en combinación con las asignaturas de tipo matemáticas y/o didáctica de la matemática. Sólo cuatro universidades proponen un plan de estudios que combina las tres asignaturas. En este caso el número de créditos de cada una de ellas gira en torno a los 6 créditos.

En la Universidad de Oviedo, en el Grado en Maestro/a en Educación Primaria, se plantea la asignatura de 3<u>er</u> curso Matemáticas y su Didáctica III, de 6 créditos, versada enteramente en estadística, probabilidad y resolución de problemas. Esta asignatura surge como una continuación de las asignaturas Matemáticas y su Didáctica I (2º curso, primer semestre) y Matemáticas y su Didáctica II (2º curso, segundo semestre), ambas de 6 créditos y que versan sobre números y medida, y geometría, respectivamente.

La formación en probabilidad de los futuros maestros cuando llegan al grado suele ser bastante escasa, encontrándonos casos en los que los alumnos nunca han estudiado estadística y probabilidad en sus años de escolarización, tanto en Educación Primaria, como en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Esto puede deberse a la reciente incorporación de la estadística y la probabilidad a los currículos en la Educación Primaria, para los niveles más bajos, pero también a la disposición de los contenidos, tanto en el currículo como en los libros de texto.

En el currículo de Educación Primaria del Principado de Asturias los contenidos de estadística y probabilidad se encuentran en el último bloque de contenidos. Los libros de texto también incluyen estos contenidos al final del libro, en los últimos temas. De este modo, en muchas ocasiones, y debido a la falta de tiempo, no llegan a impartirse esos contenidos y, si se acaban impartiendo, suele ser de manera rápida y mecánica, sin llegar a generar un razonamiento y un aprendizaje más profundo (Díaz, 2017).

Además, el alumnado que accede al Grado en Maestro/a en Educación Primaria no sólo puede hacerlo a través de las ramas de Bachillerato Científico o de Bachillerado de Ciencias Sociales, en los cuáles se continúa con la enseñanza de las matemáticas, sino que también pueden acceder desde el Bachillerato de Humanidades o desde un Ciclo Formativo de Grado Superior (CFGS) y, aunque en menor porcentaje, por otras vías como mayores de 25 y 45 años y mayores de 40 años con experiencia profesional o laboral.

En caso del Bachillerato de Humanidades, el alumnado no habría cursado matemáticas desde la ESO (López-Beltrán *et al*., 2020; Rodríguez-Muñiz, Crespo *et al*., 2020). En los casos de CFGS puede ocurrir que dicho alumnado tampoco haya cursado ninguna asignatura relacionada con las matemáticas, mientras que el alumnado que accede al grado por las vías para mayores no puede tener título oficial que le dé acceso por lo que, en muchos casos, son personas que abandonaron tempranamente los estudios. Por lo tanto, en una gran parte de los casos, cuando se comienza la asignatura de Matemáticas y su Didáctica III en el grado, debemos partir de un total desconocimiento de la materia por una parte importante del alumnado.

La falta de conocimiento previo provoca, en los futuros maestros, incomodidad (Estrada y Batanero, 2020; Estrada *et al*., 2003; Estrada *et al*., 2004) e inseguridad, a la hora de impartir dichos contenidos (Alsina *et al*., 2020). Más aún, en algunos trabajos, como en Estrada *et al.* (2003), los futuros maestros indican que "si pudiera eliminar una asignatura sería Estadística" (p. 5). En este mismo trabajo, cuando se pregunta sobre el gusto por impartir la Estadística, se obtienen unos bajos resultados en el ítem de estudio. En Estrada *et al*. (2004) se obtienen resultados similares que avalan los anteriormente obtenidos.

También se observa que muchos de los encuestados no perciben la utilidad de la materia ni en su propia labor profesional, ni aplicada a otros contextos relacionados con las ciencias sociales presentando, en numerosas ocasiones, los mismos sesgos sobre razonamiento probabilístico que los estudiantes de primaria (Batanero *et al*., 2014; Estrada y Batanero, 2020; Liu y Thompson, 2007). Todo ello sugiere que se está trabajando la enseñanza del contenido desde una perspectiva errónea, no basada en situaciones realistas.

Batanero *et al*. (2013) y Alsina *et al*. (2020) consideran que cuando los maestros se centran en la enseñanza de este tipo de contenidos presentan una tendencia a trabajar conocimientos técnicos mediante ejercicios descontextualizados. Esto implica que se concentren en el uso (casi exclusivo) de fórmulas, perdiendo el significado y el sentido estadístico y probabilístico. Dotar a las situaciones probabilísticas de un contexto nos permite proporcionar significado al análisis de los datos (Alsina *et al*., 2020; Moore y Cobb, 1997), especialmente si lo enfocamos a contextos realistas que resulten relevantes para el alumnado. Por lo tanto, dadas las limitaciones que podemos encontrarnos con respecto a los conocimientos previos de los futuros maestros cuando acceden al grado, así como las horas de formación de las que disponemos, que resultan ser demasiado escasas (Nolla *et al*., 2021), se hace fundamental diseñar actividades que fomenten la activación simultánea del conocimiento matemático y del conocimiento pedagógico sobre la probabilidad.

1.3. Objetivos de la investigación

En la investigación presentada en este trabajo, el principal objetivo es *determinar cómo una tarea de creación de problemas de probabilidad en un contexto educativo específico permite activar simultáneamente el conocimiento matemático y pedagógico en probabilidad de los futuros maestros ayudándoles a mejorar en ambos aspectos*. Se busca identificar qué conocimiento se activa y la forma en que se activa, determinando si la tarea contribuye a mejorar ese conocimiento.

Para ello, se delimitan los siguientes cinco objetivos específicos:

- **Objetivo específico 1 (OE1):** Determinar cómo los futuros maestros son capaces de crear y resolver problemas de probabilidad coherentes en un contexto educativo específico.
- **Objetivo específico 2 (OE2):** Determinar si los futuros maestros son capaces de crear y adaptar los problemas a un nivel educativo específico.
- **Objetivo específico 3 (OE3):** Determinar qué tipo de conocimiento matemático para la enseñanza activan los futuros maestros cuando crean y resuelven problemas de probabilidad.
- **Objetivo específico 4 (OE4):** Identificar las debilidades y fortalezas de los futuros maestros, en lo relativo al conocimiento matemático y pedagógico para la enseñanza, cuando crean y resuelven problemas de probabilidad adaptados a un nivel educativo concreto.
- **Objetivo específico 5 (OE5):** Identificar las tendencias didácticas presentadas por los futuros maestros en relación con la concepción de la matemática escolar.

1.4. Hipótesis de investigación

Una vez que hemos delimitado los objetivos de la investigación, y a partir de la información previa, procedemos a plantear las hipótesis iniciales sobre los resultados esperados:

- **Hipótesis 1:** Se espera que la tarea de diseño de problemas de probabilidad movilice simultáneamente el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de los futuros maestros.
- **Hipótesis 2:** Se espera que el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de los futuros maestros en relación con la probabilidad sea escaso, y que se evidencie

la necesidad de un refuerzo en el estudio tanto de los contenidos probabilísticos como de los contenidos pedagógicos.

- **Hipótesis 3:** Se espera que los refinamientos de la tarea propuesta en los sucesivos ciclos de investigación-acción desarrollados impliquen una mejora en las producciones de los futuros maestros.
- **Hipótesis 4:** Se espera que los futuros maestros muestren una mezcla de tendencias didácticas referidas a su concepción de la matemática escolar.

1.5. Estructura de la tesis doctoral

Esta tesis doctoral se ha estructurado en ocho capítulos. Todos ellos siguen una estructura entrelazada que va hilando unos con otros. Este primer capítulo, nos ha servido para aportarnos una introducción y una contextualización del tema de estudio, seguidas de los objetivos y las hipótesis de investigación. Con ello, nos preparamos para poder abordar el marco teórico, en el segundo capítulo. En él se plantea, de forma extensa, la literatura relacionada con el trabajo, comenzando con la formación previa en probabilidad que habrán recibido los futuros maestros en las etapas de enseñanza obligatoria, pasando a explicitar el bagaje de conocimientos probabilísticos que pueden tener (o no tener) debido a su itinerario de acceso al grado, y llegando a determinar cómo es la formación en probabilidad en los programas de formación de maestros. En ese mismo capítulo aportamos una revisión de la literatura relacionada con la formación de maestros en probabilidad y sus conocimientos probabilísticos para la enseñanza. Hacemos hincapié en el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (Ball *et al*., 2008) que sienta las bases de los conocimientos tanto matemáticos como pedagógicos que deben adquirir los futuros maestros para poder llevar a cabo una instrucción efectiva de la materia. Aportamos una explicación de las bondades del diseño de tareas como recurso didáctico ya que, para este trabajo hemos optado por trabajar el conocimiento matemático y pedagógico a través del diseño de tareas efectivas para la enseñanza de la probabilidad. Esas tareas deben ser adecuadas, por lo que introducimos también la idea de la idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico [EOS] (Godino *et al*., 2007). Finalmente, para cerrar el capítulo y dada la influencia que tienen las creencias de los futuros maestros en su futura práctica docente, introducimos un apartado en el que explicamos qué tipos de creencias podemos encontrar y como afectan a la docencia de los futuros maestros.

A continuación, el tercer capítulo de esta tesis doctoral se adentra en la metodología de la investigación, incluyendo una explicación del instrumento utilizado en el estudio y el marco metodológico, basado en la investigación-acción (caracterizada por su naturaleza cíclica), el análisis del contenido y el análisis de los subdominios del modelo de conocimiento matemático para la enseñanza, indicando cómo se ha llevado a cabo el estudio aquí expuesto.

Partiendo de estas explicaciones introducimos los capítulos cuatro, cinco y seis, en los que se explica cada uno de los tres experimentos realizados en tres cursos consecutivos. En cada uno de los capítulos se desarrolla un ciclo de investigación-acción (véase sección 3.2.). Al finalizar cada ciclo se aplican modificaciones en el mismo, en función de los resultados obtenidos, permitiendo comenzar un nuevo ciclo modificado. Estos capítulos aportan una visión general de cómo es el conocimiento matemático para la enseñanza, en este caso, de la probabilidad clásica de los futuros maestros analizados.

En el capítulo siete se plantea un análisis de las creencias de los futuros maestros en relación con cómo consideran que es la matemática escolar. Este análisis nos muestra el tipo de creencias predominantes en los grupos de futuros maestros participantes en el estudio.

Por tanto, conseguimos generar una visión global de los conocimientos matemáticos y pedagógicos que poseen los futuros maestros y de las creencias mostradas sobre la matemática escolar, que influirán en su futura práctica docente. En el octavo y último capítulo planteamos una visión de conjunto, discutiendo los resultados obtenidos y aportando las conclusiones que se han podido deducir de dichos resultados. Presentamos las limitaciones que tiene este estudio y dejamos abierta la puerta a las posibles líneas futuras que podrían continuar trabajándose tras la elaboración de este trabajo, brindándonos la oportunidad de seguir ahondando en esta línea de investigación.

Finalmente, podemos encontrar el apartado de referencias bibliográficas del trabajo, con el que se cierra esta memoria.

CAPÍTULO 2

Marco teórico

En este capítulo presentamos el marco teórico en el que se fundamenta este trabajo. En primer lugar, se introduce una visión general de cómo es la formación en probabilidad en las etapas previas al acceso a la universidad, clarificando cómo es la formación probabilística de los estudiantes de Educación Primaria, y de Educación Secundaria y Bachillerato. Una vez identificados los conocimientos que se han trabajado previamente en esas etapas, en la segunda sección del capítulo, mostramos cuál es la formación en probabilidad que presentan los futuros maestros, centrando nuestro interés en el caso de la Universidad de Oviedo, en la cual se ha realizado este estudio. A continuación, en la tercera sección, se plantea el concepto de la alfabetización probabilística (incidiendo en los elementos cognitivos y los disposicionales que la conforman), así como la importancia de alfabetizar probabilísticamente a los futuros maestros. Por otra parte, en la cuarta sección nos adentramos en un estado del arte de la cuestión a trabajar, haciendo un recorrido por los trabajos más relevantes de la literatura referentes a la formación en probabilidad de los futuros maestros para, a continuación, mostrar el modelo de análisis del conocimiento matemático con el que se ha trabajado (véase sección 2.5.): el conocimiento matemático para la enseñanza o modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Trabajar en el diseño de tareas resulta ser una de las competencias docentes de los maestros. Mediante las tareas diseñadas podemos identificar cómo es el conocimiento matemático para la enseñanza de los futuros maestros. En la sección sexta se incide en la importancia del diseño de tareas como recurso didáctico para la formación de maestros. Además, esas tareas deben ser adecuadas, por lo que se introduce el concepto de idoneidad didáctica. Finalmente, y dado que las creencias y concepciones de los futuros maestros pueden influir en su forma de entender y enseñar la probabilidad, es importante comprender cómo influyen en ese sentido y cómo pueden detectarse dichas creencias, lo cual se comentará en la séptima sección.

2.1. La formación en probabilidad en las etapas educativas previas a la enseñanza universitaria

En esta sección hablaremos sobre la formación previa en probabilidad que reciben los futuros maestros antes de acceder al grado, durante su etapa de Educación Obligatoria y Bachillerato. Resulta fundamental conocer los contenidos que han trabajado previamente durante su Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria o incluso Bachillerato, para conocer la base probabilística de la que parten los futuros maestros, sobre la que trabajaremos dentro del Grado en Maestro/a en Educación Primaria.

2.1.1. La formación en probabilidad en Educación Primaria

La incorporación de la probabilidad, junto con la estadística, al currículo de Educación Primaria es bastante reciente. Ambas han ido ganando protagonismo, en los últimos años, en los currículos de Educación Primaria, basándose en la idea del *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (NCTM, 1989) que introduce el área temática "Datos y Azar" en su *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* a finales de los años 80.

En los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) se fortalece esa idea indicando la necesidad de que los programas de Enseñanza Obligatoria consigan preparar al alumnado para enfrentarse al análisis de datos y a la probabilidad, incluyendo conocimientos de dichas áreas a partir de los 3 años. El enfoque promovido por esta institución, y que se ha ido incorporando en los currículos de un gran número de países, es un enfoque experimental, que facilita el acercamiento a la experiencia estocástica desde la infancia (Alsina *et al*., 2020).

En España, no fue hasta principios de los años 90 que se introdujo la enseñanza de la estadística en el currículo de Primaria con la entrada en vigor de la LOGSE (Jefatura del Estado, 1990). En Ministerio de Educación y Ciencia (1991), se introduce el bloque de contenidos llamado “Organización de la información”, en el cual se planteaba el trabajo de la estadística desde una perspectiva de análisis de tablas y gráficos.

Hubo que esperar hasta el año 2006, con la entrada en vigor de la LOE (Jefatura del Estado, 2006) para que se introdujese también la enseñanza de la probabilidad (Alsina, 2016a). El anterior bloque de contenidos sobre estadística pasa a llamarse “Tratamiento de la información, azar y probabilidad” en Ministerio de Educación y Ciencia (2006). En él, se contempla por primera vez el estudio del carácter aleatorio de experiencias simples, distinguiendo entre lo imposible, lo seguro y lo posible, empleando un lenguaje probabilístico adecuado.

Esto implica que muchos maestros en ejercicio no posean conocimientos de estadística y, especialmente, de probabilidad. Además, como se señaló en la introducción, es habitual que, a pesar de estar incluidas en el currículo, la estadística y la probabilidad se omitan, por estar ubicadas en la parte final de la asignatura, por lo que muchos maestros que se encuentran actualmente en formación, tampoco las han estudiado hasta su llegada a la ESO o Bachillerato. Con esto se remarca la importancia de preparar a los maestros, tanto en formación como en ejercicio, para impartir los contenidos de probabilidad.

En un contexto educativo de Enseñanza Obligatoria, podemos definir la probabilidad, de una manera muy simple, como la “medida de la posibilidad de ocurrencia de los sucesos”

(Alsina *et al*., 2020, p.110). Sin embargo, a lo largo su desarrollo histórico-epistemológico se han podido determinar varios significados a la probabilidad, que aún coexisten hoy en día (Batanero, 2005), y que se mantienen en el contexto de la matemática escolar. Estos significados son el intuitivo, el frecuencial, el subjetivo o bayesiano, el laplaciano o clásico y el axiomático (Alsina *et al*., 2020; Batanero, 2005; Batanero *et al*., 2005). Esta coexistencia de significados puede deberse a que el desarrollo de la probabilidad es relativamente reciente en la historia de la matemática (Shaughnessy, 1992).

En Educación Primaria pueden trabajarse los significados intuitivo, laplaciano o clásico, frecuencial y subjetivo. Sin embargo, el significado axiomático, debido a su naturaleza, se deberá enseñar en etapas posteriores (generalmente, en Bachillerato) en las que el desarrollo madurativo del alumnado permita comprender completamente el concepto (Batanero, 2005).

- **Significado intuitivo**

Este significado de la probabilidad es con el que se comienza a acercar el concepto al alumnado desde los primeros niveles de la Educación Primaria. Fischbein (1975) ya indicaba que "los conceptos de azar y probabilidad podían construirse de forma natural desde una perspectiva intuitiva" (p. 97). Este autor considera que estas primeras intuiciones sobre probabilidad facilitan la adquisición de axiomas básicos de la teoría de la probabilidad. Por ejemplo, cuando hablamos de sucesos independientes, las intuiciones primarias facilitan la comprensión de que las posibilidades se reducen cuando se imponen más restricciones. Sin embargo, ese pensamiento intuitivo no nos permitirá realizar el cálculo final.

Batanero *et al*. (2005) plantean la importancia del refuerzo de la comprensión intuitiva previo al comienzo de la enseñanza formal de la probabilidad. Además, Batanero (2005) indica que "las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar son comunes en todas las civilizaciones primitivas. Aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades" (p. 253).

La forma de explicitar estas ideas es mediante el uso de frases o expresiones coloquiales de manera que los sucesos inciertos sean cuantificables y se muestre el grado de creencia que se tiene en ellos. De forma natural, utilizamos términos coloquiales para referirnos a la certeza o incerteza de los sucesos como los términos posible, imposible, poco probable, previsible, factible, etc.

En este sentido, cuando se introduce por primera vez la probabilidad, se plantean situaciones problemáticas en contextos cotidianos en los que interviene la estocástica. Las representaciones de la probabilidad se indican en grados de creencia de la ocurrencia del suceso de estudio, de manera cualitativa, de lo seguro a lo imposible o viceversa. Además, cuando se trabaja con este significado de la probabilidad se incide en la diferenciación entre los sucesos deterministas y los aleatorios, planteando situaciones aleatorias sencillas que permitan demostrar que los sucesos son fortuitos y variables como, por ejemplo, el lanzamiento de un dado o de una moneda. Sin embargo, la dualidad en la naturaleza de los significados de la probabilidad, que puede ser de naturaleza objetiva cuando se refiere a una propiedad de un suceso, o subjetiva, cuando nos centramos en el grado de creencia personal, ha creado controversia y diversos debates, dadas las distintas interpretaciones surgidas en ese sentido (Batanero, 2005; Hacking, 1995; Vásquez, 2014).

Por lo tanto, las ideas probabilísticas se han ido construyendo de manera gradual, partiendo de las primeras ideas intuitivas relacionadas con los juegos de azar, hasta llegar a configurar toda una teoría de la probabilidad. De esta manera, la probabilidad ha ido adquiriendo una mayor rigurosidad y estructura matemática (Vásquez, 2014).

- **Significado frecuencial**

El significado frecuencial de la probabilidad surge a principios del siglo XVIII cuando Bernoulli propone la asignación de probabilidades a un suceso aleatorio partiendo desde la frecuencia relativa observada cuando se repite un experimento un gran número veces.

La definición frecuencial de la probabilidad se apoya en la Ley de los Grandes Números que indica que “la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso puede aproximarse suficientemente a uno sin más que aumentar el número de pruebas" (Batanero, 2005, p. 254). Esta demostración planteada por Bernoulli contó con el apoyo de la comunidad científica de la época dado su carácter objetivo, que evitaba la dualidad de la naturaleza de la probabilidad. De esta manera, se podía pasar a realizar una demostración práctica de la probabilidad mediante la experimentación (Godino *et al*., 1987).

La probabilidad aparece definida, por tanto, como un supuesto valor hacia el que la frecuencia relativa tiende a estabilizarse. Se asume la existencia teórica del límite siendo el resultado un valor aproximado (Batanero, 2005). Es von Mises, en el año 1928, quién formaliza dicha definición, planteando que:

> Cuando un experimento aleatorio se puede repetir n veces, es decir, sea A un suceso cualquiera, denotemos por $n(A)$ el número de ocurrencias del suceso A, en las n realizaciones del experimento, entonces la probabilidad de A estará dada por:
>
> $$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$
>
> Donde $P(A)$ es el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, asumiendo la existencia teórica de dicho límite, del cual la frecuencia relativa observada es un valor aproximado (Vásquez, 2014, pp. 34-35).

De esta manera, podemos considerar la definición de la probabilidad de un suceso como la frecuencia relativa de la ocurrencia del suceso cuando se repite un gran número de veces. Alsina *et al*. (2020) indican que el significado frecuencial se desarrolla a lo largo de toda la etapa de Primaria, especialmente, a partir de experiencias manipulativas o mediante software específico, para poder realizar predicciones utilizando los datos observados en dichos experimentos.

El estudio también puede apoyarse en representaciones gráficas o en tablas de datos. En este momento, ya comenzamos a poder determinar la independencia de unas repeticiones a otras del experimento, el rango de resultados que presenta la frecuencia relativa (siempre entre los valores 0 y 1) y la estabilización de las frecuencias. También comienzan a introducirse términos probabilísticos más precisos como población, simulación, frecuencia o proporción, entre otros.

Actualmente, este enfoque es bastante común en la enseñanza de la probabilidad (Batanero, 2005; Gómez-Torres *et al*., 2014, 2015). Las simulaciones realizadas por ordenador permiten mostrar los efectos de esa serie de repeticiones del experimento de forma que se demuestre la convergencia estocástica (Batanero 2005; Batanero *et al*., 2005).

Sin embargo, este significado de la probabilidad se encuentra limitado por su propia naturaleza. Esto se debe a que no siempre podemos realizar un experimento bajo las mismas condiciones un número indeterminado de veces, el resultado obtenido será un resultado aproximado, desconocemos el número necesario de repeticiones que debemos realizar para obtener una buena estimación y no podemos aplicar esta definición a sucesos que no se puedan repetir o replicar (Batanero *et al.*, 2005; Vásquez, 2014).

- **Significado subjetivo o bayesiano**

Como hemos comentado previamente, la definición frecuencial de la probabilidad presenta una serie de limitaciones que implican que no pueda aplicarse en todas las distintas situaciones que puedan abordarse mediante el cálculo de probabilidades. Thomas Bayes planteó un nuevo enfoque que, tras su fallecimiento, pasaría a conocerse como la regla o el teorema de Bayes, en el que la probabilidad se muestra desde un punto de vista de la experiencia previa, la información disponible, la opinión, la intuición o la confianza de la persona sobre la ocurrencia del suceso (Vásquez, 2014). La regla de Bayes "permite transformar las probabilidades *a priori* (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades *a posteriori*, que incorporan la información de los datos analizados" (Batanero, 2005, p. 255).

Esto implica que, en función de la información de la que dispongamos, podremos revisar las probabilidades *a priori* si se incorporan nuevas informaciones, que resulten en una variación en los resultados de las probabilidades *a posteriori*. El planteamiento bayesiano supone una pérdida del carácter objetivo que asigna la definición frecuencial, pasando a tener una percepción subjetiva del resultado.

Debido a ello, son algunos de los seguidores de las ideas de Bayes, como Kaynes, Ramsey y de Finetti, quienes dan a conocer el significado subjetivo de la probabilidad, describiéndola como los grados de creencia personal en la ocurrencia de un suceso, que pueden ser variables de una persona a otra dependiendo del conocimiento o la experiencia previa del observador. De este modo, podemos entender la probabilidad desde un enfoque subjetivo como “el grado de creencia o de convicción con respecto a la ocurrencia de una afirmación. En este contexto, la probabilidad representa un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible” (Canavos, 1988, como se citó en Vásquez, 2014, p. 37). Así, el enfoque subjetivo de la probabilidad consigue que se amplíe el campo de aplicación al no ser necesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones, como ocurría con la probabilidad frecuencial.

En lo referente a la aparición de este significado en la Enseñanza Primaria nos encontramos ante un significado que podría comenzar a plantearse a partir de los 9 años. Sin embargo, es un significado de escasa o nula aparición en los libros de texto (Gómez-Torres *et al*., 2014, 2015) lo que implica una escasa aparición de situaciones en las que se aplique este tipo de probabilidad durante la etapa de Educación Primaria.

Este tipo de definición se puede introducir en Educación Primaria a partir de experimentos aleatorios en los que la probabilidad pueda variar dependiendo de la información previa de la que se disponga, pudiendo verse afectada también, como hemos comentado, por las creencias o las experiencias personales. Además, podemos introducir nueva información que permita variar los resultados. De este modo, podemos estimar probabilidades en situaciones en la que no es aplicable la definición clásica (porque no se pueden contar casos) ni la frecuencial (porque el experimento no se puede repetir para estabilizar la frecuencia relativa) como, por ejemplo, la probabilidad de lluvia en una predicción meteorológica.

Como ocurría con la definición intuitiva de la probabilidad, de nuevo, es necesario emplear términos y expresiones probabilísticos no necesariamente numéricos. A pesar de ello, este enfoque sigue planteando ciertas limitaciones al no poseer una regla que permita asignar valores numéricos a las probabilidades, puesto que los resultados serán variables al basarse en creencias personales. Esta limitación impulsó el trabajo de dos de los discípulos de Bayes: Ramsey (1926) y de Finetti (1937) que trabajaron en la elaboración de una teoría de decisión mediante la que deducir los valores de las probabilidades subjetivas pudiendo separar entre creencias y preferencias mediante un sistema de apuestas.

- **Significado laplaciano o clásico**

Se suele asumir que la correspondencia entre Pascal y Fermat, en el año 1654, es el origen de la teoría de la probabilidad. En sus cartas ambos hablaban sobre la resolución de problemas relacionados con juegos de azar, planteados por el llamado caballero de Meré. Sin embargo, Hacking (1995) indica que esa suposición no es correcta pues ese tipo de problemas eran conocidos con bastante anterioridad, siendo conceptos que podrían haber aprendido durante sus estudios en la escuela.

De Moivre aporta la primera definición del significado clásico o geométrico de la probabilidad en el año 1718 en su obra *Doctrine of Chances*. El término "geométrico" para referirse a esta definición de la probabilidad procede de la denominación original acuñada por Pascal en el siglo XVII que denominaba a la probabilidad como "geometría del azar" (del Cerro y Secades, 2004). Sin embargo, no fue hasta el año 1814 en que Laplace reformula dicha definición, que es la que actualmente conocemos como Regla de Laplace. Según esta definición, la probabilidad de un suceso es "la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles. Siempre que todos los resultados sean igualmente probables" (Vásquez, 2014, p. 33). Esta definición es la más frecuente en los libros de texto (Gómez-Torres *et al*., 2014, 2015; Mohamed y Ortiz, 2012), introduciéndose en los últimos niveles de la Educación Primaria (en ocasiones, de manera exclusiva) y apareciendo en el currículo por primera vez en 6º curso.

La introducción de este significado de la probabilidad viene determinada por situaciones aleatorias en las que se solicita el cálculo de una o más probabilidades para determinar la ocurrencia de uno o más sucesos. De esta forma, se estudiarán los datos para, a partir de ellos, determinar la ocurrencia teórica de dicho suceso o sucesos. La probabilidad se calculará a través de la Regla de Laplace, que se computa como el número de casos favorables a ocurrir un suceso cualquiera A, entre el número de todos casos posibles del experimento:

$$P(A) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{n^{\text{o}}\ de\ todos\ los\ casos\ posibles}$$

El resultado de esta operación será un valor cuantitativo que se situará entre 0 y 1, al igual que ocurría en la definición frecuencial. Para poder utilizar esta definición, además de la utilización de términos probabilísticos precisos, deben conocerse y comprenderse los conceptos de espacio muestral (conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio), casos favorables, casos posibles, equiprobabilidad o la noción de juego justo.

Más aún, resulta imprescindible que el alumnado posea un buen manejo de las fracciones y las operaciones con fracciones, así como de los números decimales. Esto se debe a la propia naturaleza de la definición laplaciana, que nos muestra una fracción entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. El resultado de dicha probabilidad puede expresarse tanto en forma de fracción como en forma decimal.

La incorrecta utilización de las fracciones al realizar el cálculo de probabilidades mediante el significado clásico de la probabilidad implica que puedan obtenerse soluciones a los problemas que no sean factibles como, por ejemplo, confundir el numerador con el denominador y obtener una fracción cuyo resultado sea un valor mayor que 1. También es importante que el alumnado reconozca cuándo se puede utilizar esta definición, ya que sólo podremos utilizarla cuando el espacio muestral sea finito y cuando los sucesos elementales sean equiprobables (que tengan las mismas posibilidades de ocurrir). Esto implica que no podremos aplicar esta definición cuando el muestreo sea infinito o cuando, aun teniendo una muestra finita de sucesos, estos no sean equiprobables.

Su principal aplicación es en el cálculo de probabilidades de sucesos simples en juegos de azar o situaciones similares. Aunque este tipo de juegos es familiar para los niños, éstos tienen que aplicar su razonamiento combinatorio para el cálculo de probabilidades, lo que a menudo es una tarea complicada para muchos de ellos (Gómez-Torres *et al*., 2016).

De nuevo, la definición acaba por resultar inadecuada en algunos sentidos ya que "no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidad de algunos sucesos sencillos" (Godino *et al*., 1987, p. 21). Es por ello que, fuera de los juegos de azar, la probabilidad laplaciana puede ser aplicada en pocas situaciones (Batanero *et al*., 2005).

- **Significado axiomático**

Este significado de la probabilidad surgió a partir del desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad, concebida al comienzo del siglo XX. Kolmogorov consiguió deducir una definición axiomática de la probabilidad combinando la teoría de conjuntos con la medida y partiendo de las ideas de Borel, que consideraba la probabilidad como un tipo de medida particular (Batanero y Díaz, 2007). Esta definición axiomática ha sido aceptada por todas las escuelas, pasando a considerarse la probabilidad como un modelo matemático que permite describir e interpretar los fenómenos aleatorios, favoreciendo, en numerosas ocasiones, la toma de decisiones a partir de unos datos (Batanero, 2005). En este sentido, se establecen las reglas que debe satisfacer el cálculo de probabilidades.

En el año 1933, Kolmogorov establece una serie de axiomas de probabilidad que se representan por medio de conjuntos. En ellos se definen el conjunto total, denominado espacio muestral y representado habitualmente por el símbolo Ω, y los sucesos, que se corresponden con subconjuntos del espacio muestral. Kolmogorov considera la probabilidad como una medida acotada en el intervalo numérico $[0, 1]$, y definida sobre esos conjuntos. A partir de ahí, es posible definir sobre el espacio muestral una σ-álgebra de sucesos ρ. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral Ω a cualquier función P definida sobre ρ que satisfaga los tres axiomas que se muestran a continuación (Canavos, 1988):

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si, para los sucesos $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para toda $i \neq j$ entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

Las siguientes propiedades se enuncian partiendo de los tres axiomas de la probabilidad (Canavos, 1988) y se estudian habitualmente, sobre todo en la secundaria, incluso aunque no se haya desarrollado la definición axiomática:

1. Para cualquier suceso $A, P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
4. Si $A \subseteq B$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$

5. Para cualquier suceso $A, 0 \leq P(A) \leq 1$
6. Para cualesquiera sucesos A y B, se cumple que:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
7. Para cualesquiera sucesos A, B y C, se cumple que:
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Todos estos axiomas y propiedades derivadas de ellos han facilitado la configuración actual de la conocida actualmente como Teoría de la Probabilidad, la cual aporta modelos para fenómenos en los que interviene la incertidumbre. Esto ha convertido la probabilidad en una de las ramas más prolíficas de la matemática (Godino *et al*., 1987).

La probabilidad y sus distintos significados siguen generando debate y discusión hoy en día. Steinbring (1990) y Batanero *et al*. (2005) indican la importancia de adoptar una perspectiva de modelización de la probabilidad en la que los distintos significados se complementen para alcanzar una comprensión adecuada, como también apoya Vásquez (2014). Esto supone que la enseñanza de la probabilidad no debería centrarse en un único significado, resultando fundamental que los maestros sepan manejar todos los significados de la probabilidad contando, además, con las herramientas didácticas necesarias que les permitan enseñar esos conocimientos probabilísticos. Así, partiendo de las primeras ideas intuitivas sobre la probabilidad, el alumnado podrá sentar las bases para construir el concepto de manera gradual, apoyándose en los distintos significados, obteniendo una visión global de la probabilidad (Vásquez, 2014). A continuación, en la Tabla 2 se muestra una síntesis de los elementos que caracterizan los distintos significados de la probabilidad, según Batanero (2005).

Tabla 2
Elementos que Caracterizan los Diferentes Significados de la Probabilidad

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LONGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
INTUITIVO	Sorteos Adivinación	Manipulación de generadores de azar: dados, cartas…	Lenguaje ordinario	Opinión impredecible, creencia	Suerte Destino
FRECUENCIAL	Estimación de parámetros en poblaciones	Registros de datos estadísticos a posteriori Ajuste de curvas matemáticas Análisis matemático Simulación	Tablas y gráficos estadísticos Curvas de densidad Tablas de números aleatorios Tablas de distribuciones	Límite de las frecuencias relativas Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	Frecuencia relativa Universo Variable aleatoria Distribución de probabilidad
SUBJETIVO	Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	Teorema de Bayes Asignación subjetiva de probabilidades	Expresión de la probabilidad condicional	Carácter subjetivo Revisable con la experiencia	Probabilidad condicional Distribuciones a priori y a posteriori
CLÁSICO	Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	Combinatoria Proporciones Análisis a priori de la estructura del experimento	Triángulo aritmético Listado de sucesos Fórmulas combinatorias	Cociente de casos favorables y posibles Equiprobabilidad de sucesos simples	Esperanza Equitatividad Independencia
MATEMÁTICO-AXIOMÁTICO	Cuantificar la incertidumbre de resultados	Teoría de conjuntos	Símbolos conjuntistas	Función medible	Espacio muestral

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LONGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
	en experimentos aleatorios abstractos	Algebra de conjuntos Teoría de la medida			Espacio de probabilidad Conjuntos de Borel

Nota. Tomado de Batanero, 2005 (p. 34).

En el currículo de Educación Primaria del Principado de Asturias (Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias, 2014a) podemos observar los contenidos relacionados con la probabilidad que deben trabajarse en los centros asturianos de Educación Primaria. Este currículo no presenta grandes diferencias con el currículo de mínimos nacional, por lo que nos centraremos en él para nuestro análisis, dado que nos encontramos en el contexto de la educación en el Principado de Asturias. La probabilidad aparece en el 1^er^ curso, centrándose en el significado intuitivo, trabajando la distinción entre lo posible, lo imposible y lo seguro. En el 2º curso se continúa en la misma línea, añadiendo expresiones del lenguaje cotidiano para hablar sobre la probabilidad, y se comienzan a introducir estimaciones de probabilidades de juegos y sucesos cotidianos.

No volvemos a encontrar contenidos probabilísticos hasta el 4º curso, dónde se introduce al alumnado al lenguaje del azar. En este curso también se realizan valoraciones de los resultados de juegos y experiencias en las que interviene el azar. De este modo, se puede determinar si hay sucesos más o menos probables o si existe imposibilidad para predecir un resultado concreto. Se realizan estimaciones de posibles resultados respecto a sucesos conocidos atendiendo al grado de probabilidad que tienen de ocurrir.

En 5º curso, la probabilidad vuelve a desaparecer, introduciéndose de nuevo en 6º curso, con la estimación del grado de probabilidad de un suceso, la comparación de resultados obtenidos en situaciones cotidianas y en juegos de azar de los que se poseen estimaciones previas, y el cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace. A pesar de que la probabilidad no aparece explicitada en los contenidos del 3º y del 5º cursos, sí que se refleja en los criterios de evaluación. Se entiende que pueden existir variaciones de una comunidad autónoma a otra en relación con la forma en que se reparten los contenidos a lo largo de la etapa de Educación Primaria.

En la Figura 1 se muestran los contenidos del currículo asturiano en relación con el bloque de Estadística y Probabilidad. En la Figura 2 se muestran los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables del mismo currículo relacionados con la Probabilidad.

Figura 1

Contenidos del Currículo sobre Estadística y Probabilidad.

CONTENIDOS					
Bloque 5. Estadística y probabilidad					
1º EP	2º EP	3º EP	4º EP	5º EP	6º EP
- Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. - Distinción entre lo posible, lo imposible y lo seguro.	- Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos e iniciación a su representación mediante gráficos elementales como pictogramas. - Distinción entre lo posible, lo imposible y lo seguro y utilización en el lenguaje habitual de expresiones relacionadas con la probabilidad. - Estimación de resultados asociados a juegos y sucesos cotidianos relacionados con la probabilidad. - Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de las demás personas.	- Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. - Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de diferentes tipos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. - Gráficos de barras, gráficos de líneas y pictogramas. Utilización de los mismos para la representación de datos.	- Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. - Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. - Elaboración y representación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. - Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica. - Valoración de los resultados de juegos y experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. - Estimación de posibles resultados respecto a sucesos conocidos, atendiendo al grado de probabilidad de los mismos. - Introducción al lenguaje del azar.	- Recogida y registro de datos utilizando diferentes técnicas elementales de encuesta, observación y medición. - Obtención y utilización de información para la realización de gráficos. - Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. - Elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara. - Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. - Realización de sencillos estudios estadísticos mediante el diseño y puesta en práctica de cada una de sus fases: obtención y registro de datos, presentación en tablas, representación gráfica y valoración. - Frecuencia, moda y media.	- Frecuencia absoluta, frecuencia relativa, la media aritmética, la moda y el rango. Aplicación a situaciones familiares. - Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso. - Comparación de los resultados obtenidos en situaciones cotidianas o juegos relacionados con el azar, con estimaciones previas sobre los mismos. - Cálculo de probabilidades: los casos favorables entre los casos posibles. - Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas. - Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión y representación de datos estadísticos.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2014b).

Figura 2

Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje Evaluables en Probabilidad

<table>
<tr><th colspan="6">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</th><th rowspan="2">Estándares de aprendizaje evaluables</th></tr>
<tr><th colspan="6">Bloque 5. Estadística y probabilidad (Viene de la página anterior)</th></tr>
<tr><td colspan="6">□ Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.
Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de:</td><td rowspan="3">• Realiza análisis crítico argumentado sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.</td></tr>
<tr><th>1º EP</th><th>2º EP</th><th>3º EP</th><th>4º EP</th><th>5º EP</th><th>6º EP</th></tr>
<tr><td>- Emplear el vocabulario en las situaciones de azar: seguro, posible e imposible.</td><td>- Identificar hechos cotidianos como seguros, posibles o imposibles.
- Analizar los resultados sobre una experiencia de azar.
- Comprender y utilizar correctamente el vocabulario: seguro, posible e imposible en relación a una experiencia de azar.
- Realizar estimaciones sobre los resultados producidos por juegos de azar y probabilidad.
- Trabajar en pareja para realizar una experiencia de azar.</td><td>- Realizar experiencias de azar y anotar en tablas los resultados obtenidos.</td><td>- Valorar sucesos cotidianos como más o menos probables.
- Identificar situaciones de carácter aleatorio en el entorno cotidiano.
- Describir, con un vocabulario adecuado, una experiencia de azar analizando todos los resultados posibles y describiendo un suceso de cada tipo para dicha experiencia.
- Identificar sucesos probables, poco probables y muy probables.
- Idear situaciones de la vida cotidiana en las que se den sucesos probables, poco probables y muy probables.</td><td>- Calcular la probabilidad de que ocurra un suceso determinado.
- Realizar tablas de registro de datos sobre experiencias de azar realizadas en grupo.</td><td>- Ordenar un grupo de sucesos en función de la probabilidad de que estos sucedan.
- Debatir en grupo sobre la posibilidad de que un determinado proceso tenga más o menos probabilidad de ocurrir por el hecho de que haya o no ocurrido recientemente.
- Calcular las probabilidades de un suceso cualquiera utilizando la Regla de Laplace.</td></tr>
<tr><td colspan="6">□ Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición.
Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de:</td><td rowspan="3">• Identifica situaciones de carácter aleatorio.
• Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería…).</td></tr>
<tr><th>1º EP</th><th>2º EP</th><th>3º EP</th><th>4º EP</th><th>5º EP</th><th>6º EP</th></tr>
<tr><td>- Observar sucesos de la vida diaria que sean posibles, imposibles y seguros.
- Comentar oralmente dichas posibilidades en los sucesos cotidianos.</td><td>- Distinguir entre sucesos imposibles, seguros y posibles que surgen de los procesos de azar, en juegos y en acciones de la vida diaria.</td><td>- Realizar observaciones de la vida cotidiana y recoger información sobre sucesos aleatorios que en ella se producen.</td><td>- Valorar sucesos cotidianos como más o menos probables.
- Realizar observaciones de la vida cotidiana y recoger informaciones sobre sucesos seguros.</td><td>- Utilizar los conceptos de: frecuencia, moda y mediana, para la recogida y tratamiento de los datos obtenidos en los procesos de cálculo de probabilidades.
- Representar gráficamente los sucesos observados.</td><td>- Calcular la media aritmética, la moda y el rango a partir de tablas de datos o de la representación gráfica de los mismos y explicar su significado oralmente o por escrito.
- Realizar en grupo procesos aleatorios y tomar datos de todos ellos. Discutir en grupo las probabilidades de obtener un posible resultado en dichos procesos.</td></tr>
</table>

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2014b).

2.1.2. La formación en probabilidad en Educación Secundaria

En esta sección aportaremos una visión general de los conocimientos sobre probabilidad que deberían haber adquirido los futuros maestros durante la etapa de Educación Secundaria, previa a su acceso al grado. Esto nos servirá para comprender qué conocimientos deberían poseer los futuros maestros cuando accedan al grado, en función de su vía de acceso al mismo.

Durante la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, si nos fijamos en el currículo de Educación Secundaria del Principado de Asturias (Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias, 2015a), los contenidos probabilísticos no aparecen hasta el 2º curso, en el que se hace un breve repaso de todos los conceptos aprendidos durante la etapa de la Educación Primaria: se diferencia entre fenómenos deterministas y aleatorios; se trabaja con fenómenos aleatorios sencillos como el lanzamiento de dados o monedas, o la extracción de cartas de una baraja; se estudia la variabilidad de las frecuencias relativas mediante simulación o experimentación; los sucesos equiprobables y no equiprobables; la determinación de espacios muestrales en experimentos sencillos y resolución con tablas y diagramas de árbol sencillos; el trabajo con sucesos aleatorios sencillos y el cálculo de probabilidades con la regla de Laplace.

En las Figuras 3 y 4 se pueden observar los contenidos del bloque de Estadística y Probabilidad, y los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables (respectivamente) del currículo de Educación Secundaria del Principado de Asturias, para los cursos de 1º y 2º de ESO.

Una vez superados los dos primeros cursos del primer ciclo de la ESO (correspondiente a los cursos de 1º, 2º y 3º de ESO), la enseñanza de las matemáticas se divide en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas o en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. En el primero de los casos, en el 3er curso, volvemos a encontrarnos con unos contenidos similares, en los que se trabajan experiencias aleatorias determinando los distintos sucesos y el espacio muestral, el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace, el uso de diagramas de árbol y tablas de contingencia y se introducen los conceptos de permutaciones y de factorial de un número.

Figura 3

Contenidos del Bloque de Estadística y Probabilidad de 1º y 2º de ESO

Bloque 5. Estadística y Probabilidad	
1º ESO	**2º ESO**
- Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas. - Variables cualitativas y cuantitativas. - Frecuencias absolutas y relativas. - Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. - Histogramas, diagramas de barras y de sectores. Polígonos de frecuencias. - Medidas de tendencia central. Media aritmética, mediana y moda. - Medidas de dispersión. Rango. - Utilización de datos de la población española y/o asturiana para estudios estadísticos.	- Fenómenos deterministas y aleatorios. - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Lanzamiento de monedas y dados, extracción de cartas de una baraja. - Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. - Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. - Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos. - Sucesos asociados a distintos fenómenos aleatorios. - Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

También se comienza a utilizar la probabilidad como herramienta en la toma de decisiones en situaciones contextualizadas, como puede observarse en la Figura 5. La Figura 6 muestra los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje de este nivel en esta rama de estudio.

En lo relativo al 4º curso, además de contenidos básicos previamente trabajados, como el espacio muestral y los sucesos elementales o la regla de Laplace, se trabaja con sucesos compuestos para abordar la probabilidad simple y compuesta, se introduce a la combinatoria, se enseñan técnicas de recuento y se incorpora la probabilidad condicionada, así como el trabajo sobre juegos de azar, sorteos y análisis de resultados, como podemos observar en la Figura 7. La Figura 8 muestra, de nuevo, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje para este curso en este itinerario de estudio.

Figura 4

Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje Evaluables sobre Probabilidad de 1º y 2º de ESO

<table>
<tr><th colspan="2">CRITERIOS DE EVALUACIÓN</th><th rowspan="2">Estándares de aprendizaje evaluables</th></tr>
<tr><th colspan="2">Bloque 5. Estadística y Probabilidad (Viene de la página anterior)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.
Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de:</td><td rowspan="3">• Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.
• Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación.
• Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación.</td></tr>
<tr><th>1º ESO</th><th>2º ESO</th></tr>
<tr><td></td><td>- Identificar y proponer ejemplos de experimentos aleatorios y experimentos deterministas.
- Identificar sucesos simples asociados al espacio muestral de un experimento aleatorio.
- Calcular la frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación.
- Predecir resultados asociados a un fenómeno aleatorio a partir de la experimentación.
- Predecir resultados asociados a un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de la probabilidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.
Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de:</td><td rowspan="3">• Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos.
• Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
• Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace, y la expresa en forma de fracción y como porcentaje.</td></tr>
<tr><th>1º ESO</th><th>2º ESO</th></tr>
<tr><td></td><td>- Describir experimentos aleatorios sencillos como lanzamiento de dados y monedas o extracción de cartas de una baraja.
- Representar el espacio muestral asociado a distintos experimentos aleatorios sencillos utilizando distintas técnicas como tablas, recuentos o diagramas de árbol.
- Diferenciar sucesos elementales equiprobables y no equiprobables y proponer ejemplos de ambos tipos de sucesos.
- Utilizar la regla de Laplace para calcular probabilidades de sucesos asociados a experimentos sencillos.
- Expresar el resultado del cálculo de probabilidades como fracción y como porcentaje.</td></tr>
</table>

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

Figura 5

Contenidos del bloque de Estadística y probabilidad de 3º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Bloque 5. Estadística y Probabilidad
3º ESO
- Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas y cuantitativas discretas o continuas. - Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra. Encuestas. - Organización de los datos en tablas estadísticas. Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. - Gráficas estadísticas. Histogramas, diagrama de barras, diagrama de sectores, polígonos de frecuencias. - Parámetros de posición y centralización. Cálculo, interpretación y propiedades. - Parámetros de dispersión. Rango, varianza, desviación típica. - Diagrama de caja y bigotes. - Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. - Utilización de medios tecnológicos para realizar cálculos y gráficos estadísticos. - Utilización de datos de la población española y/o asturiana para estudios estadísticos y probabilísticos. - Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. - Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Tablas de contingencia. Permutaciones, factorial de un número. - Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

Figura 6

Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje Evaluables sobre Probabilidad de 3º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN **Bloque 5. Estadística y Probabilidad** (Viene de la página anterior)	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento. Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de: **3º ESO** - Distinguir experimentos aleatorios de deterministas y proponer ejemplos de ambos. - Verbalizar utilizando el vocabulario adecuado distintas situaciones relacionadas con el azar. - Usar distintas técnicas de recuento, tales como tablas, diagramas de árbol o enumeraciones, para obtener el espacio muestral de experimentos aleatorios sencillos. - Expresar los sucesos asociados a un fenómeno aleatorio con el lenguaje adecuado. - Utilizar la regla de Laplace para calcular probabilidades en el caso de sucesos equiprobables procedentes de experimentos aleatorios sencillos. - Escoger la opción correcta a la vista de las probabilidades obtenidas al resolver problemas planteados sobre situaciones de incertidumbre.	• Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. • Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. • Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales. • Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

Figura 7

Contenidos del Bloque de Estadística y Probabilidad de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas

Bloque 5. Estadística y Probabilidad
4º ESO
- Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Elección de la técnica de recuento adecuada. - Espacio muestral. Sucesos elementales, sucesos compuestos. - Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. - Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. - Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. - Probabilidad condicionada. - Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística. - Juegos de azar y sorteos. Análisis de resultados. - Tipos de muestras. Representatividad. - Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. - Gráficas estadísticas: distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. - Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Uso de medios tecnológicos para su cálculo. - Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. - Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación. - Utilización de datos de la población española y/o asturiana para estudios estadísticos y probabilísticos.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

Para el segundo itinerario de matemáticas, no encontramos contenidos de probabilidad en el 3er curso, de modo que dichos contenidos pasan a introducirse en el 4º curso de manera muy superficial, llegando a realizar un *repaso* de contenidos de cursos anteriores, introduciendo como novedad la probabilidad compuesta como puede verse en la Figura 9. Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de este itinerario para 4º curso de la ESO se muestran en la Figura 10.

Habitualmente, el itinerario de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas suele ser seleccionado por aquel alumnado que desea continuar sus estudios enfocándose a la selección de un Bachillerato de Ciencias o de Humanidades y Ciencias Sociales en el itinerario de Ciencias Sociales. Por su parte, el itinerario de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, suelen seleccionarlo aquellas personas que pretenden continuar sus estudios en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, en el itinerario de Humanidades, o en el Bachillerato de Artes, en los que no cursarán matemáticas, o aquellas personas que no pretenden continuar sus estudios tras acabar la Enseñanza Obligatoria. También suele ser opción para aquellas personas que quieren continuar estudiando un ciclo de Formación Profesional (FP), que pueden tener asignaturas de matemáticas o no, dependiendo de su naturaleza.

