

ESCUELA POLITÉCNICA DE INGENIERÍA DE GIJÓN



Universidad de Oviedo

MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

**ÁREA DE MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTÍNUOS Y
TEORÍA DE ESTRUCTURAS**

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

**NUEVOS ACEROS PARA EL
MICROMECHANIZADO**

D. LUCAS CASTRO GARCÍA

TUTORA: D. COVANDONGA BETEGÓN BIEMPICA
COTUTOR: D. EMILIO MARTÍNEZ PAÑEDA

Gijón, Noviembre 2021



Universidad de
Oviedo





Universidad de
Oviedo



Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría mostrar mi más sincero agradecimiento a mi tutora Covadonga Betegón Biempica por compartir todos sus conocimientos y tener siempre una disponibilidad absoluta para atenderme y poder resolver mis dudas.

Agradecer a mi cotutor Emilio Martínez Pañeda toda la documentación facilitada y a Youssef todos sus consejos.



Índice

CAPÍTULO 1	1
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Microestructura de los metales	2
1.2 Fractura dúctil en los materiales metálicos	2
1.2.1 Nucleación de microhuecos.....	3
1.2.2 Crecimiento y coalescencia de los microhuecos	4
1.3 Objetivos	6
CAPÍTULO 2	7
2. STRAIN GRADIENT PLASTICITY	7
2.1 Teoría de la plasticidad basada en el gradiente de deformación plástica	9
2.2 Implementación de la teoría MSG mediante elementos finitos: CMSG plasticity	12
2.2.1 Relación constitutiva de tipo viscoplástico basada en el modelo de Taylor ..	12
2.2.2 Módulo tangente consistente	13
2.2.3 Implementación del gradiente de deformación plástica en 3D.....	16
2.3 Verificación de la subrutina UMAT en 3D	21
2.3.1 Resultados.....	22
CAPÍTULO 3	24
3. REPRESENTATIVE VOLUME ELEMENT	24
3.1 Método de control de desplazamientos	25



3.2 Método de control en carga	34
CAPÍTULO 4.....	37
4. EL MODELO DE GURSON Y SUS EXTENSIONES	37
4.1 El modelo de Gurson completo.....	38
4.1.1 Resultados de la implementación del modelo de Gurson completo.....	39
4.2 Extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura	41
4.2.1 Implementación de la extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura	42
4.2.1.1 Definición del módulo tangente consistente.....	51
4.2.2 Resultados de la implementación de la extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura.....	53
4.3 Extensión del modelo de Gurson incorporando Strain Gradient Plasticity ...	55
4.3.1 Resultados de la implementación de la extensión del modelo de Gurson incorporando Strain Gradient Plasticity.	60
4.4 Extensión del modelo se Gurson para el fallo por cortadura incorporando Strain Gradient Plasticity	62
4.4.1 Calibración del parámetro kw en el marco de la teoría Strain Gradient Plasticity	69
4.4.2 Resultados de la implementación de un nuevo modelo de Gurson incorporando Strain Gradient Plasticity para el fallo por cortadura.....	77
CAPÍTULO 5.....	79
5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	79
5.1 Conclusiones.....	79
5.2 Trabajos futuros	80



Universidad de
Oviedo



BIBLIOGRAFÍA 81



Índice de Figuras

CAPÍTULO 1.....	1
1. INTRODUCCIÓN.....	1
Figura 1.1 Aspectos microestructurales fundamentales.....	2
Figura 1.2 Fractura dúctil de una probeta sometida a tracción.	3
Figura 1.3 Microcavidad creada por la descohesión de una inclusión esférica en un acero.	4
Figura 1.4 Nucleación, crecimiento y coalescencia de microhuecos en un metal: a) inclusiones en la fase matriz, b) nucleación de microhuecos, c) crecimiento de microhuecos, d) deformación plástica localizada entre microhuecos, e) creación del cuello entre microhuecos, f) coalescencia de microhuecos.....	5
CAPÍTULO 2.....	7
2. STRAIN GRADIENT PLASTICITY	7
Figura 2.1 Resultados experimentales que muestran el efecto de tamaño bajo a) Torsión y b) Tracción.....	8
Figura 2.2 a) Bajo flexión pura una distribución uniforme de dislocaciones con un vector Burgers de valor b y espaciadas una longitud L generará una curvatura de la red igual a b/L^2 .b) En la figura b) se muestra una vista esquemática de las GNDs en una red deformada plásticamente.....	9
Figura 2.3 Estructura y puntos de integración del elemento C3D8.....	16
Figura 2.4 Resultados obtenidos del ensayo a tracción para varios valores de $LD/2a$.....	22
Figura 2.5 Distribución de tensiones en (MPa) en el momento de fractura para $LD/2a = 0.0$, es decir, en plasticidad convencional.....	23



CAPÍTULO 3.....	24
3. REPRESENTATIVE VOLUME ELEMENT.....	24
Figura 3.1 RVE adoptado. Imagen extraída de (Dæhli <i>et al.</i>, 2018).....	24
Figura 3.2 Modelo de elementos finitos representativo de un octavo de la celda unitaria .	25
Figura 3.3 Condiciones de contorno en la celda unitaria. Extraída de (Vadillo, Reboul and Fernández-Sáez, 2016).....	27
Figura 3.4 Condiciones de contorno de celda sin hueco y celda con hueco. Modificada y extraída desde (Vadillo, Reboul and Fernández-Sáez, 2016).....	29
Figura 3.5 Visualización de los diferentes sistemas de referencia usados en el método de control de desplazamientos.....	31
Figura 3.6 Modelo de elementos finitos de 1/8 de la celda unitaria usado en el método de control en carga.....	34
CAPÍTULO 4.....	37
4. EL MODELO DE GURSON Y SUS EXTENSIONES	37
Figura 4.1 Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad Vonmises y en el modelo RVE con Gurson.	39
Figura 4.2 Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad Vonmises y en el modelo RVE con Gurson.	40
Figura 4.3 Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad Vonmises , en el modelo RVE con Gurson original y en el modelo RVE con el modelo de Gurson propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008).....	53
Figura 4.4 Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad Vonmises , en el modelo RVE con Gurson original y en el modelo RVE con el modelo de Gurson propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008).....	54



Figura 4.5 a) Los microhuecos se suponen que están dispuestos de manera periódica en cilindros hexagonales mediante condiciones de contorno axi-simétricas. b) Se muestra la aproximación del modelo adoptada para tener un menor coste computacional. Extraída de (Holte *et al.*, 2019) 55

Figura 4.6 Evolución de $Q1$ y $Q2$ con la porosidad f para diferentes parámetros de escala LD y una porosidad inicial fijada $f_0 = 0.001$ 58

Figura 4.7 Curva tensión deformación del modelo de celda mostrado en Figura 4.5 donde se observa que el error cometido al suponer $Q1$ y $Q2$ constantes es despreciable..... 58

Figura 4.8 Evolución de las funciones $Q1$ y $Q2$ la porosidad f para diferentes parámetros de escala LD y una porosidad inicial fijada $f_0 = 0.001$ 59

Figura 4.9 Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad SGP y en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP propuesto por (Niordson and Tvergaard, 2019)..... 60

Figura 4.10 Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad SGP y en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP propuesto por (Niordson and Tvergaard, 2019)..... 61

Figura 4.11 Cortadura pura y simple..... 62

Figura 4.12 Curvas de comportamiento del material obtenidas mediante el nuevo modelo de Gurson para varios valores de f_0 constante y varios valores característicos de LD/R_0 67

Figura 4.13 Comportamiento del material obtenido para plasticidad convencional mediante el nuevo modelo de Gurson, donde se obtienen los mismos resultados que (Nahshon and Hutchinson, 2008)..... 67

Figura 4.14 Curva de comportamiento del material obtenidas para $f_0 = 0.001$ y varios valores de LD/R_0 característicos. 68

Figura 4.15 Curva de comportamiento del material obtenidas para $f_0 = 0.0033$ y varios valores de LD/R_0 característicos. 68



- Figura 4.16** Curva de comportamiento del material obtenidas para $f_0 = 0.01$ y varios valores de LD/R_0 característicos. 69
- Figura 4.17** Relación entre fc y f_0 para varios coeficientes de endurecimiento del material con un $LDR_0 = 0$ 71
- Figura 4.18** Relación entre fc y f_0 para $N = 0.1$ y $N = 0.2$ con $LDR_0 = 0$ 71
- Figura 4.19** Relaciones obtenidas entre fc y f_0 para $N = 0.1$ y $N = 0.2$ 01 y varios valores de LDR_0 característicos. 72
- Figura 4.20** Curvas de comportamiento de material para un $f_0 \in [0.001,0.01]$ 73
- Figura 4.22** Curvas $(\epsilon_e^p)_c = \phi(f_0)$ para diferentes valores característicos de LD/R_0 74
- Figura 4.23** Valores de kw en función de LD/R_0 . Donde manteniendo LD/R_0 constante se obtienen una serie de puntos para cada f_0 . Siendo $f_0 \in 0.001,0.01$ 75
- Figura 4.24** Polinomio de interpolación (línea azul) del parámetro kw 75
- Figura 4.25** Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad SGP ,en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP y fallo por cortadura, y el nuevo modelo de Gurson propuesto para un $LD/R_0 = 0.5$ 77
- Figura 4.26** Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad SGP ,en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP y fallo por cortadura, y el nuevo modelo de Gurson propuesto para un $LD/R_0 = 0.5$ 78



Universidad de
Oviedo



Índice de Tablas

TABLA 1. Definición de las variables de estado de la subrutina UMAT en 3D.....	21
TABLA 2. Solución numérica para el método de control de los desplazamientos....	26

Capítulo 1

1. Introducción

La tendencia de diseño hacia la miniaturización en un gran número de productos actuales ha supuesto una revolución en el ámbito de las tecnologías de micro-fabricación (fabricación de productos en la escala micro, de 1 a 999 μm), tanto en el desarrollo y aplicación de nuevas tecnologías como en la adaptación y optimización de las tecnologías convencionales de mecanizado para cumplir con las exigencias dimensionales, de precisión, calidad superficial, etc.

En ese sentido, las tecnologías de mecanizado convencionales, llevadas a un marco de ultraprecisión, siguen ofreciendo una mayor versatilidad, rapidez y calidad en una amplia variedad de materiales, frente a las limitaciones de tecnologías más modernas, como pueden ser la electroerosión o el mecanizado láser. Entre las técnicas convencionales merece especial consideración el microconformado de metales, que presenta grandes ventajas tales como la velocidad de producción, la mínima o nula pérdida de material, las excelentes propiedades mecánicas del producto final y las pequeñas tolerancias alcanzadas. Esta técnica de fabricación se utiliza en la fabricación de elementos tales como microconectores, tornillos en miniatura, microengranajes, microprocesadores, microsensores, etc.

Es conocido que el comportamiento del material en el microconformado no es el mismo que en el conformado tradicional. Debido al pequeño tamaño de las piezas aparecen los denominados efectos de escala, de tal forma que en la escala micro el material es notablemente más “duro”. En este Trabajo de Fin de Máster, se pretende estudiar el cambio de comportamiento de aceros habitualmente conformables cuando se someten a micromecanizado. Además, será preciso tener en cuenta el proceso de rotura o fractura del material en aquellos casos que éste sea una parte importante del proceso de fabricación.

Para ello, es necesario el desarrollo de un modelo de comportamiento del material que sea capaz de reproducir fielmente estas dos características: por una parte, el efecto de escala, y por otra, la fractura final del material en procesos tales como el microtroquelado, donde los estados tensionales están gobernados por tensiones de cortadura. El modelo se implementará numéricamente mediante el método de los elementos finitos, lo que permitirá el estudio de casos particulares.

1.1 Microestructura de los metales

La [Figura 1.1](#) muestra los aspectos más característicos que definen la microestructura de los materiales metálicos, que comprende desde los defectos presentes a escala atómica (lugares vacantes, átomos intersticiales y átomos ajenos o forasteros (en posiciones sustitucionales o intersticiales)), las dislocaciones, las juntas de grano y la presencia de fases precipitadas en el interior de grano (precipitados coherentes o incoherentes) o en el borde de los granos. Conocer y entender todos estos defectos microestructurales, será de vital importancia para la creación de modelos matemáticos que permitan describir el proceso de fractura dúctil de los metales.

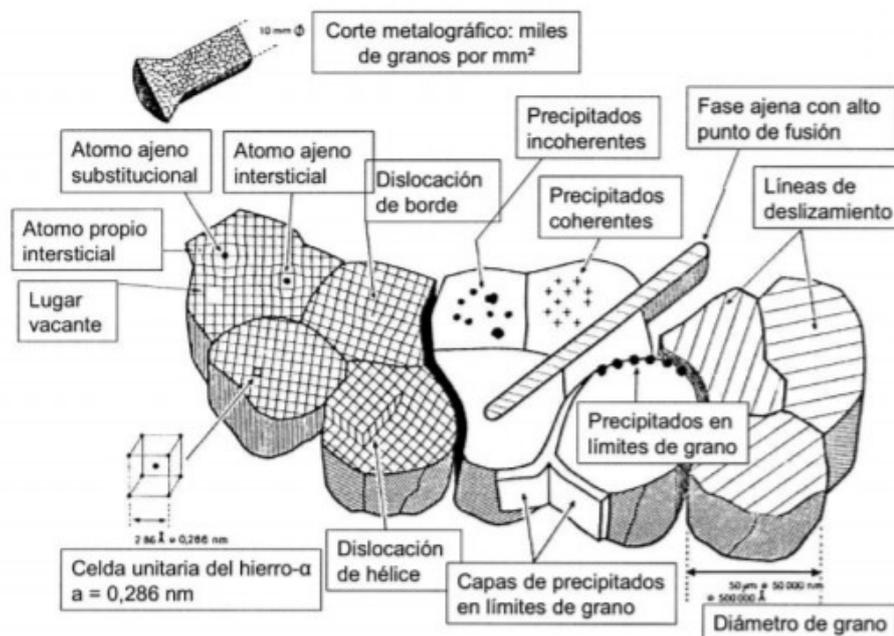


Figura 1.1 Aspectos microestructurales fundamentales.

1.2 Fractura dúctil en los materiales metálicos

La principal característica de la fractura dúctil es la existencia previa de una amplia deformación plástica en las zonas adyacentes. Es el tipo de fractura que tiene lugar por encima de la temperatura de transición del metal. En la [Figura 1.2](#) se puede observar el aspecto de una probeta de metal que ha sufrido una fractura dúctil durante un ensayo de tracción.

A nivel microscópico la fractura dúctil se inicia con una deformación plástica lo suficientemente intensa como para que se nucleen microhuecos en las discontinuidades microestructurales existentes. Normalmente los microhuecos se inician en la intercarra entre las inclusiones, como los carburos, y la fase matriz. Si seguimos deformando plásticamente el material, estas microhuecos crecen hasta que finalmente coalescen unas con otras provocando la rotura del material. Por lo tanto, el mecanismo de fractura dúctil de los metales consta de la nucleación, crecimiento y coalescencia de microhuecos.

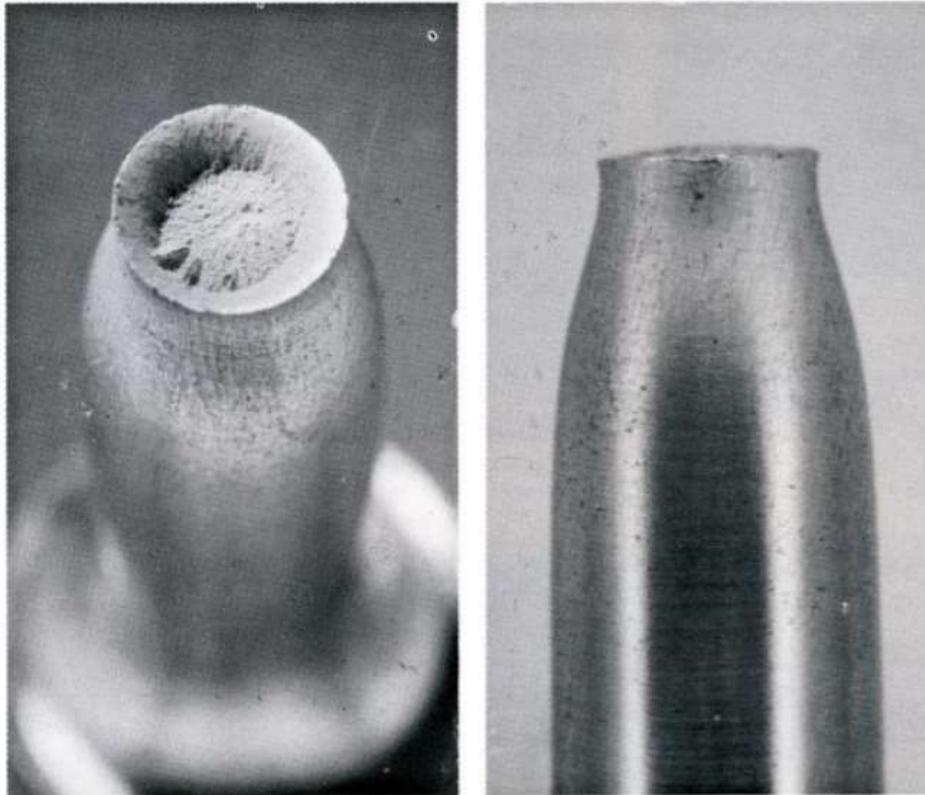


Figura 1.2 Fractura dúctil de una probeta sometida a tracción.

1.2.1 Nucleación de microhuecos

Un microhueco, se forma alrededor de una partícula de segunda fase o inclusión cuando se aplica una tensión lo suficientemente intensa como para romper los enlaces interfaciales entre la partícula y la matriz. En la actualidad, existen varios modelos que predicen la tensión necesaria para que se produzca la nucleación, pero el más utilizado es el modelo de Argon que sostiene que la tensión necesaria para romper los enlaces interfaciales entre la inclusión y la fase matriz del metal es igual a la suma de la tensión efectiva σ_e y de la tensión media σ_m , donde la tensión efectiva se define como:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2] \quad (1.1)$$

y la tensión media como:

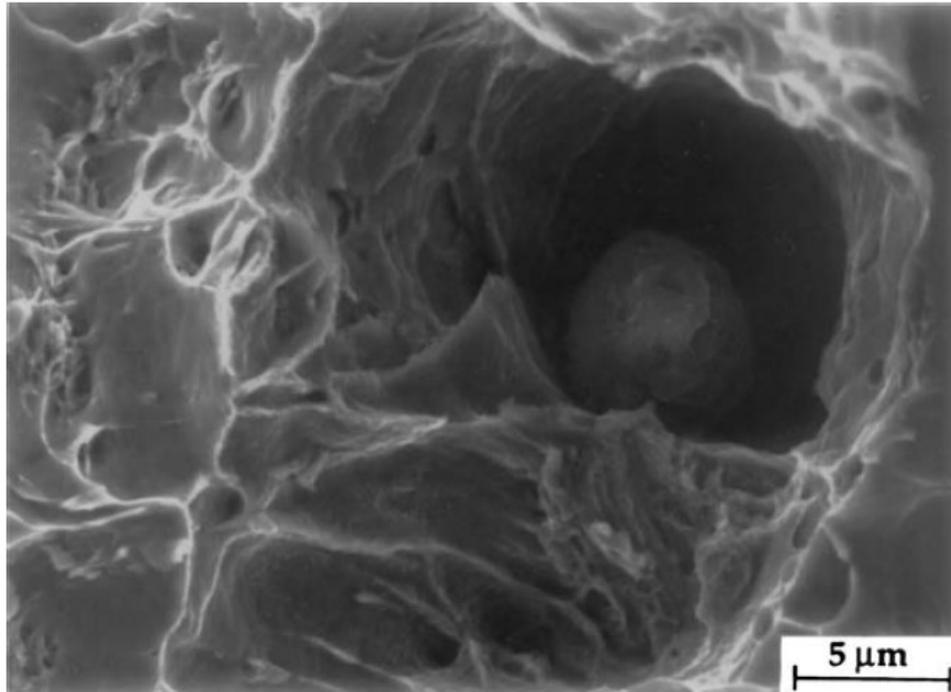
$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1.2)$$

De este modo definimos la tensión de descohesión σ_c de la siguiente manera:

$$\sigma \geq \sigma_c = \sigma_e + \sigma_m \quad (1.3)$$

1.2.2 Crecimiento y coalescencia de los microhuecos

Una vez los microhuecos se han creado, la deformación plástica adicional y la tensión hidrostática hacen que estos pequeños huecos crezcan y que eventualmente se unan unos con otros, este último proceso se denomina coalescencia de microhuecos. En la [Figura 1.3](#), se puede observar como una pequeña inclusión esférica ha nucleado un microhueco tras haberse producido la descohesión de la misma con la fase matriz de un acero.



[Figura 1.3](#) Microcavidad creada por la descohesión de una inclusión esférica en un acero.

En resumen, la fractura dúctil de los metales consta de tres procesos fundamentales. En primer lugar, se precisa que la tensión aplicada al material sea la necesaria como para producir la descohesión de las inclusiones de la fase matriz. Al seguir sometiendo al material a cargas exteriores junto con la deformación plástica adicional producida estos microhuecos crecen. Finalmente, estos microhuecos coalescen unos con otros formando microhuecos aún mayores hasta que finalmente el material rompe. En la [Figura 1.4](#) se ilustra esquemáticamente todo este proceso.

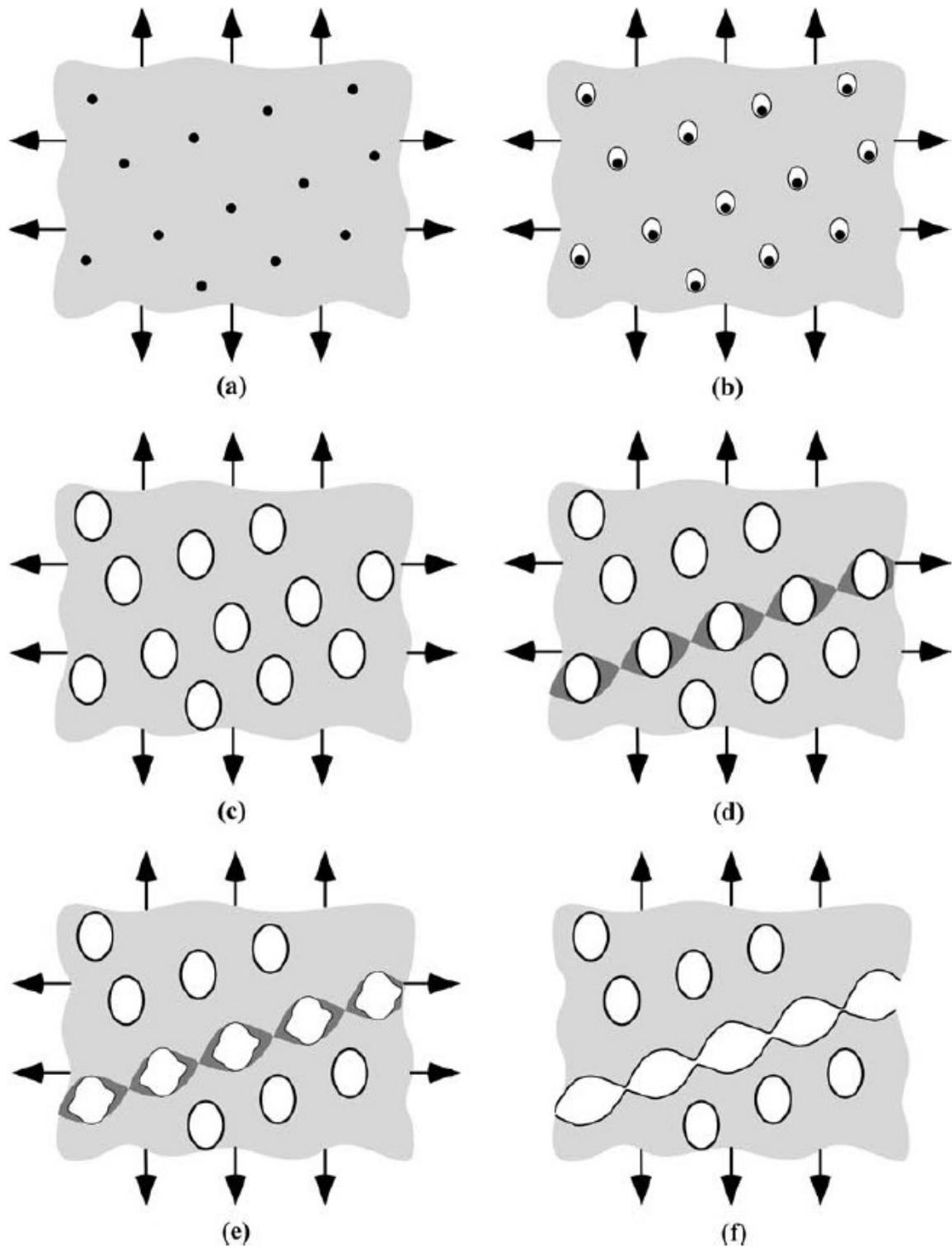


Figura 1.4 Nucleación, crecimiento y coalescencia de microhuecos en un metal: a) inclusiones en la fase matriz, b) nucleación de microhuecos, c) crecimiento de microhuecos, d) deformación plástica localizada entre microhuecos, e) creación del cuello entre microhuecos, f) coalescencia de microhuecos.

1.3 Objetivos

El principal objetivo de este Trabajo de Fin de Máster, tal y como se ha mencionado en la introducción, es el desarrollo de un modelo de comportamiento de materiales metálicos que sea capaz de reproducir fielmente estas dos características: por una parte, el efecto de escala, y por otra, la fractura final del material en procesos de microconformado.

Para conseguir este objetivo final se han establecido los siguientes objetivos secundarios:

- Dado que a escala muy pequeña los materiales metálicos no se comportan de la misma manera que a escala natural, será necesario utilizar una nueva teoría de la plasticidad que recoja el efecto de tamaño de los metales. Esta teoría se denomina Strain Gradient Plasticity y se tratará de implementar una subrutina UMAT del programa comercial de elementos finitos ABAQUS, que modelice esta teoría de la plasticidad en 3 dimensiones.
- Se implementará un modelo de Gurson completo en una subrutina UMAT que recoja los efectos de tamaño de los metales. Dicho modelo fue propuesto por Christian F. Niordson y Viggo Tvergaard en 2018 y se encuentra publicado en (Niordson and Tvergaard, 2019).
- Se implementará un modelo de Gurson completo en una subrutina UMAT que sea eficiente en estados de cortura. Dicho modelo fue desarrollado por K. Nahshon y J.W.Hutchinson en 2008 y se encuentra publicado en (Nahshon and Hutchinson, 2008).
- Se acoplarán los dos modelos anteriormente descritos con el objetivo de desarrollar un modelo de Gurson completo capaz de ser eficiente en estados de cortura para escalas muy pequeñas y de estar forma poder ser aplicable a la simulación de procesos de micromecanizado. Dicho modelo final será implementado en una subrutina UMAT con la finalidad de poder realizar simulaciones en ABAQUS de cualquier proceso de micromecanizado de manera eficiente.

Capítulo 2

2. Strain Gradient Plasticity

En los últimos años, dentro de la comunidad científica, ha aumentado el interés por caracterizar el comportamiento de los materiales metálicos a escala micrométrica. Numerosos experimentos han determinado que los metales muestran fuertes efectos de tamaño cuando se deforman dentro de la zona plástica. Dos experimentos muy representativos del efecto de tamaño de los metales son el ensayo de una probeta cilíndrica sometida a torsión y el ensayo de tracción uniaxial. En ambos experimentos se puede observar como al reducir dimensiones de las probetas, las tensiones soportadas por las mismas aumentan de manera considerable. En la [Figura 2.1](#) se muestran los resultados obtenidos por N.A. Fleck y G.M. Muller en (Fleck *et al.*, 1994).

Estos experimentos revelan que las muestras más delgadas son más fuertes y endurecen más que las más gruesas. Estos resultados muestran que los diferentes valores obtenidos para diferentes tamaños de probetas, están relacionados con la presencia de gradientes de deformación. Para entender este hecho, es necesario comprender que el endurecimiento es controlado por la densidad total de dislocaciones, y parte de esta densidad de dislocaciones está relacionada con los gradientes de deformación plástica.

La parte de densidad de dislocaciones relacionada con los gradientes de deformación plástica se denomina Dislocaciones Geométricamente Necesarias (GNDs) mientras que la otra parte de la densidad de dislocaciones se denomina dislocaciones almacenadas estadísticamente (SSD).