Figura 8

Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje Evaluables sobre Probabilidad de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Bloque 5. Estadística y Probabilidad	Estándares de aprendizaje evaluables
Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas. Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de: **4º ESO** - Escoger la técnica de recuento más adecuada según el contexto del problema planteado. - Realizar cálculos sencillos utilizando factoriales y números combinatorios. - Calcular el número de elementos de un conjunto utilizando el concepto de variación, permutación o combinación según convenga. - Reconocer situaciones asociadas a fenómenos aleatorios y describirlas adecuadamente. - Usar el vocabulario adecuado para describir sucesos asociados a fenómenos aleatorios. - Emplear técnicas del cálculo de probabilidades para resolver problemas sencillos de la vida cotidiana. - Comprobar la coherencia de los resultados obtenidos al realizar experiencias aleatorias o simulaciones. - Realizar estudios estadísticos sencillos a partir de contextos cercanos e interpretar adecuadamente las conclusiones obtenidas. - Comunicar correctamente, tanto de forma oral como por escrito, las distintas fases de un estudio estadístico sencillo en un contexto cercano, dando especial relevancia a las conclusiones obtenidas.	• Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. • Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos. • Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. • Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. • Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. • Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias. Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de: **4º ESO** - Identificar el espacio muestral asociado a experimentos aleatorios simples o compuestos sencillos utilizando la técnica de recuento más adecuada. - Realizar diagramas de árbol o tablas de contingencia según convenga. - Calcular probabilidades de sucesos elementales o compuestos sencillos utilizando la regla de Laplace. - Diferenciar sucesos independientes y dependientes en fenómenos aleatorios sencillos. - Calcular la probabilidad condicionada en problemas sencillos, representando las probabilidades en forma de árbol o tabla. - Experimentar con juegos de azar o sorteos sencillos como lanzamiento de dados o monedas o extracciones de cartas y obtener conclusiones sobre las distintas probabilidades asociadas a los resultados del juego.	• Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias. • Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia. • Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada. • Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

Figura 9

Contenidos del Bloque de Estadística y probabilidad de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas

Bloque 5. Estadística y Probabilidad
4º ESO
- Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. - Calculo de parámetros de centralización y dispersión. Media aritmética, desviación típica. - Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión. - Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. - Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación. - Uso de distintos medios tecnológicos como calculadoras, hojas de cálculo u otros programas informáticos para realizar cálculos de parámetros o gráficos estadísticos. - Utilización de datos de la población española y/o asturiana para estudios estadísticos y probabilísticos. - Azar y probabilidad. Espacio muestral. Sucesos simples y compuestos. Frecuencia de un suceso aleatorio. - Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. - Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol. Tablas de contingencia.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

Figura 10

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables (probabilidad) de 4º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN Bloque 5. Estadística y Probabilidad	Estándares de aprendizaje evaluables
Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación. Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de: **4º ESO** - Reconocer situaciones asociadas a fenómenos aleatorios y/o estadísticos y describirlas adecuadamente. - Utilizar el vocabulario adecuado para describir sucesos asociados a fenómenos aleatorios. - Formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. - Indagar en los distintos medios de comunicación para descubrir noticias en las que la probabilidad sea protagonista. - Valorar los distintos resultados probabilísticos expuestos en los medios de comunicación reflexionando sobre su veracidad. - Verbalizar adecuadamente situaciones relacionadas con el azar. - Comunicar correctamente, tanto de forma oral como por escrito, las distintas fases de un estudio estadístico sencillo en un contexto cercano, dando especial relevancia a las conclusiones obtenidas.	• Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística. • Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. • Emplea el vocabulario adecuado para interpretar y comentar tablas de datos, gráficos estadísticos y parámetros estadísticos. • Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno.
Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia. Mediante este criterio se valorará si el alumno o la alumna es capaz de: **4º ESO** - Identificar el espacio muestral asociado a experimentos aleatorios simples o compuestos sencillos utilizando la técnica de recuento más adecuada. - Realizar diagramas de árbol o tablas de contingencia. - Calcular probabilidades de sucesos elementales o compuestos sencillos utilizando la regla de Laplace.	• Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos. • Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas.

Nota. Tomado de Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b).

Cuando nos adentramos en las distintas ramas de Bachillerato, podemos observar que no todas ellas presentan asignaturas de matemáticas: en el itinerario de Humanidades del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales no hay asignaturas de matemáticas, y lo mismo ocurre en el Bachillerato de Artes. Por su parte, tanto en el itinerario de Ciencias Sociales del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales como en el Bachillerato de Ciencias, encontramos asignaturas de matemáticas en las que, a su vez, se trabajan contenidos probabilísticos (Díaz, 2017; López-Martín, 2021; Rodríguez-Muñiz *et al*., 2019).

Por otro lado, en el itinerario de Ciencias Sociales del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales podemos encontrar las asignaturas Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II (de 1^er^ y 2º cursos, respectivamente). En Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I la enseñanza de la probabilidad profundiza en el cálculo de probabilidades mediante la combinatoria y la regla de Laplace, centrando su atención en la definición axiomática de la probabilidad, el cálculo de probabilidades en experimentos simples y compuestos y probabilidades condicionadas, añadiendo el estudio de variables aleatorias discretas y las distribuciones de probabilidad asociadas, durante el primer curso.

En el segundo curso, en la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, se profundiza en la definición axiomática de la probabilidad, repitiendo, de nuevo, los conceptos trabajados en el primer curso y añadiendo los teoremas de probabilidad total y de Bayes, y estudios de verosimilitud. También se avanza hacia el concepto de distribución de probabilidad en el muestreo para introducir la inferencia estadística (Díaz, 2017; Rodríguez-Muñiz *et al*., 2019).

Por su parte, en el Bachillerato de Ciencias, aparecen las asignaturas Matemáticas I y II (de 1^er^ y 2º cursos, respectivamente). En la asignatura del primer curso solo se estudia estadística bidimensional dentro del bloque de Estadística y Probabilidad, pasando todos los contenidos de probabilidad a la asignatura del segundo curso. Dichos contenidos son idénticos a los encontrados en la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, del primer curso del Bachillerato de Ciencias Sociales e incluyen, además, la introducción de los teoremas de probabilidad total y de Bayes y los estudios de verosimilitud.

Sin embargo, como se indica en el capítulo del Libro Blanco de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española dedicado a la formación inicial (López-Beltrán *et al*., 2020), la enseñanza de la estadística y la probabilidad aún presenta debilidades dentro del currículo de Educación Secundaria. Esto se debe a la desconexión que se encuentra entre estos dos ámbitos durante los estudios de Bachillerato, en los que el alumnado debe centrarse en el estudio de la estadística inferencial comprendiendo el propósito de la utilización de modelos probabilísticos que permitan realizar conjeturas y faciliten la toma de decisiones sobre las distribuciones de datos estadísticos (Muñiz-Rodríguez *et al.,* 2020). Todo ello lo aplican sin llegar a comprender la aplicación matemática de dichos modelos probabilísticos (López-Beltrán *et al*., 2020).

En este sentido sería necesaria una reformulación de los diseños curriculares actuales que no consideren la estadística descriptiva como una disciplina en la que solo hay que calcular parámetros y representar gráficos de datos, que no considere la inferencia estadística únicamente en los niveles superiores de la Educación Secundaria y que no considere los distintos significados de la probabilidad de manera aislada.

En lugar de dar tanto peso al cálculo, debería plantearse el estudio de la estadística descriptiva como un estudio dirigido a procesos de investigación, partiendo de pequeños tamaños de muestra y pudiendo ampliarlo a poblaciones más y más amplias. De esta manera se podrá preparar al alumnado para poder trabajar en estudios de significatividad de la muestra y *big data*; se introducirá la estadística inferencial desde los primeros niveles de la Educación Secundaria Obligatoria, de manera que se pueda iniciar al alumnado en el estudio de modelos probabilísticos y en procesos de modelización de datos consiguiendo, así, prepararles para trabajar la estadística inferencial de manera comprensiva; y se plantearán los distintos significados de la probabilidad como una serie de significados interrelacionados, aproximando los conceptos para comprender la variabilidad de los datos y promover el análisis de dicha variabilidad, sus distribuciones experimentales y la comparación de estas con distribuciones de tipo teórico (López-Beltrán *et al*., 2020).

Además, la aplicación de las distintas reformas educativas no ha hecho más que recargar el currículo con una gran acumulación de contenidos, como es el caso de la última reforma educativa, que añade la estadística y la probabilidad en 2º de Bachillerato de Ciencias, sin reducir los numerosos contenidos de los bloques anteriores (Rodríguez-Muñiz, Crespo *et al*., 2020). Más aún, Rodríguez-Muñiz, Crespo *et al*. (2020) indican que "debemos asumir que no por estudiar más contenidos se va a aprender más matemáticas. Debemos ser valientes a la hora de plantear que necesitamos que nuestro alumnado sepa matemáticas, no que haya oído hablar de muchos contenidos matemáticos" (p. 150). Vemos entonces que, a pesar de la introducción de la probabilidad en los currículos de Enseñanza Obligatoria y de Bachillerato, aún queda un largo camino que recorrer en relación con cómo enseñar los contenidos probabilísticos.

En esta memoria, tras hacer un repaso por todos los contenidos previos a la etapa universitaria, que nos ponen en antecedentes de los conocimientos en probabilidad que debería tener el alumnado que accede al grado, nos centramos en los contenidos trabajados durante la etapa de la Educación Primaria, ya que son aquellos con los que trabajarán los futuros maestros cuando pasen a ser maestros en ejercicio.

2.2. La formación matemática de los futuros maestros

La gran cantidad de datos que recibimos diariamente desde multitud de plataformas como la televisión, internet o las redes sociales, hace de vital importancia que dispongamos de una serie de estrategias para poder interpretar y comprender esos datos y transformarlos en información. A partir de ella, debemos poder sacar conclusiones y tomar decisiones. Por ello, es fundamental que se reciba una buena formación en estadística y probabilidad.

Alsina (2017a) indica que hay tres razones por las que es imprescindible incorporar la estadística y la probabilidad en el currículo desde edades tempranas. En primer lugar, considera que es importante tratar de garantizar una enseñanza que se adapte a los cambios sociales. En segundo lugar, considera de vital importancia la enseñanza de las matemáticas y, en especial, de la estadística y la probabilidad para el desarrollo integral de los ciudadanos. Finalmente, una buena alfabetización estadística y probabilística fomentará la formación de ciudadanos críticos, efectivos en la toma de decisiones en las que se requiera de un análisis de datos o en situaciones de incertidumbre. Por lo tanto, se precisa que los maestros dispongan de unos conocimientos sólidos en la materia, tanto en relación con el conocimiento matemático como con el pedagógico, de manera que puedan alfabetizar estadística y probabilísticamente a su alumnado, convirtiéndolos en ciudadanos con capacidad crítica, de análisis de datos y de toma efectiva de decisiones (Alsina, 2016a).

Cuando llegamos a un aula del Grado en Maestro/a en Educación Primaria podemos encontrarnos con muchos escenarios diferentes referidos a la formación recibida en probabilidad. La reciente incorporación de la estadística y la probabilidad en los currículos de Enseñanza Obligatoria influye en los conocimientos que los futuros maestros tienen sobre probabilidad pudiendo, algunos de ellos, tener escasos o nulos conocimientos sobre la materia, como ya hemos comentado en el apartado anterior.

Es importante remarcar que, para acceder al grado, los alumnos pueden tener distintas procedencias educativas: pueden haber accedido al grado desde los Bachilleratos de Ciencias o de Humanidades y Ciencias Sociales (itinerario de Ciencias Sociales), en los que se habrá trabajado la probabilidad; desde el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales (itinerario de Humanidades), en el que no hay asignaturas de matemáticas, por lo que no se trabajará la probabilidad; o desde CFGS, en los que no suelen encontrarse módulos profesionales relacionados con la probabilidad. Aquellas personas que acceden desde un Bachillerato de Humanidades no habrán estudiado matemáticas desde 4º de la ESO, con lo que sus conocimientos matemáticos pueden ser rudimentarios o estar olvidados.

Además, también es posible acceder al grado a través de la prueba de acceso para mayores de 25 años, mayores de 40 o mayores de 45, con lo que, dada su edad, es muy probable que nunca hayan trabajado la probabilidad a lo largo de sus estudios de Enseñanza Obligatoria (en el caso de que los hayan completado). En concreto, los porcentajes de reservas de plazas son del 3 % para mayores de 25 %, 1 % para mayores de 40 y 1 % para mayores de 45. Por otra parte, también se reserva un 3 % para personas con otra titulación universitaria. Todo este panorama nos da una idea de la diversidad de itinerarios formativos recorridos por los futuros maestros y, en concreto, del diferente bagaje probabilístico con el que cuentan.

Se pueden encontrar debilidades en los currículos de Educación Primaria y Secundaria partiendo de que las primeras conceptualizaciones sobre alfabetización matemática (UNESCO, 1978) se centraban en la aplicación de conocimientos de tipo aritmético que permitiesen operar de forma aislada o secuencial (López-Beltrán *et al.*, 2020). Esto suponía una concepción de la "numeración como *aritmetización*" (López-Beltrán *et al*., 2020, p. 18). No fue hasta el año 1998, en el que se comienza a expandir ese paradigma aritmético incluyendo situaciones de incertidumbre, de azar de probabilidad y de riesgo, lo cual debería permitir conectar la aritmética con la estadística y la probabilidad. También existe una desconexión entre la estadística y la probabilidad en el currículo de Educación Secundaria que se agudiza en el Bachillerato con la inclusión de la estadística inferencial.

Basándonos en esto, debemos tener en cuenta que los futuros maestros pueden tener un conocimiento bajo o casi nulo sobre la probabilidad, pudiendo, este conocimiento, estar basado en una mecanización del uso de fórmulas sin aplicaciones reales (Estrada, 2009). Además, si nos centramos en la formación matemática y, en concreto, probabilística, que reciben los futuros maestros en el Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo, podemos encontrar tres asignaturas de índole matemática: Matemáticas y su Didáctica I, Matemáticas y su Didáctica II y Matemáticas y su Didáctica III. En ellas, la enseñanza de las matemáticas y su didáctica es simultánea dentro de la misma asignatura. Esto es, no se dispone de una asignatura específica para la didáctica y otra para la matemática, sino que se trabajan conjuntamente como ocurre en un gran número de universidades españolas y se refleja en Nolla *et al*. (2021).

En relación con los contenidos, las dos primeras asignaturas, Matemáticas y su Didáctica I y II, son dos asignaturas semestrales de 6 créditos ECTS cada una, que se desarrollan durante el primer y el segundo semestre, respectivamente, del segundo curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria y versan sobre la enseñanza de números y medida (Matemáticas y su Didáctica I) y sobre geometría (Matemáticas y su Didáctica II).

No es hasta el tercer curso del grado que encontramos la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. Esta asignatura de 6 créditos ECTS es de carácter anual y versa sobre estadística, probabilidad y resolución de problemas. Vemos, entonces que, en el mejor de los casos, aunque hayan podido cursar probabilidad durante sus estudios de Bachillerato, habrán pasado 2 años desde la última vez que han trabajado en esos contenidos. Por lo tanto, es necesario retomar la alfabetización estadística y probabilística en el futuro profesorado, la cual, podría también ser aplicada al profesorado en ejercicio.

En esta asignatura, y en lo que respecta a la probabilidad, se tratan las distintas definiciones de probabilidad, desde un punto de vista constructivista, acompañando a los estudiantes en un proceso de aprendizaje que vaya descubriendo los distintos significados en función del nivel madurativo de los niños de Educación Primaria. Además, se plantean situaciones problemáticas adaptadas a los distintos niveles educativos, de manera que puedan aprender, no sólo los contenidos que pueden trabajarse en cada nivel, sino cómo pueden trabajar estos contenidos dependiendo del curso en el que se encuentren. De esta manera, podremos preparar a los futuros maestros para que conozcan qué contenidos deben enseñar, la naturaleza matemática de dichos contenidos y cómo los deben enseñar (Alsina *et al*., 2020). El trabajo conjunto de la matemática junto con su didáctica permite desarrollar de forma simultánea sus capacidades y conocimientos matemáticos (en nuestro caso, probabilísticos) y sus conocimientos didácticos y pedagógicos (conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad).

2.3. La alfabetización probabilística en los programas de formación inicial de maestros de Educación Primaria

En las últimas décadas, desde principios de los años 90 del siglo XX, la estadística y la probabilidad han comenzado a incluirse en el currículo de Educación Primaria en España (Alsina, 2016a; Alsina *et al*., 2020; Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). Dicha inclusión surge de la necesidad de formar ciudadanos alfabetizados estadística y probabilísticamente. Actualmente, nos encontramos en un mundo dinámico, en constante cambio, en el que es fundamental que seamos capaces de enfrentarnos a situaciones problemáticas en las que la toma de decisiones juega un papel crucial. En este sentido, Gal (2005) indica la necesidad de formar ciudadanos que sean capaces de enfrentarse a situaciones del mundo real en las que sea necesario generar e interpretar mensajes probabilísticos y tomar decisiones.

El término *alfabetización* se refiere a la acción de enseñar a una persona a leer y escribir (Real Academia Española, 2014). Cuando hablamos de alfabetización probabilística nos referimos a la capacidad de los ciudadanos para poder comprender e interpretar información probabilística relacionada con la vida cotidiana (Batanero, 2005; Gal, 2005).

Para Gal (2005) la alfabetización probabilística se apoya en la alfabetización estadística, a la que define como la capacidad humana para comprender, evaluar e interpretar de manera crítica situaciones problemáticas de la vida cotidiana, que cada vez están más presentes en nuestra sociedad. De esta forma, cuando hablamos de la alfabetización probabilística, debemos considerar la probabilidad como una base de la estadística para poder estudiar temas más avanzados, preparándonos para enfrentarnos al creciente número de sucesos aleatorios y de azar que nos podemos encontrar en nuestra vida cotidiana (Alsina y Vázquez, 2016).

Al igual que la alfabetización estadística requiere de la activación conjunta de una serie de componentes cognitivos (entendidos como aquellos relacionados con los procesos mentales en torno a los conocimientos estadísticos) y de disposición (que juegan un papel fundamental en cómo las personas piensan y reaccionan frente a información probabilística o situaciones que involucren la incertidumbre o el azar, especialmente en situaciones en contextos de la vida real), cuando hablamos de alfabetización probabilística, también tendremos en cuenta esos mismos elementos: cognitivos y disposicionales. Gal (2005) caracteriza los elementos cognitivos y disposicionales que formarán la base para comprender la construcción de la alfabetización probabilística. A continuación, se incluye una descripción de estos elementos.

2.3.1. Alfabetización probabilística: elementos cognitivos

En lo referente a los elementos cognitivos, Gal (2005) distingue cinco tipos: las grandes ideas, cómo realizar el cálculo de probabilidades, el lenguaje, el contexto y las preguntas críticas. Cuando nos referimos a las grandes ideas, nos referimos a aquellos conceptos centrales en el aprendizaje de las matemáticas, es decir, “aquellos conceptos que unen numerosas comprensiones matemáticas en un todo coherente” (Charles, 2005, p.10).

Charles (2005) y Hurst (2014) sostienen que las grandes ideas son importantes debido a que permiten enfocar las matemáticas como un conjunto de ideas coherente que permite una profunda comprensión de la matemática, evitando la memorización y mejorando la adquisición de los conocimientos. Otros autores como Shaughnessy (2019), también apoyan la importancia del trabajo de la matemática mediante las grandes ideas, especialmente en lo referente a lo probabilidad.

Cuando hablamos de grandes ideas en probabilidad nos referimos a los conceptos de variación, aleatoriedad, independencia y predicción/incertidumbre. La variación, la aleatoriedad y la independencia enfatizan las habilidades de los estudiantes para comprender, representar e interpretar los enunciados probabilísticos, pudiendo implicarse en la resolución de problemas asociados a la probabilidad (Gal, 2005). Sin embargo, a pesar de poder representar con símbolos matemáticos o términos estadísticos algunas de estas ideas, su naturaleza abstracta hace que solo podamos acceder a ellas de manera intuitiva.

La variación, en el contexto de la probabilidad, subraya la visión frecuentista de la misma, pudiendo extenderse a la idea de que los sucesos varían en relación con la certeza que tenemos de poder predecirlos (Gal, 2005).

Por su parte, la noción de aleatoriedad es un concepto vagamente delimitado, que genera debate en lo referente a su definición, llegando a ser discutido de manera meramente informal (Dessart, 1989; Gal, 2005; Green, 1989; Kirschenmann, 1972). Desde mediados del siglo pasado, autores como Cramér (1946), von Mises (1957), Rescher (1961) o Freudenthal (1968) ya dudaban sobre las posibles definiciones del concepto de aleatoriedad llegando a considerar, incluso, que resulta imposible o casi imposible aportar una definición precisa. No obstante, podemos considerar que un proceso aleatorio es aquel en el que los sucesos ocurren de manera no determinística, sin poder llegar a predecirse completamente (Beltrami, 1999; Gal, 2005).

Por otro lado, la independencia se refiere a los sucesos que no están conectados, no pudiendo predecir un suceso a partir de otro (Gal, 2005). Este autor también indica que estos tres conceptos (variación, aleatoriedad e independencia) resultan de una complejidad mayor de lo aparente ya que presentan términos complementarios (estabilidad, regularidad y dependencia, respectivamente) y están interconectados entre sí, de manera que se hace necesario saber reconocer cuáles son las relaciones entre unos y otros. El poder comprender estos conceptos de manera individual y sus relaciones ayudará también a comprender el cuarto concepto, complementario a los anteriores, englobado en las grandes ideas: la predicción/incertidumbre, así como sus conceptos asociados, riesgo y confianza (Gal, 2005).

Para que el alumnado pueda comunicarse sobre la probabilidad, así como representar e interpretar conceptos probabilísticos es necesario que se comprenda y domine el lenguaje del azar, que se divide en dos áreas diferenciadas: los conceptos abstractos y las probabilidades actuales (Gal, 2005). Estos conceptos están relacionados con el conocimiento general sobre la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso. No debemos confundir el valor de la probabilidad de que ocurra un determinado suceso con que sea más o menos previsible o con la certeza con la que puede ocurrir dicho suceso (Batanero y Sánchez, 2005; Gal, 2005).

La probabilidad no es útil para realizar predicciones sobre una única repetición del experimento, sino que nos da una medida del grado de ocurrencia del suceso y, por lo tanto, se puede interpretar en términos frecuentistas cuando el experimento se ha repetido un número suficiente de veces y empiezan a apreciarse regularidades. En este caso, estamos realizando una aproximación frecuencial al significado de la probabilidad.

Por otro lado, la previsibilidad con la que pueda ocurrir un suceso dependerá también de nuestras creencias en relación con los factores que afecten a que ese suceso ocurra y de la información previa que tengamos. En este sentido, estamos realizando una aproximación subjetiva a la idea de probabilidad, aunque tampoco en este caso nos puede garantizar la certeza sobre la ocurrencia del suceso en una única repetición experimental.

Respecto a cómo calcular probabilidades, es importante que el alumnado se familiarice con las distintas formas de obtener probabilidades de sucesos. De esta manera, les será posible comprender y enfrentarse a situaciones reales, llegando a poder estimar la probabilidad de ocurrencia de un suceso y pudiendo, finalmente, interpretar y comunicar los resultados obtenidos.

En el nivel de Educación Primaria se trabajan fundamentalmente tres definiciones de probabilidad: subjetiva, frecuentista y clásica (Batanero, 2005; Batanero y Sánchez, 2005). A pesar de ello, el primer acercamiento de los estudiantes de primaria hacia la probabilidad se produce de manera intuitiva, distinguiendo “entre lo posible, lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro” (Batanero, 2013, p. 1) utilizando un lenguaje cotidiano en el que se incluyan expresiones relacionadas con la probabilidad (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006).

Pero la definición más utilizada y que aparece con mayor frecuencia en los libros de texto (Gómez-Torres *et al*., 2014, 2015) es la definición clásica o laplaciana, ya que los aspectos formales de dicha definición ayudan a sentar las bases para el aprendizaje de temas más avanzados relacionados con la probabilidad. Autores como Ortiz (2002) y Azcárate y Serradó (2006) ya evidenciaban una mayor aparición de los significados clásico y frecuencial incluso en los libros de texto de Educación Secundaria, con escasez de apariciones de la definición subjetiva. Este patrón se extiende a la Educación Primaria dónde la aparición de la definición subjetiva en libros de texto es prácticamente inexistente (Gómez-Torres *et al*., 2015). Asimismo, aunque esos contenidos más avanzados se retrasen hasta la Educación Secundaria, Godino *et al*. (1987) sugieren que el alumnado se familiarice con ideas más avanzadas en probabilidad de manera intuitiva, como las tablas de contingencia, los sucesos compuestos o la probabilidad condicionada.

Por otra parte, al hablar en el lenguaje del azar se utilizan términos que difícilmente pueden expresarse mediante un lenguaje sencillo, como los términos utilizados en las grandes ideas: variabilidad, aleatoriedad, independencia o predicción/incertidumbre. Pero no sólo esas palabras pueden resultar complejas. En muchas ocasiones, el lenguaje del azar incluye palabras que no solamente podemos encontrar en situaciones en las que se emplea un lenguaje técnico, sino que pueden encontrarse en la vida cotidiana.

Como Gal (2005) menciona, podemos tomar como ejemplo la palabra "aleatorio". Esta palabra, puede utilizarse en un contexto técnico cuando indicamos que para la recogida de datos "tomaremos una muestra aleatoria". Pero también podemos encontrar esa misma palabra en un contexto informal, como cuando en las noticias se indica que los ataques que un principio parecían aleatorios han resultado ser los ataques de un asesino en serie que sigue un patrón de conducta.

Estas variaciones en los significados de las palabras que podemos relacionar con el azar, en muchas ocasiones afectan a la comprensión de los estudiantes haciendo que el discurso pueda resultar ambiguo y confuso para algunos de ellos. Es por ello, que se precisa que el profesorado incida no sólo en la enseñanza de los conceptos abstractos, explicados en un lenguaje claro y preciso, sino también en la utilización de la terminología de una manera consistente (Gal, 2005). El profesorado debería fomentar las posibilidades de participación para incidir en el desarrollo de las habilidades comunicativas del alumnado en relación con la probabilidad, utilizando dicha terminología, de forma que puedan llegar a comprender los significados de los términos en un contexto educativo, pero también de su vida diaria (Vásquez y Alsina, 2017a).

Por otra parte, resulta imprescindible, dada la gran cantidad de opciones que existen para representar el valor de la probabilidad de manera cuantitativa (escala 0-1, fracciones, etc.), que el alumnado comprenda y maneje con soltura los cambios de unas representaciones a otras. Pero las representaciones cuantitativas de la probabilidad no son las únicas que podemos utilizar. Cuando hablamos del significado intuitivo de la probabilidad, que resulta ser el que se introduce en edades más tempranas en el sistema educativo, utilizamos términos referidos a la probabilidad de ocurrencia de un suceso, pero de manera intuitiva. Por ejemplo, podemos hablar de que es “casi seguro” que una persona en Europa llegue a cumplir 5 años, pudiendo cuantificar ese término como una probabilidad muy cercana a 1. También podemos decir que es “casi imposible” que tengamos un accidente de avión si viajamos una vez al año, pudiendo asociar el término a una probabilidad cercana a 0. Sin embargo, a pesar de que una aproximación al valor de la probabilidad nos pueda parecer relativamente sencilla al utilizar estos términos, no lo es tanto cuando los términos son más neutrales, como “es posible que llueva”, “es poco probable que llueva”, “quizás llueva”, etc. En estos casos, distintas personas podrían interpretar la probabilidad asociada a una misma frase de distinta manera. Debe asumirse, por tanto, la complejidad y la vaguedad propia de los significados numéricos y verbales para expresar la probabilidad (Blanco-Fernández *et al*., 2016; Rodríguez-Muñiz *et al*., 2021). Otorgar al alumnado oportunidades de comunicar e interpretar las probabilidades, tanto verbalmente como por escrito y observar las interpretaciones de otros compañeros y compañeras, les ayudará a comprender que distintas personas, utilizando el mismo lenguaje del azar pueden tratar de expresar diferentes resultados. Todo ello permitirá al alumnado comprender mejor y manejar con una mayor soltura el lenguaje probabilístico (Gal, 2005).

Además, comprender que el mundo real se ve afectado, en muchas ocasiones, por el azar y la aleatoriedad permite que las personas seamos capaces de anticipar ciertos sucesos que pueden ocurrir con más frecuencia que otros. Cuando nos referimos al conocimiento del contexto en el ámbito de la probabilidad, podemos distinguir entre un contexto en el que se estudie el impacto general del azar y la aleatoriedad en distintos sucesos o procesos, y aquel en el que se empleen las nociones de azar y probabilidad en situaciones comunes que pueden aparecer en la vida cotidiana de una persona. Comprender el contexto de la probabilidad en un entorno educativo es fundamental para entender por qué es necesario aprender probabilidad, ya que puede aplicarse a diversas situaciones de la vida. La enseñanza de la probabilidad en contextos sociales y de la vida real fomenta el interés y la motivación por su estudio (Gal, 2005). Finalmente, es necesario que sepamos qué preguntas criticas debemos hacer cuando nos encontremos frente a un problema probabilístico o frente a una declaración probabilística.

Existen varias áreas hacia las que podemos enfocar nuestras preguntas relativas a mensajes probabilísticos en contextos interpretativos: el contexto, las fuentes, los procesos, el significado del mensaje y la interpretación reflexiva. No todas las áreas serán relevantes para el caso que se esté tratando, pero pueden servir como una guía de ayuda que nos permita comprender mejor la situación. En algunas ocasiones existe una tendencia a estimar probabilidades de forma inadecuada. La utilización de este tipo de preguntas puede ayudar a detectar errores o conceptos erróneos. Saber hacer las preguntas adecuadas relacionadas con dicho problema o declaración, facilitará la interpretación de los resultados obtenidos y la comprensión de las declaraciones probabilísticas, así como la detección de errores en los mismos.

2.3.2. Alfabetización probabilística: elementos disposicionales

Entre los elementos disposicionales, Gal (2005) distingue tres tipos: postura crítica, creencias y actitudes, y sentimientos personales en relación con la incertidumbre.

A lo largo de nuestras vidas nos encontraremos con muchas situaciones en las que nos enfrentaremos a información o mensajes estadísticos en condiciones de incertidumbre. En este tipo de situaciones es necesario que sepamos comprender, interpretar y razonar acerca de esa información estadística, pudiendo reaccionar de forma espontánea, obteniendo conclusiones sobre dicha información (Gal, 2002). En este sentido, debemos tomar una postura crítica para enfrentarnos a esas situaciones de incertidumbre. Dado que estamos acostumbrados a la parte determinística y deductiva de la matemática, pero no tanto a lo estocástico e inductivo de la estadística y la probabilidad, en ciertas ocasiones esa interpretación de datos, de informes de resultados o de conclusiones de encuestas, entre otras investigaciones empíricas, puede resultar complicada.

Los mensajes de carácter cuantitativo pueden resultar engañosos, presentar sesgos o estar incompletos, tanto de forma intencionada como inintencionada. En estas situaciones los ciudadanos críticos deben enfrentarse a dichos mensajes de manera crítica, cuestionando su veracidad y sabiendo interpretarlos de manera adecuada (Alsina y Vásquez, 2016; Alsina *et al*., 2020).

Todas las personas somos consumidoras de datos, especialmente en la época actual, en la que la televisión o las redes sociales, como Twitter, nos bombardean constantemente con gran cantidad de datos e información (Alsina y Rodríguez-Muñiz, 2021). Es por ello que es necesaria una buena alfabetización estadística y probabilística, que favorezca que las personas nos sintamos cómodas y seguras para explorar, conjeturar, formular hipótesis e investigar en situaciones de incertidumbre.

Cuando la postura crítica y las creencias y actitudes se entremezclan, es cuando surgen los sentimientos personales en relación con la incertidumbre. Es fundamental que aprendamos a ser críticos sobre los mensajes e información probabilística recibida, tanto de carácter oficial como no oficial (cuando hablamos de carácter oficial nos referimos a información aportada, por ejemplo, por el gobierno de un país).

De esta forma, podremos preocuparnos y plantear libremente esas "preguntas preocupantes", independientemente de la formación estadística recibida. Es decir, "el grado de incertidumbre o previsibilidad experimentado puede ser la base de la propia percepción y capacidad para evaluar el riesgo asociado con los eventos o resultados de relevancia para la vida" (Rodríguez-Alveal *et al*., 2018, p. 139).

2.4. Estado del arte

En esta sección vamos a hacer un recorrido por una serie de trabajos relevantes relativos a la formación educativa en probabilidad, tanto a nivel nacional como a nivel internacional. Como hemos comentado anteriormente, la probabilidad se ha incorporado de forma relativamente reciente a los currículos de formación obligatoria en España. Esto supone que los estudios sobre la enseñanza de la probabilidad sean más escasos que en otras disciplinas dentro de la didáctica de la matemática.

El cálculo de probabilidades aún presenta controversias sobre la interpretación de conceptos básicos en la materia como la definición de probabilidad o la independencia (Batanero y Serrano, 1995). Respecto a los estudios sobre enseñanza de la probabilidad en España, destacan los trabajos del Grupo de Investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada, que comienzan a trabajar en el ámbito de la probabilidad entre finales de los años 80 y principios de los años 90 del siglo XX.

Godino *et al*. (1987) plantean su primer trabajo sobre azar y probabilidad proponiendo los primeros fundamentos didácticos y propuestas curriculares para la enseñanza de la probabilidad en nuestro país. Durante los años 90, el grupo se adentra en la idea de la aleatoriedad (Batanero y Serrano, 1995); el estudio del razonamiento probabilístico por parte de estudiantes de primaria o secundaria (Batanero *et al*., 1994; Cañizares y Batanero, 1997; Serrano *et al*., 1998); la probabilidad en términos frecuentistas en Bachillerato (Ortiz *et al*., 1996; Serrano *et al*., 1996); las creencias y concepciones de los estudiantes de educación obligatoria sobre la probabilidad (Cañizares y Batanero, 1997; Serrano *et al*. 1999) y la comprensión de la idea de juego equitativo en niños de primaria (Cañizares *et al*., 1999).

Desde los primeros años del siglo XXI, la producción de este grupo ha sido muy fructífera en el campo, tratando temas muy diversos, como la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad condicionada (Contreras, 2011) o los contenidos probabilísticos en los libros de texto (Gómez-Torres *et al.,* 2014). Batanero (2005) especifica los significados de la probabilidad que aparecen en educación obligatoria siendo, estos, el significado intuitivo, el frecuencial, el subjetivo y el clásico para Educación Primaria e incorporando, finalmente, el axiomático en Educación Secundaria. En cuanto a la formación de profesores en probabilidad destacan sus trabajos sobre la formación y las dificultades de los futuros maestros en probabilidad (Batanero, Biehler *et al*., 2005; Batanero *et al*., 2011; Batanero y Díaz, 2012; Batanero, Godino y Cañizares, 2005; Batanero *et al*., 2004; Godino *et al*., 2003).

Todos estos trabajos coinciden en que la formación que se da a los futuros maestros en el área aún es escasa. La reciente incorporación de la probabilidad a los currículos de Enseñanza Obligatoria resulta en unos futuros maestros con poca formación en el tema y que presentan creencias erróneas hacia la probabilidad. Se concluye que la enseñanza de la probabilidad resulta compleja para los futuros maestros y se ve necesario el refuerzo y apoyo por parte de los docentes universitarios para conseguir una formación adecuada, tanto desde el punto de vista estocástico como didáctico.

Por otra parte, y en especial para este trabajo, resultan de interés los estudios del grupo de Granada sobre los conocimientos en probabilidad, tanto comunes como especializados, que presentan los futuros maestros. Arteaga *et al*. (2010); Batanero, Contreras y Díaz (2012), Batanero, Arteaga *et al*. (2014) y Batanero, Gómez-Torres *et al*. (2014), entre otros, evalúan la percepción de la aleatoriedad en futuros maestros. Mediante las actividades formativas planteadas a los futuros maestros en dichos estudios, estos determinan que hay una tendencia a presentar conceptos erróneos sobre la aleatoriedad. Además, los futuros maestros muestran dificultades a la hora de interpretar los resultados de experiencias aleatorias, no siendo capaces de otorgar un significado a los resultados obtenidos. También presentan dificultades para comprender la independencia y la variabilidad ligada a la aleatoriedad y concepciones erróneas sobre la equiprobabilidad. Estos autores indican la importancia de que los formadores de profesores ayuden a desarrollar la capacidad de los futuros maestros para modelar la probabilidad con el fin de conseguir una enseñanza efectiva.

Por su parte, Contreras, Batanero *et al*. (2011) evalúan los conocimientos comunes y especializados de un grupo de maestros en relación con el cálculo de probabilidades elementales, calculando probabilidades simples, compuestas y condicionadas. Los resultados de este trabajo muestran que el cálculo de probabilidades resulta complejo para los futuros maestros, que muestran un débil conocimiento común de la probabilidad. También muestran un conocimiento especializado de la probabilidad pobre al tener dificultades para identificar y clasificar los objetos matemáticos de la tarea propuesta. Los autores insisten en la necesidad de reformar y mejorar la educación sobre probabilidad en los grados de formación de maestros.

En Contreras, Díaz *et al.* (2011) se indica la necesidad de atender simultáneamente el conocimiento matemático y didáctico del contenido. Los autores detectan sesgos en el razonamiento probabilístico en los maestros, que mejoran tras desarrollar la tarea formativa. Esto muestra la importancia de proponer tareas efectivas para la formación de maestros. De nuevo, existe una necesidad de mejorar la formación y dar apoyo a los futuros maestros en el aprendizaje de la probabilidad para su enseñanza.

Ortiz *et al.* (2012), Mohamed y Ortiz (2012), Gómez-Torres *et al*. (2014) y Batanero *et al*. (2015) también evalúan el conocimiento común y especializado para la enseñanza de la probabilidad. En estos trabajos, además, se evalúa el conocimiento del contenido y de los estudiantes. Los resultados muestran unos conocimientos insuficientes en todos los aspectos estudiados. Ortiz *et al*. (2006) y Mohamed y Ortiz (2012) indican que entre esas deficiencias de conocimiento común del contenido se encuentran sesgos de equiprobabilidad y realización incorrecta de los cálculos probabilísticos. Mohamed y Ortiz (2012) también detectan una incorrecta percepción de la equitatividad de un juego y falta de capacidad combinatoria, mientras que Ortiz *et al*. (2006) detectan errores en la interpretación de las probabilidades frecuentistas y evidencias del uso de heurísticos y sesgos comunes. Otro error habitual consiste en la falta de razonamiento proporcional detectada en Ortiz *et al*. (2006).

El conocimiento especializado del contenido muestra muy pocos futuros maestros que sepan detectar conceptos probabilísticos y de aleatoriedad como conocimientos matemáticos. Respecto al conocimiento del contenido y los estudiantes, muy pocos futuros maestros son capaces de detectar y explicar los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de probabilidad. Trabajos como Ortiz *et al*. (2012), apoyan el interés de realizar evaluaciones iniciales a los futuros maestros para detectar sus carencias y proporcionar un refuerzo sobre los conceptos, en caso de ser necesario. Una contribución a dicha formación aparece explicitada en Batanero, Contreras y Díaz (2012). También se indica la importancia de trabajar sobre situaciones experimentales y relacionadas con la docencia como las propuestas en sus trabajos, con el fin de desarrollar, en los futuros maestros, la componente didáctica. Esto es debido a que el bajo razonamiento probabilístico mostrado en la fase inicial de la tarea mejoró considerablemente en la segunda fase.

Por otra parte, Batanero, Gómez-Torres *et al.* (2012) y Díaz *et al*. (2012) detectan sesgos en la comprensión de la probabilidad condicional por parte de futuros profesores de Educación Secundaria. Resulta preocupante que los futuros profesores no superen dichos sesgos ya que podrían transmitirlos a sus estudiantes y fallar en la enseñanza de la probabilidad. Se indica que una alta preparación matemática no resulta suficiente para evitar estos sesgos. De nuevo, se aboga por reforzar la formación en probabilidad en los programas de formación de profesores. Para Batanero, Gómez-Torres *et al*. (2012) resulta especialmente importante prestar más atención a la enseñanza de heurísticas en la resolución de problemas.

En Alonso-Castaño, Alonso, Muñiz-Rodríguez, y Rodríguez-Muñiz (2019) los futuros maestros analizados en el estudio habían recibido formación en heurísticos para la resolución de problemas. Los futuros maestros, a los que se les planteaba una tarea de diseño de un problema de probabilidad adaptado a un determinado nivel educativo, muestran que la utilización de heurísticos resulta de apoyo, no sólo para la resolución de los problemas matemáticos, sino también para el diseño de enunciados adecuados. De este modo, aquellos futuros maestros que utilizaron heurísticos en la creación y resolución de sus problemas consiguieron proponer problemas más adecuados que aquellos que no mostraron ningún tipo de heurístico.

Por otra parte, Fernándes *et al.* (2016) se centran en tareas probabilísticas sobre experiencias compuestas resueltas por futuros maestros. De nuevo, aparecen dificultades en la resolución de la tarea, relacionadas con la comparación de probabilidades de experiencias simples, el considerar o no la reposición, o no apreciar el orden de los resultados de las experiencias. Se muestra un conocimiento común del contenido bastante pobre y se incide en la necesidad de reforzar la formación en este tipo de experiencias compuestas.

Párraguez *et al.* (2017) observan la manera en la que los futuros maestros relacionan los significados clásico y frecuencial de la probabilidad, tan comunes en los libros de texto. En este trabajo, en contraposición con trabajos previos de otros autores que, como hemos visto, indican un escaso conocimiento común del contenido, se muestra un dominio adecuado de la definición clásica de la probabilidad a la hora de hacer el cálculo de probabilidades.

Sin embargo, la estimación de las frecuencias esperadas del número de veces de ocurrencia de un suceso resulta compleja para los futuros maestros, mostrando una escasa comprensión de la ley de los grandes números. También se presentan sesgos de equiprobabilidad, del cálculo del espacio muestral y de la representatividad. Vuelve a incidirse en la necesidad de reforzar estos contenidos probabilísticos.

En esta línea, también destacan los trabajos sobre conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad planteados en Vásquez y Alsina (2013a, 2013b, 2013c, 2014a, 2015a, 2015b, 2015c, 2015d, 2017b, 2017c, 2019) y Vásquez (2014). Muchos de estos trabajos se enfocan desde el punto de vista del EOS (Godino *et al*., 2007). La finalidad de estos trabajos se centra en el diseño de herramientas que permitan evaluar y analizar el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de la probabilidad por parte de los maestros.

Vásquez y Alsina (2013a, 2013b, 2013c, 2014a) diseñan un cuestionario cuya aplicación servirá para identificar las debilidades y necesidades formativas de los maestros. Este cuestionario también permite analizar en profundidad el conocimiento matemático y didáctico que poseen en relación con la probabilidad. Partiendo de estos estudios, los autores pretendían poder diseñar un curso de formación continua que permitiese mejorar el aprendizaje de los contenidos matemáticos y pedagógicos en probabilidad por parte de los maestros.

A partir de estos trabajos, Vásquez y Alsina (2015a) presentan el diseño construcción y validación del Cuestionario CDM-Probabilidad que utiliza el modelo del conocimiento didáctico-matemático (Godino y Pino-Fan, 2013) como base y que permite evaluar dicho conocimiento didáctico-matemático que presentan los maestros. De este trabajo resultan las publicaciones de Vásquez y Alsina (2015b, 2015c, 2015d, 2017b, 2017c) en los que se aplica dicho cuestionario a un grupo de maestros en activo para evaluar su conocimiento común del contenido en probabilidad. Los resultados de estos trabajos muestran que los maestros tienen un conocimiento común del contenido en probabilidad insuficiente (al igual que ocurría en los trabajos anteriormente comentados sobre conocimiento común del contenido). Los aspectos que generan más dificultades parecen ser la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, la independencia de sucesos en ensayos repetidos y la comprensión de suceso seguro (Vásquez y Alsina, 2015b).

Más aún, en algunos de los estudios, los maestros en activo muestran más errores y dificultades que algunos estudiantes de educación secundaria estudiados en otros trabajos previos (Vásquez y Alsina, 2015d). En Vásquez y Alsina (2019) se analiza el conocimiento especializado para la enseñanza mostrando, de nuevo, un conocimiento especializado del profesorado insuficiente. Esto es consistente con los resultados obtenidos en los trabajos del Grupo de Investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada. En especial, el conocimiento del currículo resulta ser el más pobre en este trabajo.

Todas estas investigaciones insisten en la necesidad de generar más investigación en este ámbito de la didáctica de la matemática, dada la escasez de estudios al respecto, y de implementar los programas de formación de maestros para cubrir estas deficiencias. Sin embargo, muchos de los trabajos de estos autores se centran los diseños de modelos para la enseñanza de la probabilidad (Vásquez y Alsina, 2014a), especialmente en edades tempranas (Alsina, 2012; Alsina, 2017a; Alsina, 2019; Alsina y Salgado, 2019; Alsina y Vásquez, 2017; Vásquez y Alsina, 2014b; Vásquez *et al*., 2019), indicando la importancia de introducir la probabilidad desde los primeros niveles de la enseñanza con el fin de sentar las bases para conseguir, al final de las etapas escolares, unos ciudadanos alfabetizados probabilísticamente, que puedan comprender los datos que reciben del mundo que les rodea, lo cual les ayudará en la toma efectiva de decisiones.

El análisis de la probabilidad en el currículo y en libros de texto también se ha estudiado en Vásquez y Alsina (2015e, 2017d), Alsina (2016a, 2016b) y Alsina *et al*. (2021). A pesar de no ser trabajos específicos de formación de maestros en probabilidad, resultan de gran interés los trabajos sobre alfabetización matemática general (Alsina, 2017b) y alfabetización estadística (Alsina, 2021; Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2020) y probabilística (Alsina y Vásquez, 2016; Vásquez y Alsina, 2017a, 2017e; Vásquez *et al.*, 2018).

En Alsina (2017b) se propone un modelo de alfabetización matemática (general, no enfocado específicamente a la probabilidad) para Educación Infantil, extrapolable a Educación Primaria y que pretende fomentar el uso comprensivo de los conocimientos matemáticos, o lo que es lo mismo, alfabetizar matemáticamente al alumnado. Alsina (2021) también desarrolla un modelo para promover la enseñanza de la estadística en contexto en Educación Infantil y Primaria, de manera que pueda fomentarse la alfabetización estadística del alumnado de dichos niveles educativos. Trabajar en contextos cercanos y con proyectos e investigaciones permitirá el desarrollo de la estadística en contexto que contribuirá a formar personas alfabetizadas estadísticamente.

En lo referente a la alfabetización probabilística, Alsina y Vásquez (2016) ofrecen una serie de orientaciones para que el profesorado de Educación Infantil y Primaria pueda fomentar la competencia probabilística de sus alumnos. Se entiende por competencia probabilística a la capacidad de las personas de acceder, emplear, interpretar y expresar ideas o información probabilísticas para poder gestionar las situaciones relacionadas con la probabilidad que se encuentren en el mundo real (Alsina y Vásquez, 2016). En este trabajo, los autores muestran que la enseñanza de la probabilidad en las escuelas es escasa e ineficaz y esto se debe, fundamentalmente, a la falta de formación que posee el profesorado, lo cual implica un pobre conocimiento del contenido y didáctico. Alsina y Vásquez (2016) indican la necesidad de incrementar el desarrollo profesional de los maestros fomentando su alfabetización probabilística.

En otro trabajo Vásquez y Alsina (2017e) enfocan el desarrollo de la alfabetización probabilística en el desarrollo del lenguaje probabilístico que permite describir la forma cualitativa la posibilidad de ocurrencia de los sucesos. En su estudio, realizado con alumnado de Educación Primaria no formado en la materia, concluyen que existe un predominio de términos coloquiales que se vinculan al significado intuitivo, fundamentalmente. Más adelante, pasarán a adquirir nuevos conceptos sobre el azar y la probabilidad mediante un lenguaje más específico a partir de intuiciones e ideas previas.

Las actividades contextualizadas en torno a la probabilidad resultan ser fundamentales para conseguir una enseñanza eficaz, como se indica en Vásquez y Alsina (2017a), dónde se proponen una serie de actividades para fomentar la alfabetización probabilística en Educación Primaria. Esta idea también es abordada en Alsina y Vásquez (2016) y Alsina (2021). Asimismo, respecto a la alfabetización estadística y probabilística, simultáneamente, Vásquez *et al*. (2018) presentan algunas orientaciones didácticas y recursos para mejorar la enseñanza de la estadística y la probabilidad desde las primeras edades. De nuevo, se aboga por presentar contextos de enseñanza en los que se planteen situaciones contextualizadas, generando los conocimientos a partir de la propia experiencia.

A su vez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez *et al*. (2020) plantean una propuesta de actividades de aula para Educación Secundaria basándose en una fundamentación teórica sobre alfabetización estadística. En su trabajo describen aquellos conocimientos, tanto matemáticos como didácticos, que moviliza el profesorado de matemáticas para promover la alfabetización estadística en Educación Secundaria.

Las situaciones de aula planteadas en este trabajo se contextualizan en la COVID-19 planteando, así, un contexto de actualidad que permite trabajar con datos reales y aprender a interpretarlos. De esta manera, se fomenta su razonamiento crítico desarrollando el pensamiento estadístico para saber discriminar los datos reales de los falsos, estar bien informados y ser capaces de interpretar críticamente dichos datos.

Como comentábamos anteriormente, aún existe mucho campo para desarrollar trabajos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad y esto no sólo se aprecia a nivel nacional, sino que se extiende a nivel internacional, encontrando relativamente poca producción científica en el ámbito. A nivel internacional, conferencias como CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) o ICOTS (International Conference on Teaching Statistics), y revistas como el *Statistics Education Research Journal*, sirven como plataforma para dar a conocer los trabajos en didáctica de la probabilidad. Algunos de estos trabajos tratan la importancia de reforzar la formación de maestros y futuros maestros para que, a su vez, se mejore la enseñanza de la probabilidad (Afeltra *et al.,* 2017; Cordani, 2014; Huerta, 2018; Perelli-D'Argenzio y Rigatti-Luchini, 2014).

Recursos como el trabajo experimental a través de un aula virtual (Perelli-D'Argenzio y Rigatti-Luchini, 2014) muestran efectos positivos en la formación de los maestros, tanto en relación con el conocimiento del contenido como con el conocimiento pedagógico relacionado. En este sentido, el trabajo mediante talleres y grupos de trabajo fomenta una visión de la probabilidad como un enfoque de investigación de la realidad. Estos autores indican que se pueden observar cambios notables en el aprendizaje de los estudiantes cuando se realiza un cambio en la práctica de los profesores. Estos cambios pueden derivarse del desarrollo del conocimiento de la materia y del desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido.

Por su parte, Afeltra *et al*. (2017) plantean una tarea de formación de maestros en la que se aborda la interpretación del razonamiento de los estudiantes cuando realizan un experimento de lanzamiento de dados. El objetivo de este estudio es desarrollar la capacidad interpretativa del profesorado de manera que puedan, posteriormente, ayudar a sus estudiantes a construir el conocimiento a partir de sus razonamientos. Con esta tarea se pretende mejorar la formación de los futuros maestros en torno a los razonamientos probabilísticos.

Otra forma de mejorar la formación de maestros es la propuesta en Huerta (2018) que plantea la resolución de problemas de probabilidad como una tarea con intención didáctica en el aula, tanto para Educación Primaria como para Educación Secundaria. Gómez-Torres (2014) muestra la escasez de horas que se dedican a la probabilidad y su didáctica en los programas formativos de formación de maestros, resultando necesaria una ampliación del tiempo de clase que permita mejorar las competencias en probabilidad de los futuros maestros. También encontramos trabajos centrados en la creación de manuales (Muñoz *et al*., 2014) o planes de estudios (Naresh, 2014) para formar a los futuros maestros en la enseñanza de la probabilidad.

Por otro lado, Martin *et al.* (2018) se centran en determinar cómo es la enseñanza de los maestros en ejercicio y sus creencias en relación con la probabilidad. En este trabajo se muestra que los maestros consideran la probabilidad como una de las áreas con un menor grado de competencia matemática y como una de las áreas que menos confianza les genera a la hora de impartir los contenidos.

Paparistodemou y Meletiou-Mavrotheris (2019) estudian la alfabetización estocástica en niveles de Educación Infantil, centrándose en el desarrollo del pensamiento de maestros de infantil para el diseño y enseñanza de tareas de probabilidad. Concluyen que el trabajo de estos maestros se centra, sobremanera, en el aprovechamiento de las intuiciones previas de los estudiantes en torno a los fenómenos aleatorios.

Por su parte, Olgun e Isiksal-Bostan (2019) investigan la importancia del contexto en los problemas de probabilidad condicionada. Las respuestas de los futuros profesores de secundaria analizadas muestran que los problemas enmarcados en contextos de tipo social (salud o justicia) suponen un obstáculo para desarrollar el pensamiento probabilístico. En este sentido, los futuros profesores de secundaria se ven fuertemente condicionados por sus creencias sobre el tema social dejando a un lado el razonamiento lógico y numérico.