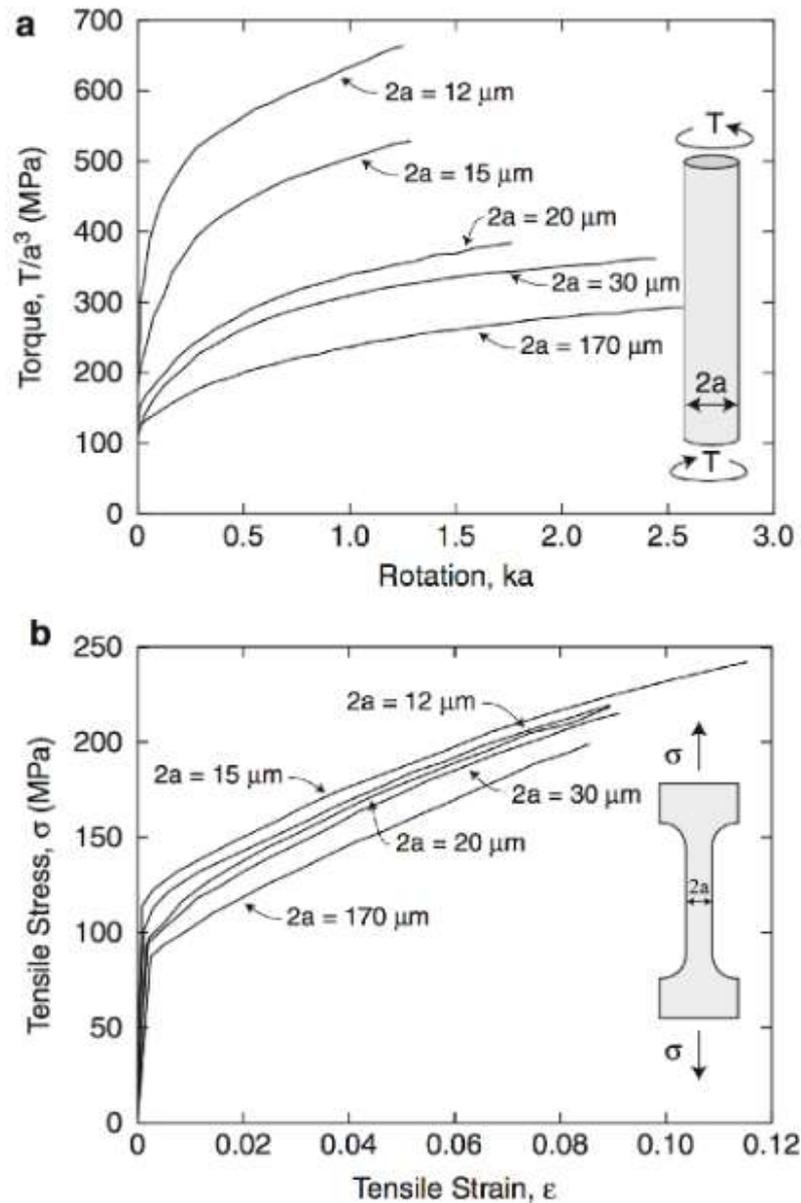


Figura 2.1 Resultados experimentales que muestran el efecto de tamaño bajo a) Torsión y b) Tracción.

Para comprender el significado físico de estos dos conceptos, Huajian Gao en 2002, demostró mediante la Figura 2.2 extraída de (Gao and Huang, 2002), que se requiere un almacenamiento extra de dislocaciones en la fase matriz de los metales para mantener la curvatura de la red que surge ante la deformación plástica no uniforme. Esto quiere decir, que las GNDs no contribuyen a la deformación plástica del material si no al endurecimiento del mismo actuando como obstáculos al movimiento de los SSDs. Este almacenamiento extra de dislocaciones asociado a los gradientes de deformación plástica manifestará su efecto cuando la longitud característica del metal (parámetro de escala) sea lo suficientemente pequeña.

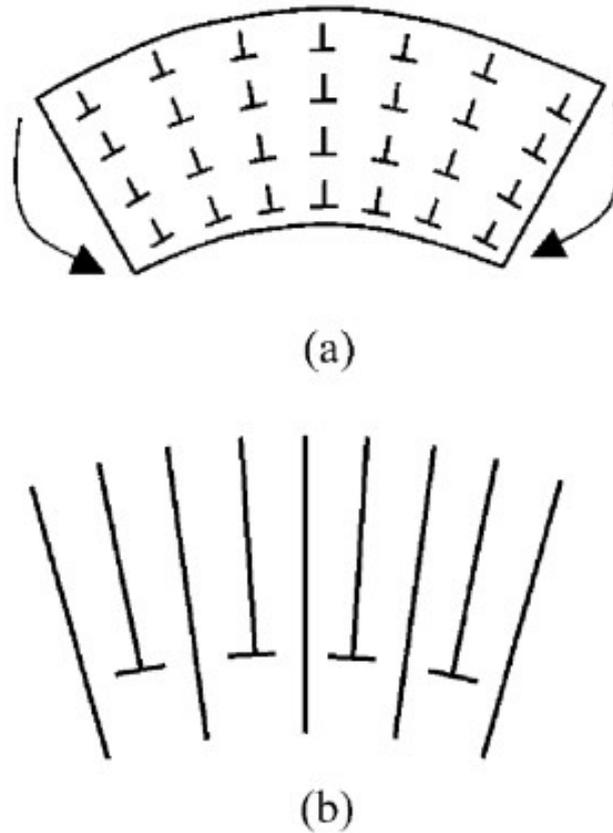


Figura 2.2 a) Bajo flexión pura una distribución uniforme de dislocaciones con un vector Burgers de valor b y espaciadas una longitud L generará una curvatura de la red igual a b/L^2 . b) En la figura b) se muestra una vista esquemática de las GNDs en una red deformada plásticamente.

2.1 Teoría de la plasticidad basada en el gradiente de deformación plástica

La teoría de la plasticidad basada en el gradiente de deformación plástica fue propuesta por Gao y sus colaboradores (Gao *et al.*, 1999). Esta teoría de la plasticidad fue desarrollada con el objetivo de extender la teoría de la plasticidad convencional a pequeñas escalas. Basada en el concepto físico de las GNDs, esta teoría relaciona el límite elástico de los metales con las deformaciones y los gradientes de deformación introduciendo un parámetro de escala en sus ecuaciones constitutivas.

A diferencia de otras formulaciones SGP (Strain Gradient Plasticity), la formulación propuesta por Gao introduce una dependencia lineal del cuadrado del flujo plástico del material en el gradiente de deformación. Este caso particular de las formulaciones SGP se denomina MSG.

En la plasticidad MSG, se adopta el modelo de Taylor como principio fundamental y por lo tanto la tensión de flujo en cortadura τ se define en términos de la densidad total de dislocaciones ρ :

$$\tau = \alpha \mu b \sqrt{\rho} \quad (2.1)$$

En la ecuación anterior μ es el módulo cortante de nuestro material, α es un coeficiente empírico que toma valores comprendidos entre **0.3 - 0.5** y b es la magnitud del vector de Burgers. Por otro lado, ρ es la densidad total de dislocaciones y se puede definir cómo la suma de la densidad de las SSDs ρ_s y la densidad de las GNDs ρ_G :

$$\rho = \rho_s + \rho_G \quad (2.2)$$

la densidad de las GNDs se define como:

$$\rho_G = \bar{r} \frac{\eta^p}{b} \quad (2.3)$$

donde \bar{r} es un escalar cuyo valor es 1.90 para estructuras cristalinas Fcc. Siguiendo con la teoría MSG (Gao A\ \ *et al.*, 1999) para definir el gradiente de deformación plástica η^p , Gao usó los tres invariantes del tensor de deformación de la siguiente forma:

$$\eta^p = \sqrt{c_1 \eta_{iik}^p \eta_{jjk}^p + c_2 \eta_{ijk}^p \eta_{ijk}^p + c_3 \eta_{ijk}^p \eta_{kji}^p} \quad (2.4)$$

Los coeficientes c_i fueron definidos como $c_1 = 0$, $c_2 = 1/4$ y $c_3 = 0$ a partir de tres modelos de dislocación: flexión, torsión y crecimiento de microhuecos, obteniendo la siguiente expresión para el gradiente de deformación plástica:

$$\eta^p = \sqrt{\frac{1}{4} \eta_{ijk}^p \eta_{ijk}^p} \quad (2.5)$$

donde los componentes del tensor η_{ijk}^p se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\eta_{ijk}^p = \varepsilon_{ik,j}^p + \varepsilon_{jk,i}^p - \varepsilon_{ij,k}^p \quad (2.6)$$

Por otra parte, la tensión de flujo σ_{flow} está relacionada con el flujo de tensión de cortadura del siguiente modo:

$$\sigma_{flow} = M\tau \quad (2.7)$$

donde M es el factor de Taylor, cuyo valor para metales fcc es 3.06. Agrupando las ecuaciones (2.1-2.2-2.3) y (2.7):

$$\sigma_{flow} = M\alpha\mu b \sqrt{\rho_s + \bar{r} \frac{\eta^p}{b}} \quad (2.8)$$

La densidad de las SSDs (dislocaciones almacenadas estadísticamente) se puede determinar por tanto a partir de la ecuación (2.8) conociendo la relación tensión-deformación de nuestro material:

$$\rho_s = \left[\frac{\sigma_{ref}(\varepsilon^p)}{M\alpha\mu b} \right]^2 \quad (2.9)$$

En la ecuación anterior σ_{ref} es una tensión de referencia de nuestro material, conocida para un valor de ε^p , y suele ser el límite elástico de nuestro material. Además, $f(\varepsilon^p)$ es una función adimensional que depende de ε^p y define la ley de endurecimiento de nuestro metal. Reordenando (2.9) con (2.8) obtenemos:

$$\sigma_{flow} = \sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p} \quad (2.10)$$

donde l es una propiedad intrínseca del material dependiente de parámetros relacionados con la elasticidad del material (μ), la plasticidad del material (σ_{ref}) y la magnitud del vector de Burgers (b). Por lo tanto, tal y como se muestra en (Martínez-Pañeda, 2019) el parámetro de escala se puede definir para metales fcc como:

$$l = M^2 \bar{r} \alpha^2 \left(\frac{\mu}{\sigma_{ref}} \right)^2 b = 18 \alpha^2 \left(\frac{\mu}{\sigma_{ref}} \right)^2 b \quad (2.11)$$

Llegados a este punto es necesario realizar algunas observaciones con respecto al cálculo de σ_{flow} (Huang *et al.*, 2004):

- Si la longitud característica de la deformación plástica es mucho mayor que el parámetro de escala de nuestro material l , entonces $l\eta^p \approx 0$, y por lo tanto: $\sigma_{flow} = \sigma_{ref} f(\varepsilon^p)$. Es decir, el cálculo de la tensión de flujo se realizaría del mismo modo que en la plasticidad convencional.
- La tensión de flujo σ_{flow} está basada en el modelo de dislocación Taylor, por lo tanto, sólo es calculable a una escala mucho mayor que el espacio medio entre dislocaciones. Para una densidad de dislocaciones típica $10^{15}/m^2$, el espacio medio entre las dislocaciones es aproximadamente 30 nm de modo que la tensión de flujo en (2.9) se mantiene en una escala superior a 100 nm .
- Aunque el parámetro de escala del material dependa de la tensión σ_{ref} , la tensión de flujo es independiente de este valor. Este hecho se explica debido a que los dos términos dentro de la raíz cuadrada en (2.10) son independientes de σ_{ref} . Es decir, $\sigma_{ref} f(\varepsilon^p)$ y $\sigma_{ref}^2 l \eta^p = 18 \alpha^2 \mu^2 b \eta^p$ son independientes de σ_{ref} pues $\sigma_{ref} f(\varepsilon^p)$ se obtiene del ensayo uniaxial de tensión del material y $\sigma_{ref}^2 l \eta^p = 18 \alpha^2 \mu^2 b \eta^p \neq f(\sigma_{ref})$.

2.2 Implementación de la teoría MSG mediante elementos finitos: CMSG plasticity

Mientras que la resolución analítica (o semianalítica) de problemas sencillos, como la flexión pura o el cizallamiento de una membrana, ha sido especialmente útil para comparar las teorías del SGP, la evaluación cuantitativa de los efectos de gradiente requiere el uso de métodos numéricos. En particular, el método de elementos finitos es el enfoque más comúnmente adoptado para caracterizar los efectos de tamaño en la plasticidad de los metales.

La implementación numérica de las diferentes formulaciones del SGP, se encuentra significativamente influenciada por el marco teórico adoptado en cada formulación. De este modo, se han propuesto una amplia gama de soluciones numéricas para cada formulación del SGP, que van desde las teorías de orden inferior, relativamente fáciles de aplicar, hasta las formulaciones más complicadas desarrolladas en el marco matemático de las teorías de elasticidad de orden superior de Cosserat-Koiter-Mindlin (Madeo *et al.*, 2016) . Por lo tanto, en función de su orden, podemos identificar dos clases de formulaciones para las teorías SGP. Una implica tensiones de orden superior y por lo tanto, la necesidad condiciones de contorno adicionales y la otra no implica términos de orden superior y los efectos del gradiente entran en juego a través del tensor de deformación plástica.

Con el objetivo de emplear formulaciones SGP dentro de una configuración de orden inferior, (Huang *et al.*, 2004) desarrolló lo que se denomina teoría de la plasticidad CMSG. También se basa en el modelo de dislocación de Taylor (es decir, la plasticidad MSG), pero no implica términos de orden superior y, por lo tanto, entra en el marco de las teorías SGP que conserva la estructura de la plasticidad clásica. En consecuencia, el gradiente de deformación plástica sólo aparece en el modelo constitutivo, y las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno son las mismas que las de las teorías convencionales del medio continuo. En este TFM se adopta el esquema propuesto por (Huang *et al.*, 2004) para implementar la formulación CMSG, tomando de base la resolución mediante elementos finitos en 2D descrita en (Martínez-Pañeda, 2019) , pero en este caso resolviendo el algoritmo de resolución para 3D y de este modo tener un código que permita realizar simulaciones a pequeña escala de componentes metálicos reales.

2.2.1 Relación constitutiva de tipo viscoplástico basada en el modelo de Taylor

Tal y como se muestra en (Martínez-Pañeda, 2015), el modelo de dislocación Taylor nos muestra la dependencia de la tensión de flujo de la deformación plástica equivalente y el gradiente de deformación plástica mediante la siguiente expresión:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \eta^p} \dot{\eta}^p \quad (2.12)$$

Adoptando un comportamiento viscoplástico de nuestro metal, tal y como muestra (Huang *et al.*, 2004), se obtiene el incremento de deformación plástica:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_{flow}} \right]^m \quad (2.13)$$

Con el objetivo de hacer nuestro modelo independiente del tiempo, es decir, de la velocidad de deformación, (Huang *et al.*, 2004) muestra que para valores muy grandes de ($m \geq 20$), nuestro modelo se vuelve independiente de la velocidad de deformación.

Teniendo en cuenta que los incrementos de deformación volumétrica $\dot{\varepsilon}_{kk}$ y de la componente desviadora del tensor de deformación $\dot{\varepsilon}'_{ij}$ se relacionan con el incremento del tensor de tensiones de la misma manera que le plasticidad convencional, la ecuación constitutiva de nuestro modelo resulta:

$$\dot{\sigma}_{ij} = K \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left\{ \dot{\varepsilon}'_{ij} - \frac{3\dot{\varepsilon}}{2\sigma_e} \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_{flow}} \right]^m \dot{\sigma}'_{ij} \right\} \quad (2.14)$$

donde, tal y como se mencionó en el apartado anterior la tensión de flujo contiene un término adicional representativo de las GNDs:

$$\sigma_{flow} = \sigma_{ref} \sqrt{f^2(\varepsilon^p) + l\eta^p} \quad (2.15)$$

Además, K se define como el módulo de volumen, μ es el módulo cortante, δ_{ij} es la función delta de Kronecker y σ_{ref} una tensión de referencia (límite elástico σ_y), $f(\varepsilon^p)$ una función adimensional cuyo valor se obtiene de la curva de comportamiento de nuestro material (Tensión-Deformación plástica), l es el parámetro de escala, ε_{ij} es el tensor de deformaciones cuya propiedad aditiva nos permite descomponerlo en su componente elástica y plástica de la siguiente manera $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$ y por último, σ_{ij} se define como el tensor de tensiones de Cauchy.

2.2.2 Módulo tangente consistente

Dado que los términos de orden superior no están involucrados, las ecuaciones constitutivas de nuestro modelo de plasticidad son prácticamente similares a la plasticidad convencional. Tal y como se produce en la plasticidad convencional, la tasa de deformación plástica es proporcional a la tensión desviadora:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3\dot{\varepsilon}^p}{2\sigma_e} \sigma'_{ij} \quad (2.16)$$

definiendo la tensión equivalente σ_e como:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (2.17)$$

y la tasa de deformación como:

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\varepsilon}'_{ij} \dot{\varepsilon}'_{ij}} \quad (2.18)$$

Las tensiones desviadoras σ'_{ij} al final de cada incremento pueden obtenerse a partir de la relación con las deformaciones desviadoras ε'_{ij} :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu(\varepsilon'^e_{ij}|_t + \Delta\varepsilon'_{ij} - \Delta\varepsilon'^p_{ij}) \quad (2.19)$$

Donde Δ se refiere al valor incremental de cada variable y $|_t$ el valor al comienzo de cada incremento. Sustituyendo ecuación (2.16) en formato incremental en la ecuación (2.19) obtenemos:

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon'^e_{ij}|_t + \Delta\varepsilon'_{ij} - \frac{3\Delta\varepsilon^p}{2\sigma_e} \sigma'_{ij}\right) \quad (2.20)$$

Definiendo $\hat{\varepsilon}'_{ij} = \varepsilon'^e_{ij}|_t + \Delta\varepsilon'_{ij}$ y reordenando en (2.20) se obtiene:

$$\sigma'_{ij} \left(1 + \frac{3\mu}{\sigma_e} \Delta\varepsilon^p\right) = 2\mu\hat{\varepsilon}'_{ij} \quad (2.21)$$

Tomando la parte interna de (2.21) se obtiene la siguiente expresión:

$$(\sigma_e + 3\mu\Delta\varepsilon^p) = \frac{2\mu\hat{\varepsilon}'_{ij}}{\sigma'_{ij}} = 3\mu\hat{\varepsilon} \quad (2.22)$$

donde $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\varepsilon}'_{ij} \hat{\varepsilon}'_{ij}}$. Reformulando (2.22) y sustituyendo (2.13) y (2.15) en la ecuación:

$$\sigma_e - 3\mu\left(\hat{\varepsilon} - \Delta\varepsilon \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_{flow}}\right]^m\right) = 0 \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) es una ecuación no lineal. Dicha ecuación tiene dos variables principales las cuales son σ_e y $\hat{\varepsilon}$. Reordenando la ecuación (2.23) obtendremos una formulación válida para aplicar a dicha ecuación el método de Newton-Rapshon:

$$\sigma_e = \sigma_e + \frac{3\mu\left(\hat{\varepsilon} - \Delta\varepsilon \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_{flow}}\right]^m\right) - \sigma_e}{1 + 3\mu h} \quad (2.24)$$

Con h definida como:

$$h = m\Delta\varepsilon \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_{flow}}\right]^{m-1} \frac{1}{\sigma_{flow}} \quad (2.25)$$

Una vez se haya alcanzado la convergencia del método de Newton-Rapshon el incremento de deformación plástica se podrá actualizar mediante la siguiente expresión:

$$\Delta\varepsilon^p = \hat{\varepsilon} - \frac{\sigma_e}{3\mu} \quad (2.26)$$

El módulo tangente consistente de nuestro modelo se define como $(\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{ij})$. Para lograr obtener una ecuación donde se defina $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{ij}$ se partirá de la definición del Jacobiano consistente del material $\partial\Delta\sigma_{ij}/\partial\Delta\varepsilon_{ij}$. Para definir el Jacobiano de nuestro material tendremos en cuenta que σ'_{ij} se obtiene de la ecuación (2.21) y $\Delta\varepsilon^p_{ij}$ se obtiene a partir de la versión incremental de la ecuación (2.16). Tomando por lo tanto la variación de la ecuación (2.21) con respecto a todas las cantidades al final del incremento obtenemos:

$$\left(1 + \frac{3\mu}{\sigma_e} \Delta\varepsilon^p\right) \partial\sigma'_{ij} + \sigma'_{ij} \frac{3\mu}{\sigma_e} \left(\partial\Delta\varepsilon^p - \frac{\Delta\varepsilon^p}{\sigma_e} \partial\sigma_e\right) = 2\mu\partial\hat{\varepsilon}'_{ij} \quad (2.27)$$

Definiendo la forma variacional de la ecuación (2.22):

$$(\partial\sigma_e + 3\mu\partial\Delta\varepsilon^p) = 3\mu\partial\hat{\varepsilon} \quad (2.28)$$

Sustituyendo (2.26) y reordenando se obtiene:

$$\partial\sigma_e = \frac{3\mu}{1 + 3\mu h} \partial\hat{\varepsilon} \quad (2.29)$$

y teniendo en cuenta la definición de $\hat{\varepsilon}$:

$$\partial\sigma_e = \frac{2}{3\hat{\varepsilon}} \frac{3\mu}{1 + 3\mu\hat{\varepsilon}'_{ij}h\partial\hat{\varepsilon}'_{ij}} \partial\hat{\varepsilon} \quad (2.30)$$

Sustituyendo en (2.27) y reordenando:

$$\partial\sigma'_{ij} = \left(\frac{2\sigma_e}{3\hat{\varepsilon}} I_{ijkl} - \frac{1}{\hat{\varepsilon}\sigma_e} \left(h - \frac{\Delta\varepsilon^p}{\sigma_e}\right) \frac{3\mu}{1 + 3\mu h} \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right) \partial\hat{\varepsilon}'_{ij} \quad (2.31)$$

siendo I_{ijkl} el tensor unitario de orden cuatro. Considerando la relación entre los tensores de tensión y deformación con sus componentes desviadoras, el Jacobiano de rigidez del material, también conocido como el módulo tangente consistente se expresa de la siguiente manera:

$$\partial\sigma_{ij} = \left(\frac{2\sigma_e}{3\hat{\varepsilon}} I_{ijkl} - \left(K - \frac{2\sigma_e}{9\hat{\varepsilon}}\right) I_{ij} - \frac{1}{\hat{\varepsilon}\sigma_e} \left(h - \frac{\Delta\varepsilon^p}{\sigma_e}\right) \frac{3\mu}{1 + 3\mu h} \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right) \partial\hat{\varepsilon}'_{ij} \quad (2.32)$$

siendo nuestro modulo tangente consistente una matriz C_{6x6} :

$$C_{6x6} = \left(\frac{2\sigma_e}{3\hat{\varepsilon}} I_{ijkl} - \left(K - \frac{2\sigma_e}{9\hat{\varepsilon}}\right) I_{ij} - \frac{1}{\hat{\varepsilon}\sigma_e} \left(h - \frac{\Delta\varepsilon^p}{\sigma_e}\right) \frac{3\mu}{1 + 3\mu h} \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right) \quad (2.33)$$

2.2.3 Implementación del gradiente de deformación plástica en 3D

El gradiente de deformación plástica se obtiene a nivel de elemento, es decir, el incremento de deformación plástica se interpola a través de sus valores en los puntos de Gauss en el espacio isoparamétrico y posteriormente se calcula el incremento del gradiente de deformación plástica por diferenciación de las funciones de forma. En este TFM se propone una implementación en 3D y se usará un elemento cúbico con 8 nodos y 8 puntos de integración. Dicho elemento ha sido extraído de la biblioteca interna de Abaqus y se denomina C3D8 y se puede observar en la [Figura 2.3](#):

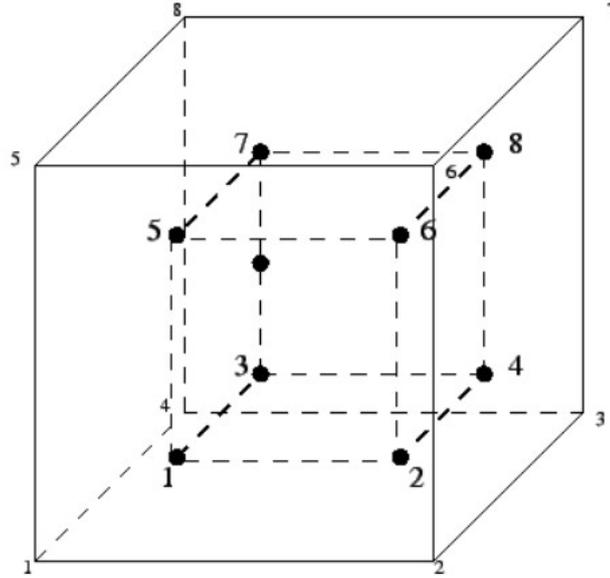


Figura 2.3 Estructura y puntos de integración del elemento C3D8.

El valor incremental de los componentes del tensor de deformación dentro de cada elemento se puede obtener fácilmente de sus valores en los puntos de integración de Gauss $(\Delta\varepsilon_{ij}^p)_k$:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^8 N'_k(x, y, z) (\Delta\varepsilon_{ij}^p)_k \quad (2.34)$$

donde $N'_k(x, y, z)$ es la función de interpolación en coordenadas globales. Aplicando el mapeo isoparamétrico clásico, la transformación de coordenadas se puede expresar de la siguiente forma:

$$x = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi, \eta, \zeta) x_k \quad (2.35)$$

$$y = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi, \eta, \zeta) y_k \quad (2.36)$$

$$z = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi, \eta, \zeta) z_k \quad (2.37)$$

donde $N_k(\xi, \eta, \zeta)$ son las funciones de forma de nuestro elemento en el nodo k . Para simplificar la implementación, nuestra función de interpolación en coordenadas locales se puede sustituir por las funciones de forma de manera que:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi, \eta, \zeta) (\Delta \varepsilon_{ij}^p)_k \quad (2.38)$$

Las funciones de forma de nuestro elemento, en cada nodo del mismo, en el espacio isoparamétrico se pueden calcular de la siguiente manera:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (2.39)$$

donde ξ_i, η_i y ζ_i indican los puntos de integración en el espacio isoparamétrico.

El esquema de numeración de esta interpolación basada en los puntos de Gauss se representa en la [Figura 2.3](#), donde los vértices del hexaedro interno del esquema representan los puntos de integración del elemento. De este modo, la diferenciación de las funciones de forma será la siguiente:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \eta_i (1 + \xi \xi_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{1}{8} \zeta_i (1 + \eta \eta_i)(1 + \xi \xi_i) \quad (2.42)$$

Mediante la regla de la cadena, la diferenciación de las funciones de forma, se puede convertir al sistema de coordenadas globales de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Siendo J el jacobiano definido en forma matricial de la siguiente forma:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k & \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k & \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \xi} z_k \\ \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \eta} x_k & \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k & \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \eta} z_k \\ \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \zeta} x_k & \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \zeta} y_k & \sum_{k=1}^8 \frac{\partial N_k}{\partial \zeta} z_k \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Llegados a este punto y usando el mismo modo de implementación para la plasticidad MSG que (Gao *et al.*, 1999), el tensor que representa el gradiente de deformación plástica en 3D, se define de manera incremental de la siguiente forma:

$$\Delta \eta_{ijk}^p = \Delta \varepsilon_{ik,j}^p + \Delta \varepsilon_{jk,i}^p - \Delta \varepsilon_{ij,k}^p \quad (2.45)$$

Todos los componentes de este tensor en 3D se definen teniendo en cuenta 4 premisas:

$$\Delta \varepsilon_{12}^p = \Delta \varepsilon_{23}^p \quad (2.46)$$

$$\Delta \varepsilon_{13}^p = \Delta \varepsilon_{31}^p \quad (2.47)$$

$$\Delta \varepsilon_{32}^p = \Delta \varepsilon_{23}^p \quad (2.48)$$

$$\Delta \varepsilon_{33}^p = -(\Delta \varepsilon_{11}^p + \Delta \varepsilon_{22}^p) \quad (2.49)$$

De este modo, los componentes de este tensor serán:

$$\Delta \eta_{111}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta \varepsilon_{11}^p)_i \quad (2.50)$$

$$\Delta \eta_{112}^p = 2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta \varepsilon_{12}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta \varepsilon_{11}^p)_i \quad (2.51)$$

$$\Delta \eta_{113}^p = 2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta \varepsilon_{13}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta \varepsilon_{11}^p)_i \quad (2.52)$$

$$\Delta \eta_{121}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta \varepsilon_{11}^p)_i \quad (2.54)$$

$$\Delta \eta_{122}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta \varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.55)$$

$$\Delta \eta_{123}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta \varepsilon_{13}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta \varepsilon_{23}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta \varepsilon_{12}^p)_i \quad (2.56)$$

$$\Delta\eta_{131}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{11}^p)_i \quad (2.57)$$

$$\Delta\eta_{132}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{12}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{23}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{13}^p)_i \quad (2.58)$$

$$\Delta\eta_{133}^p = - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.59)$$

$$\Delta\eta_{211}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{11}^p)_i \quad (2.60)$$

$$\Delta\eta_{212}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.61)$$

$$\Delta\eta_{213}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{23}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{13}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{12}^p)_i \quad (2.62)$$

$$\Delta\eta_{221}^p = 2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{12}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.63)$$

$$\Delta\eta_{212}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.64)$$

$$\Delta\eta_{223}^p = 2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{23}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.65)$$

$$\Delta\eta_{231}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{12}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{13}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{23}^p)_i \quad (2.66)$$

$$\Delta\eta_{232}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.67)$$

$$\Delta\eta_{233}^p = - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.68)$$

$$\Delta\eta_{311}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{11}^p)_i \quad (2.69)$$

$$\Delta\eta_{312}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{23}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{12}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{13}^p)_i \quad (2.70)$$

$$\Delta\eta_{313}^p = - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.71)$$

$$\Delta\eta_{321}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{13}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{12}^p)_i - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{23}^p)_i \quad (2.72)$$

$$\Delta\eta_{322}^p = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.73)$$

$$\Delta\eta_{323}^p = - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.74)$$

$$\Delta\eta_{331}^p = 2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{13}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.75)$$

$$\Delta\eta_{332}^p = 2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{23}^p)_i + \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.76)$$

$$\Delta\eta_{333}^p = - \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial z} (\Delta\varepsilon_{11}^p + \Delta\varepsilon_{22}^p)_i \quad (2.77)$$

Siendo el gradiente de deformación plástica incremental:

$$\Delta\eta^p = \frac{1}{4} \frac{\eta_{ijk}^p \Delta\eta_{ijk}^p}{\eta^p} \quad (2.78)$$

Con η_{ijk}^p implementado de la misma manera que $\Delta\eta_{ijk}^p$, bajo una carga proporcional a la variación de la misma, el gradiente de deformación plástica se puede implementar de la siguiente manera:

$$\Delta\eta^p = \sqrt{\frac{\Delta\eta_{ijk}^p \Delta\eta_{ijk}^p}{4}} \quad (2.78)$$

Todo método de implementación propuesto para la teoría CMSG, ha sido implementado en una subrutina UMAT del programa comercial de elementos finitos ABAQUS. En el siguiente subapartado se comprobará la eficiencia de esta subrutina extrayendo resultados de una simulación en ABAQUS.