Como hemos podido observar, son menos los trabajos sobre la formación de futuros maestros en la didáctica de la probabilidad, siendo más frecuentes los trabajos referentes al alumnado de Educación Infantil, Primaria o Secundaria o a la formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria. Por tanto, y dada la relativamente reciente incorporación de la probabilidad en los niveles inferiores de la Enseñanza Obligatoria, coincidimos en que es necesaria más investigación en el campo, especialmente aquella enfocada en ayudar a formar a los futuros maestros para que sean capaces de ofrecer una enseñanza completa y efectiva de la probabilidad desde los primeros niveles.

2.5. Conocimiento matemático para la enseñanza: el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)

A mediados de los años 80 del siglo XX, Shulman (1986) revolucionó la manera en la que se conceptualizaba el conocimiento de los profesores en torno a una determinada disciplina de enseñanza. Este autor propone la separación del conocimiento de los profesores en el conocimiento del contenido, considerando este conocimiento como aquel estudiado propiamente en entornos de la disciplina, y el conocimiento pedagógico del contenido, entendido como el conocimiento pedagógico que debe tener un profesor para impartir los contenidos propios de la disciplina.

La gran repercusión de estas ideas en la forma de entender el conocimiento del profesorado implicó el desarrollo de diversas corrientes metodológicas como el Cuarteto del Conocimiento, en inglés *Knowledge Quartet* o KQ (Rowland *et al*., 2003, 2005) o el estudio de la “proficiencia” en la enseñanza de las matemáticas propuesto por Schoenfeld y Kilpatrick (2008). Por su parte, Hill *et al*. (2005), Hill *et al*. (2008) y Ball *et al*. (2008) comienzan a desarrollar un modelo centrado en esos dos grandes dominios propuestos por Shulman. Este modelo se denominó *Mathematical Knowledge for Teaching* [MKT], o Conocimiento Matemático para la Enseñanza y subdivide el conocimiento en el conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge*: MK) y el conocimiento pedagógico-matemático (*Pedagogical Content Knowledge*: PCK).

Estos dominios se subdividen, a su vez, en varios subdominios: el conocimiento común del contenido (*Common Content Knowledge*: CCK), el conocimiento especializado del contenido (*Specialized Content Knowledge*: SCK) y conocimiento del horizonte matemático (*Knowledge at the Mathematical Horizon*: KMH), que se encuentran englobados en el dominio del conocimiento matemático; y el conocimiento del contenido y los estudiantes (*Knowledge of Content and Students*: KCS), el conocimiento de contenido y la enseñanza (*Knowledge of Content and Teaching*: KCT) y el conocimiento del currículo (*Knowledge of the Curriculum*: KC) que se encuentran englobados en el dominio del conocimiento pedagógico. Pasaremos a explicar a qué se refiere cada subdominio de los dominios principales del modelo, aportando ejemplos que hemos elaborado sobre cómo cada subdominio se concreta en el campo de la probabilidad.

Comenzaremos por el conocimiento matemático, que se subdivide en los siguientes subdominios:

- **CCK**: el conocimiento común del contenido hace referencia al conocimiento matemático en situaciones no exclusivas de la enseñanza, como podrían ser operar correctamente, resolver problemas, aplicar definiciones y propiedades, etc. Dentro del contexto de la probabilidad, podemos considerar que el CCK incluye la aplicación de definiciones y propiedades, como la definición de Laplace, operar correctamente con valores de probabilidad, hacer un análisis combinatorio adecuado de la situación, o resolver problemas, entre otros. Por ejemplo, si lanzamos dos dados al aire, podemos calcular la probabilidad de sacar dos números iguales. Después de crear adecuadamente el espacio muestral, podemos identificar cuáles son los casos posibles y cuáles los favorables de modo que, aplicando la definición de Laplace, podamos resolver el problema. En este caso estaríamos hablando de un conocimiento común del contenido, aquel que es propio de la disciplina en sí.

- **SCK**: este conocimiento matemático es el exclusivo para la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, se refiere a la adecuada selección de tareas para el trabajo de unos ciertos contenidos, explicaciones apropiadas para un determinado concepto, justificación de métodos o algoritmos o entender las soluciones que da el alumnado a problemas, entre muchas otras. En este sentido, cuando nos centramos en el estudio de la probabilidad en la Educación Primaria, podemos considerar como ejemplos de conocimiento de contenido especializado: saber hacer recuentos combinatorios adaptados a Educación Primaria, seleccionar una tarea adecuada para utilizar la definición de Laplace, o saber adaptar esta tarea a un nivel educativo específico.
- **KMH**: este conocimiento está referido a cómo se relacionan los temas del currículo entre sí. Un ejemplo de KMH relativo a la probabilidad se encuentra en Ortiz *et al*. (2012), dónde se relacionan las ideas del cálculo de probabilidades con la utilización de fracciones y operaciones con fracciones y que se ha podido ver que no era observada por la mayoría de los participantes en el estudio.

Por otro lado, el conocimiento pedagógico del contenido, como muestran Hill *et al*. (2008), se subdivide en los tres subdominios siguientes:

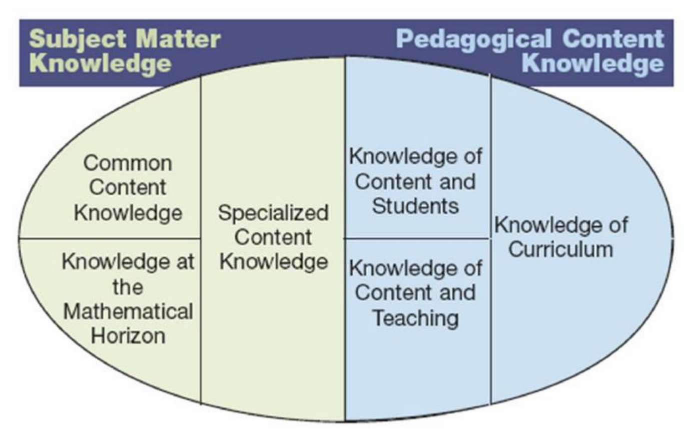
- **KCS**: se refiere al conocimiento del contenido relacionado con cómo piensan, aprenden o qué conocen los estudiantes. Por ejemplo, pueden considerarse dificultades y errores de los estudiantes, principales obstáculos, etc. Como ejemplo, en el caso de la probabilidad, el maestro debe ser consciente de que una de las dificultades que se podrán encontrar sus alumnos viene relacionada con la falta de razonamiento combinatorio, como ya indicaba Mohamed (2012).
- **KCT**: se refiere al conocimiento del contenido vinculado con la enseñanza, como construir procesos adaptados al alumnado o apoyarles en la enseñanza, entre otras. Por ejemplo, si nos centramos en conocimientos probabilísticos, un conocimiento del contenido y la enseñanza podría consistir en saber determinar preguntas o abrir

debates en el aula en torno a las definiciones de la probabilidad que permitan vincular unas definiciones con otras. En este caso, el maestro deberá saber seleccionar las preguntas adecuadas, así como las respuestas que vayan aportando los estudiantes durante el debate, descartando aquellas que sean inadecuadas, como proponen, de manera general, Sosa y Carrillo (2010).

- **KC**: se refiere al conocimiento del contenido del currículo en cuanto a objetivos, fines, orientaciones, materiales, recursos, evaluación, etc. Cuando hablamos del KC en probabilidad podemos referimos al conocimiento que poseen los maestros sobre contenidos probabilísticos por curso, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Por ejemplo, deben conocer la definición de Laplace no aparece en el currículo hasta 6º curso (Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias, 2014a), por lo que no pueden trabajar con dicha definición en niveles previos.

La Figura 11 presenta un esquema de la clasificación de los dominios matemáticos y pedagógicos del modelo MKT.

Figura 11
Modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)



Nota. Tomado de Ball *et al*. (2008).

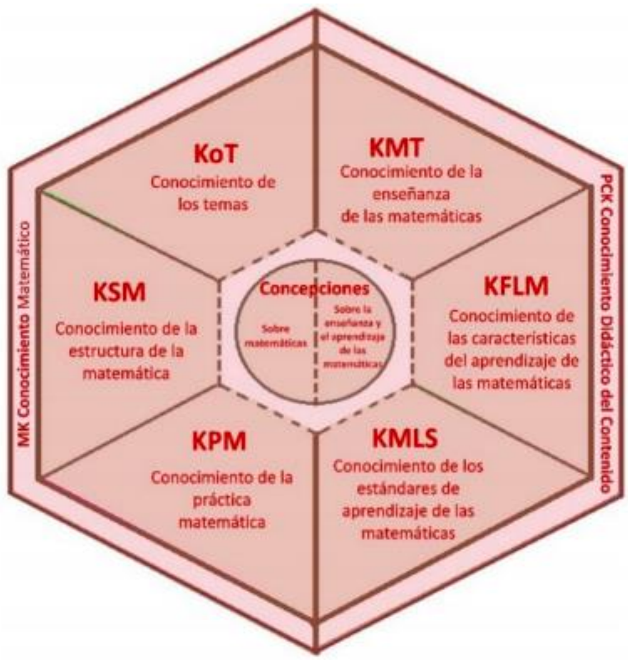
Tras el desarrollo de este modelo, surge un refinamiento de las ideas de Shulman (1986) y de Ball *et al*. (2008), ayudando a delimitar los subdominios del MKT. Carrillo *et al*., (2013) y Flores *et al*. (2013) desarrollan el modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*, más conocido como MTSK.

Este modelo:

> Toma en cuenta el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral a todos los subdominios que lo componen, siendo esta ampliación un avance respecto del MKT donde se consideraba que el profesor de matemáticas tiene un conocimiento propio especializado que le permite realizar su actividad diaria comprimiéndolo a un solo subdominio: Conocimiento Especializado del Contenido (SCK). (Aguilar-González, 2016, p. 23)

El MTSK sigue manteniendo la diferenciación propuesta por Shulman (1986) y Ball *et al.* (2008), pero considera que todo el conocimiento matemático para la enseñanza es especializado. En la Figura 12 se muestra un esquema de la clasificación de los subdominios del MTSK propuesta por Carrillo *et al*. (2013).

Figura 12
Modelo MTSK



Nota. Tomado de Carrillo *et al*. (2013).

Asimismo, cabe mencionar que, como extensión de este modelo de conocimiento del profesorado, en referencia al conocimiento que debe tener un profesor que enseñe estadística en el contexto escolar, surge el *Statistical Teachers' Specialized Knowledge*

[STSK] (Vidal-Szabó y Estrella, 2019), que categoriza los subdominios del modelo MTSK en función de los conocimientos matemáticos para la enseñanza de la estadística.

En la presente memoria, se ha seleccionado el modelo MKT de Hill *et al*. (2008) y Ball *et al*. (2008) como perspectiva para el análisis de datos de este estudio. Dicha elección viene motivada debido a nuestro interés en separar el conocimiento común del contenido del conocimiento especializado, siendo esta separación explícita en el modelo MKT, frente al MTSK que considera especializado todo el conocimiento.

Esto se debe tanto a la forma en la que se plantea la asignatura en la que se realiza el estudio (matemáticas y su didáctica, combinando ambos saberes de forma simultánea), como a la naturaleza de los datos recogidos, que se presentan como un gran volumen de respuestas de tipo abierto en las que se plantea un apartado puramente matemático, enunciando y resolviendo un problema de probabilidad, y otros apartados en los que se da una justificación de tipo pedagógico a la selección tanto del enunciado, como del proceso de resolución para que se adapten a un determinado nivel educativo. De esta manera, consideramos que el modelo MKT puede ser más útil para observar los resultados del estudio que se ha realizado en este trabajo.

En este sentido, podemos encontrar algunos trabajos en los que se emplea este modelo para analizar el conocimiento matemático de los futuros maestros en relación con la enseñanza de la probabilidad. Contreras, Batanero *et al*. (2011) demuestran que la falta de CCK, es decir, las muestras de un conocimiento común del contenido escaso por parte de los futuros maestros, producía también una falta de SCK, lo que indica que tanto los conocimientos matemáticos como los conocimientos pedagógicos resultan deficientes de manera simultánea. En este trabajo, los futuros maestros no son capaces de identificar y clasificar los objetos matemáticos relacionados con la probabilidad, aportando respuestas imprecisas y confusas en torno a los conceptos probabilísticos y sus procedimientos de enseñanza. Por su parte, Gómez-Torres *et al*. (2016) indican que incluso futuros maestros que mostraban evidencias de CCK, es decir, aquellos que poseían una base matemática sólida, también mostraban una falta de conocimientos pedagógicos (SCK) que les permitiesen enfocar la enseñanza de la materia de manera adecuada. Sin embargo, no hemos encontrado ninguna referencia de la literatura científica a una relación entre evidencias de SCK y falta de CCK. Esto parece bastante lógico, porque si hay deficiencias en el CCK parece difícil que los maestros tengan los recursos necesarios para enseñar un concepto que les es matemáticamente desconocido, difícil o confuso.

2.6. El diseño de tareas como recurso didáctico en la formación de maestros

Desde el ámbito de la didáctica de la matemática se resalta la importancia de vincular el aprendizaje de los futuros maestros en relación con el conocimiento teórico de la matemática, con su conocimiento práctico. Es en este momento cuando cobra vital importancia la forma en que los maestros dan sentido a las situaciones de enseñanza, siendo este uno de los aspectos que forman parte de las competencias del profesor de matemáticas. Esta perspectiva es la denominada mirada profesional del maestro (Ivars, Buforn y Llinares, 2017; Ivars, Fernández y Llinares, 2017; Jacobs *et al*., 2010; Llinares, 2009, 2013; Mason, 2002; Sherin *et al*., 2011) y se define como la forma en la que los maestros dan sentido a aquellos aspectos relacionados con cómo enseñar matemáticas (Llinares, 2009).

El maestro, como formador, debe saber identificar qué aspectos son importantes cuando se enfrenta a una situación de enseñanza, dependiendo del objetivo que pretenda conseguir. Además, en esta situación debe saber cómo intervenir para determinar qué pasos ha de dar a continuación, de manera que pueda distinguir los aspectos esenciales que intervienen en dicha situación particular, para poder generar distintos modos de actuación. Esta competencia docente permite comprender la situación de enseñanza en la que se encuentra el profesor, de manera que se ponga de manifiesto el uso que da a su conocimiento teórico de la didáctica de la matemática (Ivars, Buforn y Llinares, 2017). Asimismo, la enseñanza de la didáctica de la matemática en la formación de maestros se ve influida por las creencias y las concepciones de los futuros maestros, e incluso de los propios formadores de maestros (Llinares *et al*., 2008).

Por todo ello, para los formadores de maestros supone un gran desafío el ayudar a desarrollar la competencia de la mirada profesional. En este sentido, surge la necesidad de describir qué tipo de tareas y entornos de aprendizaje debemos plantear para generar un aprendizaje significativo en los futuros maestros, que les ayude a desarrollar dicha competencia.

Los futuros maestros, antes de acceder a los programas de formación, no poseen conocimientos que les permitan identificar cuáles son los aspectos relevantes de cada situación didáctica. Por tanto, los programas de formación de maestros deben concebirse de manera que se fomente la adquisición de las capacidades para diferenciar y determinar dichos aspectos relevantes en cada situación de enseñanza propuesta.

Respecto a las situaciones didácticas planteadas en el ámbito de las matemáticas en Educación Primaria, podemos señalar que tienen un nivel de complejidad elevado que no permite desarrollar patrones de actuación que sean replicables en cualquier situación didáctica. Es por este motivo que la competencia de la mirada profesional se encuentra enfocada en el refuerzo de la relación existente entre las capacidades del maestro para delimitar qué elementos son relevantes para el aprendizaje de un determinado concepto matemático y la inferencia de características relacionadas con la comprensión matemática de los maestros que les permitan definir métodos de actuación en ese contexto (Llinares, 2012).

Todo ello implica un enfoque en los programas de formación de maestros que relacione el conocimiento teórico con el práctico, desarrollando la capacidad de uso de los conceptos teóricos en situaciones prácticas. La búsqueda de relaciones entre el conocimiento teórico y la práctica supone el desarrollo de tareas y entornos de aprendizaje que permitan crear un contexto que facilite a los futuros maestros el aprender a diferenciar qué aspectos son relevantes en la enseñanza de un concepto matemático, es decir, que favorezcan el desarrollo de la competencia de la mirada profesional.

Watson y Mason (2007) entienden el diseño de tareas del siguiente modo:

> Tarea en el sentido amplio incluye la actividad que resulta cuando los aprendices se comprometen con una tarea, incluyendo la forma en que modifican la tarea con el fin de darle sentido, las maneras en que el profesor dirige y reorienta la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y la forma en que se anima a los alumnos a reflexionar o aprender de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea (p. 207).

Por lo tanto, mediante el diseño de tareas podemos trabajar con el conocimiento teórico y las experiencias previas de los futuros maestros aplicándolos a la resolución de tareas eficaces. Esta relación entre el conocimiento teórico, la experiencia previa y la experiencia en resolución de tareas, desarrollará el conocimiento práctico personal denominado conocimiento profesional (Llinares, 2012).

Bajo esta perspectiva, las tareas que se plantean en los programas de formación de docentes en el ámbito de la didáctica de la matemática han de proporcionar a los futuros maestros oportunidades para el desarrollo de sus capacidades de detección de los aspectos clave en la enseñanza-aprendizaje de un concepto matemático, apoyándose en el conocimiento teórico para dar sentido a la tarea y tomar conciencia de los elementos clave en una situación de enseñanza.

En lo referente a la enseñanza de las matemáticas en general, los futuros maestros deben conocer que existen enfoques muy variados dependiendo de la situación de enseñanza-aprendizaje planteada. Las tareas son situaciones propuestas por el profesorado con la finalidad de generar un aprendizaje. A través de ellas, los futuros maestros deben determinar qué posibilidades de aprendizaje genera el problema propuesto. De esta forma, podrán concretar los objetivos a alcanzar con el problema y prever las posibles estrategias de resolución que podrán plantear los estudiantes de Educación Primaria. Por lo tanto, si solicitamos a los futuros maestros que diseñen una tarea y analicen el trabajo que han realizado, estaremos buscando que se llegue a una comprensión tanto de la tarea como de las matemáticas que hay detrás. Asimismo, analizar el problema desde una perspectiva matemática y didáctica simultáneamente, permite al futuro maestro visualizar los problemas como situaciones didácticas que generan un aprendizaje matemático (Llinares *et al*., 2008).

Podemos considerar el proceso de construcción del conocimiento desde una perspectiva de instrumentalización del conocimiento teórico, entendida como un proceso de construcción del conocimiento en el cual las ideas procedentes de la didáctica de la matemática se utilizan como instrumentos conceptuales para interpretar y gestionar la enseñanza. Así, los futuros maestros serán capaces de generar un conocimiento desde la propia práctica (Alsina, 2007; Llinares *et al*., 2008).

Desde esta perspectiva el proceso de construcción del conocimiento se estructura como una relación entre los siguientes aspectos (Llinares *et al*., 2008):

- La experiencia previa de los futuros maestros (creencias, actitudes, conocimiento previo, etc.).
- La información teórica sobre la didáctica de la matemática.
- Las tareas en las que se aplica.

Llinares *et al*. (2008) indican que "el conocimiento construido en este proceso constituye un esquema interpretativo a través del cual es posible dotar de sentido a las situaciones de enseñanza" (p. 70). Por tanto, podemos ver cómo seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas forma parte de la enseñanza de las matemáticas.

2.6.1. El Enfoque Ontosemiótico: la idoneidad didáctica

La noción de competencia profesional ha tomado una gran importancia en los últimos años (Even y Ball, 2009; Pochulu *et al*., 2016; Silverman y Thompson, 2008) siendo un elemento clave en la formación inicial de maestros.

Una de las competencias clave que deben desarrollar los maestros es la competencia en el análisis didáctico de los procesos de instrucción que les permita mejorar dichos procesos. Los constructos teóricos propuestos en el EOS (Godino *et al*., 2007) sientan las bases para desarrollar el modelo del análisis didáctico. En el EOS se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de los procesos de instrucción (Godino *et al*., 2007):

- Análisis de las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción.
- Análisis de objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas.
- Análisis de las interacciones realizadas en el proceso de instrucción.
- Identificación del sistema de normas y meta normas que regulan el proceso de instrucción.
- Utilización de criterios de idoneidad didáctica para la valoración del proceso de instrucción con el fin de mejorarlo.

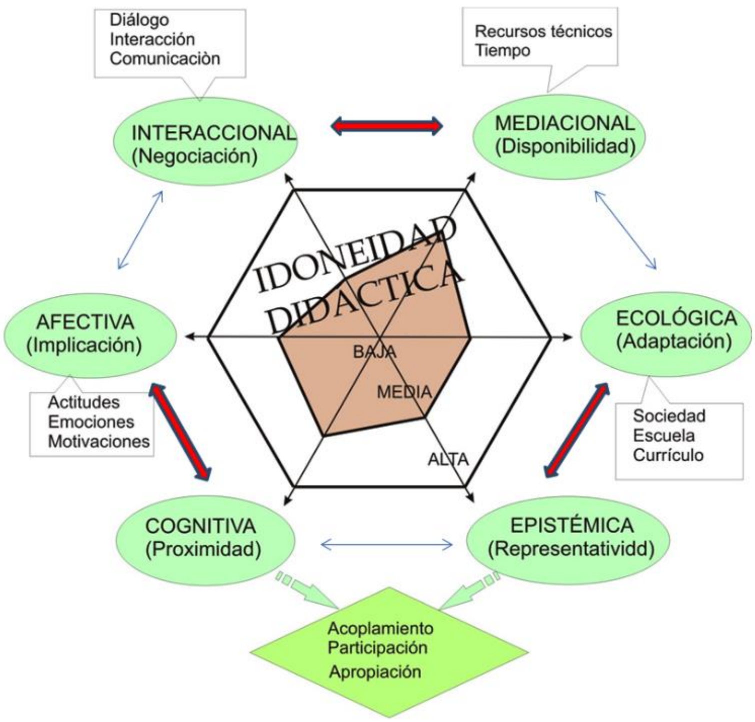
Son estos últimos, los criterios de idoneidad didáctica, los que se introducen como criterios semióticos para diseñar, implementar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2013a). En este trabajo no se ha utilizado el EOS como marco ni como referente teórico en su conjunto. Sin embargo, sí se han utilizado los criterios de idoneidad didáctica para realizar una valoración de las tareas realizadas por los futuros maestros que suponen el objeto de estudio de este trabajo.

La idoneidad didáctica surge como una herramienta para valorar en qué medida podemos considerar óptimo un proceso de enseñanza-aprendizaje. Para ello se toman como referencia los criterios de idoneidad didáctica que se descomponen en seis idoneidades parciales: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Figura 13).

En este trabajo nos centramos en el estudio de la idoneidad epistémica y la cognitiva dada la naturaleza de nuestro objeto de estudio (enunciados y resoluciones de problemas de probabilidad, junto con su adaptación al nivel educativo solicitado), ya que nos focalizamos en el conocimiento del profesorado en formación, y no en una situación de aula que permita valorar otras dimensiones.

Cuando nos referimos a la faceta epistémica estamos hablando del “grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia” (Godino *et al.,* 2007, p. 14). Esta faceta distingue entre cinco componentes: las situaciones-problema, los lenguajes, las reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos), los argumentos y las relaciones (Godino, 2013a). En el EOS las situaciones-problema son el eje central de estudio ya que consiguen dar sentido a la matemática, planteándola en contextos reales o realistas e interpretándola como un sistema de estructuras conceptuales, social o culturalmente compartidas (Godino, 2013b).

Figura 13
Criterios de idoneidad didáctica del EOS



Nota. Tomado de Godino (2021).

Por idoneidad cognitiva se entiende el “grado en que los significados pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados” (Godino *et al*., 2007, p. 14). La idoneidad cognitiva presenta tres componentes: los conocimientos previos, las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y el aprendizaje (incluyendo los mismos elementos que para la idoneidad epistémica) (Godino, 2013a).

En referencia a lo anterior, Beltrán-Pellicer *et al*. (2018) desarrollan unos indicadores relacionados con cada componente de la idoneidad didáctica centrándolos en la probabilidad para emplearla, tanto de manera interaccional, como mediante el uso de medios tecnológicos. En las Tablas 3 y 4 se muestra la relación de indicadores con sus respectivos componentes para la idoneidad epistémica y cognitiva.

Estos indicadores son los que los futuros maestros han empleado para el análisis de la idoneidad de las tareas planteadas en este trabajo. Se ha realizado una adaptación de la tabla sobre indicadores cognitivos, centrándose sólo en los conocimientos previos, ya que el resto de las componentes (adaptaciones curriculares y aprendizaje) no se tuvieron en cuenta para este trabajo.

La definición de criterios de idoneidad didáctica puede utilizarse para evaluar y desarrollar los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros maestros de forma sistemática. Una de las utilidades que presenta esta herramienta, siempre que se hagan las adaptaciones necesarias, es su utilización como método de autoevaluación y reflexión sobre los aspectos relevantes de la propia práctica del futuro maestro. Además, también sirve para valorar el conocimiento y las competencias iniciales en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales y como instrumento de valoración interna o externa de un proceso de estudio implementado (Godino, 2009, 2013b).

Tabla 3

Componentes e Indicadores para la Idoneidad Epistémica en Probabilidad

Componentes	Indicadores
Situaciones-problema (SP)	SP1. Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica). SP2. Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. Por ejemplo: lanzamientos de dados o monedas, simulaciones de concursos o bingos etc. SP3. Se propone una muestra representativa de contextos donde ejercitar y aplicar los contenidos tratados. SP4. Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios (problematización) por los propios estudiantes.
Lenguajes (LE)	LE1. Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, conjuntos etc.), señalando las relaciones entre las mismas. LE2. Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado al que se dirige, en cuanto a construcciones gramaticales y vocabulario. LE3. Se emplean términos precisos como suceso, espacio muestral, frecuencia relativa, aleatorio, determinista, casos favorables, casos totales, resultado de un experimento, sucesos simples y sucesos compuestos. LE4. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.
Reglas (RG)	RG1. Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. RG2. Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. RG3. Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas. RG4. Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. RG5. Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol. RG6. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos (AR)	AR1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. AR2. Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. AR3. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones (RL)	RL1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. RL2. Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (uso informal, subjetivo, frecuencial y clásico).

Nota. Adaptado de Beltrán-Pellicer *et al.* (2018).

Tabla 4

Componentes e Indicadores para la Idoneidad Cognitiva en Probabilidad

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	CP1. El alumnado ha estudiado anteriormente, o el profesor planifica el estudio de: a. Situaciones-problema en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, distinguiendo lo aleatorio de lo determinista y el empleo de la frecuencia relativa. b. Registros apropiados para la representación de información, como diagramas de barras y tablas. c. Definiciones de suceso elemental y utilización de la regla de Laplace en casos sencillos. CP2. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes. CP3. La secuencia didáctica planifica actividades donde puedan ponerse de manifiesto los sesgos de razonamiento más comunes: a. En torno a la heurística de la representatividad: sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra u otras concepciones erróneas sobre secuencias aleatorias. b. Sesgo de equiprobabilidad. c. Enfoque en el resultado aislado.

Nota. Adaptado de Beltrán-Pellicer *et al*. (2018).

2.7. Las concepciones y creencias de los maestros de Educación Primaria sobre la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad

En este apartado se señalan algunas características respecto a las creencias y las concepciones del profesorado de matemáticas sobre la propia disciplina y su enseñanza-aprendizaje, concretamente en el ámbito de la probabilidad. Esta caracterización será utilizada en el estudio para analizar las concepciones manifestadas en el marco de la investigación.

Las creencias y concepciones de los maestros sobre las matemáticas y sus procesos de enseñanza-aprendizaje pueden influir en gran medida en su práctica profesional (Carneiro y Lupiáñez-Gómez, 2016), dado que, a pesar de ser una parte indispensable de nuestro pensamiento, permitiéndonos dotar de sentido a las cosas, pueden actuar como bloqueadores en algunas situaciones, limitando las posibilidades de actuación y comprensión (Carneiro y Lupiáñez-Gómez, 2016; Ponte, 1992).

Thompson (1992) entiende las concepciones como “una estructura mental de carácter general que incluye a las creencias, los conceptos, los significados, las reglas, las imágenes mentales y las preferencias, ya sean conscientes o inconscientes” (p. 132) que poseen los maestros sobre la enseñanza de un determinado contenido matemático. Por su parte, Rokeach (1968) las definía como “una organización de creencias relativamente permanentes que predisponen a responder de un modo preferencial ante un objeto o situación” (p. 112).

Dentro de los aspectos afectivos de la educación matemática se puede distinguir entre emociones, actitudes y creencias (Estrada *et al*., 2003; Mc Leod, 1992). Las emociones, las creencias y las actitudes fundamentan la postura crítica de las personas, así como su disposición hacia los procesos probabilísticos, especialmente en lo referente a cómo se afrontan los procesos estadísticos y probabilísticos fuera del aula (Estrada y Batanero, 2020; Estrada *et al*., 2011).

Podemos entender las emociones como aquellas respuestas transitorias, ya sean positivas o negativas, que vienen desencadenadas por las experiencias que se tienen de forma inmediata (Alvarado *et al*., 2018; Mc Leod, 1992). Por ejemplo, en el caso de la probabilidad, pueden generarse emociones mientras resolvemos un problema probabilístico, interpretamos las probabilidades de lluvia un determinado mes, apostamos por el caballo ganador de una carrera, etc. A partir de esas emociones, surgen las actitudes que son aquellos sentimientos que se desarrollan mediante la internalización gradual de respuestas emocionales, tanto positivas como negativas a largo plazo.

Las actitudes se presentan como sentimientos relativamente estables e intensos y se expresan a lo largo de un continuo positivo-negativo: gusto-disgusto, alegría-tristeza, euforia-apatía, ilusión-desilusión, alivio-agobio, etc. (Alvarado *et al*., 2018). Esto hace que se puedan mostrar sentimientos hacia temas, objetos o acciones de manera que se muestre nuestro agrado o desagrado hacia los mismos (Mc Leod, 1992). Gal y Ginsburg (1994) indican que aquellos profesores que se enfrentan a la enseñanza de un determinado tema con una actitud positiva son más propensos a transmitir dichas actitudes positivas a sus estudiantes.

Por su parte, las creencias representan las concepciones o consideraciones individuales en referencia a un tema, un contexto (por ejemplo, social) o, incluso, hacia uno mismo (autoconcepto) (Alvarado *et al*., 2018; Mc Leod, 1992). De este modo, Estrada *et al*. (2003) entienden las concepciones, las creencias o los pensamientos como un único ente y las definen como las ideas individuales que se mantienen en el tiempo "sobre la materia, sobre uno mismo como estudiante o sobre el contexto social en el que se realiza el aprendizaje" (p. 2). Al mantenerse en el tiempo, las creencias o concepciones pueden llegar a influir en cómo los maestros enseñarán la materia, ya que se señala que "las actitudes cambian más despacio que las emociones y más rápido que las creencias" (Estrada y Batanero, 2020, p. 2).

Un autoconcepto negativo (que consideraremos como una creencia o concepción relativa hacia las propias capacidades) en relación con las matemáticas no permitirá al individuo progresar en ese campo. Es importante entonces, tratar de desarrollar un autoconcepto positivo de manera progresiva que facilitará a la persona el razonamiento en probabilidad en situaciones relevantes en las que la incertidumbre juegue un papel importante. De esta manera, se dejarán de lado las situaciones puntuales que causen esos sentimientos negativos derivados de malas experiencias personales, evitando que el individuo se frustre.

Las creencias, además, se desarrollan a largo plazo, suponiendo los factores culturales un papel fundamental en su desarrollo. Presentan una gran resistencia al cambio, en comparación con las actitudes, aunque estas últimas también son estables. En el caso de las creencias, estas, presentan menor carga emocional que las actitudes, pero un mayor componente cognitivo.

Como se comentaba anteriormente, es importante desarrollar una visión positiva de uno mismo en relación con el razonamiento probabilístico. Si se muestra interés y disposición se puede conseguir llegar a pensar probabilísticamente, de manera que se aprecien los procesos probabilísticos y se entienda que, aquellos que están bien planificados, conducirán a conclusiones válidas y más adecuadas que aquellas basadas en situaciones puntuales, anecdóticas o personales.

Ponte (1992) indica que las concepciones o las creencias que los maestros poseen sobre las matemáticas tienen su base en las experiencias personales y las relaciones sociales. Sin embargo, estas se ven influenciadas, a su vez, por sus experiencias propias como estudiantes, que en muchas ocasiones pueden ser erróneas (Lortie, 2002). Asimismo, esto puede influir en su futura práctica pedagógica.

Ciñéndonos al estudio de la probabilidad, ya se ha señalado que los maestros presentan lagunas conceptuales sobre la materia debido a su escasa (o nula) formación previa en el campo, tanto conceptual como didáctica. Surge en ellos, por tanto, una sensación de incomodidad (Estrada y Batanero, 2020; Estrada *et al*., 2003; Estrada *et al*., 2004) e incertidumbre hacia la enseñanza de la probabilidad en las aulas (Alsina *et al*., 2020), implicando dificultades a la hora de impartir la materia. Esto puede implicar que los maestros hagan un tratamiento del tema inadecuado. Es especialmente importante el papel que juegan las concepciones iniciales de los maestros sobre la probabilidad para que pueda generarse una comprensión de sus significados.

Gal *et al*. (1997) indican que algunas de las creencias y pensamientos desarrollados hacia la estadística y la probabilidad se hacen tan intensos que pueden implicar el origen de ciertas actitudes hacia la materia. Estas actitudes pueden surgir a edades tempranas siendo, en un primer momento favorables, pero con una tendencia a una evolución negativa que se mantiene en el tiempo (Aiken, 1974; Auzmendi, 1992; Estrada *et al*., 2003; Suydam, 1984).

Autores como Azcárate (1995, 1996) o Serradó *et al*. (2005) centran sus investigaciones en las concepciones que condicionan la enseñanza de la probabilidad en los futuros maestros. En estos trabajos se muestra la importancia de detectar dichas concepciones previas para determinar qué contenido conceptual es necesario trabajar en los programas de formación inicial de maestros. Azcárate (1995, 1996) enfatiza la necesidad de clarificar los conocimientos que tienen los futuros maestros sobre aleatoriedad y probabilidad, indicando que suelen poseerse unas concepciones muy deterministas en dicho campo. Según esta autora, pueden encontrarse muy pocos futuros maestros que reflejen una idea clara sobre la noción de aleatoriedad y sobre la decisión de qué es y qué no es un fenómeno aleatorio. El azar suele aparecer “cosificado” aportándole poder de actuación sobre las cosas. En otras situaciones en las que puedan existir otras causas para su ocurrencia, el azar pasa a un segundo plano, tomando un papel irrelevante.

Por otro lado, las concepciones deterministas sobre los fenómenos aleatorios obstaculizan la comprensión de la naturaleza de la probabilidad y sus significados (Azcárate 1995, 1996). Además, existe una tendencia a utilizar y comprender la probabilidad en un contexto exclusivo de juego, resultando la interpretación de informaciones probabilísticas complicada fuera de esos contextos. En especial, cuando se trata de situaciones de tipo frecuencial que impiden el uso del pensamiento determinista. Más aún, Serradó *et al*. (2005) indican que “la mayoría de las argumentaciones expuestas por los sujetos reflejan características intuitivas de razonamiento, con un predominio de esquemas causales y de juicios heurísticos” (p. 3). Finalmente, destaca una tendencia determinista de argumentación en probabilidad en la que se encasilla a aquellos maestros cuyo reconocimiento de los fenómenos aleatorios resulta muy escaso. Esto puede deberse al conocimiento de algunas de las causas de ocurrencia del suceso, despreciando así el papel que juega la incertidumbre en dichos sucesos, o a la certeza que tienen de poder actuar sobre la influencia del factor de incertidumbre, lo cual no puede ocurrir.

La justificación que dan a los sucesos aleatorios suele presentar escasez de explicaciones sobre del criterio de imprevisibilidad de los resultados (Azcárate, 1995, 1996; Serradó *et al*., 2005). Por ende, la concepción presentada en la mayoría de los casos suele ser una concepción determinista, lo cual implica que se desarrolle un obstáculo de tipo epistemológico frente al desarrollo de su conocimiento estocástico.

En este trabajo, en lo referente al dominio afectivo, nos centraremos únicamente en las creencias de los futuros maestros sobre la matemática escolar, en concreto, respecto a la probabilidad. El modelo de conocimiento que utilizaremos para el análisis de los datos recogidos en este estudio, el modelo MKT, no considera las creencias como parte del conocimiento. Sin embargo, dado que en el diseño de la tarea propuesta a los futuros maestros se está planteando un apartado específico sobre sus creencias personales, consideramos que debe tenerse en cuenta.

2.7.1. Instrumento de análisis de las manifestaciones de las concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la matemática

En este apartado describimos el instrumento de análisis *Concepciones sobre la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática* (CEAM) que utilizaremos para analizar las concepciones de los futuros maestros con respecto a la enseñanza de la matemática, en nuestro caso, la enseñanza de la probabilidad. Este instrumento fue diseñado por Carrillo (1998) para profesorado de Secundaria y, posteriormente, adaptado por Climent (2005) y Aguilar-González (2016) para profesorado de Primaria. El instrumento consta de varios descriptores de tendencias didácticas que se agrupan por categorías y subcategorías. Las tendencias didácticas presentadas en estos trabajos son la tradicional (TR), la tecnológica (TE), la espontaneísta (ES) y la investigativa (I). Sin embargo, es imprescindible remarcar que, a pesar de establecer estas categorizaciones, los profesores no obedecen a una única etiqueta, sino que sus estrategias didácticas suelen presentarse como una combinación compleja de estas tendencias (Rodríguez-Muñiz *et al*., en prensa).

La tendencia tradicional se caracteriza por una adquisición de los conceptos mediante la exposición magistral del profesor empleando un aprendizaje de tipo memorístico. En esta tendencia, el material curricular empleado es, exclusivamente, el libro de texto, siguiendo la programación cronológicamente.

Por otro lado, en la tendencia tecnológica el profesor continúa siguiendo una programación cerrada, pero ahora se apoya en medios técnicos que le ayudan en el proceso de construcción de los contenidos mediante simulaciones. En esta tendencia predomina el carácter práctico y el aprendizaje ya no resulta plenamente memorístico, sino que el alumnado debe comprender el conocimiento para luego asimilarlo. Los alumnos aprenden por imitación del profesor cuando éste transmite los contenidos matemáticos.

La tendencia espontaneísta, por su parte, está caracterizada porque el conocimiento no aparece organizado y estructurado como ocurría en las tendencias anteriores. En esta tendencia la programación didáctica cambia de manera habitual, presentando el carácter formativo de la asignatura. Su objetivo es ofrecer un instrumento que genere un cambio actitudinal en el alumnado con respecto al aprendizaje y a la forma en que se enfrenta a los problemas cotidianos. Las actividades propuestas en esta tendencia son actividades de manipulación de modelos que fomentan la motivación y la participación del alumnado.

Finalmente, la tendencia investigativa está centrada en la adquisición de conocimientos a través de la investigación. De nuevo, al igual que ocurría con la tendencia espontaneísta, el profesor no tiene delimitada una programación fija, puesto que otorga la misma importancia a aprender los conceptos, desarrollar los procedimientos y fomentar de actitudes positivas hacia la materia y el trabajo escolar (Aguilar-González, 2016). Existe un equilibrio entre los intereses del alumnado y su estructura mental. Todos los objetos matemáticos utilizados pueden ser utilizados en distintos contextos.

El instrumento CEAM distingue entre metodología, concepción de la matemática escolar, concepción del aprendizaje, papel del alumno y papel del profesor. Dado que no nos interesa categorizar en qué tendencias se encuentran los futuros maestros, sino que queremos determinar cuáles son sus concepciones en relación con la probabilidad específicamente, para este trabajo únicamente nos centraremos en el apartado del instrumento referido a la concepción de la matemática escolar.

En este sentido, en la Tabla 5 podemos observar una adaptación de la versión sintética de las tendencias aportada en Contreras (2011) para el apartado de concepción de la matemática escolar, que se desarrolla en mayor profundidad en Carrillo y Contreras (1995). En la Tabla 6, se muestra el instrumento CEAM para la concepción de la matemática escolar. Como en este estudio sólo tenemos en consideración dicho apartado, hemos hecho una adaptación sobre la tabla aportada por Aguilar-González (2016) modificando la numeración para que no pierda sentido de referencia a las tablas anteriores y posteriores, que no utilizaremos y sí se empleaban en ese trabajo (tabla de metodología, tabla de concepción del aprendizaje, tabla de papel del alumno, tabla de papel del profesor).

A modo de colofón de este apartado, es preciso señalar que la manifestación de las creencias y concepciones del profesorado sobre las matemáticas y su aprendizaje y enseñanza ni es evidente ni resulta sencillo separarlas del conocimiento que emerge cuando se observa o se entrevista al profesorado. Estas relaciones son complejas y con frecuencia creencia y conocimiento están imbricados (Aguilar-González *et al.*, 2018)

Tabla 5

Versión Sintética del Instrumento de Segundo Orden para el Análisis de las Tendencias Didácticas: Concepción de la Matemática Escolar

CATEGORÍAS/ TENDENCIAS	TRADICIONAL	TECNOLÓGICA	ESPONTANEÍSTA	INVESTIGATIVA
SENTIDO DE LA ASIGNATURA	Énfasis conceptual	Aplicabilidad (proceso-producto)	Énfasis procedimental y actitudinal	Procedimientos, conceptos y actitudes
Orientación (Matemática escolar como…)	Matemática formal	Adaptación de la matemática formal a problemática real	Matemática que emana de la problemática real	Síntesis matemática formal y matemática cotidiana
Finalidad	Informativa	Informativa utilitaria (productos y métodos)	Formativa (actitudes y valores racionales)	Formativa (aprender a aprender)

Nota. Adaptado de Contreras (2011).

Tabla 6

Instrumento CEAM. Concepción de la Matemática Escolar.

Orientación
TR1: La asignatura está orientada, exclusivamente, hacia la adquisición de conceptos y reglas
TE1: Interesan tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan
ES1: No interesan tanto los conceptos como los procedimientos y el fomento de actitudes positivas (hacia el trabajo escolar y como ciudadano).
I1: Interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia, el trabajo escolar en general y como ciudadano, siendo la materia y el trabajo escolar los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas.

Contenido
TR2/TE2: La matemática escolar coincide con la que se muestra básicamente en los libros de texto. Se identifica con contenidos matemáticos escolares y dentro de éstos se suelen considerar casi exclusivamente las normas del sistema de numeración decimal (números naturales, decimales, enteros y fraccionarios) y sus operaciones, poniendo énfasis en estas últimas. No se suelen considerar contenidos geométricos y si se hace consiste en un listado de nombres (de figuras, de unidades de medida...) y fórmulas. No se establecen relaciones entre los contenidos.
ES2: La matemática inmersa en la problemática real es el único referente de los conocimientos a movilizar en el aula. (Se trata de la matemática del entorno sociocultural, que no se circunscribe en principio a los números y sus operaciones (tiene cabida, por ejemplo, la geometría del entorno o la organización de la información)
I2: La matemática escolar tiene su punto de partida en la etnomatemática de los alumnos y recoge las necesidades socio-políticas, culturales... "Hacer matemáticas" con un carácter más formal (con la formalidad que tiene sentido alcanzar en esta etapa educativa) proviene del análisis de lo concreto. Como contenidos matemáticos escolares se consideran tanto los numéricos propios de la etapa, como los geométricos, la medida, el tratamiento de la información y la resolución de problemas, destacando este último.
¿Cómo es?
TR3/TE3: La matemática escolar es exacta y se concibe acabada.
ES3: Se potencia la estimación y la aproximación, ligadas a contextos reales, y se concibe en construcción (se construye en el propio contexto escolar por parte de los alumnos).
I3: La matemática escolar muestra su doble perspectiva de exactitud/aproximación dependiendo del contexto y se concibe en construcción.
Finalidad
TR4: La finalidad de la asignatura es poner en conocimiento de los alumnos un cierto "panorama matemático" que se espera que aprendan y dotarles de las destrezas básicas para la vida diaria (desde un punto de vista muy restringido, casi de las aplicaciones numéricas básicas) y para el estudio tanto de otras disciplinas como el estudio futuro de la propia matemática (por los conocimientos que aporta).
TE4: La asignatura ha de tener un carácter práctico que permita su aplicación utilitaria en la vida cotidiana y como instrumento para el estudio tanto de otras disciplinas como el estudio futuro de la propia matemática (tanto por los conocimientos que aporta como por contribuir al desarrollo del razonamiento en el alumno).
ES4: La asignatura posee un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno (con respecto al aprendizaje y a la vida), así como para la adquisición de los valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos.
I4: La finalidad última de la asignatura es favorecer el desarrollo de una forma de pensamiento (matemático) que permita al alumno organizar, interpretar y comprender la realidad que le rodea, dotándolo de unos instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo.

Nota. Adaptado de Aguilar-González (2016, p. 68).

CAPÍTULO 3

Metodología de investigación

En este capítulo definiremos el instrumento diseñado para el estudio, una actividad con la que los futuros maestros pudieron trabajar de forma simultánea en su conocimiento pedagógico y matemático: el diseño de un problema de probabilidad adaptado a 6º curso de Educación Primaria. También se incidirá en la descripción de la metodología utilizada en esta investigación, basada en la investigación-acción. Además, se realizará un análisis de contenido de los datos recogidos y un posterior análisis del conocimiento matemático y pedagógico bajo el prisma del modelo MKT.

3.1. Instrumento

Esta investigación se ha llevado a cabo durante tres cursos consecutivos (2017/2018, 2018/2019 y 2019/2020) en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III del tercer curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo. Como ya se indicó previamente, esta es la tercera y última asignatura relacionada con las matemáticas y su didáctica en este programa de grado, y versa sobre estadística, probabilidad y resolución de problemas y su didáctica.

Como ya hemos indicado, numerosos autores como Contreras, Batanero *et al.* (2011), Contreras, Díaz *et al*. (2011), Ortiz *et al.* (2012), Mohamed y Ortiz (2012), Gómez-Torres *et al*. (2014) y Batanero *et al*. (2015) prueban que tanto los conocimientos comunes como los conocimientos especializados son escasos y resulta necesario reforzarlos de manera simultánea. Para poder llevar a cabo esta labor, los formadores de maestros han de diseñar tareas efectivas para el desarrollo de los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los futuros maestros durante su etapa de formación. La literatura en este campo, especialmente referida al área de estadística y probabilidad, aún resulta escasa, por lo que se considera de interés continuar investigando en esta línea de trabajo, dada la importancia de dicha área y las necesidades de mejora que se precisan en su docencia.

Por ello, y debido a la problemática detectada, inicialmente se planteó una tarea en la que los futuros maestros debían diseñar y resolver un problema de probabilidad, adaptando dicho problema un nivel educativo específico, concretamente, a 6º curso de Educación Primaria. Cada futuro maestro debía crear y resolver su problema, justificando su proceso creativo, así como determinar por qué su propuesta se encontraba adaptada al nivel educativo solicitado en el enunciado. Es necesario indicar, que el instrumento que estamos describiendo se corresponde con el primer ciclo de investigación-acción (véase sección 3.2.), ya que el instrumento se fue modificando en los sucesivos ciclos. Por tanto, y para facilitar la lectura, las modificaciones introducidas en el instrumento inicial se incluirán en capítulos posteriores, con la respectiva explicación de cada uno de los ciclos de investigación-acción aplicados en este estudio.

La tarea presentaba un enunciado que daba libertad de creación a los futuros maestros, siempre y cuando su problema se adaptase al nivel especificado. Como se acaba de comentar, esta tarea se contextualizó en 6º curso de Educación Primaria. El currículo español de Educación Primaria se centra casi exclusivamente en el estudio de la definición clásica de probabilidad en este nivel educativo. Es por ello que, para el diseño de esta tarea de formación de maestros, se ha focalizado la atención en esta definición de probabilidad. De esta manera, los futuros maestros debían movilizar sus conocimientos del contenido matemático sobre combinatoria y probabilidad para poder proponer un problema que pudiese ser resuelto utilizando la fórmula de Laplace. Además, al pedir a los futuros maestros que adaptasen el problema a un nivel educativo específico, conseguimos que activasen sus conocimientos pedagógicos necesarios para conseguir dicha adaptación, evitando diseñar enunciados de nivel superior o inferior al solicitado.

Por otra parte, al solicitar a los futuros maestros la justificación de la elección del problema detallando su proceso creativo y la explicación sobre su adecuación al 6º curso de Educación Primaria, pretendíamos detectar evidencias del conocimiento especializado de los futuros maestros en relación con la probabilidad. El proceso de resolución de problemas también puede mostrar evidencias del conocimiento común del contenido promoviendo el razonamiento lógico-matemático de los futuros maestros, siendo está una de las principales capacidades qué persigue la adquisición de competencia matemática. Con la propuesta de esta tarea se pretendía observar tanto el tipo de respuestas que aportaban los futuros maestros, como las evidencias que mostraban en sus producciones sobre su conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad.

El experimento fue llevado a cabo a través del campus virtual de la Universidad de Oviedo, que utiliza como base la plataforma Moodle. La tarea se propuso como una actividad de carácter obligatorio, que se realizó a lo largo de un mes durante el curso. Esta tarea formaba parte de la evaluación continua de la asignatura, suponiendo (junto con otras tareas) un porcentaje de un 10 % de la calificación final de la misma.

En un primer momento, la tarea propuesta se dividió en dos etapas consecutivas con una duración de dos semanas para cada una de ellas. En la primera etapa se solicitó a los futuros maestros la creación y resolución del problema de probabilidad siguiendo las instrucciones arriba indicadas y, en la segunda, la coevaluación a dos de sus compañeros de manera anónima. Para esta memoria nos hemos centrado únicamente en las respuestas aportadas por los futuros maestros durante la primera etapa analizando sus creaciones para determinar cómo era su conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad. La segunda etapa no se ha tenido en consideración para este trabajo debido a la escasez de respuestas de tipo cualitativo obtenidas en la coevaluación, ya que los futuros maestros solían centrarse en proporcionar una calificación numérica sin aportar retroalimentación a sus compañeros y compañeras. Además, algunos de los futuros maestros solo participaron en la primera etapa, sin llegar a realizar la tarea completamente, lo que no contribuyó a obtener una visión íntegra de la tarea.

Al ser de carácter obligatorio, la tarea fue propuesta para su realización a todos los futuros maestros inscritos en la asignatura, no sólo en el primer curso, sino en los tres cursos analizados. A pesar de ello, un gran porcentaje de futuros maestros (en cada uno de los cursos) decidieron no participar en su realización siendo, en su mayoría, estudiantes que acabaron por abandonar la materia y no presentarse al examen final. En la Tabla 7 puede verse la relación de estudiantes matriculados, participantes en la tarea y la ratio de respuesta de cada curso.

Tabla 7

Relación de alumnado matriculado en la asignatura, participantes en la tarea y ratio de respuesta por curso.

	CURSO 2017/2018	**CURSO 2018/2019**	**CURSO 2019/2020**
Alumnado matriculado	168	240	221
Participantes	111	139	145
Ratio de respuesta	66.07 %	57.92 %	65.61 %

Como se puede observar, se obtuvo una participación que, en todos los cursos, superó la mitad del alumnado matriculado en la asignatura. Sin embargo, aún podemos ver como la materia sigue teniendo un alto índice de abandono, probablemente debido las dificultades que entraña a los futuros maestros y sus concepciones negativas hacia la misma.

A continuación, se introduce la metodología empleada en este trabajo que ayudará a comprender cómo se ha desarrollado el estudio.

3.2. Marco metodológico: la investigación-acción

La investigación-acción (en adelante I-A) es una metodología de investigación propuesta en los años 40 por Kurt Lewin. Se entiende como una forma de estudio exploratorio acerca de una situación de carácter social (en nuestro caso, de carácter educativo) con el fin de mejorar dicha situación, y en la que los investigadores se implican en la realidad investigada (Suárez-Pazos, 2002). En el ámbito educativo este tipo de metodología es utilizada como una forma de desarrollo profesional, siendo los propios docentes los investigadores del estudio.

La I-A se distingue por su carácter cíclico, desarrollándose en series de ciclos de investigación en espiral en los que se pueden distinguir varias fases: la fase de planificación, la fase de acción, la fase de observación y la fase de reflexión. En cada ciclo, esta última fase, genera un nuevo ciclo de I-A (Latorre, 2004).

Cuando comenzamos un ciclo nos encontramos ante la fase de planificación, en la que los investigadores diseñan un plan flexible que se revisará de manera constante y se podrá ir modificando tantas veces como sea necesario para conseguir una mejora en la práctica. Una vez llevada a cabo la planificación, pasaremos a la segunda fase, la fase de acción. En ella, se pondrán en práctica aquellas acciones planificadas durante la primera fase del ciclo, ejecutando dicho plan de una forma controlada y sistemática.

Tras la segunda fase, avanzaremos a la fase de observación, en la que se revisarán los resultados obtenidos durante el experimento, registrando los efectos y consecuencias de las acciones implementadas en la fase 2. En esta tercera fase, podremos controlar y evaluar qué ha ido bien y qué ha ido mal durante el proceso para, posteriormente, introducirnos en la cuarta y última fase, la fase de reflexión. En ella se realiza una valoración, tanto de las acciones como de los resultados obtenidos, ya sean positivos o negativos, de manera que podamos reconstruir aquellos apartados que han fallado para así mejorar los resultados en ciclos posteriores. Las conclusiones obtenidas en esta última fase servirán como punto de partida para comenzar un nuevo ciclo de I-A, volviendo a planificar, ajustando todo aquello que resulte necesario.

A continuación, una vez que se ha revisado el plan y se ha desarrollado un nuevo plan revisado, se continúa realizando el mismo proceso que en el ciclo anterior, siguiendo cada una de las fases posteriores del ciclo de I-A: actuación, observación y reflexión. Se realizarán tantas iteraciones como los investigadores consideren apropiadas y/o necesarias, pudiendo realizar dos ciclos, tres, cuatro, etc. Un esquema de cómo se desarrollan los ciclos de I-A puede observarse en la Figura 14.

Figura 14
Esquema de Ciclos de Investigación-Acción

En este trabajo se han llevado a cabo tres ciclos de I-A, cada uno de ellos durante un curso completo. Las conclusiones obtenidas durante el primer ciclo, implementado en el curso 2017/2018 implican una serie de modificaciones en el plan inicial que suponen su transformación para la nueva implementación en el curso 2018/2019. De igual modo, a raíz de los resultados obtenidos en el segundo ciclo se realiza una nueva modificación, puesta en práctica durante el curso 2019/2020. Tras la ejecución de los tres ciclos podemos observar una evolución de las respuestas aportadas por los futuros maestros a la tarea propuesta, que se comentarán en detalle más adelante en próximos apartados.

3.3. Marco metodológico: análisis del contenido y análisis bajo el prisma del MKT

En cada uno de los ciclos de I-A implementados en este trabajo se comienza el análisis de los datos con un análisis del contenido. Entendemos el análisis del contenido como una metodología en el campo de la investigación descriptiva que nos permite clasificar la información textual en categorías de información cuantificable (Raigada, 2002).

Para poder llevar a cabo un análisis del contenido tendremos que realizar una lectura de los datos, en nuestro caso, cualitativos, de forma "sistémica, objetiva, replicable y válida" (Andreu, 2002, p. 2). La característica fundamental de esta metodología de análisis de datos es que combina, de forma intrínseca, la observación de los datos, su producción y su interpretación y análisis, lo que la convierte en una técnica de análisis de datos de gran complejidad (Andreu, 2002).

Como hemos comentado, debe presentarse una sistematización que permita seguir unas pautas para realizar el análisis de los datos. Por otra parte, para poder realizar un análisis del contenido de forma adecuada, es necesario que seamos objetivos, es decir, los procedimientos utilizados en el análisis de los datos deberían poder ser replicables por otros autores sin que hubiese cambios en los resultados. De esta manera, conseguiríamos validar los resultados obtenidos. Estos dos aspectos ayudan a que el análisis sea replicable, al presentar unas reglas de análisis explícitas que permitan aplicar el análisis a cualquier unidad de análisis. Asimismo, a partir de este tipo de análisis, podríamos llegar a convertir las unidades textuales en elementos cuantificables, aunque el fin último sea la interpretación cualitativa de los datos.

Este tipo de metodología presenta una gran ventaja: en todos los datos textuales que queramos interpretar, vamos a poder determinar una serie de datos expresos, es decir, lo que el autor del texto está diciendo en el mismo, pero también los datos latentes, que son aquellos contenidos que aparecen en el texto sin pretensiones por parte del propio autor y que están relacionados con su contexto. En este sentido, la metodología del análisis del contenido permite que podamos desglosar no solo aquellos contenidos explícitos, sino que también nos permite interpretar otro tipo de contenidos en contexto.

En definitiva, como indica Andreu (2002):

> Por tanto, pertenecen al campo del análisis de contenido todo el conjunto de técnicas tendentes a explicar y sistematizar el contenido de los mensajes comunicativos de textos, sonidos e imágenes y la expresión de ese contenido con ayuda de indicios cuantificables o no. Todo ello con el objetivo de efectuar deducciones lógicas y justificadas concernientes a la fuente – el emisor y su contexto – o eventualmente a sus efectos. Para ello el analista tendrá a su disposición todo un juego de operaciones analíticas, más o menos adaptadas a la naturaleza del material y del problema que tratará de resolver, pudiendo utilizar una o varias que sean complementarias entre sí para enriquecer los resultados o pretender así una interpretación fundamentada científicamente. (pp. 3-4)

El análisis del contenido que se llevó a cabo en este trabajo nos permitió clasificar los tipos de respuestas. Inicialmente, se partió de la idea de que nos encontraríamos con respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. A partir de esa idea inicial, se fue completando la clasificación con los apartados que fueron surgiendo en función de las respuestas aportadas por los futuros maestros.

A continuación, una vez clasificadas todas las respuestas se pasaría a realizar una clasificación de estas en relación con los subdominios del modelo MKT que se hicieron evidentes en cada una de ellas. La clasificación de las respuestas en función de cómo había planteado y resuelto el problema cada grupo de futuros maestros, nos permitió determinar qué tipo de conocimientos, ya fuesen matemáticos o pedagógicos se activaron (o no) en cada momento de la tarea. De este modo, nos centramos en aquellos aspectos relacionados con el CCK, el SCK y el KC del modelo MKT.

El propio enunciado, la resolución del problema y las explicaciones aportadas por los futuros maestros bajo el análisis del contenido, permitieron determinar qué aspectos se estaban activando relacionados con esos conocimientos matemáticos para la enseñanza presentes en el modelo MKT. El análisis del contenido textual resultó complejo, teniendo en cuenta todos y cada uno de los aspectos representados en las respuestas: la redacción del enunciado, el proceso de resolución, las explicaciones aportadas por los futuros maestros, tanto sobre la elección del enunciado, como la resolución paso a paso del problema, el proceso creativo y la explicación de la adecuación al nivel educativo (cuando esta se hizo presente).

En los próximos capítulos se detallará el análisis realizado en cada uno de los ciclos implementados precisando la clasificación de respuestas encontrada en el análisis del contenido y las evidencias encontradas relativas a los subdominios del MKT. Una vez analizados los datos y, en función de los resultados obtenidos en cada ciclo, se procede a una modificación en el plan inicial para mejorar el diseño de la tarea, de manera que los futuros maestros muestren una mejora en relación con sus conocimientos pedagógicos y matemáticos sobre la probabilidad mostrando más evidencias de dichos conocimientos o la falta de ellos.

CAPÍTULO 4

Primer ciclo de investigación-acción

En este capítulo describiremos el primer ciclo de I-A, desarrollado durante el curso 2017/2018. Como decíamos en el capítulo anterior, para este trabajo se planteó un problema en el que los futuros maestros debían utilizar las monedas de euro de manera que, partiendo de una situación problemática cerrada y fija e idéntica para todos los estudiantes, éstos consiguiesen diseñar y resolver un problema probabilístico en el que se utilizase la definición clásica de la probabilidad, teniendo que encontrarse su solución en un intervalo numérico concreto.

El enunciado propuesto para este primer ciclo fue el siguiente:

"Las monedas del euro pueden ser de 1, 2, 5, 10, 20 o 50 céntimos o de 1 o 2 euros. Consideremos la siguiente situación: "En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro..."

Añade restricciones a esta situación de modo que puedas formular un problema adaptado al curso de 6º de Primaria cuya pregunta sea "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?" y cuya respuesta sea un valor entre 0.6 y 0.75 (ambos inclusive).

La redacción ha de ser no trivial, factible y verosímil. Es decir, no pueden incluirse tantas limitaciones como para reducir las posibilidades a un único caso, ni pueden usarse tantas *restricciones que sea casi imposible cumplirlas, de modo que sea muy complicado que esa situación ocurra en la vida real.*

Escribe tu solución al problema y demuestra justificadamente que la respuesta a la pregunta: "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?" es un número dentro del intervalo [0.6, 0.75].

En resumen, en el texto que entregues tienes que:

1. Redactar un enunciado que cumpla las condiciones que se piden.

2. Resolver el problema de acuerdo con ese enunciado.

3. Aportar una breve explicación sobre por qué has elegido ese enunciado y por qué consideras que es adecuado."

La tarea puede parecer sencilla a priori. Sin embargo, presenta una gran complejidad tanto pedagógica como matemática cuando solicitamos que se plantee un problema que sea matemáticamente correcto, cuya resolución sea adecuada y consiguiendo, además, que el problema se adapte correctamente a un nivel educativo específico. Con la tarea pretendemos, no solo que los futuros maestros sepan emplear sus conocimientos matemáticos sobre probabilidad, sino que, además, sean conscientes de la complejidad que supone la tarea, dado que deberán activar sus conocimientos pedagógicos y matemáticos simultáneamente para lograr comprender dicha complejidad.

En lo relativo a los conocimientos matemáticos que los futuros maestros deberán activar para la realización de esa tarea es importante destacar que, si tratamos de resolver el problema sin ningún tipo de limitación, simplemente teniendo en cuenta todas las monedas de euro, nos estaremos enfrentando a un problema de gran complejidad combinatoria. Es decir, si proponemos un problema sin ningún tipo de restricción nos estaremos enfrentando a un problema en el que podremos tener en el bolsillo cualquier combinación de tres monedas pudiendo éstas, además, repetirse. Esto hace que nos estemos enfrentando a un problema combinatorio en el que tendremos combinaciones de 8 elementos tomados de 3 en 3 lo cual añade una gran dificultad combinatoria al problema, como se ha indicado anteriormente. Consideremos la fórmula de las combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m:

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}$$

Si calculamos el número de combinaciones posibles que podrían formarse en este espacio muestral, obtendríamos el siguiente resultado:

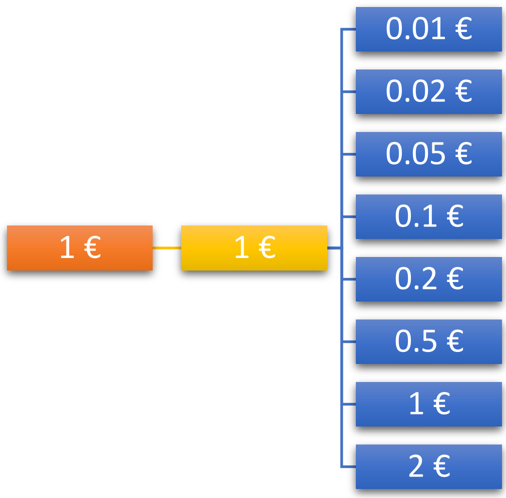
$$CR_{8,3} = \frac{(8+3-1)!}{(8-1)!\,3!} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

Por tanto, se hace evidente que tratar de resolver esta tarea sin ningún tipo de restricción implica trabajar con un problema que puede ser resuelto matemáticamente pero que presenta una gran dificultad combinatoria, especialmente cuando trabajamos a nivel de Educación Primaria. El espacio muestral tendría 120 casos posibles. Esto supone que el alumnado de Educación Primaria encontrará muy complicado, o casi imposible, el llegar a obtener dicho espacio muestral completo. Más aún, si no añadimos ningún tipo de restricción, la obtención del espacio muestral sería muy difícil incluso para los futuros maestros.

Por otro lado, no sólo es complicado el cálculo del espacio muestral o el número de casos posibles, sino que la obtención del número de casos favorables a tener estrictamente más de 2 € en el bolsillo resulta incluso más complicada. En esta situación es necesario buscar estrategias que permitan determinar cuántos y cuáles son esos casos posibles. En este punto, los futuros maestros deberían ser conscientes de que para tener más de 2 € en el bolsillo deben tener al menos dos monedas de 1 € o una moneda de 2 € considerando todos los casos en que esto ocurre. Esta estrategia consigue reducir considerablemente el número de casos a contabilizar centrándose únicamente en los casos de interés, de manera que no tendríamos que seleccionar todos los casos posibles y, a partir de ellos, determinar cuáles son los casos favorables. Sin embargo, esto requiere de un razonamiento matemático algo más profundo que, en muchos casos, resulta complicado activar para los maestros información. Utilizando esta estrategia de conteo podemos determinar cuáles son los casos favorables a tener más de 2 € en el bolsillo:

- Si consideramos que tenemos, al menos, dos monedas de 1 € obtenemos un total de 8 casos favorables, como podemos ver en la Figura 15.
- Si consideramos que tenemos al menos una moneda de 2 € obtenemos un total de 35 casos favorables, como podemos ver en la Figura 16.

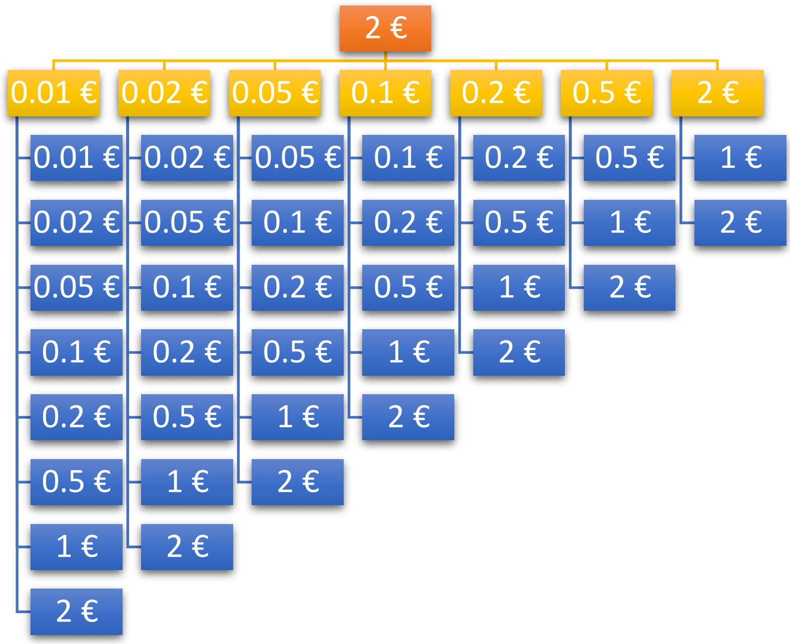
Figura 15
Árbol de casos con al menos dos monedas de 1 €



Tras un recuento completo, obtendríamos un total de 43 casos favorables a tener más de 2 € en el bolsillo. Sin embargo, y a pesar de haber encontrado una estrategia que nos ayuda a restringir el número de casos que debemos contar, hacer estos conteos sigue siendo un proceso en el que resulta fácil equivocarse, contando dos veces un caso o dejando alguno sin contar. Es por ello necesario que, para que el recuento sea correcto, tratemos de buscar otra estrategia que nos simplifique la organización de los valores de las monedas. Una buena solución sería, por ejemplo, fijar el valor de las monedas de 1 € o 2 € y modificar los valores del resto de las monedas empezando por las de menor valor monetario hasta finalizar con las de mayor valor monetario.

Figura 16

Árbol de casos con al menos una moneda de 2 €



Por otro lado, la adaptación de la tarea a sexto curso de Educación Primaria requiere de un conocimiento especializado más profundo. El CCK en probabilidad combinado con el SCK nos permite adaptar la tarea al nivel solicitado determinando la eficacia de dicha tarea para el nivel y el contenido matemático especificados.

Pero ¿qué sería necesario para que la tarea fuera correcta y estuviera adaptada a sexto curso de Educación Primaria? En primer lugar, y como uno de los puntos más importantes de esta tarea, debemos reducir el espacio muestral, que recordemos que, sin ningún tipo de restricción, contaba con 120 casos posibles, de manera que obtengamos un espacio muestral más asequible para el nivel. Esto hace necesario que se restrinja el uso de monedas con valores monetarios más pequeños, dado que la solución debe encontrarse en el intervalo [0.6, 0.75]. Nos encontramos ante un valor de la probabilidad bastante grande, lo que significa que necesitaremos un alto número de casos favorables. Conocer el valor de algunas de las monedas fijando, por ejemplo, que una de ellas tenga un valor alto (como la moneda de 1 €) pero sin llegar a fijar que una de las monedas sea de 2 € (para evitar que la probabilidad sea 1), puede facilitar el aumento del número de casos favorables. De este modo, será más sencillo ajustar el resultado del problema al intervalo [0.6, 0.75]. Con este proceso, los futuros maestros activarán su CCK en probabilidad al necesitar conocer los valores que permitirán la adaptación de la solución al intervalo solicitado en el enunciado de la tarea. A su vez, este proceso de adaptación del problema al nivel educativo requerido revelará el SCK de los futuros maestros.

4.1. Categorías del análisis del contenido

En este primer ciclo de I-A se recogieron 111 respuestas de un total de 168 alumnos que podrían haber presentado su tarea (véase Tabla 7). De esas 111 respuestas tuvieron que descartarse dos, dado que los archivos entregados a través del campus virtual universitario se encontraban vacíos. El tamaño muestral para esta primera fase es, por lo tanto, de $N = 109$ respuestas válidas.

Tras la recolección de los datos se llevó a cabo el análisis del contenido. En él pudimos encontrar respuestas correctas, respuestas incorrectas y respuestas que no eran completamente correctas, ya fuese debido a errores en el contenido matemático o a errores en el contenido pedagógico. A partir de estos resultados, se procede a realizar una clasificación de las respuestas en correctas, parcialmente correctas e incorrectas. A continuación, puede observarse la relación de tipos de respuestas con sus correspondientes especificaciones:

- **Correctas:** tanto el enunciado del problema como su resolución son pedagógica y matemáticamente correctas.
- **Parcialmente correctas:** en esta clasificación distinguimos entre dos tipos de respuestas que no son correctas, pero tampoco son completamente incorrectas.
    - **En relación con el enunciado:** en estos casos, el problema propuesto no es adecuado a nivel de 6º curso de Educación Primaria dado que el tamaño muestral es demasiado grande, por lo que se necesitan restricciones; la forma en que está redactado el enunciado lo convierte en un problema difícil o el enunciado presenta

ambigüedades que pueden dar lugar a equívoco a la hora de enfrentarse a la resolución del problema. En este tipo de respuestas la resolución del problema es matemáticamente correcta.

- **En relación con el proceso de resolución del problema:** en estos casos nos hemos encontrado con que el espacio muestral no está bien definido debido a que se encontraba incompleto, pero si los futuros maestros hubiesen considerado todos los casos posibles, el enunciado estaría adaptado al nivel educativo solicitado, o se han considerado como favorables aquellos casos en los que la suma de las monedas es igual a 2 €. Estos problemas son pedagógicamente correctos, pero no están bien resueltos matemáticamente.

- **Incorrectas:** en ellas podemos encontrar que el enunciado del problema y la resolución del mismo no se adaptan a 6º curso de Educación Primaria y son matemáticamente incorrectos; el enunciado y/o la resolución no tienen sentido; el proceso de resolución no se corresponde con el enunciado planteado o solamente se plantea un enunciado sin resolver el problema.

En la Tabla 8 se muestra un desglose del número de respuestas encontradas en cada apartado de la clasificación. En el siguiente apartado de este capítulo se ejemplificarán los tipos de respuestas encontradas en relación con los subdominios del modelo MKT considerados para este trabajo en función de los tipos de respuestas de esta clasificación.

Tabla 8
Clasificación de Respuestas Obtenida en el Análisis del Contenido del Primer Ciclo de I-A

<table>
<tr><th>TIPO DE RESPUESTA</th><th colspan="2">SUBTIPO DE RESPUESTA</th><th>RECUENTO</th><th>TOTAL</th></tr>
<tr><td rowspan="2">CORRECTAS</td><td colspan="2">Se ajustan al modelo propuesto</td><td>34</td><td rowspan="2">59</td></tr>
<tr><td colspan="2">No se ajustan al modelo propuesto</td><td>25</td></tr>
<tr><td rowspan="3">PARCIALMENTE CORRECTAS</td><td>En relación con el enunciado</td><td>Espacio muestral demasiado grande</td><td>6</td><td rowspan="3">13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">En relación con el proceso de resolución del problema</td><td>Considerar como favorable que la suma de las monedas sea exactamente 2€</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Espacio muestral incompleto</td><td>3</td></tr>
</table>

TIPO DE RESPUESTA	SUBTIPO DE RESPUESTA	RECUENTO	TOTAL
INCORRECTAS	Estructura incorrecta y proceso de resolución erróneo	9	37
	Espacio muestral demasiado grande y proceso de resolución erróneo	4	
	Solo se aporta enunciado y no se adecua al nivel	3	
	Combinación de más de un error grave	21	

- **Correctas**. Dentro de este grupo de respuestas podemos distinguir entre dos tipos de respuestas:
  - Se han encontrado 34 respuestas matemáticamente correctas y adaptadas al nivel educativo. En estas respuestas se siguen perfectamente las instrucciones del enunciado propuesto en esta investigación.
  - El resto de las respuestas correctas son matemáticamente correctas y se encuentran adaptadas al nivel educativo seleccionado. Sin embargo, no se ajustan al modelo propuesto. Es decir, estos enunciados no comienzan por la frase "En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro..." o no terminan con la frase "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?". Dentro de este tipo de respuestas podemos encontrar, de nuevo, dos subgrupos:
    - Enunciados que no comienzan con la frase "En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro...” ni terminan preguntando "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?". En estos enunciados son los futuros maestros quienes tratan de buscar una situación de la vida real en un contexto cercano a los estudiantes de 6º de Educación Primaria. A pesar de no ajustarse a la estructura solicitada, estos futuros maestros son capaces de enunciar y resolver problemas en los que mantienen el uso de las 3 monedas y de que la pregunta final del problema sea determinar cuál es la probabilidad de tener más de 2 € en el bolsillo. Sin embargo, sus enunciados son completamente libres, es decir, se proponen enunciados que matemáticamente son correctos y se encuentran adecuados al nivel educativo, pero creándolos de una manera más libre. Por ejemplo: *“Marcos*

fue a la librería para comprarse un comic nuevo. Su madre le dio 3 euros, pero el comic cuesta entre 5 y 6 euros. En el bolsillo aún tiene tres monedas que pueden ser de 2 euros, 50 céntimos o 20 céntimos ¿Cuál es la probabilidad de que Marcos tenga más de dos euros en el bolsillo?"

- Enunciados que comienzan con la frase "En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro..." pero en los que se continúa añadiendo monedas. Es decir, en estos enunciados no se trabaja con 3 monedas sino con más. Esta situación se da porque, cuando los futuros maestros leen e interpretan un enunciado en el que se indica que en el bolsillo se tienen "3 monedas de euro", consideran que se está hablando de 3 monedas de 1 €. Por lo tanto, para poder crear una situación problemática en la que se pueda calcular la probabilidad de tener más de 2 € en el bolsillo, partiendo de que sepamos que 3 de las monedas ya son de 1 € y que la solución del problema debe encontrarse en el intervalo [0.6, 0.75], es necesario añadir más monedas con otros valores distintos a 1 €. De esta manera, la probabilidad no sería siempre 1 (si sólo tuviésemos 3 monedas de 1 €, la probabilidad de tener más de 2 € en el bolsillo sería siempre 1, pues tendremos siempre 3 € y el problema sería trivial) y se hace posible la adaptación del resultado del problema al intervalo solicitado. En la mayoría de los casos se mantiene la estructura inicial en la que se indica que "En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro...". Otros futuros maestros realizan una interpretación más libre del enunciado, como ocurría en la sección anterior, pero añadiendo también más monedas aparte de las 3 monedas de 1 €.

- **Parcialmente correctas**. Como comentábamos anteriormente podemos distinguir dos tipos de respuestas:
  - **En relación con el enunciado:** se han encontrado seis respuestas en las que el espacio muestral era demasiado grande para poder considerarlo adaptado al nivel de 6º curso de Educación Primaria. Por ejemplo, en algunos problemas, el espacio muestral excedía los 64 casos posibles. Esta situación implica una falta de adaptación al nivel educativo propuesto. Cuando los futuros maestros trataban de

resolver el problema consideraban menos casos posibles de los que realmente había, lo cual simplificaba involuntariamente la resolución del problema, en gran medida. Si estos futuros maestros hubiesen considerado todos los casos posibles se habrían encontrado con un espacio muestral demasiado grande para plantear en este curso de Educación Primaria, pues la combinatoria se limita a recuentos sencillos o fácilmente abordables por el principio multiplicativo. Por otro lado, a pesar de plantear de manera incorrecta el espacio muestral, si dicho espacio muestral fuese correcto, el problema estaría matemáticamente bien resuelto. También se han encontrado ciertas ambigüedades en algunos de los enunciados, pero este problema podría resolverse fácilmente reformulando los enunciados.

- **En relación con el proceso de resolución del problema:** también se han encontrado dos tipos de respuestas en este apartado.
    - Por un lado, respuestas en las que los futuros maestros consideran los casos en los que la suma de las monedas es exactamente igual a 2 € como casos favorables. Al hacer esto, los futuros maestros incrementan el número de casos favorables, de manera que es más fácil adaptar la solución del problema al intervalo solicitado. Sin embargo, no parece que este error surja de la necesidad de adaptar la solución del problema el intervalo, sino que parece, más bien, que confunden los términos "mayor que" y "mayor o igual que".
    - Por otro lado, encontramos tres respuestas en las que el espacio muestral aparece incompleto. No obstante, si completásemos el espacio muestral, el problema sería adecuado al nivel de 6º curso de Educación Primaria. Es decir, no nos encontraríamos con un espacio muestral demasiado grande, como ocurría con aquellos futuros maestros que no conseguían adaptar su problema el nivel educativo requerido. En estas tres respuestas parece que el espacio muestral se encuentra incompleto debido a un error a la hora de hacer el recuento de casos posibles faltando por considerar, como mucho, uno o dos casos posibles.

- **Incorrectas**:
  - Respuestas incorrectas que no seguían la estructura sugerida para el enunciado comenzando con la frase "En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro...” y terminando con la pregunta “¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?”. Además, el proceso de resolución del problema también es matemáticamente incorrecto.
  - Respuestas incorrectas que utilizan espacios muestrales demasiado grandes para el nivel educativo exigido, con lo cual no se adaptan al nivel y, además, el proceso de resolución del problema no tiene sentido en esos problemas.
  - Respuestas incorrectas que no aportan solución al problema, sino que sólo plantean un enunciado, que tampoco es adecuado para el nivel solicitado.
  - Respuestas incorrectas que presentan alguna de las secciones consideradas en el apartado de respuestas incorrectas que no han sido mencionadas en los puntos anteriores, o más de un error de los mencionados en la clasificación de respuestas incorrectas.

Es importante enfatizar que, en la mayoría de los casos, la falta de adaptación del problema al nivel educativo requerido se debe a la falta de restricciones del problema. Si añadimos restricciones reducimos considerablemente el tamaño muestral. Sin embargo, hay una tendencia a considerar demasiadas monedas diferentes sin aportar restricciones al problema, lo cual complica enormemente la su resolución.

Se ha detectado una tendencia a fijar uno de los valores de las tres monedas que podemos tener en el bolsillo, normalmente el de 1 €. Esto favorece el aumento del número de casos favorables de forma que se puede adaptar más fácilmente la solución del problema al intervalo solicitado. También se han encontrado casos similares en los que se fija una moneda de 50 céntimos o en los que se asume que la primera moneda que vamos a sacar va a ser de 1 € o la de 2 €, o se fija el valor de dos de las monedas. Hay un total de 21 respuestas en las cuales se ha fijado el valor de, al menos, una de las monedas. De entre estas respuestas sólo tres de ellas resultaron incorrectas, siendo diez parcialmente correctas y ocho correctas.

Otra de las tendencias observadas es considerar monedas de valores superiores a 10 céntimos, es decir, monedas de 20 y 50 céntimos, y de 1 y 2 €. También se ha encontrado algún caso en el que se añade la moneda de 10 céntimos. Esto nos hace suponer que los futuros maestros asumen, acertadamente, que el uso de monedas con valores pequeños dificulta el obtener un valor de la probabilidad que encaje en el intervalo [0.6, 0.75].

4.2. Resultados bajo el prisma del MKT

Una vez realizado el análisis del contenido, y sobre la base de las categorías obtenidas en el mismo, se procedió a realizar un análisis de los subdominios CCK, SCK y KC del modelo MKT. A pesar de no ser el foco de este estudio, también se han tenido en cuenta otros subdominios que han podido aparecer durante el análisis de los datos. Para realizar este análisis se ha procedido a relacionar el tipo de respuesta clasificada en las distintas categorías obtenidas en el análisis del contenido con los distintos subdominios del modelo MKT que se hacen evidentes en cada una de ellas. De esta manera, presentamos las evidencias de los subdominios analizados de una forma más simple, combinando el análisis del MKT con el análisis del contenido. Tras la realización de este análisis se han obtenido las categorías que se muestran a continuación.

4.2.1. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria y adaptados al modelo de enunciado

En estas respuestas se pueden observar evidencias de CCK y SCK profundos. En ellas, los futuros maestros fueron capaces de crear un problema matemáticamente correcto, cuyo proceso de resolución fue adecuado y, tanto el problema como su resolución, se adaptaron perfectamente al nivel educativo solicitado y al modelo de enunciado propuesto. Se han obtenido 34 problemas de este tipo. En relación con el KC, sólo se han mostrado evidencias en 6 de ellos, cuando los futuros maestros explicaban el porqué de la elección de su problema con base en los contenidos curriculares. A continuación, podemos ver en E1.a un enunciado que cumple con todas las condiciones solicitadas (para los ejemplos de producciones de futuros maestros se utilizará la notación E, seguida de un número que representa el número de estudiante y, en caso de que sea necesario, un punto y una letra que denota el fragmento correspondiente indexado alfabéticamente).

E1.a: *En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro. Estas pueden ser de 2 €, de 50 céntimos y/o de 20 céntimos; pudiéndose repetir dichos valores en más de una. ¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 €?*

La declaración propuesta en E1.a es válida y apropiada para el nivel educativo solicitado. La futura maestra resuelve el problema, en un primer momento, calculando el número de combinaciones posibles a través de la fórmula de combinaciones con repetición, de modo que obtiene 10 casos posibles. Procede a definir exhaustivamente el espacio muestral, analizando todas las combinaciones posibles y seleccionando cuáles son los casos favorables. Finalmente, aplicando la regla de Laplace, obtiene el valor de probabilidad. Así pues, esta futura maestra muestra evidencias de un CCK profundo.

Su argumentación en relación con la elección de su enunciado es muy rica y proporciona datos interesantes para este análisis, que se muestran en el extracto E1.b, de la misma estudiante:

E1.b: *Teniendo en cuenta que considero que el número posible de combinaciones que se podrían hacer si las 3 monedas pudieran tomar los 8 valores existentes (2 euros, 1 euro, 50 céntimos, 20 céntimos, 10 céntimos, 5 céntimos, 2 céntimos y 1 céntimos) sería muy grande para trabajar con alumnos de 6º de Primaria (tal y como se me pide); decidí reducir dichas posibilidades.*

E1.b muestra una clara evidencia de SCK profundo, ya que esta futura maestra advierte que, considerando todas las monedas, el problema sería muy difícil para el nivel educativo correspondiente. Además, cuando indica que debería reducir el tamaño del espacio muestral, también está mostrando evidencias de una combinación entre CCK, explicando cómo construir un espacio muestral más simple, y SCK, explicando cómo hacer un problema asequible para 6º curso de Educación Primaria.

Dentro de esta rica explicación, también hemos encontrado evidencias de KCT, ya que la alumna declara que está tratando de adaptar el problema a las capacidades de los estudiantes de 6º de Primaria como puede verse en E1.c.

E1.c: *Para no hacerlo excesivamente complicado y teniendo en cuenta el curso para el que está pensado el enunciado, reduje a 3 valores los posibles para usar en las combinaciones.*

Además, como aparece reflejado en E1.d, también muestra evidencias de SCK profundo cuando considera que con menos combinaciones el problema es más apropiado para 6º de Educación Primaria (*"más manejable"*).

E1.d: *De este modo, salen 10 combinaciones, tal y como he citado anteriormente. Este es un número mucho más reducido y, por tanto, manejable.*

Dado que en la respuesta no hay referencias explícitas a las directrices curriculares, no consideramos que haya evidencias de KC, aunque asumimos, a partir de las explicaciones de la futura maestra, que existen indicios de KC. Esto se debe a que trabaja con los contenidos específicos para el nivel solicitado, pero no llega a subir el nivel. Más aún, indica que pueden comenzar a experimentar con contenidos de nivel superior sin llegar a entrar en ellos como podemos observar en el extracto E1.e, en el que se indica que se podrá experimentar realizando combinaciones, pero sin utilizar fórmulas de combinatoria.

E1.e: *De este modo, podrán experimentar [los estudiantes de primaria] con las combinaciones, aun desconociendo la fórmula que determina el número de las mismas.*

4.2.2. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria, pero que no se ajustan al modelo de enunciado propuesto.

En este apartado, nos encontramos ante un caso particular de problemas correctos. En estas respuestas aparecen evidencias de unos profundos CCK y SCK. Se obtuvieron 25 problemas de este tipo (englobados en los 59 problemas correctos pedagógica y matemáticamente). En sólo dos de ellos se presenta alguna evidencia de KC. La producción

E2.a muestra un problema matemáticamente correcto y adecuado al nivel que no se ajusta al modelo de enunciado:

E2.a: *Marcos fue a la librería para comprarse un comic nuevo. Su madre le dio 3 euros, pero el comic cuesta entre 5 y 6 euros. En el bolsillo aún tiene tres monedas que pueden ser de 2 euros, 50 céntimos o 20 céntimos ¿Cuál es la probabilidad de que Marcos tenga más de dos euros en el bolsillo?*

A pesar de no seguir la estructura solicitada para la realización de la tarea, E2.a es adecuado y válido para el nivel educativo exigido. El proceso de resolución, que comienza con la creación del espacio muestral, continúa con la selección de los casos favorables y posibles y finaliza con la aplicación de la definición de Laplace, es adecuado. En esta tarea se observan claras evidencias de CCK y SCK profundos. Cuando esta futura maestra explica su elección del problema, se muestran evidencias de KC al mencionar los contenidos sobre la probabilidad para el nivel educativo correspondiente de Educación Primaria, como el uso de la definición de Laplace, como podemos observar en E2.b:

E2.b: *El enunciado se ajusta a los contenidos visto en Educación Primaria acerca de la probabilidad, permite poner en práctica la Regla de Laplace y establecer el espacio muestral sobre lo que se pide. Puede que resulte algo sencillo, pero permite tanto repasar lo visto sobre probabilidad como comenzar a explicar el tema.*

4.2.3. Problemas parcialmente correctos o incorrectos en los que se muestran evidencias de un CCK pobre, pero en las que el enunciado podría ser adecuado para 6º curso de Educación Primaria.

En este apartado, se hace evidente la falta de CCK cuando los futuros maestros muestran su incapacidad para resolver el problema que ellos mismos han propuesto correctamente. Sin embargo, parece detectarse una cierta evidencia de SCK, dado que los enunciados son válidos, correctos y adaptados al nivel, a pesar de no estar correctamente resueltos. Se obtuvieron 19 problemas de este tipo, de los cuales diez eran parcialmente correctos y nueve eran incorrectos, presentando errores en la resolución del problema.

Sólo dos de los diez parcialmente correctos presentaron evidencias de KC. En E3.a se muestra un ejemplo de este tipo de problema:

E3.a: *En mi bolsillo tengo tres monedas de euro, pero no sé exactamente el valor que tienen. De lo único que estoy segura es de que ninguna de las monedas es menor de 20 céntimos, ya que esas monedas las he metido en la hucha. Teniendo esto en cuenta, ¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?*

El enunciado de E3.a podría ser asequible para 6º curso de la Educación Primaria, mostrando alguna evidencia de SCK. Sin embargo, el proceso de resolución es inadecuado. El espacio muestral se define de manera incorrecta, considerando casos repetidos, lo que hace un total de 64 casos, cuando el número real de combinaciones posibles sería de 20 casos. Por lo tanto, se muestra una falta de CCK. Se evidencia KC en la explicación de la elección del problema en E3.b, cuando se indica el uso de estrategias de resolución adecuadas al nivel solicitado:

E3.b: *Considero que es adecuado porque se resuelve con estrategias adecuadas para el curso de 6º de Primaria ya que he utilizado un diagrama de árbol para su resolución y la regla de LaPlace [sic] que es la definición por excelencia de la probabilidad que el alumnado utiliza.*

Siendo muy rigurosos, también podría considerarse una evidencia de la falta de CCK al denominar "LaPlace" a Laplace, ya que es un autor muy frecuente en los contextos de probabilidad.

4.2.4. Problemas parcialmente correctos en los cuales se muestran evidencias de un SCK deficiente debido a la falta de adaptación del problema a nivel educativo.

En este estudio hemos encontrado un único problema de este tipo. En él se pueden observar evidencias de CCK, ya que el problema propuesto y su solución son matemáticamente correctos, pero a hay una evidente de falta de SCK dado que el futuro maestro no es consciente de que el nivel propuesto en su enunciado es muy superior al nivel que debería plantearse para 6º curso de Educación Primaria. Este problema dificulta enormemente su resolución debido a la forma en la que se ha redactado, como se comprueba en E4.a:

E4.a: *Miguel tiene 3.88 euros en la cartera, repartidos en monedas de euro que nunca se repiten, pero su pantalón no tiene bolsillos así que decide coger tan sólo 3 monedas para ir a comprar 4 paquetes de cromos al kiosko. No recuerda el valor de las monedas que cogió, lo único que recuerda es que ninguna de ellas era de color cobrizo y además recuerda que sumaban más de 1 euro. Si cada paquete de cromos cuesta 0.50 euros: ¿Qué probabilidad hay de que tenga más de 2 euros en su bolsillo?*

Las evidencias de CCK se muestran al saber cómo formular y resolver correctamente el problema matemático. Sin embargo, la complejidad del enunciado, que incluye muchos datos, hace que el problema sea bastante complejo para 6º curso de Educación Primaria mostrando, así, una evidente falta de SCK. Además, en E4.b se aprecia que también presenta algunos fallos en su CCK, ya que habla de "logaritmos" cuando se refiere a "algoritmos".

E4.b: *Me parece adecuado porque no se limita a la simple repetición de un logaritmo [sic] para resolver el problema que se plantea. Podemos conocer los logaritmos [sic] implicados en el problema, pero si no comprendemos el enunciado no será posible continuar con éxito.*

4.2.5. Problemas parcialmente correctos o incorrectos en los que se muestran evidencias de falta de CCK y SCK.

En este apartado, no podemos encontrar evidencias de CCK o SCK. Más aún, lo que verdaderamente se puede apreciar son evidencias de una gran falta de CCK o SCK. Se han obtenido 30 problemas en los que se da esta situación, de los cuales 28 son incorrectos y dos parcialmente correctos. En los casos parcialmente correctos los espacios muestrales son demasiado amplios, lo que implica una falta de adaptación del problema al nivel educativo (el problema va a ser demasiado difícil para 6º curso de Educación Primaria). A continuación, se presentan varios ejemplos de esta clasificación:

E5: *"En mi bolsillo tengo tres monedas de euro..." y quiero saber cuáles pueden ser. Sabiendo que la probabilidad de tener más de 2 € se encuentra entre los valores 0.6 y 0.75, ¿cómo puedo averiguarlo?*

En E5 no se imponen restricciones de ningún tipo. La resolución propuesta no tiene ningún sentido. El espacio muestral sería muy grande si no ponemos ninguna restricción, lo cual hace que el problema no se adapte al nivel. Además, hay muchas soluciones diferentes pues no sabemos realmente qué tenemos que calcular. Por otro lado, el cálculo de la probabilidad no tiene sentido, ya que el problema sólo consiste en comprobar las combinaciones. Todo ello muestra la falta CCK y SCK que presenta la futura maestra.

Por otra parte, tenemos el ejemplo E6:

E6: *En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro, pueden ser de: 1, 2, 5, 10, 20 o 50 céntimos o de 1 o 2 euros. Sé que una de las monedas será de 1 o 2 euros y que también existe la opción de que sean una de las 6 monedas de céntimo citadas anteriormente. Teniendo en cuenta las dos condiciones citadas, obtendríamos de ambas mediante una operación matemática el Nº de casos posibles, ¿cuál es la probabilidad de tener en el bolsillo más de 2 €?*

Bajo las condiciones propuestas en E6, esta futura maestra trabaja con todos los tipos de monedas, por lo que en la práctica no pone ninguna restricción. Además, la solución proporcionada no es correcta, ya que no se consideran todos los casos posibles en el espacio muestral. El problema tampoco se adapta al nivel educativo, por lo que, vuelve a mostrarse una falta de CCK y SCK.

Finalmente, nos encontramos con la producción E7:

E7: *En mi bolsillo tengo tres monedas de euro y cinco canicas se [sic] que las monedas son de dos euros y de cincuenta céntimos, pero no se [sic] cuántas hay de cada. hago [sic] con mis amigos una apuesta en la que metiendo la mano en le [sic] bolso solo dos veces tengo que demostrar que tengo mas [sic] de dos euros. ¿Cuál es la probabilidad de tener en el bolso más de dos euros? Además se [sic] que el resultado esta [sic] entre 0.6 y 0.75.*

El enunciado propuesto en E7 introduce el uso de canicas. Además, se cometen varias faltas ortográficas y de puntuación. La resolución proporcionada no tiene ningún sentido.

El problema se complicaría para 6º grado de la Educación Primaria por lo que se muestra una falta evidente de CCK y SCK.

4.3. Discusión de resultados del primer ciclo de I-A

Como comienzo de este trabajo de investigación se ha creado una tarea para los futuros maestros que cursan su tercer año en el Grado en Maestro/a en Educación Primaria en la Universidad de Oviedo. En ella, los futuros maestros debían crear y resolver un problema de probabilidad adaptado a 6º curso de Educación Primaria. El objetivo principal de la tarea era analizar el conocimiento matemático para la enseñanza de los futuros maestros cuando diseñan, resuelven y justifican la elección de su enunciado de un problema de probabilidad. El análisis de esta tarea, que está fuertemente relacionada con el pensamiento combinatorio, permite determinar qué tipo de conocimiento matemático utilizan los futuros maestros en este contexto escolar específico.

Tras la recogida de datos, se llevó a cabo un análisis de contenido y, a continuación, un análisis de los subdominios del MKT, en relación con el CCK, el SCK y el KC. En este análisis hemos podido observar que más de la mitad de los futuros maestros que participaron en el estudio en este primer ciclo de I-A (56 de ellos), lograron crear un enunciado, junto con su correspondiente resolución, apropiado para 6º curso de primaria. En sus respuestas pudimos encontrar fuertes evidencias de CCK y SCK. Uno de los principales hallazgos descubiertos durante este ciclo de I-A es haber obtenido un gran grupo de futuros maestros que mostraron evidencias de un profundo conocimiento tanto en CCK como en SCK al mismo tiempo, situación que no resulta habitual en estudios a gran escala como este.

En nuestra opinión, este hecho se deriva de dos razones principales: la primera es el tamaño de la muestra y, la segunda, el instrumento. En investigaciones previas en relación con el conocimiento matemático de los futuros maestros sobre la probabilidad se muestra que, o bien el tamaño de la muestra era mucho más reducido que el presentado en este estudio, o bien el instrumento no proporcionaba tanta información cualitativa como ocurre con el propuesto en este trabajo sobre la creatividad en el diseño de una tarea, la habilidad en la resolución de problemas y el razonamiento para explicar el proceso de resolución.

Consideramos que los futuros maestros que no siguieron el modelo de redacción solicitado para crear las afirmaciones, sino que proporcionaron otro tipo de problema, lo resolvieron adecuadamente y explicaron su proceso creativo, muestran evidencias de SCK, porque fueron capaces de desarrollar un problema completo y correcto sin necesidad de seguir ningún modelo. El hecho de que no se ajustaran al modelo solicitado puede ser visto como una falta de CCK, pero también puede estar estrechamente relacionado con problemas de comprensión lectora. En cualquier caso, creemos que esta puede ser la forma en que puede movilizarse el SCK a pesar de mostrarse evidencias de falta de CCK.

Sin embargo, para casi la mitad del grupo analizado, los resultados obtenidos no fueron suficientemente buenos. En ellos podemos observar una falta de CCK o de SCK e incluso, en algunos casos, una falta de ambos. Esto demuestra que los conocimientos de los futuros maestros relacionados con la probabilidad clásica y su didáctica no son suficientes. Centrándonos en este grupo de respuestas, de modo consistente con Mohamed (2012), hemos detectado que, tanto la enseñanza de la probabilidad como la probabilidad en sí misma, son complicadas para un grupo demasiado amplio de futuros maestros. En este grupo de respuestas se observaron dificultades para comprender los conceptos probabilísticos, es decir, se muestra una falta de CCK en el campo de la probabilidad. En particular, el principal problema detectado fue la falta de razonamiento combinatorio, ya que, en muchos casos, los futuros maestros no fueron capaces de determinar las diferentes combinaciones de monedas, tanto posibles como favorables. Este resultado encuentra respaldo en Liu y Thompson (2007), Mohamed y Ortiz (2012), Mohamed (2012), Batanero, Gómez-Torres *et al.* (2014) y Estrada y Batanero (2020), que indican que los futuros maestros cometen los mismos sesgos que los estudiantes de primaria en su razonamiento probabilístico. Al mismo tiempo, se han detectado situaciones en las que los futuros maestros no pudieron determinar correctamente el espacio muestral, como ya indicaban Mohamed y Ortiz (2012) y Mohamed (2012). Parece evidente, por lo tanto, que el tratamiento del azar y el uso de la combinatoria suponen una complicación tanto para el conocimiento de la materia como para su enseñanza, frente a las matemáticas deterministas, con las cuales los futuros maestros suelen estar más familiarizados. Esto da lugar a un conocimiento del contenido y un conocimiento pedagógico limitados en este campo en los futuros maestros, siendo este resultado coherente con las conclusiones de Contreras, Batanero *et al*. (2011).

Gómez-Torres *et al.* (2016) afirmaron haber encontrado bajos niveles de CCK combinados con una falta de evidencia de SCK, lo que sugiere la necesidad de enfatizar ambos subdominios en la formación de maestros. En este estudio sólo se detectó un caso en el que se observaron evidencias de CCK en combinación con una falta de evidencia de SCK.

También se advierte la falta de evidencias sobre CCK y SCK, algo que ya se indicaba en Contreras, Batanero *et al*. (2011). Resultaría lógico pensar que la falta de evidencia de CCK implicaría una falta de evidencia de SCK, ya que un profesor que no dispone de un conocimiento matemático en un determinado contenido no debería saber cómo enseñarlo. No obstante, en este estudio hemos encontrado un grupo considerable de futuros maestros, con 19 respuestas, que mostraron evidencias de SCK al crear problemas válidos y adecuados al nivel educativo solicitado, pero que mostraron una falta de CCK al no saber cómo resolver los problemas que ellos mismos habían creado. Pensamos que este hecho se debe a cómo está formulada la tarea. Dado que en el enunciado propuesto se exige que el problema comience con la frase "En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro..." y termine con "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?", es posible que esta restricción en la libertad de creación del enunciado favorezca, en gran medida, la creación de un enunciado válido para los alumnos de 6º curso de Educación Primaria, incluso cuando se hace evidente la falta de CCK. Es decir, al ofrecerles parte del enunciado, los futuros maestros sólo tienen que imponer una serie de restricciones para evitar el caso más extremo de 120 combinaciones. Esto también justificaría la falta de evidencias de CCK observada en el proceso de resolución de problemas. Los futuros maestros, siguiendo la redacción de la tarea, pueden introducir restricciones válidas que hagan el problema apropiado, pero esto no implica que tengan que saber cómo resolverlo.

Por supuesto, para crear el problema es necesario que los futuros maestros movilicen su SCK. No solo eso, sino que también deben movilizar su KC, pero hemos encontrado un número muy limitado de evidencias explícitas a este último subdominio. Es posible que los futuros maestros hayan movilizado su KC pero que lo hayan considerado demasiado obvio para hacerlo explícito, pues es uno de los requerimientos de la tarea propuesta, aunque no disponemos de indicios para soportar esta hipótesis.

Por otra parte, las explicaciones aportadas por los futuros maestros, tanto en relación con el proceso creativo como con la adecuación al nivel, fueron muy parcas y concisas y, en la mayoría de los casos, no lograron aportar ninguna información relevante. Bolero (1999) ya señaló que a los futuros maestros les resultaba difícil hacer explicaciones matemáticas, especialmente cuando se trataba de explicar por qué realizaban una u otra tarea o una demostración. Solicitando a los futuros maestros que nos indiquen esa justificación, pretendíamos analizar el subdominio SCK. Sin embargo, dada la brevedad de las explicaciones, así como el escaso contenido relevante, no se pudieron observar evidencias de SCK. En resumen, a pesar de haber obtenido buenos resultados en la mitad de los casos analizados, todavía hay muchos futuros maestros que presentan dificultades, tanto en el desarrollo de sus habilidades matemáticas como didácticas.

Trabajar con los futuros maestros en la explicación del proceso que han seguido para la creación del problema (Bolero, 1999), pidiendo la justificación de los pasos seguidos, como hacemos en esta tarea, tiene gran interés puesto que refuerza tanto los procesos de comunicación matemática como la metacognición. Pero hemos comprobado, en este primer ciclo, que las argumentaciones y explicaciones proporcionadas han sido muy pobres.

Estos resultados encontrados durante el primer ciclo de I-A han sido parcialmente publicados en Alonso-Castaño, Alonso, Mellone y Rodríguez-Muñiz (2019) y Alonso-Castaño *et al.* (2021), indicando el análisis realizado y la clasificación de respuestas obtenida, así como los bajos niveles de CCK y SCK encontrados, y las escasas evidencias al KC.

A raíz de los resultados, y a la vista de las conclusiones que hemos podido obtener de este primer ciclo de I-A, se procedió a introducir alguna modificación en la redacción de la tarea. Tras presentar la situación y las conclusiones en el grupo de trabajo de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria de la SEIEM, y apoyados por las opiniones aportadas por el grupo de expertos, decidimos modificar el enunciado eliminando las restricciones que indicaban cómo debía de empezar y finalizar el problema ("En mi bolsillo tengo 3 monedas de euro…" y "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2€?"). También eliminamos la restricción del intervalo de soluciones. Con esta medida pretendíamos dejar más libertad a los futuros maestros en la creación de su problema. De esta forma, tratamos de confirmar si aquellos casos que muestran evidencias de SCK, pero falta de CCK aparecieron por la estructura del enunciado, lo que resultó ser uno de los resultados más sorprendentes obtenidos en este primer ciclo de I-A.