2.3 Verificación de la subrutina UMAT en 3D

En el presente apartado, se realizará una verificación de la subrutina UMAT implementada en este TFM, con el objetivo de comprobar que la implementación del código realizada ha sido la adecuada. Dicha subrutina ha sido implementada en el lenguaje FORTRAN y se ha denominado CMSG3D.for.

En la [Tabla 1](#) se muestra la definición de todas las variables de estado de la subrutina UMAT implementado en 3D dimensiones:

SDV	Variable en el modelo
1	ε_{11}^e - Componente xx de la parte elástica del tensor de deformación
2	ε_{22}^e - Componente yy de la parte elástica del tensor de deformación
3	ε_{33}^e - Componente zz de la parte elástica del tensor de deformación
4	ε_{12}^e - Componente xy de la parte elástica del tensor de deformación
5	ε_{13}^e - Componente xz de la parte elástica del tensor de deformación
6	ε_{23}^e - Componente yz de la parte elástica del tensor de deformación
7	ε_{11}^p - Componente xx de la parte plástica del tensor de deformación
8	ε_{22}^p - Componente yy de la parte plástica del tensor de deformación
9	ε_{33}^p - Componente zz de la parte plástica del tensor de deformación
10	ε_{12}^p - Componente xy de la parte plástica del tensor de deformación
11	ε_{13}^p - Componente xz de la parte plástica del tensor de deformación
12	ε_{23}^p - Componente yz de la parte plástica del tensor de deformación
13	ε^p - Deformación plástica equivalente
14	η^p - Gradiente de deformación plástica
15	ρ_s - Densidad de las dislocaciones almacenadas estadísticamente
16	ρ_G - Densidad de las dislocaciones geoméricamente necesarias
17	ρ - Densidad total de dislocaciones
18	$\dot{\varepsilon}^p$ - Variación de la deformación plástica equivalente
19	$\dot{\rho}$ - Variación de la densidad total de dislocaciones

[Tabla 1](#) Definición de las variables de estado de la subrutina UMAT en 3D.

Para evaluar la eficiencia de la subrutina UMAT creada, se realizará en ABAQUS un ensayo de tracción, del mismo modo que realizó experimentalmente (Fleck *et al.*, 1994). Los resultados obtenidos que se muestran en el siguiente apartado son coherentes a los obtenidos por (Fleck *et al.*, 1994) y por lo tanto se concluye que nuestra subrutina UMAT implementa de manera eficiente la teoría del Strain Gradient Plasticity.

2.3.1 Resultados

Los resultados obtenidos para un material con las siguientes propiedades: $E = 200000 \text{ MPa}$, $N = 0.1$, $\nu = 0.3$ y $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$ se pueden observar en la [Figura 2.4](#). Por otra parte, en la [Figura 2.5](#), se puede observar la distribución de tensiones en el momento de la fractura dúctil de la probeta para $(L_D/2a) = 0$.

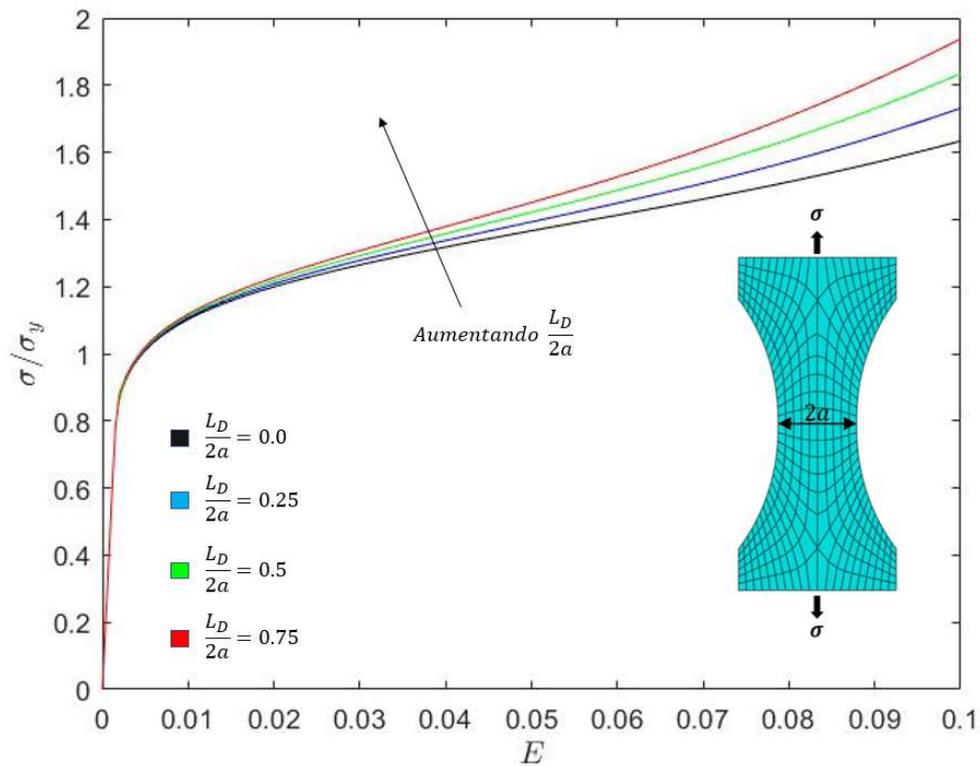


Figura 2.4 Resultados obtenidos del ensayo a tracción para varios valores de $\frac{L_D}{2a}$.

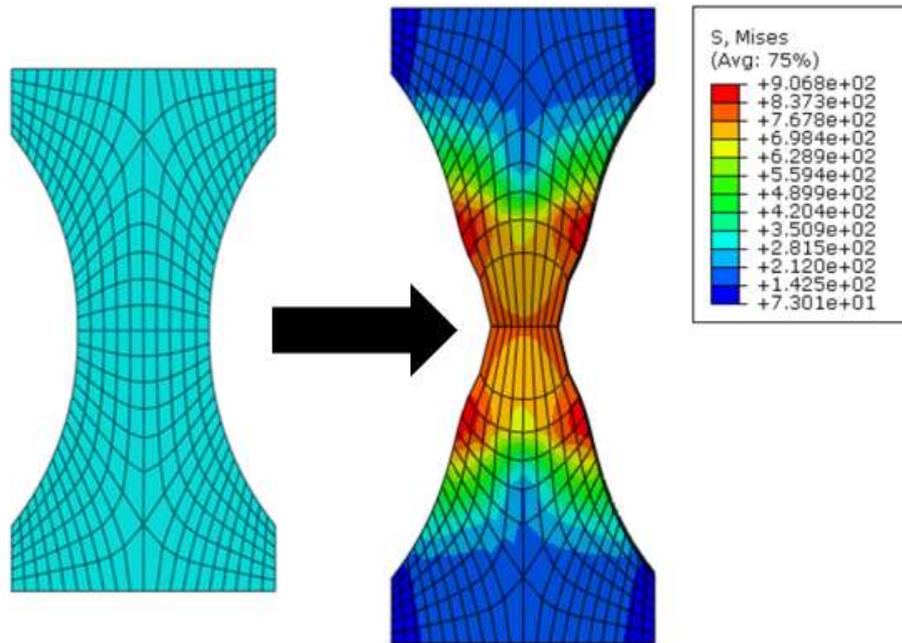


Figura 2.5 Distribución de tensiones en (MPa) en el momento de fractura para $\frac{L_D}{2a} = 0.0$, es decir, en plasticidad convencional

Capítulo 3

3. Representative Volume Element

En el análisis del comportamiento de los materiales metálicos mediante modelos numéricos, el elemento de volumen representativo (RVE), es el volumen más pequeño sobre el que se puede realizar una medición que arroje un valor representativo del conjunto total. En el caso de los materiales metálicos, se supone una distribución homogénea de los poros en su fase matriz. De este modo, analizando una celda unitaria con un poro en su interior, representativo del microhueco creado por el despegue de una inclusión de la fase matriz durante el proceso de fractura dúctil, se podrán obtener mediciones representativas del comportamiento global del material que se quiera analizar.

Suponiendo que cada celda unitaria contiene en su interior un poro, tal y como se muestra en la [Figura 3.1](#):

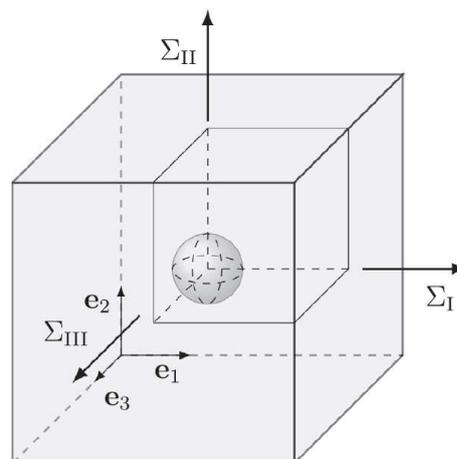
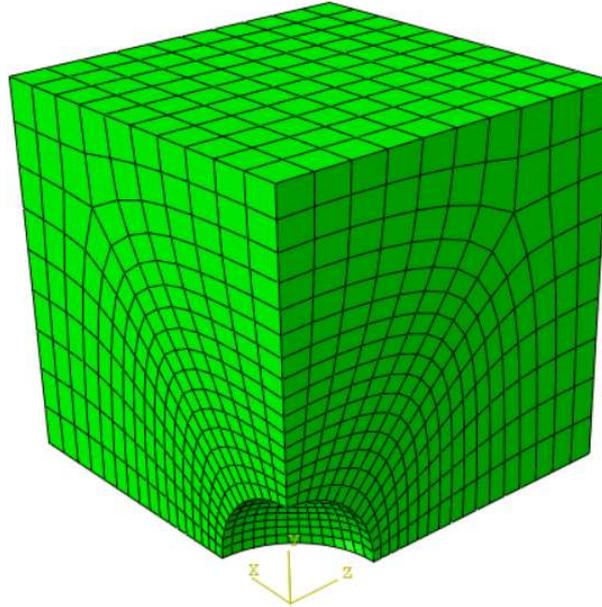


Figura 3.1 RVE adoptado. Imagen extraída de (Dæhli *et al.*, 2018).

Teniendo en cuenta la simetría con los ejes principales, analizaremos un octavo de la celda y de este modo tener un menor coste computacional a la hora de realizar simulaciones. Suponiendo que nuestro modelo de análisis es un octavo de cada celda unitaria, el modelo de elementos finitos representativo de este RVE se muestra en la [Figura 3.2](#). Cabe destacar que dicho modelo se ha generado mediante una malla de elementos C3D8 y consta de 2615 elementos.



[Figura 3.2](#) Modelo de elementos finitos representativo de un octavo de la celda unitaria

Una vez generado el modelo en ABAQUS, se diseñarán dos métodos de cálculo muy utilizados en la actualidad basados en el control del parámetro de Lode y de la Triaxialidad a lo largo de toda la simulación. Este método nos servirá para poder analizar el comportamiento de nuestro RVE en diferentes estados de carga de una manera muy eficiente. Los dos métodos propuestos será el método de carga y el método de control de desplazamientos y se mostrará en los siguientes subapartados su resolución e implementación en una subrutina MPC de ABAQUS.

3.1 Método de control de desplazamientos

En este subapartado, se explicará el método de control de desplazamientos propuesto por (Faleskog, Gao and Fong Shih, 1998). El objetivo principal es estudiar el efecto de la triaxialidad T y del parámetro de Lode L en el comportamiento mecánico de la celda unitaria de un material metálico que sufre una fractura dúctil.

El parámetro de Lode con el sistema de referencia definido en la [Figura 3.2](#), se calcula de la siguiente manera:

$$L = \frac{2\sigma_{II} - \sigma_I - \sigma_{III}}{\sigma_I - \sigma_{III}} \quad (3.1)$$

y la triaxialidad se define como:

$$T = \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}} \quad (3.2)$$

Siendo σ_i las tensiones en los ejes principales del modelo, σ_h la tensión hidrostática y σ_{eq} la tensión equivalente definidas de la siguiente forma:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \quad (3.3)$$

y σ_{eq} definida como:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2} \quad (3.4)$$

Definiendo los cocientes de tensión macroscópica R y Q se redefinen el parámetro de Lode y la triaxialidad en función de R y Q :

$$R = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} \quad (3.5)$$

$$Q = \frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} \quad (3.6)$$

$$L = \frac{2R - Q - 1}{1 - Q} \quad (3.7)$$

$$T = \frac{\sqrt{2}(R + Q + 1)}{3\sqrt{(1 - R)^2 + (1 - Q)^2 + (R - Q)^2}} \quad (3.8)$$

El objetivo final de este método es prescribir el dos valores de R y Q para mantenerlos constantes a lo largo de cualquier simulación y de esta forma mantener constantes también redefinen el parámetro de Lode y la triaxialidad. Para ello en este TFM se propone resolver un sistema de ecuaciones no lineales compuesto por (3.7) – (3.8) y de esta forma obtener una tabla de valores de R y Q para distintos valores del parámetro de Lode y la triaxialidad. Para ello, se plante el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} q_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3T}\right)^2 (R + Q + 1)^2 - (1 - R)^2 - (1 - Q)^2 - (R - Q)^2 = 0 \\ q_2 = 2R - Q - 1 - (1 - Q)L = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Siendo q_i dos funciones que dependen de R y Q para un valor de T y de L establecido, se define el jacobiano de nuestro sistema de ecuaciones:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial R} & \frac{\partial q_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial q_2}{\partial R} & \frac{\partial q_2}{\partial Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ 2 & L - 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$J_{11} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3T}\right)^2 2(R + Q + 1) + 2(1 - R) - 2(R - Q) \quad (3.11)$$

$$J_{12} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3T}\right)^2 2(R + Q + 1) + 2(1 - Q) + 2(R - Q) \quad (3.12)$$

Resolviendo mediante Matlab para varios valores prescritos de L y T se obtiene la siguiente tabla de resultados:

		$L = 1$	$L = 0.5$	$L = 0$	$L = -0.5$	$L = -1$
$T = 1/\sqrt{3}$	R	1.00	0.73	0.50	0.32	0.19
	Q	-0.09	-0.06	0.00	0.09	0.19
$T = 2/3$	R	1.00	0.75	0.53	0.36	0.25
	Q	0.00	0.02	0.07	0.15	0.25
$T = 1$	R	1.00	0.81	0.63	0.49	0.40
	Q	0.25	0.24	0.26	0.32	0.40
$T = 5/3$	R	1.00	0.86	0.74	0.64	0.57
	Q	0.50	0.47	0.48	0.52	0.57
$T = 3$	R	1.00	0.92	0.84	0.77	0.73
	Q	0.70	0.68	0.68	0.69	0.73

Tabla 2. Solución numérica para el método de control de los desplazamientos.

Como ya se mencionó anteriormente, debido a la simetría del problema, solo será necesario realizar un modelo de una octava parte de la celda unitaria. Dicho modelo tendrá las condiciones de contorno mostradas en la Figura 3.3:

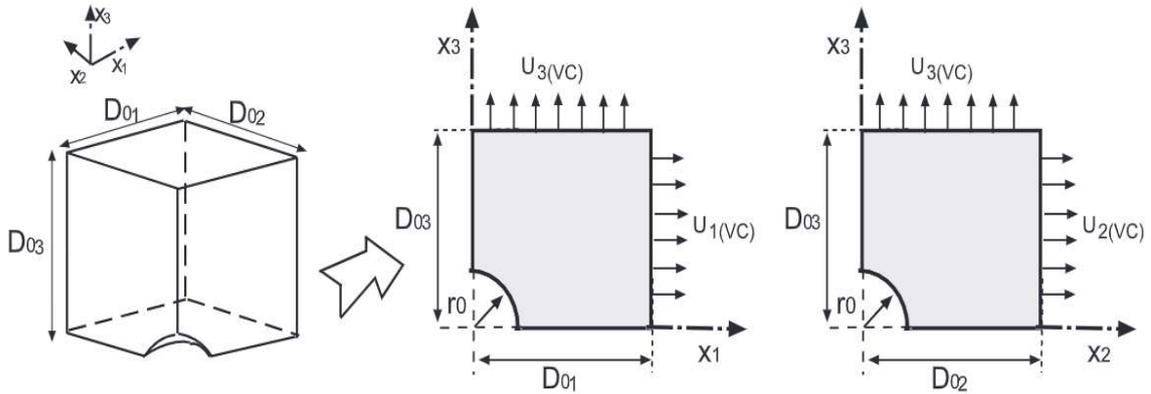


Figura 3.3 Condiciones de contorno en la celda unitaria. Extraída de (Vadillo, Rebol and Fernández-Sáez, 2016).

Teniendo en cuenta que en las caras externas de la celda no hay deformación angular, es decir, que las caras externas se mantienen siempre paralelas a los correspondientes planos principales, las condiciones de contorno en cada celda serán:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ en } x_1 = 0 & u_1 &= U_1 \text{ en } x_1 = D_1 \\ u_2 &= 0 \text{ en } x_2 = 0 & u_2 &= U_2 \text{ en } x_2 = D_2 \\ u_3 &= 0 \text{ en } x_3 = 0 & u_3 &= U_3 \text{ en } x_3 = D_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por otro lado, las deformaciones en las direcciones principales se pueden definir de la siguiente manera:

$$E_1 = \ln\left(\frac{D_1}{D_{01}}\right) , \quad E_2 = \ln\left(\frac{D_2}{D_{02}}\right) , \quad E_3 = \ln\left(\frac{D_3}{D_{03}}\right) \quad (3.14)$$

siendo la deformación equivalente:

$$E_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + (E_1 - E_3)^2 + (E_2 - E_3)^2} \quad (3.15)$$

Del mismo modo, las variaciones de deformación en la celda se pueden expresar se la siguiente manera:

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{L}_1}{L_1} , \quad \dot{E}_2 = \frac{\dot{L}_2}{L_2} , \quad \dot{E}_3 = \frac{\dot{L}_3}{L_3} \quad (3.16)$$

donde,

$$L_1 = D_{01} + U_1 , \quad L_2 = D_{02} + U_2 , \quad L_3 = D_{03} + U_3 \quad (3.17)$$

Cabe destacar que el objetivo final de este método, aparte de ser el de mantener constantes el parámetro de Lode y la triaxialidad, es el de comparar una celda con un hueco (nuestro RVE) y una celda sin hueco. Nuestra celda con hueco, seguirá un criterio de plastificación específico. En nuestro caso, se usará una subrutina UMAT que implemente un criterio de plastificación de Von Mises para un material con una ley de endurecimiento específica. También se puede implementar un criterio de plastificación SGP, como el implementado en el capítulo anterior. Por otro lado, nuestra celda sin hueco seguirá un criterio de plastificación de Gurson. Dentro de este criterio de plastificación una variable característica será la porosidad de la celda y, por lo tanto, al simular una celda unitaria sin hueco con un criterio de plastificación de Gurson implementado en una subrutina UMAT, ABAQUS interpreta que nuestra celda tiene un poro en su interior gracias a las ecuaciones constitutivas del modelo de Gurson. En la [Figura 3.4](#) se puede observar las condiciones de contorno para una celda con hueco con un criterio de plastificación de tipo J_2 y una celda sin hueco para una celda con un criterio de plastificación de Gurson. Toda esta explicación se detalla de manera rigurosa en el siguiente capítulo.

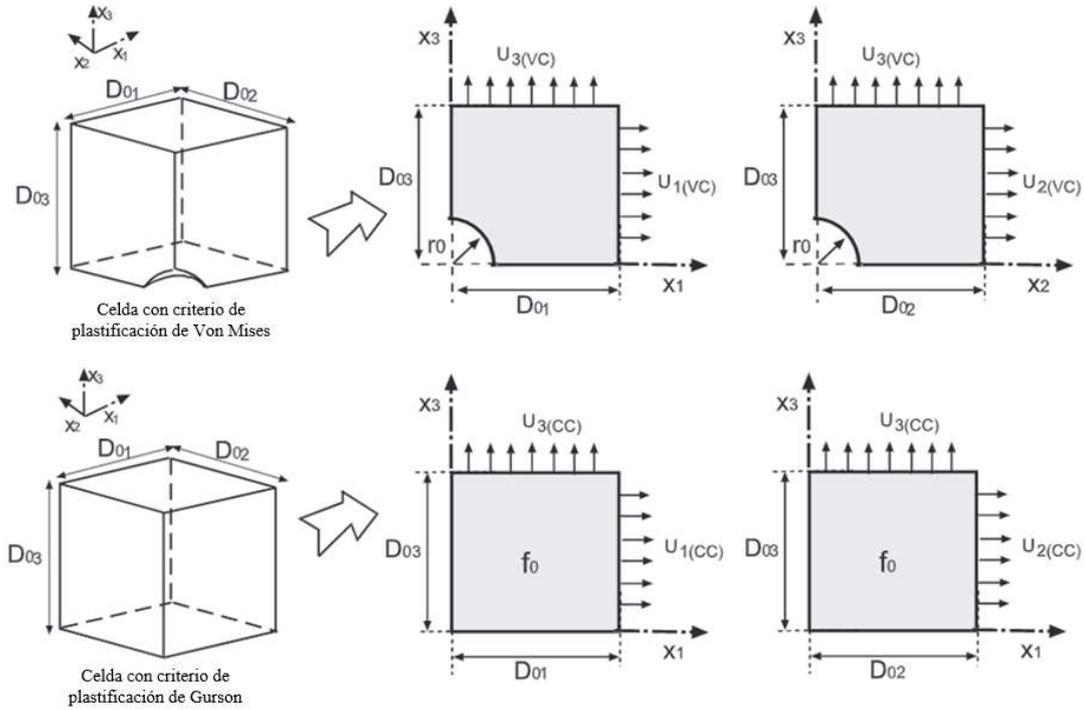


Figura 3.4 Condiciones de contorno de celda sin hueco y celda con hueco. Modificada y extraída desde (Vadillo, Reboul and Fernández-Sáez, 2016)

Siguiendo con el método propuesto por (Faleskog, Gao and Fong Shih, 1998), el trabajo de deformación en la celda con hueco y en la celda sin hueco se puede relacionar de la siguiente manera:

$$\dot{W}_{C.con\ hueco} = \dot{W}_{C.sin\ hueco} = V\sigma_1\dot{E}_1 + V\sigma_2\dot{E}_2 + V\sigma_3\dot{E}_3 \quad (3.18)$$

donde V es el volumen de la celda. Definiendo los valores de carga del siguiente modo $P_i = \sigma_i V$, entonces:

$$\dot{W}_{C.con\ hueco} = \dot{W}_{C.sin\ hueco} = P_1\dot{E}_1 + P_2\dot{E}_2 + P_3\dot{E}_3 \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta que las cargas también han de satisfacer las relaciones presentadas en las ecuaciones (3-5) y (3-6):

$$P_2/P_1 = R, \quad P_3/P_1 = Q \quad (3.20)$$

Realizando la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_{(I)} \\ \dot{E}_{(II)} \\ \dot{E}_{(III)} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{P}_{(I)} \\ \dot{P}_{(II)} \\ \dot{P}_{(III)} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

donde \mathbf{A} es la matriz ortonormal ($\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

con los términos A_{ij} definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 + Q^2}} \\ A_{12} &= \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 + Q^2}} \\ A_{13} &= \frac{Q}{\sqrt{1 + R^2 + Q^2}} \\ A_{21} &= -\frac{R}{\sqrt{1 + R^2}} \\ A_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}} \\ A_{23} &= 0 \\ A_{31} &= \frac{Q}{\sqrt{(1 + R^2)(1 + R^2 + Q^2)}} \\ A_{32} &= \frac{QR}{\sqrt{(1 + R^2)(1 + R^2 + Q^2)}} \\ A_{33} &= -\frac{(1 + R^2)}{\sqrt{(1 + R^2)(1 + R^2 + Q^2)}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

La variación del trabajo total de deformación se puede escribir en el nuevo sistema de coordenadas, como:

$$\dot{W}_{C.con\ hueco} = \dot{W}_{C.sin\ hueco} = P_{(I)}\dot{E}_{(I)} + P_{(II)}\dot{E}_{(II)} + P_{(III)}\dot{E}_{(III)} \quad (3.24)$$

Llegados a este punto es necesario comentar que el sistema de referencia I-II-III y el sistema de referencia 1-2-3 usados en todas las ecuaciones anteriores, se refieren a el sistema de referencia de un nodo ficticio exterior a la malla de nuestro modelo de celda y al sistema de referencia de nuestro modelo de celda respectivamente, tal y como muestra la [Figura 3.5](#) :

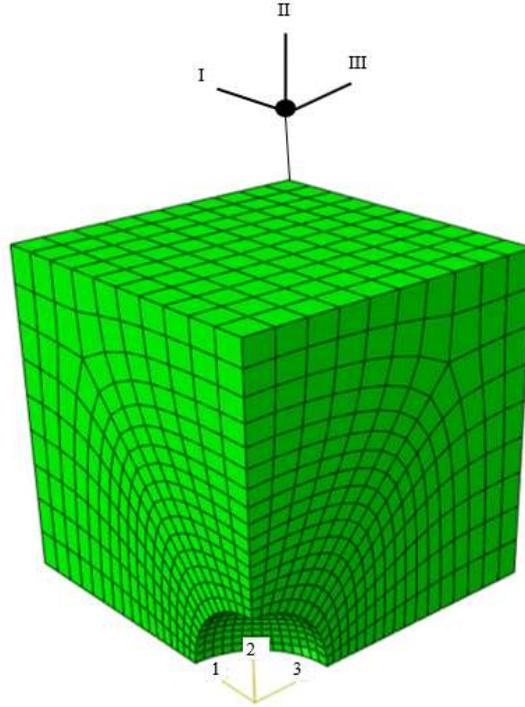


Figura 3.5 Visualización de los diferentes sistemas de referencia usados en el método de control de desplazamientos.