En un primer momento, suponíamos que las explicaciones aportadas por los futuros maestros sobre su proceso creativo y la elección de ese tipo de problema podrían ayudarnos a identificar la evidencia de su SCK y KC. Sin embargo, las pocas explicaciones proporcionadas son de poca relevancia, por lo que también fue necesario modificar la tarea para ayudar a los futuros maestros a ofrecer explicaciones más precisas. Para ello, se propuso que, además de diseñar y resolver el problema, tuvieran que definir unos indicadores de evaluación. El fin de esta nueva instrucción dentro de la tarea sería que, sabiendo que posteriormente iban a ser evaluados bajo unos indicadores de evaluación, se viesen obligados a aportar más argumentos sobre su diseño y resolución del problema, y sobre sus elecciones y justificaciones. Todas estas modificaciones dieron paso a un segundo ciclo de I-A con un plan modificado.

CAPÍTULO 5

Segundo ciclo de investigación-acción

En este capítulo describiremos el segundo ciclo de I-A, desarrollado durante el curso 2018/2019. Tras haber completado el primer ciclo de I-A y, en función de los resultados obtenidos en el mismo, que hemos descrito previamente en el capítulo anterior, desarrollamos un plan revisado que supone la modificación de la tarea inicial.

Recordemos que las modificaciones introducidas incluyen plantear un enunciado más abierto en la tarea, de manera que sean los propios futuros maestros los que creen el enunciado completo, desde cero, sin restringir el intervalo de soluciones ni la pregunta final del mismo. Para que sirva cómo un mismo hilo conductor en todos los problemas, seguimos proponiendo un problema en el que debiesen utilizar al menos 3 monedas de euro de distintos valores.

Por otro lado, y dado que en el primer ciclo de I-A se encontraron varias respuestas en las que los futuros maestros confundieron la expresión "3 monedas de euro" con "tener 3 monedas de 1 €", se decidió indicar que considerasen "3 monedas de la unidad monetaria *euro*" (de cualquier valor: 1 cent., 2 cents., 5 cents., 10 cents., 20 cents., 50 cents., 1 €, 2 €).

En este ciclo, y dado que en el anterior las explicaciones fueron muy breves, se introdujo un nuevo apartado en el que se solicitó a los futuros maestros que incluyesen unos indicadores de evaluación para valorar el problema creado. De esta manera, pretendíamos que aportasen unas explicaciones más extensas dado que, posteriormente, iban a ser evaluados por sus compañeros empleando dichos indicadores.

Los indicadores debían contemplar, al menos, los siguientes aspectos: contenido matemático, contenido pedagógico, adaptación al nivel educativo, claridad de las explicaciones y de la descripción del proceso creativo. Al introducir un indicador sobre el contenido matemático, pretendíamos que los futuros maestros desarrollasen sus explicaciones sobre la resolución del problema. Al introducir un indicador sobre el contenido pedagógico, pretendíamos que los futuros maestros desarrollasen explicaciones sobre la adecuación del problema, tanto en la forma de plantear el enunciado como en la forma de resolver dicho problema. El indicador en relación con la adaptación al nivel educativo pretendía que los futuros maestros desarrollasen una explicación de por qué el problema se encontraba adaptado al nivel educativo. Por último, el indicador sobre la claridad de las explicaciones y de la descripción del proceso creativo, pretendía que los futuros maestros reflexionasen sobre cómo llegaron a obtener el problema que presentaron finalmente. Además, se incluyó que pudiesen añadir otros aspectos, si lo consideraban oportuno para su trabajo.

Finalmente, para tratar de paliar la falta de evidencias de KC, volvimos a realizar la misma pregunta, pero separada en dos pequeños subapartados, remarcados en negrita, incidiendo en la importancia de que se aportase esa explicación, con el fin de obtener más información sobre la elección del enunciado y la adecuación a nivel. De esta manera, y tras todas las consideraciones anteriores para modificar el enunciado del primer ciclo de I-A, se pone en marcha el plan revisado proponiendo el siguiente enunciado, implementado durante el segundo ciclo de I-A:

“Situación-problema:

*Consideremos la unidad monetaria “euro”. Dentro del euro, las monedas pueden ser de **1, 2, 5, 10, 20 o 50 céntimos o de 1 o 2 euros**.*

*Plantea una situación problemática utilizando estos tipos de monedas como punto de partida, **empleando al menos 3 monedas**, y formula una pregunta que requiera calcular una probabilidad para darle respuesta.*

*El problema planteado deberá estar **adaptado al curso de 6º de Primaria**.*

Por ello, la redacción ha de ser:

- ***No trivial**: no pueden incluirse tantas limitaciones como para reducir las posibilidades a un único caso y convertir el problema en algo trivial.*
- ***Factible**: no pueden usarse tantas restricciones que sea casi imposible cumplirlas, de modo que sea muy complicado que esa situación ocurra en la vida real.*
- ***Verosímil**: el enunciado ha de ser realista, próximo al contexto cotidiano del alumnado del curso mencionado.*

Además, debes explicar:

- ***Por qué has elegido ese enunciado***
- ***Por qué consideras que es adecuado al nivel educativo**.*

*También debes incluir una **breve descripción** de qué pasos seguiste para acabar llegando a esa conclusión (breve descripción del **proceso creativo** y de las decisiones tomadas).*

<u>Indicadores de evaluación:</u>

En este apartado de la tarea, debes definir unos indicadores para evaluar la tarea realizada en la parte 1 (no es necesario definir toda la rejilla o matriz de evaluación con sus respectivos niveles de concreción, sólo los indicadores).

*Los indicadores deben ser **claros**, **enunciados sin ambigüedad y con precisión**, y deben ser **respondidos con facilidad**, intentando que la respuesta se pueda basar en la evidencia observada a partir del trabajo realizado. Además, deben contemplar, al menos, los siguientes aspectos:*

- *contenido matemático*

- *contenido pedagógico*
- *adaptación al nivel educativo considerado*
- *claridad de las explicaciones y de la descripción del proceso creativo*
- *añadir otros aspectos si se considerase oportuno*

En resumen, debes definir unos indicadores que permitan evaluar si la tarea que se ha realizado es adecuada y si se ha explicado correctamente el proceso."

5.1. Categorías del análisis del contenido

Una vez finalizado el proceso de revisión del plan se aplicó el plan revisado con el grupo de futuros maestros matriculados en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III, durante el curso 2018/2019. Como ocurrió en el primer ciclo de I-A, la realización de la tarea, de carácter obligatorio, y que formaba parte de la calificación final de la asignatura, se realizó a través del campus virtual universitario, volviendo a plantearse en dos fases, pero aplicando únicamente las modificaciones a la primera fase de la tarea, sobre la que centramos este trabajo.

De un total de 240 alumnos que podrían haber presentado su tarea se recogieron 139 respuestas durante el segundo ciclo de I-A (véase Tabla 7). De estas 139 respuestas tuvieron que descartarse tres que resultaron ser iguales (los futuros maestros se copiaron entre ellos) y una respuesta que no realizaba la tarea pedida, sino una planificación de una sesión de clase. Por lo tanto, el tamaño muestral para este segundo ciclo de I-A es de $N = 135$ respuestas válidas.

Para realizar el análisis de los datos recogidos empleamos la misma metodología que en el primer ciclo de I-A (análisis del contenido clasificando las respuestas en correctas, parcialmente correctas e incorrectas y análisis bajo el prisma del MKT sobre los subdominios CCK, SCK y KC). En este caso, esperábamos que apareciesen nuevas categorías dentro de cada uno de los tipos de respuestas del análisis del contenido. A continuación, puede observarse la relación de tipos de respuestas con sus correspondientes especificaciones en este segundo ciclo de I-A:

- **Correctas:** tanto el enunciado del problema como su resolución son pedagógica y matemáticamente correctas.
  - Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel.
  - Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel, pero demasiado sencillas (trivial).
- **Parcialmente correctas:** en esta clasificación distinguimos entre tres tipos de respuestas que no son correctas, pero tampoco son completamente incorrectas.
  - **En relación con el enunciado:** en estos casos los problemas están matemáticamente bien resueltos, pero presentan fallos en la adaptación del enunciado.
  - **En relación con el proceso de resolución del problema:**
    - Problemas matemáticamente mal resueltos o con errores, pero que se adaptan al nivel:
      - Errores conceptuales sobre probabilidad.
      - Errores de cálculo no relacionados con conceptos probabilísticos.
    - Errores relacionados con un nivel inadecuado en notación durante la resolución (notación empleada en cursos superiores).
    - El problema no presenta resolución, pero se adapta al nivel:
      - Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel.
      - Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel con más de una pregunta que van aumentando en dificultad.
      - Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel, pero su resolución es trivial.
  - **En relación con el enunciado y al proceso de resolución del problema:**
    - Problemas con ambigüedades en el enunciado que no impiden la resolución estando el problema adaptado al nivel, pero sin presentar resolución.

- Problemas con dos apartados, uno muy fácil y otro muy difícil para el nivel, estando el apartado fácil bien resuelto y el apartado difícil mal resuelto.

- **Incorrectas:**
  - Enunciado bien redactado, pero problema mal resuelto y no adaptado al nivel.
  - Enunciado ambiguo o carente de sentido y sin resolución:
    - El enunciado presenta ambigüedades y/o es demasiado difícil para el nivel.
    - El enunciado carece de sentido y/o no se puede resolver con la información aportada.
  - Enunciado y resolución incorrectos, problema no adaptado al nivel.
  - No se presenta un problema de probabilidad utilizando los valores de las monedas.
  - No se presenta un problema que se resuelva calculando una probabilidad.

En la Tabla 9 se muestra un desglose del número de respuestas encontradas en cada apartado de la clasificación. En el siguiente apartado de este capítulo se ejemplificarán los tipos de respuestas encontradas en relación con los subdominios del modelo MKT considerados para este trabajo en función de los tipos de respuestas de esta nueva clasificación.

Tabla 9

Clasificación de Respuestas Obtenida en el Análisis del Contenido del Segundo Ciclo de I-A

<table>
<tr><th>TIPO DE RESPUESTA</th><th colspan="3">SUBTIPO DE RESPUESTA</th><th>RECUENTO TOTAL</th><th>TOTAL</th></tr>
<tr><td rowspan="2">CORRECTAS</td><td colspan="3">Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel</td><td>23</td><td rowspan="2">28</td></tr>
<tr><td colspan="3">Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel, pero con resolución trivial</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="6">PARCIALMENTE CORRECTAS</td><td>En relación con el enunciado</td><td colspan="2">Bien resueltos, pero con fallos en la adaptación del enunciado</td><td>1</td><td rowspan="6">54</td></tr>
<tr><td rowspan="5">En relación con el proceso de resolución del problema</td><td rowspan="2">Matemáticamente mal resueltos o con errores, pero adaptados al nivel</td><td>Errores conceptuales sobre probabilidad</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Errores de cálculo no relacionados con conceptos probabilísticos</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Errores relacionados con un nivel inadecuado en notación durante la resolución</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">El problema no presenta resolución</td><td>Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Enunciado bien redactado y problema adaptado al</td><td>9</td></tr>
</table>

TIPO DE RESPUESTA	SUBTIPO DE RESPUESTA		RECUENTO TOTAL	TOTAL
PARCIALMENTE CORRECTAS		nivel con más de una pregunta que van aumentando en dificultad		54
		Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel, pero su resolución es trivial	8	
	En relación con el enunciado y el proceso de resolución del problema	Problemas con ambigüedades en el enunciado que no impiden la resolución estando el problema adaptado al nivel, pero sin resolución	4	
		Problemas con dos apartados, uno muy fácil bien resuelto y uno muy difícil para el nivel mal resuelto	2	
INCORRECTAS	Enunciado bien redactado, pero problema mal resuelto y no adaptado al nivel		2	53
	Enunciado ambiguo o carente de sentido y sin resolución	El enunciado presenta ambigüedades y/o es demasiado difícil para el nivel	13	
		El enunciado carece de sentido y/o no se puede resolver con la información aportada	5	
	Enunciado y resolución incorrectos, problema no adaptado al nivel		14	
	No se presenta un problema de probabilidad utilizando los valores de las monedas		7	
	No se presenta un problema que se resuelva calculando una probabilidad		12	

Tras la recolección de los datos y la realización del análisis del contenido hemos podido clasificar las respuestas de la siguiente manera:

- **Correctas.** En esta ocasión, dentro de este grupo, podemos distinguir dos tipos de respuestas correctas:
  - **Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel:** en ellas se siguen perfectamente las instrucciones del enunciado propuesto en esta investigación.
  - **Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel, pero triviales:** en este grupo de respuestas, el enunciado planteado, a pesar de ser adecuado al nivel, resulta demasiado sencillo reduciendo las posibilidades a un único caso y convirtiendo el problema en trivial. En las instrucciones de la tarea se especificaba claramente que no podían incluirse tantas limitaciones como para que el problema se convirtiese en un problema trivial. Por lo tanto, y a pesar de ser problemas matemáticamente

correctos y adecuados al nivel educativo solicitado, no cumplen una de las principales instrucciones del enunciado: el problema no debe ser trivial.

- **Parcialmente correctas**. Como comentábamos anteriormente, durante el segundo ciclo podemos distinguir entre tres tipos de respuestas parcialmente correctas:
  - **En relación con el enunciado:** se ha encontrado un único problema que presenta errores en relación con el enunciado. Este problema está matemáticamente bien resuelto, pero no se adapta a nivel educativo solicitado, sino que es de nivel superior. Esto se debe a una ambigüedad presentada en el enunciado que no indica si hay o no reposición, por lo que, al resolver el problema tendríamos que considerar ambas situaciones, convirtiéndose el espacio muestral en un espacio demasiado grande e inasequible para el nivel de 6º de Educación Primaria.
  - **En relación con el proceso de resolución del problema:** entre estas respuestas podemos distinguir problemas que se encuentran matemáticamente mal resueltos o presentan errores, pero se adaptan al nivel educativo, problemas que muestran notación inadecuada en el proceso de resolución y problemas que se adaptan al nivel educativo, pero no presentan resolución. Cada uno de esos bloques incluye sus propios tipos de errores, que se muestran a continuación:
    - **Problemas matemáticamente mal resueltos o con errores, pero que se adaptan al nivel**:
      - **Errores conceptuales sobre probabilidad:** en las respuestas de este tipo se presentan errores combinatorios, se plantea el espacio muestral de forma inadecuada, se plantea de forma incorrecta la definición clásica de la probabilidad (aplican de forma errónea la regla de Laplace) o se expresa la probabilidad como un porcentaje.
      - **Errores de cálculo no relacionados con conceptos probabilísticos:** se presentan errores en el cálculo de las fracciones.
    - **Errores relacionados con un nivel inadecuado en la notación durante la resolución:** la notación utilizada para resolver el problema es inapropiada ya que aún no se maneja en 6º de Primaria, sino que es de nivel superior. Sin

embargo, tanto el enunciado como la resolución serían completamente correctos y adecuados, dejando de lado dicha notación (como el uso de uniones e intersecciones o la utilización de la fórmula de la probabilidad condicionada).

- **El problema no presenta resolución, pero se adapta al nivel:**
  - > **Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel:** en estas respuestas el enunciado es correcto y se encuentra bien redactado, siendo el problema adecuado para el nivel educativo solicitado, pero las respuestas no presentan resolución.
  - > **Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel con más de una pregunta que van aumentando en dificultad:** este caso resulta parecido al anterior, pero en vez de plantear una única pregunta los futuros maestros plantean varias preguntas que van aumentando en dificultad. Sin embargo, a pesar de plantear un enunciado bien redactado, con sentido y adaptado al nivel educativo, tampoco presentan resolución.
  - > **Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel, pero trivial:** si estos problemas estuviesen resueltos serían triviales, pues se restringen a un único caso contradiciendo unas instrucciones principales propuestas en el enunciado de la tarea.

▪ **En relación con el enunciado y el proceso resolución del problema:** se han detectado 6 respuestas parcialmente correctas que presentan errores tanto en el enunciado como en la resolución, pero sin llegar a poder considerarse incorrectas. Podemos distinguir entre los siguientes tipos de errores:

- **Problemas con ambigüedades en el enunciado que no impiden la resolución estando el problema adaptado al nivel, pero sin presentar resolución:** si se subsanasen dichas ambigüedades, el problema pasaría a ser correcto y adecuado al nivel. En estas respuestas no se presenta proceso de resolución.

- **Problemas con dos apartados, uno muy fácil bien resuelto y uno muy difícil para el nivel mal resuelto:** el principal error en el apartado que está mal resuelto es de tipo combinatorio.

- **Incorrectas.** Se han considerado respuestas incorrectas a todas aquellas que presentan tantos errores, o errores lo suficientemente graves, como para no poder ser consideradas respuestas parcialmente correctas. En este grupo de respuestas podemos distinguir los siguientes errores:
  - **Enunciado bien redactado, pero problema mal resuelto y no adaptado al nivel.**
  - **Enunciado ambiguo o carente de sentido y sin resolución:** se ha detectado un total de 18 respuestas en las que el enunciado podía resultar ambiguo, carecer de sentido y, además, no presentaban resolución. Dentro de este bloque podemos distinguir entre dos tipos:
    - **El enunciado presenta ambigüedades y/o es demasiado difícil para el nivel:** las ambigüedades complican el nivel del problema sobremanera, y lo hacen no apto para alumnado de 6º de Primaria. Incluso sin presentar esas ambigüedades, el problema sería demasiado difícil para este nivel educativo. Además, no se aporta resolución.
    - **El enunciado carece de sentido y/o no se puede resolver con la información aportada:** además de carecer de sentido y no ser posible resolverse con la información que se aporta, estos problemas aparecen sin resolución.
  - **Enunciado y resolución incorrectos, problema no adaptado al nivel:** en estas respuestas tanto el enunciado como la resolución, presentaban errores matemáticos y también errores pedagógicos, al no adaptarse dichos problemas al nivel educativo.
  - **No se presenta un problema de probabilidad utilizando los valores de las monedas:** se plantean problemas de probabilidad de tipo “cara-cruz”, por lo que no siguen las instrucciones propuestas en el enunciado de la tarea.

- **No se presenta un problema que se resuelva calculando una probabilidad:** en su mayoría se trata de problemas aritméticos de compraventa utilizando monedas, pero sin calcular probabilidades. De nuevo, no se siguen las instrucciones propuestas en el enunciado de la tarea.

Al igual que ocurría en el primer ciclo de I-A, los casos en los que el problema no se encuentra adaptado a nivel educativo se deben a una falta de restricciones sobre la situación inicial, lo que hace que el espacio muestral sea de un tamaño demasiado grande como para ser manejado por estudiantes de 6º de Educación Primaria.

La mayoría de los problemas presentados se centran en un contexto cercano al alumnado en el que el protagonista es un niño o una niña que debe sacar monedas del monedero, del bolsillo o de la cartera para poder pagar en una tienda. Los contextos más empleados son la compra de chucherías, la compra de cromos, o pequeños recados, como comprar el pan o comprar leche. También se han encontrado algunos casos en los que se presentan pequeños juegos de azar para los que el valor de las monedas sacadas de un bolsillo o una bolsa determinarán quién gana el premio del juego. En esta ocasión, podemos ver una mayor tendencia de los futuros maestros a utilizar pocas monedas y casos con muchas restricciones que reducen la resolución del problema a un único caso. La tendencia principal y más significativa de este ciclo es la creación problemas de un nivel demasiado sencillo. Sorprende sobremanera la cantidad de futuros maestros que crearon problemas no relacionados con la probabilidad o con las instrucciones del enunciado de la tarea en la que se pide crear un problema de probabilidad utilizando los valores de las monedas.

5.2. Resultados bajo el prisma del MKT

Una vez concluido el análisis del contenido y basándonos en las categorías obtenidas en el mismo procedemos realizar un análisis de los subdominios CCK, SCK y KC del modelo MKT. También se ha tenido en cuenta, dado que se ha hecho evidente en algunas de las respuestas aportadas por los futuros maestros, y a pesar de no ser el foco principal del estudio, el subdominio KMH, referido a las relaciones entre diversos contenidos del currículo de la asignatura. En este caso, a la relación entre el cálculo de probabilidades y las operaciones con fracciones y a conceptos como par e impar y múltiplos de un número. Al igual que se hizo para el primer ciclo de I-A, para realizar este análisis en relación con los subdominios del modelo MKT, se ha procedido a relacionar el tipo de respuesta clasificado en las distintas categorías del análisis del contenido con los distintos subdominios que se hacen evidentes en cada una de ellas, presentando así las evidencias de los subdominios como una combinación entre el análisis del MKT con el análisis del contenido. Durante este segundo ciclo se han obtenido las categorías que se muestran en los siguientes apartados.

5.2.1. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria (TIPO 1)

Al igual que ocurría durante el primer ciclo de I-A, nos encontramos ante un grupo de respuestas que muestran evidencias de CCK y SCK profundos mostrando su capacidad para crear un problema matemáticamente correcto y con un proceso de resolución adecuado, adaptándose tanto matemática como pedagógicamente al nivel educativo. De estos 23 problemas, quince muestran evidencias de KC, al indicar que para la creación de su problema se basan en el Bloque 5 del área de matemáticas del currículo de Educación Primaria, haciendo referencia a la utilización de la probabilidad clásica, la regla de Laplace, o la utilización de diagramas de árbol para la resolución del problema. En los ocho problemas restantes que no muestran evidencias de KC, los futuros maestros han conseguido crear, resolver y adaptar el problema al nivel educativo solicitado, por lo que, a pesar de no mostrar evidencias de ese conocimiento del currículo haciéndolo explícito en sus explicaciones, parecen conocer sus contenidos dado que, de lo contrario, no habían sido capaces de realizar dicha tarea, por lo que se muestran indicios de KC. A continuación, en E8.a podemos observar una producción de las clasificadas en este bloque:

E8.a: *Julia se dirige a comprar el pan, sabiendo que lleva en la cartera un total de 6 monedas, que son las siguientes: 1 cent, 2 cent, 5 cent, 50 cent, 1 euro y 2 euros. Cuando le llega el turno de pagar, y para no perder mucho tiempo, decide sacar las monedas de su cartera sin mirar, deseando sacar las monedas correctas para no hacer esperar a la gente que hay detrás. Entonces, ¿qué probabilidad hay de que saque una moneda par? Independientemente del resultado de la pregunta anterior, ¿qué probabilidad hay de sacar una moneda de céntimo y que además sea múltiplo de 5?*

Solución:

Para responder a las dos cuestiones anteriores, y tal como se indica en el apartado de contenidos de probabilidad para 6º de Primaria en el currículo, utilizaremos la regla de Laplace, que consiste en indicar el espacio muestral para después dividir los casos favorables entre los casos posibles. Por tanto:

Espacio muestral= {1 cent, 2 cent, 5 cent, 50 cent, 1 euro y 2 euros}

a) *Casos favorables: 3*

Casos posibles: 6

P (moneda par) = 3/6 lo que simplificado es igual a 1/3

b) *Casos favorables: 2*

Casos posibles: 6

P (céntimo y múltiplo de 5) = 2/6 lo que simplificado es igual a 1/3

Como se puede observar, el enunciado de E8.a es válido y adecuado para el nivel educativo solicitado. La resolución también es adecuada explicitando, en primer lugar, el espacio muestral y, a continuación, aplicando la regla de Laplace, indicando cuántos son los casos favorables y cuántos son los casos posibles. Aunque no lo señala, sería conveniente explicitar cuáles son los casos favorables. Se puede determinar, por tanto, que este futuro maestro muestra evidencias de CCK y SCK profundos.

Además, en el caso de E8.a podemos observar indicios de KMH, al preguntar por contenidos que ya deberían conocer como el concepto de par y el concepto de múltiplo. En relación con esto, en su explicación de la elección del problema y del proceso creativo indica lo que se muestra en E8.b:

E8.b: *Me parece que es adecuado a nivel educativo puesto que, además de trabajar la probabilidad, lo hacen con las monedas, que es algo que tendrán que saber manejar día a día y que con este problema lo hacen.*

En E8.b no se hace referencia a la relación de esos contenidos con la probabilidad, pero sí hace referencia a los conocimientos que deben tener sobre el manejo de las monedas y su relación con el cálculo de probabilidades. Por otro lado, también podemos observar en E8.c cómo trabaja sobre los contenidos del currículo para el curso solicitado y explica que, como no estaba seguro, consultó el currículo para adecuar su problema al mismo, lo cual muestra evidencias de KC:

E8.c: *Además, para asegurarme de que iba a utilizar el método correcto de resolución, en este caso la regla de Laplace, miré el currículo de Educación Primaria, en el Bloque 5 de los contenidos de estadística y probabilidad y vi que trabajaban con ella.*

En E8.d también se muestran indicios de KCT, al intentar adaptar el problema a las capacidades de los estudiantes de 6º de Primaria, con lo que no solo encontramos evidencias de otros subdominios como el KMH:

E8.d: *Al principio pensaba plantear otro tipo de problema, uno en el que una persona repartía su dinero con otras tres personas y que requería hacer alguna operación más para calcular la probabilidad, pero teniendo en cuenta que todavía empiezan en sexto a calcularlas (según el currículo, pues en la realidad podemos encontrarnos con que ni si quiera lleguen a ello como ocurre en muchos centros) me parecía un poco complejo y decidí cambiarlo a algo más sencillo.*

Resulta interesante la explicación de E8.d, ya que, además, hace referencia a un problema bastante extendido en relación con este contenido de la asignatura y es que, en muchas ocasiones, es un contenido que ni siquiera llega a impartirse (muchas veces por falta de tiempo) debido a la posición que ocupa en los libros de texto, situándose al final de estos.

5.2.2. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria cuya resolución se restringe a un único caso convirtiendo el problema en trivial (TIPO 2)

En este apartado hemos detectado cinco problemas de entre los cuales, cuatro de ellos presentaban evidencias de KC al indicar que se basan en los contenidos del currículo para la creación de los problemas, explicitando dichos contenidos (en especial, el uso de la regla de Laplace). Los problemas correspondientes a este bloque de respuestas presentan un nivel tan sencillo que pueden considerarse triviales, ya que las posibilidades se reducen a un único caso. En estas respuestas aparecen evidencias de CCK y SCK, pero el plantear un problema de nivel inferior al solicitado, los futuros maestros muestran falta de SCK. Si bien es cierto que el problema es resoluble por parte de estudiantes de 6º curso de Educación Primaria, la tarea solicitaba un problema de nivel algo superior. El ejemplo E9 muestra el enunciado de un problema de los clasificados en este bloque:

E9: *Problema: La madre de Daniel le manda al supermercado para que compre una barra de pan y un paquete de galletas. Para ello, en su monedero mete una moneda de 1 euro, una de 2 euros, una de 20 céntimos y, por último, dos de 50 céntimos. Cuando se dirige a caja para pagar, ¿cuál es la probabilidad de que la primera moneda que saque Daniel de su monedero sea una moneda de 1 euro? Intenta resolverlo de todas las maneras que puedas:*
El resultado del problema sería 1/5.

El problema planteado en E9 es asequible para el alumnado de 6º curso de Educación Primaria. Su resultado es correcto, aunque faltaría un poco más de explicación sobre cómo se ha llegado a ese resultado. Pero en él puede verse cómo la resolución se reduce a un único caso, por lo que el problema no cumple una de las condiciones solicitadas en el enunciado de la tarea: el problema ha de ser no trivial.

En E10 podemos ver que ocurre lo mismo, tanto el enunciado como la resolución son correctos, pero la resolución se obtiene directamente del enunciado:

E10: ***Enunciado:*** *Clara ha ido guardando en una hucha las monedas que le han dado sus padres a lo largo de una semana, y ha ido apuntando en un papel cada una de ellas. Sabe que tiene 10 monedas de 1 euro, 5 monedas de 2 euros, 9 monedas de 50 céntimos y 6 monedas de 20* *céntimos. Calcula la probabilidad de que la primera moneda extraída de la hucha sea de 50 céntimos.*

Resolución: *Utilizar la fórmula de Laplace:* $Probabilidad = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$

Casos posibles: 10 (monedas de 1 euro) + 5 (monedas de 2 euros) + 9 (monedas de 50 cent) + 6 (monedas de 20 cent) = 30 monedas en total

Casos favorables = 9 monedas de 50 céntimos

$P(sacar\ una\ moneda\ de\ 50\ cent) = \frac{9}{30} = 0.3$

5.2.3. Problemas parcialmente correctos en los cuales se muestran evidencias de un SCK deficiente debido a la falta de adaptación del problema al nivel educativo (TIPO 3)

Se han encontrado tres problemas de este tipo, que muestran evidencias de un CCK profundo, pues tanto el problema propuesto como su resolución son matemáticamente correctos. Sin embargo, se muestra una gran falta de SCK al proponer un problema cuyo nivel es muy superior al de 6º curso de Educación Primaria. En las explicaciones aportadas por una futura maestra en E11 se indica que se utilizan los diagramas de árbol y la regla de Laplace para resolver el problema, haciendo hincapié en que se trata de contenidos que se trabajan en 6º curso de Educación Primaria mostrando, de esta manera, también evidencias de KC.

E11: ***Problema:*** *Juan esta junto a un pozo de los deseos, y quiere tirar dos monedas. En su bolsillo tiene dos monedas de 50 céntimos, una moneda de 5 céntimos, tres de 20 céntimos y cuatro de 10 céntimos. Calcula la probabilidad que tiene cada moneda de salir la primera y la probabilidad de cuál sería la segunda.*

Solución

Mediante diagramas de árbol, se ha de obtener la respuesta al problema.
Diagrama de árbol:

1/10 5 ---------- 10 2/9
---------- 20 3/9
---------- 50 4/9

3/10 20 ---------- 5 1/9
---------- 10 4/9
---------- 20 2/9
---------- 50 2/9

4/10 10 --------- 5 1/9
--------- 10 3/9
--------- 20 3/9
--------- 50 2/9

2/10 50 ---------- 5 1/9
---------- 10 4/9
---------- 20 3/9
---------- 50 1/9

El problema de E11 podría parecer sencillo, a priori, sin embargo, al no indicar si la segunda extracción se realiza con o sin reposición, el alumnado de 6º de Primaria tendría que darse cuenta qué deberían realizar todas las combinaciones posibles para una extracción con reposición y para una extracción sin reposición. Esta ambigüedad del enunciado complica sobremanera su resolución. Entendemos por la resolución que esta persona pretendía plantear un problema de extracción sin reposición. La resolución es correcta si nos planteamos el problema sin reposición. Dado que la tarea se escribía en la plataforma Moodle, esta alumna representa el diagrama de árbol de una forma diferente a como lo haría a mano. El primer número que nos encontramos en color negro es el valor de la moneda en la primera extracción. Le segunda extracción se muestra en las ramas que parten de cada uno de esos números. Podemos comprender que cada fracción marcada en color verde se corresponde con la probabilidad que tiene de salir esa moneda. Por tanto, la probabilidad de la primera extracción sería la primera fracción que nos encontramos delante de los números 5, 10, 20 y 50. La probabilidad de sacar cada una de las monedas en la segunda extracción es la fracción que nos encontramos al final de cada línea. La forma en la que está redactado el enunciado es la causante de las dificultades que plantea el problema.

En los dos problemas restantes pueden observarse errores relacionados con la notación utilizada en la resolución del problema, que resulta ser superior al nivel que se emplearía en 6º curso de Educación Primaria. En estos casos, y a pesar de que tanto el enunciado como la resolución son correctos y adecuados al nivel educativo, mostrando evidencias de CCK y SCK, podemos pensar que falla el SCK al introducir notación no adecuada al nivel como se muestra en el ejemplo E12, en el que se introducen símbolos de uniones:

E12: *A partir de aquí empezaremos a resolver las cuestiones planteadas.*

a) Saque dos monedas de 1 euro= P(AUA)= 3/9x2/8= 6/72

b) Saque una de 1 euro y una de dos= P(AUB)+P(BUA)= (3/9x3/8) +(3/9+3/8) =9/72+9/72=18/72

c) Saque al menos una moneda de 50 céntimos= P(C)= P(AUC)+ P(BUC)+ P(CUA)+ P(BUA)+ P(CUC)= (3/9x3/8) + (3/9x3/8) + (3/9x3/8) +(3/9x3/8) + (3/9x2/8) = 42/72

Sólo uno de los dos problemas muestra evidencias de KC al indicar que se basa en los contenidos del currículo, explicitando cuáles son dichos contenidos.

5.2.4. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de CCK pobre, pero en los que el enunciado podría ser adecuado para 6º curso de Educación Primaria (TIPO 4)

En estos problemas, los futuros maestros muestran una evidente falta de CCK al no ser capaces de resolver sus problemas de creación propia. Notamos que los problemas planteados por estos futuros maestros sí que se adaptan al nivel educativo solicitado. Sin embargo, todos ellos cometen una serie de errores matemáticos a la hora de resolver el problema. En esta ocasión nos encontramos con 19 problemas de este tipo.

Los errores más comunes observados en este grupo de problemas son errores relacionados con conceptos probabilísticos, con un total de quince problemas en los que se muestran errores conceptuales sobre probabilidad. La mayor dificultad que plantean estos futuros maestros está relacionada con la combinatoria, siendo muchos de ellos incapaces de determinar correctamente el espacio muestral del problema, como puede observarse en E13:

E13: ***SITUACIÓN-PROBLEMA:*** *María manda a su hermano Juan al quiosco a por 20 regalices que le costarán 1.55 €, para pagar María le da 5 monedas con valor de: 1 €, 2 €, 20cent, 50 cent y 1* *cent. Juan se pone a pagar y saca dos monedas del bolsillo del pantalón, ¿qué probabilidad hay de que con esas dos monedas pueda pagar los regalices?*

- *Se desarrollará un diagrama de árbol con las posibles posibilidades, luego se comprobará también con la regla de Laplace:*

  Número de casos favorables: {1-2, 2-1, 2-20, 2-50, 2-0.1, 50-2, 0.1-2}

Número de casos posibles: {1-2, 1-20, 1-50, 1-0.1, 2-1, 2-20, 2-50, 2-0.1, 20-1, 20-2, 20-50, 20-0.1, 50-2, 50-1, 50-20, 50-0.1, 0.1-1, 0.1-2, 0.1-50, 0.1-20}

*Regla de Laplace= número de casos favorables/ número de casos posibles = **7/20** es la solución del problema.*

El espacio muestral de E13 no está bien definido. No importa el orden de las monedas, ya que las saca a la vez, pudiendo tener las siguientes combinaciones: (1 cent, 20 cent), (1 cent, 50 cent), (1 cent, 1 €), (1 cent, 2 €), (20 cent, 50 cent), (20 cent, 1 €), (20 cent, 2 €), (50 cent, 1 €), (50 cent, 2 €), (1 €, 2 €). Esto hace un total de 10 casos posibles. Esta alumna ha considerado el doble de casos, ya que considera casos repetidos como (1 €, 2 €) y (2 €, 1 €). El número total de casos favorables tampoco se determina correctamente, ya que no tiene en cuenta todos los casos. El número correcto de casos favorables serían 4 ya que son las combinaciones que suman 1.55 € o más (todas las combinaciones que tengan la moneda de 2 €). Por tanto, el resultado final de la probabilidad de poder pagar los regalices sería: $P(X \geq 1.55) = \frac{4}{10} = 0.4$

Su resultado podría ser correcto si hubiese considerado todos los casos favorables pues, tal cual ha planteado el problema, le faltaría el caso (20 cent, 2 €).

A continuación, en E14 puede verse otro ejemplo de problema bien enunciado y resuelto, con el espacio muestral mal construido, pero, en esta ocasión, se debe a que dentro del espacio muestral se repite cada una de las monedas que se tienen tantas veces como monedas hay:

E14: *Situación-problema: Juan tiene en su hucha 7 monedas de 2 €, 3 monedas de 1 €, 10 monedas de 50 céntimos y 6 monedas de 20 céntimos. Si sacamos una moneda de la hucha de Juan, ¿qué probabilidad hay de que sea una moneda de 2 €?*

A= “moneda de 2 €”

EM = {2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,50,50,50,50,50,50,50,50,50,50,20,20,20,20,20,20}

Dado que el espacio muestral es finito y que los sucesos elementales son equiprobables aplicamos la regla de Laplace.

Primero calculamos el número de casos posibles: 7+3+10+6= 26

$$P(A) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{nº\ de\ casos\ posibles} = \frac{7}{26} = 0.269$$

En E14 también podemos observar que el nivel es demasiado simple, pudiendo determinar el resultado prácticamente desde la lectura del enunciado, siendo únicamente necesario el cálculo de los casos posibles.

Asimismo, es común encontrarse con respuestas en las que se encadena un cálculo de operaciones al realizar la probabilidad para pasar el resultado a porcentaje. En E15 puede verse un problema que muestra este tipo de resolución:

E15: *Probabilidad de comprar los cromos= P (2 € Y 2 €) + P (1 € Y 2 €) + P (2 € Y 1 €) = (4/20 X 2/19) +(4/20 X 6/19) +(6/20 X 4/19) = 3/19= 0.1579 x 100 = 15.79 %*

Puede verse que este futuro maestro indica que 3/19 = 0.1579 x 100 = 15.79 % lo cual es un error de contenido matemático que aparece de forma común en las resoluciones de problemas de probabilidad, dado que multiplica el resultado de la fracción por 100 directamente tras realizar la operación, como ya hemos dicho, para igualarlo al porcentaje.

De los quince problemas con errores conceptuales sobre probabilidad, siete muestran evidencias de KC, al hacer referencia al currículo y sus contenidos para este curso en sus explicaciones del proceso creativo.

Encontramos cuatro problemas que presentan errores de cálculo no relacionados con conceptos probabilísticos. Solamente dos de ellos muestran evidencias de KC. En el ejemplo E16 puede verse cómo el futuro maestro resuelve el problema planteando unas operaciones poco claras en las que no se puede determinar claramente qué operación se está realizando:

E16: *[…] de la misma forma que la probabilidad anterior, de tal manera quedaría: 16÷44+8÷44=0.36+0.18=0.06616÷44+8÷44=0.36+0.18=0.066. [sic]*

5.2.5. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de SCK al presentarse un problema adaptado al nivel e indicios de CCK, pero no evidencias, al estar el problema bien enunciado, pero no presentarse resolución (TIPO 5)

En estos problemas el enunciado está bien redactado, pero el problema no está resuelto. Es por ello que podemos considerar que los futuros maestros que crearon estos enunciados muestran evidencias de SCK, pero no muestran evidencias de CCK, ya que los problemas no llegaron a resolverse. Sin embargo, sí podemos detectar una serie de indicios de CCK, al conseguir desarrollar un problema coherente. De todas maneras, no podemos comprobar que estos futuros maestros posean un CCK profundo, al no haber resuelto el problema. Esto se debe a que se han detectado problemas bien enunciados y adaptados a nivel que se encontraban mal resueltos como pudo verse en el apartado anterior. Dentro de este apartado podemos distinguir entre tres tipos de enunciados: enunciados bien redactados y con el problema adaptado al nivel, enunciados bien redactados y con el problema adaptado al nivel con más de una pregunta que van aumentando en dificultad y enunciados bien redactados con el problema adaptado al nivel, pero demasiado sencillos llegando a resultar triviales. Podemos encontrar evidencias de KC en cinco problemas del primer tipo de enunciado, en tres problemas del segundo tipo de enunciado y en otros tres problemas del tercer tipo de enunciado. En todos ellos se hace referencia al currículo explicitando el uso de la regla de Laplace, y en algunos de ellos también al uso de los diagramas de árbol. En E17 se muestra un ejemplo de un problema con varias preguntas que aumentan en dificultad, mientras que en E18 se ilustra un ejemplo de problema trivial sin resolución:

E17: *Tenemos en una bolsa 6 monedas, 2 de 50 céntimos, 2 de 1 euro y 2 de 2 euros. ¿Cuál será la probabilidad de que saquemos una moneda de 2 euros sin mirar? Apartando esa moneda, ¿cuál será la probabilidad de que volvamos a sacar una moneda de 2 euros?*

E18: *Juan va a coger monedas de su tarro, el cual tiene el mismo número de monedas de cuatro cantidades diferentes. Tiene 4 monedas de dos euros, de un euro, de cincuenta céntimos y de veinte céntimos. Calcular la probabilidad de que coja una moneda de un euro. ¿Es la misma probabilidad en todos los casos?*

5.2.6. Problemas parcialmente correctos e incorrectos en los que se muestran evidencias de falta de CCK y SCK (TIPO 6)

Finalmente nos encontramos con un gran bloque de respuestas con un total de 59 problemas en los que no podemos encontrar evidencias de CCK o SCK. De entre ellos, sólo seis son parcialmente correctos y 53 son incorrectos. En este caso, lo que realmente encontramos es una gran falta de conocimientos en relación con estos dos subdominios del MKT. En los seis problemas parcialmente correctos podemos distinguir entre problemas que presentan ambigüedades en el enunciado que no impiden la resolución estando el problema adaptado a nivel, pero sin presentar resolución y problemas que presentan dos apartados, uno muy fácil bien resuelto y uno muy difícil mal resuelto. En estos problemas podemos determinar que fallan tanto el CCK como el SCK dado que, en el primer caso, no encontramos evidencias de CCK, al no presentarse resolución, y falla el SCK, al introducir ambigüedades que dificultan la resolución del problema. En el segundo caso, al introducir un apartado que es de nivel superior al nivel solicitado, falla el SCK, y al resolverlo de forma errónea falla el CCK. De estos seis problemas, sólo uno muestra indicios de KC al indicar que trabaja con la regla de Laplace, siendo esta fórmula adecuada al curso.

Dentro de la clasificación de los 53 problemas incorrectos podemos encontrar enunciados que podrían tener sentido, pero que finalmente están mal resueltos y no se adaptan al nivel solicitado, enunciados ambiguos o sin sentido que además no presentan resolución, problemas que no están adaptados al nivel y cuyo enunciado y resolución son incorrectos, problemas que no siguen las indicaciones de crear un enunciado que se resuelva calculando una probabilidad en el que se utilicen los valores de las monedas e incluso problemas que nada tienen que ver con la probabilidad. Sólo 16 de ellos muestran indicios de KC. Sin embargo, todos ellos indican que han consultado el currículo, citado sus contenidos, pero parecen no saber cómo trabajar dichos contenidos. En E19 puede verse un ejemplo de cada uno de los casos de problemas incorrectos anteriormente citados, respectivamente:

E19: ***Enunciado del problema matemático:*** *En tu monedero tienes: 2 monedas de 1 céntimo, 2 monedas de 2 céntimos y 2 monedas de 5 céntimos. Un amigo te reta a lazar las 6 monedas al aire simultáneamente y sumando los valores solamente de las monedas en las que ha salido cruz, obtener un número primo. Suponiendo que las lanzas y sale cruz en 2 monedas ¿Qué probabilidades tienes de obtener un número primo?*

El problema planteado en E19 no se adapta al nivel de 6º de Educación Primaria, ya que el introducir que se tengan que lanzar las 6 monedas a la vez y considerar que salga cara o cruz, teniendo en cuenta, a su vez, el valor de la moneda y recordando la condición de ser números primos va a lograr confundir al alumnado de dicho nivel. El nivel es, por tanto, superior. La resolución planteada por la futura maestra es incorrecta ya que indica que no importa el orden, pero considera las monedas de forma ordenada tomando valores repetidos y acabando por resolver mal el problema. Veamos, ahora el ejemplo E20:

E20: *Entre César, Susana y Macarena quieren juntar 10 euros para completar el álbum de cromos de sus dibujos favoritos. Cada domingo los abuelos de César le dan 1 €, los de Susana le dan 1.50 € y a Macarena le dan 1 €. César ahorra todo lo que le dan sus abuelos, mientras que Susana se gasta 75 céntimos en gominolas y Macarena 25 céntimos en una piruleta. Teniendo en cuenta que las monedas que pueden tener son de 5, 10, 20, 50 céntimos y 1 euro. ¿qué probabilidad tendrán de tener cada una de esas monedas cuando lleguen a 10 €?*

En E20 podemos ver que el nivel es complicado para ir dirigido a alumnado de 6º de Educación Primaria. Además, es complicado calcular las combinaciones de monedas que se podrán tener cuando se llegue a 10 €. Este problema no presenta resolución. Se muestran, por tanto, evidencias de escaso SCK y no hay evidencias de CCK. Observemos, a continuación, el ejemplo E21.a:

E21.a: *Mi abuelo tiene seis monedas: una de 2 euros, otra de 50 céntimos, otra de 20 céntimos, dos de 1 euro y otra moneda de 10 céntimos. Las meterá en un saco para repartirlas entre mi primo y* *yo; cada uno sacaremos tres monedas al azar, ¿qué probabilidad hay de que las monedas que me toquen sumen 2.50 euros o más?*

Este enunciado propuesto en E21.a presenta ambigüedades, ya que no sabemos quién saca antes las monedas, si la protagonista del problema o su primo. Los resultados serán muy diferentes. El problema se complicaría mucho si es el primo quién saca las monedas antes y no sabemos cuáles ha sacado. Por tanto, el nivel sería muy superior al recomendado para 6º de Educación Primaria. Además, la resolución presenta un gran error al indicar que el valor de la probabilidad es superior a 1, pues plantea erróneamente la regla de Laplace, al calcularla como el número de casos posibles entre en número de casos favorables, contradiciéndose a sí misma, cuando anteriormente la enuncia de forma correcta. Se puede ver la respuesta en E21.b:

E21.b: *Calcularemos el resultado de este suceso mediante la regla de Laplace:*

Si A es un suceso:

Probabilidad (A) = (Número de casos favorables) / (Número de casos posibles)

Nuestro caso:

Probabilidad de que las 3 monedas que me tocan suman 2.50 euros o más = (Número de casos en los que las tres monedas sumarían 2.50 o más) / (Número de casos posibles)

Tenemos 16 casos posibles y 8 casos favorables si hacemos las combinaciones de 3 números con las monedas que tenemos. Para hacer estas combinaciones usaremos las agrupaciones en forma de árbol y así será mucho más visual.

Por lo tanto, si aplicamos la regla de Laplace en nuestro caso nos quedaría:

P. de que las 3 monedas que me toquen suman 2.50 euro o más= 16/8=2

En el ejemplo E22 puede observarse un problema de probabilidad en el que no se utilizan los valores de las monedas para calcular dicha probabilidad, como se solicitaba en la tarea. El problema no presenta resolución, mostrando entonces falta de CCK y de SCK.

E22: *La abuela de Pedro le da el domingo un puñado de monedas de 10, 20 y 50 céntimos. Su padre le dice que, si saca 3 monedas, las lanza al aire y consigue que las 3 sean cara, le comprara una bolsa de patatas ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro consiga su premio?*

Finalmente, en E23, podemos observar un ejemplo en el que se plantea un problema que nada tiene que ver con la probabilidad.

E23: *Tres amigos de 11 años, dos niñas y un niño, van a jugar al parque en una tarde calurosa de verano, y a media tarde les entra mucha hambre tras haber estado jugando sin parar con sus bicicletas. Por lo tanto, deciden ir al tutti-frutti a comprar bolsas de patatas y gominolas. Las bolsas cuestan 45 céntimos cada una, y las gominolas 5 céntimos. En total compran 6 bolsas de patatas, y 33 gominolas entre los tres. Los niños pagarían su merienda usando monedas de 1, 2, 5, 10, 20 o 50, o de 1 euro, ya que no tiene ninguno tiene billetes.*

Deciden pagarlo todo junto, y dividir el coste entre los tres, y de este modo pagar cada niño la misma cantidad de dinero. Pero a la cuarta parte de la merienda, es decir, al 25 % del coste total les invita la dueña del tutti-frutti, por lo tanto, ¿cuánto dinero tiene que pagar cada niño?

5.3. Análisis de los indicadores de evaluación

En este segundo ciclo de I-A se propuso la introducción de unos indicadores de evaluación que sirviesen para que los futuros maestros pudiesen hacer una autovaloración de su tarea. A través de estos indicadores de evaluación, que posteriormente servirían para evaluar los problemas propuestos por otros futuros maestros durante la segunda fase de la tarea, también pretendíamos que surgiese una reflexión sobre la validez y la adecuación de su propio problema. Al utilizar los indicadores como un medio de autoevaluación, los futuros maestros pueden ser capaces de detectar las fortalezas y debilidades del problema que han propuesto y resuelto. De este modo, pueden saber cuáles son sus fallos o dónde deben incidir para mejorar su tarea y, en consecuencia, la enseñanza del contenido propuesto, en este caso la resolución de problemas de probabilidad en 6º de Primaria.

Con la tarea propuesta, los futuros maestros debían movilizar sus conocimientos matemáticos en torno a la probabilidad, así como sus conocimientos pedagógicos para saber adaptar tanto el enunciado problema como su resolución al nivel educativo solicitado. Los indicadores de evaluación permiten hacer un control tanto de la adecuación de los contenidos como del diseño del problema adaptándolo al nivel.

Sin embargo, a pesar de las ventajas que ofrece la utilización de indicadores de evaluación, tras el análisis realizado de los datos recogidos, hemos podido detectar un gran grupo de futuros maestros que mostraban un escaso conocimiento del concepto de indicador de evaluación para la tarea, confundiéndolo con rúbricas para corregir el problema (una vez este fuese resuelto por el alumnado de Educación Primaria), con indicadores de logro de la tarea o con criterios y estándares de evaluación del currículo de Educación Primaria. En algunos casos, también se pudo observar que no se comprendía el concepto al introducir como indicadores nuestras propias instrucciones sobre la tarea, pero en forma de pregunta ("¿El contenido matemático es adecuado?", "¿El contenido pedagógico es adecuado?", etc.) o al no introducir ningún tipo de indicador, dejando en blanco ese apartado.

En función de la clasificación de problemas que hemos construido previamente durante este ciclo de I-A, podemos determinar qué tipo de respuestas han aportado los futuros maestros en el apartado de indicadores de evaluación. En la Tabla 10 se recogen los resultados obtenidos en relación con los indicadores de evaluación para cada grupo de problemas.

En ella podemos observar que solo 38 respuestas muestran unos indicadores adecuados. Como ya hemos comentado, hay un gran número de futuros maestros que no tienen claro el concepto de indicador de evaluación, con un total de 66 futuros maestros que no los plantean de forma correcta. Asimismo, 31 futuros maestros no plantean indicadores, con lo que no podemos saber si conocen o desconocen el concepto.

Tabla 10

Tipos de Indicadores de Evaluación Diseñados en el Segundo Ciclo de I-A

GRUPOS DE PROBLEMAS EN FUNCION DEL ANALISIS DEL MKT	INDICADORES DE EVALUACIÓN					TOTALES
	ADECUADOS	INADECUADOS				
	Los indicadores son adecuados y se adaptan al problema	Criterios de corrección de la tarea (alumnado de primaria como resolutor)	Convierten nuestro enunciado en una pregunta	Criterios de evaluación del currículo	No se plantean indicadores	
TIPO 1	12	4	2	0	5	**23**
TIPO 2	1	0	1	2	1	**5**
TIPO 3	0	0	0	1	0	**1**
TIPO 4	3	7	8	0	3	**21**
TIPO 5	10	7	6	0	3	**26**
TIPO 6	12	13	14	1	19	**59**
TOTALES	**38**	**31**	**31**	**4**	**31**	**135**

Analicemos qué ocurre en cada grupo de problemas. En el primer grupo de problemas, esto es aquellos que son correctos y se adecúan al nivel, vemos que, entre aquellos futuros maestros que han planteado indicadores, el grupo más numeroso es el que los ha planteado de forma correcta, lo que refuerza la idea de que tienen una buena base pedagógica, y que conocen el concepto de indicador de evaluación, que debían haber adquirido en la asignatura "Didáctica General" cursada durante del primer año del grado.

En el resto de los bloques de problemas parece presentarse una mayor disparidad, siendo una de las técnicas más socorridas el convertir el enunciado en pregunta cuando no saben a qué nos referimos con crear unos indicadores de evaluación. Aquellos futuros maestros que, en lugar de crear unos indicadores de evaluación crean unos criterios de corrección de la tarea, muestran confusión a la hora de tratar el concepto, confundiéndolo con una rúbrica para ver si sus propios alumnos resuelven correctamente el problema y no diseñando unos indicadores que sirvan para evaluarse a sí mismos. El propio término "evaluación" les hace pensar que se refiere a cómo evaluar a los alumnos de Educación

Primaria, sin notar que también cabe la propia autoevaluación a la hora de diseñar una tarea adecuada a un nivel y a un contenido concretos.

Como era esperable, en el grupo de respuestas que muestran errores tanto en el CCK como en el SCK, el número de respuestas que presentan indicadores incorrectos (28 respuestas) o no presentan ningún indicador (19 respuestas) es muy numeroso, con 47 de las 59 respuestas. Esto también avala la falta de base pedagógica en este grupo de estudiantes.

En definitiva, la creación de indicadores de evaluación por parte de los futuros maestros ha resultado aportar poca información. Más aún, un gran número de futuros maestros muestran escasez de conocimiento en relación con la definición de indicador de evaluación, confundiéndolos con los criterios de evaluación del currículo, con criterios de corrección de la tarea una vez sea realizada por un niño de 6º de Primaria o, incluso, incluyendo nuestras instrucciones en forma de pregunta. Del total de respuestas aportadas, solamente encontramos 38 en las que se plantean unos indicadores adecuados que, además, se desarrollan para todos los apartados solicitados en el enunciado: contenido matemático, contenido pedagógico, adecuación del enunciado al nivel educativo y claridad de las explicaciones y de la descripción del proceso creativo. Los futuros maestros muestran una mayor dificultad a la hora de crear indicadores para el contenido pedagógico, ya que no parecen saber cómo enfocar unos indicadores que no sean sobre contenido matemático, soliendo centrarse, exclusivamente, en la adecuación al nivel. Algunos futuros maestros sí muestran indicadores relacionados con el contenido pedagógico hablando sobre la adecuación de proceso que han seguido en su resolución del problema, por ejemplo, aunque siempre yendo de la mano de la adecuación al nivel.

A continuación, mostraremos unos ejemplos relativos a los distintos tipos de indicadores encontrados durante este ciclo de I-A. En primer lugar, en E24, se pueden observar unos indicadores que resultan adecuados para la tarea:

E24:

INDICADORES DE EVALUACIÓN	*SÍ*	*NO*
La resolución del problema requiere dominar operaciones aritméticas con fracciones		
El problema permite la estimación del grado de probabilidad de un suceso		
Contribuye a la comprensión de modelos sencillos de experimentos aleatorios		
Permite la aplicación de la regla de Laplace		
Para resolver el problema hay que realizar el cálculo de una probabilidad		
Para resolver el problema el alumnado deberá delimitar el espacio muestral		
Para resolver el problema el alumnado deberá saber distinguir entre casos favorables y casos posibles		
La cuestión que se plantea en el problema es clara y fácilmente interpretable		
La pregunta se adecúa a los contenidos exigidos en 6º de Educación Primaria		
El problema resulta motivador		
Permite comprobar el grado de comprensión de los conceptos empleados		
La identificación de los datos es clara y está adaptada al nivel de los alumnos		
La pregunta es clara y está adaptada al nivel de los alumnos		
Tiene en cuenta los conocimientos previos de los alumnos		
Está adecuado al lenguaje matemático requerido en 6º de Educación Primaria		
El enunciado refleja un contexto social y cercano		
Se puede recrear en el aula utilizando el juego como una herramienta de aprendizaje		
El procedimiento para la resolución del problema está adaptado al nivel educativo del curso		
Favorece el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas		
La explicación del proceso creativo es comprensible		
El proceso creativo responde a los objetivos del problema planteado		
La explicación y la descripción muestran los conceptos que se van a tratar en el problema		
La explicación está bien estructurada		
La descripción del proceso es coherente con el problema planteado		

INDICADORES DE EVALUACIÓN	*SÍ*	*NO*
La explicación y la descripción están bien argumentadas		
La explicación es concreta e inteligible		

Como podemos observar en el ejemplo E24, este futuro maestro diseña unos indicadores completos y ricos para su tarea, centrándose en cubrir todos los aspectos posibles, tanto de conocimiento como pedagógicos, para su enunciado y el proceso de resolución, que considera que deben adaptarse al nivel. También se centra en la parte creativa del problema, planteando indicadores para valorar si su descripción del proceso creativo es adecuada, coherente y bien argumentada. Dado que no se les indicaron unas directrices sobre cómo crear los indicadores, exceptuando los aspectos que debían cubrir, estos indicadores propuestos resultan muy adecuados, mostrando que el futuro maestro posee un adecuado conocimiento relativo al concepto de indicador.

En E25 se muestra un ejemplo en el que una futura maestra plantea los indicadores de evaluación como criterios de corrección de la tarea, para valorar al alumnado como resolutores del problema, y no a sí misma como creadora y resolutora de problemas.

E25: *INDICADORES DE EVALUACIÓN: en el trabajo del alumno/a evaluaremos:*

- *La utilización por el alumnado de "operadores":*
  - *Establecer distintas combinaciones de elementos (contenido matemático)*
  - *Comprender la utilización de la "Regla de Laplace" (contenido pedagógico)*
  - *Aplicar la "Regla de Laplace" para calcular la probabilidad de sucesos (contenido matemático)*
  - *Obtener un diagrama de apoyo en la resolución, en este caso el diagrama de árbol (contenido pedagógico)*
  - *Razonar y distinguir entre probabilidad y probabilidad condicionada (contenido pedagógico)*
  - *Hallar la fracción irreducible (contenido matemático)*
- *La inclusión de conceptos referentes al campo matemático, tales como: espacio muestral, suceso, probabilidad, probabilidad condicionada, etc.*
- *La disposición del trabajo:*

    - *Organización, explicación y estructura del ejercicio*
    - *Claridad de las explicaciones*
    - *Limpieza*
    - *Precisión del calculo*
- *Interpretación de los resultados:*
    - *Comprensión del ejercicio*
    - *Comprensión de la resolución*
    - *Aplicación en la vida cotidiana*

La futura maestra del ejemplo E25 hace evidente que se refiere al alumnado al indicar específicamente que utilizará esos criterios para evaluarles. Además, no está haciendo un uso correcto de los conceptos de contenido matemático y pedagógico, ya que deberían referirse a su propia práctica (los alumnos pueden trabajar contenidos matemáticos, pero no pedagógicos). Todos los contenidos que quiere evaluar en la primera parte de los indicadores son contenidos matemáticos. Parece separar los contenidos matemáticos en aquellos que son de aplicación directa de fórmulas y operaciones y los contenidos pedagógicos en aquellos que son de comprender y razonar, mostrando que no tiene claro qué es cada cosa. El resto de los indicadores se refieren a las actitudes del alumnado y a la comprensión del problema. Estos apartados son aportados por ella sin que aparezcan en el enunciando planteado en la tarea que les hemos propuesto. Ese enunciado de la tarea fue utilizado por algunos futuros maestros como base para crear sus indicadores, acabando por diseñar unos indicadores incorrectos. En el ejemplo E26 podemos observar la propuesta de una futura maestra que plantea el enunciado de la tarea como indicadores de evaluación añadiendo dos aspectos más que no aparecen en el enunciado.

E26:

INDICADORES DE EVALUACIÓN

Criterios	***¿Se cumplen?***	
	SÍ	***NO***
Contenido matemático		
Contenido pedagógico		
Adaptación al nivel educativo considerado		
Claridad de las explicaciones y proceso creativo		
Involucra activamente a los alumnos en el proceso de aprendizaje		
Fluidez de explicación de los contenidos		

En este caso, parece que, al menos, la futura maestra comprende que deben referirse a sí misma como creadora de problemas, ya que habla sobre cómo aplicar la tarea con su alumnado desde la perspectiva del profesor ("Involucra activamente a los alumnos en el proceso de aprendizaje", "Fluidez de explicación de los contenidos"). Sin embargo, encontramos casos aún más extremos en los que los indicadores planteados, de la misma manera que esta alumna, aportan aún menos información, como podemos observar en E27.

E27:

	SÍ	*NO*
Contenido matemático		
Contenido pedagógico		
Adaptación al nivel educativo considerado		
Claridad de las explicaciones y de la descripción del proceso creativo		

En E27, el futuro maestro ni siquiera se molesta en aportar más ejemplos de creación propia, sino que directamente utiliza nuestro enunciado sin indicar ningún cambio. Esto muestra que desconoce el concepto o que no sabe cómo diseñar dichos indicadores. En este sentido, también nos encontramos con futuros maestros que plantean esos aspectos del enunciado en forma de pregunta, como ocurre en el ejemplo E28.

E28: *Indicadores de evaluación:*

Contesta las siguientes cuestiones con sí o no:

1. *¿Crees que el enunciado contiene suficiente contenido matemático?*
2. *¿Crees que el enunciado se ajusta a los contenidos del curso para el que está realizado?*
3. *¿Añadirías algo para que se entendiera mejor tu problema?*
4. *¿Te parece una buena idea?*
5. *¿Crees que posee el suficiente contenido pedagógico?*

Como podemos observar en E28, a pesar de que esta futura maestra utiliza directamente los aspectos considerados en el enunciado, pero en forma de pregunta, también incluye alguno que parece ir enfocado a que otra persona le revise el problema como cuando indica "¿Te parece buena idea?". De todas maneras, no llega a crear unos indicadores de evaluación reales.

El último tipo de casos que nos hemos encontrado, aunque en una medida muchísimo menor, ha sido en el que utilizan los criterios de evaluación del currículo como indicadores, como puede observarse en E29, y que muestran que tampoco en estos casos se domina el concepto de indicador de evaluación.

E29: *Indicadores de evaluación:*

Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.

Mediante este criterio se valorará si el alumno o alumna es capaz de:

- *Realiza análisis crítico argumentado sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.*
- *Ordenar un grupo de sucesos en función de la probabilidad de que estos sucedan.*
- *Debatir en grupo sobre la posibilidad de que un determinado proceso tenga más o menos probabilidad de ocurrir por el hecho de que haya o no ocurrido recientemente.*

Como hemos podido observar, la falta de conocimiento en torno al concepto de indicador de evaluación hace evidente la necesidad de formar a los alumnos previamente sobre el tema. El concepto de indicador de evaluación se adquiere en la asignatura de "Didáctica General" que los futuros maestros cursan en el primer año del grado. Sin embargo, la mayoría de los futuros maestros muestran una falta de adquisición de ese contenido. De nuevo, creemos que una asignatura combinada en la que se trabajen las matemáticas y su didáctica, simultáneamente, puede ayudar a los estudiantes a adquirir un conocimiento más completo. De esta manera, pueden aplicar los contenidos didácticos y los contenidos matemáticos a la vez. Este proceso será necesario y se aplicará en su día a día como docentes de Educación Primaria. Creemos que, si trabajamos el concepto de indicador de evaluación y, a continuación, lo aplicamos en una tarea práctica, favoreceremos el aprendizaje del concepto y les daremos a conocer contextos en los que se usan los indicadores de evaluación, así como la aplicabilidad y las ventajas que les ofrecen los indicadores para mejorar su propia práctica docente.

5.4. Discusión de resultados del segundo ciclo de I-A

Tras los resultados obtenidos en el primer ciclo de I-A, en los que se determinó que, a pesar de encontrar un gran número de futuros maestros que mostraban un alto conocimiento, tanto común como especializado, en relación con la probabilidad clásica aún había un número considerable que presentaba falta de CCK, de SCK o de ambos simultáneamente, se procedió a plantear un plan revisado que permitiese detectar de una forma más eficiente el CCK, SCK y KC de los futuros maestros. Por ello, en este segundo ciclo de I-A, se aplicaron los cambios previstos al finalizar el primer ciclo en relación con la estructuración del enunciado, más abierto y con menos restricciones, y añadiendo un nuevo apartado en el que se les instaba a crear unos indicadores de evaluación para su tarea referentes al conocimiento matemático, al conocimiento pedagógico, a la adaptación del problema al nivel y a la claridad de las explicaciones y del proceso creativo, de manera que, con ellos, pudiesen valorar las propuestas de dos compañeros o compañeras. Para detectar más evidencias de KC, se remarcó la importancia de explicar el porqué de la adecuación al nivel en el enunciado del problema.

En este ciclo, los resultados muestran un pequeño grupo de 28 respuestas correctas. Los futuros maestros que fueron capaces de crear y resolver un problema adecuado a para 6º de Educación Primaria, bajo las condiciones impuestas en el enunciado de la tarea muestran fuertes evidencias de CCK y SCK. De entre las respuestas de este grupo, se encontraron cinco que presentaban un problema demasiado fácil, contradiciendo una de las instrucciones del enunciado de la tarea que decía que el problema no podía ser trivial de modo que la resolución no se redujese a un único caso. En estos casos, podemos pensar que el problema se encuentra en la comprensión lectora del alumnado, aunque si ese no fuese el caso, presentaría una falta de CCK por no saber identificar si el problema es fácil o difícil. Al contrario de lo que ocurría en el primer análisis realizado para el primer ciclo de I-A, en este segundo ciclo, el grupo de respuestas correctas es mucho más reducido que en el primer ciclo, lo cual resulta más consistente con resultados obtenidos en otros estudios similares a este como en Contreras, Batanero *et al*. (2011), Contreras, Díaz *et al*. (2011), Ortiz *et al.* (2012), Mohamed y Ortiz (2012), Gómez-Torres *et al*. (2014) o Batanero *et al*. (2015), trabajos en los que se muestra escasez de conocimientos matemáticos y pedagógicos.

Por otro lado, podemos encontrar dos grandes grupos de respuestas parcialmente correctas e incorrectas con 54 y 53 respuestas, respectivamente. El número de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas obtenidas en el primer ciclo de I-A resultaba más equilibrado que en este segundo ciclo, en el que podemos observar muchas menos respuestas correctas que de los otros dos tipos. Creemos que este incremento de las respuestas parcialmente correctas se debe a que muchos futuros maestros no resolvieron su problema. Concretamente, se han encontrado 26 respuestas parcialmente correctas que presentan enunciados que podrían resultar adecuados, en los que si resolviésemos el problema este estaría adaptado a nivel de 6º de Primaria, mostrando evidencias de SCK. Sin embargo, la falta de resolución del problema nos obliga a clasificar dichos problemas dentro de la clasificación de parcialmente correctos, pues no encontramos evidencias de CCK. Es decir, aunque los futuros maestros que plantean esos problemas supieran resolverlos poseyendo un adecuado CCK, la falta de proceso de resolución nos impide asegurarlo.

De nuevo, la forma en la que se ha planteado el enunciado de la tarea podría ser la causante de este amplio grupo de respuestas, pues no se indicaba explícitamente que hubiese que resolver el problema, dado que se consideró algo implícito. Esto es, para poder crear un problema adecuado y adaptado al nivel, es necesario resolverlo de manera que sepamos si existe una adaptación o si el problema, por el contrario, es demasiado fácil o difícil. Se hace necesaria una readaptación del enunciado de cara a realizar el tercer ciclo de I-A.

Por otro lado, volvemos a encontrar un grupo de respuestas en las que se propone un problema que se adapta al nivel educativo, mostrando, así, evidencias de SCK, pero cuya resolución presenta errores matemáticos mostrando una falta de CCK. Sigue sorprendiendo que los futuros maestros consigan crear un problema adecuado y adaptado al nivel, no sabiendo después resolver el problema que ellos mismos han creado. Los principales errores presentados son de tipo combinatorio, como ya indicaba Mohamed (2012), remarcando la dificultad que tiene la combinatoria en el estudio y la enseñanza de la probabilidad, con quince respuestas que presentan este tipo de errores. Son menos abundantes los errores de cálculo que indican falta de CCK, y la introducción de notación inadecuada, que muestra evidencias de CCK, al conocer notación de nivel superior en probabilidad, pero falta de SCK al no adaptar dicha notación al nivel.

Nos encontramos con un grupo muy amplio de respuestas incorrectas (53), casi igualando al número de respuestas parcialmente correctas. En este ciclo, los problemas que resultaron ser incorrectos han sido más fáciles de detectar que en el primer ciclo, puesto que los errores eran de mayor calibre. Algunos ejemplos son la realización incorrecta de cálculos probabilísticos, como también indican Ortiz *et al*. (2006) y Mohamed y Ortiz (2012), o la falta de capacidad combinatoria (Ortiz *et al*., 2006), que ya encontrábamos también en el ciclo anterior. Se muestra una gran falta de CCK y SCK en estos problemas, volviendo a encontrar un gran número de problemas sin resolución. Sorprende, sobremanera, el elevado número de problemas planteados que no seguían las instrucciones de la tarea, planteando problemas con monedas del tipo cara-cruz, en lugar de problemas en los que se involucrasen los valores de las monedas (siete problemas). Pero es aún más sorprendente el gran número de enunciados que no plantean un problema que deba resolverse calculando una probabilidad, con un total de doce problemas. La mayoría de estos problemas resultaron ser problemas de tipo combinatorio (Mohamed, 2012) en los que solamente se pedía obtener combinaciones de monedas, sin necesidad de calcular ninguna probabilidad. El resto de los problemas planteados de este grupo, resultaron ser problemas aritméticos de compraventa (comprar chucherías o cromos en el quiosco, ir a comprar el pan, etc.), en los que se utilizaban valores de las monedas, pero no estaban relacionados con la probabilidad. Todas las resoluciones obtenidas en estos problemas resultaron presentar errores matemáticos mostrando, por tanto, falta de CCK.

A la vista de los resultados obtenidos, creemos que el gran número de casos parcialmente correctos se debe a la falta de resolución del problema, pudiendo aumentar el grupo de respuestas correctas si esos problemas estuviesen resueltos. El gran número de respuestas incorrectas resulta consistente con los resultados obtenidos en el ciclo anterior, así como con otros autores que indican una gran falta de CCK y SCK en muchos futuros maestros (Contreras, Batanero *et al*., 2011; Ortiz *et al.*, 2012; Mohamed y Ortiz, 2012; Gómez-Torres *et al*., 2014 y Batanero *et al*., 2015). Asimismo, algunos de los problemas que resultaron incorrectos y no presentaron resolución, podrían haberse incluido en el grupo de respuestas parcialmente correctas en caso de haber presentado una resolución coherente. Por tanto, la mayor limitación encontrada en este segundo ciclo resulta ser la falta de especificidad en el enunciado, al no indicar explícitamente que el problema debía resolverse.

Sin embargo, y como novedad en este segundo ciclo de I-A, hemos podido encontrar muchas más evidencias de KC que en el primer ciclo, al contrario que ocurría en Vásquez y Alsina (2019). El explicitar en el enunciado la necesidad de explicar la adecuación al nivel remarcando la importancia del apartado, parece haber incrementado las explicaciones a este respecto, encontrando muchas más referencias explícitas a la utilización de los contenidos de Bloque 5 del currículo de matemáticas. Se han encontrado 57 referencias a los contenidos del currículo y a su adecuación al nivel, haciendo ver que el alumnado de la asignatura ha trabajado en base al currículo para crear sus problemas y adecuarlos a 6º de Educación Primaria. Esto supone un porcentaje del 42 % de los futuros maestros que indican de forma explícita que trabajan con base en los contenidos del currículo. A pesar de ser un porcentaje aun relativamente bajo, ha supuesto un gran incremento con respecto a los resultados del primer ciclo, en los que las referencias el currículo y los contenidos adecuados al nivel habían sido prácticamente inexistentes.

Finalmente, la introducción de los indicadores de evaluación ha incrementado las explicaciones que los futuros maestros indicaban acerca de sus procesos creativos y de resolución y adaptación del problema. El saber que dichos indicadores se utilizarían para valorar las tareas de sus compañeros en una segunda fase de la tarea parece haber influido en sus respuestas. El indicador sobre la adaptación del problema al nivel educativo que ha favorecido el incremento de referencias explicitas al currículo, notándose un aumento de respuestas que muestran el KC de los futuros maestros.

Sin embargo, aún podemos ver que muchas de las explicaciones siguen resultando escasas y carentes de interés, sin aportar información relevante (Bolero, 1999). De hecho, solamente 39 respuestas plantean indicadores adecuados a la tarea y 30 respuestas no plantean indicadores. El resto de los indicadores planteados resultan ser, en realidad, criterios de corrección de la tarea, criterios de evaluación del currículo o nuestras propias instrucciones planteadas en forma de pregunta. Esto demuestra una falta de conocimiento en torno al concepto de indicador de evaluación. Creemos que es fundamental para el desarrollo de sus funciones como maestros, que los alumnos de magisterio conozcan dicho concepto. Este concepto debería haberse adquirido previamente en una asignatura de Didáctica General. Sin embargo, esta falta de conocimiento o la incapacidad de los futuros maestros de aplicarlo en el dominio específico de la matemática, hace necesaria la formación previa antes de realizar la tarea.

Como conclusiones de este ciclo podemos afirmar que se requiere una nueva remodelación del enunciado que cubra todas las carencias detectadas durante el mismo, como la falta de resoluciones y la formación en indicadores. En este sentido, se propuso volver a especificar de forma explícita la necesidad de resolver el problema, en lugar de plantearlo solamente. Además, se planteó realizar una sesión de formación previa en relación con el concepto de indicador de evaluación. Más aún, se propuso trabajar utilizando la idea de Beltrán-Pellicer *et al*. (2018) referente a los indicadores de idoneidad didáctica en probabilidad. Esto se debe a que los indicadores desarrollados en ese trabajo se adaptan específicamente al ámbito de la probabilidad, sirviendo como una herramienta que puede utilizarse como método de autoevaluación y reflexión por parte de los futuros maestros. Como docentes e investigadores también podemos emplearlos como un método de valoración del conocimiento y las competencias iniciales del proceso formativo de los futuros maestros, permitiéndonos realizar valoraciones directas en este estudio como se indica en Godino (2009, 2013b).

Se propuso diseñar un enunciado más conciso para evitar que los futuros maestros dispersasen su atención por haber demasiada información. En esta ocasión, esta parte de la tarea sobre la que trabajamos en este estudio quedó dividida en dos subtareas más cortas: por un lado, debían crear y resolver el problema y, por otro lado, debían diseñar unos indicadores de evaluación basados en los trabajados en clase, que se adaptasen a su problema para su posterior utilización cuando hiciesen la coevaluación. Con esta separación tratamos de evitar saturar a los futuros maestros con demasiada información dentro del enunciado. Con estas modificaciones dimos paso a un tercer ciclo de I-A con un plan modificado para seguir adaptándonos a las necesidades encontradas.

CAPÍTULO 6

Tercer ciclo de investigación-acción

En este capítulo describiremos el tercer ciclo de I-A, implementado durante el curso 2019/2020. Para llevarlo, a cabo se diseñó un nuevo enunciado de la tarea al que se le aplicaron los cambios descritos en el capítulo anterior, después de detectar ciertas deficiencias en los resultados.

Como hemos comentado, las modificaciones introducidas incluyen sintetizar el enunciado de la tarea y separarla en dos partes para, posteriormente, realizar una coevaluación. En la primera parte sólo aparecía la información relativa a la creación y resolución del enunciado y la segunda se enfocó en el diseño de los indicadores de evaluación.

Los futuros maestros dispusieron de una semana para el diseño y resolución del problema. En esa semana, durante una de las clases, se desarrolló la sesión de formación sobre indicadores de evaluación, en la que los futuros maestros trabajaron el concepto, evaluando una serie de problemas, previamente a la creación de sus propios indicadores. Una vez concluida la sesión, se planteó la segunda fase. De esta manera, los futuros maestros podían revisar su problema y apoyarse en el diseño de los indicadores para poder reflexionar sobre su trabajo, pudiendo modificar cualquier aspecto que no considerasen adecuado en su planteamiento inicial.

Al finalizar la segunda fase, se llevó a cabo otra sesión de clase en la que se mostraron problemas reales de compañeros de otros grupos (de manera que no pudiesen valorar los problemas de sus propios compañeros de clase), seleccionados de manera aleatoria entre todos los problemas propuestos. En dicha sesión, y agrupados en pequeños equipos de 3 o 4 personas, cada grupo debía corregir los problemas utilizando unos indicadores de evaluación previamente aportados por el docente, indicando los puntos fuertes y débiles de las tareas y ofreciendo retroalimentación. Una vez realizada esta evaluación por parte de los grupos, se llevó a cabo un debate en gran grupo para comparar opiniones y consensuar un *feedback* que podrían ofrecer a sus compañeros o compañeras que hubiesen creado dichos problemas. Así, se conseguía reforzar el concepto y el uso de los indicadores de evaluación.

Una vez finalizadas esas dos fases, se pasó a la fase de coevaluación que, como ya hemos comentado previamente, no se ha considerado en este estudio debido a la escasez de datos cualitativos en el *feedback* aportado por los futuros maestros a sus compañeros, en favor de una calificación principalmente numérica. El enunciado de la tarea se planteó como sigue para la primera fase de la tarea:

"PRIMERA FASE:

- ***Propón y resuelve** una situación-problema, en la que, tanto el enunciado como su resolución estén **adaptados a 6º curso de Educación Primaria** cumpliendo las siguientes indicaciones:*

*Consideremos la unidad monetaria "euro". Dentro del euro, las monedas pueden ser de **1, 2, 5, 10, 20 o 50 céntimos o de 1 o 2 euros.***

*Plantea y resuelve un problema utilizando estos tipos de monedas como punto de partida, **empleando al menos 3 monedas**, y formula una pregunta que requiera **calcular una probabilidad** para darle respuesta.*

El problema no debe tener tantas restricciones que reduzcan la solución a un único caso, debe poder ocurrir en la vida real y debe encontrarse en un contexto cercano al alumnado de ese curso.

- *Explica por qué crees que tu problema es* ***adecuado al nivel educativo*** *propuesto (6º de Primaria).*
- *Explica por qué has elegido esa tarea.*
- *Incluye una* ***breve descripción de tu proceso creativo*** *y de las decisiones tomadas durante el mismo."*

Durante la realización de esa fase y tras la formación en indicadores se plantea este enunciado para la segunda fase de la tarea:

"SEGUNDA FASE:

Define unos indicadores de evaluación del problema que has enunciado, resuelto y entregado en la Primera Fase del taller "Segunda tarea de evaluación" que sirvan para evaluar tu propia tarea (evaluarte como creador de problemas adaptados a un nivel y en un contexto fijados), y que respondan a los siguientes aspectos:

- *IDONEIDAD EPISTÉMICA:*
  - *Situación-problema*
  - *Lenguajes*
  - *Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)*
  - *Argumentos*
  - *Relaciones*
- *IDONEIDAD COGNITIVA:*
  - *Conocimientos curriculares previos (explicitándolos)*
  - *Dificultad del problema propuesto*

Recuerda que los indicadores deben ser claros, enunciados sin ambigüedad y con precisión y deben ser respondidos con facilidad (con un sí o un no), permitiendo evaluar si la tarea que se ha realizado es adecuada y si se ha explicado correctamente el proceso."

Para la segunda fase, además, se les entregó un documento de ayuda que les serviría como guía para poder crear los indicadores, que debían adaptarse a la tarea creada. Dicho documento se adaptó a partir de los indicadores de evaluación en probabilidad utilizados por Beltrán-Pellicer *et al*. (2018) que, como ya hemos indicado, son indicadores consolidados y específicos del ámbito de la probabilidad y suponen ser una herramienta útil tanto para los futuros maestros (método de autoevaluación y reflexión sobre sus producciones) como para los docentes e investigadores, ya que nos permiten valorar el conocimiento y las competencias de los futuros maestros.

6.1. Categorías del análisis del contenido

Una vez revisado y aplicado el plan para el tercer ciclo de I-A, comenzó la recolección de los datos con el grupo de futuros maestros matriculados en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III durante el curso 2019/2020. Seguimos en la misma línea que en los cursos anteriores al plantear la tarea como una actividad de carácter obligatorio que se debía resolver a través del campus virtual. La metodología empleada en el análisis de los datos se mantiene: análisis del contenido para obtener categorías de respuestas y posterior análisis bajo el prisma del modelo MKT para los subdominios CCK, SCK y KC.

De un total de 221 alumnos matriculados en la asignatura, recibimos 145 respuestas en este tercer ciclo de I-A (véase Tabla 7). Todas las respuestas recibidas pudieron ser consideradas en esta ocasión, por lo que obtuvimos $N = 145$ respuestas válidas.

Al igual que ocurrió en los dos primeros ciclos, pudimos realizar una clasificación de respuestas divididas en correctas, parcialmente correctas e incorrectas en función de cómo fueron resueltos matemáticamente los problemas y de su adaptación a 6º curso de Educación Primaria. De nuevo nos basamos en las categorías encontradas durante el primer y el segundo ciclo, estando abiertos a encontrar nuevas categorías dentro de cada uno de los tipos de respuestas. A continuación, se muestra la clasificación encontrada en el tercer ciclo de I-A:

- **Correctas:** tanto el problema como su resolución son pedagógica y matemáticamente correctas.
  - Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel.
  - Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel, pero triviales.
- **Parcialmente correctas:** en esta clasificación distinguimos entre 3 tipos de respuestas que no son correctas, pero que tampoco son completamente incorrectas.
  - **En relación con el enunciado.**
    - Problemas matemáticamente bien resueltos, pero fallos en la adaptación del enunciado.
  - **En relación con el proceso de resolución del problema.**
    - Problemas matemáticamente mal resueltos o con errores, pero se adaptan al nivel.
      - Errores conceptuales sobre probabilidad.
      - Errores de cálculo no relacionados con conceptos probabilísticos.
      - Matemáticamente correctos y adecuados al nivel, pero introduciendo notación en la resolución de nivel superior.
    - El problema no presenta resolución, pero se adapta al nivel
      - Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel.
  - **En relación con el enunciado y con el proceso de resolución.**
    - Problemas con varios apartados, unos muy fáciles bien resueltos y uno muy difícil para el nivel mal resuelto.
- **Incorrectas:**
  - Enunciado bien redactado, pero problema mal resuelto o no se resuelve y no está adaptado al nivel.
  - El enunciado carece de sentido y/o no se puede resolver con la información aportada.
  - Enunciado y resolución incorrectos, problema no adaptado al nivel.
  - No se presenta un problema de probabilidad utilizando los valores de las monedas.
  - No se presenta un problema que se resuelva calculando una probabilidad.

En la Tabla 11 se muestra un desglose del número de respuestas encontradas en cada apartado de la clasificación. En el siguiente apartado de este capítulo se ejemplificarán los tipos de respuestas encontradas en relación con los subdominios del modelo MKT considerados para este trabajo en función de los tipos de respuestas de la clasificación del tercer ciclo de I-A.

Tabla 11

Clasificación de Respuestas Obtenida en el Análisis del Contenido del Tercer Ciclo de I-A

<table>
<tr><th>TIPO DE RESPUESTA</th><th colspan="3">SUBTIPO DE RESPUESTA</th><th>RECUENTO TOTAL</th><th>TOTAL</th></tr>
<tr><td rowspan="2">CORRECTAS</td><td colspan="3">Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel</td><td>48</td><td rowspan="2">55</td></tr>
<tr><td colspan="3">Matemáticamente correctas y adecuadas al nivel, pero triviales</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="6">PARCIALMENTE CORRECTAS</td><td>En relación con el enunciado</td><td colspan="2">Bien resueltos, pero con fallos en la adaptación del enunciado</td><td>5</td><td rowspan="6">51</td></tr>
<tr><td rowspan="4">En relación con el proceso de resolución del problema</td><td rowspan="2">Matemáticamente mal resueltos o con errores, pero adaptados al nivel</td><td>Errores conceptuales sobre probabilidad</td><td>19</td></tr>
<tr><td>Errores de cálculo no relacionados con conceptos probabilísticos</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Errores relacionados con un nivel inadecuado en la notación durante la resolución</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel, pero el problema no presenta resolución</td><td>3</td></tr>
<tr><td>En relación con el enunciado y con el proceso de resolución</td><td colspan="2">Problemas con varios apartados, unos muy fáciles bien resueltos y uno muy difícil para el nivel mal resuelto</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">INCORRECTA</td><td colspan="3">Enunciado bien redactado, pero problema mal resuelto o no se resuelve y no está adaptado al nivel</td><td>8</td><td rowspan="5">39</td></tr>
<tr><td colspan="3">El enunciado carece de sentido y/o no se puede resolver con la información aportada</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="3">Enunciado y resolución incorrectos, problema no adaptado al nivel</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="3">No se presenta un problema de probabilidad utilizando los valores de las monedas</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="3">No se presenta un problema que se resuelva calculando una probabilidad</td><td>5</td></tr>
</table>

Tras la recolección de los datos y la realización del análisis del contenido observamos pocas diferencias en relación con la clasificación obtenida en el segundo ciclo de I-A. A continuación, comentaremos aquellas categorías que se han modificado respecto al ciclo anterior.

La clasificación de respuestas correctas se mantiene invariante respecto al segundo ciclo de I-A. Sin embargo, en esta ocasión el número de respuestas correctas aumentó de forma considerable con 55 respuestas de este tipo frente a las 28 encontradas en el ciclo anterior.

El grupo de respuestas parcialmente correctas es el que ha sufrido más modificaciones. En este caso no encontramos nuevas categorías, sino que desaparecen algunas de las encontradas en el ciclo anterior. Concretamente, desaparecen las categorías referentes al proceso de resolución del problema, con problemas sin resolución y con enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel con más de una pregunta que van aumentando en dificultad, y enunciado bien redactado y problema adaptado al nivel, pero con resolución trivial. En este ciclo sólo se detectan tres problemas sin resolución en los que el enunciado planteado está bien redactado y es adecuado al nivel.

La otra categoría que ha desaparecido en esta clasificación es la referente a los problemas con ambigüedades en el enunciado que no impiden la resolución estando el problema adaptado al nivel, pero que no presenta resolución. De este modo, la clasificación de respuestas parcialmente correctas queda reducida y, aunque muy similar, resulta algo más concreta.

Finalmente, dentro de las respuestas incorrectas, encontramos las mismas categorías, a excepción de la categoría de enunciado ambiguo o carente de sentido y sin resolución, que se desglosaba en dos subcategorías y que pasa a convertirse en una categoría más general en este tercer ciclo de I-A: el enunciado carece de sentido y/o no se puede resolver con la información aportada.

Como podemos comprobar, los cambios presentados en la clasificación de este tercer ciclo de I-A son mínimos respecto al ciclo anterior. De esta manera, la clasificación actual prácticamente podría servirnos como base para clasificar los problemas en cualquier próxima tanda de datos. Este resultado resulta relevante dado que nos indica que los ciclos de I-A se están saturando. Asimismo, el gran número de problemas clasificados como correctos indica que un elevado número de futuros maestros fueron capaces de plantear y adaptar correctamente el problema al nivel educativo solicitado, lo que no resulta usual en la literatura. Por todo ello, se decidió que este sería el último ciclo de I-A.

6.2. Resultados bajo el prisma del MKT

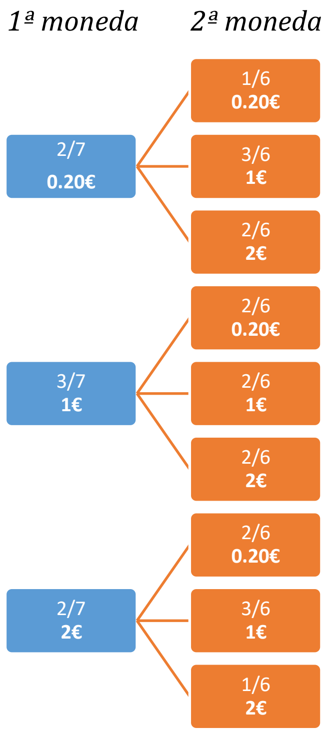
Tras la realización del análisis del contenido, pasamos entonces a realizar un análisis de los subdominios CCK, SKC y KC del modelo MKT. Al igual que ocurrió en el segundo ciclo, en algunos casos se encontraron algunas evidencias de KMH al relacionar en el problema contenidos como el cálculo de fracciones, los conceptos par o impar y los múltiplos de un número. Al relacionar las evidencias de los subdominios del MKT con la clasificación del análisis del contenido, surgen las categorías que se muestran en los siguientes apartados.

6.2.1. Problemas matemáticamente correctos adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria (TIPO 1)

En este tercer ciclo de I-A volvemos a encontrarnos con un grupo de respuestas en las que los futuros maestros plantean un problema que es matemáticamente correcto y que además se adecúa al nivel educativo solicitado. Esta situación ya la encontrábamos en los dos primeros ciclos, pero nunca habíamos encontrado un grupo tan abundante de futuros maestros que presentasen un problema completamente adecuado a las instrucciones y al nivel, con un total de 48 respuestas de este tipo. En sus problemas, los futuros maestros muestran un CCK y SCK profundos al adaptarse tanto matemática como pedagógicamente a nivel solicitado. Es decir, el contenido matemático se adapta a nivel y la forma de resolver el problema concuerda con dicho nivel. En relación con el KC, se han encontrado evidencias en 36 de las respuestas, citando los contenidos y partes concretas del currículo. En E30.a podemos ver un ejemplo de problema clasificado en este grupo de respuestas.

E30.a: *Mar va a comprar al kiosko su revista favorita, la cual cuesta 1.20€. Su padre le ha dado un monedero que contiene 2 monedas de 20 céntimos, 3 de un euro y 2 de 2 euros. Si coge dos monedas sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que le dé para pagar?*

Resolución:



$$P(\geq 1.2€) = \frac{2}{7}\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)+\frac{3}{7}\left(\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\right)+\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{6}+\frac{2}{7}=\frac{20}{21}$$

Como podemos observar, tanto el enunciado como la resolución son correctos, lo que muestra evidencias de CCK. Incluye un diagrama de árbol para ayudarse en la resolución, que es adecuado para el nivel educativo solicitado, evidenciando en su resolución que sabe hacer una adaptación al nivel, mostrando evidencias de SCK. Además, en esta producción, la futura maestra hace explícito que trabaja en base al currículo, mostrando evidencias de KC, como podemos observar en E30.b:

E30.b: *Siguiendo el currículo de Asturias, este ejercicio sería adecuado para 6º de Primaria ya que plantea una situación de azar en la vida cotidiana, teniendo que estimar la probabilidad de un suceso. Además, trabajamos y repasamos las operaciones con fracciones, así como el dinero. También hay una reflexión y razonamiento detrás para superar las dificultades implícitas que puede suponer la resolución de este.*

Más adelante en su explicación indica lo siguiente:

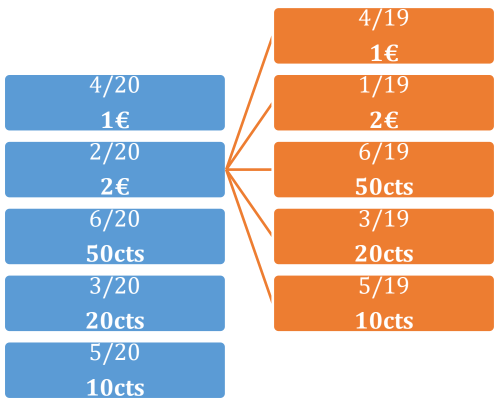
E30.c: *A veces sacamos las monedas y no las miramos hasta que las tenemos ya en la mano, así que por qué no preguntarles qué pasaría si cojo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que me dé para pagar? De esta manera, tienen que reflexionar qué opciones son válidas, sabiendo que con que sumen igual a 1.2€ o más ya podemos comprar la revista, y por lo tanto hallar la probabilidad de que sea así. Esto se ve muy bien en el diagrama de árbol (podemos imaginarnos el orden en el que van saliendo las monedas) aunque también podemos utilizar la regla de Laplace.*

Se pueden ver evidencias de KC también en este extracto, al indicar que el diagrama de árbol y la regla de Laplace son adecuados para trabajar con los estudiantes de este curso. Veamos otro ejemplo de problema correcto y adecuado en E31.a.

E31.a: *Disponemos de 4 monedas de 1€, 2 monedas de 2€, 6 monedas de 50cts, 3 monedas de 20cts y 5 monedas de 10cts. Están todas mezcladas en la cartera. Si no somos capaces de identificar cada moneda por su forma, ¿qué probabilidad tenemos de extraer una moneda de 2€? ¿Y una de 20cts después de haber sacado una de 2€? Representa la solución con la ayuda de un diagrama de árbol.*

Como podemos observar, el problema podría parecer sencillo, inicialmente. Sin embargo, en la segunda pregunta, el problema se complica un poco al tener que calcular una probabilidad condicionada. Esto podría resultar complejo para el alumnado de 6º de Educación Primaria, pero la forma de resolverlo facilita mucho la resolución, al utilizar para ello un diagrama de árbol, como podemos ver en E31.b, lo que muestra evidencias de SCK.

E31.b: *Resolución:*



P (2€) = $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ → *Probabilidad de extraer una moneda de 2€*

P (20cts después de sacar la de 2€) = $\frac{3}{19}$ → *Probabilidad de extraer una moneda de 20cts después de haber extraído una moneda de 2€*

En E31.b usa directamente la rama del árbol, sin necesidad de utilizar ninguna fórmula, lo cual facilita la resolución sobremanera, como ya hemos indicado. Además, se indica lo siguiente:

E31.c: *He optado por no representar el resto de las ramas del árbol porque no son necesarias para realizar el cálculo.*

En el extracto E31.c podemos observar un profundo CCK (que se muestra también a lo largo de la resolución del problema) indicando que no es necesario realizar el árbol completo sino sólo la rama de interés, que es aquella en la que previamente ha sacado la moneda de 2€. Esta futura maestra, también muestra evidencias de KC al indicar que para diseñar su enunciado se ha basado en los contenidos del currículo especificando aquellos contenidos que aparecen en su problema. Podemos verlo en el ejemplo E31.d.

E31.d: *Este enunciado es adecuado para 6º de Primaria ya que para hacerlo me he basado en los contenidos del currículo.*

CONTENIDOS DE 6º PRIMARIA. Bloque 5: estadística y probabilidad.

- *Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.*
- *Cálculo de probabilidades: los casos favorables entre los casos posibles.*

Se trata la representación de probabilidad por medio de árboles, la probabilidad clásica y la probabilidad condicionada, abarcando así distintos aspectos de la probabilidad.

6.2.2. Problemas matemáticamente correctos, adecuados al nivel de 6º curso de Educación Primaria cuya resolución se restringe a un único caso convirtiendo el problema en trivial (TIPO 2)

En esta ocasión encontramos un pequeño grupo de respuestas que presentan un nivel demasiado sencillo planteando un problema cuya solución se reduce a un único caso, convirtiendo dicho problema trivial. En ellas podemos detectar un CCK profundo. Sin embargo, se presenta un SCK insuficiente debido a la falta de adaptación del nivel. En el ejemplo E32.a, podemos ver un enunciado de este tipo de pregunta:

E32.a: ***PROBLEMA***

La madre de Javier le ha dado 4.75€ para que vaya a comprar 1 kilo de patatas al supermercado.

En lugar de darle un billete de 5€, para que resulte más cómoda para la cajera, le da la siguiente cantidad de dinero:

- *2 monedas de 2€*
- *1 moneda de 1€*
- *2 monedas de 50 céntimos*
- *2 monedas de 20 céntimos*
- *1 moneda de 10 céntimos*
- *4 monedas de 5 céntimos*
- *2 monedas de 2 céntimos*
- *1 moneda de 1 céntimo*

Con todo el dinero en la cartera, calcula la probabilidad de que la primera moneda que extraiga Javier de su cartera sea de 5 céntimos.

El enunciado es correcto (evidencias de CCK), pero, como se puede notar, la pregunta del problema, que solicita determinar la probabilidad de que la primera moneda extraída sea de 5 céntimos, se resuelve directamente sumando el total de monedas de la cartera y buscando el dato del enunciado que indica cuántas monedas de 5 céntimos hay, en este caso, son “4 monedas de 5 céntimos”. El problema resulta, por tanto, trivial, ya que se resuelve de forma directa, mostrando falta de SCK por parte del futuro maestro que la plantea al no adaptarla a las instrucciones, que pedían evitar que fuese trivial.

La resolución aportada es correcta (evidencias de CCK).

E32.b: *RESOLUCIÓN*

Regla de Laplace = nº de casos favorables/ nº de casos posibles

P (Moneda de 5 céntimos) = 4/15 = ***0.266***

De los siete problemas encontrados en esta clasificación, cinco presentan evidencias de KC, siendo E32 uno de ellos, como se muestra en E32.c.

E32.c: *Me parece que el problema propuesto se ajusta al nivel cognitivo de un alumno de 6º de Primaria. Además, si tenemos en cuenta el currículo de Primaria del Principado de Asturias, en el bloque 5 (Estadística y Probabilidad), aparecen contenidos relacionados con este aspecto y que el alumno sería capaz de resolver.*

Otro factor a tener en cuenta, como es la regla de Laplace, también aparece reflejado en los contenidos para 6º, ya que es una manera de resolver este problema.

6.2.3. Problemas parcialmente correctos, que muestran evidencias de un SCK deficiente debido a la falta de adaptación del problema el nivel educativo (TIPO 3)

En esta ocasión encontramos un pequeño grupo de futuros maestros que plantean un problema de nivel superior y lo resuelven de forma correcta. Podemos decir que estos futuros maestros poseen un CCK profundo. Sin embargo, muestran deficiencias en su SCK, al no conseguir adaptar el problema al nivel educativo solicitado, como ocurre en E33.a.

E33.a: ***Problema:*** *En la sala de profesores del colegio hay una vieja máquina de café, con un precio fijo de 25 céntimos, y en la que hay que introducir el importe exacto, porque no da cambio. Solo admite monedas de 5, 10 y 20 céntimos.*

Dos veces al mes un trabajador va a limpiarla, rellenar los productos y hacer la recaudación. En estos dos meses de 2020, se han obtenido los siguientes resultados:

	Monedas 20 cent.	***Monedas 10 cent.***	***Monedas 5 cent.***
Enero (1ª recogida)	*40*	*16*	*58*
Enero (2ª recogida)	*75*	*26*	*98*
Febrero (1ª recogida)	*85*	*29*	*102*
Febrero (2ª recogida)	*80*	*21*	*103*

1. *¿Qué combinaciones de monedas son posibles para sacar un café?*
2. *¿Cuántos cafés se han vendido en estos dos meses?*

3. *Tomando como referencia estos resultados, ¿cuál es la probabilidad de que el próximo café que saquen sea pagado con una moneda de 20 y otra de 5 céntimos?*
4. *¿Sería posible que dicho café se pagase con otra combinación de monedas? Si es así, ¿qué probabilidad habría?*

Es claro que algunas de las preguntas no corresponden con el cálculo de una probabilidad. Esto no es incorrecto, pues no se les restringe a que sólo deba calcularse la probabilidad, aunque puede complicar el problema. Si el alumnado tiene dificultades para calcular las combinaciones posibles, ya que no se corresponden con una cantidad fija de monedas, sino que el número de monedas varía en función de su valor, ya no será capaz de continuar con los siguientes apartados. Por otra parte, las propias cuestiones ya son complicadas de por sí para el nivel solicitado. El propio apartado dos puede resultar complejo, teniendo que darse cuenta los infantes de que para hacer el cálculo del total de cafés vendidos deben determinar cuántas monedas hay de cada tipo, determinar la cantidad total de dinero de la máquina y dividir entre el precio del café. Respecto al tercer apartado, el alumnado debe deducir cuántas veces se combinan las monedas de 20 céntimos y 5 céntimos. Esto puede resultar complejo, ya que deberán darse cuenta de que, al tener que introducir el importe exacto, las únicas opciones que tienen son tomar el número de monedas de 20 céntimos como el número total de casos favorables. Este razonamiento supera el nivel de 6º de Primaria. Si no son capaces de realizar alguno de los apartados anteriores, además, no podrán realizar el último apartado, que se relaciona con el apartado 3. El nivel, por tanto, supera el curso especificado y, aunque el futuro maestro lo resuelve correctamente, muestra falta de evidencias de SCK por no adaptarlo al nivel.

En este grupo de problemas, cuatro futuros maestros muestran evidencias de KC al citar expresamente el currículo, como es el caso del futuro maestro de E33, que se muestra en E33.b.

E33.b: *Pienso que este problema es adecuado, porque mediante él se trabajan unos contenidos establecidos en el área de matemáticas del currículo, bloque 5: estadística y probabilidad de 6º EP, como son:*

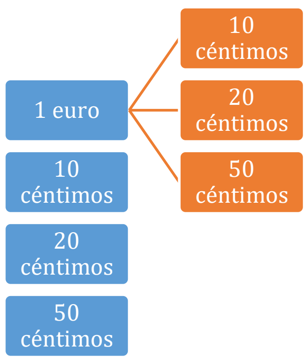
- *Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.*
- *Cálculo de probabilidades: los casos favorables entre los casos posibles. (Regla de Laplace).*
- *Necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.*

Por otra parte, también hay un pequeño grupo que muestra evidencias de CCK al plantear y resolver el problema de forma correcta, pero con falta de evidencias de SCK al introducir notación inadecuada, que utilizaríamos en niveles superiores, en la ESO. Se incluye un ejemplo, a continuación, en E34.a.

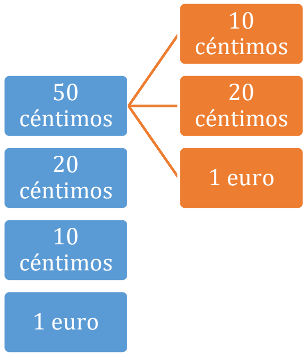
E34.a: *Dani ha ido a comprar el pan y le han sobrado varias monedas en la cartera, en total cinco, entre las cuales hay una moneda de 10 céntimos, dos de 20 céntimos, una de 50 céntimos y otra de 1 euro. Más tarde va al quiosco, y como su cartera es muy pequeña sólo puede sacar las monedas de una en una. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda moneda extraída sea de 20 céntimos si se sabe que la primera es de 1 euro? ¿Y de que la primera moneda sea de 50 céntimos y la segunda de 10 céntimos?*

Como podemos ver, el enunciado es adecuado, y podría ser un problema planteado para alumnado del nivel solicitado. La resolución que hace la futura maestra es correcta matemáticamente mostrando evidencias de CCK, pero introduce intersecciones, notación que no se utiliza hasta niveles superiores, como muestra el ejemplo E34.b.

E34.b: *P (20 céntimos/1euro) = 2/4*



P (50 céntimos ∩ 10 céntimos) = 1/5 x 1/4 = 1/20



De este grupo de respuestas, seis muestran evidencias de KC. En E34.c, se observa que esta futura maestra no muestra evidencias de KC, pero sí indicios, al indicar que los diagramas de árbol son adecuados para el nivel educativo requerido para el problema, aunque no hace referencia específica al currículo. Además, la redacción puede resultar algo confusa.

E34.c: *A la hora de pensar el enunciado, he propuesto preguntas en las que podrán ayudarse o no tanto de una tabla como de un diagrama de árbol, lo cual sería recomendable. Los contenidos que se requieren son variados, precisan de operaciones y me parecen adecuados para el nivel educativo al que está dirigido el problema.*

6.2.4. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de CCK pobre, pero en los que el enunciado podría ser adecuado para el nivel (TIPO 4)

En este tercer ciclo encontramos un grupo de 21 respuestas en las que el enunciado es adecuado al nivel educativo y está bien planteado, pero en las que la resolución es incorrecta. La mayor parte de estas respuestas plantean errores conceptuales sobre probabilidad, siendo los errores combinatorios el problema detectado con mayor frecuencia. En E35 se muestra un ejemplo en el que una futura maestra construye de forma incorrecta el espacio muestral de su problema que, además, resulta ser trivial:

E35: *En una urna tenemos tres monedas, dos de 50 céntimos y una de 1 euro. Se extrae una moneda al azar:*

¿Cuál es la probabilidad de que la moneda extraída sea de 50 céntimos?