Tal y como se muestra en (Faleskog, Gao and Fong Shih, 1998), suponiendo un estado de tensión uniaxial entre el nodo externo y el modelo se tiene que:

$$\dot{E}_{(I)} = \dot{E}_I \quad , \quad P_{(II)} = 0 \quad , \quad P_{(III)} = 0 \quad (3.25)$$

De este modo la variación del trabajo total de deformación en el sistema de referencia de nuestra celda será:

$$\dot{W}_{C.con\ hueco} = \dot{W}_{C.sin\ huec} = P_{(I)} \dot{E}_1 \quad (3.26)$$

Transformando las condiciones de contorno impuestas en (3.25) al sistema de nuestra celda se tendrá:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{(I)} = \dot{E}_I &\rightarrow A_{11}\dot{E}_1 + A_{12}\dot{E}_2 + A_{13}\dot{E}_3 = \dot{E}_I \\ P_{(II)} = 0 &\rightarrow A_{21}P_1 + A_{22}P_2 + A_{23}P_3 = 0 \\ P_{(III)} = 0 &\rightarrow A_{31}P_1 + A_{32}P_2 + A_{33}P_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Según (Bryhni Dæhli *et al.*, 2017) llegados a este punto es necesario definir una matriz \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Con L_i definidas en (3.17), podremos obtener la siguiente relación de desplazamientos entre el nodo exterior y nuestro modelo:

$$[\Delta U]_{(I,II,III)} = [A]^t [T] [\Delta U]_{(1,2,3)} \quad (3.29)$$

Despejando los desplazamientos de nuestra modelo de celda en función de los desplazamientos de nuestro nodo exterior:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta U_1}{L_1} \\ \frac{\Delta U_2}{L_2} \\ \frac{\Delta U_3}{L_3} \end{pmatrix} = [A]^t \begin{pmatrix} \Delta U_I \\ \Delta U_{II} \\ \Delta U_{III} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Despejando ΔU_i se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= L_1(A_{11}\Delta U_I + A_{21}\Delta U_{II} + A_{31}\Delta U_{III}) = L_1 f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III}) \\ \Delta U_2 &= L_2(A_{12}\Delta U_I + A_{22}\Delta U_{II} + A_{32}\Delta U_{III}) = L_2 f_2(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III}) \\ \Delta U_3 &= L_3(A_{13}\Delta U_I + A_{23}\Delta U_{II} + A_{33}\Delta U_{III}) = L_3 f_3(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Llegados a este punto será necesario integrar (3.31) para poder implementar los desplazamientos U_i en nuestra subrutina MPC. Partimos de la premisa de que en el incremento $(n + 1)$ tenemos que expresar $U_i^{(n+1)}$ en función de $U_I^{(n+1)}$, $U_{II}^{(n+1)}$ y $U_{III}^{(n+1)}$.

De este modo, aplicando la regla del punto medio:

$$\Delta U_1^{(n+1)} = \frac{L_1^{(n+1)} + L_1^{(n)}}{2} f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III}) \quad (3.32)$$

considerando que:

$$L_1^{(n+1)} = L_1^{(n)} + \Delta U_1^{(n+1)} \quad (3.33)$$

uniendo (3.32)-(3.33):

$$2\Delta U_1^{(n+1)} = \left(L_1^{(n)} + \Delta U_1^{(n+1)} + L_1^{(n)} \right) f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III}) \quad (3.34)$$

despejando $\Delta U_1^{(n+1)}$:

$$\Delta U_1^{(n+1)} = \frac{2L_1^{(n)} f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}{2 - f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})} \quad (3.35)$$

Y teniendo en cuenta que $\Delta U_1^{(n+1)} = U_1^{(n+1)} - U_1^{(n)}$:

$$U_1^{(n+1)} = U_1^{(n)} + \frac{2L_1^{(n)} f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}{2 - f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})} \quad (3.36)$$

Con la ecuación 3.36 y conocidos los valores de desplazamiento en el estado (n) las ecuaciones a implementar en nuestra subrutina MPC, para los desplazamientos en un estado ($n + 1$), será las siguientes:

$$U_1^{(n+1)} = U_1^{(n)} + \frac{2L_1^{(n)} f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}{2 - f_1(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}$$

$$L_1^{(n)} = L_1^{(0)} + U_1^{(n+1)}$$

$$U_2^{(n+1)} = U_2^{(n)} + \frac{2L_2^{(n)} f_2(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}{2 - f_2(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}$$

$$L_2^{(n)} = L_2^{(0)} + U_2^{(n+1)}$$

$$U_3^{(n+1)} = U_3^{(n)} + \frac{2L_3^{(n)} f_3(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}{2 - f_3(\Delta U_I, \Delta U_{II}, \Delta U_{III})}$$

$$L_3^{(n)} = L_3^{(0)} + U_3^{(n+1)} \quad (3.37)$$

3.2 Método de control en carga

El método que se describe en este apartado tiene la misma finalidad que el método descrito en el apartado anterior. En este caso, los desplazamientos necesarios en nuestra celda para prescribir un valor de L y T serán controlados mediante una carga. Este método ha sido desarrollado por numerosos investigadores y en este TFM se implementa el método propuesto por (Tekoğlu, 2014).

Partiremos del modelo de celda unitaria propuesto en la Figura 3.2. Acoplando 3 muelles de la forma que se muestra en la Figura 3.6 se tratará de implementar este método.

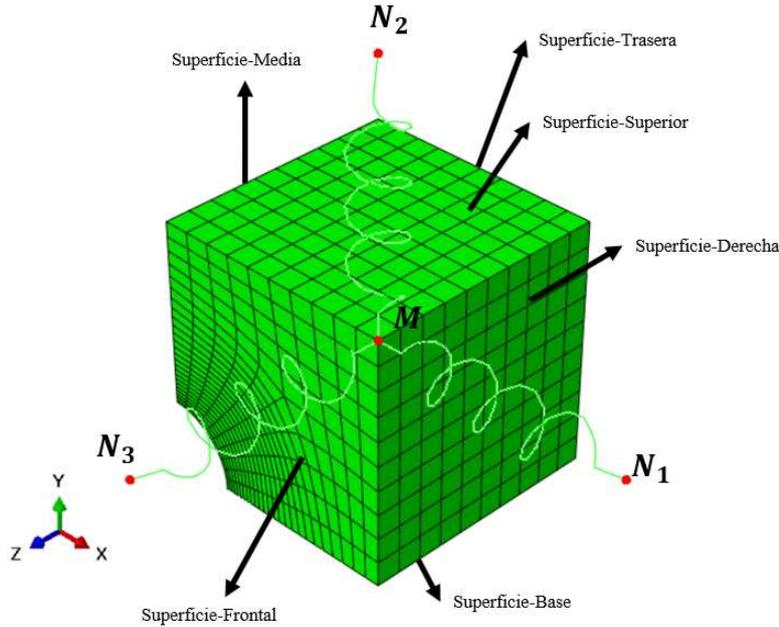


Figura 3.6 Modelo de elementos finitos de 1/8 de la celda unitaria usado en el método de control en carga.

Los muelles se implementan en ABAQUS mediante el elemento CONN2D2 extraído de su librería interna. En la Figura 3.6 se puede observar un nodo denominado M , dicho nodo se suelen denominar nodo Master y será a través del cual, con el que se controlarán los desplazamientos de nuestro modelo. Por otro lado, los nodos dummy N_i serán los nodos ficticios cuyos desplazamientos serán impuestos por la subrutina MPC para mantener constante el parámetro de Lode y la triaxialidad a lo largo de la simulación.

Así pues, se definen las tensiones macroscópicas en las direcciones principales de nuestro modelo de la siguiente forma:

$$\sigma_{11} = \frac{F_1}{AR} \quad , \quad \sigma_{22} = \frac{F_2}{AT} \quad , \quad \sigma_{33} = \frac{F_3}{AB} \quad (3.38)$$

siendo las áreas expresadas en (3.38) :

$$A^R = (L_{02} + u_2^M)(L_{03} + u_3^M) \quad (3.39)$$

$$A^T = (L_{02} + u_2^M)(L_{03} + u_3^M) \quad (3.40)$$

$$A^B = (L_{01} + u_1^M)(L_{03} + u_2^M) \quad (3.41)$$

donde A^R es el valor del área de la Superficie-Derecha, A^T es el valor del área de la Superficie-Superior y A^B es el valor del área de la Superficie-Trasera. Los términos F_i se refieren a las fuerzas de tracción en cada dirección principal y se calculan teniendo en cuenta la ley de Hooke:

$$F_1 = k_1(u_1^{N_1} - u_1^M) \quad (3.42)$$

$$F_2 = k_2(u_2^{N_2} - u_2^M) \quad (3.43)$$

$$F_3 = k_3(u_3^{N_3} - u_3^M) \quad (3.44)$$

siendo k_i la constante de rigidez de cada muelle. En nuestro caso, se adopta $k_i = k$ para facilitar la implementación del método y obtener mejores resultados.

Con el objetivo de mantener constantes el parámetro de Lode y la triaxialidad se definen dos variables ρ_{kk} que se mantienen constante y relacionan las tensiones principales de nuestro modelo de la siguiente manera:

$$\rho_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}} \quad (3.45)$$

$$\rho_{33} = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{22}} \quad (3.46)$$

Incorporando (3.45)-(3.46) en (3.42)-(3.44) respectivamente se obtienen las siguientes relaciones:

$$(u_1^{N_1} - u_1^M) - \rho_{11} \frac{A^R}{A^T} (u_2^{N_2} - u_2^M) = 0 \quad (3.47)$$

$$(u_3^{N_3} - u_3^M) - \rho_{33} \frac{A^B}{A^T} (u_2^{N_2} - u_2^M) = 0 \quad (3.48)$$

Las ecuaciones (3.47)-(3.48) forman un sistema de ecuaciones con 5 variables desconocidas: $u_1^{N_1}$, $u_3^{N_3}$, u_1^M , u_2^M y u_3^M . Por otro lado, $u_2^{N_2}$ será un valor prescrito y conocido a lo largo de toda la simulación. Las restricciones múltiples, de desplazamientos, impuestas en (3.47)-(3.48) serán resueltas por una subrutina MPC la cual tomará el valor actual de $u_2^{N_2}$ en cada step y calculará las otras 5 variables desconocidas con el objetivo de fijar L y T . Reordenando (3.47)-(3.48):

$$u_1^{N_1} = u_1^M + \rho_{11} \frac{A^R}{A^T} (u_2^{N_2} - u_2^M) \quad (3.49)$$

$$u_3^{N_3} = u_3^M + \rho_{33} \frac{A^B}{A^T} (u_2^{N_2} - u_2^M) \quad (3.50)$$

Se puede observar como el valor k no tiene un efecto directo en los valores de los desplazamientos calculados en nuestra subrutina MPC. Por otro lado, el valor k afectará de manera muy importante a la convergencia de nuestra simulación. Tal y como muestra (Tekoğlu, 2014), el valor k deberá ser $k = 10^{-1}EL_0$. Siendo E el módulo de Young de nuestro material y L_0 la altura de nuestro 1/8 de celda.

A continuación, se mostrarán las diferentes condiciones de contorno que se han de aplicar en cada superficie, con el objetivo de obtener buena convergencia en nuestro modelo y resultados coherentes:

Superficie-Derecha	$u_1(L_1, y, z) = u_1^M$	(3.51)
--------------------	--------------------------	--------

Superficie-Superior	$u_2(x, L_2, z) = u_2^M$	(3.52)
---------------------	--------------------------	--------

Superficie-Frontal	$u_3(x, y, L_3) = u_3^M$	(3.53)
--------------------	--------------------------	--------

Superficie-Media	$u_1(0, y, z) = 0$	(3.54)
------------------	--------------------	--------

Superficie-Base	$u_2(x, 0, z) = 0$	(3.55)
-----------------	--------------------	--------

Superficie-Trasera	$u_3(x, y, 0) = 0$	(3.56)
--------------------	--------------------	--------

Capítulo 4

4. El modelo de Gurson y sus extensiones

Para los materiales metálicos, la fractura dúctil ocurre, como ya se comentó en el primer capítulo, por nucleación, crecimiento y coalescencia de microhuecos. La nucleación y el crecimiento de los microhuecos disminuyen la capacidad de carga de un material deformado homogéneamente, mientras que la coalescencia de los microhuecos finaliza la deformación debido a la fractura del metal. En las últimas décadas el esfuerzo de muchos investigadores se ha dedicado a la comprensión y desarrollo de modelos micromecánicos para describir mejor la fractura dúctil. Probablemente el modelo de plasticidad más conocido sea el presentado por Gurson y posteriormente modificado por Tvergaard y Needleman en 1984. El modelo de Gurson se derivó de la suposición de que el modo de deformación del material de la fase matriz que rodea un microhueco es homogéneo. Por lo tanto, puede predecir el comportamiento de ablandamiento del material debido a la nucleación y el crecimiento de los microhuecos, pero no tiene capacidad intrínseca para predecir el inicio de la coalescencia. Thomason en 1998, completó el modelo añadiendo un criterio de inicio de coalescencia, que da lugar al conocido modelo de Gurson completo.

4.1 El modelo de Gurson completo

La superficie de fluencia del modelo de Gurson viene dada por la siguiente ecuación:

$$\phi(q, \bar{\sigma}, f) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f)^2 = 0 \quad (4.1)$$

Donde f es la fracción de microhuecos, p es la presión hidrostática, q es la tensión equivalente de Von Mises, $\bar{\sigma}$ es el límite elástico de la fase matriz del metal que depende de la deformación plástica equivalente de dicha matriz, es decir, $\bar{\sigma} = f(\varepsilon_m^{pl})$ y por último aparecen las constantes introducidas por Tvergaard q_1 y q_2 . Dichas constantes fueron introducidas para hacer que las predicciones del modelo de Gurson concordasen con los estudios numéricos realizados en materiales con microhuecos ‘ordenados’ sometidos a campos de tensión plana. Desarrollando (4.1) obtenemos:

$$\phi(q, \bar{\sigma}, f) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0 \quad (4.2)$$

Tvergaard introdujo, además, una tercera constante que depende de q_1 de la siguiente forma $q_3 = q_1^2$, así pues podemos reescribir la ecuación (3.2) de la siguiente forma:

$$\phi(q, \bar{\sigma}, f) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3q_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (4.3)$$

Dicha forma de expresar el modelo de Gurson es la más utilizada en los artículos de investigación. Si queremos recuperar el modelo que propuso Gurson inicialmente basta con dar los siguientes valores a las constantes de Tvergaard: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$. No obstante, los valores utilizados en este TFM serán los valores deducidos por Tvergaard: $q_1 = 1.5$, $q_2 = 1$ y $q_3 = 2.25$.

Cabe destacar que se define $\mathbf{S} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$, como la parte desviadora del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$; y a su vez podemos definir la tensión equivalente de Von Mises como:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} \quad (4.4)$$

y la presión hidrostática como:

$$p = -\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \quad (4.5)$$

Partiendo de un modelo de Gurson completo e implementado en una subrutina UMAT desarrollada en (Zhang, 2001), se realizarán en los siguientes subapartados diferentes implementaciones de las extensiones más importantes de este modelo, proponiendo en el último subapartado, un nuevo modelo de Gurson que se espere tenga impacto en la comunidad científica.

4.1.1 Resultados de la implementación del modelo de Gurson completo.

A continuación, en la [Figura 4.1](#) y en la [Figura 4.2](#) se pueden observar los resultados obtenidos de la implementación del modelo de Gurson original, para un estado tensional propio de procesos de micromecanizado, donde las tensiones de cortadura son dominantes, es decir, $T = 2/3$ y $L = 0$. Estos dos parámetros característicos del estado tensional, se controlan en la simulación mediante el método de control en carga explicado en el apartado anterior. El acero utilizado tiene las siguientes propiedades mecánicas: $E = 200000 \text{ MPa}$, $N = 0.1$, $\nu = 0.3$ y $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$.

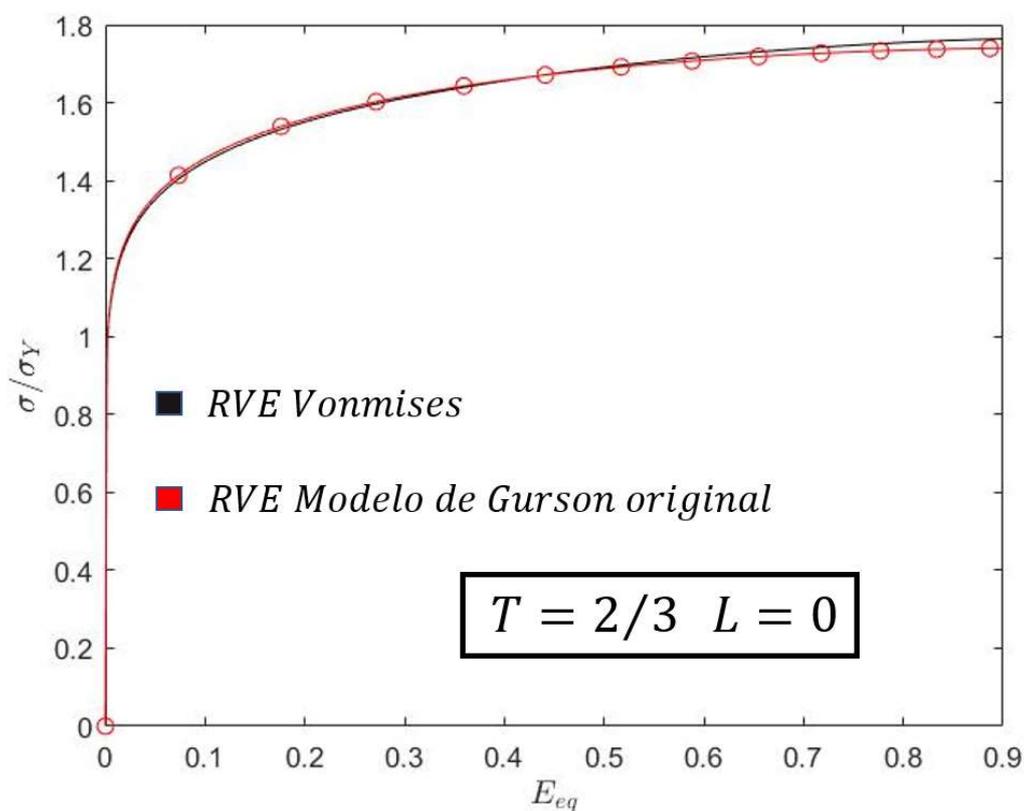


Figura 4.1 Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad Vonmises y en el modelo RVE con Gurson.

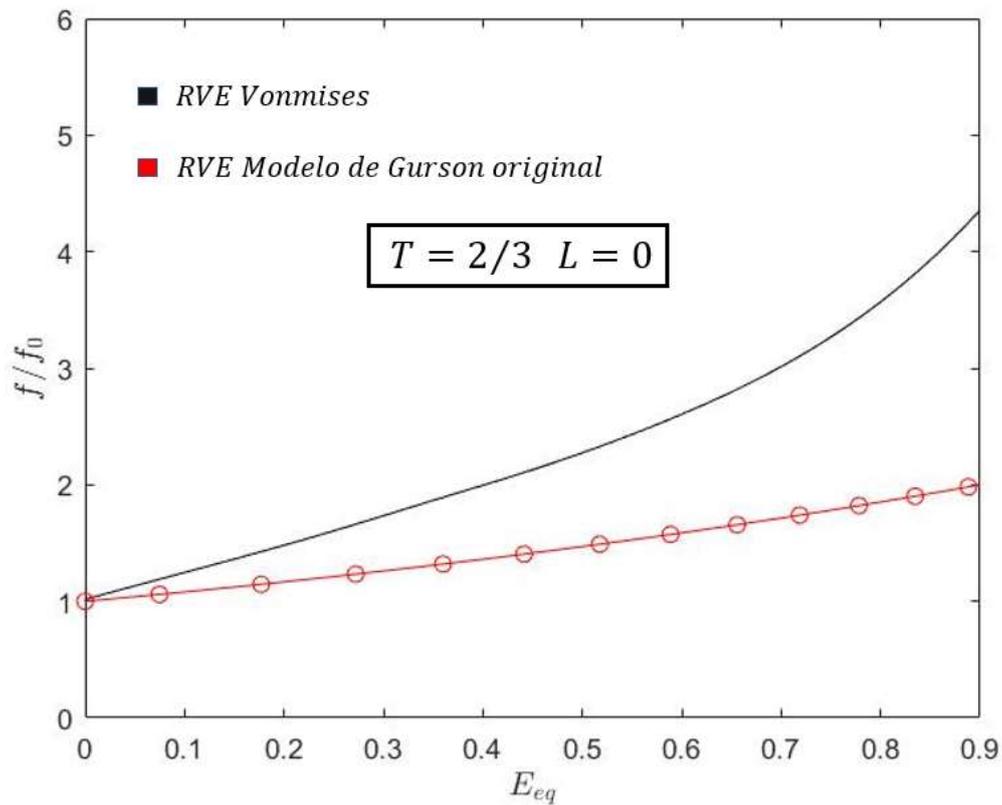


Figura 4.2 Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad Vonmises y en el modelo RVE con Gurson.

Observando los resultados, se concluye que el modelo de Gurson original no es capaz de predecir correctamente la evolución de la porosidad en estados de triaxialidad baja. Una conclusión coherente con los estudios realizados por (Nahshon and Hutchinson, 2008).

4.2 Extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura

La extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura fue propuesta por (Nahshon and Hutchinson, 2008). Dicha extensión se basa en recientes experimentos que han demostrado la evidente limitación que sufre el modelo de Gurson para caracterizar el fallo por cortadura de los materiales metálicos. Recientes estudios teóricos sobre el crecimiento de microvoids, revelan que la triaxialidad es insuficiente para caracterizar el crecimiento y coalescencia de microhuecos, así pues, el modelo de Gurson no predice ningún tipo de cambio en el daño del material bajo una deformación con tensión media nula. De este modo, no es capaz de caracterizar el ablandamiento del material que se produce en un estado de cortadura debido a la distorsión y enlaces de los microhuecos.

La implementación del modelo propuesta en este TFM es diferente a la indicada en (Nahshon and Hutchinson, 2008). Este hecho se debe a que la definición del módulo tangente en el artículo (Nahshon and Hutchinson, 2008) no es consistente con el algoritmo de resolución utilizado en nuestra subrutina UMAT de partida diseñada por (Zhang, 2001). Así pues, se introducirá esta extensión en un modelo de Gurson completo y se implementará posteriormente utilizando como algoritmo de resolución el algoritmo de punto medio propuesto por (Zhang, 2001).

Tal y como se comentó en el primer párrafo de esta página, una de las principales deficiencias del modelo de Gurson es su inaplicabilidad para predecir el fallo en metales sometidos a estados con baja triaxialidad. Estados en los que dominan los esfuerzos de cortadura, por ejemplo, en un proceso de micromecanizado, son estados en los que el modelo no predice el fallo eficientemente. Este hecho radica en que el modelo de Gurson utiliza como variable de daño la fracción de microhuecos (f). El modelo dicta que un incremento de f ha de ser causado por un estado tensional con tensión media positiva $\sigma_m > 0$. Si nos encontramos en un estado en el que existen deformaciones ante esfuerzos de cortadura, con tensión media nula, es obvio que la porosidad de nuestro material aumentará, no obstante el modelo no predice ningún cambio en nuestra variable de daño f . A continuación, se muestra la extensión del modelo de Gurson propuesta en (Nahshon and Hutchinson, 2008):

Partimos de la función de plastificación siguiente:

$$\phi(q, \sigma_m, f) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 \sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f)^2 = 0 \quad (4.6)$$

El modelo de Gurson es un modelo de daño micromecánico, es decir, las predicciones que hará sobre el fallo de los metales dependerán directamente de la evolución de su variable de daño f . Así pues, en el modelo se propone la siguiente ley de evolución para la variable de daño:

$$df = df_{nucl.} + df_{crecimiento} \quad (4.7)$$

donde:

$$df_{nucl.} = Ad\bar{\epsilon}^p \quad (4.8)$$

y

$$df_{crecimiento} = (1 - f)d\epsilon^p: I \quad (4.9)$$

No obstante, (Nahshon and Hutchinson, 2008) no tiene en cuenta la nucleación de microhuecos, ni tampoco la coalescencia, pues en su extensión solo es necesario tener en

cuenta el crecimiento de microhuecos y observar cómo estos crecen en estado de cortadura debido a su reorientación y deformación. Por lo tanto, la evolución de la porosidad tiene un nuevo factor que contribuye al crecimiento de la misma:

$$df = (1 - f)d\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{I} + df_{SHEAR} \quad (4.10)$$

Dicho factor fue definido en (Nahshon and Hutchinson, 2008) de la siguiente manera:

$$df_{SHEAR} = k_w f \omega(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\mathbf{s} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\sigma_e} \quad (4.11)$$

donde $\omega(\boldsymbol{\sigma})$ es una medida de la tensión que depende del tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras y de la tensión equivalente de Von Mises, que se define del siguiente modo:

$$\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 1 - \left(\frac{27J_3}{2\sigma_{VM}^3} \right)^2 \quad (4.12)$$

El parámetro k_w es un escalar que nos indica la magnitud del crecimiento del daño en estados de cortadura pura. De este modo, en esta extensión del modelo de Gurson, el crecimiento del daño del material queda definido de la siguiente manera:

$$df = (1 - f)d\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{I} + k_w f \omega(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\mathbf{s} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\sigma_e} \quad (4.13)$$

4.2.1 Implementación de la extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura

En el este subapartado se resuelve la implementación de la extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura, utilizando como algoritmo de resolución el algoritmo de punto medio propuesto por (Zhang, 2001).

Como paso inicial se definirá la parte elástica de la matriz jacobiana del siguiente modo:

$$D_{ijkl}^e = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.14)$$

donde K y G son las constantes elásticas de nuestro modelo definidas como:

$$K = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.15)$$

$$G = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (4.16)$$

A continuación, se muestran las relaciones elastoplásticas constitutivas de nuestro modelo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.17)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.19)$$

$$\phi(q, \bar{\sigma}, f) = \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) = \phi(q, p, \mathbf{H}) = 0 \quad (4.20)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.21)$$

En la ecuación (4.20), \mathbf{H} hace referencia a las variables de estado internas del modelo, en nuestro caso \mathbf{H}^1 representa la deformación plástica equivalente ($\bar{\varepsilon}^p$) y \mathbf{H}^2 la fracción de volumen ocupada por los microhuecos (f).

El fundamento de la resolución de problemas elástoplásticos es actualizar el valor de nuestras variables conocidas en el instante t_n en los valores que tomarían dichas variables en un instante muy próximo y posterior $t + \Delta t$. En la notación utilizada n y $n + 1$ representan el valor de las variables del modelo en los instantes t_n y t_{n+1} .

Aplicando la metodología de división propuesta por (Zhang, 2001) se obtienen las ecuaciones elástoplásticas de un algoritmo de punto medio generalizado:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (4.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T = \mathbf{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \quad (4.22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \mathbf{D}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (4.23)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \Delta \lambda \mathbf{r}_{n+\alpha} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{H}_n + \Delta \mathbf{H}_{n+1} \quad (4.25)$$

$$\Delta \mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{h}_{n+\alpha} \quad (4.26)$$

$$\phi_{n+1} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{H}_{n+1}) = \phi(p_{n+1}, q_{n+1}, \mathbf{H}_{n+1}) = 0 \quad (4.27)$$

donde:

$$\mathbf{r}_{n+\alpha} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+\alpha} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\alpha}, \mathbf{H}_{n+\alpha}) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{h}_{n+\alpha} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\alpha}, \mathbf{H}_{n+\alpha}) \quad (4.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\boldsymbol{\sigma}_n + \alpha\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{H}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{H}_n + \alpha\mathbf{H}_{n+1} \quad (4.31)$$

En las ecuaciones anteriores, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$ representa el predictor elástico y α es el parámetro de nuestro algoritmo de punto medio y toma valores en el siguiente intervalo $[0,1]$. En nuestro caso se realizará una formulación completa del algoritmo de punto medio generalizado dependiente de la presión hidrostática.

En primer lugar, separamos el tensor de tensiones en su parte desviadora e hidrostática entre dos estados consecutivos:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -p_{n+1}\mathbf{I} + \mathbf{S}_{n+1} = -p_{n+1}\mathbf{I} + \frac{2}{3}q\mathbf{n}_{n+1} \quad (4.32)$$

donde $\mathbf{n} = 3/(2q)\mathbf{S}$ es el vector normal unitario a la superficie de fluencia.

A continuación, desacoplamos el incremento de deformación plástica en su componente volumétrica $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_V^p$ y su componente desviadora $\boldsymbol{\varepsilon}_D^p$ aplicando la ley de fluencia en incrementos:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \Delta\lambda \mathbf{r}_{n+\alpha} = \Delta\lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+\alpha} = \Delta\lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial\phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+\alpha} \quad (4.33)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones (4.4) y (4.5):

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+\alpha} = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} \frac{1}{3}\mathbf{I} \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+\alpha} = + \left(\frac{\partial\phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} \quad (4.35)$$

Siendo (4.34) la componente volumétrica del incremento de deformación plástica y (4.35) la componente desviadora:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_V^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_D^p = \Delta\lambda \left[- \left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} \frac{1}{3}\mathbf{I} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \frac{2}{3} \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} \right] \quad (4.36)$$

donde:

$$-\Delta\lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} = \Delta\varepsilon_p \quad (4.37a)$$

$$\Delta\lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \frac{q_{n+1}^T}{q_{n+\alpha}} = \Delta\varepsilon_q \quad (4.37b)$$

Reescribimos la ecuación (4.36) teniendo en cuenta (4.37):

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \left[- \left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} \frac{1}{3}\mathbf{I} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \frac{q_{n+1}^T}{q_{n+\alpha}} \frac{2}{3} \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} \right] \quad (4.38)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{3}\Delta\varepsilon_p\mathbf{I} + \Delta\varepsilon_q \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+1}^T} \quad (4.39)$$

A continuación, despejamos $\Delta\lambda$ de las ecuaciones (4.37a) y (4.37b):

$$\Delta\lambda = \frac{-\Delta\varepsilon_p}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_{n+\alpha}} \quad (4.40)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\varepsilon_q}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)_{n+\alpha} \frac{q_{n+1}^T}{q_{n+\alpha}}} \quad (4.41)$$

Por lo tanto, igualando (4.40) y (4.41):

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta\varepsilon_p}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_{n+\alpha}} &= \frac{\Delta\varepsilon_q}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)_{n+\alpha} \frac{q_{n+1}^T}{q_{n+\alpha}}} \rightarrow -\Delta\varepsilon_p \left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)_{n+\alpha} \frac{q_{n+1}^T}{q_{n+\alpha}} = \Delta\varepsilon_q \left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_{n+\alpha} \\ \Delta\varepsilon_q \left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_{n+\alpha} + -\Delta\varepsilon_p \left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)_{n+\alpha} \frac{q_{n+1}^T}{q_{n+\alpha}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para simplificar la ecuación introducimos las variables P y Q :

$$P = \left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)_{n+\alpha} \frac{q_{n+1}^T}{q_{n+\alpha}} \quad (4.43)$$

$$Q = \left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_{n+\alpha} \quad (4.44)$$

De este modo, la ecuación (4.42) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\Delta\varepsilon_q Q + \Delta\varepsilon_p P = 0 \quad (4.45)$$

A continuación, sustituimos la ecuación (4.39) en (4.23) obteniendo:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \mathbf{D}^e : \frac{1}{3} \Delta\varepsilon_p \mathbf{I} - \mathbf{D}^e : \Delta\varepsilon_q \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+1}^T} \quad (4.46)$$

de donde se deduce la siguiente expresión introduciendo las constantes elásticas de nuestro modelo:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - K \Delta\varepsilon_p \mathbf{I} - 3G \Delta\varepsilon_q \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+1}^T} \quad (4.47)$$

Una vez llegados a este punto desacoplamos los tensores $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ y $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$ en sus componentes desviadora e hidrostática de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} - p_{n+1} \mathbf{I} \quad (4.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T = \mathbf{S}_{n+1}^T - p_{n+1}^T \mathbf{I} \quad (4.49)$$

Sustituyendo (4.48) – (4.49) en (4.47) obtenemos:

$$\mathbf{S}_{n+1} - p_{n+1}\mathbf{I} = \mathbf{S}_{n+1}^T - p_{n+1}^T\mathbf{I} - K\Delta\varepsilon_p\mathbf{I} - 3G\Delta\varepsilon_q \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+1}^T} \quad (4.50)$$

Relacionando componentes en las direcciones \mathbf{I} y \mathbf{S} a ambos lados de la ecuación se obtienen las siguientes relaciones para dos estados consecutivos de la presión hidrostática y del tensor desviador de tensiones:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^T - 3G\Delta\varepsilon_q \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+1}^T} \quad (4.51)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^T + K\Delta\varepsilon_p \quad (4.52)$$

Usando la regla del punto medio $\mathbf{S}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{S}_n + \alpha\mathbf{S}_{n+1}$ e introduciéndola en (4.51) trataremos de despejar el valor del tensor desviador de tensiones en t_{n+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} &= \mathbf{S}_{n+1}^T - 3G\Delta\varepsilon_q \frac{(1 - \alpha)\mathbf{S}_n + \alpha\mathbf{S}_{n+1}}{q_{n+1}^T} \\ \mathbf{S}_{n+1} + \frac{3G\alpha\mathbf{S}_{n+1}}{q_{n+1}^T} \Delta\varepsilon_q &= \mathbf{S}_{n+1}^T - \frac{3G(1 - \alpha)\mathbf{S}_n}{q_{n+1}^T} \Delta\varepsilon_q \\ \mathbf{S}_{n+1} \left(1 + \frac{3G\alpha\Delta\varepsilon_q}{q_{n+1}^T} \right) &= \mathbf{S}_{n+1}^T - \frac{3G(1 - \alpha)\mathbf{S}_n\Delta\varepsilon_q}{q_{n+1}^T} \end{aligned}$$

despejando \mathbf{S}_{n+1} se obtiene:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^T - 3G(1 - \alpha)\mathbf{S}_n\Delta\varepsilon_q/q_{n+1}^T}{1 + 3G\alpha\Delta\varepsilon_q/q_{n+1}^T} \quad (4.53)$$

Una vez obtenida la expresión (4.53) tenemos que tener en cuenta que las variables de estado de nuestro modelo pueden escribirse, según el algoritmo de punto medio, de la siguiente forma:

$$\Delta\mathbf{H} = \mathbf{h}_{n+\alpha}(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q, p_{n+\alpha}, q(\mathbf{S}_{n+\alpha}), \mathbf{H}_{n+\alpha}) \quad (4.54)$$

o bien,

$$\Delta\mathbf{H} = \mathbf{h}_{n+\alpha}(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q, p_{n+\alpha}, q(\mathbf{S}_{n+\alpha}), f_{n+\alpha}, \varepsilon_{n+\alpha}^p) \quad (4.55)$$

Así pues, la resolución de la extensión del modelo de Gurson puede resumirse en la solución del siguiente sistema no lineal de ecuaciones elástoplásticas siguiente

$$\Delta\varepsilon_q Q + \Delta\varepsilon_p P = 0 \quad (4.56)$$

$$\phi_{n+1} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{H}_{n+1}) = \phi(p_{n+1}, q_{n+1}, \mathbf{H}_{n+1}) = 0 \quad (4.57)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^T + K\Delta\varepsilon_p \quad (4.58)$$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^T - 3G(1-\alpha)\mathbf{S}_n\Delta\varepsilon_q/q_{n+1}^T}{1 + 3G\alpha\Delta\varepsilon_q/q_{n+1}^T} \quad (4.59)$$

$$q_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}_{n+1}:\mathbf{S}_{n+1}} \quad (4.60)$$

$$\Delta\mathbf{H} = \mathbf{h}_{n+\alpha}(\Delta\varepsilon_p, \Delta\varepsilon_q, p_{n+\alpha}, q(\mathbf{S}_{n+\alpha}), f_{n+\alpha}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+\alpha}^p) \quad (4.61)$$

Teniendo en cuenta que el trabajo producido debido a la deformación plástica de la fase matriz del material se puede definir como:

$$\boldsymbol{\sigma}:d\boldsymbol{\varepsilon}^p = (1-f)\sigma_f d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (4.62)$$

las dos variables de estado de la extensión del modelo de Gurson evolucionarán del siguiente modo:

$$\Delta\mathbf{H}^1 = \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{-p_{n+\alpha}\Delta\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_q q_{n+\alpha}^2/q_{n+\alpha}^T}{(1-f_{n+\alpha})(\sigma_f)_{n+\alpha}} \quad (4.63)$$

$$\Delta\mathbf{H}^2 = \Delta f = (1-f_{n+\alpha})\Delta\varepsilon_p + k_w f_{n+\alpha} \omega_{n+\alpha}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}:d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\alpha}^p}{q_{n+\alpha}} \quad (4.64)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales obtenido mediante el algoritmo de punto medio aplicaremos el método de Newton al siguiente sistema:

$$\Delta\varepsilon_q Q + \Delta\varepsilon_p P = 0 \quad (4.65)$$

$$\phi_{n+1} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{H}_{n+1}) = \phi(p_{n+1}, q_{n+1}, \mathbf{H}_{n+1}) = 0 \quad (4.66)$$

A continuación, definimos la matriz $\varphi(\vec{q}) = 0$:

$$\varphi(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_q Q + \Delta\varepsilon_p P \\ \phi_{n+1} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.67)$$

En primer lugar, se definen como semillas las variables $\Delta\varepsilon_q$ y $\Delta\varepsilon_p$, que inicialmente se programa para ambas variables un valor igual a cero. Más tarde se linealizan las

ecuaciones de restricción desarrollando en serie de Taylor en torno a una posición inicial(\vec{q}_0):

$$\vec{\varphi}(\vec{q}) \approx \vec{\varphi}(\vec{q}_0) + \varphi_q(\vec{q}_0)(\vec{q} - \vec{q}_0) \quad (4.68)$$

donde:

$$\vec{\varphi}(\vec{q}) = 0 \quad (4.69)$$

así pues:

$$-\varphi(\vec{q}_0) = \varphi_q(\vec{q}_0)(\vec{q} - \vec{q}_0) \quad (4.70)$$

donde:

$$-\varphi(\vec{q}_0) = \begin{pmatrix} -\Delta\varepsilon_q Q + \Delta\varepsilon_p P \\ -\phi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$(\vec{q} - \vec{q}_0) = \begin{pmatrix} \rho_p \\ \rho_q \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

y la matriz jacobiana de nuestro sistema será:

$$\varphi_q(\vec{q}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Delta\varepsilon_p} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Delta\varepsilon_q} \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \Delta\varepsilon_p} & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \Delta\varepsilon_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Por lo tanto, mediante la aplicación del método de Newton conseguimos que la solución de nuestro sistema inicial sea la solución de un sistema lineal:

$$A_{11}\rho_p + A_{12}\rho_q = b_1 \quad (4.74)$$

$$A_{21}\rho_p + A_{22}\rho_q = b_2 \quad (4.75)$$

donde las constantes A_{ij} se definirán posteriormente. Tomando como semillas de nuestro sistema $\Delta\varepsilon_p$ y $\Delta\varepsilon_q = 0$, en cada iteración se resuelve el sistema y se actualizan los valores de las incógnitas de siguiente modo:

$$\Delta\varepsilon_p = \Delta\varepsilon_p + \rho_p \quad (4.76)$$

$$\Delta\varepsilon_q = \Delta\varepsilon_q + \rho_q \quad (4.77)$$

Así pues, el proceso iterativo de del método de Nexton se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -\vec{\varphi}(\vec{q}_n) &= \varphi_q(\vec{q}_n)(\vec{q}_{n+1} - \vec{q}_n) \rightarrow -\varphi(\vec{q}_n)^{-1} \cdot \vec{\varphi}(\vec{q}_n) \\ &= \varphi_q(\vec{q}_n)^{-1} \cdot \varphi_q(\vec{q}_n) \cdot (\vec{q}_{n+1} - \vec{q}_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el proceso iterativo de Newton se podrá resumir en la siguiente ecuación:

$$\vec{q}_{n+1} = \vec{q}_n - \varphi_q(\vec{q}_n)^{-1} \vec{\varphi}(\vec{q}_n) \quad (4.78)$$

Para añadir la extensión al código de la subrutina UMAT de partida modificaremos las componentes de nuestra matriz jacobiana. Los términos A_{ij} se definen a continuación:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= P + \alpha \Delta \varepsilon_p \left[\frac{\partial P}{\partial p_{n+\alpha}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] + \alpha \Delta \varepsilon_q \left[\frac{\partial Q}{\partial p_{n+\alpha}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_p} \right] \\
 A_{12} &= Q + \Delta \varepsilon_p \alpha \left[\frac{\partial P}{\partial q_{n+\alpha}} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] + \\
 &+ \Delta \varepsilon_q \alpha \left[\frac{\partial Q}{\partial q_{n+\alpha}} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_q} \right] \\
 A_{21} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_p} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial p_{n+1}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_p} + \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \mathbf{H}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_p} \\
 A_{22} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_q} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_q} + \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \mathbf{H}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_q} \tag{4.79}
 \end{aligned}$$

Dos matrices intrínsecas en la implementación de los términos A_{ij} se definen a continuación:

$$CC(I, J) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\partial \Delta f}{\partial f_{n+\alpha}} & \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial f_{n+\alpha}} \\ \frac{DIV}{\partial \bar{\varepsilon}^{n+\alpha}} & 1 - \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial \bar{\varepsilon}^{n+\alpha}} \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

donde DIV se calcula como:

$$DIV = \left(1 - \alpha \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right) \left(1 - \frac{\partial \Delta f}{\partial f_{n+\alpha}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial f_{n+\alpha}} \right) \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right) \tag{4.81}$$

$$HEF(I, J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial \Delta \varepsilon_q} & \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial p} & \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^p}{\partial q} \\ \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_p} & \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_q} & \frac{\partial \Delta f}{\partial p} & \frac{\partial \Delta f}{\partial q} \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

Como paso previo a modificar aquellas componentes que varíen al introducir la extensión del modelo de gurson definiremos por completo dicha extensión, desacoplando todos los tensores implícitos en ella. La extensión propuesta se define según la ecuación (3.9). Desacoplando el tensor $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ se podrá definir del siguiente modo el incremento de deformación plástica:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p \mathbf{I} + \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}}{q} \tag{4.83}$$

aplicando el algoritmo de punto medio se tiene:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\alpha}^p = \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p \mathbf{I} + \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}}{q_n} \quad (4.84)$$

Por lo tanto, en forma matricial el tensor de deformación plástica se define como:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\alpha}^p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p + \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(1)}{q_n} \\ \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p + \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(2)}{q_n} \\ \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_p + \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(3)}{q_n} \\ \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(4)}{q_n} \\ \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(5)}{q_n} \\ \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(6)}{q_n} \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

Una vez definido el tensor de deformación plástica podemos observar cómo algunas componentes de estas matrices varían al hacerlo la evolución de la variable de estado f , de este modo para introducir la extensión modificaremos los siguientes términos de las dos matrices:

Matriz CC(I,J)

Todas las componentes cambian debido a que dependen de la evolución modificada de f , Δf . Así pues:

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial f_{n+\alpha}} = -\Delta \varepsilon_p + k_w \omega_{n+\alpha}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\alpha}^p}{q_{n+\alpha}} \quad (4.86)$$

Matriz HEF(I,J)

En este caso solo varían 4 componentes de la matriz. Estas componentes serán los elementos HEF(2,1), HEF(2,3) y HEF(2,4). Así pues, dichos elementos se modificarán del siguiente modo:

• **HEF(2,1)**

$$\text{HEF}(2,1) = \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_p} = (1 - f_{n+\alpha}) + \frac{k_w f_{n+\alpha} \omega_{n+\alpha}(\boldsymbol{\sigma})}{q_{n+\alpha}} (\mathbf{s}_{n+\alpha}(1) \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(1)}{q_{n+\alpha}} \right) + \dots + \mathbf{s}_{n+\alpha}(NDI + 1) \left(\frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(NDI + 1)}{q_{n+\alpha}} \right) + \dots + \mathbf{s}_{n+\alpha}(NTENS) \left(\frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(NTENS)}{q_{n+\alpha}} \right))$$

• **HEF(2,3)**

$$\text{HEF}(2,2) = \frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_q} = \frac{k_w f_{n+\alpha} \omega_{n+\alpha}(\boldsymbol{\sigma})}{q_{n+\alpha}} (\mathbf{s}_{n+\alpha}(1) \left(\frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(1)}{q_{n+\alpha}} \right) + \dots + \mathbf{s}_{n+\alpha}(NTENS) \left(\frac{3}{2} \Delta \varepsilon_q \frac{\mathbf{s}_{n+\alpha}(NTENS)}{q_{n+\alpha}} \right))$$

• **HEF(2,4)**

$$\text{HEF}(2,4) = \frac{\partial \Delta f}{\partial q_{n+\alpha}} = - \frac{3 k_w f_{n+\alpha} \omega_{n+\alpha}(\boldsymbol{\sigma}) \Delta \varepsilon_q}{q_{n+\alpha}^2} (\mathbf{s}_{n+\alpha}^2(1) + \dots + \mathbf{s}_{n+\alpha}^2(NTENS))$$

Cabe destacar que, en las definiciones anteriores, *NTENS* se refiere al número de componentes que tiene el pseudovector de tensiones escrito en forma reducida y *NDI* se refiere al número de tensiones principales del tensor de tensiones.

4.2.1.1 Definición del módulo tangente consistente

Como paso final para la implementación de la extensión del modelo de Gurson, a continuación, se muestra el cálculo del módulo tangente consistente. El módulo tangente consistente de nuestro modelo se calculará de la siguiente forma:

$$\mathbf{D}^{consis.} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1} \quad (4.87)$$

La expresión generalizada el cálculo de la matriz módulo tangente consistente mediante algoritmos de punto medio se define como:

$$\partial \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} : \mathbf{Z} : \partial \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.88)$$

siendo:

$$\mathbf{Z} = \frac{2G}{1 + 3G\alpha\Delta\varepsilon_q/q_n} \mathbf{J} + \left(K - \frac{2}{3} \frac{G}{1 + 3G\alpha\Delta\varepsilon_q/q_n} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (4.89)$$

además:

$$\mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{M}^I - \mathbf{M}^n \quad (4.90)$$

$$\mathbf{M}^I = K(D_{11}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + D_{12}\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_{n+\alpha} + D_{13}\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_{n+1})$$

$$\mathbf{M}^n = \frac{2G}{1 + 3G\alpha\Delta\varepsilon_q/q_n} \frac{q_{n+\alpha}}{q_n} (D_{21}\mathbf{n}_{n+\alpha} \otimes \mathbf{I} + D_{22}\mathbf{n}_{n+\alpha} \otimes \mathbf{n}_{n+\alpha} + D_{23}\mathbf{n}_{n+\alpha} \otimes \mathbf{n}_{n+1})$$

Siendo los términos D_{ij} los valores que resuelven el siguiente sistema ecuaciones:

$$\partial\Delta\varepsilon_p = (D_{11}\mathbf{I} + D_{12}\mathbf{n}_{n+\alpha} + D_{13}\mathbf{n}_{n+1}): \mathbf{Z}: \partial\varepsilon \quad (4.91)$$

$$\partial\Delta\varepsilon_q = (D_{21}\mathbf{I} + D_{22}\mathbf{n}_{n+\alpha} + D_{23}\mathbf{n}_{n+1}): \mathbf{Z}: \partial\varepsilon \quad (4.92)$$

Finalmente multiplicando \mathbf{M} y \mathbf{Z} obtenemos la expresión explícita de la matriz módulo tangente consistente:

$$\mathbf{D}^{consis.} = d_0\mathbf{J} + d_1\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{n}_{n+\alpha} \otimes (d_2\mathbf{n}_{n+\alpha} + d_3\mathbf{n}_{n+1}) + d_4\mathbf{n}_{n+\alpha} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes (d_5\mathbf{n}_{n+\alpha} + d_6\mathbf{n}_{n+1}) \quad (4.93)$$

donde los valores d_i son las constantes introducidas por Zhang de valor:

$$d_0 = \frac{2G}{1 + 3G\alpha\Delta\varepsilon_q/q_n} \quad (4.94)$$

$$d_1 = K - \frac{d_0}{3} - 3K^2D_{11} \quad (4.95)$$

$$d_2 = -d_0^2 \frac{q_{n+\alpha}}{q_n} D_{22} \quad (4.96)$$

$$d_3 = -d_0^2 \frac{q_{n+\alpha}}{q_n} D_{23} \quad (4.97)$$

$$d_4 = -3Kd_0 \frac{q_{n+\alpha}}{q_n} D_{21} \quad (4.99)$$

$$d_5 = -Kd_0D_{12} \quad (4.100)$$

$$d_6 = -Kd_0D_{13} \quad (4.101)$$

4.2.2 Resultados de la implementación de la extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura

A continuación, en la [Figura 4.3](#) y en la [Figura 4.4](#) se pueden observar los resultados obtenidos de la implementación de la extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura, propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008), para un estado tensional propio de procesos de micromecanizado donde las tensiones de cortadura son dominantes, es decir, $T = 2/3$ y $L = 0$. Estos dos parámetros característicos del estado tensional, se controlan en la simulación mediante el método de control en carga explicado en el apartado anterior. El acero utilizado tiene las siguientes propiedades mecánicas: $E = 200000 \text{ MPa}$, $N = 0.1$, $\nu = 0.3$ y $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$.

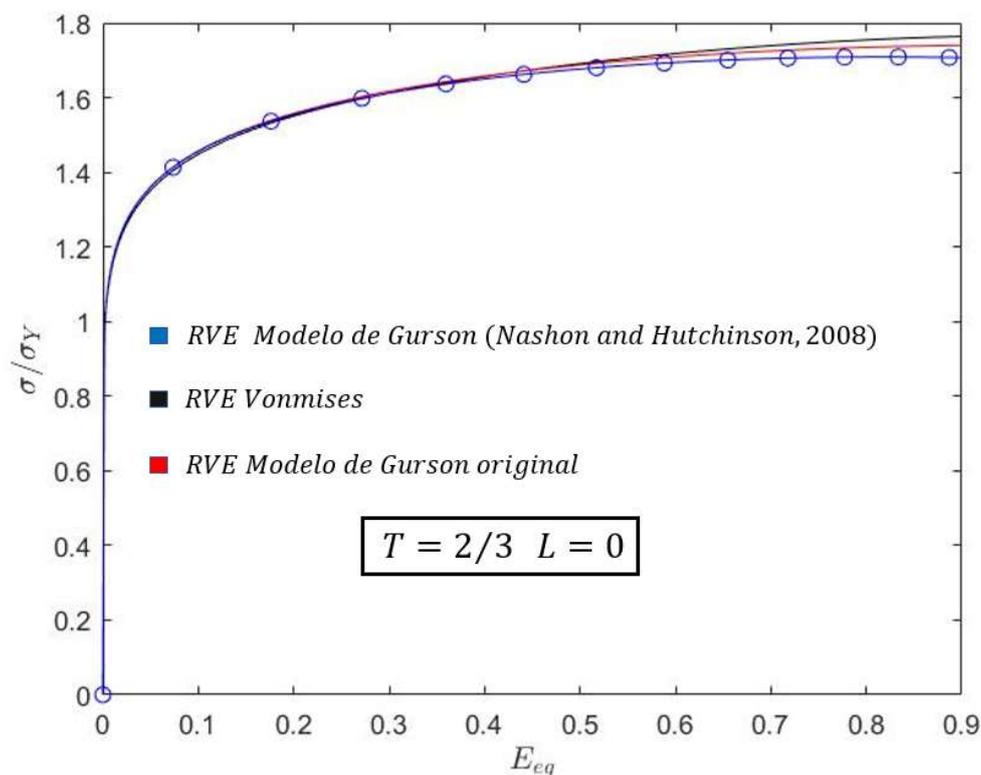


Figura 4.3 Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad Vonmises, en el modelo RVE con Gurson original y en el modelo RVE con el modelo de Gurson propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008).

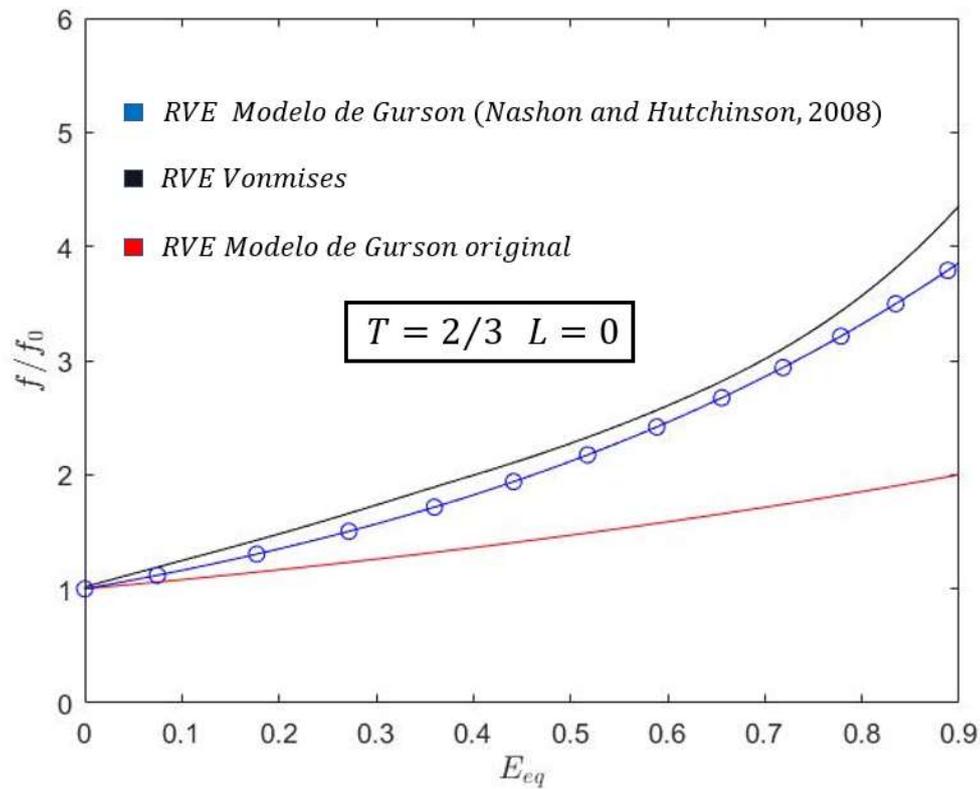


Figura 4.4 Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad Vonmises , en el modelo RVE con Gurson original y en el modelo RVE con el modelo de Gurson propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008)

Observando los resultados de la Figura 4.4, se concluye que el modelo de Gurson propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008) predice de una manera mucho más eficiente el crecimiento de la porosidad en estados de triaxialidad muy baja, es decir, estados tensionales de cortadura.

4.3 Extensión del modelo de Gurson incorporando Strain Gradient Plasticity

Los efectos de tamaño en un metal poroso que se endurece por deformación se investigan utilizando una extensión del modelo de Gurson propuesta por Niordson y Tvergaard en (Niordson and Tvergaard, 2019). Esta extensión del modelo de Gurson, incorpora a sus ecuaciones constitutivas el parámetro de escala L_D , introduciendo una dependencia de dicho parámetro en la superficie de fluencia del modelo de Gurson original del siguiente modo:

$$\phi(q, \sigma_m, f) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2Q_1 q_1 f \cosh\left(\frac{3Q_2 q_2 \sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - (Q_1 q_1 f)^2 = 0 \quad (4.102)$$

siendo los factores Q_1 y Q_2 los factores que introducen en el modelo la dependencia del parámetro de escala. Dichos factores, se calcularon mediante un ajuste por (Niordson and Tvergaard, 2019) y obtuvieron como resultado los siguientes valores:

$$Q_1 \approx \frac{0.364}{1 + 1.8 \left(\frac{L_D}{R_V}\right) + 10 \left(\frac{L_D}{R_V}\right)^2} + 0.636 \quad (4.103)$$

$$Q_2 \approx \frac{1}{1 + 1.8 \left(\frac{L_D}{R_V}\right)^{3/2}} \quad (4.104)$$

Donde L_D es el parámetro intrínseco de escala del metal y R_V el radio actualizado del poro de cada celda unitaria. Para implementar esta extensión del modelo de Gurson es necesario tener en cuenta el modelo de celda a partir del cual se realizaron los ajustes de los parámetros Q_1 y Q_2 . Dicho modelo de celda se puede observar en la [Figura 4.5](#):

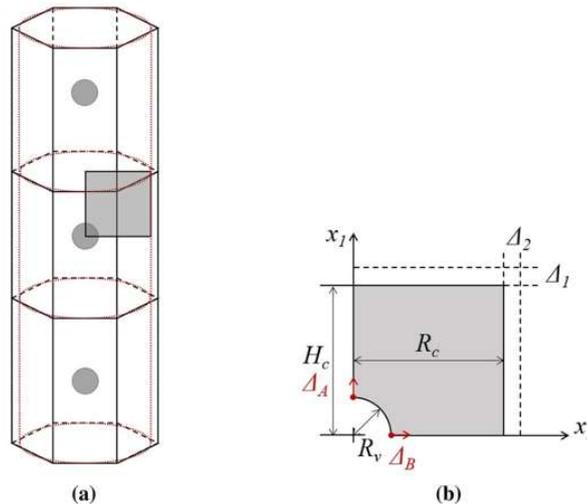


Figura 4.5 a) Los microhuecos se suponen que están dispuestos de manera periódica en cilindros hexagonales mediante condiciones de contorno axi-simétricas. b) Se muestra la aproximación del modelo adoptada para tener un menor coste computacional. Extraída de (Holte *et al.*, 2019) .