Resolución:

Espacio muestral= 50 céntimos, 50 céntimos, 1 euro

Casos favorables: 2 (50 cént.; 50 cént.)

Casos posibles: 3 (50 céntimos, 50 céntimos, 1 euro)

P (moneda de 50cént) = 2/3= 0.66

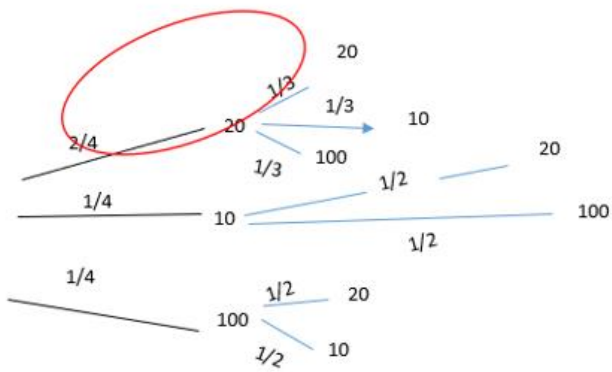
Se ve que la resolución es correcta, sin embargo, el espacio muestral está mal planteado al repetir dos veces la moneda de 50 céntimos, que sólo debería aparecer una vez, ya que en el espacio muestral no se indica la frecuencia con la que aparece un valor. Esto muestra que la futura maestra no domina el concepto del espacio muestral evidenciando una falta de CCK. La mayoría de estos problemas muestran evidencias de KC al citar explícitamente el currículo.

El resto de las respuestas, (cuatro respuestas) presentan errores de cálculo relacionados principalmente con operaciones con fracciones. Vemos un claro ejemplo en E36.a.

E36.a: *Cristina tiene 4 monedas (0.20 €; 0.20 €; 0.10 € y 1 euro). Si coge dos monedas al azar, halla la probabilidad de que las dos sean de 0.20 €.*

Solución:

Mediante el diagrama de árbol



P (2 de 0.20 €) = 2/4 x 1/3 = 3/12 = 1/4 = 0.25

La elipse roja que aparece en el diagrama de árbol (aunque aparece algo desplazada) representa que va a hacer los cálculos utilizando esas ramas del árbol. Podemos apreciar cómo, al hacer el producto, multiplica los denominadores y suma los numeradores. Esto supone un grave fallo de cálculo en el dominio de las operaciones con fracciones, por lo que se muestra una falta de CCK.

Respecto al KC en este grupo de problemas, dos de ellos muestran evidencias de KC al citar explícitamente el currículo. Esta futura maestra muestra indicios de KC al indicar la justificación aportada en E36.b, que deja entrever que conoce los contenidos del currículo para el nivel solicitado, pero sin indicarlo de forma explícita.

E36.b: *He elegido este problema, ya que resulta fácil de entender para los alumnos de educación primaria. El diagrama de árbol es uno de los métodos más utilizados y a su vez más sencillos de entender y realizar. He puesto un problema de la vida cotidiana, como puede ser encontrar el dinero exacto en una cartera.*

De esta forma, concluimos que los futuros maestros que plantean estos problemas muestran evidencias de SCK al adaptar sus problemas al nivel y plantear sus enunciados correctamente, pero, a su vez, muestran una evidente falta de CCK, dado que no son capaces de resolver sus propios problemas correctamente fallando en cálculos o en conceptos matemáticos específicos.

6.2.5. Problemas parcialmente correctos en los que se muestran evidencias de SCK al presentarse un problema adaptado al nivel e indicios de CCK, pero no evidencias, al estar el problema bien enunciado, pero no presentarse resolución (TIPO 5)

Volvemos a encontrarnos algunos problemas cuyo enunciado se plantea correctamente y se adapta al nivel educativo, pero que no presentan resolución. En este tercer ciclo, sin embargo, el número de problemas que no presentan resoluciones es mucho más bajo que en el segundo ciclo, al pedir expresamente que se resolviese el problema. En esta clasificación encontramos solamente tres problemas de este tipo en los que podemos detectar ciertas evidencias de SCK al encontrarse el problema adaptado a nivel y plantearse de manera correcta, pero no podemos determinar si esos alumnos saben resolverlo correctamente, por lo que no encontramos evidencias de CCK. Uno de estos enunciados puede verse en E37.a.

E37.a: *Para ir a la compra, mi madre me ha dado un monedero que contiene 6 monedas de 10 cent., 3 monedas de 20 cent. y 2 monedas de 50 cent. El precio de los recados a comprar es de 80 cent.*

A la hora de pagar, voy sacando monedas de una en una al azar. La 1ª moneda que saco es de 20 cent. ¿Qué probabilidad hay de que pueda pagar la cuenta sin sacar más de 3 monedas en total?

Solo un problema muestra evidencias de KC al citar el currículo explícitamente en sus explicaciones y corresponde al mismo futuro maestro E37. Se muestra en E37.b.

E37.b: *La tarea es adecuada para el nivel educativo propuesto ya que con ella se abordan contenidos de este nivel, tales como "Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso" y "Cálculo de probabilidades: los casos favorables entre los casos posibles". Además de que los conocimientos necesarios para su realización (aparte de conceptos de probabilidad) son la suma, la multiplicación y el m.c.m. (conceptos aprendidos en cursos previos).*

En E37.b, podemos observar también como este futuro maestro muestra indicios de KMH, al conectar los contenidos a trabajar con conocimientos previos necesarios para la realización del problema como la suma, la multiplicación o el mínimo común múltiplo.

6.2.6. Problemas parcialmente correctos e incorrectos en los que se muestran evidencias de falta de CCK y SCK (TIPO 6)

En el resto de los problemas de la clasificación detectamos una falta de CCK y de SCK. Solo una de las respuestas es parcialmente correcta, presentando varios apartados adecuados al nivel y resueltos correctamente y un apartado cuyo nivel es demasiado complicado para 6º curso de Educación Primaria y que, además, se resuelve de forma incorrecta.

Las otras 39 respuestas son todos los problemas incorrectos que se han encontrado en esta tanda de datos. De ellas, ocho presentan un enunciado qué está correctamente redactado, pero cuya resolución es incorrecta o no se presenta resolución. Además, esos problemas no se adaptan al nivel. Por otro lado, seis respuestas plantean un enunciado carente de sentido o que no puede resolverse con la información aportada, por lo que la resolución también es incorrecta. Otros trece problemas plantean un enunciado y una resolución incorrectos, además de no adaptarse al nivel. De las respuestas restantes, siete plantean problemas de probabilidad no relacionados con los valores de las monedas, generalmente problemas de cara/cruz, y cinco no plantean problemas de probabilidad. En todas estas respuestas podemos determinar una falta de conocimiento matemático y pedagógico. Los futuros maestros muestran falta de CCK y de SCK al no conseguir adaptar (tanto el enunciado propuesto en la tarea, como el nivel educativo solicitado) y resolver el problema de manera adecuada.

En lo relativo al KC, podemos encontrar aproximadamente la mitad de los futuros maestros que hacen referencia al mismo en sus explicaciones, con un total de 22 respuestas en las que aparecen explicaciones relativas a la adaptación del problema al currículo. En las otras 18 respuestas no aparece ninguna información que haga pensar que conozcan los contenidos del currículo o los utilicen para la creación y resolución de sus respectivos problemas. A continuación, en E38, E39 y E40, podemos ver algunos ejemplos de esta clasificación.

E38: *Pablo ha ido al supermercado a comprar lo que le ha mandado su madre. Ha tenido que comprar dos brick de leche, una barra de pan y dos docenas de huevos. Su madre Ana le ha dado 10 euros para pagar y le ha pedido por favor que le den el mínimo dinero suelto posible en la vuelta.*

PRECIOS:

BRICK DE LECHE 0.75€

BARRA DE PAN 0.90€

DOCENA DE HUEVOS 2.12€

- ¿Cuánto dinero va a gastar Pablo?

- ¿Cuánto dinero le tienen que dar de vuelta a Pablo?

- Si a Pablo le diese igual la forma en qué le devuelvan el dinero. Expón una forma posible, indicando las monedas que puede recibir.

- Indica de qué forma debe recibir Pablo la vuelta para que le den el mínimo dinero suelto posible.

-Si la vuelta fuesen 36 céntimos, establece al menos 6 posibilidades de combinación, si en la caja hay:

1 moneda de 2€

3 monedas de 1€

3 monedas de 50 céntimos

1 moneda de 20 céntimos

3 monedas 10 céntimos

2 monedas de 5 céntimos

3 monedas de 2 céntimos

6 monedas de 1 céntimo

Como podemos observar en E38, la futura maestra que plantea el problema no indica ninguna pregunta que se resuelva calculando una probabilidad. Como esta era la instrucción principal de la tarea, se considera que presenta falta de SCK ya que no está realizando la tarea que se le solicita. Algunas de las preguntas son de tipo combinatorio, lo que está relacionado con el cálculo de probabilidades, pero era necesario que alguna de las preguntas se respondiese calculando una probabilidad.

E39: *Tengo una moneda de 50 céntimos, una de 20 céntimos y otra de 10 céntimos. Si las lanzo al aire las 3 a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que en las 3 monedas salga cara o cruz?*

En E39 podemos observar que el problema planteado es un problema de lanzamiento de monedas para comprobar si sale cara o cruz. Los valores de las monedas no importan, por lo que tampoco sigue las instrucciones, mostrando falta de SCK. Además, la pregunta resulta ambigua, ya que pide calcular la probabilidad de que en las tres monedas salga cara o cruz, pero no se comprende si es que se calculen todas las posibles combinaciones o si se refiere a que en las tres monedas salga cara simultáneamente o salga cruz simultáneamente. Debería clarificarse. Por otra parte, el problema no presenta resolución, por lo que no encontramos evidencias de CCK.

E40: *Tenemos en una hucha 6€ en un total de 11 monedas de distintos valores (1€; 2€; 0.5€; 0.2€; 0.1€), habiendo una de cada tipo como mínimo. He decidido ir al kiosko a comprar sobres de una colección que este año espero completar y he negociado con mi madre que yo sacaré 3 monedas de mi hucha sin mirarlas y ella me dará el valor de mis monedas para que sumando ambos valores pueda comprarme todos los sobres que quiera. Sabiendo que cada sobre cuesta 0.8€, ¿qué cantidad de sobres podré comprarme más probablemente?*

En E40, el futuro maestro no incluye ninguna restricción que limite el tamaño del espacio muestral, por lo que incluso resultaría un problema complejo para un adulto. Tampoco sabemos cuántos sobres podemos comprar, de hecho, es la pregunta que nos hace el problema, pero sin ninguna restricción no podemos resolverla.

6.3. Análisis de los indicadores de evaluación

Dado que en el segundo ciclo de I-A pudimos comprobar la escasez de conocimientos que mostraban los futuros maestros en torno al concepto de indicador de evaluación, decidimos introducir una sesión trabajando con la definición y sus aplicaciones. En dicha sesión, se definió el concepto de indicador de evaluación. Además, se introdujeron distintos ejemplos de indicadores de evaluación, no sólo de probabilidad, sino en general, y sus aplicaciones prácticas en diversos problemas, con lo que los futuros maestros pudieron manejarlos en casos prácticos. Asimismo, nos basamos en las ideas aportadas en Beltrán-Pellicer *et al*. (2018) sobre los indicadores de idoneidad didáctica en probabilidad para centrar el concepto en los contenidos de probabilidad que estábamos tratando.

Los futuros maestros tuvieron la oportunidad de proponer ejemplos de indicadores específicos para problemas concretos propuestos en el aula, trabajando en pequeños grupos. Con esta sesión de formación, pretendíamos clarificar el concepto de indicador de evaluación, para que los futuros maestros no lo confundiesen con las rúbricas, con los criterios de corrección de la tarea, o con los criterios de evaluación del currículo, que fueron los errores más comunes detectados en el apartado de creación de indicadores del segundo ciclo de I-A.

Previo a la sesión de formación, los futuros maestros recibieron las instrucciones de la primera fase de la tarea para enunciar y resolver el problema de probabilidad. Después de disponer de unos días para poder pensar en cómo diseñar su problema, se introdujo la sesión de formación y, tras ella, en la segunda fase, se les propuso la creación de los indicadores de evaluación. Durante el período de duración de la segunda fase, la primera fase continuó abierta para la entrega, de manera que los futuros maestros tuvieron la posibilidad de reflexionar sobre su propio enunciado y su resolución, y dispusieron de un tiempo extra para realizar las mejoras oportunas en sus respectivos problemas. Los indicadores de evaluación suponen una ayuda para que los futuros maestros puedan detectar los puntos fuertes y débiles de su tarea, ofreciéndoles la opción de mejorarla a posteriori. En la Tabla 12, podemos observar los distintos tipos de respuestas aportadas por los futuros maestros durante el tercer ciclo de I-A.

Después de realizar la formación en indicadores de evaluación, podemos observar una gran mejora en su creación por parte de los futuros maestros. Si comparamos con los resultados obtenidos durante el segundo ciclo, podemos ver que en ese ciclo anterior sólo 38 de las 135 respuestas obtenidas presentan unos indicadores de evaluación adecuados. Esto supone un porcentaje del 28.15 % de respuestas en las que los indicadores resultaron adecuados. En esta ocasión encontramos 72 respuestas de las 145 obtenidas, en las que los indicadores de evaluación presentados son adecuados. Esto supone un porcentaje del 49.66 % de respuestas en las que los indicadores se enuncian correctamente, lo cual nos indica la utilidad de la sesión de formación previa realizada en torno al concepto de indicador de evaluación.

Tabla 12

Tipos de Indicadores de Evaluación Diseñados en el Tercer Ciclo de I-A

GRUPOS DE PROBLEMAS EN FUNCION DEL ANALISIS DEL MKT	INDICADORES DE EVALUACIÓN				TOTALES
	ADECUADOS	INADECUADOS			
	Los indicadores son adecuados y se adaptan al problema	Criterios de corrección de la tarea (alumnado de primaria como resolutor)	Convierten nuestro enunciado en una pregunta	No se plantean indicadores o no tienen sentido	
TIPO 1	28	14	2	4	**48**
TIPO 2	5	13	0	0	**18**
TIPO 3	4	1	0	0	**5**
TIPO 4	20	9	0	2	**31**
TIPO 5	1	1	1	0	**3**
TIPO 6	14	13	1	12	**40**
TOTALES	**72**	**51**	**4**	**18**	**145**

A continuación, pasaremos a mostrar varios ejemplos de los tipos de indicadores encontrados en la tarea. Comenzamos con E41, donde se muestra un ejemplo en el que se han planteado unos indicadores adecuados.

E41: *IDONEIDAD EPISTÉMICA:*

- *Situación-problema:*
  - *Se presenta el enunciado con un lenguaje sencillo y de forma concreta, que facilita la lectura lineal.*
  - *Se muestra un resumen de los datos del enunciado, que posibilita la interpretación de los datos y su posterior inferencia.*
- *Lenguajes:*
  - *Se emplea un lenguaje adecuado para el nivel del alumnado.*
  - *Se dispone de distintos modos de expresión matemática, tanto verbal como simbólica.*
  - *Se sugieren situaciones y expresiones matemáticas para interpretar.*
- *Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)*
  - *Es preciso tener conocimientos sobre probabilidad para poder responder.*

- *El proceso de resolución del problema muestra las distintas fases (Identificación, Definición, Ejecución, Actuar y Logro).*
- *Los procedimientos que se desarrollan son claros y correctos, además de estar adaptados al nivel educativo que se exige.*

- *Argumentos:*
  - *Se fomenta la argumentación por parte del alumnado.*
  - *Se impulsa el desarrollo de explicaciones y demostraciones matemáticas por parte del alumnado.*
- *Relaciones:*
  - *Se relacionan conceptos e ideas que intervienen directamente con la resolución del problema.*

IDONEIDAD COGNITIVA:

- *Conocimientos curriculares previos:*
  - *El alumnado tiene los conocimientos matemáticos necesarios para dar solución al problema.*
- *Dificultad del problema propuesto:*
  - *La dificultad del problema presentado es adecuada al nivel propuesto.*

También hemos podido observar que, en esta ocasión, no se ha encontrado ningún caso en el que los futuros maestros confundan los indicadores de evaluación con los criterios de evaluación del currículo de Educación Primaria. Además, ha disminuido el número de casos en el que los futuros maestros plantean los indicadores convirtiendo el enunciado en una pregunta.

Sin embargo, y a pesar de la formación recibida en indicadores de evaluación, aún seguimos encontrando varios tipos de errores en la creación de los indicadores de evaluación. Entre esos errores podemos encontrar que hay un grupo casi tan grande como el anterior que confunde los indicadores de evaluación con criterios de corrección de la tarea, considerando esos indicadores como una especie de rúbrica para evaluar al alumnado como resolutores de su tarea, y no para realizar una autoevaluación sobre su propio trabajo como creadores y resolutores de problemas, adecuados a un nivel específico de Educación Primaria. Más aún, durante el segundo ciclo, este grupo de futuros maestros suponía un 22.96 % del total, mientras que en este tercer ciclo el porcentaje ha aumentado a un 35.17 % del total. Esto nos hace pensar que aún es necesaria más formación en indicadores específicos de didáctica de la matemática y en la explicación de la tarea.

A continuación, se muestran varios ejemplos en los que los futuros maestros plantean los indicadores de evaluación como criterios de corrección de la tarea. En el ejemplo E42, podemos ver como la futura maestra plantea unos indicadores dirigidos a los alumnos de Educación Primaria cuando se enfrenten a la resolución del problema. Además, no se centra en algunos aspectos como el contenido pedagógico del problema, dado que no considera los indicadores como un medio de autoevaluación. De hecho, como estamos comentando, no podemos decir que los apartados planteados sean indicadores de evaluación, sino que son criterios de corrección de la tarea.

E42:

- *Muestra interés a la hora de resolver el problema.*
- *Entiende el concepto de probabilidad.*
- *Calcula la probabilidad de un suceso utilizando la Regla de Laplace.*
- *Explica, con autonomía, los razonamientos que desarrolla mientras realiza el problema.*
- *Realiza dibujos para comprender y realizar mejor el problema.*
- *Registra datos obtenidos de problemas con monedas sabiendo qué monedas son mayores que otras.*
- *Razona y reflexión sobre las dificultades encontradas al resolver el problema.*
- *Obtiene información de un enunciado y comprende los datos que aparecen.*

En E43, podemos observar otra propuesta de indicadores en la que el futuro maestro se refiere al alumnado de primaria como resolutores del problema. Los indicadores de dicho ejemplo se presentan de manera que puedan responderse con un sí o un no, como se pedía en el enunciado, sin embargo, de nuevo, no nos encontramos ante indicadores de evaluación de la tarea. A pesar de adaptar sus afirmaciones a algunos de los aspectos solicitados (fundamentalmente aspectos epistemológicos) como los contenidos y las relaciones, podemos observar cómo se centra en determinar si el alumno o alumna de primaria conoce los contenidos y es capaz de resolver el problema.

E43:

INDICADORES	*SI*	*NO*
Conoce los conceptos básicos de probabilidad		
Sabe qué tipo de probabilidad cumple este problema		
Aplica diagramas de árboles para resolver el problema		
Resuelve el problema indicando las relaciones entre conceptos		
Resuelve un problema de probabilidad ajustado a 6º de Primaria		

Por otra parte, es remarcable la insistencia en centrarse en los aspectos de contenido matemático obviando los de tipo pedagógico, como también puede observarse en los ejemplos E44 y E45, que sólo muestran afirmaciones en torno a los contenidos matemáticos, como las distintas definiciones de probabilidad, el proceso de resolución utilizado, los heurísticos empleados para la resolución (como el uso de diagramas de árbol), o las explicaciones seguidas en el proceso de resolución.

E44:

- *El alumno conoce los conceptos de probabilidad.*
- *Sabe cómo realizar los cálculos para obtener el resultado.*
- *Realiza correctamente los diagramas de árbol.*
- *Distingue los tipos de probabilidad.*
- *Determina el resultado en el tiempo establecido.*
- *Representa las posibilidades dentro de una probabilidad gráficamente.*

E45:

- *Reconoce como habitual el contexto de la situación-problema.*
- *Sabe que el tipo de fenómeno es aleatorio.*
- *Comprende el enunciado de la situación-problema.*
- *Utiliza algún tipo de ilustración para resolver la situación-problema.*
- *Aplica correctamente la expresión matemática correspondiente con la probabilidad.*
- *Utiliza el cálculo de probabilidad asociado a casos favorables entre casos posibles.*
- *Indica el procedimiento que le ha llevado a la solución de la situación-problema.*
- *Representa de manera correcta los datos de la situación-problema.*

En E44 y E45, los futuros maestros indican sólo aspectos de contenido matemático y no pedagógico, lo cual resulta coherente ya que se dirigen al alumnado como resolutores y no a sí mismos como creadores de problemas. Esta situación se repite en numerosas ocasiones, incluso haciéndose evidente la tendencia a centrarse en los apartados de conocimiento matemático en algunos ejemplos en los que los indicadores se plantean de forma correcta, como podemos observar en E46. En este ejemplo se observa que se plantean unos indicadores adecuados, pero, aunque podemos notar alguna referencia a los aspectos pedagógicos, como cuando se refiere a la adecuación del contexto al nivel educativo, se muestra una clara inclinación a crear indicadores más centrados en los contenidos matemáticos. Esto nos hace pensar que la creación de indicadores de evaluación les resulta más sencilla en lo referente a este tipo de contenidos, siendo más complicada la creación de indicadores relacionados con los aspectos pedagógicos, lo que supone que los futuros maestros posean poca capacidad de reflexión sobre el proceso de evaluación y, sobremanera, de autoevaluación.

E46:

- *El vocabulario está adaptado al nivel educativo de 6º de Educación Primaria.*
- *El problema se resuelve mediante la probabilidad clásica o Regla de La Place [sic].*
- *Se emplea la representación del diagrama de árbol.*
- *Se apoya en conocimientos anteriores de operaciones necesarias para la resolución de problemas: suma y resta.*
- *Se apoya en conocimientos anteriores de operaciones de probabilidad necesarias para la resolución del problema: número de casos favorables, número de casos posibles: regla de La Place.*
- *Se utilizan términos probabilísticos.*
- *Fomenta la argumentación por parte del alumno.*
- *El nivel del problema se adecua al curso de 6º de Educación Primaria.*
- *El contexto de la situación-problema es cercano a la vida diaria del alumno.*

Por otro lado, también podemos observar que ha disminuido el número de futuros maestros que convierte nuestro enunciado sobre los indicadores de evaluación en una pregunta, con sólo cuatro respuestas de este tipo frente a las 31 respuestas encontradas en el ciclo anterior, como se muestra en E47.

E47:

- *¿Los contenidos abordados siguen el currículum de 6º de Primaria en el bloque de estadística y probabilidad?*
- *¿Es un enunciado verosímil?*
- *El planteamiento del problema y la pregunta o situación a resolver ¿están correctamente planteados?*
- *¿Ofrece alguna dificultad para el alumno/a que lo va a resolver?*
- *¿Es un problema factible?*

A pesar de haberse reducido considerablemente el número de respuestas en las que no se plantean indicadores o en las que los indicadores planteados no tienen sentido, aún nos encontramos 18 futuros maestros clasificados en este grupo, lo cual supone un 12.41 % del total de respuestas. En el ejemplo E48, podemos ver que el futuro maestro no plantea indicadores, sino que da una explicación que nada tiene que ver con los indicadores de evaluación. Sin embargo, como hilo conductor de su discurso, utiliza la plantilla de indicadores aportada como ayuda, hablando de la situación problema, el lenguaje, los procedimientos y la dificultad, formando todos estos conceptos parte de los indicadores de evaluación solicitados.

E48: *La situación planteada me parece que puede ser real sin ningún problema, y bajo mi punto de vista la pregunta planteada se adecúa al desarrollo de los datos del problema, el lenguaje utilizado es entendible para un niño y no da lugar a dobles sentidos.*

En cuanto al procedimiento hay que calcular primero el número total de monedas, teniendo el estudiante que saber el significado de las palabras, triple y doble para poder aplicarlo al ejercicio, en mi opinión es un problema de dificultad fácil, útil para el comienzo con el uso de cálculo de probabilidad, y que vayan traspasando de un lenguaje verbal (triple) al matemático (x3).

Por lo tanto, pese a la formación recibida, este porcentaje de indicadores incorrectos o sin sentido, es aún bastante alto. Sin embargo, hemos podido comprobar que la formación recibida relativa a los indicadores de evaluación e indicadores de idoneidad didáctica supone una sustancial mejora con respecto al ciclo anterior, lo que nos indica que es una línea de trabajo adecuada y que debemos continuar empleándola.

Podemos observar cómo en el grupo de respuestas que muestran errores tanto en el CCK como en el SCK, los futuros maestros presentan mayores dificultades para crear unos indicadores de evaluación adecuados y adaptados a sus respectivas tareas, con 26 de las 40 respuestas que muestran unos indicadores inadecuados o que no muestran indicadores.

Aun así, gracias al empleo de los indicadores de evaluación hemos podido observar que los futuros maestros, durante este tercer ciclo, han aportado unas explicaciones más extensas en torno a su proceso creativo, así como a la elección de su tarea y la adaptación de esta al nivel educativo. Realizar unas explicaciones extensas sobre la creación y el desarrollo de sus problemas era necesario para recibir una buena evaluación por parte de sus compañeros y compañeras.

No obstante, y pese a que esas explicaciones resultan más extensas que en los ciclos anteriores, volvemos a encontrarnos con una falta de contenido en las mismas. En ellas no se centran en explicar cómo han adaptado el problema matemáticamente (si utilizan más o menos restricciones, si adaptan el tamaño del espacio muestral, cómo hacen esas adaptaciones, etc.) para que este se ajuste al nivel, sino que se centrar en explicar cómo han contextualizado el problema.

Además, en muchas ocasiones siguen confundiendo el concepto de ejercicio, más mecánico, con el concepto de problema, en el que la resolución no se obtiene solo aplicando algoritmos mecánicamente. Las respuestas de futuros maestros que plantean problemas correctos o parcialmente correctos suelen ir acompañadas de unas explicaciones más completas. Especialmente, aquellas respuestas en las que no encontramos deficiencias en el SCK. Cuando las explicaciones son relevantes, los futuros maestros suelen mostrar una explicación del proceso creativo más extensa, planteando varios problemas que fueron enunciando a lo largo de dicho proceso creativo, sobre los que aplicaron las modificaciones necesarias para, finalmente, llegar a enunciar el problema entregado y explicando por qué los descartaron.

6.4. Discusión de resultados del tercer ciclo de I-A

Después de haber implementado dos ciclos de I-A, y habiendo hecho las modificaciones oportunas en el segundo ciclo, a la vista de los resultados obtenidos en el mismo, se planteó un tercer ciclo aplicando nuevos cambios en el diseño de la tarea. Como hemos comentado previamente, hemos detenido las iteraciones de ciclos tras el tercero, al encontrar saturación en los mismos, sin demasiadas novedades del segundo al tercer ciclo.

En este último ciclo hemos detectado una sustancial mejora en los enunciados planteados, así como en sus resoluciones, con respecto al segundo ciclo, con un total de 55 respuestas correctas, 51 respuestas parcialmente correctas y 39 respuestas incorrectas. Es por ello, que entendemos que la simplificación del enunciado supone una ventaja para los futuros maestros a la hora de desarrollar su trabajo como creadores y resolutores de problemas.

Asimismo, el especificar que era necesario resolver el problema ha supuesto que no se encontrasen apenas problemas sin resolución. El aumento de las respuestas correctas nos hace pensar que, aquellas respuestas parcialmente correctas que encontrábamos en el segundo ciclo y que no aportaban resolución, realmente podrían haber sido respuestas correctas si los futuros maestros hubiesen resuelto los problemas, habiéndose reducido la descompensación entre los tipos de respuestas encontrada en los resultados.

En este caso, la clasificación de las respuestas resulta extremadamente similar a la obtenida durante el segundo ciclo, encontrando prácticamente los mismos tipos de errores en los apartados de respuestas parcialmente correctas y de respuestas incorrectas. Esto es un indicador de que los ciclos se están saturando y es el momento de dejar de iterar.

De nuevo, uno de los errores cometidos con más frecuencia resulta ser la falta de conocimiento combinatorio (Liu y Thompson, 2007; Mohamed y Ortiz, 2012; Mohamed, 2012; Batanero, Gómez-Torres *et al.*, 2014 y Estrada y Batanero, 2020), así como presentar errores conceptuales sobre las definiciones de la probabilidad. También vuelven a presentarse, aunque esta vez en menor medida, errores de cálculo relacionados con las operaciones con fracciones (León-Montero *et al*., 2016; Llinares y Sánchez, 1988), que también son comunes en alumnado de 12 a 13 años (González del Olmo, 2015).

A pesar de que se ha reducido considerablemente el número de respuestas incorrectas sigue sorprendiendo que haya siete respuestas en las que se plantea un problema que no utiliza los valores de las monedas para calcular la probabilidad y cinco respuestas en las que el problema planteado no se resuelve calculando una probabilidad. Este error puede deberse a una falta de CCK en relación con la probabilidad clásica, que puede haber implicado que estos futuros maestros hayan planteado problemas que se les hayan ocurrido asociados al uso de monedas pero que no estuviesen relacionados con la probabilidad.

En relación con los subdominios que se hicieron evidentes durante este ciclo, no encontramos grandes novedades respecto a la clasificación encontrada en el segundo ciclo, lo cual supone una razón más para dejar de iterar los ciclos. Sí podemos afirmar haber encontrado un grupo más numeroso de futuros maestros que muestran un CCK y SCK profundos al plantear y resolver correctamente sus problemas adaptándolos al nivel educativo requerido y siguiendo el modelo de enunciado. También debemos considerar aquellos futuros maestros que plantean problemas correctos, aunque demasiado sencillos, siendo aptos para el nivel, pero con leves fallos de SCK por presentar un nivel más bajo del solicitado.

En esta ocasión, aunque el número de respuestas de nivel superior sigue siendo bajo, hemos visto cómo cinco de los futuros maestros presentan problemas de un nivel superior y los resuelven correctamente. Falla su SCK al no adaptarse al nivel, pero su CCK es profundo. Aquellos futuros maestros que utilizan alguna notación que sirve para nosotros por ser de nivel superior, pero no para niños de primaria, también presentan falta de SCK. Por tanto, hemos podido observar cómo en este ciclo, los futuros maestros presentan niveles más profundos de CCK que en muestras anteriores lo que no suele presentarse con asiduidad en la literatura, aunque sí aparece en Párraguez *et al.* (2017), en referencia a la probabilidad clásica, como ocurre en este ciclo.

También hemos podido observar un gran número de futuros maestros que hacen referencia al currículo en sus explicaciones mostrando un KC profundo. Asimismo, a pesar de haber obtenido menos respuestas incorrectas que en ciclos anteriores, que muestran futuros maestros con CCK y SCK deficientes, este número sigue siendo elevado, lo que nos indica que debemos seguir trabajando en este tipo de tareas, que ayudan a mejorar el CCK y el SCK de los futuros maestros de forma simultánea (Contreras, Batanero *et al*., 2011; Contreras, Díaz *et al*., 2011).

Por otra parte, el apartado de la tarea referente a la creación de indicadores de evaluación resulta más satisfactorio en este ciclo. En esta ocasión, pudimos observar cómo las sesiones de formación ayudaron a los futuros maestros a comprender mejor el concepto de indicador de evaluación.

Creemos que la mejora en la creación de los problemas también está influenciada por esa formación, ya que, tras ella, los futuros maestros debieron crear sus indicadores y tuvieron la oportunidad de revisar y mejorar sus problemas apoyándose en ellos. Más aún, aunque no se ha considerado en el análisis, muchos de los estudiantes de la asignatura acudieron a nosotros después de haber creado sus indicadores y revisado sus problemas, consultando sobre cómo podían mejorar el problema creado, pues habían detectado que no se adecuaba al nivel, a las restricciones, que el lenguaje no era claro ni adaptado al curso, o que carecían de sentido, entre otras situaciones. El tiempo del que dispusieron tras la sesión de formación en indicadores indujo al alumnado a reflexionar sobre su trabajo y a modificar y sus problemas, suponiendo una mejora sustancial en los mismos.

Por tanto, los indicadores de evaluación permiten a los futuros maestros autoevaluar de forma reflexiva su trabajo, de modo que puedan ajustarlo y adecuarlo a las condiciones requeridas. Aun así, todavía encontramos futuros maestros que no comprenden bien dicho concepto y no aprovechan al máximo las posibilidades que les ofrecen los indicadores de evaluación.

Es importante señalar que la formación impartida sobre indicadores de evaluación se realizó durante sesiones de prácticas de aula, a las que asistieron un pequeño porcentaje de los alumnos matriculados en la asignatura. Quizá podría haber, entonces, una relación entre la no asistencia a las sesiones de formación y la falta de conocimiento sobre los indicadores de evaluación, que resulta consistente con los resultados obtenidos.

En conclusión, consideramos que el enunciado planteado para la tarea en este último ciclo es óptimo, siendo necesario continuar reforzando la tarea con la sesión de formación en indicadores de evaluación que demuestra ser una ayuda para los futuros maestros instándoles reflexionar en mayor profundidad sobre su trabajo, para obtener mejores resultados.

En esta ocasión, las explicaciones han sido más extensas, pero siguen mostrándose faltas de contenido, sin aportarse explicaciones relevantes, salvo en contadas ocasiones. Es por ello, que también parece resultar necesario realizar más actividades reflexivas y prolépticas (Esteve y Alsina, 2020), quizá incluyendo dichas actividades como debates de forma oral en el aula, de manera que el profesorado pueda ir guiando la discusión, ayudando a los futuros maestros a profundizar en sus reflexiones y fomentando el *feedback,* tanto del profesorado hacia el alumnado, como entre el propio alumnado. Este tipo de actividades podrían resultar de ayuda a los futuros maestros para que puedan llegar a hacer reflexiones escritas más profundas e interesantes en relación con su propio trabajo, como las que nos mostraron de forma oral al revisar sus problemas tras la creación y evaluación utilizando sus indicadores.

CAPÍTULO 7

Análisis de las concepciones sobre la matemática escolar presentadas por los futuros maestros

En este capítulo se han analizado las concepciones sobre la matemática escolar que poseen los futuros maestros, teniéndose en cuenta las respuestas de todos los participantes en los tres ciclos de I-A llevados a cabo para esta investigación. Como hemos comentado en el marco teórico, las creencias o concepciones son uno de los factores que pueden afectar a la forma en que los maestros imparten docencia. A este respecto, utilizaremos el término de forma indistinta, basándonos en la idea de Estrada *et al*. (2003) que consideran las creencias, las concepciones y los pensamientos como el mismo tipo de ideas individuales mantenidas en el tiempo referidas tanto a la materia, como a uno mismo como estudiante o al contexto social en el que se lleva a cabo el proceso de aprendizaje.

Para llevar a cabo el análisis se han tenido en cuenta las respuestas aportadas por los futuros maestros en el apartado de justificación de la elección de la tarea. Este apartado se mantuvo a lo largo de los tres ciclos de I-A. Las respuestas aportadas son especialmente interesantes en los dos últimos ciclos, dado que el primero de ellos resultó aportar explicaciones muy parcas y breves por parte de los futuros maestros.

En este estudio nos hemos centrado en las concepciones sobre la matemática escolar, dado que tienen una estrecha relación con el conocimiento matemático para la enseñanza (Thompson, 1992; Aguilar-González, 2016). Thompson (1992) indica que realizar una investigación sobre las concepciones de manera aislada a los conocimientos del profesorado de matemáticas, aporta una imagen incompleta del conocimiento matemático para la enseñanza. Asimismo, dado que nos estamos refiriendo a la enseñanza en la etapa de Educación Primaria, tiene sentido hablar de concepciones de la matemática escolar, ya que prácticamente la totalidad de la matemática que se trabaja a este nivel es matemática escolar.

Incluimos, entonces, el análisis de las concepciones sobre la matemática escolar con la finalidad de ofrecer una visión más completa del conocimiento generado por los futuros maestros cuando crean y resuelven problemas de probabilidad. De esta manera, podemos comprender, de una forma más profunda, cómo entienden la enseñanza de la matemática y, más concretamente, de la probabilidad. Esta forma de pensamiento sustenta la manera en la que plantean y resuelven sus problemas y por qué consideran que son adecuados para implementar en un aula de Educación Primaria real.

Centrarnos exclusivamente en las concepciones sobre la matemática escolar también está motivado por la naturaleza de nuestro estudio, ya que nos encontramos ante una propuesta que no va a ponerse en práctica en el aula. En este sentido, los futuros maestros participantes en el estudio no tendrían en cuenta la metodología para aplicar la tarea, no se centrarían en la concepción del aprendizaje por parte del alumnado de Educación Primaria y tampoco lo harían en relación con el papel que tendrían los alumnos y los profesores cuando se implementase la tarea.

Por otra parte, en los tres ciclos de I-A hemos utilizado el modelo MKT, que no considera las creencias como parte del conocimiento. A pesar de que nuestro interés en el uso de ese modelo radicaba en la diferencia entre conocimiento común y especializado, nos parece importante no obviar el papel de las creencias. Por ello, a pesar de que tienen relevancia en otros modelos, como el mencionado MTSK (Carrillo *et al*., 2013; Flores *et al*.

,2013), se ha preferido este planteamiento híbrido, analizando el conocimiento con el MKT y, separadamente, las creencias con el modelo CEAM (Carrillo, 1998; Climent, 2005). En este sentido, resulta de interés realizar el análisis de los datos bajo el modelo MTSK (Carrillo *et al*., 2013; Flores *et al*. ,2013) y bajo el modelo STSK (Vidal-Szabó y Estrella, 2019) como línea futura de trabajo.

Como se ha comentado en el marco teórico, en este trabajo se utiliza el instrumento de análisis CEAM, propuesto por Carrillo (1998), adaptado por Climent (2005) y, posteriormente, por Aguilar-González (2016), para realizar el análisis de las concepciones sobre la matemática escolar. Teniendo en consideración lo comentado, utilizaremos la versión aportada por Aguilar-González (2016) y adaptada para este trabajo (recogida en la Tabla 6).

Se han tenido en cuenta las cuatro secciones consideradas en el instrumento a la hora de hacer el análisis: orientación, contenido, ¿cómo es? y finalidad. Cada una de ellas, posee unos indicadores relacionados con las cuatro tendencias didácticas: tradicional [TR], tecnológica [TE], espontaneísta [ES] e investigativa [I] (véase Tabla 5). Recordemos que no es nuestra intención categorizar en qué tendencias se encuentran los futuros maestros, puesto que la información disponible no sería suficiente (más allá de los riesgos de dicha clasificación), sino que estamos interesados en identificar, si es posible, cuáles son sus concepciones respecto a la probabilidad, aun cuando la especificidad de la probabilidad pueda ser observada en el contexto de una frase o expresión más genérica. En la Tabla 13 se muestra un recuento de las veces que ha aparecido cada indicador en los distintos ciclos analizados.

Un 48.15 % de los futuros maestros del primer ciclo de I-A no aportan evidencias sobre sus concepciones de la matemática escolar, ya sea por escasez de explicaciones o por su ausencia. En el segundo ciclo de I-A, en el que las explicaciones fueron más extensas, solo un 20.14 % de los futuros maestros no aporta ningún tipo de evidencia sobre sus concepciones de la matemática escolar. Finalmente, en el tercer ciclo de I-A volvemos a encontrar un pequeño porcentaje, en este caso del 21.38 % de los futuros maestros, que no aportan evidencias acerca de su concepción de la matemática escolar. Como podemos observar, el incremento de las explicaciones en los dos últimos ciclos nos facilitó encontrar información acerca de estas creencias o concepciones. Pero también la forma en la que se plantearon las mejoras en el enunciado contribuyó a que los futuros maestros aportaran más y mejores explicaciones en este apartado del estudio.

Tabla 13

Resultados del análisis de la Concepción de la Matemática Escolar por ciclos de I-A

	CONCEPCIÓN DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR													
	ORIENTACIÓN				CONTENIDO			¿CÓMO ES?			FINALIDAD			
	TR1	TE1	ES1	I1	TR2/TE2	ES2	I2	TR3/TE3	ES3	I3	TR4	TE4	ES4	I4
CICLO 1	11	7	4	1	9	40	0	0	0	0	5	6	0	0
CICLO 2	11	14	26	1	10	88	0	0	0	0	2	24	8	0
CICLO 3	21	17	14	3	16	90	0	0	0	0	5	28	8	3
TOTAL POR INDICADOR	**43**	**38**	**44**	**5**	**35**	**218**	**0**	**0**	**0**	**0**	**12**	**58**	**16**	**3**
TOTAL	**130**				**253**			**0**			**89**			

Si nos centramos en los resultados que aparecen en la Tabla 13, podemos comprobar que la mayor parte de las alusiones a la concepción de la matemática escolar son las referidas al contenido. Este hecho es lógico ya que se pedía específicamente que se explicara el porqué de la elección de la tarea, siendo más sencillo centrarse en los contenidos matemáticos para justificar dicha elección.

Los resultados muestran un elevado número de alusiones al contenido desde una tendencia espontaneísta. En esta tarea, esto se evidencia en que el enunciado se presenta como una problemática real, como único referente de los conocimientos que se deben movilizar en el aula. Así, podemos encontrar ejemplos en los que los futuros maestros indican que consideran que su problema es adecuado porque su contexto es realista y cercano a los de los estudiantes de Educación Primaria, como se muestra en los ejemplos E49 y E50.

E49: *He elegido esta tarea porque considero que puede surgir en la vida diaria del alumnado de esta edad. Conocen el valor de las monedas y las utilizan para comprar. A esta edad los alumnos son capaces de conocer la dificultad que tiene conseguir en una extracción de dos monedas (sin verlas) la cantidad justa que se necesita.*

E50: *Considero que mi problema está adecuado al nivel de 6º de Primaria ya que, a través de él, el alumnado puede desarrollar y potenciar los contenidos sobre probabilidad teniendo en cuenta que en este problema se trabaja la presencia del azar en la vida cotidiana, ya que ir a comprar es una acción que se realiza diariamente, trabajando así la estimación del grado de probabilidad de un suceso. […] Fundamentalmente lo he escogido porque me parece una situación muy realista ya que pertenece al día a día de las personas dónde nos damos cuenta de que el azar y la probabilidad las encontramos en todas partes.*

Tanto en E49 como en E50 las dos futuras maestras indican que hay una buena adecuación del problema ya que el contexto es realista y cercano a los intereses y al día a día del alumnado. Además, en E50, la futura maestra se apoya en contenidos de currículo cuando indica que debe trabajarse “la presencia del azar en la vida cotidiana” o “la estimación del grado de probabilidad de un suceso”, mostrando así buen dominio del currículo.

También podemos encontrar algunas alusiones a la matemática escolar coincidentes únicamente con aquellos contenidos que aparecen en los libros de texto o, en su defecto, en el currículo, como ocurre en el ejemplo E51:

E51: *Creo que el enunciado presentado en esta práctica es adecuado al nivel educativo que los alumnos de 6º de Primaria han de tener, ya que ya saben maneras de controlar las monedas de euro y de céntimo correctamente. Además, es un ejercicio básico de probabilidad que nos servirá a los docentes para verificar y comprobar si nuestros alumnos han entendido el temario explicado en clase durante las anteriores clases.*

Como podemos observar, la futura maestra de E51 indica que el problema que ha enunciado es un problema “tipo” de probabilidad orientando a ese nivel educativo concreto, basado en los contenidos impartidos. También podemos apreciar un problema de tipo “básico”, orientado a la adquisición exclusiva de unos ciertos conceptos y reglas, en este caso a su repaso. Aunque existen pocas muestras de concepciones de tipo tradicional y tecnológico, sí encontramos una leve presencia relativa al contenido en este sentido, cuando los futuros maestros que muestran esta tendencia indican que sus problemas son similares a los que aparecen en los libros de texto. Sin embargo (véase Tabla 13), no se encuentra ninguna alusión a la tendencia investigativa en relación con el contenido en ninguna de las explicaciones.

Es importante recordar que la concepción de la matemática escolar se muestra como una mezcla compleja y variable de las distintas tendencias y los distintos temas (Rodríguez-Muñiz *et al*., en prensa); así, el contenido no es lo único que aparece reflejado en las descripciones de los futuros maestros, como acabamos de comprobar en E51. También se encuentran numerosas referencias a la orientación que tiene la asignatura o, en este caso, al problema considerado. Es decir, se plantea qué interesa hacer con el problema: ¿la adquisición de conceptos y reglas? ¿O también interesan los procesos lógicos que los sustentan? Quizá, ¿tiene más interés fomentar actitudes positivas? ¿o todo ello es de interés para formar un ciudadano bien alfabetizado probabilística y matemáticamente? Los resultados muestran una gran mezcla, pero parece haber un equilibrio entre tres de las tendencias: la tradicional, la tecnológica y la espontaneísta, que muestran un número de evidencias similar. No encontramos un consenso y de nuevo se muestra una infrarrepresentación de la tendencia investigativa. Esto nos indica que el panorama general aún fluctúa entre varias tendencias, desde la tradicional, en la que lo importante es aprender los contenidos y reglas matemáticas para poder aplicarlas, pasando por una tendencia tecnológica en la que interesan, no sólo los contenidos y reglas sino también los razonamientos y los procesos lógicos asociados a la aplicación de dichas reglas, hasta llegar a una tendencia espontaneísta en la que el dominio afectivo cobra una mayor importancia (que tengan una mayor motivación).

En E52, E53 y E54 se muestra un ejemplo de cada tipo, respectivamente. En E52 vemos cómo una futura maestra expresa que el problema va dirigido exclusivamente a las nociones de probabilidad que deben trabajarse en el curso, de manera exclusiva, presentando un enfoque tradicional en su justificación.

E52: *Me parece un ejercicio adecuado para el alumnado de sexto de educación primaria ya que en este curso se comienzan a dar las nociones básicas de probabilidad y para comenzar a familiarizarse con esta medida y los tipos de probabilidad que hay me parece un problema apropiado.*

En E53 es claro que la futura maestra justifica que, no solo es necesario conocer las reglas y las leyes que rigen la probabilidad y saber resolver el problema de forma correcta, sino que los procedimientos y los razonamientos durante su resolución son imprescindibles. De este modo presenta un enfoque tecnológico:

E53: *Por último, considero que para resolver el problema es necesaria la reflexión, el razonamiento y cierta perseverancia del alumnado para resolver los apartados más "complicados" del mismo, aspectos que aparecen, asimismo, reflejados dentro del currículo para ese curso.*

En E54 resulta evidente la tendencia espontaneísta, en la que no interesan tanto los conceptos como los procedimientos y el fomento de actitudes positivas. Observamos que el interés de esta futura maestra es que sus alumnos se sientan motivados a la hora de trabajar en el problema. Podemos ver también indicios de concepciones sobre el contenido, también de tipo espontaneísta, al hablar sobre la necesidad de que la problemática sea realista:

E54: *Creo que trabajar con monedas puede resultar interesante, ya que es algo que pueden utilizar en su día a día. Además, el manejo del dinero es algo que los niños relacionan con los adultos y utilizarlo como chicos y chicas "mayores" puede favorecer la motivación.*

En menor medida encontramos alusiones a la finalidad de la tarea. No es tan simple detectar indicios de para qué sirve la tarea en las explicaciones. Sin embargo, las referencias a estos indicadores son más frecuentes cuando previamente se ha indicado que el contenido sigue una tendencia espontaneísta, encontrando también algunos ejemplos en los que se incide en una finalidad de tipo tecnológico, haciendo hincapié en el carácter práctico de la tarea (que permita la aplicación de las situaciones planteadas para su utilización en la vida cotidiana). Un ejemplo de esta combinación de tendencias se observa en E55.

E55: *He elegido esta tarea porque está muy presente en el día a día de los alumnos. Precisamente por eso, me parece de vital importancia para que el niño sea capaz de desenvolverse con soltura cuando compre sus propias chucherías o realice otras compras.*

Como podemos apreciar, en E55 existe una combinación entre las concepciones referentes al contenido, que resultan ser de tipo espontaneísta, enfocando la tarea a una problemática real, y las concepciones referidas a la finalidad del problema, que son de tipo tecnológico ya que se busca el carácter práctico que permita que los alumnos apliquen a su vida diaria, de forma utilitaria, los conceptos trabajados en el problema.

También encontramos, a partir del segundo ciclo, ciertas referencias a que el carácter formativo implique un cambio actitudinal del alumnado con respecto al aprendizaje de las matemáticas y su aplicación para la vida. Podemos observar un ejemplo en E56, en el que una futura maestra hace referencia a un cambio actitudinal con respecto al aprendizaje.

E56: *He pensado en una actividad que los niños puedan realizar o hayan realizado a menudo para llamar su atención y que les interese el problema a hacer. Además, creo que no es de gran complejidad para ellos, aunque si se adapta al nivel correspondiente a su curso.*

Algunos futuros maestros consideran que la única finalidad es la de conocer un cierto panorama matemático que está estipulado que deben de aprender, para tener unas nociones básicas para la vida diaria como se muestra en E57.

E57: *He elegido este tipo de problema ya que es una situación cercana al alumnado que se puede dar perfectamente en su vida. Además, creo que les sirve para trabajar el uso de las monedas que también les servirá para más ámbitos.*

Como vemos, no solo se muestran unas concepciones de tipo tradicional referentes a la finalidad que tiene el problema, sino que también se puede observar una combinación con concepciones referentes al conocimiento de tipo espontaneísta (contexto realista). Es fácil encontrarse con concepciones de conocimiento de tipo espontaneísta combinadas con otras tendencias, ya que son las que aparecen de forma más numerosa tanto de forma independiente como acompañadas de otras.

Finalmente, no se han encontrado evidencias de ninguna explicación relacionada con cómo es la matemática escolar. Esto resultaba esperable, ya que la pregunta planteada referente a la elección de la tarea no invitaba a reflexionar sobre cómo es la matemática o la probabilidad en el ámbito escolar.

En algunas ocasiones hemos podido encontrar combinaciones de varias tendencias (los futuros maestros muestran combinaciones complejas de varias tendencias como indican Rodríguez-Muñiz *et al*., en prensa) normalmente referidas a distintos indicadores (orientación, contenido y/o finalidad). Dentro de las combinaciones de tendencias, una de las más repetidas ha sido la combinación entre la tendencia espontaneísta referida al contenido y la tendencia tecnológica referida a la finalidad de la tarea. Esto resulta coherente ya que parecen guardar relación debido al interés de enfocarse en problemas realistas y su aplicación en la vida cotidiana.

Por otra parte, resulta importante observar cómo la tendencia investigativa no aparece representada prácticamente en ninguno de los ámbitos. Esto nos indica que, es posible que los futuros maestros hayan recibido una formación de índole tradicional, sin haber conocido o tenido la oportunidad de realizar un estudio de tipo investigativo; o que, si lo han hecho, el peso de lo tradicional sigue siendo fuerte en sus creencias.

Como ya se ha comentado, muchas de las conductas y creencias son adquiridas. Esto puede suponer que si los futuros maestros han recibido una formación de tipo tradicional puedan tender a replicar ese tipo de enseñanza. Sin embargo, podemos ver que no todos los futuros maestros muestran este tipo de tendencia inclinándose, además, por la tendencia tecnológica o la espontaneísta, pero sin llegar a mostrar demasiada inclinación por la investigativa.

Lo que resulta claro es que las creencias, siendo asimiladas a largo plazo, son difíciles de cambiar (Estrada *et al*., 2003; Estrada y Batanero, 2020) y los futuros maestros poseen unas ideas muy arraigadas, aun con una alta componente tradicional en algunos aspectos. Concluimos que, en el grupo compuesto por todos los futuros maestros que han formado parte de esta investigación, las concepciones sobre la matemática escolar son eclécticas, forjándose combinaciones complejas entre ellas, pero tratando de redirigir la enseñanza de la matemática para generar un cambio en cómo debe enseñarse la materia de una forma menos tradicional.

CAPÍTULO 8

Conclusiones y líneas futuras

El objetivo principal de esta tesis doctoral ha sido determinar cómo una tarea de creación de problemas de probabilidad en un contexto educativo específico permite activar simultáneamente el conocimiento matemático y pedagógico en probabilidad de los futuros maestros, ayudándoles a mejorar en ambos aspectos. Para poder realizar una instrucción matemática efectiva para los infantes de Educación Primaria, estos deben poseer un buen conocimiento del contenido matemático que van a impartir. Sin embargo, eso no lo es todo. También es imprescindible que tengan un buen conocimiento didáctico para poder enseñar esos contenidos matemáticos.

En este sentido, el propósito general de esta tesis doctoral se concretó en cinco objetivos específicos de investigación:

- **Objetivo específico 1 (OE1):** Determinar cómo los futuros maestros son capaces de crear y resolver problemas de probabilidad coherentes en un contexto educativo específico.
- **Objetivo específico 2 (OE2):** Determinar si los futuros maestros son capaces de crear y adaptar los problemas a un nivel educativo específico.

- **Objetivo específico 3 (OE3):** Determinar qué tipo de conocimiento matemático para la enseñanza activan los futuros maestros cuando crean y resuelven problemas de probabilidad.
- **Objetivo específico 4 (OE4):** Identificar las debilidades y fortalezas de los futuros maestros, en lo relativo al conocimiento matemático y pedagógico para la enseñanza, cuando crean y resuelven problemas de probabilidad adaptados a un nivel educativo concreto.
- **Objetivo específico 5 (OE5):** Identificar las tendencias didácticas presentadas por los futuros maestros en relación con la concepción de la matemática escolar.

A partir de estos objetivos y del conocimiento previo ofrecido por los trabajos de investigación sobre el tema, se elevó un conjunto de hipótesis de investigación:

- **Hipótesis 1:** Se espera que la tarea de diseño de problemas de probabilidad movilice simultáneamente el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de los futuros maestros.
- **Hipótesis 2:** Se espera que el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de los futuros maestros en relación con la probabilidad sea escaso, y que se evidencie la necesidad de un refuerzo en el estudio tanto de los contenidos probabilísticos como de los contenidos pedagógicos.
- **Hipótesis 3:** Se espera que los refinamientos de la tarea propuesta en los sucesivos ciclos de investigación-acción desarrollados impliquen una mejora en las producciones de los futuros maestros.
- **Hipótesis 4:** Se espera que los futuros maestros muestren una mezcla de tendencias didácticas referidas a su concepción de la matemática escolar.

Es este capítulo vamos a desgranar las conclusiones a las que hemos llegado a partir de los resultados obtenidos en este trabajo y las relacionaremos con las hipótesis de investigación. Introduciremos, también, las limitaciones encontradas en este estudio y las líneas de trabajo futuras previstas a partir de los resultados.

Como hemos indicado, la investigación propuesta se centró en la creación y resolución de problemas de probabilidad adaptados a 6º de Educación Primaria. Se ha trabajado mediante la metodología de I-A, que nos permitió realizar tres ciclos de investigación, con un posterior análisis del contenido (Andreu, 2002; Raigada, 2002) y un análisis respecto a los subdominios CCK, SCK y KC del modelo MKT (Ball *et al*., 2008, Hill *et al*., 2005 y Hill *et al*., 2008). A lo largo de los tres ciclos, hemos podido observar la manera en que los futuros maestros llevaban a cabo el desarrollo de la tarea propuesta. Esto se corresponde con el primer objetivo específico de la investigación (**OE1**).

Un importante número de los participantes en el estudio realizaron la tarea de creación y resolución de problemas de probabilidad de forma satisfactoria, lo que se corresponde con el segundo objetivo específico (**OE2**). Así, a lo largo de los ciclos hemos observado que más de un tercio de los futuros maestros participantes fueron capaces de crear y resolver enunciados adecuados y adaptados al nivel, mostrando profundos niveles de CCK y SCK. Este resultado no era esperado, puesto que en buena parte de la literatura al respecto se muestran futuros maestros con deficiencias en su CCK y SCK (Arteaga *et al*., 2010; Batanero *et al*., 2015; Batanero, Arteaga *et al*., 2014; Batanero, Contreras y Díaz, 2012; Batanero, Gómez *et al*., 2014; Contreras, Batanero *et al*., 2011; Contreras, Díaz *et al.*, 2011; Gómez-Torres *et al*., 2014; Mohamed y Ortiz, 2012 y Ortiz *et al.*, 2012). Así todo, estudios como Párraguez *et al.* (2017) sí mostraron que algunos futuros maestros tenían un buen dominio de los contenidos matemáticos referidos a la probabilidad clásica, como ocurre en este trabajo. Consideramos que este resultado no es ajeno a la generalización de la enseñanza de la probabilidad en las etapas de Primaria y Secundaria Obligatoria, así como a su introducción en el segundo curso del Bachillerato científico (Rodríguez-Muñiz, Crespo *et al.*, 2020) y a la introducción de la probabilidad en los planes de formación inicial de los futuros maestros.

Sin embargo, aún un porcentaje notable de futuros maestros presenta dificultades en relación con la probabilidad clásica, tanto con el contenido matemático como con el pedagógico, mostrando evidencias de falta de CCK, de SCK, o de ambas, simultáneamente. Estos resultados sí son consistentes con los encontrados en la literatura anteriormente mencionada. Más aún, los principales problemas detectados relativos al CCK se asemejan a los encontrados en Mohamed y Ortiz (2012), Mohamed (2012) y Ortiz *et al.* (2012). En este trabajo hemos podido observar que la principal dificultad relativa al conocimiento matemático en probabilidad es la falta de razonamiento combinatorio, problema que encontramos a lo largo de los tres ciclos analizados, como también muestran Liu y Thompson (2007), Mohamed y Ortiz (2012), Mohamed (2012), Ortiz *et al.* (2012), Batanero, Gómez *et al.* (2014) y Estrada y Batanero (2020).

La mayor parte de los futuros maestros que presentaban este tipo de dificultades no fueron capaces de determinar las diferentes combinaciones de monedas del espacio muestral de los enunciados que ellos mismos habían planteado. También se presentaron dificultades a la hora de definir el espacio muestral, repitiendo la frecuencia de los sucesos dentro del mismo. Lamentablemente, estos obstáculos resultan ser los mismos que presentan los estudiantes de Educación Primaria en sus razonamientos probabilísticos, como también indican los autores anteriormente mencionados, lo cual nos lleva a la paradoja de que parte de los futuros maestros incurre en las mismas dificultades que su futuro alumnado.

Dentro de las carencias en conocimiento matemático también encontramos errores de cálculo, especialmente en cálculo de fracciones, algo que ya indicaban Llinares y Sánchez (1988) y León-Montero *et al*. (2016). De nuevo, estos errores también son comunes en alumnado de Educación Obligatoria, como señaló González del Olmo (2015).

También aparecen errores al introducir notación que no resultaba adecuada para el nivel, como el uso de uniones e intersecciones. Si bien este contenido puede mostrar evidencias de CCK al manifestarse que los futuros maestros que lo ponen en práctica conocen y saben utilizar los conceptos matemáticos, también aporta evidencias de falta de SCK, ya que no saben adaptar esos conceptos al nivel educativo.

Por otro lado, aún existe un grupo importante (aproximadamente un tercio de los participantes) que presenta deficiencias simultáneamente tanto en el CCK como en el SCK, diseñando problemas carentes de sentido o, incluso, problemas que no estaban relacionados con la probabilidad. Aquí se muestra una gran falta de CCK y SCK, que sigue siendo consistente con los resultados obtenidos en estudios llevados a cabo por otros autores, como hemos comentado.

Mediante el análisis del contenido y el posterior análisis del conocimiento matemático para la enseñanza, aplicados en cada uno de los ciclos, hemos sido capaces de discernir cuáles son los conocimientos matemáticos, pedagógicos y del currículo que se activan durante la creación y resolución de problemas de probabilidad en los futuros maestros participantes en este estudio, lo cual se corresponde con el tercer objetivo específico (**OE3**) y se ha publicado parcialmente en nuestros trabajos Alonso-Castaño, Alonso, Mellone y Rodríguez-Muñiz (2019) y Alonso-Castaño *et al.* (2021). Como estamos comentando, se ha encontrado un grupo de futuros maestros que muestran evidencias de CCK y SCK profundos, casi del mismo tamaño que el grupo de futuros maestros que hacen evidentes sus deficiencias en el CCK o SCK (respuestas parcialmente correctas) y del grupo de futuros maestros que muestran evidencias de falta de CCK y SCK simultáneamente (incorrectas), siendo el grupo de respuestas correctas el más numeroso, lo que es un resultado original de este trabajo.

Cuando hablamos del KC, hemos podido observar que en el primer ciclo las evidencias relativas al mismo eran casi inexistentes, quizá porque los futuros maestros consideraban que hacerlo explícito era demasiado evidente. Sin embargo, este resultado es consistente con el obtenido en Vásquez y Alsina (2019) y lo ponemos de manifiesto en Alonso-Castaño *et al.* (2020).

A pesar de las pocas evidencias al KC encontradas en el primer ciclo de I-A, el número de evidencias aumentó considerablemente en los dos ciclos posteriores, al modificar el enunciado de la tarea especificando la necesidad de hacer referencia a la adecuación del problema en la justificación de la elección de la misma. Casi la mitad de los futuros maestros hicieron evidente su conocimiento de currículo en los ciclos dos y tres.

Resultó sorprendente el grupo de futuros maestros que conseguían adaptar el problema al nivel educativo propuesto, mostrando evidencias de SCK, pero no conseguían resolverlo adecuadamente, mostrando deficiencias en su CCK. Este resultado no se había encontrado previamente en la literatura. Creemos que el acceso a materiales escolares, como libros de texto, páginas web en las que se puedan encontrar problemas de probabilidad de Primaria o los propios apuntes y ejemplos de clase, pueden favorecer que se haya dado esta situación, con futuros maestros que replican algunos problemas que conocen, pero no poseen el conocimiento matemático que les permita resolverlos. Si este fuese el caso, las evidencias de SCK de los futuros maestros vendrían dadas por saber seleccionar problemas adecuados, pero no saber crearlos ni resolverlos, mostrando su falta de CCK.

También resulta sorprendente el pequeño grupo de futuros maestros que no presentan problemas de probabilidad, diseñando problemas de tipo aritmético (que aparecen con frecuencia en los libros de texto) utilizando monedas, aquellos que diseñan problemas de tipo combinatorio que no se resuelven calculando una probabilidad o aquellos que sí plantean problemas de probabilidad, pero sin usar los valores de las monedas (problemas de lanzamientos de monedas del tipo cara-cruz).

Por otro lado, una de las dificultades observadas en este trabajo ha sido el encontrarnos con explicaciones escasas y con poco contenido, aportadas por los futuros maestros. Esto supuso una falta de evidencias sobre la adecuación del problema y sobre el proceso creativo, así como de los distintos subdominios, en especial del SCK y del KC, lo que llevó a reformular la tarea para tratar de obtener explicaciones más extensas.

Bolero (1999) ya indicaba la dificultad de los futuros maestros para aportar explicaciones de tipo matemático en sus razonamientos. Debido a esta escasez de explicaciones, introdujimos en la tarea la idea de los indicadores de evaluación, de modo que los futuros maestros pudiesen autoevaluar su trabajo (Burgos *et al.*, 2020) determinando si se adecuaba a las indicaciones aportadas. Así, podían identificar sus propios errores o imprecisiones en los problemas creados por ellos mismos, con el fin de modificarlos y mejorarlos, permitiéndoles aprender sobre y para la práctica, y ayudándoles al desarrollo de su mirada profesional, entre otras competencias, como también se indica en Ivars *et al.* (2017) y en Muñiz-Rodríguez *et al.* (2021).

En el segundo ciclo, tras la inclusión del apartado de indicadores pudimos determinar que los futuros maestros no controlaban adecuadamente el concepto, haciéndose necesario introducir formación en indicadores de evaluación en el tercer ciclo, previa a la realización de la tarea, basada en la idea de indicadores de idoneidad didáctica planteada en Beltrán-Pellicer *et al.* (2018). La formación facilitó, no sólo la creación de unos indicadores más adecuados, sino la autorreflexión sobre el propio trabajo de los futuros maestros, que obtuvieron mejores resultados en la tarea, aumentando el número de evidencias de niveles profundos de CCK, SCK y KC. Aun así, un gran número de futuros maestros mostraron que seguían sin comprender el concepto. Esto puede deberse a la escasa asistencia a la sesión de formación, lo cual es consistente con los resultados obtenidos. De todas formas, en vistas de la sustancial mejora conseguida, consideramos adecuado continuar realizando esta sesión de formación en indicadores en cursos posteriores, ya que los indicadores de evaluación suponen una gran ventaja al ayudar a mejorar la metacognición y la reflexión en relación con el propio trabajo.

Todo este análisis ha permitido identificar aquellos aspectos en los que resulta necesario incidir en la formación de maestros para la enseñanza de la probabilidad, ya que con cada una de sus explicaciones (o falta de ellas) los futuros maestros muestran sus fortalezas y debilidades con respecto a la enseñanza de la probabilidad clásica, lo que se corresponde con el cuarto objetivo específico (**OE4**).

Por otra parte, además de haber analizado el conocimiento matemático para la enseñanza, hemos analizado las concepciones sobre la matemática escolar que presentaban los futuros maestros participantes en este estudio, identificando las tendencias didácticas presentadas por los mismos, lo cual se corresponde con el quinto, y último, objetivo específico (**OE5**). Los resultados muestran una gran mezcla de tendencias, habiendo muchas más referencias al contenido que al resto de apartados (orientación, finalidad y ¿cómo es?, siguen a los contenidos, en este orden), lo cual toma sentido debido a la forma en la que se plantea la tarea.

Si bien es cierto que la tendencia que más veces aparece es la espontaneísta, en el caso del contenido (los futuros maestros indican que su problema era de contexto realista), no dejan de aparecer la tendencia tradicional y la tecnológica, aunque en menor medida (indicando que el problema es adecuado porque es similar a los que aparecen en los libros de texto).

En el apartado de orientación, la mezcla es mayor, al igual que ocurre en el de finalidad, en el que la mayoría de los resultados son de tipo tecnológico. El apartado de "¿cómo es?", como ya indicamos en el capítulo anterior, no presenta ningún resultado. También hemos detectado una mezcla de tendencias en algunos de los futuros maestros, con un predominio de la combinación de la tendencia espontaneísta en el contenido, con la tendencia tecnológica en la finalidad, ya que guardan relación al interesarse por los problemas de tipo realista y a la aplicación utilitaria de los problemas en la vida cotidiana (véase Tabla 6).

Hemos podido comprobar que la tendencia que menos aparece es la investigativa, quizá debido a que los futuros maestros han podido recibir una enseñanza de tipo tradicional. Como se indica en Estrada *et al*. (2003) y en Estrada y Batanero (2020), las concepciones son ideas que perduran en el tiempo, difíciles de cambiar. No obstante, a la vista de los resultados podemos indicar que la formación influye, pero no determina completamente la idea de enseñanza que poseen los futuros maestros.

En este sentido, aún podemos detectar un gran peso de la creación de tareas "tipo" y del trabajo basado en los contenidos del libro de texto (tendencia tradicional). Sin embargo, podemos observar un cambio en las tendencias que resulta positivo al incidir en el trabajo con contextos próximos al alumnado y de carácter realista, planteando problemas interesantes para su vida diaria y fomentando que se trabaje en la motivación del alumnado. De este modo, se pretende que los alumnos de primaria ganen gusto por la resolución de problemas que les resulten atractivos y útiles (tendencias tecnológica y espontaneísta). Como hemos indicado, aún se encuentran pocas referencias a la tendencia investigativa, con lo que deberíamos reforzar el trabajo en este sentido investigativo en los programas de formación de maestros, ya que favorece un aprendizaje más significativo.

Por lo tanto, los resultados de este estudio muestran una tarea que resulta válida para promover la movilización del CCK, SCK y también del KC, lo cual verifica la **Hipótesis 1** de investigación. Se ha podido comprobar que el diseño de tareas ayuda a mejorar el desarrollo de las capacidades de los futuros maestros para la enseñanza de la probabilidad. Con este tipo de tareas, conseguimos activar, de forma simultánea, los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los futuros maestros, ayudándoles en la adquisición de una formación más completa.

Los resultados de este trabajo indican que, a pesar de que más de un tercio de los futuros maestros presenten evidencias de CCK, SCK y KC, aún muchos futuros maestros necesitan mejorar dichos subdominios para la enseñanza de la probabilidad, ya que hemos observado que existe un gran desconocimiento en torno a los conceptos probabilísticos por parte de un porcentaje excesivo de futuros maestros. En este sentido, la **Hipótesis 2** se verifica parcialmente, ya que hemos encontrado un número más elevado de lo esperado de futuros maestros con un conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad que no resulta escaso. Sin embargo, dado que unos dos tercios de los futuros maestros analizados aún presentan deficiencias en su CCK, SCK y/o KC, sigue resultando necesario un refuerzo de la formación en probabilidad de los futuros maestros como también defienden Arteaga *et al*. (2010), Batanero, Arteaga *et al*. (2014), Batanero, Contreras y Díaz (2012), Contreras, Batanero *et al*. (2011), Contreras, Díaz *et al.* (2011), Mohamed (2012), Párraguez *et al.* (2017) o Vásquez y Alsina (2015b, 2015d, 2017b, 2017c), entre otros.

En lo relativo a esta mejora, autores como Batanero, Gómez *et al.* (2012) y Batanero *et al.* (2015) apoyan el trabajo con tareas que se vayan modificando, variando su contenido o formato para adaptarlas al alumnado, como ocurre con la tarea propuesta en este trabajo, que permite adecuarse a las necesidades de los futuros maestros, mejorando su formación. Así, Cordani (2014) soporta también la idea de la realización de tareas paso a paso, por fases, que faciliten la construcción de los conceptos, como también proponemos en los sucesivos ciclos al realizar las mejoras en la tarea, separándola en subtareas que faciliten la resolución.

La aplicación de tareas contextualizadas, como la presentada en este estudio, también es propuesta como ayuda para la mejora de la formación de maestros por autores como como Alsina y Vázquez (2016), Batanero *et al.* (2015), Batanero, Gómez *et al.* (2012), Fernándes *et al.* (2016), Mohamed y Ortiz (2012) y Ortiz *et al.* (2012). Además, en Batanero, Gómez *et al.* (2014), Díaz *et al.* (2012) y Perelli-D'Argenzio y Rigatti-Luchini (2014) se propone la discusión y reflexión en grupos, como se hizo para enfocar el trabajo sobre indicadores de evaluación en esta tarea, que fomentó una mejora sustancial, tanto en la creación de indicadores como en la creación de los problemas. Perelli-D'Argenzio y Rigatti-Luchini (2014) también apoyan la metodología de talleres como el de este estudio que, además, se realizó de forma virtual enfocado a una etapa educativa concreta (Vásquez y Alsina, 2019).

Por otra parte, este trabajo nos ha permitido determinar una serie de necesidades de mejora en el diseño de nuestras propias tareas como formadores de maestros. Los resultados muestran una mejora de las producciones de los futuros maestros a lo largo de los ciclos, no necesariamente en la calidad de sus producciones, sino en aquellos aspectos que se hacen evidentes cuando trabajan sobre la tarea, los cuales son el interés de este estudio. Esto es, podemos determinar una mayor muestra de evidencias (tanto de manera positiva como de manera negativa) en relación con el CCK, el SCK y el KC, así como un aumento progresivo de las explicaciones, lo cual nos permite determinar cómo y en qué están pensando los futuros maestros a la hora de realizar dicha tarea y en qué aspectos debemos incidir en su formación. Esta mejora viene determinada por el rediseño de la tarea en las sucesivas iteraciones de cada ciclo, que se adaptaron a las debilidades encontradas en cada uno de ellos, validando la **Hipótesis 3** de investigación.

La combinación de concepciones correspondientes a diferentes didácticas encontrada en este estudio también valida la **Hipótesis 4** de investigación. Esta mezcla de tendencias también es apoyada por Rodríguez-Muñiz *et al*. (en prensa).

A modo de conclusión vamos a referirnos, en primer lugar, a los procesos de instrucción. En España, en cuanto a la formación de maestros, existen diferencias, como hemos comentado en los capítulos introductorios de esta tesis doctoral, entre las universidades en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas y su didáctica (Nolla *et al.,* 2021). En la Universidad de Oviedo, entre otras universidades, la enseñanza de las matemáticas y su didáctica aparecen combinadas dentro de una misma asignatura. Dado que partimos de la idea de que reforzar el CCK junto con el SCK es esencial, como también señalaron Contreras, Díaz *et al.* (2011) y Vásquez y Alsina (2015b), para la enseñanza de la probabilidad, consideramos que los resultados obtenidos refuerzan la estructura de la instrucción combinada en los contenidos matemáticos y didácticos, ya que esto nos permite controlar las interacciones entre el CCK, el SCK y los otros subdominios del PCK. Aunque, a nuestro juicio, los resultados suponen un dato a favor de este tipo de organización de la formación, no podemos dejar de mencionar ciertos aspectos que pueden suponer una desventaja, como el refuerzo del CCK y el SCK si trabajamos en una asignatura propiamente de matemáticas, separada de la didáctica de la misma. Esto implica que, como línea futura de la investigación podamos considerar la comparación de nuestros resultados con los que se obtengan al implementar la tarea en otras universidades en las que la enseñanza de las matemáticas y su didáctica sean asignaturas separadas.

En segundo lugar, y esta es una de las principales conclusiones de esta tesis doctoral, consideramos que el tipo de tarea planteada es especialmente relevante en el caso de la educación probabilística. Hemos formulado una tarea que puede ser considerada rica. Hay mucha literatura sobre las tareas matemáticas ricas en otros campos (Crespo, 2003; Hiebert *et al.*, 1996; Sullivan y Clarke, 1991, entre otros), pero las referencias son más escasas sobre el uso de las tareas ricas en la formación de los futuros maestros en el campo de la probabilidad.

La tarea que aquí se presenta, implica la movilización de CCK, SCK y KC, y también abre la puerta a la movilización de otros subdominios de MKT. Si, además, lo consideramos bajo la perspectiva de los procesos de NCTM (2000), también estamos movilizando claramente las capacidades de los futuros maestros para la resolución de problemas (obviamente, porque tienen que resolver el problema que ellos mismos crean), la comunicación (ya que tienen que explicar correctamente su pensamiento matemático), la conexión (debido a la necesidad de computar y calcular las diferentes maneras de sumar más de 2 € con 3 monedas), y la representación (porque el problema se contextualizó en una situación de la vida cotidiana, de modo que tienen que intercambiar las representaciones verbales y probabilísticas del fenómeno).

También podrían movilizar su capacidad de razonamiento y demostración cuando se enfrentan al análisis de diferentes situaciones, en este caso, con las monedas, al tratar de definir el problema y adaptarlo al nivel educativo requerido. Por lo tanto, los resultados avalan continuar trabajando en este tipo de tareas como la forma de desarrollar un MKT adecuado para la enseñanza de la probabilidad para los futuros maestros.

El análisis de los datos llevado a cabo en este trabajo, como hemos comentado en numerosas ocasiones, se ha realizado bajo el marco del MKT. Sin embargo, consideramos de gran interés, como línea futura de investigación, implementar el análisis bajo los modelos MTSK (Carrillo *et al*., 2013; Flores *et al*., 2013) y STSK (Vidal-Szabó y Estrella, 2019) que resultan más específicos y consideran que todo el conocimiento de los futuros maestros, y de los maestros en ejercicio, para la enseñanza de la matemática, es conocimiento especializado. Además, en ellos también se tienen en cuenta las concepciones de los futuros maestros, lo cual puede proporcionar un estudio más completo. Así todo, dado el gran volumen de datos obtenido en los sucesivos ciclos, consideramos que puede ser un arduo trabajo debido, precisamente, a la especificidad de los modelos MTSK y STSK, lo cual, en su momento, impulsó el trabajo con el modelo MKT. Quizá para el análisis bajo estos modelos sería conveniente realizar una selección de las tareas propuestas.

Otra línea futura, en la que ya se está comenzando a trabajar, y que estaría enforcada en la mejora de la competencia en probabilidad y la metacognición sobre los aspectos didácticos, consiste en fomentar que los futuros maestros sean creadores de contenidos, no sólo a nivel de diseño de problemas, sino de diseño de situaciones didácticas, por ejemplo, con el uso de vídeos, como ya hemos propuesto en Muñiz-Rodríguez *et al.* (2021) y Muñiz-Rodríguez *et al.* (en prensa). Como siguiente paso en dicha línea de trabajo, pretendemos utilizar los vídeos creados por los futuros maestros para que los evalúen otros futuros maestros de modo que tratemos de mejorar su faceta observadora y reflexiva (Muñiz-Rodríguez *et al.,* 2018).

Conviene notar que del contexto en el que se ha llevado a cabo la investigación, se deriva un muestro no aleatorio, que nos impide conocer las respuestas de un gran número los futuros maestros (ese número va disminuyendo a medida que avanzan los ciclos). Nosotros, como docentes, no podemos controlar cuántos estudiantes van a realizar la tarea, incluso haciendo que forme parte de la evaluación final de la asignatura, o cuántos van a decidir abandonarla.

En este sentido, todos aquellos alumnos que no participaron en la realización de la tarea simplemente abandonaron el curso e incluso no asistieron al examen, por lo que suponemos que mostrarían una profunda falta de CCK y SCK. No obstante, el tamaño de la muestra es bastante grande teniendo en cuenta, sobremanera, que nos encontramos realizando un análisis exploratorio, por lo que no hemos discutido sobre la representatividad de la muestra en términos de la población de futuros maestros en las universidades españolas.

También ha resultado una limitación la falta de explicaciones aportadas por los futuros maestros, que ha dificultado el encontrar evidencias de SCK y KC en algunos de los ciclos. Cuando introducimos la sesión de formación en indicadores de evaluación, sí obtuvimos consultas de forma oral en las que los futuros maestros mostraban una mayor reflexión que por escrito. Consideramos necesario, entonces, incentivar la realización de actividades reflexivas y prolépticas (Esteve y Alsina, 2020), que permitan al alumnado de magisterio profundizar en sus autorreflexiones y hacerlas explícitas, ya sea de forma oral o por escrito. Esto debería suponer una mejora en su metacognición y su discurso interno, que deberían poder explicitar cuando se les hagan preguntas sobre la elección de su tarea y la adecuación de la misma.

A pesar de las limitaciones encontradas, esta tesis doctoral muestra una extensa evidencia de resultados siendo, en su mayoría, consistentes con estudios previos en otras universidades, lo cual apoya la validez de los mismos. En definitiva, debemos incidir y tratar de mejorar formación en probabilidad de los futuros maestros, como también apoya la comunidad científica. De esta manera, conseguiremos formar futuros maestros, reflexivos, con capacidad crítica y con una buena alfabetización probabilística que les permita ofrecer experiencias de aprendizaje adecuadas a sus futuros alumnos de Educación Primaria.

REFERENCIAS

Afeltra, L., Mellone, M., Romano, P., y Tortora, R. (2017). Errors or didactic resources: A teacher education task in the context of probability. *CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Ireland. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01927877

Aguilar-González, Á. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva.

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas?. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *13*(1), 41-61.

Aiken, L. R. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Reseach in Mathematics Education*, *5*, 67-71.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2019). Conocimiento matemático de maestros en formación cuando crean y resuelven una tarea de probabilidad. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 606). Valladolid: SEIEM.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2019). La heurística en la creación y resolución de enunciados de problemas de probabilidad.

En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Alonso-Castaño M., Alonso P., Mellone M., y Rodríguez-Muñiz L.J. (2021) Prospective Teachers Creating and Solving a Probability Problem: An Exploratory Study. In: Herrero Á., Cambra C., Urda D., Sedano J., Quintián H., Corchado E. (Eds) *The 11th International Conference on EUropean Transnational Educational (ICEUTE 2020)*. *ICEUTE 2020*. Advances in Intelligent Systems and Computing, *vol 1266* (pp.104-113). Springer, Cham.

Alsina, Á. (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 19*(1), 99-126.

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas,7,* 4-22.

Alsina, Á. (2016a). La estadística y la probabilidad en Educación Primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Aula de Innovación Educativa, 251*, 12-17.

Alsina, Á. (2016b). La probabilidad en educación primaria: de lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 71,* 46-52.

Alsina, Á. (2017a). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon: Revista de Educación Matemática, 34*(95), 25-48.

Alsina, Á. (2017b). Caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia: vinculando la investigación con las buenas prácticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12,* 59-78.

Alsina, Á. (2019). La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Alsina, Á. (2020). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia*, *1*(1), 1-14.

Alsina, Á. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, *4*(1), 71-98.

Alsina, Á., Cornejo-Morales, C., y Salgado, M. (2021). ¿Cómo, para qué y sobre qué se argumenta en el marco de la probabilidad intuitiva? Un estudio de caso múltiple en Educación Infantil. *Revista Paradigma, 12*(1), 285-312.

Alsina, Á., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Hilos de estadística y probabilidad en Twitter®: una nueva herramienta para el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa, 23*(4), 21-53.

Alsina, Á., y Salgado, M. (2019). Ampliando los conocimientos matemáticos en Educación Infantil: la incorporación de la probabilidad. *Revista de estudios y experiencias en educación*, *18*(36), 225-240.

Alsina, Á., y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *48*, 41-58.

Alsina, Á., y Vásquez, C. (2017). Hacia una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad en las primeras edades. *Didasc@lia: Didáctica y Educación, 8*(4), 199-212.

Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 104*, 99-128.

Alvarado, H., Andaur, G., y Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de Chile. *Revista Paradigma*, *39*(2), 36-64.

Andreu, J. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Sevilla: Fundación Centro de Estudios Andaluces, D.L. Recuperado el 8 de abril de 2021 de https://web.archive.org/web/20180410064302id_/http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Arteaga, P., Batanero, C., y Ruiz, B. (2010). Pre-service primary school teachers' perception of randomness. En M. Pinto, y T. Kawasaki (Eds). *Proceedings of the XXXIV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *vol. 2* (pp. 183-190). Belo Horizonte, Brasil.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA] (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Statistics and Probability* (ACMSPO24). Recuperado el 3 marzo de 2021 de http://www.australiancurriculum.edu.au/mathematics/curriculum/f-10?layout=1

Auzmendi, E. (1992). Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas media y universitaria. *Características y medición. Ed mensajero. España*.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la Educación Primaria* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Cádiz.

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad.* Colección Mathema. Granada: Editorial Comares.

Azcárate, P., y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación. En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho y F. Viseu, (Eds.). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatítica na Escola* (pp. 9-21). Braga: Centro de Investigação em Educação. Universidade Do Minho.

Batanero, C., Arteaga, P., Serrano, L., y Ruiz. B. (2014). Prospective Primary School Teachers' Perception of Randomness. En E. J. Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives*. (pp. 345-366). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Batanero, C., Biehler, R., Maxara, C., Engel, J., y Vogel, M. (2005). Simulation as a tool to bridge teachers' probabilistic and pedagogical knowledge. Paper presented at the *ICMI Study 15. Professional development of mathematics teachers.* Aguas de Lindoia, Brazil.

Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2011). Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Paradigma*, *32*(2), 53-68.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet 12*(2), 1-13.

Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegen, y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education.* (pp. 107-127). New York: Springer.

Batanero, C., y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability. Reflections and challenges: *Chilean Journal of Statistics, 3*(1), 3-13.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números: Revista de didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Batanero, C., Godino. J. D., y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Preservice School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional*

Conference (pp. 13-23). Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Godino, J. D., y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio.* Madrid: Síntesis. ISBN 84-7738-229-8.

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education*, *12*(1).

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Praxis Educativa, 10* (1), 11-34.

Batanero, C., Gómez, E., Gea, M. M., y Contreras, J. M. (2014). Assessing and developing prospective teachers' understanding of random sequences. En U. Sproesser, S. Wessolowski, y C. Wörn (Eds.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt– Didaktische Perspektiven zur anwendungsbezogenen Mathematik* (pp.1-11). Heidelberg, Germany: Springer Spektrum Verlag.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., y Contreras, J. M. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de educación primaria. *Redimat, 1*(3), 222-245.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). New York, USA: Springer.

Batanero, C., y Sánchez, E. (2005) What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability? En G. A. Jones (Eds.) *Exploring Probability in School. Mathematics Education Library, vol 40*. Springer, Boston, MA.

Batanero, C., y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 5,* 15-28.

Beltrami, E. (1999). *What is random? Chance and order in mathematics and life.* New York: Copernicus/Springer-Verlag.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(61), 526-548.

Bennett, D.J. (1998). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Blanco-Fernández, Á., Díaz-Díaz, P., García-Honrado, I., Ramos-Guajardo, A. B., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2016). A proposal for assessing imprecise concepts in Spanish primary and secondary schools. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, *24*, 71-91.

Bolero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*, *7*(8). Recuperado el 5 abril de 2021 de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., y Godino, J.D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía, 78*(275), 27-49

Canavos, G. C. (1988). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. Mc GrawHill, México.

Cañizares, M. J., y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14*, 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., y Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 37*, 37-55.

Carneiro, R. F., y Lupiáñez-Gómez, J. L. (2016). Creencias y concepciones de los futuros maestros de primaria sobre las matemáticas. *Revista Eletrônica de Educação*, *10*(1), 11-25.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985-2994). Ankara, TR: Middle East Technical University and ERME.

Carrillo, J., y Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación matemática*, *7*(03), 79-92.

CEMat (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. Recuperado el 13 junio de 2021 de https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Charles, R. I. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for early and middle school mathematics. *NCSM Journal of Educational Leadership, 8*(1), 9–24.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso* [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva] Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva.

Common Core State Standards Initiative (2010). Recuperado el 07 de abril de 2021 de http://www.corestandards.org/

Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2014a). Decreto 82/2014, de 28 de agosto, por el que se regula la ordenación y establece el currículo de la Educación Primaria en el Principado de Asturias. *Boletín Oficial del Principado de Asturias*, núm. 202 (30-VIII-2014), pp. 1-414.

Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2014b). Currículo Educación Primaria y relación entre criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. Recuperado el 7 de abril de 2021 de https://www.educastur.es/documents/10531/40578/2014-08+Publicaci%C3%B3n+curr%C3%ADculo+Educaci%C3%B3n+Primaria+%28pdf%29/acde98a4-4b20-4c51-a4eb-05fc36fc8e44

Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015a). Decreto 43/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias. *Boletín Oficial del Principado de Asturias*, núm. 150 (30-VI-2015), pp. 1-521.

Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias (2015b). Currículo Educación Secundaria Obligatoria y relaciones entre sus elementos. Recuperado el 7 de abril de 2021 de https://www.educastur.es/documents/10531/40636/Curr%C3%ADculo+de+ESO+y+relaciones+entre+sus+elementos+%28pdf%29/bd4d4cc6-4300-46d7-acd4-6f86ab73f8fb

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. http://hera.ugr.es/tesisugr/19831870.pdf

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., y Fernándes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. En T. Rowland *et al*. (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education [RESME]* (pp. 766–775). European Society for Research in Mathematics Education (RESME). Poland: University of Rzeszów.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C., y Ortiz, J. J. (2011). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. *Educaçao Matemática e Pesquisa, 12* (2), 181-198.

Cordani, L. K. (2014). Step-by-step activities in the classroom preparing to teach the frequentist definition of probability. En K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE].

Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton.

Crespo, S. (2003) Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics 52*, 243–270

de Finetti, B. (1937). La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'institut Henri Poincaré*, *7*, 1-68.

del Cerro, J. S., y Secades, M. G. (2004). Dos antecedentes de Pascal sobre el cálculo de probabilidades: Azarquiel y los probabilistas hispanos. En L. Español-González, J. J. Escribano-Benito, y M. A. Martínez-García (Eds). *Historia de las ciencias y de las técnicas, vol. 1* (pp. 387-402). Universidad de La Rioja.

Department of Education [DoE] (2013). *The national curriculum in England: Key stages 3 and 4 framework document.* Recuperado el 07 de abril de 2021 de https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-secondary-curriculum

Dessart, D. (1989). Teaching probability and statistics in general secondary education. In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education: The teaching of statistics* (pp. 139-154). Paris: UNESCO.

Díaz, P. (2017). *La estadística y la probabilidad en los libros de textos de Bachillerato y en las pruebas de acceso a la Universidad.* [Tesis de doctorado, Universidad de Oviedo]. https://digibuo.uniovi.es/dspace/handle/10651/45032

Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C., y Roa, R. (2012). Assessing prospective secondary school teachers' biases in conditional probability reasoning. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(44), 1207-1226.

Esteve, O., y Alsina, Á. (2020). Más allá del PowerPoint: promoviendo el aprendizaje activo en la formación de maestros no presencial. *Papeles de Trabajo sobre Cultura, Educación y Desarrollo Humano. Working Papers on Culture, Education and Human Development, 16*(3), 1-14.

Estrada, A. (2009). Las actitudes hacia la estadística de los profesores en formación. Incidencia de las variables género, especialidad y formación previa. En R. Serrano (Ed.) *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 117-132). Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Educación y Humanidades (Melilla) y Universidad de Granada.

Estrada, A., y Batanero, C. (2020). Prospective Primary School Teachers' Attitudes towards Probability and its Teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(1).

Estrada, A., Batanero, C., y Fortuny, J. M. (2003). Actitudes y estadística en profesores en formación y en ejercicio. En Universitat de Lleida (Ed.), *Actas del XXVII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. (pp. 909-920). Lleida, España: Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa.

Estrada, A., Batanero, C., y Lancaster, S. (2011). Teachers' Attitudes Towards Statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading (Eds) *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. New ICMI Study Series, vol 14.* Springer, Dordrecht.

Estrada, A., Batanero, C., y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 22*(2), 263-273.

Even, R., y Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study*. New York, United States of America: Springer.

Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics*. New York: Copernicus/Springer-Verlag.

Fernándes, J. A., Gea, M. M., y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 178-187). Málaga: SEIEM.

Fischbein, H. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Vol. 85). Springer Science & Business Media.

Flores, E., Escudero, D. I., y Carrillo, J. (2013). A Theoretical Review of Specialized Content Knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Freudenthal, H. (1968) Realistic Models in Probability. En I. Lakatos (Ed.), *The Problem of lnductive Logic* (pp. 1-14). North Holland: Amsterdam.

Gal, I. (2000). The numeracy challenge. En I. Gal (Ed.), *Adult numeracy development: Theory, research, practice* (pp. 9-31). Cresskill, NJ: Hampton Press.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsibilities, *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gal, I., y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education, 2*(2). Recuperado el 16 de abril de 2021 de www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html

Gal, I., Ginsburg, L., y Schau, C. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I. Gal, y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education, vol. 12,* (pp. 37-51). IOS Press, Voorburg.

Green, D. (1989). School pupils' understanding of randomness. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education: The teaching of statistics, vol. 7* (pp. 27-39). Paris: UNESCO.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, 20*, 13-31.

Godino, J. D. (2013a). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D. (2013b). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, 2*, 1-15.

Godino, J. D. (08 de abril de 2021) *Componentes y criterios básicos de idoneidad didáctica.* Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). [Imagen]. Recuperado el 08 de abril de 2021 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis. ISBN: 84-7738-025-2.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Cañizares, M. J., y Díaz, C. (2003). Teaching probability to pre-service primary school teachers through simulation. En IASE (Ed.) *Proceedings of the 54th Session of the International Statistical Institute*, Bulletin of ISI. Berlin: ISI. https://iase-web.org/documents/papers/isi54/2989.pdf?1402524976

Godino, J. D., y Pino-Fan, L. (2013) The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En: Ubuz, B.; Haser, Ç., y Mariotti, M. (Eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME, 2013.* (pp. 3325-3326). Antalya, Turkey.

Gómez-Torres, E. (2014). Training prospective teachers for teaching probability at secondary school in Colombia. En K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE].

Gómez-Torres, E., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, *31*(87), 25-42.

Gómez-Torres, E., Batanero, C., Díaz, C., y Contreras, J. M. (2016). Developing a questionnaire to assess the probability content knowledge of prospective primary school teachers. *Statistics Education Research Journal*, *15*(2), 197-215.

Gómez-Torres, E., Contreras, J. M., y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.

González del Olmo, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria*. Recuperado el 30 de julio de 2021 de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf?sequence=1

Hacking, I. (1995) *El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística*. Barcelona: Gedisa.

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher 25*(4), 12–21.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, *42*(2), 371-406.

Huerta, P. (2018). Preparing teachers for teaching probability through problem solving. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 293-311). Springer, Cham.

Hurst, C. (2014). Big Challenges and Big Opportunities: The Power of "Big Ideas" to Change Curriculum and the Culture of Teacher Planning. En J. Anderson, M. Cavanagh y A. Prescott (Eds.). *Curriculum in focus: Research guided practice (Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 287–294). Sydney: MERGA.

Ivars, P., Buforn À., y Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza de las matemáticas de futuros maestros. En A. Salcedo (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del siglo XXI* (pp. 65 – 87). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Ivars, P., Fernández, C., y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jefatura del Estado (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 238 (4-X-1990), pp. 28927-28942

Jefatura del Estado (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 106 (4-V-2006), pp. 17158- 17207

Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 340 (30-XII-2020), pp. 122868-122953

Kazak, S., y Leavy, A. M. (2018). Emergent reasoning about uncertainty in primary school children with a focus on subjective probability. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, y E. Paparistodemou (Eds) *Statistics in Early Childhood and Primary Education* (pp. 37-54). Springer, Singapore.

Kirschenmann, P. (1972). Concepts of randomness. *Journal of Philosophical Logic*, *1*(3-4), 395-414.

Latorre, A. (2004). La investigación-acción. *Conocer y cambiar la práctica educativa*, *4*.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M. J., y Casas-Rosal, J. C. (2016). Errores de los estudiantes a maestro cuando trabajan con fracciones. En F. J. España (Ed.), *XVI Congreso De Enseñanza Y Aprendizaje De Las Matemáticas* (pp. 143–151). S.A.E.M. THALES.

Liu, Y., y Thompson, P. (2007). Teachers' understandings of probability. *Cognition and Instruction, 25*(2-3), 113-160.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51*, 92-101.

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 53-62.

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, 50*, 117-133.

Llinares, S., y Sánchez, M. V. (1988). *Matemáticas. Cultura y aprendizaje: Fracciones.* Madrid: Síntesis.

Llinares, S., Valls, J., y Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en vídeos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, *20*(3), 59-82.

López-Beltrán, M., Albarracín, L., Ferrando-Palomares, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E., y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En D. Martín De Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán, y M. Siles (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94). Madrid, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces.

López-Martín, M. M. (2021) *La inferencia estadística en bachillerato: análisis de las pruebas de acceso a la universidad y de los conocimientos de futuros profesores*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/66672

Lortie, D. C. (2002). *Schoolteacher: A sociological study.* University of Chicago Press.

Martin, V., Thibault, M., y Roy, N. (2018). A survey of teachers' self-reported practices of probability teaching in primary and secondary school levels in Québec. En M. A. Sorto, A. White, y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS10, July, 2018), Kyoto, Japan. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2018 ISI/IASE].

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The Discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grows (Ed.), *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 575-596). Macmillam N.C.T.M. New York.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 152 (26-VI-1991), pp. 21191-21193

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 293 (8-XII-2006), pp. 43053-43102

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 52 (1-III-2014), pp. 19349-19420

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada] https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TESISMOHAMED.pdf

Mohamed, N., y Ortiz, J. J. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *80*, 103-117.

Moore, D., y Cobb, G. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly, 104*, 801-823.

Muñiz Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J., De Coninck, K., Vanderlinde, R., & Valcke, M. (2018). Exploring the effectiveness of video-vignettes to develop mathematics student teachers' feedback competence. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, *14*(11).

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso-Castaño, M., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la idoneidad didáctica de vídeos educativos sobre probabilidad elaborados por estudiantes para maestro. *Investigación en Educación Matemática XXIV.* Valencia: SEIEM

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso-Castaño, M., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (en prensa). Análisis del conocimiento de estudiantes para maestro/a en la elaboración de vídeos educativos: una experiencia didáctica. *Magister*

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Alsina, Á. (2020). Deficits in the Statistical and Probabilistic Literacy of Citizens: Effects in a World in Crisis. *Mathematics*, *8*(11), 1872.

Muñoz, E. C., Arañeda, A., Sorto, A., y León, J. L. (2014). Statistics and probability curriculum development for future elementary teachers in Chile: collaboration among countries. En K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE].

Naresh, N. (2014). Games of chance: tools that help enhance prospective teachers' notions of statistics and probability. En K. Makar, B. de Sousa, y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE].

National Council for Curriculum and Assessment [NCCA] (1999). *Primary school curriculum: Mathematics*. Dublin, Ireland: Stationary Office.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nolla, Á., Muñoz, R., Cerisola, A., y Fernández, B. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *96*(35.1), 185-208.

Olgun, B., e Isiksal-Bostan, M., (2019). The influence of the context of conditional probability problems on probabilistic thinking: A case study with teacher candidates. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02412821

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C., y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa, 15*(1), 64-91.

Ortiz, J. J., Batanero, C., y Serrano, L. (1996). Las frecuencias relativas en los textos de Bachillerato. *Ema, 2*(1), 29-48.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En Instituto de Estudios Aragoneses (Ed.). *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 267-276). Huesca

Paparistodemou, E., y Meletiou-Mavrotheris, M. (2019). In-service teachers' design, teaching and reflection on probability tasks. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02412827

Párraguez, R., Gea, M. M., Batanero, C., y Díaz-Levicoy, D. (2017). ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 1*(2).

Perelli-D'Argenzio, M. P., y Rigatti-Luchini, S. (2014). Teachers and students: from an intuitive approach to a rational evaluation of probability. En K. Makar, B. de Sousa, y

R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *19*(1), 71-98.

Ponte, J. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. En M. Brown, D. Fernándes, *et. al*. (Eds.). *Educação matemática. Temas de investigação* (pp.185-239). Lisboa: SEM-SPCE.

Raigada, J. L. P. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Sociolinguistic studies*, *3*(1), 1-42.

Ramsey, F. P. (1926). Truth and probability. *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, 7*, 156-198.

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23a ed.).

Rescher, N. (1961). The Concept of Randomness. *Theoria, 27*, 1-11.

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., y Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 44*(1), 135-156.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Aguilar-González, A., Lindorff, A., y Muñiz-Rodríguez, L. (en prensa). Undergraduates' conceptions of mathematics teaching and learning: empirical evidence in support of a theory. *Educational Studies in Mathematics*.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Burón, D., Aguilar-González, Á., y Muñiz-Rodríguez, L. (2021). Secondary Mathematics Teachers' Perception of Their Readiness for Emergency Remote Teaching during the COVID-19 Pandemic: A Case Study. *Education Sciences*, *11*(5), 228.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Crespo, R., Díaz, I., Fioravanti, M., García-Raffi, L. M., González-Vasco, M. I., González-Vega, L., Lafuente, M., Montejo-Gámez, J., Ortega, F. A., y Mallavibarrena, R. (2020). Los estudios de matemáticas en el ámbito universitario. En D. Martín De Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán, y M. Siles (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 95-162). Madrid, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Díaz, P., y Muñiz-Rodríguez, L. (2019) Statistics and Probability in the Spanish Baccalaureate: Intended Curriculum and Implementation in Textbooks. En Shimizu, Y., y Vithal, R. (Eds.), *24th ICMI Study Conference. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities (ICMI)* (pp. 413-420). University of Tsukuba: Tsukuba, Japan.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez Ortiz, C., y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 104*, 217-238.

Rokeach, M. (1968). *Beliefs, attitudes and values*. Jossey-Bass. San Francisco. Suydam, M. N. (1984). Research report: Attitudes toward mathematics. *Arithmetic Teacher*, *32*, 12.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2003). The knowledge quartet. En J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 23*(3), 97–103.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M., y Azcárate, P. (2005). Las concepciones deterministas, un obstáculo para el desarrollo profesional del docente en el campo probabilística. En *Actas del V Cibem. Congreso Iberoamericano de Educaçao Matemática* (pp. 12-14).

Serrano, L., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, *10*(01), 7-25.

Serrano, L., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1999). Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 43-44*, 149-162.

Serrano, L., Batanero C., y Ortiz, J. J (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *Suma, 22*, 43-50.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: MacMillan.

Shaughnessy, J. M. (2019). Recommendations about the Big Ideas in Statistics Education: A retrospective from curriculum and research. *Cuadernos*, *18*, 44-58.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. (Eds.) (2011). *Mathematics Teacher Noticing: seeing through Teachers' eyes*. New York: Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Silverman, J., y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(6), 499-511.

Sosa, L., y Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

Steen, L. A. (2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. Washington, DC: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: ISI.

Suárez-Pazos, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación-acción colaboradora en la educación. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 1*(1), 40-56.

Sullivan, P. y Clarke, D. (1991). Catering to all abilities through 'good' questions, *Arithmetic Teacher 39*(2), 14–18.

Suydam, M. N. (1984). Research report: Attitudes toward mathematics. *Arithmetic Teacher*, *32*, 12.

Thompson, A. G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of Research. En Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

UNESCO (1978). *Intergovernmental conference on environmental education: Tbilisi (USSR), 14-26 October 1977. Final Report*. Paris: UNESCO.

Vásquez, C. (2014) *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo*. [Tesis de doctorado, Universitat de Girona]. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Claudia_V%C3%A1squez.pdf

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2013a). Conocimiento de la probabilidad y su didáctica en profesores de educación básica. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 4993-4998). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2013b). Conocimiento matemático y didáctico en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, 2*, 165-172.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2013c). La formación matemático-didáctica del profesorado de primaria para la enseñanza de las probabilidades. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 175-184). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2014a). Diseño de un instrumento de evaluación del conocimiento didáctico y matemático en profesores de primaria para la enseñanza de la probabilidad. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática*, *8*(1), 122-128.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2014b). Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *85*, 5-23.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015a). Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp.511-520). Alicante: SEIEM.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015b). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7,* 27-48.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015c), Evaluación del conocimiento del profesorado de matemáticas para enseñar probabilidad a través del Cuestionario CDM-Probabilidad. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea, y M.M. López (Eds.*), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, vol. 2* (pp. 289-297). Granada, 2015.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015d). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(52), 681-703.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2015e). Análisis de la probabilidad y sus significados en el currículo escolar y en libros de texto de educación básica. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandia, y M. Párraguez (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 223-230). Villarrica, Chile: SOCHIEM.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017a). ¿Cómo desarrollar la alfabetización probabilística en primaria?. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *23*(78), 24-29.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017b). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Educación matemática*, *29*(3), 79-108.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017c). Una aproximación ontosemiótica al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017d). Proposiciones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *21*(1), 433-457.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2017e). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 454-478.

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019). Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *23*, 393-415.

Vásquez, C., Alsina, A., Pincheira, N., Gea, M. M. y Chandia, E. (2019). Una primera aproximación a la caracterización de un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C., y Alsina, Á. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec*, *8*(1), 154-179.

Vidal-Szabó, P. F., y Estrella, S. (2019). Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico. *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado el 13 de julio de 2021 de http://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/692/327

Von Mises, R. (1957) *Probability, Statistics and Truth*. MacMillan: New York.

Watson, A., y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 205-215.