Siendo R_V , el radio actualizado del microhueco, R_c el radio de la celda y H_c la altura de la celda, se podrá definir la porosidad inicial como:

$$f_0 = \frac{2R_0^3}{3R_c^2(0)H_c(0)} \quad (4.105)$$

Calculando del mismo modo la porosidad en un instante de tiempo t :

$$f_t = \frac{2R_V^3(t)}{3R_c^2(t)H_c(t)} \quad (4.106)$$

Dividiendo a continuación (4.105)-(4.106) se obtiene:

$$\frac{f_0}{f_t} = \frac{R_0^3 R_c^2(t) H_c(t)}{R_V^3(t) R_c^2(0) H_c(0)} \quad (4.107)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{R_c^2(t) H_c(t)}{R_c^2(0) H_c(0)} = 1 \quad (4.108)$$

debido a la conservación de masa del modelo en el modelo se tiene entonces la siguiente relación entre la porosidad inicial f_0 y la porosidad en un instante de tiempo cualquiera f_t :

$$\frac{f_0}{f_t} = \frac{R_0^3}{R_V^3(t)} \quad (4.109)$$

despejando la relación de radios del poro:

$$\frac{R_0}{R_V(t)} = \sqrt[3]{\frac{f_0}{f_t}} \quad (4.110)$$

Multiplicando y dividiendo por L_D en el término izquierdo de (4.110):

$$\frac{L_D R_0}{L_D R_V(t)} = \sqrt[3]{\frac{f_0}{f_t}} \quad (4.111)$$

Reordenando (4.111):

$$\frac{L_D}{R_V(t)} = \frac{L_D}{R_0} \left(\frac{f_0}{f_t} \right)^{1/3} \quad (4.112)$$

Así pues, se ha obtenido mediante (4.112) una expresión que nos permite implementar la variación de los parámetros Q_1 y Q_2 en cualquier instante de tiempo. Por lo tanto, a la hora de implementar nuestros parámetros representativos de la teoría SGP en el modelo de Gurson, se tendrán en cuenta las siguientes expresiones:

$$Q_1 \approx \frac{0.364}{1 + 1.8 \left(\frac{L_D}{R_0} \left(\frac{f_0}{f_t} \right)^{1/3} \right) + 10 \left(\frac{L_D}{R_0} \left(\frac{f_0}{f_t} \right)^{1/3} \right)^2} + 0.636 \quad (4.113)$$

$$Q_2 \approx \frac{1}{1 + 1.8 \left(\frac{L_D}{R_0} \left(\frac{f_0}{f_t} \right)^{1/3} \right)^{3/2}} \quad (4.114)$$

Cabe destacar que si $L_D = 0$, entonces nos encontraremos en marco de la teoría de la plasticidad convencional y por lo tanto, la superficie de fluencia del modelo de Gurson adoptará su formato original, pues $Q_1 = 1$ y $Q_2 = 1$. El hecho de que Q_1 y Q_2 no sean constantes dificulta enormemente la implementación del modelo. En (Holte *et al.*, 2019) se mostró que suponiendo Q_1 y Q_2 constantes en cada incremento del algoritmo de resolución, el error cometido era despreciable. Para demostrar este hecho en este TFM se calcula la evolución de estos dos parámetros con la porosidad y se demuestra que $\dot{Q}_1 \approx 0$ y $\dot{Q}_2 \approx 0$ para un intervalo de f característico. En cualquier extensión del modelo de Gurson, f representa la fracción entre el volumen total de los microhuecos del metal y el volumen del metal:

$$f = \frac{V_{\text{microhueco}}}{V_{\text{Metal}}} \quad (4.115)$$

Esto quiere decir, que f siempre será menor que la unidad, pues el volumen ocupado por los poros, nunca podrá ser igual o mayor que el volumen del material. Es decir, $f < 1$. Por otra parte, f tendrá un valor máximo para cada material, que será el valor para el cual, el material rompe completamente. En la actualidad, se sabe que para un valor de $f > 0.25$ la mayoría de los aceros han fallado dúctilmente. De este modo, calcularemos la evolución de Q_1 y Q_2 para diferentes relaciones de L_D/R_0 , en un rango de valores de f coherente, es decir, $f_0 \leq f \leq 0.25$. De este modo, en la [Figura 4.6](#) se puede observar la evolución de los parámetros Q_1 y Q_2 . En la [Figura 4.6](#) se observa como al incrementar el parámetro de escala, es decir al incrementar el efecto de tamaño de nuestro material, los parámetros Q_1 y Q_2 disminuyen ligeramente. Para un rango de valores de $L_D/R_0 = 0.05, 0.25$ y 0.5 es posible evaluar el comportamiento de Q_1 y Q_2 de manera eficiente pues el rango de valores anteriormente utilizado es un rango de valores real, debido principalmente a que L_D/R_0 no suele ser mayor de 0.5 en este modelo. Para un L_D/R_0 muy pequeño, es decir, 0.05 los efectos de tamaño son prácticamente despreciables y además tal y como se puede observar en la [Figura 4.6](#) $Q_1 \approx 1$ y $Q_2 \approx 1 \forall f \in [f_0, 0.25]$.

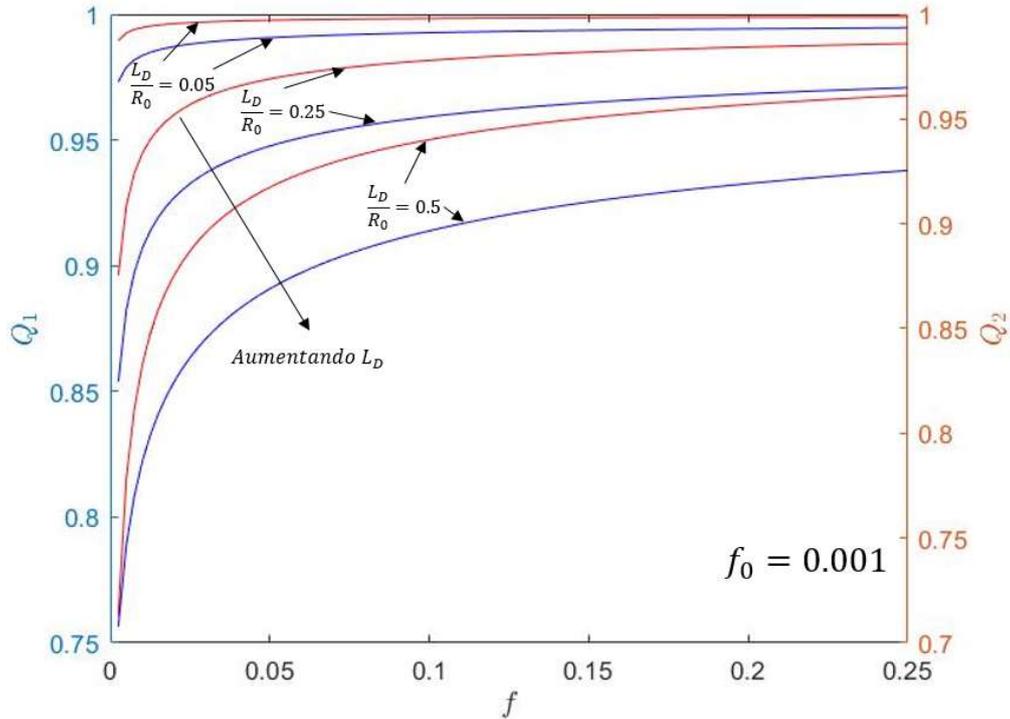


Figura 4.6 Evolución de Q_1 y Q_2 con la porosidad f para diferentes parámetros de escala L_D y una porosidad inicial fijada $f_0 = 0.001$.

A continuación, se evaluarán las funciones \dot{Q}_1 y \dot{Q}_2 para un mismo rango de valores que en Figura 4.6. Estas funciones se encuentran representadas en la Figura 4.7 de la que se deduce que para un $f \approx f_0$, Q_1 y Q_2 sufren un gran cambio, pero a medida que f va creciendo estos dos parámetros se estabilizan entorno a un valor constante. Así pues, se concluye que a la hora de implementar el algoritmo de resolución del presente modelo de Gurson, se tomarán los valores Q_1 y Q_2 constantes. Esta misma conclusión fue obtenida por (Holte *et al.*, 2019) pero de manera experimental y mediante una simulación en la que se obtuvieron los siguientes resultados:

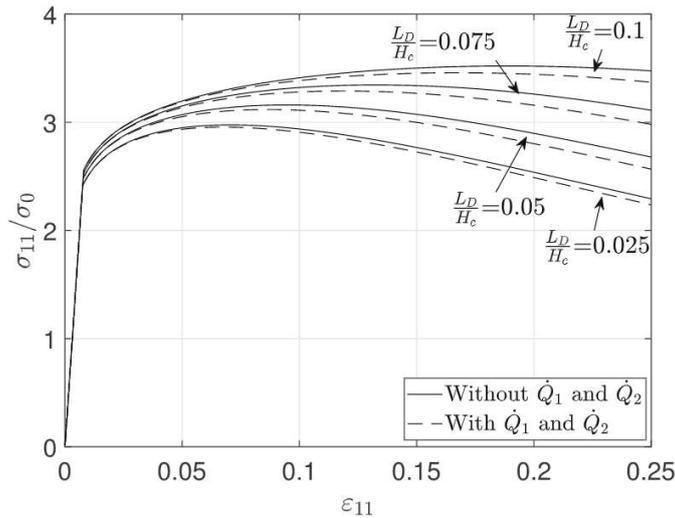


Figura 4.7 Curva tensión deformación del modelo de celda mostrado en Figura 4.5 donde se observa que el error cometido al suponer Q_1 y Q_2 constantes es despreciable.

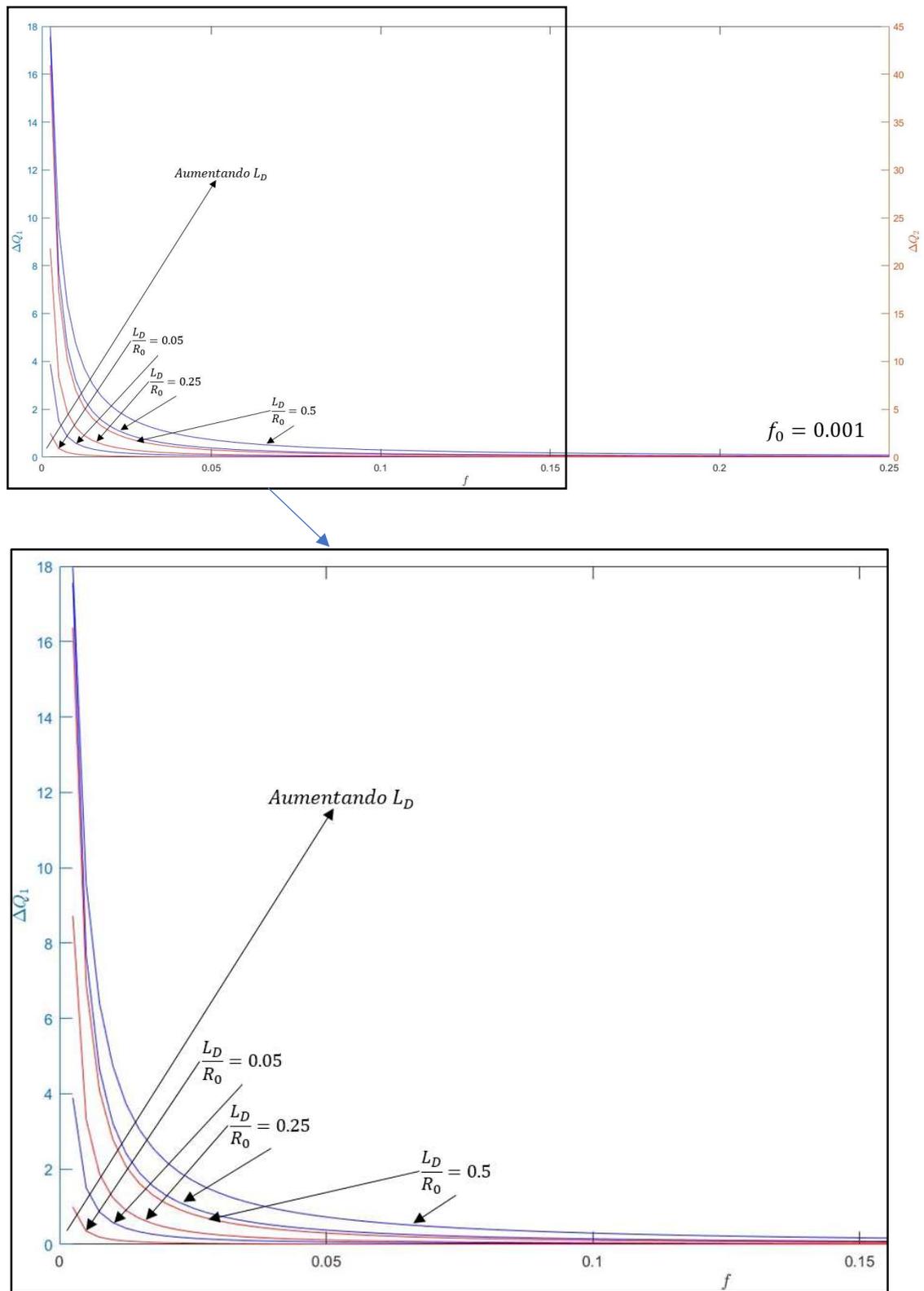


Figura 4.8 Evolución de las funciones \hat{Q}_1 y \hat{Q}_2 la porosidad f para diferentes parámetros de escala L_D y una porosidad inicial fijada $f_0 = 0.001$.

4.3.1 Resultados de la implementación de la extensión del modelo de Gurson incorporando Strain Gradient Plasticity.

A continuación, en la [Figura 4.9](#) y [Figura 4.10](#) en la se pueden observar los resultados obtenidos de la implementación de la extensión del modelo de Gurson incorporando Strain Gradient Plasticity, propuesto por (Niordson and Tvergaard, 2019), para un estado tensional propio de procesos de micromecanizado, donde las tensiones de cortadura son dominantes, es decir, $T = 2/3$ y $L = 0$. Estos dos parámetros característicos del estado tensional, se controlan en la simulación mediante el método de control en carga explicado en el apartado anterior. El acero utilizado tiene las siguientes propiedades mecánicas: $E = 200000 \text{ MPa}$, $N = 0.1$, $\nu = 0.3$ y $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$.

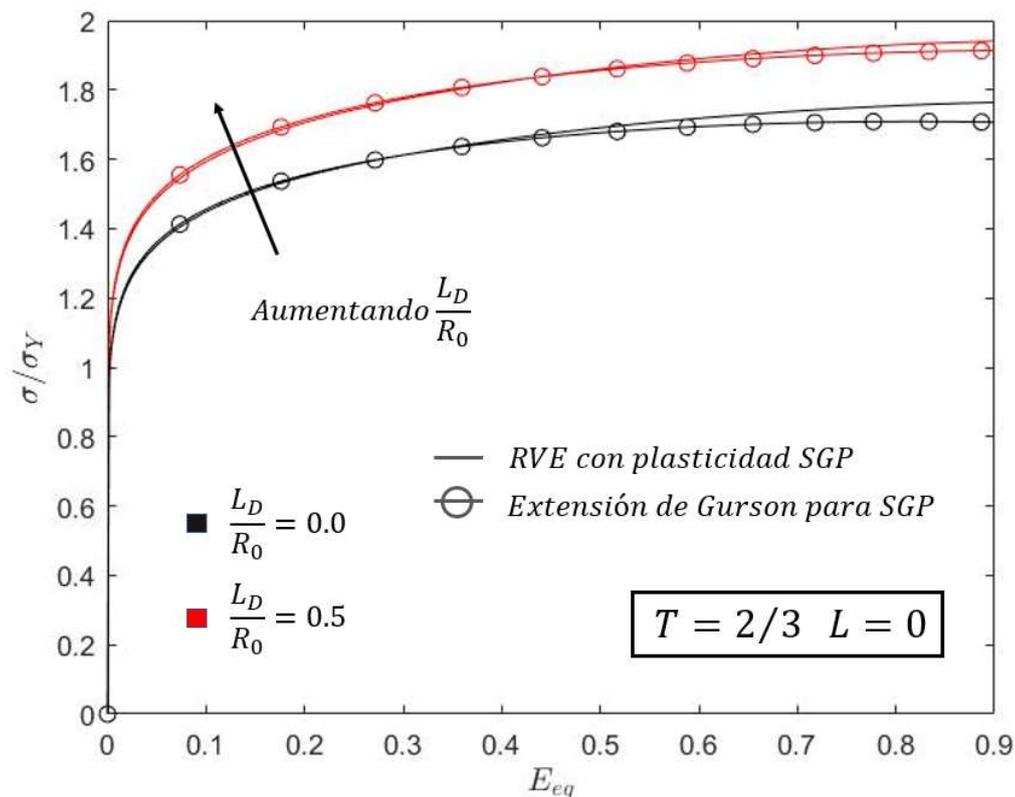


Figura 4.9 Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad SGP y en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP propuesto por (Niordson and Tvergaard, 2019).

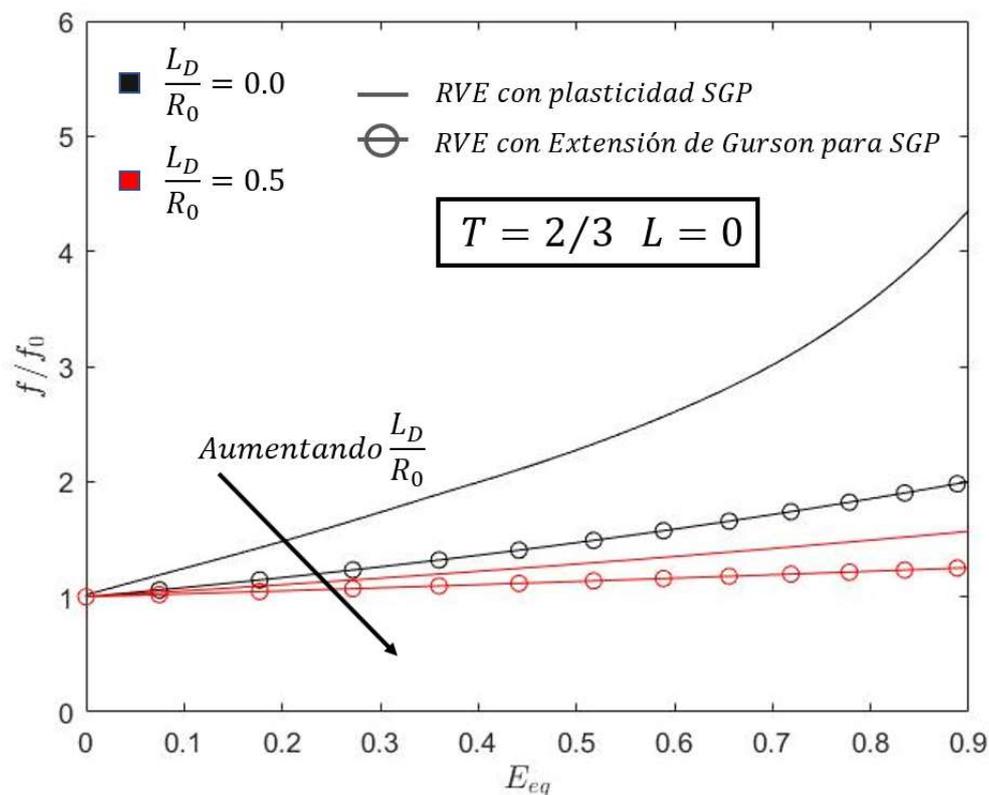


Figura 4.10 Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad SGP y en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP propuesto por (Niordson and Tvergaard, 2019).

Observando los resultados se concluye que la implementación ha sido eficiente pues el modelo de Gurson propuesto por (Niordson and Tvergaard, 2019) es capaz de implementar el efecto de tamaño de los metales. Aumentando L_D/R_0 , en la Figura 4.9 se obtienen unos resultados coherentes con los obtenidos a partir de un modelo RVE con plasticidad SGP. Es decir, aumentando L_D/R_0 aumenta la resistencia del metal. Este hecho también se puede observar en la Figura 4.10, pues al aumentar L_D/R_0 la porosidad crece menos y por lo tanto, la resistencia del metal será mayor.

4.4 Extensión del modelo de Gurson para el fallo por cortadura incorporando Strain Gradient Plasticity

En este apartado se propone un nuevo modelo de Gurson que sea eficiente para el fallo por cortadura y además que incorpore la teoría del gradiente de deformación plástica. Para ello, se toman de base los modelos de Gurson propuestos por (Nahshon and Hutchinson, 2008) y (Niordson and Tvergaard, 2019) y en este TFM se propondrá acoplar ambos modelos para obtener un modelo de Gurson eficiente tanto para pequeñas escalas como para estados de cortadura, es decir, un escenario similar al que nos encontramos en procesos de micromecanizado.

Partimos de la siguiente función de plastificación:

$$\phi(q, \sigma_m, f) = \frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2Q_1q_1f \cosh\left(\frac{3Q_2q_2\sigma_m}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - (Q_1q_1f)^2 = 0 \quad (4.116)$$

donde Q_1 y Q_2 se definen en (4.103) - (4.104). A continuación, tal y como se muestra en la Figura 4.11, suponemos un estado de cortadura pura:

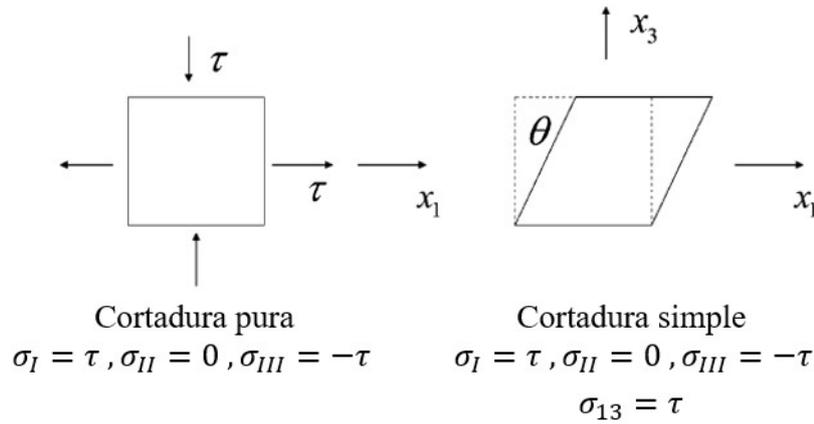


Figura 4.11 Cortadura pura y simple.

De este modo, $\sigma_I = \sigma_1 = \tau$, $\sigma_{III} = \sigma_3 = -\tau$, siendo $\tau > 0$. Así pues, es fácil demostrar que $s_{ij} = \sigma_{ij}$, pues $\sigma_m = 0$, y siendo $\sigma_e = q = \sqrt{3}\tau$ se podrá acudir a la superficie de fluencia (4.116) obteniendo los siguientes resultados:

$$\frac{q^2}{\bar{\sigma}^2} + 2Q_1q_1f \cosh(0) - 1 - (Q_1q_1f)^2 = 0 \quad (4.116)$$

Reordenando:

$$q^2 = \bar{\sigma}^2(-2Q_1q_1f + 1 + (Q_1q_1f)^2) \quad (4.117)$$

despejando q para la parte positiva de las dos soluciones de la ecuación anterior se obtiene:

$$q = \bar{\sigma}\sqrt{-2Q_1q_1f + 1 + (Q_1q_1f)^2} \quad (4.118)$$

Es decir:

$$\sqrt{3}\tau = \bar{\sigma}\sqrt{-2Q_1q_1f + 1 + (Q_1q_1f)^2} \quad (4.119)$$

definiendo $W(f, L_D/R_0)$ del siguiente modo:

$$W(f, L_D/R_0) = \sqrt{-2Q_1q_1f + 1 + (Q_1q_1f)^2} \quad (4.120)$$

obtenemos finalmente la ecuación constitutiva de nuestro modelo para un estado tensional de cortadura:

$$\sqrt{3}\tau = \bar{\sigma}W(f, L_D/R_0) \quad (4.121)$$

debido a la incompresibilidad de los aceros se obtiene la siguiente relación en la variación de las deformaciones en los ejes principales para un estado de cortadura $\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0$, desarrollando:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p + \dot{\varepsilon}_{22}^p + \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0 \quad (4.122)$$

con:

$$\dot{\varepsilon}_{22}^p = 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}_{33}^p = -\dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (4.123)$$

En un estado tensional de cortadura pura $\dot{\varepsilon}_e^p = 2\dot{\varepsilon}_{11}^p/\sqrt{3}$, donde $\dot{\varepsilon}_{11}^p$ es la variación de la deformación plástica en base logarítmica, se deduce que $\dot{\varepsilon}_e^p = 2\dot{\varepsilon}_{11}^p/\sqrt{3}$, donde $\dot{\varepsilon}_{11}^p$ es la deformación plástica logarítmica en la dirección principal-1. Llegados a este punto es necesario retomar la ecuación que nos define la evolución de la porosidad en el modelo de Gurson para cortadura. Dicha ecuación (4.13) se expresa de la siguiente forma:

$$\dot{f} = (1-f)\dot{\varepsilon}_{kk}^p + k_w f \omega(\boldsymbol{\sigma}) \frac{s_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\sigma_e} \quad (4.124)$$

Teniendo en cuenta (4.122):

$$\dot{f} = k_w f \omega(\boldsymbol{\sigma}) \frac{s_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\sigma_e} \quad (4.125)$$

con $\omega(\boldsymbol{\sigma})$ calculado como se muestra en (4.12) se deduce que en el estado tensional que se está analizando $\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 1$ y además:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \text{ y } \sigma_e = \sqrt{3}\tau \quad (4.126)$$

por lo tanto $s_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \tau(\dot{\varepsilon}_{11}^p - \dot{\varepsilon}_{33}^p) = 2\tau\dot{\varepsilon}_{11}^p$. Teniendo en cuenta que $\dot{\varepsilon}_e^p = 2\dot{\varepsilon}_{11}^p/\sqrt{3}$ se obtiene la siguiente expresión para el cálculo de la evolución de la porosidad:

$$\dot{f} = k_w f \frac{2\tau\dot{\varepsilon}_{11}^p}{\sqrt{3}\tau} = k_w f \dot{\varepsilon}_e^p \quad (4.127)$$

integrando (4.127) y conociendo la porosidad en el instante inicial f_0 se obtiene:

$$\int \frac{\dot{f}}{f} df = \int k_w \dot{\varepsilon}_e^p dt$$

es decir:

$$f = f_0 e^{k_w \varepsilon_e^p} \quad (4.128)$$

Una vez obtenida una expresión que nos permita calcular de manera analítica la porosidad en un estado tensional de cortadura, se analizará el comportamiento de la fase matriz de un metal analizado mediante el presente modelo de Gurson, es decir, acudiremos a su ley de endurecimiento para obtener una relación entre las tensiones en la fase matriz del metal y su deformación plástica equivalente. Partimos de la base de que en los modelos de Gurson la ley de endurecimiento utilizada es la siguiente

$$\sigma_M = \sigma_R (\varepsilon_M^p)^N \quad (4.129)$$

donde σ_M es la tensión de flujo que en la ecuación (4.116) aparece como $\bar{\sigma}$, σ_R es una tensión de referencia, normalmente el límite elástico del material σ_y , ε_M^p es la deformación plástica en la fase matriz del metal y N el coeficiente de endurecimiento. Teniendo en cuenta que $h_M = d\varepsilon_M^p/d\sigma_M$, donde h_M es el módulo de endurecimiento de la fase matriz del metal, si consideramos que el trabajo plástico de la fase matriz es igual al trabajo plástico macroscópico:

$$(1 - f)\sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (4.130)$$

Por lo tanto, considerando la definición de h_M en (4.130) la variación de la tensión de flujo de la fase matriz $\dot{\sigma}_M$ se podrá implementar de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma}_M = \frac{h_M \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{(1 - f)\sigma_M} \quad (4.131)$$

Se puede observar cómo $\dot{\sigma}_M$ depende directamente de la evolución del tensor de deformaciones plásticas. Por otro lado, \dot{f} depende directamente de $\dot{\varepsilon}_e^p$, por lo tanto, se estudiará la dependencia de $\dot{\sigma}_M$ en función de $\dot{\varepsilon}_e^p$. Para ello, partiremos de ley de endurecimiento de la fase matriz del material $\sigma_M = \sigma_R (\varepsilon_M^p)^N$. Teniendo en cuenta ,además, que:

$$\dot{\sigma}_M = \left(\frac{\partial \sigma_M}{\partial \varepsilon_M^p} \right) \dot{\varepsilon}_M^p = N \sigma_R (\varepsilon_M^p)^{N-1} \dot{\varepsilon}_M^p \quad (4.132)$$

por otro lado, $\varepsilon_M^p = (\sigma_M/\sigma_R)^{\frac{1}{N}}$, entonces (4.132) pasa a ser:

$$\dot{\sigma}_M = N \sigma_R \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R} \right)^{\frac{N-1}{N}} \dot{\varepsilon}_M^p \quad (4.133)$$

teniendo en cuenta que $h_M = d\varepsilon_M^p/d\sigma_M$, dividiendo $\dot{\varepsilon}_M^p$ entre (4.133) se obtiene:

$$\frac{\dot{\epsilon}_M^p}{\dot{\sigma}_M} = \frac{1}{N\sigma_R \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R}\right)^{\frac{N-1}{N}}} = \frac{1}{h_M} \quad (4.134)$$

Por lo tanto, h_M se puede definir como:

$$h_M = N\sigma_R \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R}\right)^{\frac{N-1}{N}} \quad (4.135)$$

Sustituyendo (4.135) en (4.131) se obtiene:

$$\dot{\sigma}_M = \frac{N\sigma_R \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R}\right)^{\frac{N-1}{N}} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{(1-f)\sigma_M} \quad (4.136)$$

agrupando términos:

$$\dot{\sigma}_M = \frac{N\sigma_R^{1/N} \sigma_M^{-1/N} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{(1-f)} \quad (4.137)$$

Considerando el estado tensional de cortadura del mismo modo que en (4.126)-(4.127):

$$\dot{\sigma}_M = N \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_M}\right)^{1/N} \frac{\sqrt{3}\tau \dot{\epsilon}_e^p}{(1-f)} \quad (4.138)$$

Se ha obtenido por tanto una expresión de $\dot{\sigma}_M$ dependiente de $\dot{\epsilon}_e^p$ y de la tensión de cortadura τ , por lo tanto, integrando (4.138) podremos obtener curvas de comportamiento del material de manera analítica. Para integrar (4.138) habrá que tener en cuenta (4.127) y a continuación, se muestra todo el proceso de cálculo:

$$\int \dot{\sigma}_M = \int N \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_M}\right)^{1/N} \frac{\sqrt{3}\tau \dot{\epsilon}_e^p}{(1-f)} \quad (4.139)$$

Aplicando (4.127):

$$\dot{\epsilon}_e^p = \frac{\dot{f}}{k_w f} \rightarrow \int \dot{\sigma}_M = \int N \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_M}\right)^{1/N} \frac{\sqrt{3}\tau \dot{f}}{k_w f (1-f)} \quad (4.140)$$

Reordenando:

$$\int \frac{1}{N} \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R}\right)^{1/N} \dot{\sigma}_M = \int \frac{\sqrt{3}\tau \dot{f}}{k_w f (1-f)} \quad (4.141)$$

Considerando (4.121):

$$\int \frac{1}{N} \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R}\right)^{1/N} \dot{\sigma}_M = \int \frac{\sigma_M W(f, L_D/R_0) \dot{f}}{k_w f (1-f)} \quad (4.142)$$

Reagrupando:

$$\int \frac{1}{N\sigma_M} \left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R}\right)^{1/N} \dot{\sigma}_M = \int \frac{W(f, L_D/R_0)}{k_w f(1-f)} \dot{f} \quad (4.143)$$

Resolviendo el término izq de (4.142)

$$\left(\frac{\sigma_M}{\sigma_R}\right)^{1/N} = \int \frac{W(f, L_D/R_0)}{k_w f(1-f)} \dot{f} \quad (4.144)$$

Despejando σ_M :

$$\sigma_M = \sigma_R \left[\int \frac{W(f, L_D/R_0)}{k_w f(1-f)} \dot{f} \right]^N \quad (4.145)$$

Volviendo a considerar (4.121), se obtiene una ecuación capaz de representar las curvas de comportamiento de nuestro material.

$$\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_R} = W(f, L_D/R_0) \left[\int_{f_0}^f \frac{W(\xi, L_D/R_0)}{k_w \xi(1-\xi)} d\xi \right]^N \quad (4.146)$$

Así pues, hemos obtenido dos ecuaciones (4.146) y (4.128) que nos permitirán obtener las curvas de comportamiento de nuestro material para unas propiedades características del mismo.

En la [Figura 4.12](#), se pueden observar los resultados obtenidos. A medida que se aumenta la porosidad inicial del material f_0 la caída de carga se produce para una deformación plástica equivalente inferior ε_e^p . Este hecho se explica entendiendo que cuanto mayor sea f_0 antes llegará el material a su valor crítico de porosidad f_c momento en el cual se produce la coalescencia de microhuecos. Por otra parte, manteniendo constante f_0 se analiza el comportamiento del material para varios parámetros de escala. Los resultados obtenidos son prometedores, pues se observa que al aumentar el efecto de tamaño de nuestro material, más tarda en producirse la caída de carga del mismo, un resultado coherente con los experimentos realizados por (Fleck *et al.*, 1994). Así mismo, se observa que para un $L_D/R_0 = 0.0$, es decir, en el marco de la teoría de la plasticidad convencional, el modelo se comporta de la misma forma que el modelo original propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008), obteniendo exactamente sus mismos resultados tal y como se puede observar en la [Figura 4.13](#).

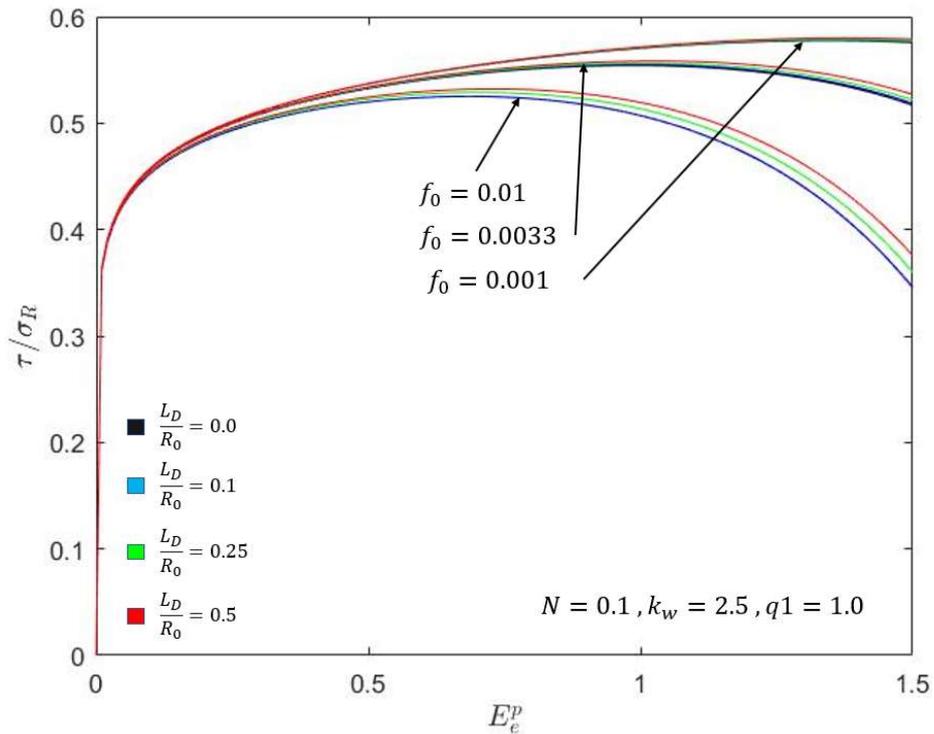


Figura 4.12 Curvas de comportamiento del material obtenidas mediante el nuevo modelo de Gurson para varios valores de f_0 constante y varios valores característicos de L_D/R_0 .

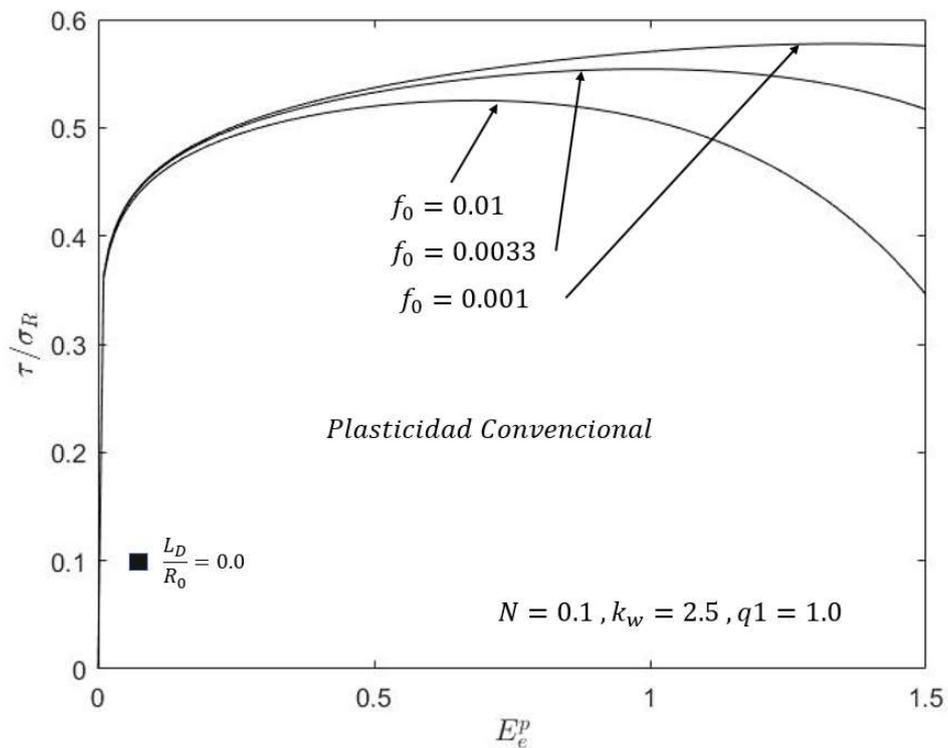


Figura 4.13 Comportamiento del material obtenido para plasticidad convencional mediante el nuevo modelo de Gurson, donde se obtienen los mismos resultados que (Nahshon and Hutchinson, 2008).

Analizando los resultados obtenidos en la Figura 4.12 para cada valor de f_0 constante se obtienen los siguientes resultados:

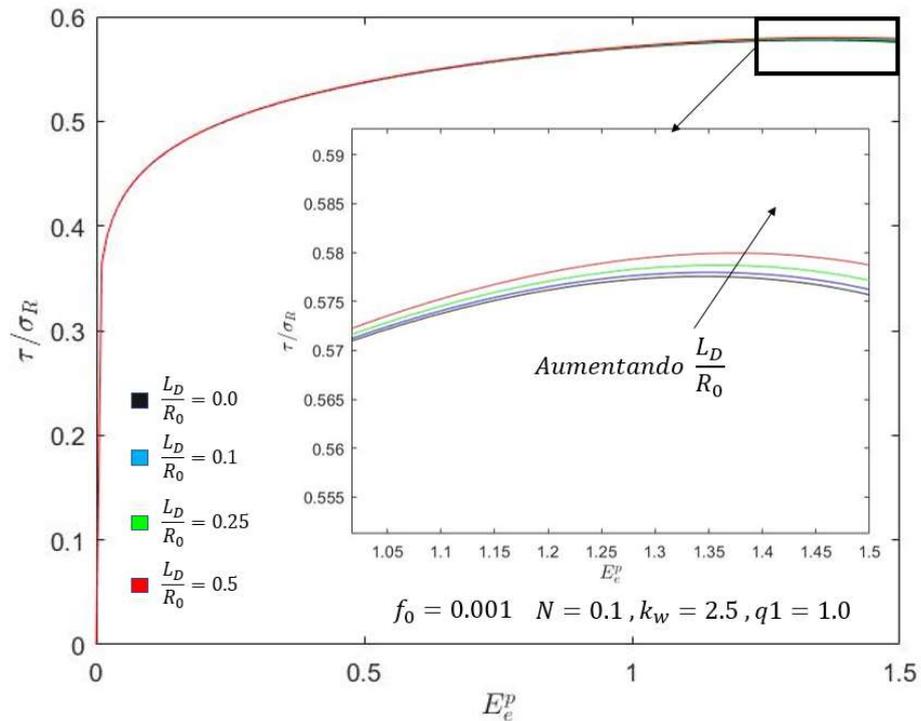


Figura 4.14 Curva de comportamiento del material obtenidas para $f_0 = 0.001$ y varios valores de L_D/R_0 característicos.

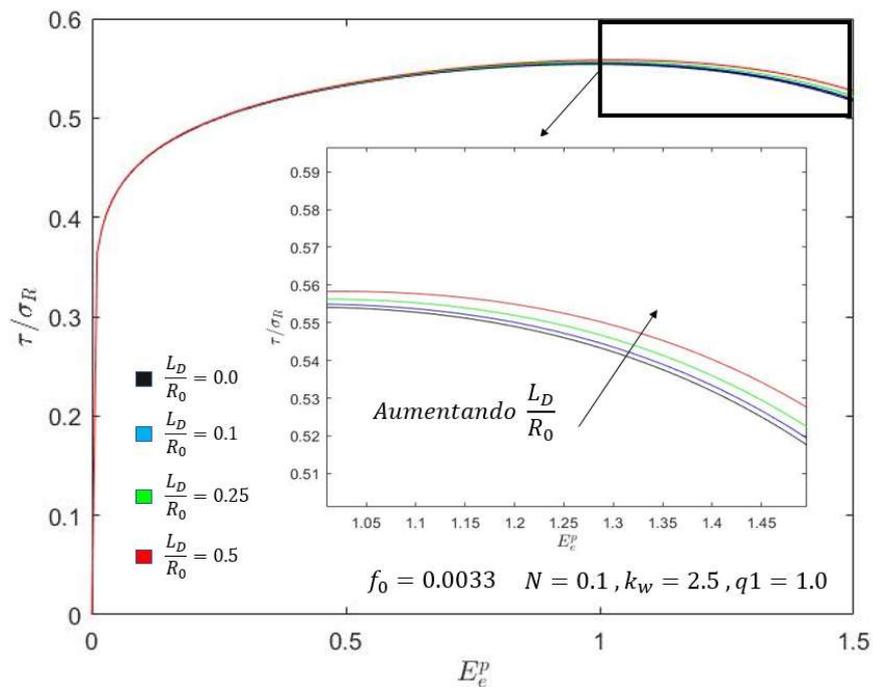


Figura 4.15 Curva de comportamiento del material obtenidas para $f_0 = 0.0033$ y varios valores de L_D/R_0 característicos.

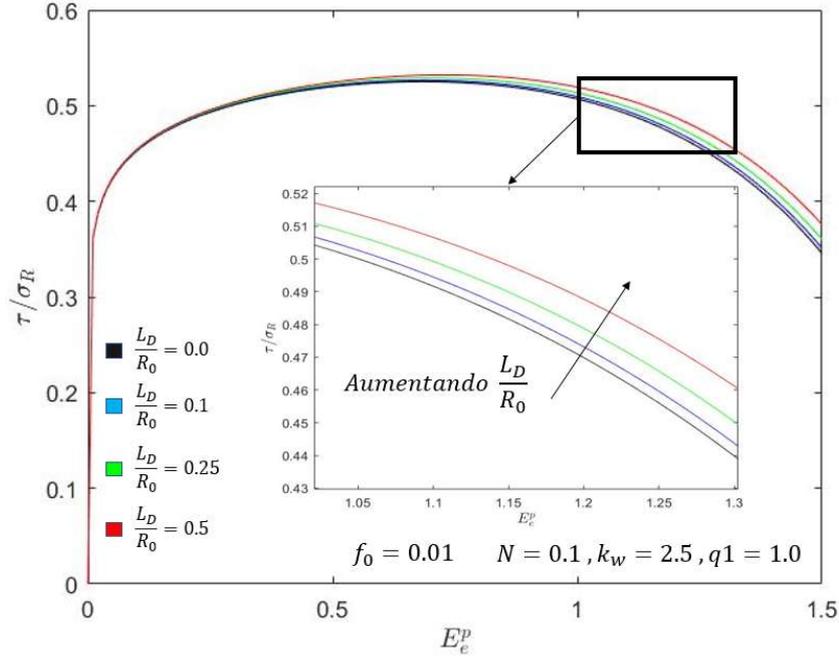


Figura 4.16 Curva de comportamiento del material obtenidas para $f_0 = 0.01$ y varios valores de L_D/R_0 característicos.

4.4.1 Calibración del parámetro k_w en el marco de la teoría Strain Gradient Plasticity

Tal y como se puede observar en las gráficas del apartado anterior, todos los resultados dependen del parámetro k_w . Dicho parámetro es un escalar representativo del crecimiento de la porosidad en estados de cortadura y su proceso de calibración en el marco de la teoría de la plasticidad convencional fue realizado por (Nahshon and Hutchinson, 2008). Nahshon y Hutchinson propusieron un método analítico para obtener la magnitud de k_w y en dicho proceso concluyeron que $1 \leq k_w \leq 3$. En este apartado, se propone una calibración de este parámetro bajo las hipótesis de la teoría Strain Gradient Plasticity.

Partiendo de las ecuaciones (4.128) y (4.146) se obtienen curvas del comportamiento del material tal y como se mostró en el apartado anterior. Teniendo en cuenta que:

$$\dot{f} = k_w f \dot{\varepsilon}_e^p \quad (4.147)$$

si se resuelve la anterior ecuación diferencial teniendo como condiciones de contorno que $f = f_0 \rightarrow f_c$ se obtiene:

$$\ln\left(\frac{f_c}{f_0}\right) = k_w (\varepsilon_e^p)_c \quad (4.148)$$

Siendo $(\varepsilon_e^p)_c$ el valor de la deformación plástica en el momento en el que comienza la caída de carga en el material y f_c el valor de porosidad en ese mismo instante. Dichos valores se denominan deformación plástica equivalente crítica y porosidad crítica.

Teniendo en cuenta la hipótesis anterior, $(\varepsilon_e^p)_c$ y f_c se obtendrán en el momento en el que la tensión de cortadura alcanza su valor máximo. Este momento se expresará de la siguiente forma:

$$\frac{d\tau}{d\varepsilon_e^p} = 0 \rightarrow f = f_c \cap \varepsilon_e^p = (\varepsilon_e^p)_c \quad (4.148)$$

Teniendo en cuenta que $\tau = \phi(f) \cap f = \phi(\varepsilon_e^p)$ entonces:

$$\frac{d\tau}{d\varepsilon_e^p} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_e^p} = 0 \quad (4.149)$$

De esta forma y considerando $\dot{Q}_1 \approx 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - 2Q_1q_1 + 2Q_1^2q_1^2f}{W(f, L_D/R_0)} \left[\int_{f_0}^{f_c} \frac{W(\xi, L_D/R_0)}{k_w \xi(1-\xi)} d\xi \right]^N + \\ & + W(f, L_D/R_0) N \left[\int_{f_0}^{f_c} \frac{W(\xi, L_D/R_0)}{k_w \xi(1-\xi)} d\xi \right]^{N-1} \frac{W(\xi, L_D/R_0)}{k_w \xi(1-\xi)} = 0 \end{aligned} \quad (4.150)$$

Reordenando y considerando $\xi = f$ fuera de la integral, se obtiene que:

$$\frac{NW^3(f, L_D/R_0)}{f(1-f)} = 2Q_1q_1(1 - Q_1q_1f) \int_{f_0}^{f_c} \frac{W(\xi, L_D/R_0)}{k_w \xi(1-\xi)} d\xi \quad (4.151)$$

Despejando el coeficiente de endurecimiento del material obtenemos:

$$N = \frac{2Q_1q_1(1 - Q_1q_1f)}{W^3(f, L_D/R_0)} f(1-f) \int_{f_0}^{f_c} \frac{W(\xi, L_D/R_0)}{k_w \xi(1-\xi)} d\xi \quad (4.152)$$

Llegados a este punto, el método de resolución que se propone para la ecuación (4.152) será obtener la relación entre f_c y f_0 para un N constante. Resolviendo numéricamente mediante MATLAB, para una relación $L_D/R_0 = 0$, es decir, en plasticidad convencional, obtenemos los resultados mostrados en la [Figura 4.17](#). Los valores obtenidos son exactamente los mismos que los obtenidos por (Nahshon and Hutchinson, 2008), se concluye por tanto que el método numérico de utilizado es eficiente. Cabe destacar que en esta calibración bastará con tomar un valor de N cualquiera, pues para cada material existirá una calibración de k_w . Mostrando las curvas para $N = 0.1$ y $N = 0.2$, será suficiente para observar el efecto de la relación L_D/R_0 en nuestro modelo. En la [Figura 4.18](#) se representan las curvas para valores $N = 0.1$ y $N = 0.2$ constantes.

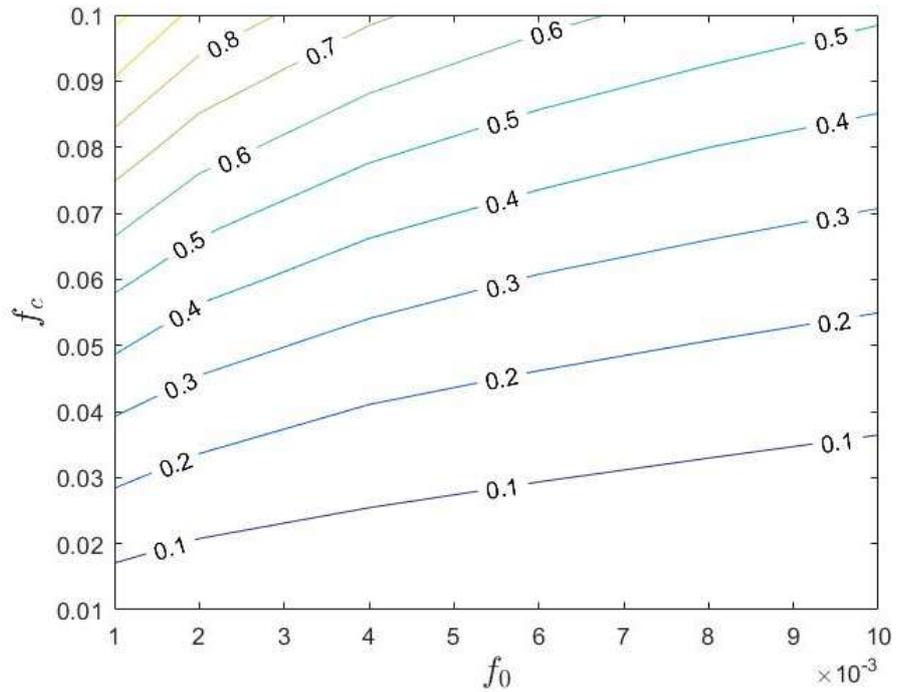


Figura 4.17 Relación entre f_c y f_0 para varios coeficientes de endurecimiento del material con un $L_D/R_0 = 0$.

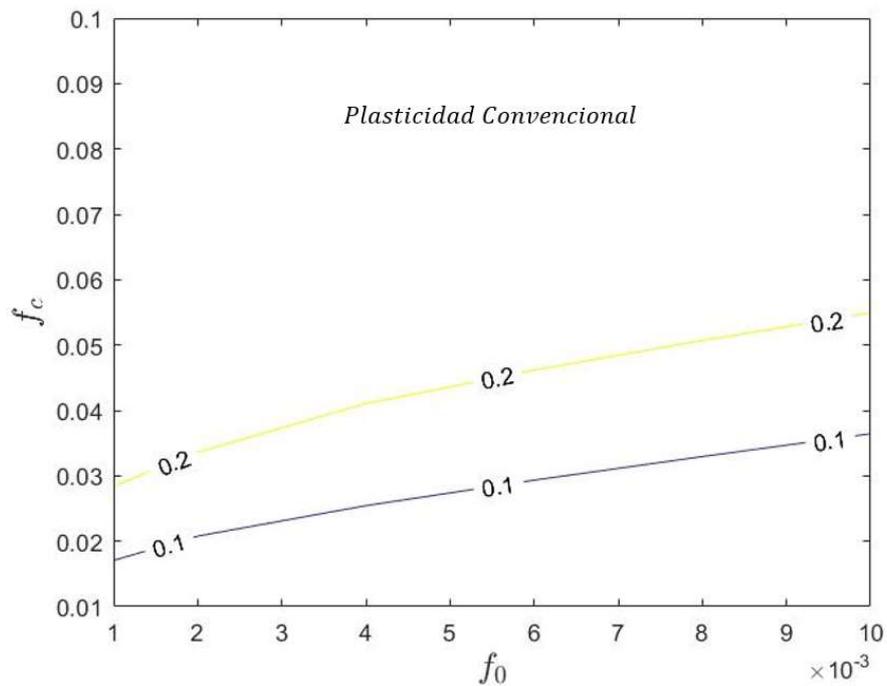


Figura 4.18 Relación entre f_c y f_0 para $N = 0.1$ y $N = 0.2$ con $L_D/R_0 = 0$.

Al incorporar el efecto de tamaño a nuestro modelo, es decir, haciendo efectivas las hipótesis de la teoría SGP, se obtienen los siguientes resultados:

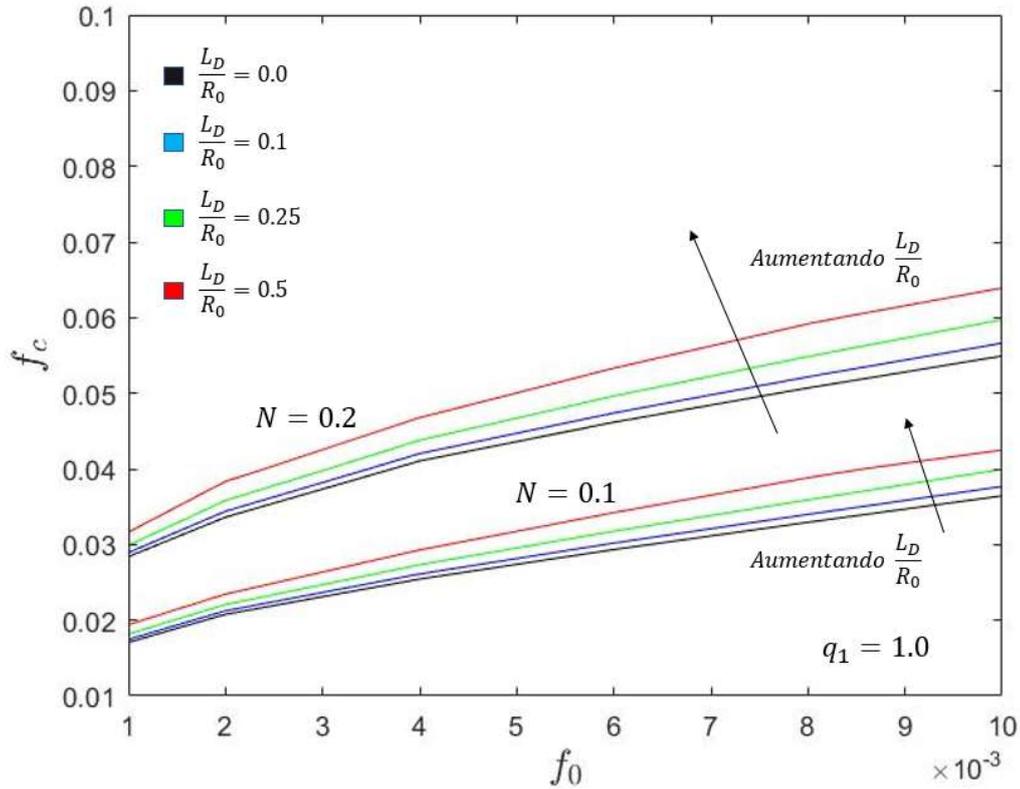


Figura 4.19 Relaciones obtenidas entre f_c y f_0 para $N = 0.1$ y $N = 0.2$ y varios valores de L_D/R_0 característicos.

De la Figura 4.19, se deduce que al aumentar L_D/R_0 , es decir, al aumentar el efecto de tamaño en nuestro modelo, para un f_0 conocido y un N conocido, la porosidad crítica de nuestro material aumenta al hacerlo L_D/R_0 . Este resultado es coherente, pues al aumentar el efecto de tamaño en nuestro material, la caída de carga tardará más en producirse, es decir, el material será más resistente y, por lo tanto, f tardará más tiempo en alcanzar su valor crítico f_c .

Una vez llegados a este punto se tratará de calcular la expresión de $(\epsilon_e^p)_c = \phi(f_0)$. Es obvio que al aumentar la porosidad inicial del material nuestra deformación plástica crítica se reduce. Por lo tanto, calculando en que momento de deformación plástica equivalente, τ alcanza su valor máximo para varios valores de f_0 podremos calcular la expresión $(\epsilon_e^p)_c = \phi(f_0)$. Para un $(L_D/R_0) = 0$, en la Figura 4.20 se muestran las curvas de comportamiento del material en el marco de la teoría de la plasticidad convencional y a partir de esas curvas localizando el máximo valor de τ obtendremos $(\epsilon_e^p)_c$ para un f_0 prescrito. En la Figura 4.21 se obtiene la curva $(\epsilon_e^p)_c = \phi(f_0)$ para plasticidad convencional.

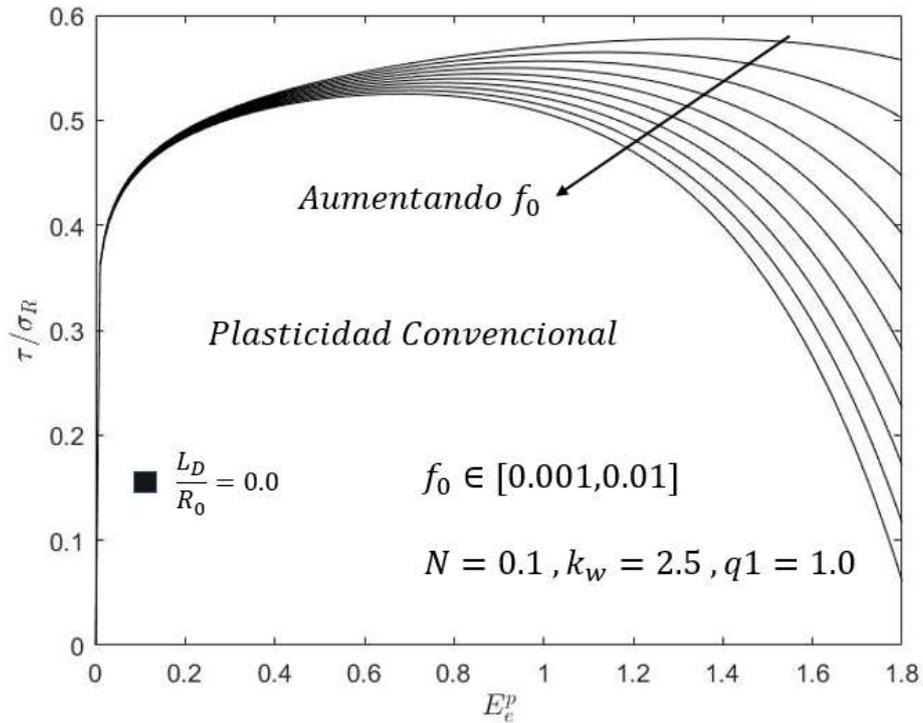


Figura 4.20 Curvas de comportamiento de material para un $f_0 \in [0.001, 0.01]$.

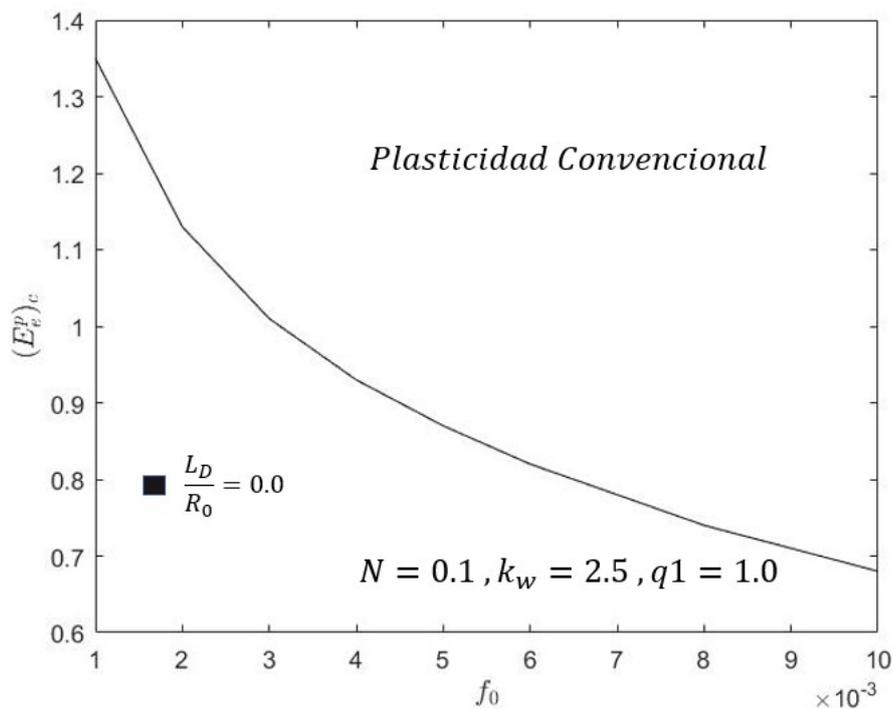


Figura 4.21 Curva $(\varepsilon_e^p)_c = \phi(f_0)$ en plasticidad convencional $L_D = 0.0$

Incorporando el efecto de tamaño en nuestro modelo se obtienen los siguientes resultados para la curva $(\varepsilon_e^p)_c = \phi(\frac{L_D}{R_0}, f_0)$:

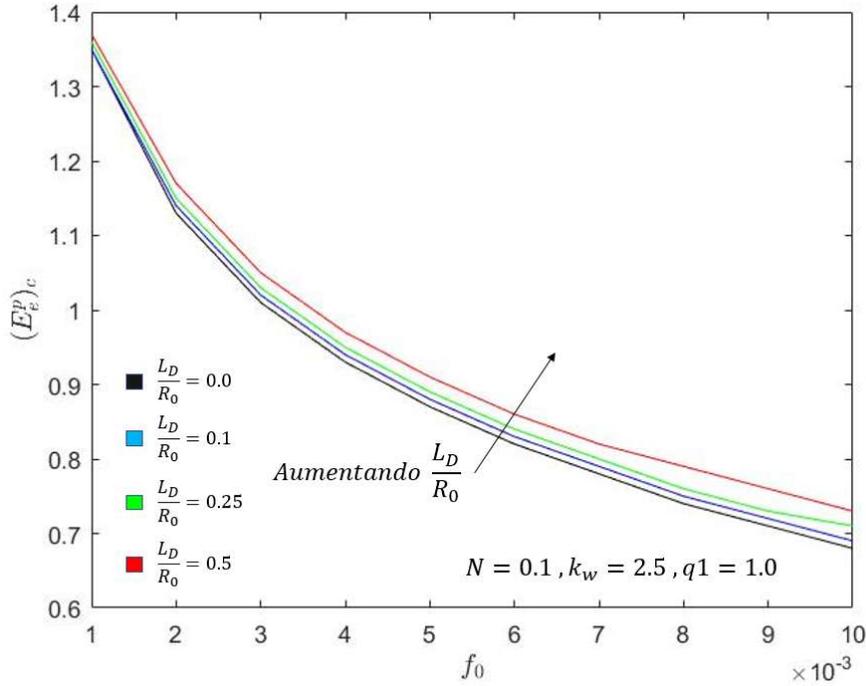


Figura 4.22 Curvas $(\varepsilon_e^p)_c = \phi(f_0)$ para diferentes valores característicos de L_D/R_0 .

Con el objetivo final de estudiar la dependencia del parámetro k_w del efecto de tamaño del material, se acudirá a la ecuación (4.148), donde considerando los cálculos de la Figura 4.22 y la Figura 4.19 se llega a la conclusión de que $k_w = \phi\left(\frac{L_D}{R_0}, f_0\right)$, del siguiente modo:

$$k_w\left(\frac{L_D}{R_0}, f_0\right) = \frac{1}{(\varepsilon_e^p)_c\left(\frac{L_D}{R_0}, f_0\right)} \ln\left(\frac{f_c\left(\frac{L_D}{R_0}, f_0\right)}{f_0}\right) \quad (4.153)$$

Acotando f_0 en un intervalo característico para la mayoría de los metales, tal que $f_0 \in [0.001, 0.01]$, se podrá ajustar k_w a una curva cuyos puntos de interpolación se obtendrán a partir de $(\varepsilon_e^p)_c$ y f_c , para cada pareja de valores de $(L_D/R_0, f_0)$ mediante la ecuación (4.153). En la Figura 4.23 se pueden obtener los puntos obtenidos para diferentes parámetros de escala. Por otra parte, en la Figura 4.24, se muestra el polinomio de interpolación que representa el valor de k_w en función de L_D/R_0 .

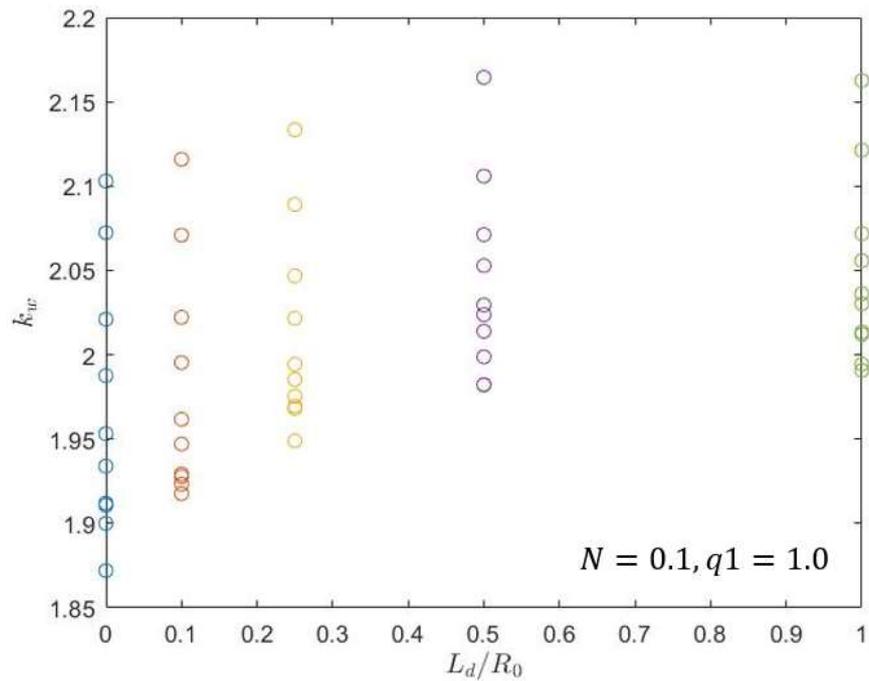


Figura 4.23 Valores de k_w en función de L_D/R_0 . Donde manteniendo L_D/R_0 constante se obtienen una serie de puntos para cada f_0 . Siendo $f_0 \in [0.001, 0.01]$.

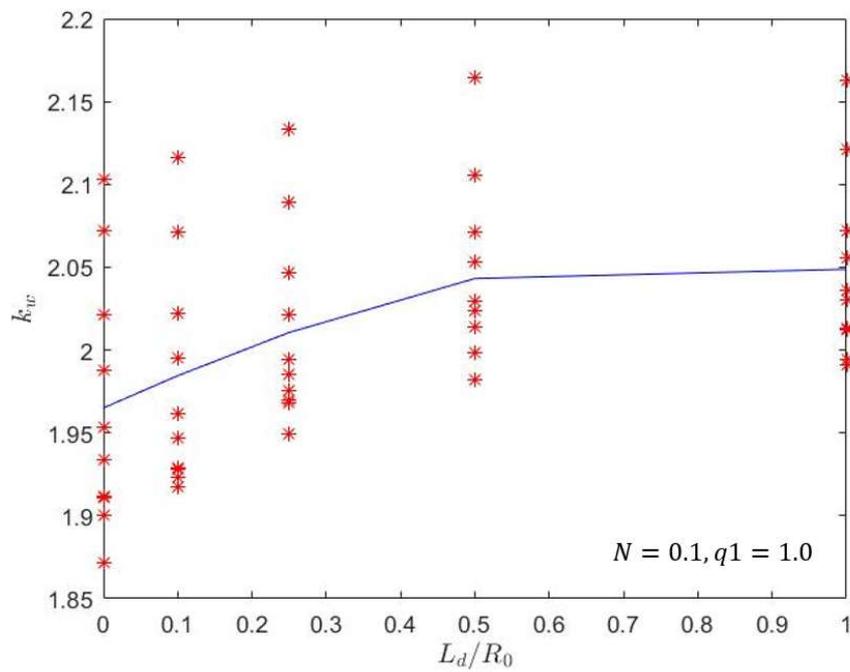


Figura 4.24 Polinomio de interpolación (línea azul) del parámetro k_w .

Obteniendo la ecuación del polinomio de interpolación, podemos obtener las ecuaciones constitutivas de nuestro de modelo. El valor de k_w será:

$$k_w \approx k_{w0} + 0.2 \left(\frac{L_D}{R_0} \right) - 0.06 \left(\frac{L_D}{R_0} \right)^2 - 0.05 \left(\frac{L_D}{R_0} \right)^3 \quad (4.154)$$

Donde k_{w0} , será el valor obtenido mediante plasticidad convencional $(L_D/R_0) = 0$, que tal y como demostraron (Nahshon and Hutchinson, 2008) $1 \leq k_{w0} \leq 3$. En nuestro modelo, para un $(L_D/R_0) = 0$, obtenemos $k_{w0} \approx 2.0$, un valor muy lógico y acorde con (Nahshon and Hutchinson, 2008).

Así pues, el crecimiento de porosidad en nuestro modelo se podrá reescribir de la siguiente manera:

$$df = (1 - f)d\varepsilon^p : \mathbf{I} + \phi \left(\frac{L_D}{R_0} \right) f \omega(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\mathbf{s} : d\varepsilon^p}{\sigma_e} \quad (4.155)$$

Donde ϕ , representa la contribución del Strain Gradient Plasticity al crecimiento de la porosidad en estados de cortadura y se define como:

$$\phi \left(\frac{L_D}{R_0} \right) \approx k_{w0} + 0.2 \left(\frac{L_D}{R_0} \right) - 0.06 \left(\frac{L_D}{R_0} \right)^2 - 0.05 \left(\frac{L_D}{R_0} \right)^3 \quad (4.156)$$

Donde si hacemos $(L_D/R_0) = 0$, entonces:

$$\phi \left(\frac{L_D}{R_0} \right) \approx k_{w0} \quad (4.157)$$

y por lo tanto, las ecuaciones constitutivas de nuestro modelo serían exactamente las mismas que el modelo de Gurson propuesto por (Nahshon and Hutchinson, 2008).

4.4.2 Resultados de la implementación de un nuevo modelo de Gurson incorporando Strain Gradient Plasticity para el fallo por cortadura

A continuación, en la Figura 4.25 y en la se pueden observar los resultados obtenidos de la implementación de un nuevo del modelo de Gurson que incorpora Strain Gradient Plasticity, y que además tiene en cuenta el fallo por cortadura, para un estado tensional propio de procesos de micromecanizado, donde las tensiones de cortadura son dominantes, es decir, $T = 2/3$ y $L = 0$. Estos dos parámetros característicos del estado tensional, se controlan en la simulación mediante el método de control en carga explicado en el apartado anterior. El acero utilizado tiene las siguientes propiedades mecánicas: $E = 200000 \text{ MPa}$, $N = 0.1$, $\nu = 0.3$ y $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$.

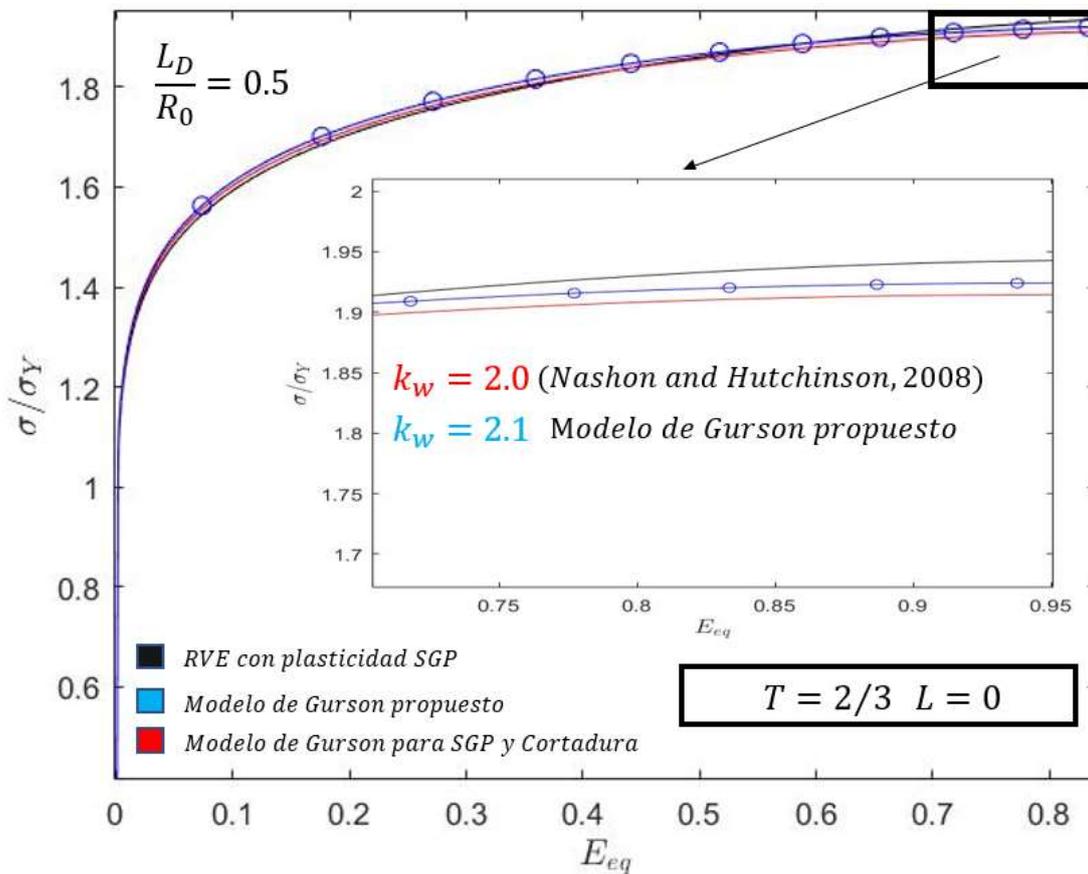


Figura 4.25 Comparativa entre la evolución de la tensión normalizada en el modelo RVE con plasticidad SGP, en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP y fallo por cortadura, y el nuevo modelo de Gurson propuesto para un $L_D/R_0 = 0.5$.

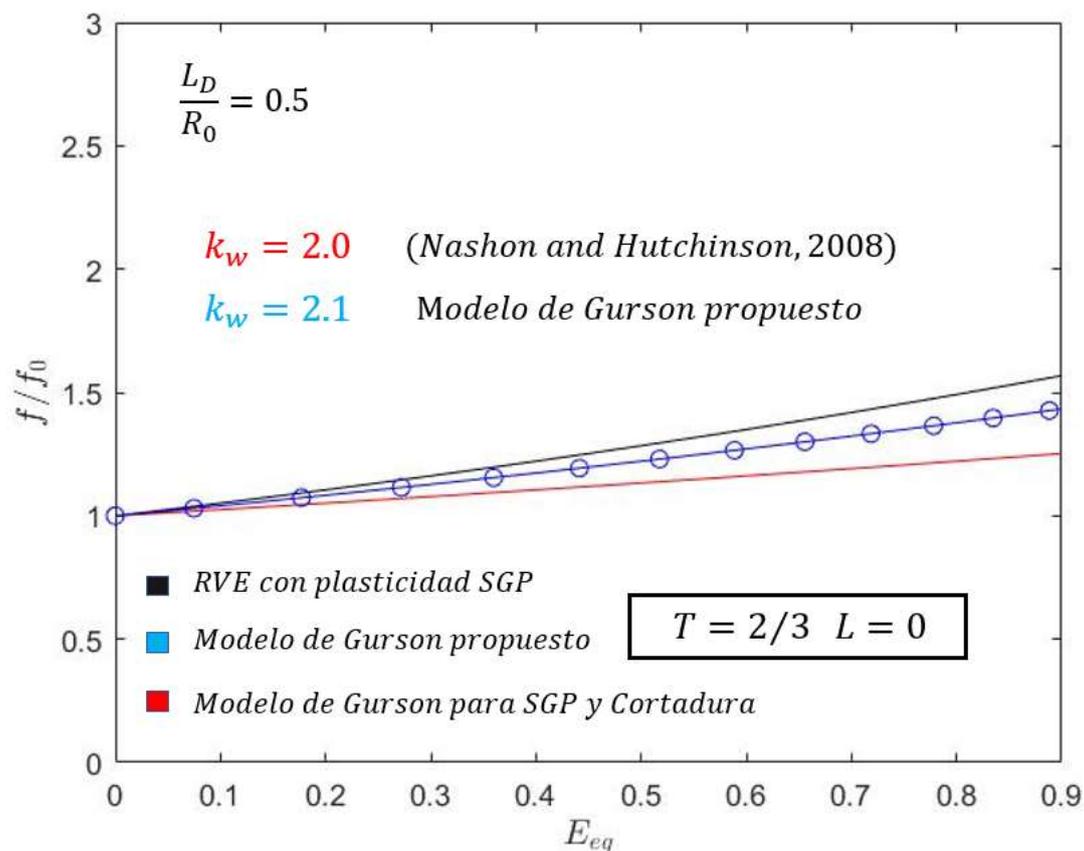


Figura 4.26 Comparativa entre la evolución de la porosidad en el modelo RVE con plasticidad SGP, en el modelo RVE con el modelo de Gurson que incorpora SGP y fallo por cortadura, y el nuevo modelo de Gurson propuesto para un $L_D/R_0 = 0.5$.

Observando los resultados obtenidos se concluye que el nuevo modelo de Gurson propuesto en este TFM es eficiente, pues se obtienen resultados más próximos a los calculados desde un RVE que incorpora SGP. El factor $\phi(L_D/R_0)$ explicado en el apartado anterior, hace que para $L_D/R_0 \neq 0$, es decir, en el marco de la teoría del Strain Gradient Plasticity, el factor k_w que propusieron (Nashon and Hutchinson, 2008) pase de ser $k_w = 2.0$ a valer $k_w = 2.1$, lo cual, tal y como se ven en los resultados, nos acercan al valor real de la porosidad y de las tensiones en un material metálico, que serían los valores obtenidos desde un RVE con plasticidad SGP.

Capítulo 5

5. Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se presenta una breve recopilación de las conclusiones obtenidas durante la realización del presente documento. Asimismo, se proponen diferentes líneas de trabajo futuro con el objetivo de continuar la investigación desarrollada en este Trabajo de fin de Máster.

5.1 Conclusiones

De acuerdo con los objetivos presentados en el Capítulo 1, se ha realizado un estudio del proceso de fractura dúctil en materiales metálicos dentro de la teoría Strain Gradient Plasticity, analizando los factores que pueden influir en el proceso y mejorando los modelos constitutivos existentes, proponiendo en última instancia un nuevo modelo de Gurson mejorado, capaz de predecir el fallo de materiales metálicos en procesos de micromecanizado. Las conclusiones más relevantes de este trabajo son las siguientes:

- Se ha implementado en una subrutina UMAT del programa comercial de elementos finitos ABAQUS una formulación de la teoría Strain Gradient Plasticity, denominada CMSG. Dicha formulación se ha implementado en tres dimensiones obteniendo resultados satisfactorios a la hora de predecir el fallo de microcomponentes reales simulados en ABAQUS.
- Se han implementado dos métodos de control del estado tensional para poder realizar simulaciones reales en ABAQUS. Dichos métodos fueron implementados en subrutinas MPC del programa comercial de elementos finitos ABAQUS, obteniendo resultados eficientes a la hora de controlar el parámetro de Lode y la Triaxialidad en modelos representativos de volumen.
- Se ha observado como el modelo de Gurson original es incapaz de predecir con eficiencia el crecimiento de la porosidad en estados tensionales representativos de procesos de micromecanizado, calculando siempre menos crecimiento de la porosidad que la real.

- Se ha concluido que la implementación en una subrutina UMAT del programa comercial de elementos finitos ABAQUS de la extensión del modelo de Gurson propuesta por (Nahshon and Hutchinson, 2008) es eficiente, obteniendo resultados coherentes con sus estudios para estados tensionales representativos de procesos de micromecanizado. Se comprobó mediante simulaciones en ABAQUS que dicho modelo predice un crecimiento de la porosidad más aproximado al valor real.
- Se ha implementado en una subrutina UMAT del programa comercial de elementos finitos ABAQUS la extensión del modelo de Gurson propuesta por (Niordson and Tvergaard, 2019) obteniendo resultados eficientes en su implementación. Dicho modelo incorpora en sus ecuaciones constitutivas la teoría SGP y se comprobó mediante simulaciones en ABAQUS que es capaz de simular de manera eficiente el efecto de tamaño de los materiales metálicos, comprobando que al aumentar el efecto de tamaño, los metales se vuelven más resistentes y su porosidad crece de una manera más lenta.
- Finalmente, se ha propuesto una nueva extensión del modelo de Gurson, acoplando los modelos propuestos por (Nahshon and Hutchinson, 2008) y (Niordson and Tvergaard, 2019). Además, se comprobó mediante simulaciones en ABAQUS la eficiencia del mismo en estados tensionales representativos de procesos de micromecanizado.

5.2 Trabajos futuros

A continuación, se presentan los diferentes trabajos futuros y posibles líneas de investigación que se podrían abordar como continuación del presente TFM:

- Actualmente se está trabajando en la redacción de un artículo que recoja los estudios realizados en este TFM para ser publicado en una revista indexada JCR.
- Simular en ABAQUS un proceso real de micromecanizado de un material metálico cuyo comportamiento esté gobernado por el nuevo modelo de Gurson propuesto en el presente TFM.
- Utilizar leyes de comportamiento plástico del material que tengan dependencia de la velocidad de deformación, extendiendo la función de plastificación del nuevo modelo de Gurson propuesto en el presente documento, a leyes de comportamiento del material dependientes de la velocidad de deformación.
- Investigar nuevas teorías sobre la plasticidad en los materiales metálicos utilizando modelos phase-field. Dichos modelos serán capaces de obtener resultados eficientes del comportamiento del metal con un menor coste computacional.

Bibliografía

Bryhni Dæhli, L.E. *et al.* (2017) “Unit cell simulations and porous plasticity modelling for strongly anisotropic FCC metals,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 65, pp. 360–383. doi:10.1016/j.euromechsol.2017.05.004.

Dæhli, L.E. *et al.* (2018) “A Lode-dependent Gurson model motivated by unit cell analyses,” *Engineering Fracture Mechanics*, 190, pp. 299–318. doi:10.1016/j.engfracmech.2017.12.023.

Faleskog, J., Gao, X. and Fong Shih, C. (1998) *Cell model for nonlinear fracture analysis-I. Micromechanics calibration, International Journal of Fracture*.

Fleck, N.A. *et al.* (1994) *STRAIN GRADIENT PLASTICITY: THEORY AND EXPERIMENT, Acta metall, mater.*

Gao A\, H.[*et al.* (1999) *Mechanism!based strain gradient plasticity* I[Theory, Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.

Gao, H. and Huang, Y. (2002) *Geometrically necessary dislocation and size-dependent plasticity*. Available at: www.actamat-journals.com.

Holte, I. *et al.* (2019) “Investigation of a gradient enriched Gurson-Tvergaard model for porous strain hardening materials,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 75, pp. 472–484. doi:10.1016/j.euromechsol.2019.03.001.

Huang, Y. *et al.* (2004) “A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity,” *International Journal of Plasticity*, 20(4–5), pp. 753–782. doi:10.1016/j.ijplas.2003.08.002.

Madeo, A. *et al.* (2016) “A new view on boundary conditions in the Grioli-Koiter-Mindlin-Toupin indeterminate couple stress model,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 59, pp. 294–322. doi:10.1016/j.euromechsol.2016.02.009.

Martínez-Pañeda, E. (2015) *ABAQUS implementation of the conventional mechanism-based strain gradient plasticity theory, International Journal of Solids and Structures*.

Bibliografía

Martínez-Pañeda, E. (2019) *ABAQUS implementation of isotropic power-law hardening plasticity*, *European Journal of Mechanics-A/Solids*.

Nahshon, K. and Hutchinson, J.W. (2008) “Modification of the Gurson Model for shear failure,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 27(1), pp. 1–17. doi:10.1016/j.euromechsol.2007.08.002.

Niordson, C.F. and Tvergaard, V. (2019) “A homogenized model for size-effects in porous metals,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 123, pp. 222–233. doi:10.1016/j.jmps.2018.09.004.

Tekoğlu, C.T. (2014) *Representative Volume Element Calculations under Constant Stress Triaxiality, Lode Parameter, and Shear Ratio*.

Vadillo, G., Reboul, J. and Fernández-Sáez, J. (2016) “A modified Gurson model to account for the influence of the Lode parameter at high triaxialities,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 56, pp. 31–44. doi:10.1016/j.euromechsol.2015.09.010.

Zhang, Z.L. (2001) *A complete Gurson Model*.